Seminar 4

25.10.2021

1. Fie M o mulțime și $A, B \subseteq M$. Def. $f: \mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$, $f(X) = (X \cap A, X \cap B)$

Arătați că:

1. f e inj $\iff A \cup B = M$
2. f e surj $\iff A \cap B = \emptyset$
3. f e bij $\iff A = \complement_M B$. În acest caz, aflați inversa lui f.

evident din 1 și 2

Dem 1 "$\Rightarrow$" Știm că f e inj.

Pp. abs. că $A \cup B \subsetneq M \Rightarrow (\exists) x \in M$ și $x \notin A \cup B$

$X = \{x\} \subseteq M$

$$f(X) = (X \cap A, X \cap B) = (\{x\} \cap A, \{x\} \cap B) = (\emptyset, \emptyset)$$

$$\parallel$$

$\emptyset \subseteq M$

$$f(\emptyset) = (\emptyset \cap A, \emptyset \cap B) = (\emptyset, \emptyset)$$

$\Rightarrow$ f nu e inj $\lightning$ $\Rightarrow$ Pp. făcută e falsă $\Rightarrow A \cup B = M$.

"$\Leftarrow$" Știm că $A \cup B = M$.

Fie $X, Y \subseteq M$ a.î. $f(X) = f(Y)$

$$\underset{(X \cap A, X \cap B)}{f(X)} = \underset{(Y \cap A, Y \cap B)}{f(Y)} \Rightarrow \begin{cases} X \cap A = Y \cap A \\ X \cap B = Y \cap B \end{cases}$$

$$(X \cap A) \cup (X \cap B) = X \cap (A \cup B) = X \cap M \overset{X \subseteq M}{=} X$$

$$\parallel$$

$$(Y \cap A) \cup (Y \cap B) = Y \cap (A \cup B) = Y \cap M \underset{Y \subseteq M}{=} Y$$

$\Rightarrow X = Y$

$\Rightarrow f$ e injectivă

2. "$\Rightarrow$" Știm că f e surjectivă.

Pp. red. la absurd că $A \cap B \neq \emptyset \Rightarrow (\exists)$ $\boxed{x \in A \cap B.}$ $(*)$

Ca să arătăm că f nu e surjectivă trebuie să găsim un element $(C,D) \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$ a.î. $f(X) \neq (C,D)$

$(\forall)\ X \in \mathcal{P}(M)$ $(\Leftrightarrow X \subseteq M)$.

Considerăm $(\underbrace{\{x\}}_{C}, \underbrace{B \setminus \{x\}}_{D}) \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$.

Cum f e surjectivă $\Rightarrow (\exists)\ X \in \mathcal{P}(M)$ a.î.

$$\underbrace{f(X)}_{(X\cap A,\, X \cap B)} = (\{x\}, B \setminus \{x\}) \Rightarrow \begin{cases} X \cap A = \{x\} & (1) \\ X \cap B = B \setminus \{x\} & (2) \end{cases}$$

Dim (1) $\Rightarrow x \in X$.

Dim $(*) \Rightarrow x \in B$

$\Rightarrow x \in X \cap B \overset{(2)}{=} B \setminus \{x\}$ ✗

$\Rightarrow$ Pp făcută e falsă $\Rightarrow A \cap B = \emptyset$.

$\boxed{"\Leftarrow"}$ Știm că $A \cap B = \emptyset$. $(\square)$

Fie $(X,Y) \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \Rightarrow X \subseteq A,\ Y \subseteq B$. $(\circ)$

$$\underbrace{f(Z)}_{(Z\cap A,\, Z \cap B)} = (X, Y)$$

$Z \cap A = X \Rightarrow X \subseteq Z$

$Z \cap B = Y \Rightarrow Y \subseteq Z$

$\Rightarrow X \cup Y \subseteq Z$

$X, Y \subseteq M \Rightarrow X \cup Y \subseteq M$

$$f(X \cup Y) = ((X \cup Y) \cap A, (X \cup Y) \cap B) =$$

$$= ((X \cap A) \cup (Y \cap A), (X \cap B) \cup (Y \cap B)) =$$

$$\underset{(\circ)}{=} (X \cup (Y \cap A), (X \cap B) \cup Y) =$$

$$\underset{(\square)}{=} (X \cup \emptyset, \emptyset \cup Y) = (X, Y) \Rightarrow f \text{ e surj } \square$$

$A \cap B = \emptyset$

③ f e bij $\Leftrightarrow A = \complement_M B$ ($\Leftrightarrow$ ($A \cup B = M$ și $A \cap B = \emptyset$))

Funcția $g : \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \to \mathcal{P}(M)$ este fct. inversa lui f

$$g(X, Y) = X \cup Y$$

(Tb. arătat: $f \circ g = 1_{\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)}$, $g \circ f = 1_{\mathcal{P}(M)}$)

$$(f \circ g)(X, Y) = f(X \cup Y) \overset{A \cap B = \emptyset}{\underset{②}{=}} (X, Y) \quad (\forall)(X, Y) \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$$

$$(g \circ f)(Z) = g(f(Z)) = g(Z \cap A, Z \cap B) =$$

$$= (Z \cap A) \cup (Z \cap B) = Z \cap (A \cup B) \overset{A \cup B = M}{=}$$

$$= Z \cap M = Z \quad (\forall) Z \in \mathcal{P}(M)$$

$Z \subseteq M$

$|M| = m$, $|N| = n$.

Pb 2 Fie M, N 2 mulțimi finite cu $|M| = m$, $|N| = n$.

Calculați:

① $\#$ fct. definite pe M cu valori în N ($= |\{f \mid f : M \to N, f \text{ fct}\}|$)

② $|\{f \mid f : M \to N, f \text{ fct. injectivă}\}| = ?$

③ $|\{f \mid f : M \to N, f \text{ fct. surjectivă}\}| = ?$

④ $|\{f \mid f : M \to N, f \text{ fct. bijectivă}\}| = ?$

---

① n^m (Ind. după m) sau

Pp că $M = \{a_1, \dots, a_m\}$, $N = \{b_1, \dots, b_n\}$

$f(a_1)$: $b_1, b_2, \dots, b_n$; $f(a_2)$: $b_1, b_2, \dots, b_n$ ...

② f inj $\Rightarrow$ $\underset{m}{\overset{\shortparallel}{|M|}} = |f(M)| \le |N| = n$

f fct, $f(M) \subseteq N$

Prin urmare, dacă $n < m$ atunci $\# = 0$.

Dacă $\boxed{m \le n}$ $\Rightarrow \# = A_n^m$ (def. combinatorică a aranjamentelor

= nr. de submulțimi ordonate cu m elemente ale unei mulțimi cu n elemente)

$f(a_1)$, $f(a_2)$, $\vdots$, $f(a_m)$ $\neq$ 2 câte 2

$\Leftarrow$ $\{f(a_1), \dots, f(a_m)\}$ e o subm. cu m elem. a lui $\{b_1, \dots, b_n\}$

④ f bijectivă $\Rightarrow |M| = |N|$, $|M| = m$, $|N| = n$

Dacă $m \neq n \Rightarrow \# = 0$

Dacă $m = n \Rightarrow \# = n!$

③ f surj $\Rightarrow |M| \geq |N|$, $|M| = m$, $|N| = n$

$\boxed{|T| = n^m}$

Dacă $m < n \Rightarrow \# = 0.$

Altfel, $m \geq n$. (aplic P.I.E)

$X = \{f \mid f: M \to N,\ f \text{ fct. surjectivă}\} \subseteq T = \{f \mid f: M \to N,\ f \text{ fct.}\}$

$T \setminus X = \{f \mid f: M \to N,\ f \text{ fct. } \underbrace{\text{nesurj}}_{\text{nu e surjectivă}}\}$

$|X| = \underbrace{|T|}_{n^m} - \underbrace{|T \setminus X|}_{*}$ (!)

f nesurjectivă $\overset{def}{\Longrightarrow} \operatorname{Im} f \subsetneq N \Rightarrow (\exists)\, b \in N$ a.î. $b \notin \operatorname{Im} f$

$\Downarrow$

$(\exists)\, b \in N$ a.î. $b \neq f(a)\ (\forall) a \in M$

$N = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$. Notez cu $A_i = \{f \mid f: M \to N,\ f \text{ funcție a.î. } b_i \notin \operatorname{Im} f\}$, $i = \overline{1,n}$

$f: M \to N$ nu e surj $\Rightarrow (\exists)\, i = \overline{1,n}$ a.î. $f \in A_i \Rightarrow$

$\Rightarrow T \setminus X \overset{\subseteq}{\underset{\supseteq}{=}} \bigcup_{i=1}^{n} A_i$. Aplic P.I.E pt a calcula $|T \setminus X|$

$$|T \setminus X| = \left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| + \dots + (-1)^{n} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n|$$

$|A_i| \overset{①}{=} (n-1)^m\ (\forall)\ i = \overline{1,n}$

$A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k} = \{f \mid f: M \to N \text{ f funcție a.î. } \operatorname{Im}(f) \subseteq N \setminus \{b_{i_1}, \dots, b_{i_k}\}\}$

$1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n\ (\forall)\ k = \overline{1,n}$ $|A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}| = (n-k)^m\ (\forall)\ 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n.$

$\left(|A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n| = 0 \right)$

$$|T \setminus X| = C_m^1 (m-1)^m - C_m^2 (m-2)^m + \dots + (-1)^{m-1} C_m^{m-1} 1^m \Rightarrow$$

înlocuind în (!) $\Rightarrow |X| = m^m - C_m^1 (m-1)^m + C_m^2 (m-2)^m - \dots + (-1)^m C_m^{m-1}$

$\boxed{\text{Prb 3}}$ Fie $f: A \to B$ o funcție. Să se arate că:

① f e surj $\underset{\Leftarrow \text{ evid}}{\Longleftrightarrow} (\exists)\, g: B \to A$ a.î. $f \circ g = 1_B$

TEMA ② f e inj $\underset{\Leftarrow \text{ evid}}{\Longleftrightarrow} (\exists)\, h: B \to A$ a.î. $h \circ f = 1_A$.

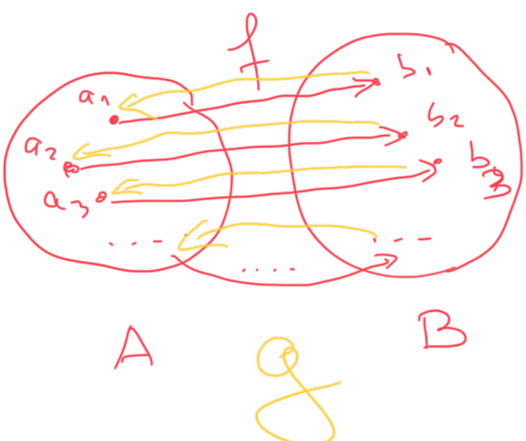
Obs Dacă f e surj $\overset{C_3}{\Longrightarrow} |B| \leq |A|$ (folosind ① $\Rightarrow (\exists)\, g: B \to A$ a.î. $f \circ g = 1_B \underset{C_2}{\Longrightarrow}$ $\underline{g \text{ inj}}$ (și f surj) $\underset{g: B \to A}{\Longrightarrow} |B| \leq |A|$ ☒)

---

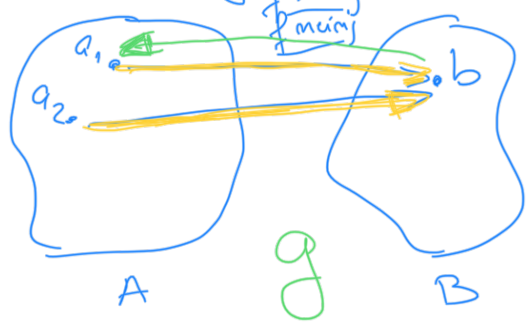
① $\boxed{\text{"}\Rightarrow\text{"}}$ Știm că f e surj

Cum construiesc g?

Cazul 1 $\underline{f \text{ bij}}$



Cazul 2 f nebij (în cazul nostru f surj, f neinj)



$g: B \to A$

Pt fiecare $b \in B$ alegem un element $a_b \in f^{-1}(\{b\})$

preimaginea prin f a $\{b\}$

Definim $g: B \to A$
$g(b) = a_b \; (\forall)\, b \in B$.

$(f \circ g)(b) = f(g(b)) = f(a_b) = b \; (\forall)\, b \in B \Rightarrow$

$f \circ g = 1_B$.