Seminar 1

6.10.

daniel.bulacu@unibuc.ro
↳ pt teme !!!

$A = \{3n-2 \mid n \in \mathbb{N}\}$, $B = \{1003 - 2m \mid m \in \mathbb{N}\}$

$A \cap B = ?$

$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A, x \in B \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3n-2 \\ x = 1003-2m \end{cases} \Rightarrow 3n-2 = 1003-2m \Rightarrow 3n+2m = 1005$

$*$ Obs: $\left.\begin{matrix} 3 \mid 3n \\ 3 \mid 1005 \end{matrix}\right| \Rightarrow 3 \mid 2m \Rightarrow 3 \mid m \Rightarrow m = 3m', \ m' \in \mathbb{Z}$

$3n + 6m' = 1005 \mid :3 \Rightarrow n + 2m' = 335 \Rightarrow 2m' \leq 335$

$\Leftrightarrow 0 \leq m' \leq 167$, $n = 335 - 2m'$

$A \cap B = \{1006 - 6m' \mid 0 \leq m' \leq 167\} \subset \mathbb{Z}$

$ax + by = c$, $a, b, c \in \mathbb{Z}^*$

Ecuația are soluții în $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \Leftrightarrow$ cel mai mare divizor comun între a și b, $(a,b) \mid c$.

→ $ax + by = c$
a, b, c — cunoscute

ecuație diofantică de gradul I

„$\Rightarrow$" Fie perechea $(x_0, y_0) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ soluție $\Leftrightarrow ax_0 + by_0 = c$

$\left.\begin{matrix} (a,b) \mid a \\ (a,b) \mid b \end{matrix}\right| \Rightarrow (a,b) \mid ax_0 + by_0 = c \Rightarrow (a,b) \mid c$

„$\Leftarrow$" $(a,b) \mid c$; not. $d = (a,b) \Rightarrow \begin{matrix} a = da' \\ b = db' \end{matrix}$, a', b' prime între ele $(a', b') = 1$

$d \mid c \Rightarrow c = dc'$, $c' \in \mathbb{Z}$

$ax + by = c \Leftrightarrow da' \cdot x + db' \cdot y = dc' \mid :d \Leftrightarrow a'x + b'y = c'$

$a'x + b'y = c'$

$(a', b') = 1 \Leftrightarrow \exists\, u, v \in \mathbb{Z}$ a.î. $ua' + vb' = 1 \mid \cdot c'$

$\Rightarrow a'uc' + b'vc' = c' \mid \cdot d$

$auc' + bvc' = c \Rightarrow (uc', vc')$ este sol. ecuației

$a, b \in \mathbb{Z} \quad |a| > |b| \neq 0$

$a = b q_1 + r_1 \Rightarrow r_1 = a - b q_1$

$b = r_1 q_2 + r_2 \qquad r_2 = b - r_1 q_2 = -a q_2 + b(1 + q_1 q_2)$

$r_1 = r_2 q_3 + r_4$

$\ldots$

$r_{n-2} = r_{n-1} q_n + r_n \qquad r_i = a\alpha_i + b\beta_i$

$r_{n-1} = r_n q_{n+1} + 0 \qquad \alpha_i, \beta_i \in \mathbb{Z}$

$0 \neq r_n = (a, b), \ r_{n+1} = 0 \qquad r_n = a\alpha_n + b\beta_n, \ \alpha_n, \beta_n \in \mathbb{Z}$

* c.m.m.d.c se poate scrie într-o combinație liniară de a și b.

proprietate $\rightarrow \boxed{d = (a, b) = r_n = a\alpha_n + b\beta_n}$

- $281x - 133y = 3$ Det. o sol. pt. această ecuație

$(281, 133) = ?$

$281 : 133 = 2 \text{ r } 15 \Rightarrow 15 = 281 - 2 \cdot 133$

$133 : 15 = 8 \text{ r } 13 \qquad 13 = 133 - 8 \cdot 15 = 133 - 8(281 - 2 \cdot 133) = -8 \cdot 281 + 17 \cdot 133$

$15 : 13 = 1 \text{ r } 2$

$13 : 2 = 6 \text{ r } 1 \qquad 2 = 15 - 13 \cdot 1 = 281 - 2 \cdot 133 + 8 \cdot 281 - 17 \cdot 133 = 9 \cdot 281 - 19 \cdot 133$

$2 : 1 = 2 \text{ r } 0 \qquad 1 = 13 - 6 \cdot 2 = -8 \cdot 281 + 17 \cdot 133 - 6(9 \cdot 281 - 19 \cdot 133)$

$\Rightarrow (281, 133) = 1 \mid 3 \Rightarrow$ ecuația are soluție $\qquad = -62 \cdot 281 + 131 \cdot 133$

$-62 \cdot 281 + 133 \cdot 131 = 1 \quad | \cdot 3$

$-186 \cdot 281 + (-393) \cdot (-133) = 3 \Rightarrow \boxed{x = -186, \ y = -393}$

- $281x - 133y = 3$ Rezolvați ecuația.

CAZ GENERAL: $ax + by = c, \quad a, b, c \in \mathbb{Z}^*$

$d = (a, b)$; $d \mid c \Rightarrow a = da', \ b = db', \ c = dc', \ (a', b') = 1$

$ax + by = c \Leftrightarrow a'x + b'y = c'$. Fie (x_0, y_0) sol particulară (știm că există)

Dacă (x, y) este altă soluție $\Rightarrow a'x_0 + b'y_0 = c' = a'x + b'y$

$a'(x_0 - x) = b'(y - y_0) \Rightarrow a' \mid b'(y - y_0)$, $(a', b') = 1 \Rightarrow a' \mid (y - y_0) \Rightarrow$

$\exists\, t \in \mathbb{Z}$ a.î. $(y - y_0) = a' \cdot t$

$a'(x_0-x) = b'(y-y_0) \Leftrightarrow \cancel{a'}(x_0-x) = \cancel{a'}b't$

$$\boxed{(x,y) = (x_0 - b't,\ y_0 + a't),\quad t \in \mathbb{Z}}$$

$281x - 133y = 3 \qquad x_0 = -186,\ y_0 = -393, \qquad d = 1 \Rightarrow a = a',\ b = b'$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -186 + 133t \\ y = -393 + 281t \end{cases},\ t \in \mathbb{Z}$$ (soluția generală a ecuației)

- $A = \{3n-2 \mid n \in \mathbb{Z}\},\ B = \{1003 - 2m \mid m \in \mathbb{Z}\}$ // $A \cap B = ?$

$x \in A\cap B \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3n-2 \\ x = 1003-2m \end{cases},\ n, m \in \mathbb{Z} \Rightarrow 3n-2 = 1003-2m$

$\Leftrightarrow 3n + 2m = 1005$

$1 = 3-2 \mid \cdot 1005 \Leftrightarrow 3\cdot 1005 - 2\cdot 1005 = 1005$

$n_0 = 1005,\ m_0 = -1005$ – sol. particulară

$\begin{cases} n = n_0 - b't \\ m = m_0 + a't \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 1005 - 2t \\ m = -1005 + 3\cdot t \end{cases},\ t \in \mathbb{Z}$

$A \cap B = \{3(1005-2t) - 2 \mid t \in \mathbb{Z}\}$ $\qquad 3013 : 6 = 502$ r 1

$= \{-6t + 3013 \mid t \in \mathbb{Z}\}$

$= \{6t + 1 \mid t \in \mathbb{Z}\}$

- $A = \left\{x \in \mathbb{Q} \mid x = \frac{n^2+3}{n^2+n},\ n \in \{1, \dots 50\}\right\}$ $\quad$ card $A = ?$ ← vrem să ved. dacă f. e injectivă!

Fie $n, m \in \{1, \dots, 50\},\ n \neq m$ a.î. $\frac{n^2+3}{n^2+n} = \frac{m^2+3}{m^2+m}$

$(n^2+3)(m^2+m) = (m^2+3)(n^2+n)$

$\cancel{n^2m^2} + n^2m + 3m^2 + 3m = \cancel{m^2n^2} + m^2n + 3n^2 + 3n$

$mn(n-m) + 3(m-n)(m+n) + 3(m-n) = 0$

$(n-m)(-mn + 3(m+n) + 3) = 0$

$m \neq n \Rightarrow -mn + 3m + 3n + 3 = 0 \Rightarrow n(3-m) = -3(m+1)$

$\Rightarrow n = \frac{-3(m+1)}{3-m}$

$\Leftrightarrow n(m-3) - 3(m-3) = 12 \Rightarrow (n-3)(m-3) = 12$

$\Rightarrow$ 3 perechi de nr. care se repetă

card $A = 50 - 3 = 47$

$\rightarrow n = 4;\ m = 15 \qquad \rightarrow n = 6;\ m = 7 \qquad \rightarrow n = 9;\ m = 5$

$\rightarrow n = 5;\ m = 9 \qquad \rightarrow n = 7;\ m = 6 \qquad \rightarrow n = 15;\ m = 4$

Seminar 2

13.10.2022

Relații

O relație este un triplet $\alpha = (A, B, \rho)$ unde $\langle$ A, B mulțimi (... ; $\rho \subseteq A \times B$ \{ (a,b) | ...

O funcție $f = (A, B, \Gamma_f)$ este o relație (între A și B) cu proprietatea că $\forall a \in A \ \exists!\ b \in B$ a.î. $(a,b) \in \Gamma_f$

Γ_f = graficul funcției f : $\Gamma_f = \{(a, f(a)) \mid a \in A\}$

Notație $f : A \to B$, $\forall a \mapsto b = f(a)$

Compunerea relațiilor

$\alpha = (A, B, \rho)$, $\beta = (B, C, \rho')$

$\beta \circ \alpha := (A, C, \rho' \circ \rho := \{(a,c), \exists\, b \in B \text{ a.î. } (a,b) \in \rho, (b,c) \in \rho'\})$

compunerea relațiilor

Notație $(a,b) \in \rho \longleftrightarrow a \rho b$ (a e în relație ρ cu b)

$(a,b) \notin \rho \longleftrightarrow a \not\rho b$

Temă:

1) $\forall\ \alpha = (A, B, \rho)$, $\beta = (B, C, \mathcal{Z})$, $\gamma = (C, D, \varepsilon)$

arătați că $(\gamma \circ \beta) \circ \alpha = \gamma \circ (\beta \circ \alpha)$

2) Dacă $\Delta_A = \{(a,a) \mid a \in A\}$ și $1_A = (A, A, \Delta_A)$

arătați că $\alpha \circ 1_A = \alpha$, $\forall\ \alpha = (A, B, \rho)$

$1_B \circ \alpha = \alpha$, $\forall\ \alpha = (A, B, \rho)$

Ex: $A = \{2, 4, 6, 8\}$ $\quad B = \{1, 3, 5, 7\}$

$\rho = \{(x,y) \mid x \geq 6 \lor y \leq 1\} \subseteq A \times B$

$\rho = \{(6,1), (6,3), (6,5), (6,7), (8,1), (8,3), (8,5), (8,7), (2,1), (4,1)\}$

Ex_2: $A = B = \mathbb{N}$, $\quad \rho = \{(3,5), (5,3), (3,3), (5,5)\}$

$\sigma = \{(x,y) \mid x \leq y\} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

$\gamma = \{(x,y) \mid y - x = 12\} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

$\rho \circ \sigma = \{(a,c) \mid a \in \mathbb{N}, c \in \mathbb{N}, \exists\, b \in \mathbb{N} \text{ a.î. } (a,b) \in \sigma, (b,c) \in \rho\}$

$\rho \circ \sigma = \{(a,c) \mid a \leq b, (b,c) \in \{(3,5), (5,3), (3,3)(5,5)\}\}$

$= \{(0,5), (1,5), (2,5), (3,5), (0,3), (1,3), (2,3), (3,3), (4,3), (5,3), (4,5), (5,5)\}$

$\sigma \circ \rho = \{(a,c) \mid a \in \mathbb{N}, c \in \mathbb{N}, \exists b \in \mathbb{N} \text{ a.î. } (a,b) \in \rho, (b,c) \in \sigma\}$

$\sigma \circ \rho = \{(a,c) \mid (a,b) \in \{(3,5),(5,3),(3,3),(5,5)\}, b \leq c\}$

$= \{(3,c) \mid c \geq 5\} \cup \{(3,3),(3,4)\} \cup \{(5,c), c \geq 3\}$

$\sigma \circ \gamma = \{(a,c) \mid a \in \mathbb{N}, c \in \mathbb{N}, \exists b \in \mathbb{N} \text{ a.î. } (a,b) \in \gamma, (b,c) \in \sigma\}$

$= \{(a,c) \mid b - a = 12, b \leq c\}$

$= \{(a,c) \mid a + 12 \leq c\}$

$\gamma \circ \sigma = \{(a,c) \mid a \in \mathbb{N}, c \in \mathbb{N}, \exists b \in \mathbb{N} \text{ a.î. } (a,b) \in \sigma, (b,a) \in \gamma\}$

$= \{(a,c) \mid a \leq b, c - b = 12\}$

$= \{(a,c) \mid a \leq c - 12\}$

$\rho \circ \gamma = \{(a,c) \mid a \in \mathbb{N}, c \in \mathbb{N}, \exists b \in \mathbb{N} \text{ a.î. } (a,b) \in \gamma, (b,c) \in \rho\}$

$= \{(a,c) \mid b - a = 12, (b,c) \in \{(3,5),(5,3),(3,3),(5,5)\}\} = \emptyset$

$\gamma \circ \rho = \{(a,c) \mid a \in \mathbb{N}, c \in \mathbb{N}, \exists b \in \mathbb{N} \text{ a.î. } (a,b) \in \rho, (b,c) \in \gamma\}$

$= \{(a,c) \mid (a,b) \in \{(3,5),(5,3),(3,3),(5,5)\}, c - b = 12\}$

$= \{(3,17),(5,15),(3,15),(5,17)\}$

Def $\alpha = (A, B, \rho)$ relație

$\alpha^{-1} := (B, A, \rho^{-1})$ cu $\rho^{-1} := \{(b,a) \mid (a,b) \in \rho\}$

$\rho^{-1} = \{(5,3),(3,5),(3,3),(5,5)\} = \rho$

$\sigma^{-1} = \{(x,y) \mid (y,x) \in \sigma\} = \{(x,y) \mid y \leq x\}$

$\gamma^{-1} = \{(x,y) \mid (y,x) \in \gamma\} = \{(x,y) \mid x - y = 12\}$

Ex 3 $\rho^2 = \rho \circ \rho$, $\rho^{-1} = \rho$

$\rho^2 = \{(a,c) \mid a \in \mathbb{N}, c \in \mathbb{N}, \exists b \in \mathbb{N} \text{ a.î. } (a,b) \in \rho, (b,c) \in \rho\}$

$= \{(3,5),(5,3),(3,3),(5,5)\} = \rho \Rightarrow \ldots \Rightarrow \rho^m = \rho, \forall m \in \mathbb{Z}^*$

Ex 4 $\rho = \{(2a, 3b) \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$

$\rho^n = ?,\ n \in \mathbb{Z}$

$\rho^2 = \rho \circ \rho = \{(x, z) \mid (x, y) \in \rho,\ (y, z) \in \rho\}$

$= \{(x, z) \mid \exists\, y \in \mathbb{Z}$ a.î. $x = 2a$ şi $(3b, z) \in \rho\}$

$= \{(2a, z) \mid a \in \mathbb{Z},\ \exists\, b \in \mathbb{Z}$ a.î. $(3b, z) \in \rho\}$

$= \{(2a, 3b') \mid a, b' \in \mathbb{Z}\} = \rho$

$\Rightarrow \rho^n = \rho,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$

$\rho^{-1} = \{(3b, 2a) \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$

$\rho^{-1} = \{(3a, 2b) \mid a, b \in \mathbb{Z}\} = \sigma,\quad \sigma^n = ?$

$\sigma^2 = \sigma \circ \sigma = \{(x, z) \mid x, z \in \mathbb{Z},\ \exists\, y \in \mathbb{Z}$ a.î. $(x, y) \in \sigma,\ (y, z) \in \sigma\}$

$= \{(3a, z) \mid a \in \mathbb{Z},\ \exists\, b \in \mathbb{Z}$ a.î. $(2b, z) \in \sigma\}$

$= \{(3a, 2b') \mid a, b' \in \mathbb{Z}\} = \sigma \Rightarrow \sigma^n = \sigma$

$\Rightarrow (\rho^{-1})^n = \rho^{-1} \Rightarrow \rho^{-n} = \rho^{-1}$

$$\rho^n = \begin{cases} \sigma, & n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N} \\ \rho, & n \in \mathbb{N}^* \\ 1_{\mathbb{Z}}, & n = 0 \end{cases}$$

TEMĂ $\rightarrow$ $(\alpha \circ \beta)^{-1} = \alpha^{-1} \circ \beta^{-1}$

$(\underbrace{\alpha \circ \ldots \circ \alpha}_{n\text{ ori}})^{-1} = \underbrace{\alpha^{-1} \circ \ldots \circ \alpha^{-1}}_{\text{de } n \text{ ori}}$

$(\alpha^n)^{-1} = (\alpha^{-1})^n$

Ex 5 $\rho = \{(a, a+3) \mid a \in \mathbb{Z}\}$

$\rho^2 = \rho \circ \rho = \{(a, c) \mid \forall a, c \in \mathbb{Z},\ \exists\, b \in \mathbb{Z}$ a.î. $(a, b) \in \rho,\ (b, c) \in \rho\}$

$= \{(a, a+6) \mid a \in \mathbb{Z}\}$

$\rho^3 = \rho^2 \circ \rho = \{(a, a+9) \mid a \in \mathbb{Z}\}$

$\rho^n = \{(a, a+3n) \mid a \in \mathbb{Z}\}$

$P(n):\quad \rho^n = \{(a, a+3n) \mid a \in \mathbb{Z}\}$

$P(1):\quad \rho^1 = \{(a, a+3) \mid a \in \mathbb{Z}\}$

Presupunem prin inducţie că $P(k)$ adevărat, $k \in \mathbb{Z}$, Dem. că $P(k+1)$

$P(k):\quad \rho^k = \{(a, a+3k) \mid a \in \mathbb{Z}\}$ (adev)

$P(k+1):\quad \rho^{k+1} = \{(a, a+3(k+1)) \mid a \in \mathbb{Z}\}$

$\rho^{k+1} = \rho^k \circ \rho = \{(a, c) \mid a, c \in \mathbb{Z}\ \exists\, b \in \mathbb{Z}$ a.î. $(a, b) \in \rho,\ (b, c) \in \rho^k\}$

$= \{(a, c) \mid b = a+3,\ c = b + 3k\}$

$= \{(a, a + 3(k+1)) \mid a \in \mathbb{Z}\} \Rightarrow P(k+1)$ adev $\Rightarrow P(n)$ adevărat

$\rho^{-1} = \{(a, a-3) \mid a \in \mathbb{Z}\}$

$\rho^{-n} = \{(a, a-3n) \mid a \in \mathbb{Z}\}, \forall n \in \mathbb{N}^*$

$\rho \cup \rho^{-1} = \{(a,b) \mid 3 \mid a-b\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ Temă: $(\rho \cup \rho^{-1})^n = ?$

Seminar 3

20.10.2022

1. $\rho = \{(\frac{a}{b}, \frac{a+1}{b}) \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$

Este ρ funcție? $\to$ Nu: $(\frac{1}{2}; \frac{2}{2}) \in \rho$, $(\frac{2}{4}; \frac{3}{4}) \in \rho$,

dar $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} \Rightarrow$ din $\frac{1}{2}$ $\begin{cases} \to 1 \\ \to \frac{3}{4} \end{cases}$ $\Rightarrow \rho$ nu e funcție

2. $\rho = \{(\frac{a}{b}; \frac{a+1}{b}) \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0, (a,b) = 1\}$. Este ρ funcție?

$\ast\, a = 0 \Rightarrow b = 1$

$\to$ Nu: $(\frac{-1}{2}; \frac{0}{2}) \in \rho$, $(\frac{1}{-2}; \frac{2}{-2}) \in \rho$, $\frac{-1}{2} = \frac{1}{-2}$, dar $0 \neq -1 \Rightarrow \rho$ nu e funcție

3. $\rho = \{(\frac{a}{b}, \frac{a+1}{b}) \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}^*, (a,b) = 1\}$. Este ρ funcție?

$\to$ Da:

$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$, $a, a' \in \mathbb{Z}$; $b, b' \in \mathbb{N}^*$, $(a,b) = 1$; $(a', b') = 1$ $\Rightarrow a = a', b = b' \Rightarrow \frac{a+1}{b} = \frac{a'+1}{b'}$

$ab' = a'b \Rightarrow a \mid a'b, (a,b) = 1 \Rightarrow a \mid a'$

$\Rightarrow a' \mid ab', (a', b') = 1 \Rightarrow a' \mid a$

$\Rightarrow a = \pm a'$, $b, b' \in \mathbb{N}^* \Rightarrow aa' \geq 0$ $\Rightarrow a = a' \Rightarrow b = b'$

Obs: dacă $a = a' = 0 \Rightarrow b = b' = 1$

4. Fie $f: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$; $f(\frac{a}{b}) = \frac{a+1}{b}$, $\forall a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}^*, (a,b) = 1$

Este f inj, surj, inversabilă?

Fie $a, a' \in \mathbb{Z}$, $b, b' \in \mathbb{N}^*$ a.î. $(a,b) = 1$, $(a', b') = 1$ și $f(\frac{a}{b}) = f(\frac{a'}{b'}) \Rightarrow \frac{a+1}{b} = \frac{a'+1}{b'}$

$\Leftrightarrow (a+1)b' = (a'+1)b$

$a = 1, b = 2$; $a' = 3, b' = 4$ $\Rightarrow f$ nu e injectivă

$\exists\, k \in \mathbb{Z}$ a.î. $(3k-1, 4k) = 1$?

$k = 2 \Rightarrow a = 5, b = 8 \Rightarrow f(\frac{5}{8}) = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$, $(5,8) = 1$

$\frac{3}{4} = \frac{a+1}{b}$, $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}, (a,b) = 1$

$3b = 4(a+1) \Rightarrow 3 \mid a+1 \Rightarrow a = 3k-1, k \in \mathbb{Z}, b = 4k$

$\forall\ m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}^*,\ (m,n)=1,\ \exists\ a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{N}^*,\ (a,b)=1$, a.î. $\frac{m}{n}=$

$$\left.\begin{array}{l} mb = n(a+1) \\ (m,n)=1 \end{array}\right| \Rightarrow m \mid (a+1) \Rightarrow \exists\ k \in \mathbb{Z} \text{ a.î. } a = k\cdot m - 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow mb = n\,(km)$$

I $m=0 \Rightarrow n=1 \Longrightarrow \frac{0}{1}=\frac{-1+1}{2}$ ✓

II $m \neq 0 \Rightarrow b = kn$

$\exists\ k \in \mathbb{Z}$, a.î. $(km-1, kn)=1$?

Fie $k=mn$.

Dacă $\exists$ p și este prim $\begin{cases} p \mid km-1 \\ p \mid kn \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p \mid m^2n-1 \\ p \mid mn^2 \Rightarrow p \mid m \text{ sau } p \mid n \end{cases}$

$\Rightarrow p \mid mn \mid m$

$\Rightarrow \begin{cases} p \mid m^2n-1 \\ p \mid m^2n \end{cases} \Longrightarrow p \mid 1$ ↯ (contradicție) $\Rightarrow f$. surjectivă

---

5. $A, B \subseteq M \neq \phi$ $\quad f: \mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$

$$f(X) = (X \cap A,\ X \cap B)$$

i) f. injectivă $\Leftrightarrow A \cup B = M$

ii) f. surjectivă $\Leftrightarrow A \cap B = \phi$

iii) f. bijectivă $\Leftrightarrow B = C_M A$

---

i) $A \cup B = M \Rightarrow f$. inj ?

Fie $X, Y \subset M$. a.î. $f(X) = f(Y) \Leftrightarrow (X \cap A, X \cap B) = (Y \cap A, Y \cap B)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} X \cap A = Y \cap A \\ X \cap B = Y \cap B \end{cases} \Rightarrow (X \cap A) \cup (X \cap B) = (Y \cap A) \cup (Y \cap B)$

$\Rightarrow X \cap (A \cup B) = Y \cap (A \cup B) \Rightarrow \left.\begin{array}{l} X \cap M = Y \cap M \\ X, Y \subset M \end{array}\right| \Rightarrow X = Y$

$\Downarrow$

f. inj. ✓

f inj $\Rightarrow A \cup B = M$?

f. inj Pp. prin reducere la absurd că $A \cup B \subset M \Rightarrow \exists\ x \in M,\ x \notin A \cup B$

$$\left.\begin{array}{l} f(\{x\}) = (\phi, \phi) \\ f(\phi) = (\phi, \phi) \end{array}\right| \xRightarrow{f \text{ inj}} \{x\} = \phi \text{ ↯ (contradicție)} \Rightarrow A \cup B = M$$

ii) $A \cap B = \phi \Leftarrow f$. surj

$x \in M$

Pp. prin reducere la absurd că $A \cap B \neq \phi \Rightarrow \exists x \in A \cap B$

$(\phi, \{x\}) \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$

f. surj $\Rightarrow \exists X \in M$ a.î. $f(X) = (\phi, \{x\}) \Leftrightarrow \begin{cases} X \cap A = \phi & (1) \\ X \cap B = \{x\} & (2) \end{cases}$

$(1) \Rightarrow x \notin A$

$(2) \Rightarrow x \in X$ $\Rightarrow$ contradicție

$x \in A \cap B$

$A \cap B = \phi \Rightarrow f$. surj

Fie $X \subset A$ și $Y \subset B$, $X, Y \subset M$ și $Z = X \cup Y \subset M$

$f(Z) = (Z \cap A, Z \cap B) = ((X \cup Y) \cap A, (X \cup Y) \cap B) =$

$= ((X \cap A) \cup \underbrace{(Y \cap A)}_{\subseteq A \cap B = \phi}, (X \cap B) \cup (Y \cap B)) = (X \cap A, Y \cap B) = (X, Y)$

$\underbrace{}_{\subseteq A \cap B = \phi}$

$\Rightarrow f$. surj.

$f : \mathbb{N} \to [0, 1)$ $f(n) = \{2^n \cdot \sqrt{3}\}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ Este f injectivă?

Fie $n, m \in \mathbb{N}$, $f(n) = f(m) \Rightarrow \{2^n \sqrt{3}\} = \{2^m \sqrt{3}\}$

$\Leftrightarrow 2^n \sqrt{3} - [2^n \sqrt{3}] = 2^m \sqrt{3} - [2^m \sqrt{3}]$

$2^n \sqrt{3} - 2^m \sqrt{3} = \underbrace{[2^n \sqrt{3}] - [2^m \sqrt{3}]}_{\in \mathbb{Z}}$

$\sqrt{3} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

$\Rightarrow 2^n - 2^m = 0 \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow 2^n = 2^m \Rightarrow n = m \Rightarrow f$. inj.

* f. nu e surj (nu există bijecție între $\mathbb{N}$ și orice interval (care = nenumărabil)

Seminar 4 — 27.10.2022

Fie A, B finite, $|A| = n$, $|B| = m$

1) Numărul funcțiilor de la A la B este egal cu m^n

$\Rightarrow \underbrace{m \cdot m \cdot \ldots \cdot m}_{\text{de } n \text{ ori}}$

2) Numărul funcțiilor injective de la A la B:

$$= \begin{cases} 0, & m < n \\ A_m^n, & m \geq n \end{cases}$$

3) Numărul funcțiilor strict crescătoare de la A la B:

$$= \begin{cases} 0, & m < n \\ C_m^n, & m \geq n \end{cases}$$

4) Numărul funcțiilor crescătoare de la A la B:

$$= \begin{cases} 0, & m = 0 \\ 1, & m = 1 \\ C_{m+n-1}^n, & m > 1 \end{cases}$$

f crescătoare $\to f: \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, m\}$

$g: \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, m+n-1\}$

$g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ f(1) & f(2)+1 & \ldots & f(n)+n-1 \end{pmatrix}$

str. $\nearrow$

Reciproc, $g: \{1 \ldots n\} \to \{1, \ldots, m+n-1\}$

$f: \{1, \ldots, n\} \to \{1 \ldots m\}$

$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ g(1) & g(2)-1 & \ldots & g(n)-n+1 \end{pmatrix}$

5) Numărul funcțiilor surjective

$A_1, \ldots, A_n$ mulțimi finite,

Atunci $|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \ldots (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|$

(principiul includerii și excluderii)

Pt $n = 2$ $\quad |A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$

Fie $k \in \mathbb{N}, k > 2$. Pp. $P(k)$ adev, dem. că $P(k+1)$ adev:

$$|(A_1 \cup \ldots \cup A_k) \cup A_{k+1}| = |A_1 \cup \ldots \cup A_k| + |A_{k+1}| - |(A_1 \cup \ldots A_k) \cap A_{k+1}|$$

$$= \sum_{i=1}^{k} |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq k} |A_i \cap A_j| + \ldots + (-1)^{k+1} |A_1 \cap \ldots \cap A_k| +$$

$$+ |A_{k+1}| - \sum_{i=1}^{n} |A_i \cap A_{k+1}| + \sum_{1 \leq i < j \leq k} |(A_i \cap A_{k+1}) \cap (A_j \cap A_{k+1})|$$

$$- \ldots (-1)^n |(A_1 \cap A_{k+1}) \cap \ldots \cap (A_k \cap A_{k+1})|$$

$$= \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum |A_i \cap A_j| + \sum |A_i \cap A_j \cap A_k| \ldots (-1)^{k+2} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{k+1}|$$

5) Numărul funcțiilor surjective

$f : \{1, 2 \dots n\} \to \{1, 2 \dots m\}$, f surj

$\forall i = \overline{1,m}$ $\quad A_i = \{ f,\ f : \{1,2 \dots n\} \to \{1,2 \dots m\} \mid i \notin \operatorname{Im} f \}$

f nu este surjectivă $\iff f \in \bigcup_{i=1}^{m} A_i \Rightarrow$ nr. fct. nesurj este $|A_1 \cup \dots \cup A_m|$

$$|A_1 \cup \dots \cup A_m| = \sum_{i=1}^{m} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le m} |A_i \cap A_j| + \dots (-1)^{m+1} \cdot |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_m|$$

$$= \sum_{i=1}^{m} (m-1)^n - \sum_{1 \le i < j \le m} (m-2)^n + \dots (-1)^m \cdot \sum 1^n \; (-1)^{m+1} \cdot 0$$

$$= C_m^1 \cdot (m-1)^n - C_m^2 \cdot (m-2)^n + \dots + (-1)^m \cdot C_m^{m-1} \cdot 1^n$$

$$= \sum_{i=1}^{m-1} (-1)^{i+1} C_m^i \cdot (m-i)^n \to \text{nr. fct. care nu sunt surj.}$$

$\Rightarrow$ nr. funcțiilor surjective este $m^n - \sum_{i=1}^{m-1} (-1)^{i+1} C_m^i \cdot (m-i)^n$

$$= \sum_{i=0}^{m-1} (m-1)^n \cdot C_m^i \cdot (-1)^i$$

---

6) Numărul permutărilor $\sigma \in S_n$ pt. care $\exists\, i = \overline{1,n}$ a.î. $\sigma(i) = i$ (punct fix)

$A_i = \{ \sigma \in S_n \mid \sigma(i) = i \}$, $\forall i = \overline{1,n}$

$$|A_1 \cup \dots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j| + \dots (-1)^{n+1} |A_1 \cap \dots \cap A_n|$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (n-1)! - \sum_{1 \le i < j \le n} (n-2)! + \dots (-1)^{n+1} \cdot 1!$$

$$= C_n^1 \cdot (n-1)! - C_n^2 \cdot (n-2)! + \dots (-1)^{n+1} \cdot C_n^n \cdot 1!$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \cdot C_n^i \cdot (n-i)!$$

$\sigma \in A_i$, $\sigma \notin A_j$, $\forall j \ne i$

$\sigma \in \bigcup_{i=1}^{n} \left(A_i \setminus \bigcup_{j \ne i} A_j \right)$ ← mulțimi disjuncte $\Rightarrow$ card $= \sum$ card

Temă: Numărul permutărilor $\sigma \in S_n$ pt. care există un unic i a.î. $\sigma(i) = i$.

Fie $f:\{x_1, x_2 \dots x_n\} \to \{y_1, y_2 \dots y_n\}$

Atunci f injectivă $\overset{①}{\iff}$ f. surj $\overset{②}{\iff}$ f bijectivă

„$\overset{①}{\Rightarrow}$” f. injectivă $\Rightarrow \operatorname{Im} f = \underbrace{\{f(x_1), \dots, f(x_n)\}}_{n \text{ elemente}} \subset \{y_1 \dots y_n\}$

$\Rightarrow \operatorname{Im} f = \{y_1 \dots y_n\} \Rightarrow f$. surjectivă

„$\overset{①}{\Leftarrow}$” + „$\overset{②}{\Rightarrow}$”

Pt $\forall\, i = \overline{1,n}$. Fie $A_i = \{1 \leq j \leq n \mid f(x_j) = y_i\}$

f surjectivă $\Rightarrow A_i \neq \emptyset, \forall i \Rightarrow |A_i| \geq 1, \forall i$

$A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j$

$\Rightarrow |A_i \cup A_j| = |A_i| \cup |A_j|$

$\Rightarrow \underbrace{|A_1 \cup A_2 \dots \cup A_n|}_{\subseteq \text{ a unei mulț. cu } n \text{ elemente } \Rightarrow |\dots| \leq n} = |A_1| \cup |A_2| \cup \dots \cup |A_n| \geq n \quad \Big| \Rightarrow \left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = n$

$\Rightarrow |A_i| = 1, \forall i = \overline{1,n} \Rightarrow$ pt. $\forall y_i\ \exists!\ j$ a.î. $A(x_j) = y_i$

Pentru o mulțime nevidă M, (urm. afirm. sunt echiv) UASE:

1) M infinită

2) $\exists f: M \to M$ funcție inj care nu este surj

3) $\exists f: M \to M$ funcție surj care nu este inj

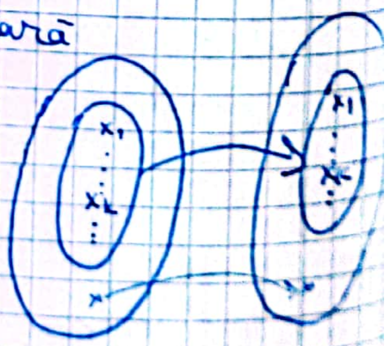
② ⇒ ① și ③ ⇒ ① rezultă din problema anterioară

① ⇒ ② M infinită $\Rightarrow \exists \{x_1, \dots x_n\} \subseteq M$

$\forall k,\ M \setminus \{x_1 \dots x_k\} \neq \emptyset$

$\Downarrow$

$\exists x_{k+1}$



Fie $f: M \to M$

$$f(x) = \begin{cases} x_{k+1}, & \text{dacă } x = x_k \\ x, & \text{dacă } x \notin \{x_1 \dots x_n \dots\} \end{cases}$$

$x_1 \notin \operatorname{Im} f \Rightarrow f$. nu este surjectivă, dar este injectivă.

$\boxed{\text{Temă: } 1 \Rightarrow 3}$

Seminar 5

3.11.2022

Relație de echivalență

$\rho \subseteq A \times A$ relație ($A \neq \phi$)

ρ s.n relație de echivalență dacă este

- reflexivă: $a \rho a, \forall a \in A$ ($\Leftrightarrow \Delta_A \subseteq \rho$) (diagonala)
- simetrică: $\forall a, b \in A, a\rho b \Leftrightarrow b \rho a$ ($\Leftrightarrow \rho \subseteq \rho^{-1} \Leftrightarrow \rho = \rho^{-1}$)
- tranzitivă: $\forall a, b, c \in A$, $a \rho b \wedge b \rho c \Rightarrow a \rho c$ ($\rho^2 \subseteq \rho \Leftrightarrow (\rho \circ \rho) \subseteq \rho$)

$A/\rho = \{\hat{a} \mid a \in A\}$, $\hat{a} := \{b \in A \mid b \rho a\}$ → clasa de echiv. a lui a.

$\forall \hat{a}, \hat{b} \in A/\rho$: $\hat{a} = \hat{b}$ sau $\hat{a} \cap \hat{b} = \phi$

$A = \biguplus_{\hat{a} \in A/\rho} \hat{a}$; $A \xrightarrow{p} A/\rho$ este f. surj. (surjecția canonică) $p(a) = \hat{a}$

$\biguplus$ = reuniune disjunctă

A/ρ are mai puține elem. ca A; card(A) = card(A/ρ) doar dacă fiecare clasă are 1 sg. elem.

Obs: $\hat{a} = \hat{b} \Leftrightarrow a \rho b$

(proprietatea de universalitate a mulțimii factor)

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "p"] \arrow[dr, "f"'] & A/\rho \arrow[d, dashed, "\bar{f}"] \\ & B \end{tikzcd}$$

$(\rho \subseteq \rho_f)$; $a \rho b \Leftrightarrow f(a) = f(b)$

$f = \bar{f} \circ p$

Exemplu $A = \mathbb{Z}$; $a \rho b \Leftrightarrow |a| = |b|$

ρ = relație de echivalență (verifică cele 3 proprietăți)

$\hat{a} = \{b \in \mathbb{Z} \mid b \rho a\} = \{b \in \mathbb{Z} \mid |b| = |a|\} = \begin{cases} \{0\}, & a = 0 \\ \{\pm a\}, & a \neq 0 \end{cases}$

$\mathbb{Z}/\rho = \{\{0\}, \{\pm 1\}, \{\pm 2\} \dots\} \simeq \mathbb{N}$ → $\simeq$ semn pt bijecție ($\mathbb{Z}/\rho$ e mulțime numărabilă)

$\hat{a} \in \mathbb{Z}/\rho$; $\hat{a} \longrightarrow |a| \in \mathbb{N}$

(bine def: $a \rho b \Rightarrow f(a) = f(b)$, $f(a) = |a|$)

$\mathbb{Z}/\rho$ = mulțimea claselor de echivalență ($\bar{f}$ este inj și surj)

1) Pe $\mathbb{R}$: $x \rho y \Leftrightarrow x = y \vee x+y=3$

a) ρ = rel de echivalență

b) $\mathbb{R}/_\rho = ?$

a) ρ - reflexivă? $a\rho a \Leftrightarrow a=a \vee a+a=3$ (A)

simetrică? $a\rho b \Leftrightarrow a=b \vee a+b=3$ (A)

$\Updownarrow$

$b \rho a \Leftrightarrow b=a \vee b+a=3$

tranzitivă? $\underline{a\rho b \wedge b \rho c} \Leftrightarrow (a=b \vee a+b=3) \wedge (b=c \vee b+c=3)$

$\Leftrightarrow (a=b \wedge b=c) \vee (a=b \wedge b+c=3) \vee (a+b=3 \wedge b=c)$

$\vee (a+b=3 \wedge b+c=3)$

$\Leftrightarrow (a=b=c) \vee (a=b \wedge a+c=3) \vee (a+c=3 \wedge b=c)$

$\vee (a=c \wedge a+b=3) \Rightarrow (a=c) \vee (a+c=3)$

$\Leftrightarrow \underline{a\rho c}$

b) $\hat{a} = \{b \in \mathbb{R} \mid b \rho a\} = \{b \in \mathbb{R} \mid b=a \vee b+a=3\}$

$= \begin{cases} \{a, 3-a\}, & a \neq \frac{3}{2} \\ \{\frac{3}{2}\}, & a = \frac{3}{2} \end{cases}$

$\bar{f} : \mathbb{R}/_\rho \to \underline{[0,\infty)} \longrightarrow$ pt surjectivitate

$\bar{f}(\hat{a}) = |a - \frac{3}{2}|$, $f(a) = |a - \frac{3}{2}|$

$\underline{\hat{a} = \hat{b} \Leftrightarrow a \rho b \overset{?}{\Rightarrow} f(a) = f(b)}$

$\hat{a} \overset{\Updownarrow}{=} \hat{b} \Leftrightarrow a \rho b \Leftrightarrow a=b \vee a+b=3$

I $a=b \Rightarrow f(a) = f(b)$

II $a+b=3 \Rightarrow b=3-a$

$f(b) = f(3-a) = |3-a-\frac{3}{2}| = |\frac{3}{2}-a| = |a-\frac{3}{2}| = f(a)$

$\Rightarrow f$ este bine definită

- este inj.

$\bar{f}(\bar{a}) = \bar{f}(\bar{b}) \Rightarrow |a-\frac{3}{2}| = |b-\frac{3}{2}| \Leftrightarrow a-\frac{3}{2} = \pm(b-\frac{3}{2}) \Leftrightarrow \begin{cases} a=b \\ a+b=3 \end{cases} \Leftrightarrow a\rho$

$\bar{g} : \mathbb{R}/_{\rho_g} \to \left(-\infty, \frac{9}{4}\right]$ g - bijectivă

$\bar{g}(\hat{a}) = a(3-a)$; $g(a) = a(3-a)$

$\hat{a} = \hat{b} \iff \begin{cases} a = b \Rightarrow f(a) = f(b) & (A) \\ a+b = 3 \Rightarrow b = 3-a \end{cases}$

$f(b) = (3-a)\cdot a = f(a)$ (A)

$\Rightarrow g$ este bine definită

Temă: ρ_f relație de echivalență ①
② $+ \hat{0}, \hat{3}$ $\boxed{\exists a \in \mathbb{R} \text{ a.î. } |\hat{a}| = 5 \text{ ?}}$ ③
cu derivata $\to 3$ sol ≥ 1, 2 sol < 1

2) $f : A \to B$

$\rho_f : a \rho_f a' \iff f(a) = f(a')$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x + 5, & x \geq 1 \\ 2x^2 - 3x + 1, & x < 1 \end{cases}$

Det $\hat{0}, \hat{1}, \hat{3}$

$$\begin{array}{l|l} x^3 - 3x + 2 & x-1 \\ \hline -x^3 + x^2 & x^2 + x - 2 \\ x^2 - 3x + 2 & \\ -x^2 + x & \\ -2x + 2 & \\ -2x + 2 & \\ = & \end{array}$$

$a \in \hat{1} \iff a \rho_f 1 \iff f(a) = f(1) \iff f(a) = 3$

I $x^3 - 3x + 5 = 3 \iff x^3 - 3x + 2 = 0$

1 este soluție $x^3 - 3x + 2 = (x-1)(x^2 + x - 2)$

$x^3 - x^2 + x^2 - x - 2x + 2 = 0 \iff (x-1)(x^2 + x - 2)$

$(x-1)(x^2 + x - 2) = 0 \to x_1 = 1$

$x_{2,3} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2}$ $\to x_2 = 1$, $x_3 = -2$

$x \geq 1 \Rightarrow \hat{1} \ni 1$

II $2x^2 - 3x + 1 = 3 \Rightarrow 2x^2 - 3x - 2 = 0 \to x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{4}$

$x_{1,2} = \frac{3 \pm 5}{4}$ $\to x_1 = 2$, $x_2 = \frac{-1}{2}$

$x < 1 \Rightarrow \hat{1} \ni \frac{-1}{2}$

$\Rightarrow \hat{1} = \left\{ \frac{-1}{2}, 1 \right\}$

$3(a-1)(a+1)$

$\mathbb{N}$: $a \rho b \iff \exists\, k \in \mathbb{N}$ a.î. $b = 2^k \cdot a$

a) ρ rel. de echivalență?

→ reflexivitate $\quad a \rho a \iff \exists\, k \in \mathbb{N}$ a.î. $a = 2^k \cdot a \Rightarrow k = 0$ (A)

→ simetrie $\quad a \rho b \Rightarrow b \rho a$

$a \rho b \iff \exists\, k \in \mathbb{N}$ a.î. $a = 2^k \cdot b \iff \exists\, k \in \mathbb{N}$ a.î. $b = 2^{-k} \cdot a$

$-k \notin \mathbb{N}$

Fie $\begin{cases} a = 3 \\ b = 6 = 2^1 \cdot 3 \end{cases} \Rightarrow a \rho b$, dar $b \not\rho a$

$\Rightarrow \rho$ nu e simetrică $\Rightarrow \rho$ nu e rel. de echivalență

→ tranzitivitate $\quad a \rho b \wedge b \rho c \Rightarrow a \rho c$

$b = 2^{k_1} \cdot a \wedge c = 2^{k_2} \cdot b \Rightarrow c = 2^{k_1 + k_2} \cdot a \Rightarrow a \rho c$

$\boxed{\text{Obs}}$: $a \rho b \wedge b \rho a \overset{?}{\Rightarrow} a = b$

$b = 2^{k_1} \cdot a \wedge a = 2^{k_2} \cdot b \Rightarrow a = 2^{k_1 + k_2} \cdot a \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \Rightarrow b = 0 \\ k_1 + k_2 = 0 \Rightarrow k_1 = k_2 = 0 \Rightarrow a = b \end{cases}$

$\Rightarrow a \rho b \wedge b \rho a \Rightarrow a = b \Leftarrow$

$\Rightarrow \rho$ - relație antisimetrică $\Leftarrow$

$\Rightarrow \rho$ este relație de ordine

$\boxed{\text{Obs}}$: $a \rho b \iff \exists\, k \in \mathbb{Z}$ a.î. $b = 2^k \cdot a$, ρ e rel. de echivalență

$\hat{a} = \{ b \in \mathbb{N} \mid \exists\, k \in \mathbb{Z}$ a.î. $b = 2^k \cdot a \} = \{ 2^k \cdot a \mid k \in \mathbb{Z} \} \cap \mathbb{N}$

$\hat{0} = \{0\}$

$\hat{1} = \{1, 2, 4, \dots\}$

$\hat{2} = \{2^{-1} \cdot 2, 2^0 \cdot 2, 2^1 \cdot 2, \dots\} = \hat{1}$

$\hat{3} = \{3, 6, 12 \dots 2^n \cdot 3\}$

$\hat{4} = \hat{1}$

$\vdots$

$\underset{2^2 \cdot 3}{\hat{12}} = \hat{3}$

$a = 2^{p_1} \cdot \underbrace{3^{p_2} \cdot \ldots \cdot (2m+1)^{p_n}}$

partea impară dă clasa de echivalență

Pe $\mathbb{Z}$; $a\rho b \iff a|b \vee b|a$

→ reflexivitate $\quad a\rho a \iff a|a \vee a|a$ (A)

→ simetrie $\quad a\rho b \iff a|b \vee b|a \iff b|a \vee a|b \iff b\rho a$ (A)

→ tranzitivitate $\quad a\rho b \wedge b\rho c \Rightarrow a\rho c$

$(a|b \vee b|a) \wedge (b|c \vee c|b)$

$2\rho 6$, $6\rho 3$, dar $2 \not\rho\, 3 \Rightarrow \rho$ nu este tranzitivă

$\boxed{\text{Seminar 6}}$ 10.11.2022

Închideri de relații

$\rho \subseteq A \times A$

$R(\rho) = \rho \cup \Delta_A \quad (\rho \subseteq R(\rho) \to$ „cea mai mică reflexivă în raport cu „$\subseteq$")

$S(\rho) = \rho \cup \rho^{-1} \quad (\rho \subseteq S(\rho) \to$ „cea mai mică simetrică în raport cu „$\subseteq$")

$RS(\rho) = SR(\rho) = \rho \cup \rho^{-1} \cup \Delta_A \quad (\rho \subseteq RS(\rho) \to$ „cea mai mică simetrică & reflexivă în raport cu „$\subseteq$")

$T(\rho) = \rho \cup \rho^2 \cup \ldots = \bigcup_{n \geq 1} \rho^n$; $\rho^n = \{(a,c) \in A\times A \mid \exists\, b_1, \ldots b_{n-1} \in A$ a.î. $a\rho b_1, b_1\rho b_2 \ldots \ldots b_{n-1}\rho c\}$

$E(\rho) = \Delta_A \cup T(\rho \cup \rho^{-1}) = \bigcup_{n\geq 0} (\rho\cup\rho^{-1})^n$ (închiderea rel. de echivalență)

$\boxed{\text{Ex}}$ $\rho = \{(1,2),(2,1),(3,5),(4,4)\} \subseteq A\times A$, $A = \{1,2,3,4,5\}$

$R(\rho), S(\rho), RS(\rho), T(\rho), E(\rho)$

→ $R(\rho) = \rho \cup \Delta_A = \rho \cup \{(1,1),(2,2),(3,3),(5,5)\}$

→ $S(\rho) = \rho \cup \rho^{-1} = \rho \cup \{(5,3)\}$

→ $RS(\rho) = \rho \cup \rho^{-1} \cup \Delta_A = \rho \cup \{(5,3)\} \cup \{(1,1),(2,2),(3,3),(5,5)\}$

→ $T(\rho) = \bigcup_{n\geq 0} \rho^n = \rho \cup \rho^2 \cup \rho^3 = \rho \cup \{(1,1) \cup (2,2)\}$

$\rho^2 = \{(a,c) \mid \exists\, b$ a.î. $a\rho b \wedge b\rho c\}$

$\rho^2 = \{(1,1),(2,2),(4,4)\}$

$\rho^3 = \{(a,c) \mid \exists\, b$ a.î. $a\rho^2 b \wedge b\rho c\}$

$\rho^3 = \{(1,2),(2,1),(4,4)\}$

$\rho^4 = \rho^2$

$\rho^5 = \{(a,c) \mid \exists\, b$ a.î. $a\rho^4 b \wedge b\rho c\}$

$= \rho^3$

$\Rightarrow \rho^{2k} = \rho^2 \wedge \rho^{2k+1} = \rho^3$, $k \geq 1$

$$E(\rho) = \Delta_A \cup T(\rho \cup \rho^{-1}) = \bigcup_{m\geq 1} (\rho \cup \rho^{-1})^m = (\rho \cup \rho^{-1}) \cup (\rho \cup \rho^{-1})^2$$

$\rho \cup \rho^{-1} = \{(1,2), (2,1), (3,5), (5,3), (4,4)\}$

$(\rho \cup \rho^{-1})^2 = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5)\} = \Delta_A \longrightarrow$ elem. neutru la com

$(\rho \cup \rho^{-1})^3 = \{(1,2), (2,1), (3,5), (4,4), (5,3)\} = \rho \cup \rho^{-1}$

$E(\rho) = \rho \cup \rho^{-1} \cup \Delta_A = RS(\rho)$

---

2) $\rho = \{(x, 2x) \mid x \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

$E(\rho) = ?$; $E(\rho) = \Delta_A \cup T(\rho \cup \rho^{-1}) = \bigcup_{n\geq 1} (\rho \cup \rho^{-1})^m$

Fie $\tau = \rho \cup \rho^{-1}$; $\tau = \{(x, 2x), (2x, x) \mid x \in \mathbb{N}^*\} \cup \{(0,0)\}$

$\tau^2 = \{(a,c) \mid \exists\, b \in \mathbb{N}$ a.î. $(a,b) \in \tau, (b,c) \in \tau\}$

$= \{(x,x), (x, 4x)\} \cup \{(2x, \frac{x}{2}) \mid x \in 2\mathbb{N}\}$

$= \Delta_{\mathbb{N}} \cup \{(x, 4x), (4x, x) \mid x \in \mathbb{N}^*\}$

$\tau^3 = \{(a,c) \mid \exists\, b \in \mathbb{N}$ a.î. $(a,b) \in \tau^2, (b,c) \in \tau\}$

$= \tau \cup \{(x, 8x), (x, 2x) \mid x \in \mathbb{N}^*\} \cup \{(4x, 2x) \mid x \in \mathbb{N}^*\} \cup \{(4x, \frac{x}{2}) \mid x \in$

$= \tau \cup \{(x, 8x), (8x, x) \mid x \in \mathbb{N}^*\}$

$\tau^4 = \Delta_{\mathbb{N}} \cup \{(x, 16x), (16x, x) \mid x \in \mathbb{N}^*\}$

$E(\rho) = \{(x,y) \mid \exists\, k \in \mathbb{Z}$ a.î. $y = 2^k x\} \overset{not}{=} \theta$ (θ rel. de echiv.

$\rho \subseteq \theta \Rightarrow E(\rho) \subseteq \theta$ 4) vezi seminarul Dem.

$(x,y) \in \theta \Rightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z}$ a.î. $y = 2^k \cdot x$

Căutăm $n \in \mathbb{N}^*$ a.î. $(x,y) \in \tau^n \iff \exists\, s_1 \dots s_{m-1} \in \mathbb{N}$ a.î.

$x \tau s_1 \dots s_{m-1} \tau y$.

Dacă $k \in \mathbb{N}$. $x \tau 2x$, $2x \tau 4x \dots 2^{k-1} x \tau 2^k x \Rightarrow (x,y) \in \tau^k$ $(n=k)$

Dacă $k \in \mathbb{Z}_-$ $x = 2^{-k} \cdot y$; $y \tau 2y$, $2y \tau 4y \dots 2^{-k-1} y \tau 2^{-k} y = x$

$\Rightarrow (y,x) \in \tau^{-k}$
τ^{-k} simetrică $\Big| \Rightarrow (x,y) \in \tau^{-k}$

$\Rightarrow E(\rho) = \{(x,y) \mid \exists\, k \in \mathbb{Z}$ a.î. $y = 2^k x\}$

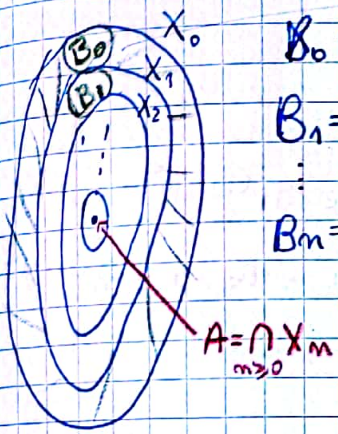
Temă: Pt. ρ de mai jos, calculați $E(\rho)$:

① $\rho = \{(-1,0), (2,3), (1,1)\} \subseteq A \times A$, $A = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$

② $\rho = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x - y = 3\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

Cantor – Bernstein

$X_0 \supseteq X_1 \supseteq X_2$, $\exists f: X_0 \to X_2$ bijectivă $\Rightarrow \exists g: X_0 \to X_1$ bij

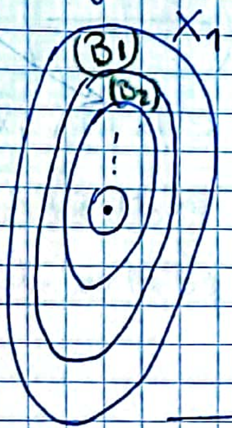


$B_0 = X_0 - X_1$

$B_1 = X_1 - X_2$

$\vdots$

$B_n = X_n - X_{n+1}$



$f(X_0) = X_2$

$X_3 := f(X_1) \subseteq f(X_0) = X_2$

$\vdots$

$X_n := f(X_{n-2}) \subseteq f(X_{n-3}) = X_{n-1}$

$\tilde{f}: X_0 = A \cup \bigcup_{n \geq 0} B_n \to X_1 = A \cup \bigcup_{n \geq 1} B_n$

$f(B_n) = f(X_n \setminus X_{n+1}) \underset{(\text{temă})}{=} f(X_n) \setminus f(X_{n+1}) = X_{n+2} \setminus X_{n+3} = B_{n+2}$

Dacă $A = \bigcap_{n \geq 0} X_n \Rightarrow X_0 = A \cup \bigcup_{n \geq 0} B_n$ („$\supseteq$" clare din def)

$X_1 = A \cup \bigcup_{n \geq 1} B_n$ („$\supseteq$" clare din def)

$x \in X_0$ → $x \in A$, gata!

→ $x \notin A$, iau $n \geq 0$ minim a.î. $x \notin X_n \Rightarrow n \geq 1$ și $x \in X_{n-1}$

$\Rightarrow X_{n-1} \setminus X_n \ni x \Rightarrow x \in B_{n-1}$

$\tilde{f}: X_0 = A \cup \bigcup_{n \geq 0} B_n \longrightarrow X_1 = A \cup \bigcup_{n \geq 1} B_n$

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} x, & x \in A \cup \bigcup_{n \geq 0} B_{2n+1} \\ f(x), & x \in A \cup \bigcup_{n \geq 0} B_{2n} \end{cases}$$

($\to B_1 \to B_1$, $B_3 \to B_3 \ldots B_{2n+1} \to B_{2n+1}$)

($\to B_0 \to B_2$, $B_2 \to B_4 \ldots B_{2n} \to B_{2n+2}$)

(ca să acopăr toată mulțimea)
(să dot. surjecție)

CONSECINȚĂ Dacă $\exists\ f: A \to B$ inj și $\exists\ g: B \to A$ inj

$\Rightarrow \exists\ h: A \to B$ bijectivă.

$\overbrace{A \supseteq g(B)}^{\text{in bijecție}} \supseteq g(f(A))$ $\quad (g \circ f): A \to A$ inj $\Rightarrow A \sim g(f(A))$

$\hookrightarrow A \sim g(B)$; $g: B \to A$ inj $\Rightarrow B \sim g(B) \Longrightarrow A \sim B$

Seminar 7

M finită, card(M) = n ① Câte legi de compoziție se pot defini pe M?

$\rightarrow$ nr. funcțiilor $f: \underbrace{M \times M}_{n^2} \rightarrow \underbrace{M}_{n} \rightarrow n^{n^2}$

② Nr. legilor de compoziție cu element neutru.

Fie $M = \{x_1, \dots x_n\}$. $e = x_i$ element neutru $(i = \overline{1,n})$

$x_i \cdot x_j = x_j \cdot x_i = x_j$ $\quad \begin{array}{c|c} & x_i \\ x_i & \left(\begin{array}{c|c} ? & ? \\ \hline ? & ? \end{array}\right) \end{array}$

$\rightarrow$ Rămâne de dat $f: (M \setminus \{x_i\}) \times (M \setminus \{x_i\}) \rightarrow M$

$\Rightarrow$ nr. legilor de compoziție pe M cu $e = x_i$ este $n^{(n-1)^2}$

$\Rightarrow$ nr. legilor de compoziție pe M cu elem. neutru este $n \cdot n^{(n-1)^2}$
$= n^{n^2-2n+2}$

③ Nr. legilor de compoziție pe M care sunt comutative

Nr. de funcții $f: M \times M \rightarrow M$ cu $f(x,y) = f(y,x)$, $\forall x, y \in M$

$\Leftrightarrow f: \underbrace{\{(x_i, x_j) \mid 1 \le i \le j \le n\}}_{} \rightarrow M$

$\frac{n(n+1)}{2}$ elem $= \frac{n(n-1)}{2} + n$ $(C_n^2 + n)$ diag. principală

$\Rightarrow$ nr legilor de comp. comutative este $n^{\frac{n(n+1)}{2}}$

④ Nr. legilor comutative cu element neutru

$\Leftrightarrow$ nr. fct. $f: M \times M \rightarrow M$ cu $f(x,y) = f(y,x)$ și $\exists e \in M$ a.î. $f(x,e) = \dots$ $\forall x, y \in M$

Fie $e = x_1$ elem. neutru

$f: \underbrace{\{(x_i, x_j) \mid 2 \le i \le j \le n\}}_{\frac{n(n-1)}{2}} \rightarrow M$ $\quad \begin{array}{c|c} & x_1 \; \dots \; x_n \\ \hline x_1 & \\ \vdots & \\ x_n & \end{array} \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \\ \vdots & \ddots & \\ x_n & & \ddots \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ sunt $n^{\frac{n(n-1)}{2}}$ funcții comutative cu elem. neutru fixat

$\Rightarrow$ sunt $n^{\frac{n^2-n+2}{2}}$ funcții comutative cu elem. neutru

⑤ Fie $(G,\cdot)$ semigrup ($\cdot$ este lege de compoziție asociativă)

UASE: a) G grup

b) i) $\exists\ e\in G$ a.î. $e\cdot a=a,\ \forall a\in G$

ii) $\forall\ a\in G,\ \exists\ a'\in G$ a.î. $a'a=e$

„a ⇒ b" (evident)

„b ⇒ a" Fie $a\in G$ fixat. $\exists\ a'\in G$ a.î. $a'a=e$.

Pt. $a'\in G$, $\exists\ a''\in G$ a.î. $a''a'=e\ |\cdot a \Rightarrow a''a'a=ea$

$\overset{(i)}{\Rightarrow} a''e=a\ |\cdot e \Rightarrow a''ee=ae \Rightarrow a''e=ae \Rightarrow a=ae$

$\Downarrow$ e este elem. neutru

$a''e=a \Rightarrow a''=a\ |\cdot a' \Rightarrow a''a'=a\cdot a'$

$e=a\cdot a' \Rightarrow a'=a^{-1} \Rightarrow \forall$ elem. e simetrizabil.

Obs: funcționează și varianta la dreapta (temă).
dar nu funcționează stg, dr. sau dr., stg.

+ Temă: contraexemplu pt dr.–stg.

exemplu $(\mathbb{R}^*,\circ)$; $x\circ y=|x|y$

$(x\circ y)\circ z=|x|y\circ z=||x|y|z=|xy|z$
$x\circ(y\circ z)=x\circ|y|z=|x||y|z=|xy|z$
$\Rightarrow$ legea e asociativă.

i) $\exists\ e=1$ a.î. $e\circ x=x,\ \forall x\in\mathbb{R}^*$

ii) $\forall\ x\in\mathbb{R}^*,\ \exists\ x'=\frac{1}{|x|}\in\mathbb{R}^*$ a.î. $x\circ x'=e$

Dar $e_1=-1$ este element neutru la stânga $\Rightarrow(\mathbb{R}^*,\circ)$ nu e grup.

---

⑥ $(G,\cdot)$ grup; $Hom_{gr}(\mathbb{Z},G)=\{f:(\mathbb{Z},+)\to(G,\cdot)\mid f=\text{morfism de gr}\}$?

$f:\mathbb{Z}\to G$ morfism de grupuri

$f(0)=e$

$f(k+l)=f(k)\cdot f(l),\ \forall k,l\in\mathbb{Z}$

$f(1)=a\in G$

$f(2)=f(1+1)=a^2$

$\vdots$

$f(n)=a^n,\ \forall n\in\mathbb{N}$

$e=f(0)=f(n+(-n))=f(n)f(-n)$
$=a^n\cdot f(-n)\ |\cdot a^{-n}$
$\Leftrightarrow a^{-n}=a^{-n}\cdot a^n\cdot f(-n)$
$a^{-n}=e\cdot f(-n)$
$\Rightarrow a^{-n}=f(-n),\ \forall n\in\mathbb{N}$

$\Rightarrow f(n)=a^n,\ \forall n\in\mathbb{Z}$

$Hom_{gr}(\mathbb{Z},G)=\{f_a\mid a\in G\}$, $f_a:\mathbb{Z}\to G$, $f_a(k)=a^k,\ \forall a\in\mathbb{Z}$

Obs: $\underset{\text{mulțime}}{X} \xrightarrow{\alpha} (G,\cdot)$ grup $\Rightarrow \exists!$ o structură de grup pe X a.î. α este izomorfism de grup.

Anume: $x \bullet y = \alpha^{-1}(\underbrace{\alpha(x)\,\alpha(y)}_{\in G})$, $\forall x,y \in G$.

$X = \mathrm{Hom}_{gr}(\mathbb{Z}, G) \xrightarrow{\sim} G$, $f(a) \bullet f(b) = \alpha^{-1}(a\cdot b)$

$\alpha(f_a) = a$

$f(a) \bullet f(b) = \alpha^{-1}(\alpha(f_a)\cdot \alpha(f_b))$

$f(a) \bullet f(b) = \alpha^{-1}(ab)$

$f(a) \bullet f(b) = f_{ab}$, $\forall a,b \in G$.

$\mathrm{Hom}_{gr}(\mathbb{Z},\mathbb{Z}) = \{f_a \mid a \in \mathbb{Z}\}$, $f_a : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f_a(k) = ka$, $\forall a \in \mathbb{Z}$

$f_a \bullet f_b = f_{a+b}$

$\mathrm{Hom}_{gr}(\mathbb{Z},\mathbb{Q}) = \{f_a \mid a \in \mathbb{Q}\}$, $f_a : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$, $f_a(k) = ak$, $\forall a \in \mathbb{Z}$

$f_a \bullet f_b = f_{a+b}$

---

⑦ $\mathrm{Hom}_{gr}(\mathbb{Q}, G) = ?$

Fie $f : \mathbb{Q} \to G$ morfism de grupuri

$f(0) = e$, $e \in G$

$f(a+b) = f(a)\cdot f(b)$, $\forall a,b \in \mathbb{Q}$

$f(1) = a$, $a \in G$

$f(n) = a^n$, $\forall n \in \mathbb{Z}$ (ca la ⑥)

$f(1) = f(\underbrace{\tfrac{1}{q} + \tfrac{1}{q} + \dots + \tfrac{1}{q}}_{\text{de } q \text{ ori}})$, $q \in \mathbb{N}$

$a = f(\tfrac{1}{q})^q \Rightarrow f(\tfrac{1}{q}) = \sqrt[q]{a}$ (dacă există)

EXEMPLU

$\mathrm{Hom}_{gr}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}) = ?$

Caut $a \in \mathbb{Z}$ a.î. $\forall q \in \mathbb{N}^*$ $\exists x \in \mathbb{Z}$ a.î. $a = x\cdot q \Leftrightarrow \frac{a}{q} = x \in \mathbb{Z}$, $\forall q \in \mathbb{N}^* \Leftrightarrow a = 0$

$\mathrm{Hom}_{gr}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}) = \{f \mid f(r) = 0$

$\mathrm{Hom}_{gr}(\mathbb{Q}, \mathbb{Q}) = ?$

Caut $a \in \mathbb{Z}$ a.î. $\forall q \in \mathbb{N}^*$, $\exists x \in \mathbb{Q}$ a.

$a = x \cdot q \Leftrightarrow x = \frac{a}{q} \in \mathbb{Q}$

$\Rightarrow a \in \mathbb{Q} \Rightarrow \mathrm{Hom}_{gr}(\mathbb{Q},\mathbb{Q}) = \{f_a$

$f_a(r) = a\cdot\frac{p}{q}$, $\forall r = \frac{p}{q}$, $q \in \mathbb{N}$

Avem morfisme de grupuri doar dacă $\exists\, a \in G$ cu proprietatea că $\forall q \in \mathbb{N}^*$, $\exists\, x \in G$ a.î. $a = x^q$ ($x = \sqrt[q]{a}$)

$f(\tfrac{p}{q}) = f(\tfrac{1}{q})^p = (\sqrt[q]{a})^p$

Temă: este grup $\mathrm{Hom}_{gr}(\mathbb{Q},\mathbb{Q})$?

G - grup, $S \subseteq G$ finit, $<S>$ = cel mai mic subgrup al lui G ce conține S.

= intersecția tuturor subgrupurilor H în G care îl conțin pe S

$= \bigcap\limits_{\substack{H \leq G \\ S \subseteq H}} H$ $\qquad H \leq G \iff H$ subgrup în G.

$= \{ x_1^{\varepsilon_1} \dots x_n^{\varepsilon_n} \mid n \in \mathbb{N}^*, x_i \in S \ (i=\overline{1,n}), \varepsilon_i = \pm 1 \}$

$\langle x \rangle = \{ x^{\varepsilon_1} \dots x^{\varepsilon_n} \mid n \in \mathbb{N}^*, \varepsilon_i \in \{\pm 1\} \ \forall i = \overline{1,n} \}$

$= \{ x^k \mid k \in \mathbb{Z} \}$ - subgrupul lui G generat de x.

$G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ (produsul direct) $\to$ caz aditiv.

$G = \{(x,y) \mid x,y \in \mathbb{Z}_2\} = \{ \underbrace{(\hat{0},\hat{0})}_{e}, \underbrace{\underbrace{(\hat{0},\hat{1})}_{u}, \underbrace{(\hat{1},\hat{0})}_{v}}_{\text{generatori}}, \underbrace{(\hat{1},\hat{1})}_{u+v} \}$

$\langle e \rangle = e$

$\langle (\hat{1},\hat{0}) \rangle = \{ k(\hat{1},\hat{0}) \mid k \in \mathbb{Z} \} \to$ se adună pt. că $(\mathbb{Z},+)$.

$= \{ (\hat{k},\hat{0}) \mid k \in \mathbb{Z} \} = \{ (\hat{0},\hat{0}), (\hat{1},\hat{0}) \}$

$\langle (\hat{0},\hat{1}) \rangle = \{ (\hat{0},\hat{0}), (\hat{0},\hat{1}) \}$

$\langle (\hat{1},\hat{1}) \rangle = \{ (\hat{0},\hat{0}), (\hat{1},\hat{1}) \}$

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 &= \langle u, v \mid u^2 = v^2 = e, uv = vu \rangle \\ &= \{ u^i v^j \mid 0 \leq i,j \leq 1 \} \end{aligned}}$$

OBS $\quad G$ grup abelian și $x,y \in G$, $\langle x,y \rangle = \{ x^k y^l \mid k,l \in \mathbb{Z} \}$
- subgrupul generat de 2 elem

$\langle (\hat{0},\hat{1}), (\hat{1},\hat{0}) \rangle = \{ k(\hat{0},\hat{1}) + l(\hat{1},\hat{0}) \mid k,l \in \mathbb{Z} \}$

$= \{ (\hat{l},\hat{k}) \mid k,l \in \mathbb{Z} \} = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 = G$

$\boxed{x}$ $\quad f: \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \to G$, f morfism de grupuri

$\langle u,v \rangle = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$

$f(u) = x, f(v) = y \to f(u+v) = f(u) \cdot f(v) = xy$

$f((\hat{0},\hat{0})) = e$

$e = f((\hat{0},\hat{0})) = f(u+u) = f(u) \cdot f(u) = x \cdot x = x^2 \dots e = y^2$

$f(u+v) = f(v+u) \iff f(u) \cdot f(v) = f(v) \cdot f(u) \iff xy = yx$.

A da morfismul de grup de la $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ este echivalent cu a da două elem. din G a.î. $x^2 = y^2 = e$ și $xy = yx$

(câte 4 pos pt. u, respectiv v)

$f: \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$

$f((\hat{0},\hat{0})) = (\hat{0},\hat{0})$, $f(u) = x$, $2x = (\hat{0},\hat{0}) \Rightarrow x \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ $\Big| \Rightarrow 16$ morfisme de gr.

$2y = (\hat{0},\hat{0}) \Rightarrow y \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$

→ Câte sunt automorfisme? // Câte sunt bijective?

$f((\hat{0},\hat{0}))=(\hat{0},\hat{0})$

$f(u)=x, \quad x\in \mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2 \setminus \{(\hat{0},\hat{0})\}$

$f(v)=y, \quad y\in \mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2 \setminus \{(\hat{0},\hat{0}), x\}$ $\Big|\Rightarrow$ 6 automorfisme

(Singurele grupuri cu 6 elem sunt $\mathbb{Z}_6$ și S_3 (sau izomorfe)

$S_3=\{e, \underbrace{(12)}_{\tau}, \underbrace{(13)}_{\sigma\tau}, \underbrace{(23)}_{\sigma^2\tau}, \underbrace{(123)}_{\sigma}, \underbrace{(132)}_{\sigma^2}\}$

$\tau\sigma \neq \sigma\tau \Rightarrow S_3$ nu este abelian $\Leftrightarrow S_3$ nu e ciclic.

$\sigma\tau=(123)(12)=(13)$

Calculăm ordinul lui τ: $\tau^2=(12)(12)=e$

ordinul lui σ: $\sigma^2=(123)(123)=(132)$ // $\sigma^3=(132)(123)=e$

~~$\sigma^2\tau=(132)(12)=(23)$~~

$\tau\sigma=(12)(123)=(23)=\sigma^2\tau \Leftrightarrow \sigma\tau=\tau\sigma^2$

$$<\sigma\tau>=\{x_1^{\varepsilon_1}\dots x_n^{\varepsilon_n} \mid x_i\in\{\sigma,\tau\}, \varepsilon_i=\pm1\}$$
$$=\{x_1\dots x_n \mid x_i\in\{\sigma,\sigma^2,\tau\}\}$$
$$=\{\sigma^k\tau^l \mid k,l\in\mathbb{N}\}=\{\sigma^i\tau^j \mid i=\overline{0,2}, j=\overline{0,1}\}$$
$$S_3=<\sigma\tau>=\{\sigma^i\tau^j \mid i\in\{0,1,2\}, j\in\{0,1\}\}$$

Dacă G grup, $Aut(G)=\{f:G\to G \mid f$ izomorfism de gr$\}$

$Aut(G)$ este grup în raport cu compunerea funcțiilor.

$Aut(\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2)$ izomorfism cu S_3, izomorfism de grupuri.

$f_1=id_{\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2}$

$f_2(e)=e, \; f_2(u)=v, \; f_2(v)=u+v, \; f_2(u+v)=f_2(u)+f_2(v)=u$

$f_3(e)=e, \; f_3(u)=v, \; f_3(v)=u, \; f_3(u+v)=v+u$

$f_4(e)=e, \; f_4(u)=u+v, \; f_4(v)=v, \; f_4(u+v)=u+v+v=u$

$f_5(e)=e, \; f_5(u)=u+v, \; f_5(v)=u, \; f_5(u+v)=v$

$f_6(e)=e, \; f_6(u)=u, \; f_6(v)=u+v, \; f_6(u+v)=v$

$Aut(\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2)=\{f_1\dots f_6\}$

$f_2^2(u) = f_2(f_2(u)) = f_2(v) = u+v \Rightarrow f_2^3(u) = f_2(u+v) = u$

$f_2^2(v) = f_2(f_2(v)) = f_2(u+v) = u \Rightarrow f_2^2 = f_5$ și $f_2^3 = f_1$

$f_3^2(v) = v \Rightarrow f_3^2 = f_1 \;\|\; f_4^2 = f_1 \;\|\; f_6^2 = f_1$

$$\left.\begin{array}{l} f_2 \circ f_3(u) = f_2(v) = u+v \\ f_2 \circ f_3(v) = f_2(u) = v \end{array}\right| \Rightarrow f_2 \circ f_3 = f_4$$

$$\left.\begin{array}{l} f_2^2 \circ f_3(u) = f_2^2(v) = u \\ f_2^2 \circ f_3(v) = f_2^2(u) = u+v \end{array}\right| \Rightarrow f_2^2 \circ f_3 = f_6 \;\Bigg\|\; \left.\begin{array}{l} f_3 \circ f_2(u) = u \\ f_3 \circ f_2(v) = v+u \end{array}\right| \Rightarrow f_3 \circ f_2 = f_6$$

$$\Downarrow$$

$$f_2^2 \circ f_3 = f_3 \circ f_2$$

$$Aut(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) = \langle f_2, f_3 \mid f_2^3 = f_1 = f_3^2,\ f_2^2 \circ f_3 = f_3 \circ f_2 \rangle$$

$$S_3 = \langle \sigma, \tau \mid \sigma^3 = e = \tau^2,\ \tau\sigma = \sigma^2\tau \rangle \simeq Aut(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$$

f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
e	σ	τ	$\sigma\tau$	σ^2	$\sigma^2\tau$

Seminar 9

8.12.2022

① Fie G un grup a.î. $x^2 = e$, $\forall x \in G$, atunci G este abelian.

$x^2 = e, \forall x \in G \Leftrightarrow x = x^{-1}, \forall x \in G.$

Fie $x, y \in G$. $xy = (xy)^{-1} \Leftrightarrow xy = y^{-1}x^{-1} \Leftrightarrow xy = yx \Rightarrow G$ abelian

② G grup cu p elemente (p prim) $\Rightarrow G = \langle x \rangle, \forall x \in G \setminus \{e\}$.

$\Rightarrow G \simeq (\mathbb{Z}_p, +)$ (teorema de structură a grupurilor ciclice).

$G = \{e, x \dots x^{p-1}\} \longrightarrow \mathbb{Z}_p : x^j \to \hat{j}$ (izomorfism)

G grup cu 4 elem $\Rightarrow G$ izomorf cu $(\mathbb{Z}_4, +)$ sau $G \simeq (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, +)$

Fie $x \in G$, $x \neq e$. $ord(x) \mid 4$, $ord(x) \neq 1 \Rightarrow ord(x) \in \{2, 4\}$.

$\boxed{I}$ $\exists\, x \in G$ a.î. $ord(x) = 4$.

teorema de structură a grupurilor ciclice

$|\langle x \rangle| = 4 = |G| \Leftrightarrow G = \langle x \rangle \Rightarrow G$ grup ciclic cu 4 elemente $\Rightarrow G \simeq (\mathbb{Z}_4, +)$

$\boxed{II}$ $\nexists\, x \in G$ a.î. $ord(x) = 4 \Rightarrow ord(x) = 2\ \forall x \in G \setminus \{e\} \Rightarrow x^2 = e\ \forall x \in G$

$\Rightarrow G$ abelian Conform ①

Fie $x \in G \setminus \{e\} \Rightarrow \langle x \rangle \subsetneq G \Rightarrow \exists\, y \in G \setminus \{x\} \Rightarrow |\{e, x, y, xy\}| = 4$

$y \neq e, x \neq y$

$\Rightarrow G = \{e, x, y, xy\}$, $ord(x) = ord(y) = 2$

$xy = yx$.

$G \to \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 : x \to (1,0),\ y \to (0,1),\ xy \to (1,1),\ e \to (0,0)$

$\Rightarrow G \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$

③ Fie $G = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \mid |A| \neq 0\}$, grup cu înmulțirea matricelor.

Considerăm $Q = \langle A, B \rangle \leq G$

$A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$A^2 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I_2 \Rightarrow A^3 = -A,\ A^4 = I_2$

$\to$ ord$(A) = 4$

$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I_2 \Rightarrow A^3 = -B,\ B^4 = I_2$

$\to$ ord$(B) = 4$

$AB = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$

$BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} = -AB$

$\boxed{Q = \langle A, B \mid \text{ord}(A) = \text{ord}(B) = 4,\ A^2 = B^2 = -I_2,\ AB = -BA \rangle}$

$Q = \{\pm A^u B^v \mid u, v \in \mathbb{N}\} = \{\pm A^u B^v \mid u, v \in \{0, 1\}\}$

$Q = \{\pm I_2, \pm A, \pm B, \pm AB\} \Rightarrow |Q| = 8$, Q = grupul cuaternionilor

④ Fie $H \leq Q \Rightarrow$ ord$(H) \in D_8 = \{1, 2, 4, 8\}$

$Q = \{\pm I_2, \pm A, \pm B, \pm AB\}$

$|H| = 1 \Rightarrow H = \{I_2\}$

$|H| = 2 \Rightarrow H = \langle X \mid \text{ord}(X) = 2 \rangle \Rightarrow X \in \{-I_2\}$

$(\pm AB)^2 = (\pm AB)(\pm AB) = A\underbrace{BA}_{-AB}B = A(-AB)B = -A^2B^2 = -I_2$

$\Rightarrow H = \langle -I_2 \rangle = \{\pm I_2\}$

$|H| = 4 \Rightarrow H = \langle X \mid \text{ord}(X) = 4 \rangle$ sau $H = \langle X, Y \mid \text{ord}(X) = \text{ord}(Y) = 2,\ XY = YX \rangle$

$\to -I_2$ este singurul element de ordin 2 din Q

$\Rightarrow H = \langle X \mid \text{ord}(X) = 4 \rangle \Rightarrow H = \langle A \rangle = \{\pm I_2, \pm A\} = \langle -A \rangle$

sau $H = \langle B \rangle = \{\pm I_2, \pm B\} = \langle -B \rangle$ sau $H = \langle AB \rangle = \{\pm I_2, \pm AB\} = \langle -AB \rangle$

$|H| = 8 \Rightarrow H = Q$

⑤ **DEF.**: $H \leq G$ s.n. subgrup normal dacă $\forall x \in G$ şi $h \in H$ avem $x h x^{-1} \in H$. ($H \trianglelefteq G$) → (H subgrup normal) □

$H \trianglelefteq G \Rightarrow (G/_H)_s = (G/_H)_d = G/_H$ grup în raport cu înmulţirea indusă de pe G: $\hat{x} \cdot \hat{y} = \widehat{xy}$

→ Subgrupul trivial ($\{I_2\}$) şi tot grupul (Q) sunt subgrup normal în Q.

↳ $\{e\} \trianglelefteq G$, $G \trianglelefteq G$.

Dacă $\underbrace{[G:H]}_{\text{indicele lui } H \text{ în } G}=2 \Rightarrow H \trianglelefteq G$.

$\boxed{\text{Subgrupurile normale ale lui Q}}$

$H = \{I_2\} \Rightarrow H \trianglelefteq Q$

$H = \{\pm I_2\}$

$\forall X \in Q$, $X(\pm I_2)X^{-1} = \pm XX^{-1} = \pm I_2 \in H \Rightarrow H \trianglelefteq Q$

$H \leq Q$, $|H| = 4 \Rightarrow [G:H] = \frac{|G|}{|H|} \Rightarrow [Q:H] = \frac{|Q|}{|H|} = \frac{8}{4} = 2 \Rightarrow H \trianglelefteq Q$

$|H| = 8 \Rightarrow H = Q \Rightarrow H \trianglelefteq Q$

OBS: Toate subgrupurile lui Q sunt normale, iar Q nu e abelian.

$\boxed{\text{Grupurile factor ale lui Q}}$

$[x]_s = \{xh \mid h \in H\} = xH$ $= \{y \in G \mid x^{-1}y \in H\}$

$[x]_d = \{hx \mid h \in H\} = Hx$

$H \trianglelefteq G$, $[x]_s = [x]_d = \hat{x}$

OBS: $G/\{e\} \simeq G$

$\{\hat{x} = \{x\} \mid x \in G\}$

$H = \{\pm I_2\} \Rightarrow |Q/H| = 4$

$Q/H = \{\underbrace{\hat{I}_2 = \{\pm I_2\}}_{\substack{\text{ordin 1} \\ \text{(el. neutru)}}}, \underbrace{\hat{A} = \{\pm A\}, \hat{B} = \{\pm B\}, \widehat{AB} = \{\pm AB\}}_{\text{ord 2}}\}$

$(\hat{A})^2 = \hat{A} \cdot \hat{A} = \widehat{A^2} = \widehat{-I_2} = \hat{I}_2 \Rightarrow \text{ord}(\hat{A}) = 2$

$(\hat{B})^2 = \widehat{B^2} = \widehat{-I_2} = \hat{I}_2 \Rightarrow \text{ord}(\hat{B}) = 2$

$(\widehat{AB})^2 = \widehat{ABAB} = \widehat{A(-AB)B} = \widehat{-I_2} = \hat{I}_2 \Rightarrow \text{ord}(\widehat{AB}) = 2$

$\Rightarrow Q/H \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$

Dacă $\text{ord}(H) = 4 \Rightarrow |Q/H| = 2 \Rightarrow Q/H \simeq \mathbb{Z}_2$ (cazul prim)

$H = \langle A \rangle = \{\pm I_2, \pm A\}$

(pt Q/H luam un el. din Q, facem clasă şi înmulţim cu toate el. din H)

$Q/H = \{\hat{I}_2 = \{\pm I_2, \pm A\}, \hat{B} = \{\pm B, \pm AB\}$

Dacă $\text{ord}(H) = 8 \Rightarrow H = Q \Rightarrow Q/H \simeq \{e\}$

$G = S_3 = \langle \sigma, \tau \mid \sigma^3 = \tau^2 = e, \tau\sigma = \sigma^2\tau \rangle$

$H = \langle \tau \rangle = \{e, \tau\}$

$(G/H)_s = \{ [e]_s = \{e, \tau\}, [\sigma]_s = \{\sigma, \sigma\tau = \tau\sigma^2\}, [\sigma^2]_s = \{\sigma^2, ...$

$(G/H)_d = \{ [e]_d = \{e, \tau\}, [\sigma]_d = H\sigma = \{\sigma, \tau\sigma\}$

$[\sigma^2]_d = H\sigma^2 = \{\sigma^2, \tau\sigma^2\}\}$

$H \ntrianglelefteq S_3$

Temă: Det subgrupurile lui S_3, subgrupurile normale și grupurile fact...

* subgrupurile pot avea 1, 2, 3, 6 el (T. Lagrange)

$\boxed{\text{Seminar 10}}$ 20.12.2022

1) $G = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} / _{\langle(2,2)\rangle}$ Det. elem. de ordin finit ale lui G. Este G grup finit? Dar ciclic?

Fie $(\widehat{x,y}) \in G$ de ordin finit. $\Leftrightarrow$ suntem în notație aditivă

$\Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{N}^*$ a.î. $t(\widehat{x,y}) = (\widehat{0,0}) \Leftrightarrow$

$(\widehat{tx, ty}) = (\widehat{0,0}) \Leftrightarrow$

$(tx, ty) - (0,0) \in \langle(2,2)\rangle \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}$ a.î. $(tx, ty) = (2k, 2k)$

$\Leftrightarrow tx = ty = 2k \Rightarrow x = y = \frac{2k}{t} \in \mathbb{Z}$

$\langle(2,2)\rangle = (2k, 2k), k \in \mathbb{Z}$.

$(G, \cdot)$ grup multiplicativ, $x \in G$

1) x este de ordin finit dacă $\exists t \in \mathbb{N}^*$ a.î. $x^t = e$. Iar ordinul este cel mai mic nr. nat. t ...

2) $o(x)$ infinit dacă $\nexists t \in \mathbb{N}^*$ a.î. $x^t = e$.

I $x = y \in 2\mathbb{Z} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}$ a.î. $x = y = 2k \Rightarrow$

$\Rightarrow (x, x) = (2k, 2k) \in \langle(2,2)\rangle$

$\Rightarrow (\widehat{x,x}) = (\widehat{0,0}) \Rightarrow ord(\widehat{x,x}) = 1$.

II $x = y \in 2\mathbb{Z}+1 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}$ a.î. $x = y = 2k+1. \Rightarrow (\widehat{x,x}) = (\widehat{2k+1, 2k+1})$

$(\widehat{x,x}) = (\widehat{2k, 2k}) + (\widehat{1,1}) = (\widehat{1,1}) \Rightarrow ord(\widehat{x,x}) = 2$ $(2 \cdot (\widehat{1,1}) = (\widehat{2,2}) = ...$

$\Rightarrow$ Avem 2 elem. de ordin finit $((\widehat{0,0})$ și $(\widehat{1,1}))$.

$t(G) := \{x \in G \mid o(x) < \infty\}$

$\Rightarrow t(G) = \{(\widehat{0,0}), (\widehat{1,1})\} \simeq (\mathbb{Z}_2, +)$, izom. de grup

$o((\widehat{1,0})) = \infty \Rightarrow G$ nu este finit (într-un grup finit, orice elem este de ordin finit).

Dacă G este ciclic, și G este infinit $\Rightarrow G \simeq (\mathbb{Z}, +)$

are un singur elem. de ordin finit

are 2 elem de ordin finit

$\Rightarrow$ nu pot fi izomorfe $\Rightarrow$ G nu e ciclic

Obs: 1) $G = \langle (\hat{1},\hat{0}), (\hat{0},\hat{1}) \rangle$ * generatorii au ordin infinit

sistem minimal de generatori

2) dacă $o(x,y) < \infty \not\Rightarrow o(x), o(y) < \infty$.

Exp: $x = (\hat{0},\hat{1})$, $y = (\hat{1},\hat{0})$ au ord. infinite în $G = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/_{\langle 2,2 \rangle}$

Dar $o(x+y) = 2 < \infty$

Temă: $(G,\cdot)$ grup; $x \in G$ cu $o(x) < \infty$. Atunci

$\forall k \in \mathbb{N}^*, \ o(x^k) = \frac{o(x)}{c.m.m.d.c.(k, o(x))}$

Exp: $\mathbb{Z}_n = \langle \hat{1} \rangle$, $o(\hat{1}) = n$

$\forall \hat{a} \in \mathbb{Z}_n, \ o(\hat{a}) = o(a\hat{1}) = \frac{o(\hat{1})}{(a, ord(\hat{1}))} = \frac{n}{(a,n)}$

② $G = H \times K$ – produs direct de grupuri. $(x,y) \in H \times K$.

(i) Dacă $o(x) = \infty$ sau $o(y) = \infty \Rightarrow o((x,y)) = \infty$.

(ii) Dacă $o(x) < \infty$ și $o(y) < \infty \Rightarrow o((x,y)) = [o(x), o(y)] < \infty$

(i) ⊛ Pp. că $o(x,y) < \infty \Rightarrow \exists t \in \mathbb{N}^*$ a.î. $(x,y)^t = (e_H, e_K) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x^t, y^t) = (e_H, e_K) \Leftrightarrow x^t = e_H, \ y^t = e_K \Rightarrow ord(x) < \infty, ord(y) < \infty$ ⚡

$\Rightarrow$ Dacă $ord(x)$ sau $ord(y) = \infty \Rightarrow ord(x,y) = \infty$.

(ii) $ord(x) = n$, $ord(y) = m$.

$(x,y)^{[n,m]} = (x^{[n,m]}, y^{[n,m]}) = \left((x^n)^{\frac{[n,m]}{n}}, (y^m)^{\frac{[n,m]}{m}}\right) = \left(e_H^{\frac{[n,m]}{n}}, e_K^{\frac{[n,m]}{m}}\right)$

$= (e_H, e_K)$

Fie $t \in \mathbb{N}^*$ a.î. $(x,y)^t = (e_H, e_K) \Leftrightarrow x^t = e_H, \ y^t = e_K \Rightarrow n \mid t, \ m \mid t \Rightarrow \underset{\text{cmmmc}}{[n,m]} \mid t$

Deci $ord((x,y)) = [ord(x), ord(y)]$.

③ $G = \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_{12}$ Det. elem. de ordin 12 din G.

Fie $(\hat{x}, \bar{y}) \in \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_{12}$, cu $ord(\hat{x}, \bar{y}) = 12$.

$[ord(\hat{x}), ord(\bar{y})] = 12$

$ord(\hat{x}) \in \{1, 3, 9\}$

$ord(\bar{y}) \in \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

I $ord(\hat{x}) = 1$, $ord(\bar{y}) = 12$

$\Rightarrow \hat{x} = \hat{0}$, $\bar{y} = \bar{a}$ a.î. $(a, 12) = 1$

$\Rightarrow \bar{y} \in \{1, 5, 7, 11\}$

(avem 4 elem. de ord. 12)

II $ord(\hat{x}) = 3 \Rightarrow ord(\bar{y}) \in \{4, 12\}$

$\Leftrightarrow (x, 9) = 3 \Leftrightarrow \hat{x} \in \{\hat{3}, \hat{6}\}$

(4+8 elem. de ord 12)

i) $ord(\bar{y}) = 4 \Rightarrow (y, 12) = 3 \Rightarrow \bar{y} \in \{3, 9\}$

ii) $ord(\bar{y}) = 12 \Rightarrow \bar{y} \in \{1, 5, 7, 11\}$

III $ord(\hat{x}) = 9 \Rightarrow (x, 9) = 1 \Rightarrow \hat{x} \in \{\hat{1}, \hat{2}, \hat{4}, \hat{5}, \hat{7}, \hat{8}\}$

$ord(\bar{y})$

$[\underset{9}{ord(\hat{x})}, ord(\bar{y})] = 12 \cancel{\vdots} 6 \overset{(9 \nmid 12)}{\Rightarrow}$ nu e posibil (o elem de ord 12)

④ Când $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$ este grup ciclic?

($\Leftrightarrow$ Când $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ e izomorf cu $\mathbb{Z}_{n \times m}$?)

$\Leftrightarrow \exists (\hat{x}, \bar{y}) \in \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ unde $ord((\hat{x}, \bar{y})) = mn$

$\Leftrightarrow$ cmmmc $[ord(\hat{x}), ord(\bar{y})] = mn \Leftrightarrow$

$$\left[\frac{m}{(x, m)}, \frac{n}{(y, n)}\right] = mn$$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{mn}{(x,m)(y,n)}}{\left(\frac{m}{(x,m)}, \frac{n}{(y,n)}\right)} = mn \Leftrightarrow (x,m)(y,n)\left(\frac{m}{(x,m)}, \frac{n}{(y,n)}\right) = 1 \text{ în } \mathbb{N}$$

$$\Leftrightarrow (x, m) = (y, n) = \left(\frac{m}{(x, m)}, \frac{n}{(y, n)}\right) = 1 \quad (*)$$

$\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ = ciclic $\Leftrightarrow \exists x, y$ a.î. $(*)$ are loc. (iau spre ex $x=y=1$ sau orice x, y care sunt prime cu (m,n))

$\Leftrightarrow (m, n) = 1$

$(m, n) = 1: \quad \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n \leftarrow \mathbb{Z}_{m \times n}$

$(\hat{x}, \bar{x}) \leftarrow \bar{x}$

$I + J = R$

$R/I \times R/J \simeq R/IJ$

⑤ Dem. că $\underset{\text{grup abelian}}{\mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_{18}} = \langle (\hat{1}, \bar{3}), (\hat{3}, \bar{5}) \rangle \supseteq$

$\| $

$\{\alpha(\hat{1}, \bar{3}) + \beta(\hat{3}, \bar{5}) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{Z}\}$

$\|$

$\{(\widehat{\alpha + 3\beta}, \overline{3\alpha + 5\beta}) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{Z}\}$

Arătăm că $\forall (\hat{a}, \bar{b}) \in \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_{18}, \exists \alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ a.î. $\begin{cases} \hat{a} = \widehat{\alpha + 3\beta} \text{ în } \mathbb{Z}_9 \\ \bar{b} = \overline{3\alpha + 5\beta} \text{ în } \mathbb{Z}_{18} \end{cases}$

$$\underset{\Leftrightarrow}{(2,9)=1} \begin{cases} \alpha \cdot \bar{2} + \beta \cdot \bar{6} = \overline{2a} \\ \alpha \cdot \bar{3} + \beta \cdot \bar{5} = \bar{b} \end{cases} \ldots$$

am înmulțit cu 2 prima ec $\Rightarrow$ ambele ec din sistem sunt acum în $\mathbb{Z}_{18}$.

$\bar{1}(\alpha - \beta) = \overline{b - 2a} \Rightarrow \alpha\bar{1} = \beta\bar{1} + \overline{b - 2a}$

$\ldots\cdot\bar{6}+\beta\cdot\bar{2}+\overline{2b-4a}=\overline{2a} \Rightarrow \beta\cdot\bar{8}+\overline{2b-4a}=\overline{2a}$ în $\mathbb{Z}_{10}$ $\overset{(2,9)=1}{\Longleftrightarrow}$

$\hat{4}\cdot\beta=\widehat{3a-b}$ în $\mathbb{Z}_9$ $\overset{(4,9)=1}{\Longleftrightarrow}$ $\exists(\hat{4})^{-1}=\hat{7}$ în $\mathbb{Z}_9 \Rightarrow$

$\beta=\widehat{21a-7b}$ în $\mathbb{Z}_9 \Rightarrow \hat{\beta}=\widehat{3a+2b}$

Deci $\beta=3a+2b$ și $\alpha=\beta+b-2a \Leftrightarrow \alpha=3b+a$