Seminar 6

8.11.2021

Reamintese:

Def Fie $A \neq \emptyset$ şi "$\sim$" o relaţie binară pe A. "$\sim$" s.n. relaţie de echivalenţă pe A dacă îndeplineşte simultan condiţiile:

1) reflexivă: $a \sim a$ $(\forall) a \in A$
2) simetrică: $a \sim b \Rightarrow b \sim a$
3) tranzitivă: $a \sim b, b \sim c \Rightarrow a \sim c$

Def O relaţie binară pe mulţ. $A \neq \emptyset$ reprezintă o submulţime a lui $A \times A$

O rel. binară pe mult. A este antisimetrică dacă:
$a \sim b, b \sim a \Rightarrow a = b$

Def Fie "$\sim$" o rel. de echiv. pe mult. $A \neq \emptyset$. O submulţime $S \subseteq A$ s.n. SCR (= "sistem complet de reprezentanţi") pentru "$\sim$" dacă S conţine exact câte un element din fiecare clasă de echivalenţă. Deci

S e SCR dacă:
1) $(\forall) a \in A$ $(\exists) s \in S$ a.î. $a \sim s$ $(\Leftrightarrow [a] = [s])$
2) $(\forall) s_1 \neq s_2$; $s_1, s_2 \in S$ atunci $s_1 \not\sim s_2$ $(\Leftrightarrow [s_1] \cap [s_2] = \emptyset)$,

unde $[a]$ repr. clasa de echiv. a unui element $a \in A$. $\left([a] = \{b \in A \mid a \sim b\}\right)$

Exemplu ① Fie "$\equiv (\text{mod } 5)$" pe $\mathbb{Z}$ $\quad a \equiv b (\text{mod } 5) \Leftrightarrow 5 \mid a - b$

$\hat{a} = \{b \in \mathbb{Z} \mid a \equiv b (\text{mod } 5)\}$; de ex. $\quad \hat{0} = \{5k \mid k \in \mathbb{Z}\}$

$\hat{1} = \{5k+1 \mid k \in \mathbb{Z}\}$

$\vdots$

$\hat{4} = \{5k+4 \mid k \in \mathbb{Z}\}$

Thm. împ. cu rest
$\Downarrow$
$(\forall) a \in \mathbb{Z}$ $\quad a \equiv 0 (\text{mod } 5)$ sau $a \equiv 1 (\text{mod } 5)$ sau ... sau $a \equiv 4 (\text{mod } 5)$

$$\mathbb{Z} /_{\text{"}\equiv \text{mod}(5)\text{"}} = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}\}$$

mult. factor

3 ex. de SCR distincte:
$S_1 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ $\quad S_3 = \{-5, -4, -3, -2, -1\}$
$S_2 = \{5, 6, 7, 8, 9\}$

Ex 1 (Prb 19/24) Fie $A = \{1, 2, 3\}$ şi $\mathcal{R}$ mult. tuturor relaţiilor binare pe A. Considerăm axiomele de: 1) reflexivitate; 2) simetrie; 3) tranzitivitate; 4) antisimetrie. Calculaţi imaginea funcţiei următoare:

$\boxed{A = \{1, 2, 3\}}$

$$g : \mathcal{R} \to \{0, \ldots, 15\}$$

$$g(\rho) = a_1 + 2a_2 + 2^2 a_3 + 2^3 a_4, \text{ unde}$$

$a_i = 1$ (resp $a_i = 0$) dacă rel. binară ρ satisface (resp. nu satisface) axioma i).

$(\forall)\ k\in\{0,\dots,15\}$ se scrie în mod unic (în baza 2) sub forma $k=b_1+2b_2+2^2 b_3+2^3 b_4$. $k\in Im(g) \Leftrightarrow (\exists)\ \rho\in\mathcal{R}$ a.î. $g(\rho)=k \Leftrightarrow (\exists)\ \rho\in\mathcal{R}$ a.î. ρ satisface/nu satisface 1), 2), 3), 4) conform b_1,b_2,b_3,b_4

① $\boxed{k=0}$ $\leadsto k=0+2\cdot 0+2^2\cdot 0+2^3\cdot 0$

$0\in Im(g) \Leftrightarrow (\exists)\ \rho_1\in\mathcal{R}$ a.î. ρ_1 nu satisface ax. 1), 2), 3), 4) $(b_1=b_2=b_3=b_4=0)$

De ex $\rho_1(\subseteq A\times A)=\{(1,2),(2,1),(1,3)\}$ nu satisface 1), 2), 3) și 4)

$(g(\rho_1)=0)$

② $\boxed{k=9}$ $\leadsto 9=\underset{b_1}{1}+2\cdot\underset{b_2}{0}+2^2\cdot\underset{b_3}{0}+2^3\cdot\underset{b_4}{1}$ (scrierea unică în baza 2)

$9\in Img \Leftrightarrow (\exists)\ \rho_2\in\mathcal{R}$ a.î. ρ_2 satisface ax. 1), 4) și nu satisface ax 2), 3).

De ex $\rho_2(\subseteq A\times A)=\{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,3)\}$

$(g(\rho_2)=9)$

③ $\boxed{k=4}$ $\leadsto 4=\underset{b_1}{0}+2\cdot\underset{b_2}{0}+2^2\cdot\underset{b_3}{1}+2^3\cdot\underset{b_4}{0}$

De ex $\rho_3(\subseteq A\times A)=\{(1,2),(2,1),(1,1),(1,3),(2,3)\}$

$(1\neq 2)$ ρ_3 nu e antisimetrică!

$g(\rho_3)=4$

$(2,2)\notin\rho_3 \Rightarrow \rho_3$ nu e reflexivă!

ρ_3 e tranzitivă $\Leftarrow$
$\boxed{\begin{array}{l}(1,2),(2,1)\in\rho_3 \Rightarrow (1,1)\in\rho_3\\ (1,2),(2,3)\in\rho_3 \Rightarrow (1,3)\in\rho_3\\ (2,1),(1,3)\in\rho_3 \Rightarrow (2,3)\in\rho_3\end{array}}$

$\{(1,2),(2,3),(1,3)\}$

$(1,3)\in\rho_3;\ (3,1)\notin\rho_3 \Rightarrow \rho_3$ nu e simetrică

TEMĂ Calculați $Im(g)$. $(10,11\notin Img)$.

④ $11=\underset{b_1}{1}+2\cdot\underset{b_2}{1}+2^2\cdot\underset{b_3}{0}+2^3\cdot\underset{b_4}{1}$

$11\in Im(g) \Leftrightarrow (\exists)\ \rho_4\in\mathcal{R}$ a.î. ρ_4 satisface ax. 1), 2), 4) și nu satisface ax 3).

Afirm Dacă ρ e simetrică și antisimetrică $\Rightarrow \rho$ e tranzitivă

(în particular, asta înseamnă că $(\not\exists)\ \rho_4 \Rightarrow 11\notin Im(g)$)

Dem Fie $(a,b)\in\rho$, $(b,c)\in\rho$. Tb. să arăt că $(a,c)\in\rho$

$\Downarrow$ ρ sim.

$(b,a)\in\rho$

$\left.\begin{array}{l}(a,b)\in\rho\\(b,a)\in\rho\end{array}\right| \xRightarrow{\rho \text{ antisim}} \underline{a=b} \Rightarrow (b,c)\in\rho$

(Aş putea să arăt similar şi că $a=c$ "$=b$")

Ex 2

Def. pe $\mathbb{R}$ rel. binară "$\sim$" astfel: $x\sim y \overset{def}{\Longleftrightarrow} x^2-3x=y^2-3y$. Arătaţi că "$\sim$" este rel. de echivalenţă, calculaţi $\mathbb{R}/_\sim$, determinaţi un SCR pt "$\sim$". E bine definită funcţia $f:\mathbb{R}/_\sim\to\mathbb{R}$, $f(\hat{t})=-t^2+3t+7$? Dar $g:\mathbb{R}/_\sim\to\mathbb{R}$, $g(\hat{t})=t^2+t+1$?

Ex. 3

Pe $\mathbb{C}$ def "$\sim$": $z\sim y \Leftrightarrow |z|=|y|$. Arătaţi că "$\sim$" este rel. de echiv., calculaţi $\mathbb{C}/_\sim$, det. un SCR pt "$\sim$".

$\boxed{\text{Ex 2}}$ $x\sim y \overset{def}{\Longleftrightarrow} x^2-3x=y^2-3y$.

Vreau să arăt că $\sim$ e rel. de echiv. (adică satisface ax. 1), 2), 3))

Deoarece $x^2-3x=x^2-3x \overset{def}{\Rightarrow} x\sim x$ $(\forall)x\in\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ "$\sim$" e reflexivă. (1)

Fie $x,y\in\mathbb{R}$ a.î. $x\sim y \overset{def}{\Longrightarrow} x^2-3x=y^2-3y \Rightarrow y^2-3y=x^2-3x \Rightarrow y\sim x \Rightarrow$ "$\sim$" e sim. (2)

Fie $x,y,z\in\mathbb{R}$ a.î. $x\sim y$ şi $y\sim z \overset{def}{\Rightarrow} \left\{\begin{array}{l}x^2-3x=y^2-3y\\ y^2-3y=z^2-3z\end{array}\right| \Rightarrow x^2-3x=z^2-3z$

$\Rightarrow x\sim z \Rightarrow$ "$\sim$" e tranzitivă. (3)

Din (1), (2) şi (3) $\Rightarrow$ "$\sim$" e rel. de echivalenţă.

Pt un $x\in\mathbb{R}$ $\quad \hat{x} \overset{def}{=} \{y\in\mathbb{R} \mid x\sim y\} = \{y\in\mathbb{R} \mid \underline{x^2-3x=y^2-3y}\}$

clasa de echiv. a lui x

$x^2-3x=y^2-3y \Rightarrow x^2-y^2=3x-3y \Rightarrow (x-y)(x+y)=3(x-y)$

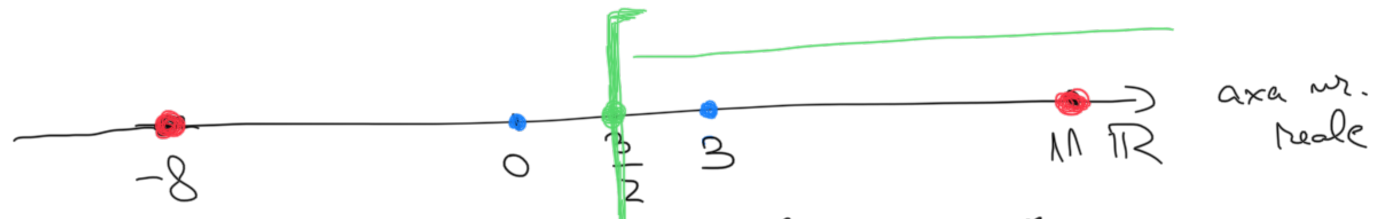
$\Rightarrow (x-y)(x+y-3)=0 \Rightarrow \underline{x=y}$ sau $\underline{x+y=3}$ $(\Leftrightarrow y=3-x)$

$\Rightarrow \hat{\frac{3}{2}}=\{\frac{3}{2}\}$ şi $\hat{x} \underset{x\neq\frac{3}{2}}{=} \{x,3-x\}$ $(\forall)x\in\mathbb{R}\setminus\{\frac{3}{2}\}$.

$\widehat{-8}=\{-8,11\}$ $\quad \hat{0}=\{0,3\}$

$\mathbb{R}/_\sim = \{\hat{x} \mid x\in\mathbb{R}\} = \{\hat{x} \mid x \in S\}$

SCR pt "~"



$\hat{0}=\{0,3\}$ $\quad \widehat{\tfrac32}=\{\tfrac32\}$ $\quad \widehat{-8}=\{-8,11\}$

(La fel se poate arăta că:

- $(-\infty,\frac32]$ e SCR
- $\{0\}\cup[\frac32,3)\cup(3,+\infty)$
- $[0,\frac32]\cup(3,+\infty)$

Afirmație $S=[\frac32;+\infty)$ este un SCR pt "~"

Dem Tb. să verific (vezi def. începutul S6):

1) $(\forall)\, a\in\mathbb{R}$ $(\exists)\, s\in S$ a.î. $a\sim s$.

și 2) $(\forall)\, s_1,s_2\in S$ $s_1\neq s_2 \Rightarrow s_1\not\sim s_2$.

1) Fie $a\in\mathbb{R}$. Dc
- $a\ge\frac32$ iau $s=a$ și $s\sim a$
- $a<\frac32 \Rightarrow 3-a>3-\frac32=\frac32$. Iau $s=3-a$ și $a\sim s$.

2) Fie $s_1,s_2\in S$ a.î. $s_1\sim s_2 \Rightarrow \hat{s}_1=\hat{s}_2\ (=\{s_1,3-s_1\}) \Rightarrow \boxed{s_2=s_1}$ sau $\boxed{s_2=3-s_1}$

Dc. $s_2=3-s_1 \Rightarrow s_1+s_2=3$
$s_1,s_2\in S=[\frac32;+\infty) \Rightarrow s_1+s_2\ge \frac32+\frac32=3$ $\Rightarrow$

$s_1+s_2=3$ implică $s_1=\frac32$, $s_2=\frac32 \Rightarrow s_1=s_2\ (=\frac32)$

Prin urmare, $s_1\sim s_2 \Rightarrow s_1=s_2$

$\Downarrow$ $S=[\frac32;+\infty)$ e SCR.

E $f:\mathbb{R}/_\sim\to\mathbb{R}$ $\quad f(\hat{t})=-t^2+3t+7$ o funcție?

Comentariu Este $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{Z}$ $\quad f(\frac ab)=a$ o funcție? NU

$\frac31=\frac62$ $\quad f(\frac31) = 3 \neq 6 = f(\frac62)$

Dar $g:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$ $\quad g(\frac ab)=\frac ab$ este funcție $(=1_\mathbb{Q})$!

$\downarrow$ Dc $t = \frac{3}{2}$ $\hat{\frac{3}{2}} = \{\frac{3}{2}\}$ f e bine definită în $\hat{\frac{3}{2}}$.

Dc $t \neq \frac{3}{2} \Rightarrow \hat{t} = \{t, 3-t\}$ $\left(\Rightarrow \hat{t} = \widehat{3-t}\right)$

f e corect (bine) definită dacă $(\forall)\, t \in \mathbb{R}$ $f(\hat{t})$ nu depinde de alegerea reprezentantului lui $\hat{t}$, i.e. (în acest caz) $f(\hat{t}) = f(\widehat{3-t})$ $(\forall)\, \hat{t} \in \mathbb{R}/_{\sim}$.

$$\left(f(\widehat{3-t}) = -(3-t)^2 + 3(3-t) + 7 = -\cancel{9} + 6t - t^2 + \cancel{9} - 3t + 7 = -t^2 + 3t + 7 = f(\hat{t}) \right)$$

$\Rightarrow f$ e corect definită.

$g : \mathbb{R}/_{\sim} \to \mathbb{R}$ $\quad g(\hat{t}) = t^2 + t + 1$

$g(\hat{0}) = 0^2 + 0 + 1 = 1$ $\quad \Rightarrow g(\hat{0}) \neq g(\hat{3})$ $\Rightarrow g$ nu e funcție (nu e corect definită)

$\hat{0} = \hat{3}$ $\quad g(\hat{3}) = 3^2 + 3 + 1 = 13$
