ŞIRURI ÎN SPAŢII METRICE

2 OCTOMBRIE
- SĂPTĂMÂNA 1 -

I NOŢIUNI GENERALE DESPRE SPAŢII METRICE

Definiţia 1: Se numeşte distanţă (metrică) pe o mulţime nevidă X o funcţie $d: X \times X \to \mathbb{R}$ care are următoarele proprietăţi:

a) $d(x,y) = d(y,x) \ \forall x,y \in X$

b) $d(x,y) \geq 0 \ \forall x,y \in X$

$d(x,y) = 0 \iff x = y$

c) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) \ \forall x,y,z \in X$

Definiţia 2: Se numeşte spaţiu metric orice mulţime nevidă X pe care se defineşte cel puţin o distanţă $d: X \times X \to \mathbb{R}_+$

NOTAŢIE (X,d)

EXEMPLE DE SPAŢII METRICE

1) $(\mathbb{R}, d)$ spaţiu metric

$d: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$

$d(x,y) = |x-y|$ - distanţa uzuală a lui $\mathbb{R}$

$|x-z| \overset{?}{\leq} |x-y| + |y-z|$

$|x-z| \leq |(x-y)+(y-z)| \leq |x-y| + |y-z|$

2) $(\mathbb{R}, d)$ spaţiu metric

$d: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+, \ d(x,y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases}$ distanţă pe $\mathbb{R}$

3) $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R} \ \forall 1 \leq i \leq n\}, n \geq 2$

$d_2: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+, \ d_2((x_1, x_2, x_n), (y_1, y_2, \dots y$

$= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$ distanţa uzuală a $\mathbb{R}^n$

$d_1: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+, \ d_1((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = |x_1 - y_1| +$ distanţa pe $\mathbb{R}^n$

$d_\infty: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+, \ d_\infty((x_1, \dots, x_n)(y_1, \dots, y_n)) =$

$\max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|, \dots, |x_n y_n|\}$ distanţa pe $\mathbb{R}^n$

Scanned with CamScanner

Definiția 3: Fie (X, d) un spațiu metric, $x_0 \in X$ și $r > 0$

a) Se numește bilă deschisă de centru x_0 și rază r mulțimea $B(x_0, r) = \{y \in X \mid d(y, x_0) < r\}$

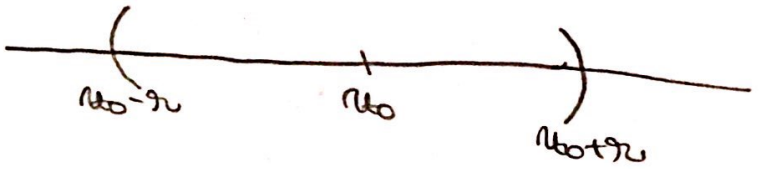
b) Se numește bilă închisă de centru x_0 și rază r mulțimea $B[x_0, r] = \{y \in X \mid d(y, x_0) \leq r\}$

EXEMPLE DE BILE:

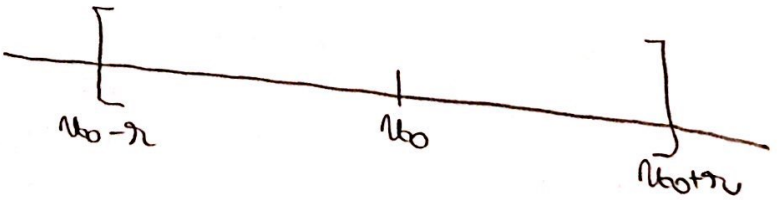
1) $(\mathbb{R}, d)$

$d(x, y) = |x - y|$

$B(x_0, r) = \{y \in \mathbb{R} \mid |y - x_0| < r\} = (x_0 - r, x_0 + r)$



$B[x_0, r] = \{y \in \mathbb{R}, \mid y - x_0| \leq r\} = [x_0 - r, x_0 + r]$



2) $\mathbb{R}$

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases}$$

$$B(x_0, r) = \{y \in \mathbb{R} \mid d(y, x) < r\} = \begin{cases} \mathbb{R}, & r > 1 \\ \{x_0\}, & r = 1 \\ \{x_0\}, & r \in (0, 1) \end{cases}$$

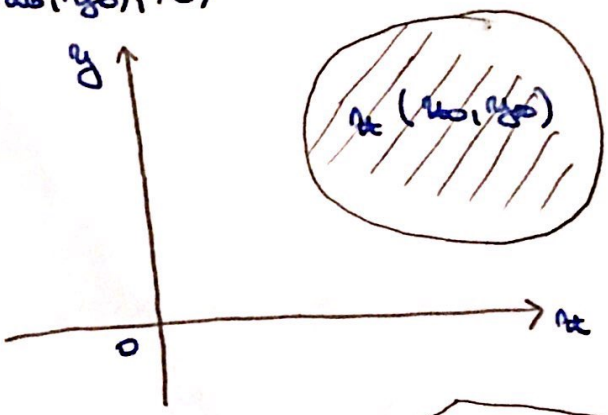
Scanned with CamScanner

$$B[x_0, r] = \{ y \in \mathbb{R} \mid d(y, x_0) \leq r \} = \begin{cases} \mathbb{R}, & r > 1 \\ \mathbb{R}, & r = 1 \\ \{x_0\}, & r \in (0,1) \end{cases}$$

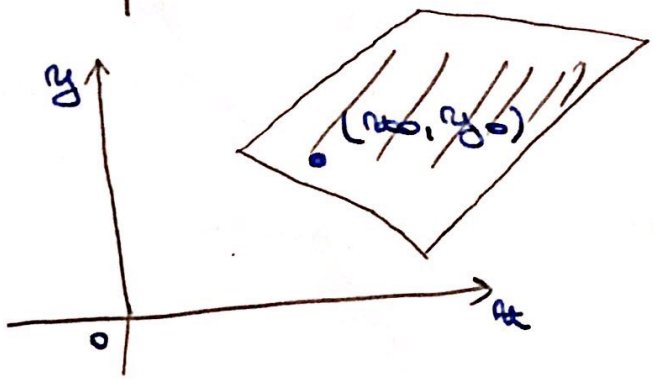
3) $\mathbb{R}^2$

$B((x_0, y_0), r)$

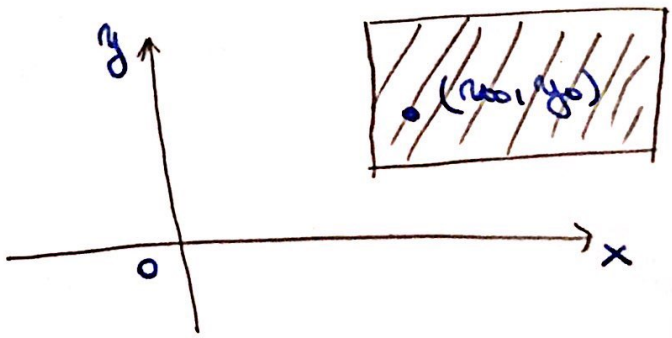
d_2:



d_1:



d_∞:



Scanned with CamScanner

II ŞIRURI ÎN SPAŢIU MATRICE

(X, d) spaţiu matrice

Definiţie 4: Se numeşte şir cu elemente din (X, d) orice funcţie $f: \mathbb{N} \to X$

NOTAŢIE: $f(n) = a_n$

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \overset{not}{=} f$

Definiţia 5: Fie $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un şir din (X, d)

a) Spunem că şirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este convergent dacă $\exists\, l \in X$ cu proprietatea că $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $d(a_n, l) < \varepsilon\ \forall\, n \geq n_\varepsilon$

Elementul l se numeşte limita şirului a_n şi se notează $\lim\limits_{n \to \infty} a_n$

b) Spunem că şirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este divergent dacă nu este un şir convergent

c) Spunem că şirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este mărginit dacă $\exists\, x_0 \in X, \exists\, r > 0$ astfel încât $d(a_n, x_0) \leq r\ \forall\, n \in \mathbb{N}$

d) Spunem că şirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este şir Cauchy dacă $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $d(a_m, a_n) < \varepsilon\ \forall\, m, n \geq n_\varepsilon$

Scanned with CamScanner

Definiția 6: Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un șir din (X,d) și $n_1<n_2<\dots<n_k$ un șir strict crescător din $\mathbb{N}$. Șirul $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ se numește subșirul șirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Definiția 7: Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un șir din (X,d). Elementul $l\in X$ se numește punct limită al șirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dacă $\exists (x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ subșir al lui $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ astfel încât $\lim\limits_{k\to+\infty} x_{n_k}=l$

Teorema 1: a) Orice șir convergent $X(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ din (X,d) este șir Cauchy.

b) Orice șir Cauchy $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ din (X,d) care are cel puțin un punct limită în X este șir convergent.

c) Orice șir Cauchy $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ din (X,d) este șir mărginit.

Definiția 8: Se numește spațiu metric complet un spațiu metric (X,d) în care orice șir Cauchy este convergent.

9 OCTOMBRIE 2019
– SĂPTĂMÂNA 2 –

ȘIRURI ÎN $\mathbb{R}^k$, $k\geq 2$

1) ȘIRURI ÎN $\mathbb{R}^k$, $k\geq 2$

$\mathbb{R}^k=\{(a_1,a_2,\dots,a_k)\mid a\in\mathbb{R}\}$

$(a_1,a_2,\dots,a_k)+(b_1,b_2,\dots,b_k)\overset{def}{=}(a_1+b_1,a_2+b_2,\dots,a_k+b_k)$

$0=0_{\mathbb{R}^k}=(0,0,\dots,0)$ elementul neutru pentru adunarea în $\mathbb{R}^k$

$\lambda\cdot(a_1,\dots,a_k)\overset{def}{=}(\lambda a_1,\lambda a_2,\dots,\lambda a_k)$

LEMA 1: Oricare ar fi $x,y\in\mathbb{R}^k$ sunt adevărate inegalitățile

$$d_\infty(x,y)\leq d_2(x,y)\leq d_1(x,y)$$

TEOREMA 1: Se consideră $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ șir din $\mathbb{R}^k$ cu $x_n=(x_{1n},x_{2n},\dots,x_{kn})$ $\forall n\in\mathbb{N}$

a) Șirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ din $\mathbb{R}^k$ este convergent dacă și numai dacă șirurile de nr reale $(x_{1n})_{n\in\mathbb{N}},(x_{2n})_{n\in\mathbb{N}},\dots,(x_{kn})_{n\in\mathbb{N}}$ sunt convergente.

În plus $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=(\lim\limits_{n\to\infty} x_{1n},\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n},\dots,\lim\limits_{n\to\infty} x_{kn})$

Scanned with CamScanner

b) Șirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ din $\mathbb{R}^k$ este șir Cauchy dacă și numai dacă șirurile de numere reale $(x_{1,n})_{n\in\mathbb{N}}, \dots, (x_{k,n})_{n\in\mathbb{N}}$ sunt șiruri Cauchy.

EXEMPLU: Fie $x_n = \left(\frac{(-1)^n}{n}, 1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}\right), n\in\mathbb{N}^*$

Alegem $a_n = \frac{(-1)^n}{n}, n\in\mathbb{N}^*$

$b_n = 1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}, n\in\mathbb{N}^*$

$x_n = (a_n, b_n), n\in\mathbb{N}^*$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \underbrace{(-1)^n}_{\in[-1,1]} \cdot \underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0} = 0$

convergent

$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}\right) = +\infty$

divergent

$\Rightarrow$ 1) șirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este divergent deoarece cel puțin unul din șirurile a_n și b_n este divergent

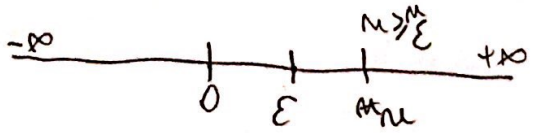
2) șirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este nemărginit deoarece b_n este nemărginit superior

ȘIRURI DE NUMERE REALE

Definiția 1: a) Șirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ din $\mathbb{R}$ se numește (strict) crescător dacă $(x_n < x_{n+1}\ \forall n\in\mathbb{N})$ $x_n \le x_{n+1}\ \forall n\in\mathbb{N}$

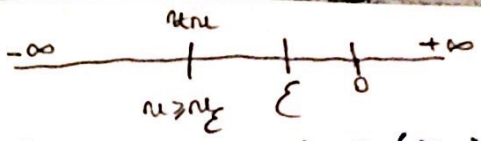
b) Șirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ din $\mathbb{R}$ se numește (strict) descrescător dacă $(x_n > x_{n+1}\ \forall n\in\mathbb{N})$ $x_n \ge x_{n+1}\ \forall n\in\mathbb{N}$

c) Spunem că șirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ din $\mathbb{R}$ are limita $+\infty$ dacă $\forall \varepsilon>0\ \exists n_\varepsilon\in\mathbb{N}$ a.î. $x_n > \varepsilon\ \forall n \ge n_\varepsilon$



Scanned with CamScanner

d.)



Spunem că șirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ din $\mathbb{R}$ are limita $-\infty$ dacă $\forall\, \varepsilon<0$ $\exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $x_n < \varepsilon\ \forall\, n \geq n_\varepsilon$

LEMA LUI CESARO: Orice șir mărginit de numere reale are cel puțin un subșir convergent (orice șir mărginit de numere reale are cel puțin un punct limită în $\mathbb{R}$)

CRITERIUL LUI CAUCHY PENTRU ȘIRURI DE NUMERE REALE:
Un șir de numere reale este convergent dacă și numai dacă este șir Cauchy ($\mathbb{R}$ este spațiu metric complet)

Demonstrație: "$\Longrightarrow$" $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ șir convergent din $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ șir Cauchy în $\mathbb{R}$ (rezultat general valabil în spații metrice)

"$\Longleftarrow$" $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ șir Cauchy în $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ șir mărginit în $\mathbb{R}$ $\xRightarrow[\text{Cesaro}]{\text{Lema}}$ șirul are un punct limită în $\mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{l}(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ șir Cauchy în } \mathbb{R}\\ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ are un punct limită în } \mathbb{R}\end{array}\right| \Longrightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ este șir convergent}$$

COROLAT: Un șir din $\mathbb{R}^k$, $k \geq 2$, este șir convergent $\Longleftrightarrow$ este șir Cauchy ($\mathbb{R}^k$ este spațiu metric complet)

teoremă care rezultă din demonstrarea unei teoreme mai mari

CRITERIUL RAPORTULUI PENTRU ȘIRURI CU TERMENI STRICT POZIT

Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un șir din $\mathbb{R}_+^*$ pt care ($\exists$) limita $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = l \in$

Dacă $l<1$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$

Dacă $l>1$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$

Scanned with CamScanner

CRITERIUL RADICALULUI PENTRU ŞIRURI CU TERMENI STRICT POZITIVI

Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir din $\mathbb{R}_+^*$ pentru care $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}$.
Atunci $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = l$.

14 OCTOMBRIE 2019
– SĂPTĂMÂNA 3 –

ŞIRURI DE NUMERE REALE

I:

Teorema 1: Orice şir monoton are limită ($l \in \overline{\mathbb{R}}$)

Teorema 2: Orice şir de numere reale care cel puţin un subşir care are limită ($\in \mathbb{R}$)

Aplicaţie: la teorema lui Weierstrass

şirul $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n$ e convergent $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$

monotonia:

$$x_{n+1} - x_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) - \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n\right)$$
$$= \frac{1}{n+1} - (\ln(n+1) - \ln n)$$

Se alege $f : [k, k+1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x$, $k \in \mathbb{N}^*$

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ continuă pe } [k, k+1] \\ f \text{ derivabilă pe } (k, k+1) \end{array}\right\} \xrightarrow{T.L.} (\exists) c \in (k, k+1) \text{ a.î. } f'(c) = \frac{f(k+1) - f(k)}{k+1-k}$$

$$\Rightarrow f'(c) = \ln(k+1) - \ln(k) = \frac{1}{c}$$
$$k < c < k+1$$
$$\frac{1}{k+1} < \frac{1}{c} < \frac{1}{k}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{k+1} < \ln(k+1) - \ln k < \frac{1}{k}$$

$k \geq 1$

Scanned with CamScanner

$\frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln n \quad (\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$

$\Rightarrow \frac{1}{n+1} - (\ln(n+1) - \ln n) < 0 \quad (\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$

$\Rightarrow x_{n+1} - x_n < 0 \quad (\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$

$\Rightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e strict ↓ ①

Mărginit inferior:

$k = 1: \cancel{\ln 2} - \ln 1 < 1$

$k = 2: \cancel{\ln 3} - \cancel{\ln 2} < \frac{1}{2}$

- - - - - - - - - - - - - -

$k = n: \ln(n+1) - \cancel{\ln n} < \frac{1}{n}$

$\ln(n+1) - \underbrace{\ln 1}_{0} < 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$

$\ln(n+1) < 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$

$\left.\begin{array}{l} \ln(n+1) - \ln n < x_n, (\forall)\ n \in \mathbb{N}^* \\ \ln(n+1) - \ln n > 0, (\forall)\ n \in \mathbb{N}^* \end{array}\right\} \Rightarrow x_n > 0\ (\forall) n \in \mathbb{N}^*$

$\rightarrow$ șirul este mărginit inferior ②

①, ② $\xrightarrow{\text{T.W.}}$ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ e convergent

notație: $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n\right) = c \in (0,1)$

$\hookrightarrow c$ = constanta lui Euler

Obs:

$\lim\limits_{n\to\infty} 1 + \frac{1}{2} + \ldots \frac{1}{n} = \infty$

Scanned with CamScanner

II: LIMITA INFERIOARĂ ȘI SUPERIOARĂ A UNEI ȘIR DE NUMERE REALE

Pentru șirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ din $\mathbb{R}$ considerăm șirurile $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ și $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definite astfel:

$u_n = \sup\limits_{k\geq n} x_k \in \overline{\mathbb{R}}$ $(\forall) n\in\mathbb{N}$ $\qquad$ $v_n = \inf\limits_{k\geq n} x_k \in \overline{\mathbb{R}}$ $(\forall) n\in\mathbb{N}$

Propoziții:

1) $u_{n+1} \leq u_n, (\forall) n\in\mathbb{N}$

2) $v_{n+1} \geq v_n, (\forall) n\in\mathbb{N}$

3) $u_n \geq v_n, \quad n, n\in\mathbb{N}$

4) $(\exists)\, u = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n \in \overline{\mathbb{R}}$

$(\exists)\, v = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} v_n \in \mathbb{R}$

5) $u \geq v$

Definiție 1:

a) Numărul $u = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} (\sup\limits_{k\geq n} x_k) \in \overline{\mathbb{R}}$ s.n. limita superioară a lui $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$

b) Numărul $v = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} (\inf\limits_{k\geq n} x_k) \in \overline{\mathbb{R}}$ s.n. limita inferioară a lui $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Notații:

$$\overline{\lim}\, x_n \overset{not}{=} \inf_{n\in\mathbb{N}} \left(\sup_{k\geq n} x_k\right)$$

$$\underline{\lim}\, x_n \overset{not}{=} \sup_{n\in\mathbb{N}} \left(\inf_{k\geq n} x_k\right)$$

Observație

$$\overline{\lim}\, x_n \geq \underline{\lim}\, x_n$$

Scanned with CamScanner

Definiția 2: Numărul $l \in \overline{\mathbb{R}}$ s.n. punct limită al șirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dacă există (x_{n_k}) un subșir al lui $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a.î.

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = l$$

Notație: $L((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) \overset{def}{=\!=} \left\{ l \in \overline{\mathbb{R}} \;\middle|\; \begin{array}{l} l \text{ pct limită al} \\ \text{șirului } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \end{array} \right\}$

Teorema 3: Pentru orice șir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ din $\mathbb{R}$ sunt adevărate egalitățile.

$$\underline{\lim}\, x_n = \inf L((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) \text{ și}$$

$$\overline{\lim}\, x_n = \sup L((x_n)_{n\in\mathbb{N}})$$

Teorema 4:

a) Un șir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ din $\mathbb{R}$ are limită dacă și numai dacă $\underline{\lim}\, x_n = \overline{\lim}\, x_n$

b) Un șir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ din $\mathbb{R}$ este mărginit superior dacă și numai dacă $\overline{\lim}\, x_n \in \mathbb{R}$

c) Un șir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ din $\mathbb{R}$ e mărginit inferior dacă și numai dacă $\underline{\lim}\, x_n \in \mathbb{R}$

Aplicație:

Fie $(x_n)_n$, $x_n = \frac{n\cdot(-1)^n}{n+2} \cdot \sin\frac{n\pi}{2}$

$$(-1)^n = \begin{cases} 1, & n = 2k \\ -1, & n = 2k+1 \end{cases}$$

$$\sin\frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0, & n = 2k \\ 1, & n = 4k+1 \\ -1, & n = 4k+3 \end{cases}$$

Scanned with CamScanner

Considerăm subșirurile $(x_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$, $(x_{4k+1})_{k\in\mathbb{N}}$, $(x_{4k+3})_{k\in\mathbb{N}}$

$$\lim_{k\to\infty} x_{2k} = \lim_{k\to\infty} \frac{2k\cdot 1}{2k+1}\cdot 0 = 0$$

$$\lim_{k\to\infty} x_{4k+1} = \lim_{k\to\infty} \frac{(4k+1)\cdot(-1)}{4k+2}\cdot 1 = -1$$

$$\lim_{k\to\infty} x_{4k+3} = \lim_{k\to\infty} \frac{(4k+3)\cdot(-1)}{4k+4}\cdot(-1) = 1$$

$L((x_n)_n) = \{-1, 0, 1\}$

$$\left.\begin{array}{l} \underline{\lim}\, x_n = -1 \\ \overline{\lim}\, x_n = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow (\nexists) \lim_{n\to\infty} x_n$$

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ șir mărginit

SERII DE NUMERE REALE

Se consideră $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ din $\mathbb{R}_+$, și se asociază șirului $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ din $\mathbb{R}$ def. astfel:

$$s_n = x_0 + x_1 + \dots + x_n \quad (\forall) n\in\mathbb{N}$$
$$= \sum_{k=0}^{n} x_n$$

Definiție 1: Perechea de șiruri $((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (s_n)_{n\in\mathbb{N}})$ notată $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ s.n. serie de nr reale

x_n s.n. termen general de rang n al seriei

s_n s.n. sumă parțială de rang n a seriei

Scanned with CamScanner

Definiția 2:

a) Seria de numere reale $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ s.n. convergentă dacă șirul sumelor parțiale $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e convergent.

b) Seria de numere reale $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ s.n. divergentă dacă nu e convergentă (șirul sumelor parțiale e divergent)

c) Spunem că seria de numere reale $\sum_{n}^{\infty} a_n$ are sumă (în $\overline{\mathbb{R}}$) șirul sumelor parțiale $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ are limită (în $\mathbb{R}$)

Limita șirului $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se numește suma seriei.

Notație: $\lim_{n\to\infty} s_n$ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$

d) Seria de numere reale $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ s.n. absolut convergentă dacă seria de numere reale $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ este convergentă.

Teorema 1: (implicație)

Dacă seria de numere reale $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e convergentă atunci $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Demonstrație: șirul $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e convergent

Notație: $\lim_{n\to\infty} s_n = S \in \mathbb{R}$

$a_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n - (a_0 + a_1 + \ldots + a_{n-1})$

$a_n = s_n - s_{n-1}$ $(\forall)\, n \in \mathbb{N}^*$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (\underset{\downarrow\, S}{s_n} - \underset{\downarrow\, S}{s_{n-1}}) = S - S = 0$$

Scanned with CamScanner

16 OCTOMBRIE 2021
- SĂPTĂMÂNA 3 -

SERII DE NUMERE REALE

I Noțiuni generale

Teorema 1: Dacă seria de numere reale $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ este convergentă, atunci $\exists \lim_{n\to\infty} x_n = 0$

COROLAR: Dacă $\exists \lim_{n\to\infty} x_n \neq 0$ sau $\nexists \lim_{n\to\infty} x_n$, atunci suma de numere reale $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ este divergentă.

Observație: Reciproca teoremei 1 este falsă

$x_n = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*$

$\lim_{n\to\infty} x_n = 0$

$\Delta_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$

$\lim_{n\to\infty} \Delta_n = +\infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ serie divergentă

Teorema 2: Orice serie de numere reale $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ absolut convergentă este serie convergentă.

Observații: 1) Reciproca teoremei 2 este falsă

2) Dacă $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ astfel că $x_n \geq 0 \; \forall n \geq n_0$ sau $x_n \leq 0$ $\forall n \geq n_0$, atunci noțiunile de serie absolut convergentă și serie convergentă sunt echivalente

Definiția 1: O serie de numere reale $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ care este convergentă, dar nu este absolut convergentă se numește serie semiconvergentă.

Scanned with CamScanner

Criteriul lui LEIBNIZ (pentru serii alternate de nr. reale)

Se consideră un șir $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ din $\mathbb{R}_+$ descrescător pentru care $\exists \lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Seriile de numere reale $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n$ și $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} a_n$ sunt convergente.

Exemplu de serie SEMICONVERGENTĂ.

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n}, \quad n\in\mathbb{N}^*$$

Studiem absolut convergența seriei, adică $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$.

$\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{+\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ serie divergentă $\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ nu este absolut convergentă.

Studiem convergența folosind criteriul lui Leibniz.

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n} = (-1)^n \cdot \underbrace{\frac{1}{n}}_{a_n}$$

$a_n > 0, \forall n\in\mathbb{N}^*$

$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+1} < 1, \forall n\in\mathbb{N}^* \Rightarrow (a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ șir strict descrescător

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n$ serie convergentă $\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty}$ serie convergentă

Criteriul lui ABEL

Se consideră șirurile $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ și $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ din $\mathbb{R}$ care verifică următoarele ipoteze:

a) $a_{n+1} \le a_n \ \forall n\in\mathbb{N}$

$\exists \lim_{n\to\infty} a_n = 0$

b) $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ a.î. $\alpha \le b_0 + b_1 + \ldots + b_n \le \beta \ \forall n\in\mathbb{N}$.

atunci seria de numere reale $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n$ este convergentă

Scanned with CamScanner

Criteriul lui DIRICHLET

Se consideră șirurile $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ și $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ care verifică următoarele ipoteze:

a) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ șir monoton și mărginit

b) seria de numere reale $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ este convergentă

Atunci seria de numere reale $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n$ este convergentă

SERII REMARCABILE DE NUMERE REALE:

1) Seria armonică

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

- seria divergentă dacă $\alpha \leq 1$
- seria convergentă dacă $\alpha > 1$

2) Seria putere

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a^n$$

- absolut convergentă dacă $|a| < 1$
- divergentă dacă $|a| \geq 1$

I Serii de termeni pozitivi:

Se consideră $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ șir $\mathbb{R}_+$

Teorema 3: Fie o serie de numere reale pozitive $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$. Sunt adevărate următoarele afirmații:

a) Șirul $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este șir crescător.

b) Seria $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă dacă și numai dacă șirul sumelor parțiale $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e mărginit superior. În plus,

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} s_n$$

Scanned with CamScanner

c.) Orice serie cu termeni pozitivi poate fi serie convergentă sau serie divergentă cu suma $+\infty$.

Criteriul RAPORTULUI pentru serii cu termeni pozitivi

Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un șir din $\mathbb{R}_+$ pentru care $(\exists) \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \ell$

*) Dacă $\ell < 1$, atunci seria de nr. reale $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă

**) Dacă $\ell > 1$, atunci seria de nr. reale $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ este divergentă

Criteriul RADICALULUI pentru serii cu termeni pozitivi

Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ șir din $\mathbb{R}_+$ pt. care $(\exists) \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = \ell$

*) Dacă $\ell < 1$, atunci seria de numere reale $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă

**) Dacă $\ell > 1$, atunci seria de numere reale $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ este divergentă

Criteriul RAABE—DUHAMEL

Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ șir din $\mathbb{R}_+$ pentru care $\exists \lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) = \ell$

*) Dacă $\ell < 1$, atunci seria de numere reale $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} x_n$ este divergentă

**) Dacă $\ell > 1$, atunci seria de numere reale $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} x_n$ este convergentă

Criteriul de CONDENSARE al lui CAUCHY

Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un șir descrescător din $\mathbb{R}_+$ pentru care $(\exists) \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$

Atunci seriile de numere reale $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ și $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^n \cdot x_{2^n}$ au aceeași natură.

Criteriul de COMPARAȚIE CU INEGALITĂȚI

Se consideră seriile cu termeni pozitivi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ și $\sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n$ pt. care $(\exists)\, n_0$ a.î. $x_n \leq y_n$ $(\forall)$ $n \geq n_0$.

a) Dacă seria $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} y_n$ este convergentă, atunci seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă

b) Dacă seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ e divergentă, atunci seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n$ este divergentă.

Scanned with CamScanner

~~CRITERIUL DE~~

Criteriul de COMPARAȚIE CU LIMITE

Se consideră seriile cu termeni pozitivi $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ și $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ pentru care există $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = [0,\infty] \subseteq \overline{\mathbb{R}}$

a) Dacă $l \in (0,\infty)$ atunci seriile au aceeași natură

b) Dacă $l = 0$ atunci și seria $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ este convergentă cat. seria $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă.

c) Dacă $l = +\infty$ și seria $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ este divergentă, atunci și seria $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este divergentă.

23 OCTOMBRIE 2019
– SĂPTĂMÂNA 4 –

SPAȚII TOPOLOGICE
– TOPOLOGIA UNUI SPAȚIU METRIC –

I Noțiuni generale despre spații topologice

$X \neq \emptyset$

$\mathcal{P}(X) = \{A \mid A \subseteq X\}$ mulțimea părților lui X

$A \subseteq X \Leftrightarrow A \in \mathcal{P}(X)$

$A \subseteq X$; $C_X A \overset{def}{=} X/A$ complementara lui A în raport cu X

Definiția 1: O familie de mulțimi $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ s.n. topologie pe X dacă verifică următoarele afirmații:

a) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$

b) $G_1, G_2 \in \mathcal{T} \Rightarrow G_1 \cap G_2 \in \mathcal{T}$

c) $G_i \in \mathcal{T} (\forall) i \in I \Rightarrow \bigcup_{i \in I} G_i \in \mathcal{T}$

Scanned with CamScanner

Definiția 2: s.n. spațiu topologic o mulțime nevidă X pe care se definește cel puțin o topologie $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$

notație: $(X, \mathcal{T})$

Exemple de spații topologice:

$X \neq \emptyset$

$\mathcal{T}_1 = \{\emptyset, X\}$; $\subseteq \mathcal{P}(X)$

$\mathcal{T}_2 = \mathcal{P}(X)$

– topologii pe X –

Definiția 3: Fie $(X, \mathcal{T})$ un spațiu topologic

a) O mulțime $G \subseteq X$ s.n. mulțime deschisă (relativ la topologia $\mathcal{T}$) dacă $G \subseteq \mathcal{T}$

b) O mulțime $F \subseteq X$ s.n. mulțime închisă (relativ la topologia $\mathcal{T}$) dacă $C_X F = X \setminus F \in \mathcal{T}$

c) O mulțime $V \subseteq X$ s.n. vecinătate a elementului $x_0 \in X$ dacă $(\exists) G \in \mathcal{T}$ a.î. $x_0 \in G \subseteq V$

Notație: $\mathcal{V}_{\mathcal{T}}(x_0) \overset{def.}{=} \{V \subseteq X \mid V \text{ vecinătate a el } x_0\}$

d) O mulțime $K \subseteq X$ s.n. compactă (relativ la topologia $\mathcal{T}$) dacă din orice acoperire cu mulțimi deschise a lui K se poate extrage o subacoperire finită.

$$\left.\begin{array}{l} K \subseteq \bigcup_{i \in I} G_i \\ G_i \in \mathcal{T} \ (\forall) \ i \in I \end{array}\right| \Rightarrow (\exists) i_1, i_2, \dots, i_n \in I \text{ a.î. } K \subseteq G_{i_1} \cup G_{i_2} \cup \dots \cup G_{i_n}$$

e) O mulțime $A \subseteq X$ s.n. mulțime neconexă (relativ la topologia $\mathcal{T}$) dacă $(\exists) G_1, G_2 \in \mathcal{T}$ a.î. $G_1 \cap A = \emptyset$, $G_2 \cap A \neq \emptyset$, $(G_1 \cap A) \cap (G_2 \cap A) = \emptyset$ și $A = (G_1 \cap A) \cup (G_2 \cap A)$.

f) O mulțime $A \subseteq X$ s.n. mulțime conexă (relativ la topologia $\mathcal{T}$) dacă nu este mulțime neconexă.

Exemple de MULȚIME NECONEXĂ în $\mathbb{R}$:

$\mathbb{Q} = ((-\infty, \sqrt{2}) \cap \mathbb{Q}) \cup (\sqrt{2}, \infty) \cap \mathbb{Q})$

$(-\infty, \sqrt{2}) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$

$(\sqrt{2}, \infty) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$

$(-\infty, -\sqrt{2}) \cap \mathbb{Q}) \cap ((\sqrt{2}, \infty) \cap \mathbb{Q}) \neq \emptyset$

$\mathbb{Q}$ mulțime neconexă

$(0,2) \cup \{3\}$ neconexă

Scanned with CamScanner

Definiția 4: Fie $(X, \mathcal{T})$ un spațiu topologic și $A \subseteq X$:

a) Elementul $x_0 \in X$ s.n. punct interior al mulțimii A dacă $A \in \mathcal{V}_{\mathcal{T}}(x_0)$

notație: $\mathring{A} \overset{def}{=} \{x_0 \in X \mid x_0$ punct interior al mulțimii $A\}$ – interiorul mulțimii A –

b) Elementul $x_0 \in X$ s.n. punct de aderență al mulțimii A dacă $V \cap A \neq \emptyset \ \forall V \in \mathcal{V}_{\mathcal{T}}(x_0)$

notație: $\overline{A} \overset{def}{=} \{x_0 \in X \mid x_0$ punct de aderență al mulțimii – închiderea/aderența mulțimii –

c) Elementul $x_0 \in X$ s.n. punct de acumulare al mulțimii A dacă $V \cap (A \setminus \{x_0\}) \neq \emptyset \ \forall V \in \mathcal{V}_{\mathcal{T}}(x_0)$.

notație: $A' \overset{def}{=} \{x_0 \in X \mid x_0$ punct de acumulare al mulțimii A

d) Elementul $x_0 \in X$ s.n. punct izolat al mulțimii A dacă $\exists V_0 \in \mathcal{V}_{\mathcal{T}}(x_0)$ a.î. $V_0 \cap A = \{x_0\}$

notație: $Izo\, A \overset{def}{=} \{x_0 \in X \mid x_0$ punct izolat al mulț. $A\}$

e) Mulțimea $\overline{A} \cap \overline{C_X A}$ s.n. frontieră topologică a mulțimii A.

notație: $Fr\, A \overset{def}{=} \overline{A} \cap \overline{C_X A}$

Teorema 1: Fie $(X, \mathcal{T})$ un spațiu topologic și $A \in X$. Sunt adevărate urm. afirmații:

a) $\overline{C_X A} = C_X \mathring{A}$

$\mathring{\overline{C_X A}} = C_X \overline{A}$

$Fr\, A = \overline{A} \cap \overline{C_X A} = \overline{A} \cap C_X \mathring{A} = \overline{A} \setminus \mathring{A}$

b) $\mathring{A} \subseteq A$

$G \in \mathcal{T};\ G \subseteq A \Rightarrow G \subseteq \mathring{A}$

$\mathring{A} \in \mathcal{T}$

$A \in \mathcal{T} \Leftrightarrow A = \mathring{A}$

Scanned with CamScanner

c) $A \subseteq \overline{A}$

$A = F, F$ închisă $\Rightarrow \overline{A} \subseteq F$

$\overline{A}$ mulțime închisă

A închisă $\Leftrightarrow A = \overline{A}$

d) $\overline{A} = A \cup A'$

A mulțime închisă $\Leftrightarrow A = \overline{A} \Leftrightarrow A' \subseteq A$

e) $\mathrm{Izo}\, A \subseteq A \setminus A'$

II TOPOLOGIA UNUI SPAȚIU METRIC

(X, d) - spațiu metric $\qquad d: X \times X \to \mathbb{R}_+$ distanță pe X

Teorema 2: Orice spațiu metric (X, d) este spațiu topologic.

Demonstrație: Distanței $d: X \times X \to \mathbb{R}_+$ îi asociez o topologie $\mathcal{T}_d \subseteq \mathcal{P}(X)$ definită în felul următor:

$$\mathcal{T}_d = \{\emptyset\} \cup \{G \subseteq X \mid G \neq \emptyset, \forall x \in G\ \exists R > 0 \text{ a.î. } B(x, R) \subseteq G\}$$

TERMINOLOGIE: $\mathcal{T}_d$ = topologia asociată distanței d

28 OCTOMBRIE 2019
- SĂPTĂMÂNA 5 -

TOPOLOGIA UNUI SPAȚIU METRIC

(X, d) spațiu metric

$$\mathcal{T}_d = \emptyset \cup \{G \subseteq X \mid G \neq \emptyset; (\forall) x \in G\ \exists r > 0 \text{ a.î. } B(x, r) \subseteq G\}$$

- topologia asociată distanței d -

Teorema 1 (Prop topologiei $\mathcal{T}_d$) În orice spațiu metric (X, d) sunt adevărate următoarele afirmații:

a) Orice bilă deschisă din X este mulțime deschisă

$(B(x, r) \in \mathcal{T}_d\ (\forall) x \in X, (\forall) r > 0)$

b) Orice bilă închisă este mulțime închisă.

$(B[x, r]$ mulțime închisă, $(\forall) x \in X, (\forall) r > 0)$

c) Spațiul topologic $(X, \mathcal{T}_d)$ este spațiu topologic separat

$(\forall x \neq y \in X, \exists V_1 \in \mathcal{V}_{\mathcal{T}_d}(x), (\exists) V_2 \in \mathcal{V}_{\mathcal{T}_d}(y), V_1 \cap V_2 = \emptyset)$

Scanned with CamScanner

d) Fie $A \subseteq X$ și $x_0 \in X$

*) $x_0 \in \mathring{A} \iff \exists r>0$ a.î. $B(x_0, r) \subseteq A$

**) $x_0 \in \overline{A} \iff \forall r>0, B(x_0, r) \cap A \neq \emptyset$

***) $x_0 \in A' \iff (\forall) r>0, B(x_0, r) \cap A \setminus \{x_0\} \neq \emptyset$

****) $x_0 \in \mathcal{F}_{zo} A \iff \exists\, r>0$ a.î. $B(x_0, r) \cap A = \{x_0\}$

e) Fie $A \subseteq X$ și $x_0 \in X$

*) $x_0 \in \overline{A} \iff \exists\, (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ șir din A a.î. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$

**) $x_0 \in A' \iff \exists\, (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ șir din $A \setminus \{x_0\}$ a.î. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$

EXEMPLE DE TIPOLOGIE $\mathcal{T}_d$

1. $(\mathbb{R}, d)$ spațiu metric

$d(\alpha, \beta) = |\alpha - \beta|$ distanța uzuală a lui $\mathbb{R}$

$\mathcal{T}_d \overset{not}{=} \mathcal{T}_{\mathbb{R}}$ topologia uzuală a lui $\mathbb{R}$

2. $(\mathbb{R}^n; d_2)$ $n \geq 2$

$d_2((a_1, a_2, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n)) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + \dots + (b_n - a_n)^2}$ distanța uzuală a lui $\mathbb{R}^n$,

$\mathcal{T}_{d_2} \overset{not}{=} \mathcal{T}_{\mathbb{R}^n}$ topologia uzuală a lui $\mathbb{R}^n$

APLICAȚIE: $A = [0,1) \cup \{2\}$

1. $1 \in A'$? (DA)

2. $2 \in \overline{A}$? (DA)

3. $2 \in A'$? (NU)

Scanned with CamScanner

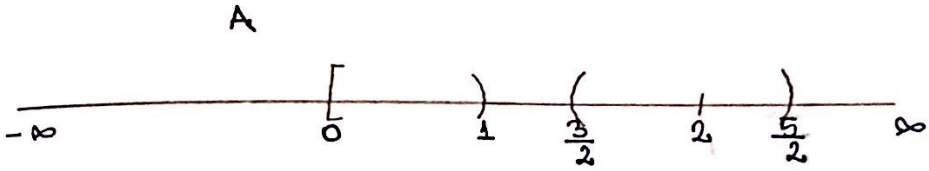
Rezolvare 1: Alegem $x_n = \frac{n}{n+1}, n \in \mathbb{N}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1 \\ x_n \in A \ (\forall)\, n \in \mathbb{N} \\ x_n \neq 1 \ (\forall)\, n \in \mathbb{N} \end{array}\right\} 1 \in \overline{A}$$

Rezolvare 2: Alegem $y_n = 2, n \in \mathbb{N}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to\infty} y_n = 2 \\ y_n \in A \ (\forall)\, n \in \mathbb{N} \end{array}\right\} 2 \in \overline{A}$$

Rezolvare 3:



$B(2, \frac{1}{2}) \cap (A \setminus \{2\}) = \emptyset \Rightarrow 2 \in A'$

Teorema 2 (Caract mulțimilor compacte în spații metrice): O mulțime $K \subseteq (X, d)$ este compactă (relativ la topologia lui $\mathcal{T}_d$) dacă și numai dacă $(\forall)$ șir din $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ din K are cel puțin un punct limită. $l \in K$

Exemplu: $K = (0, 2) \subseteq \mathbb{R}$

K mulțime compactă (NU)

$$\left.\begin{array}{l} \text{Alegem } x_n = \frac{2n}{n+1}, n \in \mathbb{N} \\ x_n \in K, (\forall)\, n \in \mathbb{N} \\ (\exists) \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2 \notin K \end{array}\right\} K \text{ nu e mulțime compactă}$$

Scanned with CamScanner

Teorema HEINE-BOREL: O mulțime $K \subseteq \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ este mulțime compactă dacă și numai dacă K este mulțime închisă și mărginită în $\mathbb{R}^n$.

APLICAȚIE:

$$\left.\begin{array}{l} A = [0, \infty) \subseteq \mathbb{R} \\ A \text{ mulțime închisă} \\ A \text{ nemărginită superior} \end{array}\right\} \Rightarrow A \text{ nu este mulțime compactă}$$

Definiție: O mulțime nevidă $I \subseteq \mathbb{R}$ s.n. interval în $\mathbb{R}$ dacă $(\forall)$ $x \leq y \in I$, avem că $\{t \in \mathbb{R} \mid x \leq t \leq y\} \subseteq I$.

Exemplu:

1) $I = \{a\}$ interval
2) $I = \mathbb{R}$ interval
3) $I = [0,2) \cup \{3\}$

$x = 1$, $y = 3 \in I$

$t = 2$

$$\left.\begin{array}{l} x < t < y \\ t \in I \end{array}\right\} \Rightarrow I \text{ nu e interval}$$

4) $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ nu sunt intervale

Teorema 2 (De caracterizare a mulțimilor convexe din $\mathbb{R}$): O mulț. este convexă dacă și numai dacă $A = \emptyset$ sau A este interval.

Exemplu:

$A = [0,2)$

$$\left.\begin{array}{l} x \leq y \in A \\ 0 \leq x \leq y < 2 \\ x \leq t \leq y \end{array}\right\} \Rightarrow t \in A \Rightarrow A \text{ este interval} \Rightarrow A \text{ mulțime convexă}$$

Scanned with CamScanner

FUNCȚII CONTINUE

① NOȚIUNI GENERALE DESPRE FUNCȚII

$f: X \longrightarrow Y$ o funcție

Definiția 1:

a) Fie $f: X \to Y$ o funcție, $A \subseteq X$ s.n. imaginea directă a mulțimii A prin funcția f, mulțimea $f(A) \overset{def}{=} \{y \in Y \mid \exists\, x \in A$ a.î. $f(x) = y\} \subseteq Y$

b) Fie $f: X \to Y$ o funcție și $B \subseteq Y$ s.n. preimagine (imaginea inversă) a mulțimii B prin funcția f mulțimea $f(B)^{-1} \overset{def}{=} \{x \in X \mid f(x) \in B\} \subseteq X$

Observație: $f: X \to Y$ o funcție

a) $f(\emptyset) = \emptyset$

$f(X) = \{y \in X \mid \exists\, x \in X$ a.î. $f(x) = y\} = \operatorname{Im} f$

$f(X) = Y \Leftrightarrow \operatorname{Im} f = Y \Leftrightarrow f$ surjectivă

b) $f^{-1}(\emptyset) = \{x \in X \mid f(x) \in \emptyset\} = \emptyset$

$f^{-1}(y) = \{x \in X \mid f(x) \in Y\} = X$

② FUNCȚII CONTINUE DEFINIȚII ȘI PROPRIETĂȚI

Definiția 1 Fie $f: D \subseteq (X, d_1) \to (X, d_2)$ și $x_0 \in D$. Spunem că f este funcția continuă în x_0 dacă $(\forall)\, W \in \mathcal{V}_{\mathcal{T}_{d_2}}(f(x_0))$, $\exists\, V \in \mathcal{V}_{\mathcal{T}_{d_1}}(x_0)$ a.î. $f(D \cap V) \subseteq W$.

Teorema 1 Fie $D \subset (X, d_1)$ pentru care $(\exists)\, x_0 \in \operatorname{Izo} D$. Orice funcție $f: D \to (X, d_2)$ este continuă în x_0.

Demonstrație $x_0 \in \operatorname{Izo} D \to (\exists)\, V_0 \in \mathcal{V}_{\mathcal{T}_{d_1}}(x_0)$ a.î. $V_0 \cap D = \{x_0\}$

$f(V_0 \cap D) = f(\{x_0\}) = \{f(x_0)\}$

Alegem $W \subseteq \mathcal{V}_{\mathcal{T}_{d_2}}(f(x_0))$

$\{f(x_0)\} \subseteq W \Rightarrow f(V_0 \cap D) \subseteq W \Rightarrow f$ continuă x_0

Scanned with CamScanner

10 octombrie 2013
- Săptămâna 5 -

FUNCȚII CONTINUE

Definiții alternative pt. funcțiile continue:

a) Funcția $f: D \subseteq (X, d_1) \to (Y, d_2)$ este continuă în $x_0 \in D$ dacă $(\forall)\varepsilon > 0 (\exists)\delta_\varepsilon > 0$ a.î. $d_2(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ $(\forall) x \in D$ cu $d_1(x, x_0) < \delta_\varepsilon$

b) Funcția $f: D \subseteq (X, d_1) \to (Y, d_2)$ este continuă în $x_0 \in D$ dacă $(\forall)(x_n)_n$ este șir din D cu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ avem că $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$

Teorema 1 (prop fct. cont): Fie $f: (X, d_1) \to (Y, d_2)$ o funcție continuă. Sunt adevărate urm. afirmații:

a) $(\forall) G \in \tau_{d_2}$ avem că $f^{-1}(G) \in \tau_{d_1}$
("întoarce" mult. deschise din Y în mult. deschise din X)

b) $(\forall) F \subseteq Y$ mulțime compactă, avem că $f(F) \subseteq Y$ mulțime compactă
("duce" mulțimile închise din Y în mult. închise din X)

c) $(\forall) K \subseteq X$ mulțime compactă, avem că $f(K) \subseteq Y$ mulțime compactă
("duce mulțimile compacte din X în mulțimi compacte din Y)

d) $(\forall) A \subseteq X$ mulțime conexă din X avem că $f(A) \subset Y$ mulțime conexă
("duce" mulțimi conexe din X în mulțimi conexe din Y)

Teorema 2: Fie $K \subseteq (X, d_1)$ o mulțime compactă. Orice funcție continuă $f: K \subseteq (X, d_1) \to \mathbb{R}$ este mărginită și își atinge marginile.

$\left(\exists \min\limits_{x \in K} f(x),\ \exists \max\limits_{x \in K} f(x)\right)$

Scanned with CamScanner

Definiția 1: Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval. Spunem că $f: I \to \mathbb{R}$ are prop. ~~cu~~ lui Darboux dacă $(\forall)\, x_1, x_2 \in I$, $(\forall)\, \lambda \in \mathbb{R}$, situate între $f(x_1)$ și $f(x_2)$, $(\exists)\, c \in I$ situat între x_1 și x_2 a.î. $f(c) = \lambda$.

Teorema 3: Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ interval:

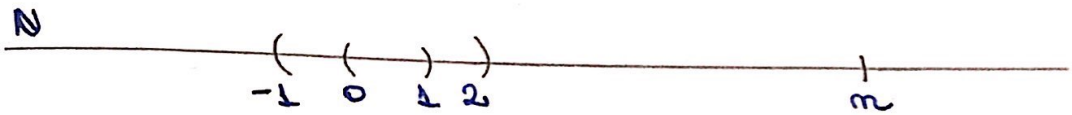
a) Orice funcție continuă $f: I \to \mathbb{R}$ are prop lui Darboux

b) Orice funcție injectivă care are prop lui Darboux este strict monotonă.

Corolar: a) Fie $I \subseteq \mathbb{R}$, $f: I \to \mathbb{R}$ o funcție continuă. Dacă f este funcție injectivă, atunci f este funcție monotonă.

b) Dacă $(\exists)\, a, b \in I$ astfel că $f(a) \cdot f(b) < 0$, $(\exists)\, c \in (a, b)$ a.î. $f(c) = 0$ (Cauchy-Bolzano)

exemplu: $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$



$B(0,1) \cap \mathbb{N} = \{0\} \Rightarrow 0 \in \mathring{I}_{\mathbb{N}}$

$B(n,1) \cap \mathbb{N} = \{n\} \Rightarrow n \in \mathring{I}_{\mathbb{N}}$

$\mathring{I}_{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \Rightarrow$ Orice funcție $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ este continuă pe $\mathbb{N}$

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = 0 \\ f(1) = 1 \\ \lambda = \frac{1}{2} \in (f(0), f(1)) \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ nu are proprietatea lui Darboux}$$

$\Rightarrow \nexists\, c \in \mathbb{N}$ a.î. $f(c) = \frac{1}{2}$ situat între 0 și 1

Scanned with CamScanner

ŞIRURI DE FUNCŢII

Se consideră şirul de funcţii $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, unde $f_n: D\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $(\forall)n\in\mathbb{N}$

Definiţia 1: Spunem că $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplu pe mulţimea nevidă $A\subseteq D$, dacă $(\forall)x\in A\ (\exists)\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\in\mathbb{R}$

Notaţie:

$(\forall)x\in A,\ \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) \overset{not}{=} f(x)$

$f: A\to\mathbb{R}$

$f_n \xrightarrow[A]{s} f$

exemplu: $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=x^n$, $n\in\mathbb{N}^*$

Fie $x\in[0,1]$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\lim_{n\to\infty} x^n=\begin{cases}0, & x\in[0,1)\\ 1, & x=1\end{cases}$$

$A=\{x\in D \mid (\exists)\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\in\mathbb{R}\}$

$A=[0,1]$

$$f:[0,1]\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}0, & x\in[0,1)\\ 1, & x=1\end{cases}$$

$f_n \xrightarrow[[0,1]]{s} f$

Definiţia 2: Spunem că $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniform către funcţia $f: A\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $A\subseteq D$ este nevidă, dacă $(\forall)\varepsilon>0$, $(\exists)n_\varepsilon$ a.î. $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$ $(\forall)n\geq n_\varepsilon$, $(\forall)x\in A$.

Notaţie: $f_n \xrightarrow[A]{u} f$

Observaţie: $f_n \xrightarrow[A]{u} f \Longleftrightarrow f_n \xrightarrow[A]{s} f$

$\not\Longleftarrow$

Scanned with CamScanner

Teorema 1 (Crit practic de convergență uniformă): Fie $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $f: A \subseteq D \to \mathbb{R}$ o funcție. Următoarele afirmații sunt echivalente

a) $f_n \xrightarrow[A]{u} f$

b) $\sup\limits_{x\in A} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Teorema lui Weierstrass pentru șiruri de funcții: Fie $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ și $f: A \subseteq D \to \mathbb{R}$ astfel că $f_n \xrightarrow[A]{u} f$. Dacă $(\exists)\, x_0 \in A$ cu proprietatea că $(\forall)\, n \in \mathbb{N}$, f_n continuă în x_0, atunci f continuă în x_0.

Corolar: Fie $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ și $f: A \subseteq D \to \mathbb{R}$ astfel că $f_n \xrightarrow[A]{u} f$. Dacă $(\exists)\, x_0 \in A$, $(\forall)\, n \in \mathbb{N}$, f_n este continuă în x_0 și f NU este continuă în x_0. $f_n \cancel{\xrightarrow[A]{u}} f$

exemple: $f: [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}^*$

1) $f_n \xrightarrow[[0,1]]{s} f$, $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,1) \\ 1, & x = 1 \end{cases}$

$\left.\begin{array}{l} f_n \text{ este continuă în } x_0 = 1 \ (\forall)\, n \in \mathbb{N} \\ f \text{ nu este continuă în } x_0 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow f_n \cancel{\xrightarrow[[0,1]]{u}} f$

2) $f_n : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{x}{x+n}$, $n \in \mathbb{N}$

Converg. simplă: Fie $x \in (0,\infty)$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{x+n} = 0$$

$A = (0,\infty)$

$f: (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = 0$

$f_n \xrightarrow[(0,\infty)]{s} f$

Converg. uniformă: $\sup\limits_{x\in(0,\infty)} |f_n(x) - f(x)| = \sup\limits_{x\in(0,\infty)} \left|\dfrac{x}{x+n} - 0\right|$

$$= \sup_{x\in(0,\infty)} \frac{x}{x+n} = 1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

$\Rightarrow f_n \cancel{\xrightarrow[(0,\infty)]{u}} f$

Scanned with CamScanner

SERII DE FUNCȚII

6 NOIEMBRIE - SĂPTĂMÂNA 6

Se consideră șirul de funcții $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a.î. $f_n : D \to \mathbb{R}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$. Îi se asociază șirul de funcții $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definit în modul următor:

$$s_n : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ s_n(x) = f_0(x) + f_1(x) + \dots + f_n(x)\ (\forall n \in \mathbb{N})$$

Definiția 1: Perechea de șiruri de funcții $((f_n)_{n\in\mathbb{N}}, (s_n)_{n\in\mathbb{N}})$ se numește serie de funcții, notată $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$

f_n se numește termenul general de rang n al seriei de f.

s_n se numește suma parțială de rang n al seriei de funcții

Definiția 2: a) Seria de funcții $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ este simplu convergentă pe mulțimea $A \subseteq D$ dacă șirul sumelor parțiale $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplu pe mulțimea A.

b) Spunem că seria de funcții $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ este absolut convergentă pe mulțimea $A \subseteq D$ dacă seria de funcții $\sum_{n=0}^{+\infty} |f_n|$ este simplu convergentă pe mulțimea A.

c) Spunem că seria de funcții $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ este uniform convergentă pe mulțimea $A \subseteq D$ dacă șirul sumelor parțiale $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniform pe mulțimea A.

Observație: 1) $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ absolut convergentă pe mulțimea A

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ simplu convergentă pe mulțimea A

$\not\Leftarrow$

2) $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ uniform convergentă pe mulțimea A

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ simplu convergentă pe mulțimea A

$\not\Leftarrow$

Scanned with CamScanner

Teorema 1: $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cu $f_n: D\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $(\forall)\, x\in\mathbb{R}$, $A\subseteq D$ mărginită și $x_0\in A$.

Dacă seria de funcții $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ este uniform convergentă pe mulțimea A către funcția $f: A\to\mathbb{R}$ și f_n este funcție continuă în x_0 $(\forall)\, n\in\mathbb{N}$, atunci f este continuă în x_0.

CRITERII DE CONVERGENȚĂ PENTRU ȘIRURI DE FUNCȚII

Criteriul lui Cauchy pentru serii de funcții: Seria de funcții $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ este uniform convergentă pe mulțimea $A\subseteq D$ dacă și numai dacă $(\forall)\,\varepsilon>0$ $(\exists)\, n_\varepsilon\in\mathbb{N}$ astfel încât $|f_{n+1}(x)+f_{n+2}(x)+\dots+f_{n+m}(x)|<\varepsilon$ $(\forall)\, x\in A$, $(\forall)\, n\geq n_\varepsilon$, $(\forall)\, m\in\mathbb{N}^*$

Teorema lui Weierstrass pentru serii de funcții: Fie $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un șir de funcții cu $f_n: D\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $(\forall)\, n\in\mathbb{N}$ și $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un șir din $\mathbb{R}_+$ astfel că $|f_n(x)|\leq a_n$, $(\forall)\, x\in D$, $(\forall)\, n\in\mathbb{N}$. Dacă seria de numere reale $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ este convergentă, atunci seria de funcții $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ este uniform și absolut convergentă pe mulțimea D.

Aplicație: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}$, $x\in\mathbb{R}$

$f_n: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=\frac{\cos(nx)}{n^2}$

$|f_n(x)| = \left|\frac{\cos(nx)}{n^2}\right| = \frac{|\cos nx|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$, $(\forall)\, x\in\mathbb{R}$ ①

$a_n=\frac{1}{n^2}$ $(\forall)\, n\in\mathbb{N}^*$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ serie convergentă ②

din ① și ② $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ este absolut și uniform converg. pe $\mathbb{R}$

Criteriul lui Dirichlet pentru serii de funcții: Fie $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ șiruri de funcții cu $f_n, g_n: D\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $(\forall)\, n\in\mathbb{N}$ care verifică următoarele condiții:

a) $f_n \xrightarrow[D]{u} 0$

b) $f_{n+1}(x)\leq f_n(x)$, $(\forall)\, x\in D$, $(\forall)\, n\in\mathbb{N}$

c) $(\exists)\, m>0$ a.î. $|g_0(x)+g_1(x)+\dots g_n(x)|\leq M$, $(\forall)\, x\in D$, $(\forall)\, n\in\mathbb{N}$

Atunci seria de funcții $\sum_{n=0}^{\infty} f_n\cdot g_n$ este uniform convergentă pe mulțimea D.

Scanned with CamScanner

Criteriul lui ABEL pentru serii de funcții: Fie $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ și $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ două șiruri de funcții cu $f_n, g_n : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care verifică următoarele condiții:

a) $f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$ $(\forall)\, x \in D, (\forall)\, n \in \mathbb{N}$

b) $(\exists)\, M > 0$ a.î. $|f_n(x)| \leq M$, $(\forall)\, x \in D, (\forall)\, n \in \mathbb{N}$

c) seria de funcții $\sum_{n=0}^{\infty} g_n$ este uniform convergentă pe D.

Atunci seria de funcții $\sum_{n=0}^{\infty} f_n \cdot g_n$ este uniform convergentă pe D.

Aplicație: Seria de funcții $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x^2}$ este uniform convergentă pe $\mathbb{R}$.

Seria de funcții $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x^2}$ nu este absolut convergentă pe $\mathbb{R}$, $(\forall)\, x \in \mathbb{R}$, seria de numere reale $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x^2}$ nu este absolut convergentă.

Fie $x \in \mathbb{R}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n+x^2}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+x^2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+x^2}}{\frac{1}{n}} = 1 \in (0,\infty) \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+x^2} \text{ și } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \text{ au aceeași nat.}$$

serie divergentă

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+x^2} \text{ serie divergentă}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n+x^2}\right| \text{ serie divergentă}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x^2} \text{ nu este absolut convergentă } (\forall)\, x \in \mathbb{R}$$

$$\frac{(-1)^n}{n+x^2} = f_n(x) \cdot g_n(x)$$

$f_n(x) = (-1)^n$ $(\forall)\, x \in \mathbb{R}$, $(\forall)\, n \in \mathbb{N}^*$

$g_n(x) = \frac{1}{n+x^2}$ $(\forall)\, x \in \mathbb{R}$, $(\forall)\, n \in \mathbb{N}$

!!! $g_n \xrightarrow[\mathbb{R}]{u} 0$!! (verificare)

$$g_{n+1}(x) - g_n(x) = \frac{1}{n+1+x^2} - \frac{1}{n+x^2} = \frac{-1}{(n+1+x^2)(n+x^2)} \quad (\forall)\, x \in \mathbb{R},\ (\forall)\, n \in \mathbb{N}$$

Scanned with CamScanner

$|f_1(x)+f_2(x)+\dots f_n(x)| = |-1+1-1+\dots+(-1)^n| \leq 1, (\forall) x \in \mathbb{R}, (\forall) n \in \mathbb{N}$

Din criteriul lui Dirichlet $\Rightarrow$ seria de funcții $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x^2}$ este uniform convergentă pe $\mathbb{R}$.

SPAȚII LINIARE NORMATE

Spațiu ~~normat~~ liniar real

X ; $+ : X \times X \longrightarrow X$; $(u, v) \longrightarrow u+v$ adunarea vect din X

$(X, +)$ grup abelian ; 0_X = ~~este~~ elem. neutru al adunării vect din X

$\cdot : X \times X \longrightarrow X$

$(\alpha, x) \rightarrow \alpha \cdot x \in X$ înmulțirea cu valori în vectorilor din X

$(\alpha+\beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$

$\alpha \cdot (x+y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$

$(\alpha \cdot \beta) \cdot x = \alpha (\beta \cdot x)$

Definiția 1: Se numește normă pe spațiul liniar real X o funcție $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}_+$ care are următoarele proprietăți:

a) $\varphi(u+v) \leq \varphi(u) + \varphi(v) \; \forall u, v \in X$

b) $\varphi(\alpha, u) = |\alpha| \cdot \varphi(u) \; (\forall) \alpha \in \mathbb{R}, (\forall) u \in X$

c) $\varphi(u) = 0 \iff u = 0_X$

Notație: $\varphi(u) \overset{not}{=} \|u\|$ norma vectorului u

$\varphi \overset{not}{=} \| \; \|$

Definiția 2: Se numește spațiu liniar normat orice spațiu liniar real X pe care se definește cel puțin o normă $\| \; \| : X \rightarrow \mathbb{R}_+$

Notație: $(X, \| \; \|)$ spațiu liniar normat

Scanned with CamScanner

SPAȚII LINIARE NORMATE - 11 NOIEMBRE SĂPTĂMÂNA 4

$(X, \| \ \|)$

X → spațiu liniar real; $\| \ \|$ → normă

EXEMPLE DE SPAȚII LINIARE NORMATE:

1) $(\mathbb{R}, | \ |)$

$| \ | : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+, x \in \mathbb{R} \to |x| \in \mathbb{R}$

2) $(\mathbb{R}^n, \| \ \|), n \geq 2$

$\| \ \| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$

$\|(a_1, a_2, \dots, a_n)\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}$

Notație: $(X, \| \ \|)$

$u \in X, \alpha \in \mathbb{R}^*$

$\frac{u}{\alpha} \overset{not}{=} \frac{1}{\alpha} \cdot u$

Teorema 1: Orice spațiu liniar normat $(X, \| \ \|)$ este spațiu metric

$\| \ \| : X \to \mathbb{R}_+$

$d : X \times X \to \mathbb{R}_+, d(u, v) \overset{def}{=} \|u - v\|$ - dist asociată normei $\| \ \|$

SCHEMĂ: $\| \ \| \Rightarrow d \Rightarrow \mathcal{T}_d \overset{not}{=} \mathcal{T}_{\| \ \|}$ (topologia generată de normă)

FUNCȚII DERIVABILE

1) Noțiuni generale

$f : D \subseteq \mathbb{R} \to (X, \| \ \|), x_0 \in D \cap D'$

Definiția 1: Spunem că funcția $f : D \subseteq \mathbb{R} \to (X, \| \ \|)$ este derivabilă în $x_0 \in D \cap D'$ dacă $\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in X$

Notație: $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \overset{not}{=} f'(x_0) \in X$ - deriv fct în pct x_0

Definiția 2: Spunem că funcția $f : D \subseteq \mathbb{R} \to (X, \| \ \|)$ este derivabilă pe mulțimea $A \subseteq D \cap D'$ dacă funcția f este derivabilă în orice pct al mulț. A.

$f : A \subseteq D \subseteq \mathbb{R} \to (X, \| \ \|)$

Scanned with CamScanner

Teorema 1: Orice funcție $f: D \subseteq \mathbb{R} \to (X, \| \ \|)$ derivabilă în punctul $x_0 \in D \cap D'$ este funcție continuă în punctul x_0

Observație: $\Leftarrow \not\Rightarrow$ (reciproca th este falsă)

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$

f continuă în $x_0 = 0$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$ nu există $\Rightarrow f$ nu este derivabilă în 0

2) Funcții vectoriale derivabile

$f: D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$

$f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))$

$\underbrace{f_1, f_2, f_3, \dots, f_n}_{\text{componentele fct. vectoriale } f} : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

Teorema de caracterizare a derivabilității unei funcții vectoriale: Funcția $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ este derivabilă în punctul $x_0 \in D \cap D'$ dacă și numai dacă $f_1, f_2, \dots, f_n : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sunt derivabile în x_0. În plus: $f'(x_0) = (f_1'(x_0), f_2'(x_0), \dots, f_n'(x_0))$

Aplicație: $f: [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x) = (\underbrace{|x|}_{f_1(x)}, \underbrace{\arcsin x}_{f_2(x)}, \underbrace{e^x}_{f_3(x)})$

$f_1, f_2, f_3 : [-1, 1] \to \mathbb{R}$

f_1 este derivabilă pe $[-1, 1] \setminus \{0\}$

f_2 este derivabilă pe $(-1, 1)$

f_3 este derivabilă pe $[-1, 1]$

$\Big\}$ f este derivabilă pe $(-1, 1) \setminus \{0\}$

$$f'(x) = \begin{cases} \left(-1, \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, e^x\right) & x \in (-1, 0) \\ \left(1, \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, e^x\right) & x \in (0, 1) \end{cases}$$

3) Funcții reale derivabile:

$f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Teorema de caracterizare a derivabilității funcției inverse: Fie $I, J \subseteq \mathbb{R}$ două intervale și $f: I \to J$ o funcție bijectivă cu inv. propr.:

a) f este fct. str monotonă pe I

b) f este deriv în $x_0 \in I$

c) $f'(x_0) \neq 0$

Atunci $f^{-1}: J \to I$ este deriv în $f(x_0)$ și $(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$

Scanned with CamScanner

Teorema lui ROLLE: Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ o funcție continuă pe $[a,b]$, derivabilă pe (a,b) cu $f(a)=f(b)$. Există $c\in(a,b)$ astfel încât $f'(c)=0$.

Teorema lui LAGRANGE: Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ o funcție continuă pe $[a,b]$, derivabilă pe (a,b). Există $c\in(a,b)$ astfel încât $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'$

Corolare la teorema lui Lagrange:

1) Fie $I\subseteq\mathbb{R}$ un interval și $f:I\to\mathbb{R}$ o funcție deriv pe I

*) Dacă $f'(x)=0$, $(\forall)\, x\in I$, atunci f este fct. constantă pe I

**) Dacă $f'(x)>0$, $(\forall)\, x\in I$, atunci f este str cresc pe I

***) Dacă $f'(x)\geq 0$, $(\forall)\, x\in I$, atunci f este crescătoare pe I

****) Dacă $f'(x)<0$, $(\forall)\, x\in I$, atunci f este str desc pe I

*****) Dacă $f'(x)\leq 0$, $(\forall)\, x\in I$, atunci f este descresc pe I

2) Fie $I\subseteq\mathbb{R}$ un interval și $f:I\to\mathbb{R}$ o funcție continuă pe I pentru care $(\exists)\, x_0\in I$ astfel că f să fie derivabilă pe $I\setminus\{x_0\}$. Dacă $(\exists)\lim\limits_{x\to x_0} f'(x_0)\in\mathbb{R}$ atunci f este derivabilă în x_0 și $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0} f'(x_0)$

Teorema lui DARBOUX: Fie $I\subseteq\mathbb{R}$ un interval și $f:I\to\mathbb{R}$ o funcție derivabilă pe I. Atunci $f':I\to\mathbb{R}$ are proprietatea lui Darboux.

Corolar la Teorema lui Darboux: Presupunem că $f'(x)\neq 0$, $(\forall)\, x\in I$. Atunci $f'(x)>0$, $(\forall)\, x\in I$ sau $f'(x)<0$, $(\forall)\, x\in I$.

Definiția 3: Fie $f:D\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcție și $x_0\in D$:

a) Elementul $x_0\in D$ s.n. punct de minim local (global) al funcției f dacă $(\exists)\, V\in\mathcal{V}(x_0)$ (vecinătate) $\subset\mathbb{R}$ a.î. $f(x)\geq f(x_0)$, $(\forall)\, x\in V\cap D$ ($f(x)\geq f(x_0)$ $(\forall)\, x\in D$).

Scanned with CamScanner

b) Elementul $x_0 \in D$ se numește punct de maxim local (global) al funcției f dacă $(\exists)\, V \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(x_0)$ astfel încât $f(x) \leq f(x_0)$, $(\forall)\, x \in D \cap V$ ($f(x) \leq f(x_0)$ $(\forall)\, x \in D$)

Teorema lui FERMAT: Fie $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcție și $x_0 \in \mathring{D}$ un punct de extrem al funcției f. Dacă f este derivabilă în x_0, atunci $f'(x_0) = 0$.

Aplicație: $f: [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(1+x) - \sqrt{x}$

f continuă pe $[0, +\infty)$

f derivabilă pe $[0, +\infty)$

$f'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $(\forall)\, x \in (0, +\infty)$

$f'(x) = 0 \iff 2\sqrt{x} - x - 1 = 0 \iff x - 2\sqrt{x} + 1 = 0$

$\iff (\sqrt{x} - 1)^2 = 0 \iff x = 1 \in (0, +\infty)$

x	$[0$		1		$+\infty$
f'	|	$-$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$\ln 2 - 1$	$\searrow$	

↳ punct de maxim global

$f(0) = 0$

$f(1) = \ln(1+1) - \sqrt{1} = \ln 2 - 1$

$f(x) \leq f(0)$, $(\forall)\, x \in [0, +\infty) \Rightarrow x_0 = 0$ punct de maxim GLOBAL (nu apare în-crucișată)

Scanned with CamScanner

23 NOIEMBRIE 2019 - SĂPTĂMÂNA 4 -

FUNCȚII REALE DERIVABILE

Teorema lui l'Hospital: Se consideră $I \subseteq \mathbb{R}$ interval, $x_0 \in I' \setminus I$ și $f, g: I \to \mathbb{R}$ două funcții derivabile pe I

1) Varianta $[\frac{0}{0}]$: Se presupune că:

a) $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$

b) $g'(x) \neq 0 \ (\forall) x \in I$

c) $(\exists) \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \overline{\mathbb{R}}$

Atunci $(\exists) \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l$

2) Varianta $[\frac{\pm\infty}{\pm\infty}]$: Se presupune că:

a) $\lim_{x \to x_0} g(x) \in \{\pm\infty\}$

b) $g'(x) \neq 0 \ (\forall) x \in I$

c) $(\exists) \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \overline{\mathbb{R}}$

Atunci $(\exists) \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l$

Observație: Ipoteza $(\exists) \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ este esențială la Teorema lui l'Hospital

Exercițiul 1: $f, g: (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$

$g(x) = \sin x$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \searrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x} = \lim_{x \searrow 0} \underbrace{\frac{x}{\sin x}}_{\to 1} \cdot \underbrace{x}_{\to 0} \cdot \underbrace{\sin \frac{1}{x}}_{\in [-1,1]} = 0$$

Scanned with CamScanner

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{2x\sin\frac{1}{x} + \cancel{x^2}\cdot\cos\frac{1}{x}\cdot\left(-\frac{1}{\cancel{x^2}}\right)}{\cos x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\cdot\left(2x\cdot\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0} \underset{\downarrow 0}{2x}\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$$

$$= -\lim_{x\to 0}\cos\frac{1}{x} \quad \text{nu există}$$

L'Hospital

Definiția 1: Fie $f: D\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ și $x_0\in D\cap D'$

a) Spunem că f este derivabilă de două ori în x_0 dacă $(\exists)\, V\in\mathcal{V}_{\mathbb{R}}(x_0)$ astfel încât f este derivabilă pe $V\cap D$ și $f': V\cap D\to\mathbb{R}$ este derivabilă în punctul x_0.

Notație: $f''(x_0) \overset{def}{=} (f')'(x_0)$

b) Spunem că f este derivabilă de n ori în punctul $x_0\in D\cap D'$, $n\geq 2$ dacă $(\exists)\, V\in\mathcal{V}_{\mathbb{R}}(x_0)$ astfel încât f este derivabilă de $n-1$ ori pe mulțimea $V\cap D$ și $f^{(n-1)}: V\cap D\to\mathbb{R}$ este derivabilă în x_0

Notație: $f^{(n)}(x_0) = (f^{(n-1)})'(x_0)$

c) Spunem că f este derivabilă de n ori pe mulțimea $A\subseteq D\cap D'$ dacă f este derivabilă de n ori în orice punct al mulțimii A.

Notație: $f^{(n)}: A\to\mathbb{R}$

Teorema 1: Fie $f, g: D\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ funcții derivabile de n ori în punctul $x_0\in D\cap D'$. Atunci $f, g: D\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este derivabilă de n ori în punctul x_0 și $(f\cdot g)^{(n)}(x_0) = C_n^0 f^{(n)}(x_0) + C_n^1 f^{(n-1)}(x_0)g'(x_0) + \ldots + C_n^{n-1} f'(x_0)g^{(n-1)}(x_0) + C_n^n g^{(n)}(x_0)$

Scanned with CamScanner

Definiția 3: Fie $f: D \subseteq \mathbb{R}$ o funcție derivabilă de n ori în punctul $x_0 \in D \cap D'$, $n \geq 1$.

Funcția $T_{f,n,x_0}: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin

$$T_{f,n,x_0}(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

se numește Polinomul lui Taylor de rang n asociat funcției f și punctului x_0. Funcția $R_{f,n,x_0} = f - T_{f,n,x_0}: D \to \mathbb{R}$ se numește restul lui Taylor de rang n asociat funcției f și punctului x_0.

Obs: $f = T_{f,n,x_0} + R_{f,n,x_0}$

Formula lui Taylor cu restul sub forma lui Lagrange: Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval, $n \in \mathbb{N}$ și $f: I \to \mathbb{R}$ o funcție derivabilă de $n+1$ ori pe I și $x_0 \in I$, $(\forall) x \in I \setminus \{x_0\}$ $(\exists) c \in I$ situat între x_0 și x astfel încât:

$$f(x) = T_{f,n,x_0}(x) + (x-x_0)^{n+1} \cdot \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$$

Definiția 4: Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval și $f: I \to \mathbb{R}$ o funcție

a) Spunem că funcția f este de clasă C^n pe mulțimea I, $n \in \mathbb{N}^*$ dacă f este derivabilă de n ori pe I și $f^{(n)}: I \to \mathbb{R}$ este continuă pe I

Notație: $C^{(n)}(I) \overset{def}{=} \{f: I \to \mathbb{R} \mid f$ funcție de clasă C^n pe $I\}$

b) Spunem că f este de clasă C^n pe mulțimea I dacă f este derivabilă de n ori pe mulțimea I $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$.

Notație: $C^{\infty}(I) \overset{def}{=} \{f: I \to \mathbb{R} \mid f$ funcție de clasă C^{∞} pe $I\}$

Aplicație. Să se arate că $e^x \geq 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^{100}}{100!}$ $(\forall) x \in (0, +\infty)$

Fie $f: [0, +\infty) \to \mathbb{R}$

$f(x) = e^x$

$f \in C^{\infty}([0, +\infty))$

$f^{(n)}(x) = e^x$, $(\forall) x \in [0, +\infty)$, $(\forall) n \in \mathbb{R}$

f este derivabilă de 101 ori pe $[0, +\infty)$

Fie $x_0 = 0$

$(\forall) x \in [0, +\infty)$; $x \neq 0$ $(\exists) c \in [0, +\infty)$ situat între 0 și x a.î.

$$f(x) = T_{f,100,0}(x) + \frac{f^{(101)}(c) \cdot x^{101}}{101!}$$

Scanned with CamScanner

$$e^x = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}\cdot x + \frac{f''(0)}{2!}\cdot x^2 + \dots + \frac{f^{(100)}(0)}{100!}\cdot x^{100} + \frac{f^{(101)}(c)}{101!}$$

$$e^x = \underbrace{1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^{100}}{100!}}_{\text{Polinomul Taylor}} + \underbrace{\frac{e^c\cdot x^{101}}{101!}}_{\text{Restul}} \Longrightarrow e^x > 1 + \frac{x}{1!} + \dots + \frac{x^{100}}{100!}, (\forall) x \in (0, +\infty)$$

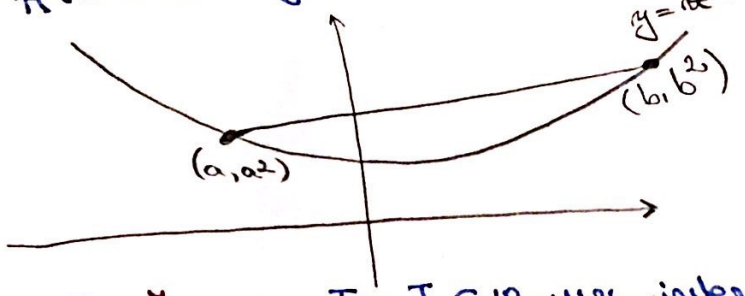
$$\frac{e^c\cdot x^{101}}{101!} > 0 \ (\forall) x \in (0, +\infty)$$

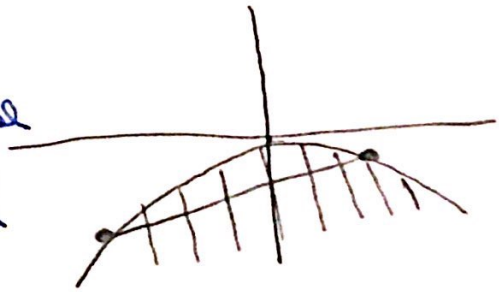
Pentru $x=0$ egalitatea inițială este adevărată

Definiția 4: Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval și $f: I \to \mathbb{R}$ o funcție

a) Spunem că f este funcție convexă pe I dacă $f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + t\cdot f(y)$, $(\forall)\, x, y \in I$, $(\forall)\, t \in [0,1]$

b) Spunem că f este funcție concavă pe I dacă $f((1-t)x + ty) \geq (1-t)f(x) + t\cdot f(y)$





Inegalitatea lui Jensen: Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval și $f: I \to \mathbb{R}$, o funcție convexă (concavă) pe I, $(\forall)\, x_1, x_2, x_3, \dots, x_n \in I$ și $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in [0,1]$ cu $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 1$ care loc inegalitatea:

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n) \leq \alpha_1 f(x_1) + \dots + \alpha_n f(x_n)$$

$$\left(f(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n) \geq \alpha_1 f(x_1) + \dots \alpha_n f(x_n)\right)$$

Teorema 1: Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval și $f: I \to \mathbb{R}$ o fct. deriv de două ori pe I:

a) f este funcție convexă pe $I \Leftrightarrow f''(x) \geq 0$ $(\forall)\, x \in I$

b) f este funcție concavă pe $I \Leftrightarrow f''(x) \leq 0$ $(\forall)\, x \in I$

Scanned with CamScanner

Definiția 3: Fie $f: D \subseteq \mathbb{R} \to$ funcție derivabilă de n ori în punctul $x_0 \in D \cap D'$, $n \geq 1$.

Funcția $T_{f,n,x_0} : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin

$$T_{f,n,x_0}(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

numește Polinomul lui Taylor de rang n atașat funcției f și punctului x_0. Funcția $R_{f,n,x_0} = f - T_{f,n,x_0} : D \to \mathbb{R}$ se numește restul lui Taylor de rang n atașat funcției f și punctului x_0.

Obs: $f = T_{f,n,x_0} + R_{f,n,x_0}$

Formula lui Taylor cu restul sub forma lui Lagrange: Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval, $n \in \mathbb{N}$ și $f: I \to \mathbb{R}$ o funcție derivabilă de $n+1$ ori pe I și $x_0 \in I$, $(\forall) x \in I \setminus \{x_0\}$ $(\exists)$ $c \in I$ situat între x_0 și x astfel încât:

$$f(x) = T_{f,n,x_0}(x) + (x-x_0)^{n+1} \cdot \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$$

Definiția 4: Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval și $f: I \to \mathbb{R}$ o funcție

a) Spunem că funcția f este de clasă C^n pe mulțimea I, $n \in \mathbb{N}^*$ dacă f este derivabilă de n ori pe I și $f^{(n)}: I \to \mathbb{R}$ este continuă pe I

Notație: $C^{(n)}(I) \overset{def}{=} \{ f: I \to \mathbb{R} \mid f$ funcție de clasă C^n pe $I \}$

b) Spunem că f este de clasă C^n pe mulțimea I dacă f este derivabilă de n ori pe mulțimea I $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$.

Notație: $C^{\infty}(I) \overset{def}{=} \{ f: I \to \mathbb{R} \mid f$ funcție de clasă C^{∞} pe $I \}$

Aplicație: Să se arate că $e^x \geq 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^{100}}{100!}$ $(\forall) x \in (0, +\infty)$

Fie $f: [0, +\infty) \to \mathbb{R}$

$f(x) = e^x$

$f \in C^{\infty}([0, +\infty))$

$f^{(n)}(x) = e^x$, $(\forall) x \in [0, +\infty)$, $(\forall) n \in \mathbb{R}$

f este derivabilă de 101 ori pe $[0, +\infty)$

Fie $x_0 = 0$

$(\forall) x \in [0, +\infty)$; $x \neq 0$ $(\exists)$ $c \in [0, +\infty)$ situat între 0 și x a.î.

$$f(x) = T_{f,100,0}(x) + \frac{f^{(101)}(c) \cdot x^{101}}{101!}$$

Scanned with CamScanner

$$e^x = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}\cdot x + \frac{f''(0)}{2!}\cdot x^2 + \dots + \frac{f^{(100)}(0)}{100!}\cdot x^{100} + \frac{f^{(101)}(c)}{101!}$$

$$e^x = \underbrace{1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^{100}}{100!}}_{\text{Polinomul Taylor}} + \underbrace{\frac{e^c\cdot x^{101}}{101!}}_{\text{Restul}} \Longrightarrow e^x > 1 + \frac{x}{1!} + \dots + \frac{x^{100}}{100!}, (\forall) x \in (0, +\infty)$$

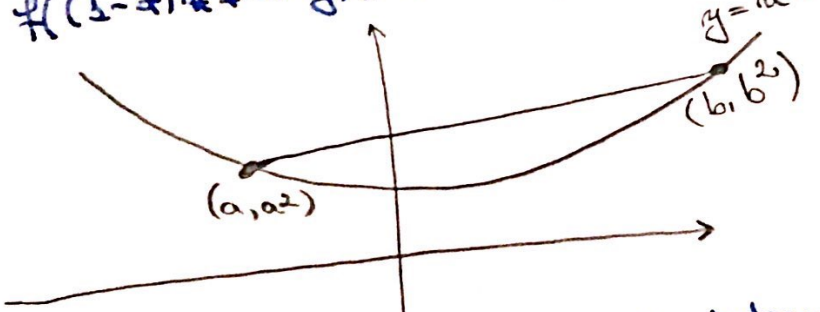
$$\frac{e^c\cdot x^{101}}{101!} > 0 \ (\forall) x \in (0, +\infty)$$

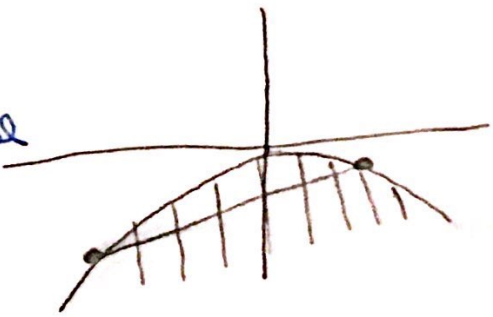
Pentru $x=0$ egalitatea inițială este adevărată

Definiția 4: Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval și $f: I \to \mathbb{R}$ o funcție

a) Spunem că f este funcție convexă pe I dacă $f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + t\cdot f(y)$, $(\forall)\, x, y \in I$, $(\forall)\, t \in [0,1]$

b) Spunem că f este funcție concavă pe I dacă $f((1-t)x + ty) \geq (1-t)f(x) + t\cdot f(y)$





Inegalitatea lui Jensen: Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval și $f: I \to \mathbb{R}$, o funcție convexă (concavă) pe I, $(\forall)\, x_1, x_2, x_3, \dots, x_n \in I$ și $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in [0,1]$ cu $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 1$ are loc inegalitatea:

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n) \leq \alpha_1 f(x_1) + \dots + \alpha_n f(x_n)$$

$$(f(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n) \geq \alpha_1 f(x_1) + \dots \alpha_n f(x_n))$$

Teorema 1: Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval și $f: I \to \mathbb{R}$ o fct. deriv de două ori pe I:

a) f este funcție convexă pe $I \Leftrightarrow f''(x) \geq 0 \ (\forall) x \in I$

b) f este funcție concavă pe $I \Leftrightarrow f''(x) \leq 0 \ (\forall) x \in I$

Scanned with CamScanner

Aplicație. Fie $n \geq 1$. Arătați că $\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^n \leq \frac{x^n+y^n+z^n}{3}$, $(\forall) x,y,z \in \mathbb{R}_+^*$

Fie $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$

$f(x) = x^n$

$f''(x) = (n x^{n-1})' = \underbrace{n(n-1)}_{>0} \underbrace{x^{n-2}}_{>0}$

$\Rightarrow f'' \geq 0 \Rightarrow f$ convexă pe $(0,\infty)$

$$\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^n = f\left(\frac{x+y+z}{3}\right) = f\left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}z\right) \leq \frac{1}{3}f(x) + \frac{1}{3}f(y) + \frac{1}{3}f(y) = \frac{x^n+y^n+z^n}{3}$$

Scanned with CamScanner

SPAȚIUL LINIAR $\mathbb{R}^n$

20 NOIEMBRIE 2019
- SĂPTĂMÂNA 8 -

1 Spațiu liniar pe $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}^*$

$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}, (\forall)\, 1 \leq i \leq n\}$

$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$

$0 = (0, \dots, 0)$

$\alpha(x_1, \dots, x_n) = (\alpha \cdot x_1 + \dots + \alpha \cdot x_n)$

Se definesc vectorii: $e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0)$

$e_2 = (0, 1, \dots, 0)$

$\vdots$

$e_n = (0, 0, \dots 1)$

$B = \{e_i \mid i = \overline{1, n}\}$, baza canonică a lui $\mathbb{R}^n$

Proprietate: $(\forall)\, x \in \mathbb{R}^n$, x se scrie sub unic. formă

$x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$

Aplicații liniare și continue între spații liniare normate

Definiția 1: O funcție $T : (X, \|\,\|_X) \to (Y, \|\,\|_Y)$ se numește aplicație liniară de la X la Y dacă $T(\alpha \cdot x + \beta \cdot y) = \alpha \cdot T(x) + \beta \cdot T(y)$, $(\forall)\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\forall x, y \in X$

Teorema 1 a) O aplicație liniară $T(X, \|\,\|_X) \to (T, \|\,\|_T)$ este funcție continuă pe $X \iff (\exists)\, \lambda > 0$ a.î. $\|T(x)\| \leq \lambda \|x\|$ $(\forall)\, x \in X$

b) Orice aplicație liniară $T : (X, \|\,\|_X) \to (Y, \|\,\|_Y)$ este funcție continuă pe $\mathbb{R}^n$

NOTAȚIE: $\mathcal{L}(X, Y) \overset{def}{=} \{T : X \to Y \mid T$ aplicație liniară de la X la $Y\}$

Exemple de aplicații liniare:

1) $id_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $id_{\mathbb{R}}(x) = x$ $(\forall)\, x \in \mathbb{R}$ | $id_{\mathbb{R}} \overset{not}{=} dx$

2) $n \geq 2$

$pr_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $pr_1(x_1, \dots, x_n) \overset{def}{=} x_1$ | $pr_1 \overset{not}{=} dx_1$

$pr_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $pr_2(x_1, \dots, x_n) \overset{def}{=} x_2$ | $pr_2 \overset{not}{=} dx_2$

$pr_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $pr_n(x_1, \dots, x_n) \overset{def}{=} x_n$ | $pr_3 \overset{not}{=} dx_3$

Scanned with CamScanner

Teorema 2: a) O funcție $T: \mathbb{R}^{n} \to \mathbb{R}^{n}$ este aplicație liniară de la $\mathbb{R}$ la $\mathbb{R}^n$ dacă și numai dacă $(\exists!)\, v \in \mathbb{R}^m$ astfel încât $T(x) = x, (\forall) x \in \mathbb{R}$

$T = \text{ce scie } \mathbb{R} \cdot v = id_x \cdot v$

b) O funcție $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ este aplicație liniară de la $\mathbb{R}^n$ la $\mathbb{R}^n$ dacă și numai dacă $(\exists!)\, v_1, v_2, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$ astfel încât

$T(x_1, \dots, x_n) = x_1 \cdot v_1 + \dots + x_n \cdot v_n (\forall)(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

$T = pr_1 v_1 + pr_2 v_2 + \dots + pr_n v_n = dx_1 \cdot v_1 + \dots + dx_n \cdot v_n$

c) O funcție $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ este aplicație liniară de la $\mathbb{R}^n$ la $\mathbb{R}^m$ dacă și numai dacă $(\exists!)\, A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ astfel încât $T(x_1, \dots, x_n) = \left[A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right] = (x_1, \dots, x_n) \cdot A^t$ $(\forall)(x_1, \dots x_n) \in \mathbb{R}^n$

$(AB)^t = {}^tA \cdot {}^tB$

FUNCȚII DIFERENȚIABILE

1. Noțiuni generale

Definiția 1: O funcție $f: D \subseteq (X, \| \ \|_x) \to (Y, \| \ \|_y)$ este diferențiabilă în punctul $x_0 \in D \cap D'$ dacă $(\exists!)\, T \in \mathcal{L}(X, Y)$ astfel încât

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\|f(x) - f(x_0) - T(x - x_0)\|_y}{\|x - x_0\|} = 0$$

NOTAȚIE: $T \overset{def}{\underset{not}{=}} df(x_0)$ - diferențiala funcției f în punctul x_0

Definiția 2: Funcția $f: D \subseteq (X, \| \ \|_x) \to (Y, \| \ \|_y)$ este diferențiabilă pe $A \subseteq D \cap D'$ dacă f este diferențiabilă în $(\forall)$ punct al mulțimii A.

NOTAȚIE: $df: A \to \mathcal{L}(X, Y)$

Teorema 1: Dacă $f: D \subseteq (X, \| \ \|_x) \to (Y, \| \ \|_y)$ e diferențiabilă în x_0, atunci f este continuă în x_0.

Scanned with CamScanner

Teorema 2: i) Orice funcție ~~continuă~~ constantă $f:(X,\|\ \|_X)\to(Y,\|\ \|_Y)$ este diferențiabilă pe X și $df(x)=0$, $(\forall)\, x\in X$.

ii) Orice aplicație T liniară și continuă: $(X,\|\ \|_X)\to(Y,\|\ \|_Y)$ este

este df pe X și $dT(x)=T$

2. Funcții diferențiabile $f: D\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}^m$

$f(x)=(f_1(x),f_2(x),\dots,f_m(x))$

$f_1,f_2,\dots,f_m: D\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ componentele funcției f

$f=(f_1,\dots,f_n)$

Teorema 3: Funcția $f: D\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$ este diferențiabilă în x_0 dacă și numai dacă f este derivabilă în x_0. În plus, $df(x_0): \mathbb{R}\to\mathbb{R}^m$ este dată de formula: $df(x_0)(x)=x\cdot f'(x_0)$, $(\forall)\, x\in\mathbb{R}$

NOTAȚIE: $df(x_0)=dx\cdot f'(x_0)$

3. Funcții diferențiabile $f: D\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$; $n\geq 2$

$f(f_1,\dots,f_n)$

$f_1,f_2,\dots,f_m: D\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$

Definiția 3: Spunem că funcția f admite derivată parțială în raport cu variabila x_i, $1\leq i\leq n$, în punctul $x_0\in D\cap D'$ dacă $(\exists)$

$$(\exists)\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+t\cdot e_i)-f(x_0)}{t}\in\mathbb{R}^m$$

NOTAȚIE: $$\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+t\cdot e_i)-f(x_0)}{t}=\frac{Df}{Dx_i}(x_0)\in\mathbb{R}^m$$

Observație: $(\exists)\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)\in\mathbb{R}^m \iff (\exists)\frac{\partial f_1}{\partial x_i}(x_0)\in\mathbb{R}$

$(\exists)\frac{\partial f_m}{\partial x_i}(x_0)\in\mathbb{R}$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)=\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}(x_0),\dots\frac{\partial f_m}{\partial x_i}(x_0)\right)$$

Scanned with CamScanner

Teorema 4: Dacă $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ este diferențiabilă în x_0, atunci f admite toate derivatele parțiale în x_0. În plus, f admite toate derivatele parțiale în x_0 și $df: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ este dată de formula:

$$df(x_0)(x_1, \dots, x_n) = \left(x_1 \cdot \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) + x_2 \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_2} + \dots + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \right),$$

$df(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^m$

$$df(x_0) = dx_1 \cdot \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_1} + dx_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0) + \dots + dx_n \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0)$$

COROLAR: Dacă $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ nu admite cel puțin o derivată parțială în punctul $x_0 \in D \cap D'$, atunci f nu este diferențiabilă în x_0.

CRITERIU DE DIFERENȚIABILITATE: Fie $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ o funcție și $\emptyset \neq A = \mathring{A} \subseteq D$ astfel că f admite toate derivatele parțiale în orice punct al mulțimii A și acestea sunt funcții continue pe A. Atunci f este diferențiabilă pe mulțimea A.

Scanned with CamScanner

FUNCȚII DIFERENȚIABILE

28 NOIEMBRIE 2019
- SĂPTĂMÂNA 9 -

Definiția 1: Fie $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $n, m \in \mathbb{N}^*$ și $x_0 \in D \cap D'$ astfel încât f este diferențiabilă în x_0.

Matricea $J_f(x_0) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0)\right)_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$

se numește matricea Jacobi a funcției f în punctul x_0.

Dacă $m = n$, $\det J_f(x_0) \overset{not}{=} \frac{D(f_1, \dots, f_n)}{D(x_1, \dots, x_n)}(x_0) \in \mathbb{R}$

se numește Jacobianul funcției f în pct. x_0.

Observație: Dacă $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ este diferențiabilă în punctul $x_0 \in D \cap D'$ atunci $df(x_0): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ este definită prin formula $df(x_0)(x_1, \dots, x_n) = \left[J_f(x_0)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right]^t$ $(\forall)(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Teorema 1 (Operații cu funcții diferențiabile):

a) Fie $f, g: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ două funcții derivabile în punctul $x_0 \in D \cap D'$, atunci $f+g$, $f-g$, $\alpha \cdot f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ sunt diferențiabile în x_0 și $d(f \pm g)(x_0) = df(x_0) \pm dg(x_0)$, $d(\alpha f)(x_0) = \alpha\, df(x_0)$ $(\forall)\alpha \in \mathbb{R}$ sunt adevărate.

b) Fie $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to B \subseteq \mathbb{R}^m$; $g: B \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^2$ și $x_0 \in D \cap D'$ astfel că f este diferențiabilă în x_0 și g este diferențiabilă în $f(x_0) \in B \cap B'$. Atunci $g \circ f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^2$ este diferențiabilă în $x_0 \in D \cap D'$ și $d(g \circ f) = dg(f(x_0)) \circ df(x_0)$

$g \circ f$

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g \circ f"'] & B \arrow[d, "g"] \\ & \mathbb{R}^2 \end{tikzcd}$$

Scanned with CamScanner

Observație: În condițiile teoremei 1, sunt adevărate următoarele egalități:

a) $J_{f\pm g}(x_0) = J_f(x_0) \pm J_g(x_0)$

$J_{\alpha f} = \alpha J_f(x_0)$

b) $J_{g\circ f}(x_0) = J_g(f(x_0)) \cdot J_f(x_0)$

Definiția 2: Fie $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ o funcție. Elementul $x_0 \in D \cap D'$ se numește punct critic al funcției f dacă f este diferențiabilă în x_0 și $df(x_0) = 0$.

Observație: 1) $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$, $f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$. $x_0 \in D \cap D'$ este punct critic al funcției $f \iff f$ este derivabilă în x_0 și $f'(x_0) = (0, \dots, 0)$.

2) $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $n \geq 2$, $f(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n))$ $x_0 \in D \cap D'$ este punct critic a funcției $f \iff$

$\iff \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0) = 0$ $(\forall)$ $1 \leq i \leq m$ și $(\forall)$ $1 \leq j \leq n$.

Definiția 3: Fie $D = \mathring{D} \subseteq \mathbb{R}^n$ (mulțime deschisă). Spunem că funcția $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ este funcție de clasă C^1 pe mulțimea D dacă f admite toate derivatele parțiale pe mulțimea D și acestea sunt funcții continue pe D.

NOTAȚIE: $C^1(D) \overset{def}{=} \{f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \mid f$ funcție de clasă C^1 pe mult$\}$

Observație: $f \in C^1(D) \Rightarrow f$ este diferențiabilă pe D

$\not\Leftarrow$

Scanned with CamScanner

APLICAȚIE: Punctele critice ale funcției $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y)=x^3+y^3-3xy$

Se studiază diferențiabilitatea funcției.

f continuă pe $\mathbb{R}^2$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = (x^3+y^3-3xy)'_x = 3x^2-3y \quad (\forall)\ (x,y)\in\mathbb{R}^2$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (x^3+y^3-3xy)'_y = 3y^2-3x \quad (\forall)\ (x,y)\in\mathbb{R}^2$

$\mathbb{R}^2$ mulțime deschisă

$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ funcții continue pe $\mathbb{R}^2$

Concluzie: f diferențiabilă pe $\mathbb{R}^2$

$$(\mathbb{R}^2)\ \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x^2-3y=0 \\ 3y^2-3x=0 \end{cases} \iff \begin{cases} y=x^2 \\ x=y^2 \end{cases}$$

$x=x^4 \Rightarrow x-x^4=0 \Rightarrow x_0(1-x^3)=0 \Rightarrow x_1=0$, $x_0=1$

$x_1=0 \Rightarrow y_1=0$

$x_2=1 \Rightarrow y_2=1$

$\left.\begin{matrix}(0,0)\in\mathbb{R}^2 \\ (1,1)\in\mathbb{R}^2\end{matrix}\right\} \Rightarrow C=\{(0,0),(1,1)\}$ - mulțimea punctelor critice ale lui f.

Scanned with CamScanner

FUNCȚII DIFERENȚIABILE DE 2 ORI

(I) NOȚIUNI INTRODUCTIVE

Definiția 1: Spunem că $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ este diferențiabilă de două ori în punctul $x_0 \in D \cap D'$ dacă $(\exists) V \in \mathcal{V}_{\mathcal{T}_{\mathbb{R}^n}}(x_0)$ astfel încât f este diferențiabilă pe $V \cap D$ și $df: V \cap D \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ este diferențiabilă în x_0.

NOTAȚIE: $df(x_0) = d(df)(x_0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)) = \mathcal{L}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$

$d^2 f(x_0): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ - aplicație biliniară și continuă

(II) FUNCȚII DIFERENȚIABILE DE DOUĂ ORI. CAZ PARTICULAR

$f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$, $n = 1$

$f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x))$

Teorema 1: Funcția $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ este diferențiabilă de două ori în punctul $x_0 \in D \cap D'$ dacă și numai dacă f_m este derivabilă de două ori în x_0. În plus, $d^2 f(x_0): \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ este definită prin $d^2 f(x_0)(x, y) = x \cdot y \cdot f''(x_0)$, $(\forall)\, x, y \in \mathbb{R}$.

Observație: $d^2 f(x_0) = dx\,dx\, f''(x_0)$

(III) FUNCȚII DIFERENȚIABILE PE $\mathbb{R}^n$ DE DOUĂ ORI. CAZUL PARTICULAR

$f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $n \geq 2$

Definiția 2: Spunem că $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ admite derivate parțiale de ordin 2 în raport cu variabilele x_i și x_j $(1 \leq i \leq j \leq n)$ în punctul $x_0 \in D \cap D'$, dacă $(\exists)\, V \in \mathcal{V}_{\mathcal{T}_{\mathbb{R}^n}}(x_0)$ astfel încât f admite derivată parțială în raport cu variabila x_j pe mulțimea $V \cap D$ și $\frac{\partial f}{\partial x_j}: V \cap D \to \mathbb{R}^m$ admite derivată parțială în raport cu variabila x_i în punctul x_0.

Scanned with CamScanner

NOTAȚIE: $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)(x_0)$;

$$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_i}(x_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \cdot \partial x_i}(x_0)$$

TEOREMA LUI SCHWARZ: Dacă $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ este diferențiabilă de oleacă ori într-un punct $x_0 \in D \cap D'$, atunci f admite derivatele parțiale de ordinul 2 în x_0 și $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_0)$, $(\forall) i, j \in \{1, \dots, n\}$

Pe plus $d^2 f(x_0): \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ este definită prin formula $d^2 f(x_0)((a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n)) = a_1 b_1 \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_1}(x_0) + a_1 b_1 \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_2}(x_0) + \dots + a_n b_n \frac{\partial^2}{\partial^2 x_n}(x_0)$ $(\forall)(a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$.

27 NOIEMBRIE 2019
SĂPTĂMÂNA 9

FUNCȚII DIFERENȚIABILE DE DOUĂ ORI

(I) Cazul $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $n \geq 2$

Teorema lui SCHWARTZ: Dacă $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ este o funcție diferențiabilă de oleacă ori și $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \cdot \partial x_j}(x_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \cdot \partial x_i}$, $(\forall) i \neq j \in \{1, 2, \dots, n\}$

COROLARE: a) Dacă f nu admite cel puțin o derivată parțială de ordinul 2 în x_0 atunci f nu este diferențiabilă de oleacă ori în x_0.

b) Dacă f admite toate derivatele parțiale de ordinul doi în x_0 și $i \neq j \in \{1, 2, \dots, n\}$ astfel încât $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \cdot \partial x_j}(x_0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \cdot \partial x_i}$, atunci f NU este diferențiabilă de oleacă ori.

EXEMPLU: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0; & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

- f continuă pe $\mathbb{R}^2$
- f diferențiabilă pe $\mathbb{R}^2$
- f diferențiabilă pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$
- $\frac{\partial^2 f}{\partial x \cdot \partial y}(0, 0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$

f admite toate deriv. parțiale de ord 2
$\Rightarrow f$ nu este dif. de oleacă ori în $(0, 0)$

Scanned with CamScanner

TEOREMA LUI YOUNG: a) Fie $f: D = \mathring{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ o funcție $x_0 \in D$, $V \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}^n}(x_0)$ astfel că $V \subseteq D$ și $i \neq j \in \{1, 2, \dots, n\}$ astfel că $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ și $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ există pe V. Dacă $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ și $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j x_i}$ sunt continue în punctul x_0 atunci $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$

b) Fie $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ o funcție, $x_0 \in D$, $V \in \mathcal{V}(x_0)$ astfel că $V \subseteq D$. Dacă f admite toate derivatele parțiale de ordinul doi pe mulțimea V și acestea sunt continue în punctul x_0, atunci f este diferențiabilă de două ori în punctul x_0.

COROLAR: Fie $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ o funcție și $\emptyset = A = \mathring{A} \subseteq D$ astfel că f admite toate derivatele parțiale de ordinul 2 pe mulțimea A și acestea sunt funcții continue pe mulțimea A, atunci f este diferențiabilă de două ori pe mulțimea A.

EXEMPLU: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^3 + y^3 - xy$

f continuă pe $\mathbb{R}$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = (x^3 + y^3 - 3xy)'_x = 3x^2 - 3y \ (\forall)(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = (x^3 + y^3 - 3xy)'_y = 3y^2 - 3x \ (\forall)(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$\mathbb{R}^2$ mulțime deschisă

$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ fct. cont pe $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ f dif pe $\mathbb{R}$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x, y) = (3x^2 - 3y)'_x = 6x \ (\forall)(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x, \partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x, y) = (3y^2 - 3x)'_x = -3 \ (\forall)(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y, \partial x}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x, y) = (3x^2 - 3y)'_y = -3 \ (\forall)(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x, y) = (3y^2 - 3x)'_y = 6 \ (\forall)(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$\mathbb{R}^2$ mulțime deschisă

$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}$ fct. cont. $\Rightarrow$ f dif de 2 ori pe $\mathbb{R}$

$d^2 f(2, 1): \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$; $d^2 f(2, 1)((a_1, b_1), (a_2, b_2)) = a_1 a_2 \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(2, 1) + a_1 b_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(2, 1) + b_1 a_2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(2, 1) + b_1 b_2 \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(2, 1) = 12 a_1 a_2 - 3 a_1 b_2 - 3 b_1 a_2 + 6 b_1 b_2, (\forall)(a_1, b_1)$

Scanned with CamScanner

Definiția 1: Spunem că funcția $f: D = \mathring{D} \subseteq \mathbb{R}^n$ este de clasă C^2 pe mulțimea D dacă f admite toate derivatele parțiale de ordinul doi pe mulțimea D și acestea sunt fct. continue pe D.

NOTAȚIE: $C^2(D) \overset{not}{=} \{ f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \mid f \text{ fct. de clasă } C^2 \}$

Observație: $f \in C^2(D) \Rightarrow f$ este diferențiabilă de două ori pe D

$\not\Leftarrow$

TEOREMA FUNCȚIILOR IMPLICITE:

Definiție 1: Fie $f: D \subseteq \mathbb{R}^n$ o funcție diferențiabilă de două ori în punctul $x_0 \in D \cap D'$. Matricea $H_f(x_0) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) \right)_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ se numește **hessiana** funcției f în punctul x_0.

CRITERIUL DE DETERMINARE AL PUNCTELOR DE EXTREM LOCAL AL FUNCȚIEI $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, n \geq 2$

Se consideră $f: D = \mathring{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ o funcție de clasă C^2 pe mulțimea D și $x_0 \in D$ un punct critic al funcției f.

a) Dacă $d^2 f(x_0)(v, v) > 0 \ (\forall) v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, atunci x_0 este punct de minim local al funcției f.

b) Dacă $d^2 f(x_0)(v, v) < 0 \ (\forall) v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, atunci x_0 este punct de maxim local al funcției f.

c) Dacă $(\exists) v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, astfel că $d^2 f(x_0)(v_1, v_2) < 0$ și $d^2 f(x_0)(v_1, v_2) > 0$, atunci x_0 nu este punct de extrem local al fct. f.

Observație: $d^2 f(x_0) \Rightarrow H_f(x_0) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) \right)_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$\Delta_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x_n}(x_0)$

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 x_2}(x_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 x_2}(x_0) \end{vmatrix}$

$\vdots$

$\Delta_n = \det H_f(x_0)$

$\begin{pmatrix} \boxed{7} & 9 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

$\Delta_1 = a_{11}$

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 7 & 9 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \ \ldots$

$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 7 & 9 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{vmatrix}$

Scanned with CamScanner

Cazuri:

a) $\Delta_1, \dots, \Delta_n > 0 \Rightarrow x_0$ punct de minim local al funcției f

b) $\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \dots, (-1)^n \Delta_n > 0 \Rightarrow x_0$ punct de maxim local al fct f

c) $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n \geq 0$ și cel puțin un minor e nul

sau

$\Delta_1 \leq 0, \Delta_2 \geq 0, \dots, (-1)^n \Delta_n \geq 0$ și cel puțin un minor e nul

$\Rightarrow$ Criteriul nu se pronunță

d) în toate celelalte cazuri x_0 nu este punct de extrem local

NOTAȚIE: $(a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}) = (\underbrace{(a_1, \dots, a_n)}_{x_0}, \underbrace{a_{n+1}}_{y_0}) = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$

TEOREMA FUNCȚIILOR IMPLICITE:

Fie $f: D = \mathring{D} \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ o funcție de clasă C^1 pe mulțimea D și $(x_0, y_0) \in D$ cu următoarele proprietăți:

a) $f(x_0, y_0) = 0$

b) $\frac{\partial f}{\partial x_{n+1}}(x_0, y_0) \neq 0$. Există $r_1, r_2 > 0$ astfel că $B(x_0, r_1) \times B(y_0, r_2) \subseteq D$, $(\exists!)\ \varphi: B(x_0, r_1) \to B(y_0, r_2)$ fct de clasă C^1 care verifică una din relațiile

(i) $\varphi(x_0) = y_0$

(ii) $f(x, \varphi(x_0)) = 0\ (\forall)\ x \in B(x_0, r_1)$

În plus, $\frac{\partial \varphi}{\partial x_0} = - \frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0, y_0)}{\frac{\partial f}{\partial x_{n+1}}(x_0, y_0)}\ (\forall)\ 1 \leq i \leq n$

Scanned with CamScanner

FUNCȚII INTEGRABILE RIEMANN

4 DECEMBRIE 2019 - SĂPTĂMÂNA 6 -

1. NOȚIUNI GENERALE:

Definiția 1) a) Se numește diviziune a intervalului $[a,b]$ o mulțime finită $\Delta = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ cu $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$.

NOTAȚIE: $\mathcal{D}([a,b]) \overset{def}{=} \{\Delta \mid$ diviziune a intervalului $[a,b]\}$

$\Delta: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$

b) Fie $\Delta \in \mathcal{D}([a,b])$, $\Delta: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$.

Numărul real $\max\limits_{1 \le i \le n} (x_i - x_{i-1}) \in \mathbb{R}$ se numește norma diviziunii Δ.

NOTAȚIE: $\|\Delta\| \overset{def}{=} \max\limits_{1 \le i \le n} (x_i - x_{i-1})$

c) Fie $\Delta \in \mathcal{D}([a,b])$, $\Delta = a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$.

Mulțimea finită $t_\Delta = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ cu $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ $(\forall)$ $1 \le i \le n$ se numește sistem de puncte intermediare asociat diviziunii Δ.

Definiția 2: Fie $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ o funcție, $\Delta \in \mathcal{D}([a,b])$, $\Delta: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ și $t_\Delta = \{t_1, \dots, t_n\}$ un sistem de pct. intermediare asociat diviziunii Δ.

Numărul real $f(t_1)(x_1 - x_0) + f(t_2)(x_2 - x_1) + \dots f(t_n)(t_n - t_{n-1}) = \sum\limits_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1})$ se numește suma Riemann asociată funcției f, diviziunii Δ și sistemului de pct. intermediare.

NOTAȚIE: $\sigma_\Delta(f; t_\Delta) \overset{def}{=} \sum\limits_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1})$

Scanned with CamScanner

Definiția 3: O funcție $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ este integrabilă Riemann pe $[a,b]$ dacă $(\exists)\, I$ cu proprietatea că $(\forall)\,\varepsilon>0\,(\exists)\,\delta>0$ a.î. $|\sigma_\Delta(f:\xi_\Delta)-I|<\varepsilon$ $(\forall)\,\sigma\in\mathcal{D}([a,b])$ cu $\|\Delta\|<\delta_\varepsilon$ și $(\forall)\,\xi_\Delta$ un sistem de puncte intermediare asociat diviziunii Δ.

NOTAȚIE: $I \overset{not}{=} \int_a^b f(x)\,dx \in \mathbb{R}$ - integrala Riemann a lui f pe $[a,b]$

$$\mathcal{R}([a,b]) \overset{def}{=} \{f:[a,b]\to\mathbb{R} \mid f \text{ integr. Riemann pe } [a,b]\}$$

Teorema 1: Fie $f\in\mathcal{R}([a,b])$. Pentru $(\forall)$ șir de diviziuni $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cu $\lim\limits_{n\to\infty}\|\Delta_n\|=0$, pentru $(\forall)\,\xi_{\Delta_n}$ sistem de puncte intermediare asoc. diviziunii Δ_n, $(\exists)\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_{\Delta_n}(f:\xi_{\Delta_n})=\int_a^b f(x)\,dx$.

II CRITERIUL DE INTEGRABILITATE

Definiția 4: O mulțime $A\subseteq\mathbb{R}$ s.n. neglijabilă Lebesgue dacă $(\forall)\,\varepsilon>0$, $(\exists)\,((a_n,b_n))_{n\in\mathbb{N}}$ un șir de intervale deschise a.î. $A\subseteq\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}}(a_n,b_n)$ și $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(b_n-a_n)<\varepsilon$

Observații: Mulțimile neglijabile Lebesgue au urm. prop:

1) $\emptyset$, mulțimile finite și mulțimile numărabile $(\mathbb{N},\mathbb{Z},\mathbb{Q})$ Lebesgue

2) $\left.\begin{array}{l} A\subseteq B \\ B \text{ mulț. neglijabilă Lebesgue}\end{array}\right\} \Rightarrow A$ neglijabilă Lebesgue

3) A_n neglijabilă, $(\forall)\,n\in\mathbb{N} \Rightarrow \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$ mulțime neglijabilă Lebesgue.

Scanned with CamScanner

CRITERIUL DE INTEGRABILITATE AL LUI LEBESGUE: O funcție $f:[a,b]$ este integrabilă Riemann pe $[a,b]$ dacă și numai dacă f este mărginită pe $D_f = \{x \in [a,b] \mid f$ NU este ~~integrabilă~~ continuă în $x\}$ este mulțime neglijabilă.

COROLAR: Orice fct. cont $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ este integrabilă Riemann.

Definiția 5: Fie $f:[a,b]$ o funcție mărginită, $\Delta \in \mathcal{D}([a,b])$ $\Delta: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ și $M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$.

$m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$ $(\forall)$ $1 \le i \le n$.

Nr real $M_1(x_1 - x_0) + M_2(x_2 - x_1) + \dots + M_n(x_n - x_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$ s.n. suma Darboux superioară asoc. fct. f și diviziunii Δ.

Nr. reale $m_i(x_i, x_{i-1})$ s.n. suma Darboux inferioară fct. f și diviziunii Δ.

NOTAȚIE:

$$S_\Delta(f) \overset{def}{=} \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$$

$$s_\Delta(f) \overset{def}{=} \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})$$

Scanned with CamScanner

Criteriul de integrabilitate al lui Darboux: Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ o funcție mărginită. Următoarele afirmații sunt echivalente:

a) $f\in\mathcal{R}([a,b])$

b) $(\forall)\varepsilon>0\ (\exists)\ \delta_\varepsilon>0$ astfel încât $S_\Delta(f)-s_\Delta(f)<\varepsilon\ (\forall)\ \Delta\in\mathcal{D}([a,b])$ cu $\|\Delta\|<\delta_\varepsilon$

c) $(\forall)\ (\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ șir din $\mathcal{D}([a,b])$ cu $\lim\limits_{n\to\infty}(S_{\Delta_n}(f)-s_{\Delta_n}(f))=0$

COROLAR: Orice funcție monotonă $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ este integrabilă Riemann pe $[a,b]$

III PROPRIETĂȚILE FUNCȚIILOR INTEGRABILE RIEMANN

Teorema 2: Fie $f,g\in\mathcal{R}([a,b])$ astfel că mulțimea $\{x\in[a,b]\mid f(x)\neq g(x)\}$ este finită. Atunci $\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b g(x)\,dx$

Definiția 6: Fie $I\subseteq\mathbb{R}$ un interval și $f,F:I\to\mathbb{R}$ două funcții. Spunem că F este o primitivă a lui f dacă F este funcție derivabilă pe I și $F'(x)=f(x)$, $(\forall)\ x\in I$.

FORMULA LEIBNIZ-NEWTON: Se consideră $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ o funcție integrabilă Riemann pe $[a,b]$ care admite o primitivă $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ fiind una dintre primitivele ei. Are loc egalitatea:

$$\int_a^b f(x)\,dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a)$$

FORMULA DE INTEGRARE PRIN PĂRȚI PENTRU INTEGRALE RIEMANN: Fie $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ două funcții derivabile pe $[a,b]$ cu $f',g\in\mathcal{R}([a,b])$ atunci $\int_a^b f'(x)g(x)\,dx=f(x)g(x)\Big|_a^b-\int_a^b f(x)g'(x)\,dx$

Scanned with CamScanner

TEOREMA DE MEDIE PENTRU FUNCȚII INTEGRABILE RIEMANN: Fie $f, g \in \mathcal{R}([a,b])$ care verifică următoarele condiții:

a) f are proprietatea lui Darboux

b) $g(x) \geq 0$ $(\forall) x \in [a,b]$

Există $c \in (a,b)$ a.î. $\int_a^b f(x) g(x)\, dx = f(c) \cdot \int_a^b g(x)\, dx$

COROLAR: Dacă $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ este o funcție continuă, atunci $(\exists)\, c \in [a,b)$ a.î.: $\int_a^b f(x)\, dx = f(c)(b-a)$

III.1: TEOREMA DE TRECERE LA LIMITĂ SUB INTEGRALA RIEMANN

Teorema convergenței uniforme: Se consideră $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ șir din $\mathcal{R}([a,b])$ și $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ astfel că $f_n \xrightarrow[{[a,b]}]{u} f$. Atunci $f \in \mathcal{R}([a,b])$ și $\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{n \to \infty} \int_a^b f_n(x)\, dx$.

Teorema convergenței mărginite: Se consideră $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ șir din $\mathcal{R}([a,b])$ și $f \in \mathcal{R}([a,b])$ astfel că

i) $f_n \xrightarrow[{[a,b]}]{s} f$

ii) $(\exists)\, M > 0$ a.î. $|f_n(x)| \leq M$ $(\forall) x \in [a,b]$, $(\forall) n \in \mathbb{N}$, atunci

$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{n \to \infty} \int_a^b f(x)\, dx$

Teorema convergenței monotone: Fie $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ șir din $\mathcal{R}([a,b])$ și $f \in \mathcal{R}([a,b])$ astfel că:

i) $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este monoton. Att. $\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{n \to \infty} f(x)\, dx$

ii) $f_n \xrightarrow[{[a,b]}]{s} f$

Atunci $\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{n \to \infty} f_n(x)\, dx$

Scanned with CamScanner

9 DECEMBRIE 2019
– SĂPTĂMÂNA 11 –

FUNCȚII INTEGRABILE RIEMANN

Teorema 1: Fie $f \in \mathcal{R}([a,b])$ și fct $F:[a,b] \to \mathbb{R}$, def prin $F(x) = \int_a^x f(t)dt$

Sunt adevărate următoarele afirmații:

a) F continuă pe $[a,b]$

b) În plus, dacă f este continuă pe $[a,b]$, atunci F este derivabilă pe $[a,b]$ și $F'(x) = f(x)$ $(\forall)$ $x \in [a,b]$

Corolar: Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval și $f: I \to \mathbb{R}$ o fct. cont. pe I, atunci f admite primitive pe I, fct. $F: I \to \mathbb{R}$, $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ $(\forall)$ $x \in I$ fiind o primitivă a lui f, $a \in I$.

Teorema 2: Fie I, J două intervale, $f: I \to \mathbb{R}$ o funcție continuă, $g, h: J \to I$ două funcții derivabile și $F: J \to \mathbb{R}$ o funcție def prin $F(x) = \int_{g(x)}^{h(x)} f(t)dt$ $(\forall)$ $x \in J$.

Atunci F este fct. derin pe J și $F'(x) = f((h(x))) \cdot h'(x)$
$= -f(g(x)) \cdot g'(x)$ $(\forall) x \in J$

Aplicație: Fie $F: (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $F(x) = \int_{x^2}^{x^3} \frac{\sin t}{t} dt$

$g, h: \overset{J}{(0,\infty)} \to \overset{I}{\cancel{\mathbb{R}}}(0,\infty)$

$\left.\begin{array}{l} g(x) = x^2 \\ h(x) = x^3 \end{array}\right\} \to$ fct. derin

$f: (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\sin t}{t}$ fct. cont. cond

$F(x) = \int_{g(x)}^{h(x)} f(t)dt$ $(\forall)$ $t \in (0,\infty) \Rightarrow F$ fct. derin pe $(0,\infty)$ și

$$F'(x) = \frac{\sin x^3}{x^3}(x^3)' - \frac{\sin x^2}{x^2}(x^2)' = \frac{3\sin x^3}{x} - \frac{2\sin x^2}{x} = \frac{3\sin x^3 - 2\sin x^2}{x}$$

Scanned with CamScanner

INTEGRALE PROPRII

I Noțiuni generale

$I = [a,b) \vee (a,b] \vee [a,b) \vee [a,a) \vee (a,a) \vee (-\infty,a) \vee [-\infty,a) \vee (-\infty,\infty)$

Definiția 1: Spunem că funcția $f: I \to \mathbb{R}$ este local integrabilă dacă $(\forall)\, \alpha < \beta \in I$ avem $f|_{[\alpha,\beta]} \in \mathcal{R}([\alpha,\beta])$

Notație: $\mathcal{R}_{loc}(I) \overset{def}{=\!=} \{ f: I \to \mathbb{R} \mid f$ local integrabilă pe $I \}$

Teorema 1: (Clase de fct. local integrabile)

a) Orice fct. cont. $f: I \to \mathbb{R}$ este local integrabilă pe I

b) Orice funct. monotonă $f: I \to \mathbb{R}$ este local integrabilă pe I

c) Orice fct. mărg. $f: I \to \mathbb{R}$ cu def $D_f = \{ x \in I \mid f$ nu e cont în $x \}$ mulțime neglijabilă Lebesgue este local integrabilă pe I.

Notație:

1) $f \in \mathcal{R}_{loc}([a,b)) \to \int_a^{b-0} f(x)\,dx$ integrală improprie

2) $f \in \mathcal{R}_{loc}((a,b)) \to \int_{a+0}^{b-0} f(x)\,dx$ integrală improprie

3) $f \in \mathcal{R}_{loc}((a,b)) \to \int_{a+0}^{b} f(x)\,dx$ integrală improprie

4) $f \in \mathcal{R}_{loc}((-\infty,\infty)) \to \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ integrală improprie

$f \in \mathcal{R}_{loc}([a,b))$

Definiția 2: Spunem că integrala improprie $\int_a^{b-0} f(x)\,dx$ este convergentă dacă $(\exists) \lim\limits_{\substack{x \to b \\ x < b}} \int_a^x f(t)\,dt \in \mathbb{R}$.

Notație: $\lim\limits_{\substack{x \to b \\ x < b}} \int_a^x f(t)\,dt \overset{not}{=\!=} \int_a^{b-0} f(x)\,dx \in \mathbb{R}$ valoarea integr. improprii

a fct. f $[a,b)$

Scanned with CamScanner

Definiția 3: Fie $f \in R_{loc}([a,b))$

a) Spunem că integrala improprie $\int_a^{b-0} f(x)\,dx$ este divergentă dacă aceasta nu este convergentă.

b) Spunem că integrala improprie $\int_a^{b-0} f(x)\,dx$ este absolut convergentă dacă integrala improprie $\int_a^{b-0} |f(x)|\,dx$ este convergentă.

Teorema 2: Fie $f \in R_{loc}([a,b))$. Dacă integrala improprie $\int_a^{b-0} f(x)\,dx$ este absolut convergentă, atunci aceasta este convergentă.

Observație: Reciproca T_2 este în general falsă.

$\Leftarrow \not\Rightarrow$

Dacă $f(x) > 0$ $(\forall) x \in [a,b)$ sau $f(x) < 0$ $(\forall) x \in [a,b)$ atunci noțiunile de integrală improprie convergentă și integrală improprie absolut convergentă sunt echivalente.

Criteriul de comparație cu inegalități pentru integralele improprii:

Fie $f, g \in R_{loc}([a,b))$ astfel că $0 \le f(x) \le g(x)$ $(\forall) x \in [a,b)$. Dacă $\int_a^{b-0} g(x)\,dx$ este convergentă, atunci integrala improprie $\int_a^{b-0} f(x)\,dx$ este convergentă. Dacă integrala improprie $\int_a^{b-0} f(x)\,dx$ este divergentă, atunci integrala improprie $\int_a^{b-0} g(x)\,dx$ este divergentă.

Criteriul de comparație cu limite pentru integrale improprii:

Fie f, g două funcții pozitive pentru care $(\exists) \lim\limits_{\substack{x \to b \\ x < b}} \frac{f(x)}{g(x)} = l \in R_+$

Dacă $l \in (0,\infty)$ atunci integralele improprii $\int_a^{b-0} f(x)$ și $\int_a^{b-0} g(x)\,dx$ au aceeași natură.

Dacă $l = 0$ și integrala improprie $\int_a^{b-0} g(x)\,dx$ este convergentă, atunci integrala improprie $\int_a^{b-0} f(x)\,dx$ este convergentă.

Dacă $l = \infty$ și integrala improprie $\int_a^{b-0} g(x)\,dx$ este divergentă, atunci integrala improprie $\int_a^{b} f(x)\,dx$ este divergentă.

Scanned with CamScanner

Formula lui Leibniz - Newton pt. integralele improprii:

Fie $f:[a,b)\to\mathbb{R}$ o funcție, $F:[a,b)\to\mathbb{R}$ fiind una dintre primitivele admise de funcția local integrabilă f. Integrala improprie $\int_a^{b-0} f(x)\,dx$ este convergentă dacă $(\exists)\lim\limits_{\substack{x\to b\\ x<b}} F(x)\in\mathbb{R}$.

În plus, $\int_a^{b-0} f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^{b-0} = \lim\limits_{\substack{x\to b\\ x<b}} F(x) - F(a)$.

Formula de integrare prin părți pentru integralele improprii.

Fie $f,g:[a,b)\to\mathbb{R}$ două funcții deriv. cu $f,g\in\mathcal{R}_{loc}([a,b))$ pt. care $(\exists)\lim\limits_{\substack{x\to b\\ x<b}} f(x)\,g(x)\in\mathbb{R}$. Integrala improprie $\int_a^{b-0} f'(x)\,g(x)$ este convergentă dacă și numai dacă integrala improprie $\int_a^{b-0} f(x)g'(x)\,dx$ este convergentă. În plus, este adevărată egalitatea:

$$\int_a^{b-0} f'(x)\,g(x)\,dx = f(x)\,g(x)\Big|_a^{b-0} - \int_a^{b-0} f(x)\,g'(x)\,dx$$

11 DECEMBRIE 2019
- SĂPTĂMÂNA 11 -

FUNCȚIILE GAMMA ȘI BETA ALE LUI EULER

Teorema 1 a) Oricare ar fi $p,q\in(0,\infty)$ integrala improprie $\int_{0+0}^{1-0} x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$ este convergentă.

b) Oricare ar fi $p\in(0,+\infty)$ integrala improprie $\int_{0+0}^{+\infty} x^{p-1}\cdot e^{-x}\,dx$ este convergentă.

Definiția 1: a) Funcția $B:(0,+\infty)\times(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ definită prin ~~$B(p,q)=\int_{0+0}^{+\infty} e^{-x}\cdot x^{p-1}\,dx$~~ și $B(p,q)=\int_{0+0}^{1-0} x^{p-1}(+1-x)^{q-1}\,dx$ se numește funcția Beta a lui Euler.

b) Funcția $\Gamma:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ definită prin $\Gamma(p)=\int_{0+0}^{+\infty} e^{-x}\cdot x^{p-1}\,dx$ se numește funcția Gamma a lui Euler.

Scanned with CamScanner

Teorema 2 (Proprietatea funcției Gamma): Funcția $\Gamma:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ are următoarele proprietăți:

a) $\Gamma(1)=\int_0^{\infty} e^{-x}dx = -e^{-x}\Big|_0^{\infty} = \lim_{x\to\infty}(-e^{-x})+e^0 = 1$

b) $\Gamma(p+1)=p\cdot\Gamma(p)\ (\forall)\ p>0$

c) $\Gamma(p)\cdot\Gamma(1-p)=\frac{\pi}{\sin(p\cdot\pi)}\ (\forall)\ p\in(0,1)$

d) $\Gamma(p)>0\ (\forall)\ p\in(0,\infty)$

$p=\frac{1}{2} \Rightarrow \Gamma(\frac{1}{2})=\Gamma(\frac{1}{2})=\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{2}}$

$$\left.\begin{array}{l}\Gamma^2(\frac{1}{2})=\pi\\ \Gamma(\frac{1}{2})>0\end{array}\right\}\Rightarrow \Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$$

Teorema 3 (Proprietățile funcției Beta): Funcția $B:(0,\infty)\times(0,\infty)\to$ are următoarele proprietăți:

a) $B(p,q)>0\ (\forall)\ p,q\in(0,\infty)$

b) $B(p,q)=B(q,p)\ (\forall)\ p,q\in(0,\infty)$

c) $B(p,q)=2\int_{0+0}^{\frac{\pi}{2}-2}(\sin x)^{2p-1}\cdot(\cos x)^{2q-1}dx$

d) $B(p,q)=\int_{0+0}^{\infty}\frac{x^{p-1}}{(1+x)^{p+q}}dx\ (\forall)\ p,q\in(0,\infty)$

Teorema 4 (Formula de leg. între B și Γ): Este adevărată următoarea egalitate:

$$B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\cdot\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}\ (\forall)\ p,q\in(0,\infty)$$

Scanned with CamScanner

APLICAȚII:

1) $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$!

Schimbare de variabilă: $y = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{y}$

$dx = (\sqrt{y})' dy = \frac{1}{2\sqrt{y}} dy$

$$\left.\begin{array}{l} x=0 \Rightarrow y=0 \\ x \to \infty \Rightarrow y \to \infty \end{array}\right\} \Rightarrow \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \int_{0+0}^{\infty} e^{-y} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{2} \int_{0+0}^{\infty} \frac{e^{-y}}{\sqrt{y}} dy =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{0+0}^{\infty} y^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{-y} dy = p-1 = -\frac{1}{2} \Rightarrow p = \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cdot \cos^{13} x \, dx$

$$B(p,q) = 2 \int_{0+0}^{\frac{\pi}{2}-0} (\sin x)^{2p-1} (\cos x)^{2q-1} dx$$

$$\begin{cases} 2p-1=3 \\ 2q-1=13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p=2 \\ q=7 \end{cases}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos^{13} x \, dx = \frac{B(2,7)}{2} = \frac{1}{112}$$

$$B(2,7) = \frac{\Gamma(2) \cdot \Gamma(7)}{\Gamma(2+7)} = \frac{1! \cdot \cancel{6!}}{\cancel{8!}} = \frac{1}{56}$$

3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{tg\, x} \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}-0} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\cos x}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}-0} (\sin x)^{\frac{1}{2}} (\cos x)^{-\frac{1}{2}} dx$

$$\begin{cases} 2p-1 = \frac{1}{2} \\ 2q-1 = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p = \frac{3}{4} \\ q = \frac{1}{4} \end{cases} = \frac{B\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right)}{2}$$

$$B\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right) = \Gamma\left(\frac{3}{4}\right) \cdot \Gamma\left(1 - \frac{3}{4}\right) = \frac{\pi}{\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)} = \frac{\pi}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \pi\sqrt{2}$$

Scanned with CamScanner

MULȚIMI MĂSURABILE JORDAN ÎN $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$

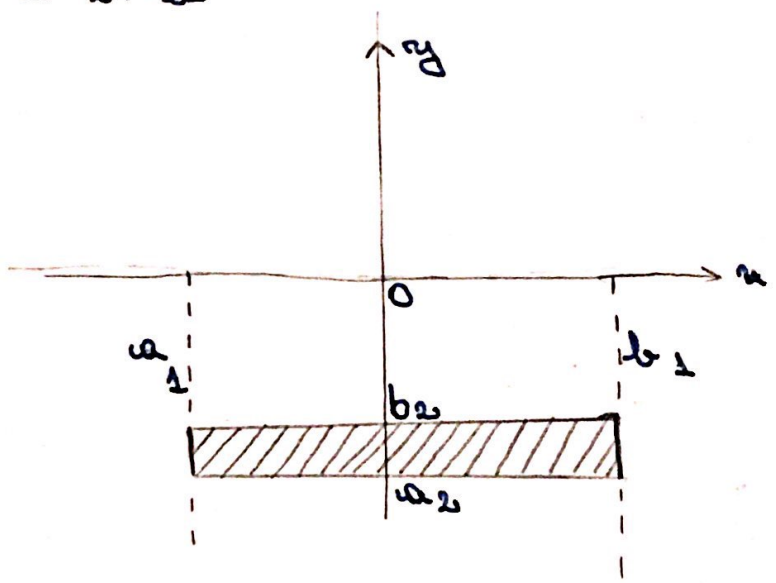
I INTERVAL ÎNCHIS N-DIMENSIONAL

Definiția 1: O mulțime $I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_n, b_n] \subseteq \mathbb{R}^n$ s.n. interval închis n-dimensional.

Nr. real $(b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \ldots (b_n - a_n)$ s.n. volumul intervalului I.

NOTAȚIE: $v(I) \overset{def}{=} (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \ldots (b_n - a_n) \in \mathbb{R}$

$I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$



$I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_n, b_n] \subseteq \mathbb{R}^n$

$\Delta_1: a_1 = x_0^1 < x_1^1 < \ldots < x_{n_1}^1 = b_1 \in \mathcal{D}([a_1, b_1])$

$\Delta_2: a_2 = x_0^2 < x_1^2 < \ldots < x_{n_2}^2 = b_2 \in \mathcal{D}([a_2, b_2])$

$\Delta_3: a_3 = x_0^3 < x_1^3 < \ldots < x_{n_3}^3 = b_3 \in \mathcal{D}([a_3, b_3])$

$\vdots$

$\Delta_n: a_n = x_0^n < x_1^n < \ldots < x_{n_n}^n = b_n \in \mathcal{D}([a_n, b_n])$

Scanned with CamScanner

Definiția 2: Mulțimea $G=\{[x_{j_1}^1, x_{j_{(1+1)}}^1]\times[x_{j_2}^2, x_{j_{(2+1)}}^2]\times\ldots\times[x_{j_n}^n, x_{j_{(n+1)}}^n] \mid 0\le j_1\le n_1-1, 0\le j_n\le n_n-1\}=\{I_1, I_2, \ldots, I_k\}$ s.n. partiție a intervalului I.

II INEL DE MULȚIMI. MĂSURĂ POZITIVĂ

Definiția 1: Fie $X\neq\emptyset$ și $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{P}(X)$. Familia de mulțimi $\mathcal{A}$ s.n. inel de mulțimi dacă verifică următoarele condiții:

a) $(\forall)\, A,B\in\mathcal{A}\Rightarrow A\cup B\in\mathcal{A}$

b) $(\forall)\, A,B\in\mathcal{A}\Rightarrow A\setminus B\in\mathcal{A}$

Obs: $\mathcal{A}$ inel de mulțimi, atunci:

1.) $\emptyset\in\mathcal{A}$

2.) $(\forall)\, A,B\in\mathcal{A}\Rightarrow A\cap B=\mathcal{A}$

Definiția 3: Fie $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{P}(X)$ un inel de mulțimi, s.n. măsură (pozitivă) orice funcție $\mu:\mathcal{A}\to\overline{\mathbb{R}_+}$ care are următoarele proprietăți:

a) $\mu(\emptyset)=0$

b) $\mu(A\cup B)=\mu(A)+\mu(B)$ $(\forall)\, A,B\in\mathcal{A}$ și $A\cap B=\emptyset$

Observație: Fie $\mu:\mathcal{A}\to\overline{\mathbb{R}}$ o mulțime (pozitivă). Sunt adevărate următoarele afirmații:

a) $\left.\begin{array}{l}A,B\in\mathcal{A}\\ A\subseteq B\end{array}\right| \Rightarrow \mu(A)\le\mu(B)$

b) $\mu(A\cup B)\le\mu(A)+\mu(B)$ $(\forall)\, A,B\in\mathcal{A}$

c) $A\subseteq B\in\mathcal{A}$ cu $\mu(B)\in\mathbb{R}$

$\mu(B\setminus A)=\mu(B)-\mu(A)$

Scanned with CamScanner

18 DECEMBRIE 20[illegible]
– SĂPTĂMÂNA L[illegible]

MULȚIMI MĂSURABILE JORDAN

I DEFINIȚII ȘI EXEMPLE:

Definiția 1: Fie $I \subseteq \mathbb{R}^n$ un interval închis n-dimensional. $G=\{I_1,\dots,I_p\}$ o partiție a lui I și $E \subseteq I$ mulțime nevidă.

a) Numărul real $V(E,G)=\sum_{I_j \cap E \neq \emptyset} v(I_j) \in \mathbb{R}$ se numește suma exterioară a mulțimii E relativă la partiția G.

b) Numărul real $V(E,G)=\sum_{I_j \subseteq E} v(I_j) \in \mathbb{R}$ se numește suma interioară a mulțimii E relativă la partiția G.

OBSERVAȚIE: $0 \leq v(E,G) \leq V(E,G)$

Definiția 2: Fie $I \subseteq \mathbb{R}^n$ un interval închis n-dimensional și $E \subseteq I$ mulțime nevidă.

a) Numărul real $\mu_*(E)=\sup_{G \text{ partiție}} v(E,G) \in \mathbb{R}$ se numește măsura interioară a lui I Jordan a lui E.

b) Numărul real $\mu^*(E)=\inf_{G \text{ partiție}} V(E,G) \in \mathbb{R}$ se numește măsura exterioară a lui I Jordan a lui E.

OBSERVAȚII: a) Definițiile nu depind de interiorul lui I

b) $0 \leq \mu_*(E) \leq \mu^*(E)$

$\mu_*(E), \mu^*(E) \in \mathbb{R}$

Definiția 3: O mulțime mărginită $E \subseteq \mathbb{R}^n$ se numește mulțime măsurabilă Jordan dacă $\mu_*(E)=\mu^*(E)$

NOTAȚII: a) $\mathcal{J}(\mathbb{R}^n) \overset{def}{=} \{E \subseteq \mathbb{R}^n \mid E$ mulț. măsurabilă Jordan$\}$

b) $\mu(E) \overset{def}{=} \mu_*(E)=\mu^*(E) \in \mathbb{R}$ măsura Jordan a lui E

Scanned with CamScanner

Teorema 1: a) $\mathcal{J}(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ este inel de mulțimi ($\forall E, F \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$)
$\Rightarrow E \cup F, E \cap F, E \setminus F \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$

b) Funcția $\mu : \mathcal{J}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}$ este măsură pe inelul de mulțimi $\mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$

$$(\mu(E \cup F) = \mu(E) + \mu(F), (\forall) E, F \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n) \text{ cu } E \cap F = \emptyset)$$

Definiția 4: a) O mulțime $E \subseteq \mathbb{R}^n$ se numește convexă dacă ($\forall$) $u, v \in E$, ($\forall$) $t \in [0,1]$ avem $(1-t) \cdot u + t \cdot v \in E$

b) O mulțime $E \subseteq \mathbb{R}^n$ se numește simplă în raport cu axa Ox_j, $1 \leq j \leq n$ dacă ($\exists$) $K \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ mulțime compactă, măsurabilă Jordan, ($\exists$) $\varphi_1, \varphi_2 : K \longrightarrow \mathbb{R}$ funcții continue astfel încât:

$$E = \{(x_1, \dots, x_j, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \varphi_1(x_1, \dots, \hat{x}_j, \dots, x_n) \leq x_j \leq \varphi_2(x_1, \dots, x_j, \dots, x_n)\ (\forall)(x_1, \dots, x_j, \dots, x_n) \in K\}$$

$(x, \hat{y}, z) = (x, z)$

$(a, b, c, \hat{d}) = (a, b, c)$

Teorema 2: (exemple de mulțimi măsurabile Jordan)

a) Orice interval închis n-dimensional I este mulțime măsurabilă Jordan și $\mu(I) = v(I)$.

b) Orice mulțime finită este măsurabilă Jordan și $\mu(E) = 0$.

c) Orice mulțime finită mărginită și convexă $E \subseteq \mathbb{R}^n$ este măsurabilă Jordan.

d) Orice mulțime $E \subseteq \mathbb{R}^n$ simplă în raport cu axa Ox_j, $1 \leq j \leq n$ este măsurabilă Jordan.

Scanned with CamScanner

II DESCOMPUNEREA JORDAN A UNEI MULȚIMI MĂSURABILE JORDAN

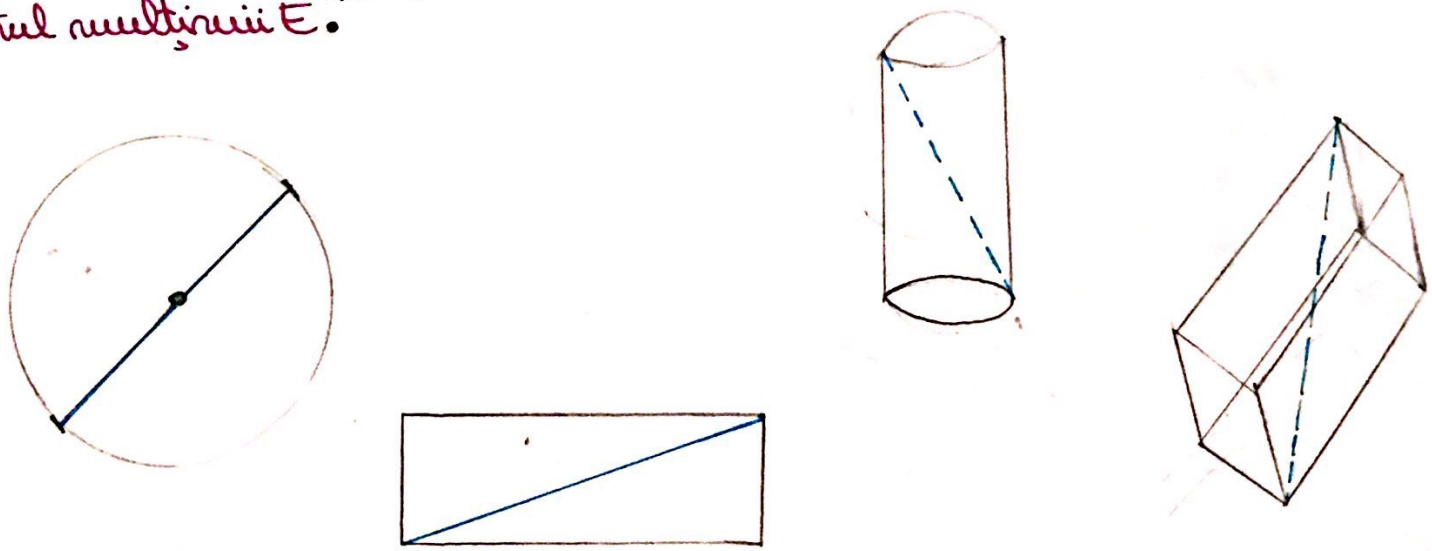
Definiția 5. Fie $E \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$. Se numește descompunere Jordan a lui E o familie finită de mulțimi neovide, măsurabile Jordan $\mathcal{L} = \{E_1, E_2, \dots, E_p\}$ cu următoarele proprietăți:

a) $E = E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_p$

b) $\mu(E_i \cap E_j) = 0 \ (\forall)\ i \neq j \in \{1, 2, \dots, p\}$

NOTAȚIE: $\mathcal{L}(E) \overset{def}{=}$ mulțimea descompunerilor Jordan ale mulțimii E.

Definiția 6. Fie $E \subseteq \mathbb{R}^n$ o mulțime mărginită. Numărul real $\operatorname{diam} E = \sup\limits_{u,v \in E} d(u,v) = \sup\limits_{u,v \in E} \|u - v\| \in \mathbb{R}$ se numește diametrul mulțimii E.



Definiția 7. Fie $E \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ și $\mathcal{L} \in \mathcal{L}(E)$, $\mathcal{L} = \{E_1, E_2, \dots, E_p\}$

a) numărul real $\max\{\operatorname{diam} E_1, \operatorname{diam} E_2, \dots, \operatorname{diam} E_p\} \overset{not}{=} \|\mathcal{L}\|$ se numește normă descompunerii $\mathcal{L}$

b) se numește sistem de puncte intermediare asociat descompunerii $\mathcal{L}$ o mulțime finită $\{t_1, t_2, \dots, t_p\} \overset{not}{=} t \cdot \mathcal{L}$, unde $t_1 \in E_1, \dots, t_p \in E_p$

Scanned with CamScanner

FUNCȚII INTEGRABILE RIEMANN ÎN $\mathbb{R}^n$

Definiția 1: Fie $E \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$, $f: E \to \mathbb{R}$ o funcție, $\Delta \in D(E)$, cu $\Delta = \{E_1, \dots, E_p\}$ și $t_\Delta = \{t_1, \dots, t_p\}$, un sistem de puncte intermediare asociat lui Δ.

Numărul real $\sigma_\Delta(f; t_\Delta) = f(t_1) \cdot \mu(E_1) + f(t_2)\mu(E_2) + \dots + f(t_p)\mu(E_p)$ se numește suma Riemann a funcției f, descompunerii Δ și sistemului de puncte intermediare t_Δ.

Definiția 2: Fie $E \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$, $f: E \to \mathbb{R}$ o funcție. Spunem că f este integrabilă Riemann pe E dacă $(\exists)\, I \in \mathbb{R}$ astfel încât $(\forall)\, \varepsilon > 0$, $(\exists)\, \delta_\varepsilon > 0$ pentru ca $|\sigma_\Delta(f; t_\Delta) - I| < \varepsilon$, $(\forall)\, \Delta \in D(E)$ cu $\|\Delta\| < \delta_\varepsilon$, $(\forall)\, t_\Delta$ sistem de puncte intermediare asociat descompunerii Δ.

NOTAȚIE: $I \overset{not}{=} \int_E f(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 dx_2 \dots dx_n = \iiint_E \dots \int f(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \dots dx_n$

Teorema 1: Fie $E \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$. Atunci $\mu(E) = \int_E 1\, dx_1 \dots dx_n$

Teorema 2: (Clase și funcții integrabile Riemann)

a) Fie $E \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ cu $\mu(E) = 0$. Orice funcție $f: E \to \mathbb{R}$ este integrabilă Riemann pe E.

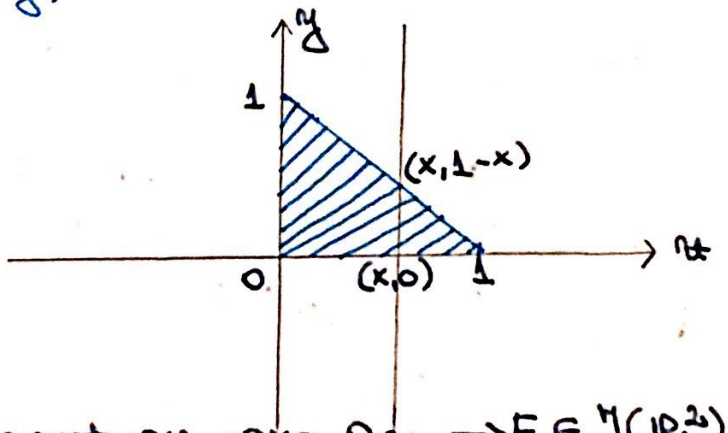
b) Fie $E \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ o mulțime închisă. Orice funcție continuă $f: E \to \mathbb{R}$ este integrabilă Riemann pe E.

Aplicație: $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$, $E \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^2)$

$E: \begin{cases} x \in [0, 1] \\ y \in [0, 1 - x] \end{cases}$

$E: \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 - x \end{cases}$

$f_1(x) \qquad f_2(x)$



Se simplifică în raport cu axa $Oy \Rightarrow E \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^2)$

Scanned with CamScanner

6 IANUARIE 2020 – SĂPTĂMÂNA 15

INTEGRALA ÎN $\mathbb{R}^n$

I PROPRIETĂȚI ALE FUNCȚIILOR INTEGRABILE RIEMANN ÎN $\mathbb{R}^n$

Teorema 1: Fie $E \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$. Atunci $\mu(E) = \int_E 1\,dx$.

Teorema 2: Fie $E \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ și $f, g : E \to \mathbb{R}$ două funcții integrabile Riemann pe E. Atunci $f+g$, $f-g$, $\lambda \cdot f$, $|f|$, $f \cdot g : E \to \mathbb{R}$ sunt funcții integrabile Riemann, și în plus sunt adevărate următoarele afirmații:

i) $\int_E (f(x) \pm g(x))\,dx = \int_E f(x)\,dx \pm \int_E g(x)\,dx$

ii) $\int_E \lambda \cdot f(x)\,dx = \lambda \int_E f(x)\,dx$

iii) $\left|\int_E f(x)\,dx\right| \leq \int_E |f(x)|\,dx$

Teorema 3: Fie $E \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$, $f : E \to \mathbb{R}$ o funcție integrabilă Riemann pe E care este funcție mărginită pe E, $m = \inf_{x \in E} f(x)$ și $M = \sup_{x \in E} f(x)$. Atunci $m \cdot \mu(E) \leq \int_E f(x)\,dx \leq M \cdot \mu(E)$

II CRITERII DE INTEGRABILITATE ÎN $\mathbb{R}^n$

Criteriul de integrabilitate al lui Lebesgue: Fie $E \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ și $f : E \to \mathbb{R}$ o funcție mărginită. Fie $E \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ și $f : E \to \mathbb{R}$. Funcția f este integrabilă Riemann dacă și numai dacă:

$D_f = \{x \in E \mid f$ nu este continuă în $x\}$ este mulțime Lebesgue.

Definiția 1: Fie $E \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$, $f : E \to \mathbb{R}$ o funcție mărginită pe E, $\mathcal{L} = \{E_1, \dots, E_k\}$ o descompunere Jordan a mulțimii E, $m_i = \inf_{x \in E_i} f(x)$ și $M_i = \sup_{x \in E_i} f(x)$.

a) Numărul real $s_{\mathcal{L}}(f) = m_1 \cdot \mu(E_1) + m_2 \cdot \mu(E_2) + \dots + m_k \cdot \mu(E_k)$ se numește suma Darboux inferioară asociată funcției f și descompunerii $\mathcal{L}$.

b) Numărul $S_{\mathcal{L}}(f) = M_1 \mu(E_1) + M_2 \mu(E_2) + \dots + M_k \mu(E_k)$ se numește suma Darboux superioară asociată funcției f și descompunerii $\mathcal{L}$.

Scanned with CamScanner

Criteriul de integrabilitate al lui Darboux: Fie $E \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ și $f: E \to \mathbb{R}$ o funcție mărginită pe E. Următoarele afirmații sunt ECHIVALENTE:

a) f este integrabilă Riemann pe E

b) $(\forall)\, \varepsilon > 0\ (\exists)\, \mathcal{L}_\varepsilon \in \mathcal{D}(E)$ a.î. $S_{\mathcal{L}_\varepsilon}(f) - s_{\mathcal{L}_\varepsilon}(f) < \varepsilon$

c) $(\forall)\, \varepsilon > 0\ (\exists)\, \delta_\varepsilon > 0$ a.î. $S_{\mathcal{L}}(f) - s_{\mathcal{L}}(f) < \varepsilon\ (\forall)\, \mathcal{L} \in \mathcal{D}(E)$ a.î. $\|\mathcal{L}\| < \delta_\varepsilon$

Teorema 4: Fie $E \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ și $f: E \to \mathbb{R}$ o funcție integrabilă Riemann pe E care este funcție mărginită pe E. Atunci:

a) $\int_E f(x)\,dx = \sup\limits_{\mathcal{L} \in \mathcal{D}(E)} s_{\mathcal{L}}(f) = \inf\limits_{\mathcal{L} \in \mathcal{D}(E)} S_{\mathcal{L}}(f)$

b) $(\forall)\, (\mathcal{L}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un șir de descompuneri ale mulțimii E cu $\|\mathcal{L}_n\| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$ avem că:

$$\int_E f(x)\,dx = \lim_{n \to \infty} s_{\mathcal{L}_n}(f) = \lim_{n \to \infty} S_{\mathcal{L}_n}(f)$$

III METODE DE CALCUL ALE INTEGRALEI MULTIPLE

NOTAȚIE: $(x_1, x_2, \dots, \hat{x}_k, \dots, x_n) \overset{not}{=} (x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n)$ ← al care pe ălă cu ^

Teorema lui FUBINI pe intervale închise n-dimensionale: Fie $I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$ un interval închis n-dimensional, $f: I \to \mathbb{R}$ o funcție integrabilă Riemann pe I astfel că funcția $x_k \longrightarrow f(x_1, \dots, x_k, \dots, x_n)$ să fie integrabilă Riemann pe $[a_k, b_k]$. Atunci funcția $(x_1, x_2, \dots, \hat{x}_k, \dots, \dots, x_n) \longrightarrow f(x_1, \dots, x_k, \dots, x_n)$ este integrabilă Riemann pe $[a_1, b_1] \times \dots \times [a_{k-1}, b_{k-1}] \times [a_{k+1}, b_{k+1}] \times \dots \times [a_n, b_n]$ și $\int_I f(x_1, \dots, x_n)\,dx_1 dx_2 \dots dx_n = \int$

De completat

COROLAR: Fie $I = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$ un interval n-dimensional. Orice funcție continuă $f: I \to \mathbb{R}$ este integrabilă Riemann pe I și $\int_I f(x_1, \dots, x_n)\,dx_1 dx_2 \dots dx_n = \int_{a_n}^{b_n} \dots \left(\int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_1}^{b_1} f(x_1, \dots, x_n)\,dx_1 \right) dx_2 \right) \dots \Big) dx_n$

Scanned with CamScanner

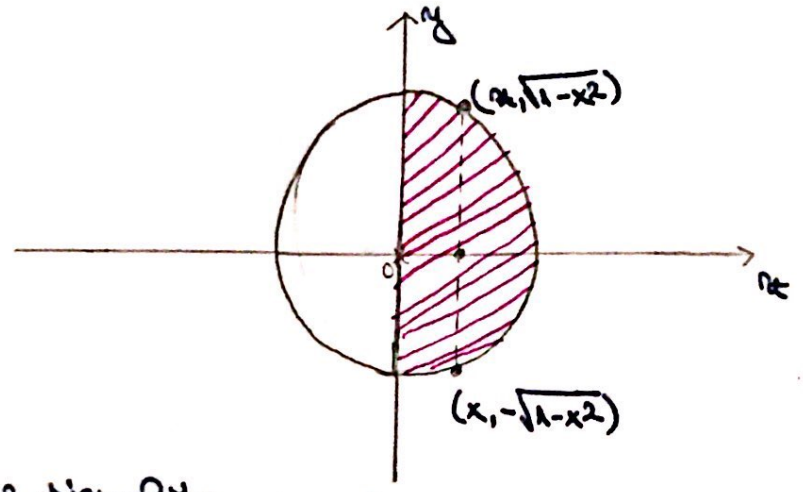
APLICAȚIE: Fie $f:\underbrace{[0,a]\times[0,b]\times[0,c]}_{I}\to\mathbb{R}$ o funcție continuă cu $a,b,c\geq 0$.

Atunci $\iiint_I f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=\int_0^b\left(\int_0^a\left(\int_0^c f(x,y,z)\,dz\right)dx\right)dy$

Teorema lui Fubini pe mulțimi simple în raport cu axa Ox_j: Fie $K\in\mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ o mulțime compactă $\varphi_1,\varphi_2:K\to\mathbb{R}$ două funcții continue și mulțimea $E=\{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n \mid \varphi_1(x_1,\dots,\hat{x}_j,\dots,x_n)\leq x_j\leq\varphi_2(x_1,\dots,\hat{x}_j,\dots,x_n)$ cu $(x_1,\dots,\hat{x}_j,\dots,x_n)\in K$ simplă în raport cu axa Ox_j. Orice funcție continuă $f:E\to\mathbb{R}$ este integrabilă Riemann pe E și $\int_E f(x_1,\dots,x_n)\,dx_1\dots dx_n$

$$\int_E f(x_1,\dots,x_n)\,dx_1\dots dx_n=\int_K\left(\int_{\varphi_1(x_1,\dots,\hat{x}_j,\dots,x_n)}^{\varphi_2(x_1,\dots,\hat{x}_j,\dots,x_n)} f(x_1,\dots,x_n)\,dx_j\right)d\hat{x}_j\dots dx_n$$

APLICAȚIE: Fie $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\leq 1,\ x\geq 0\}$ și $f:E\to\mathbb{R}$ o funcție continuă.



$$E:\begin{cases}0\leq x\leq 1\\ \underbrace{-\sqrt{1-x^2}}_{\varphi_1(x)}\leq y\leq\underbrace{\sqrt{1-x^2}}_{\varphi_2(x)}\end{cases}$$

E mulțime simplă în raport cu axa Oy

$$\iint_E f(x,y)\,dx\,dy=\int_0^1\left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy\right)dx$$

APLICAȚIE 2): $E=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid \varphi_1(x,z)\leq y\leq\varphi_2(x,z),\ (x,z)\in K\}$ și $f:E\to\mathbb{R}$ funcție continuă

$$\iiint_E f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=\int\left(\int_{\varphi_1(x,z)}^{\varphi_2(x,z)}\varphi(x,y,z)\,dy\right)dx\,dz$$

(Definiția 2: Fie $\varphi=(\varphi_1,\dots,\varphi_n):D\to\mathring{D}\subseteq\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^m$ o funcție de clasă C_1)

Scanned with CamScanner

Definiția 2: Fie $\varphi=(\varphi_1,\dots,\varphi_n): D=\mathring{D}\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ o funcție de clasă C^1 pe mulțimea D.

a) Matricea $J_\varphi(x_1,\dots,x_n)=\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}(x_1,\dots,x_n)\right)_{i,j\in\{1,\dots,n\}}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ se numește matricea Jacobi a funcției φ în punctul $(x_1,\dots,x_n)\in D$.

b) Numărul real $\det J_\varphi(x_1,\dots,x_n)$ se numește Jacobianul funcției φ în punctul $(x_1,\dots,x_n)\in D$.

NOTAȚIE: $\frac{\partial(\varphi_1,\dots,\varphi_n)}{\partial(x_1,\dots,x_n)}\overset{def}{=\!=}J_\varphi(x_1,\dots,x_n)$

Teorema de schimbare de variabilă pentru integrala multiplă: Fie $\varphi: D=\mathring{D}\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ o funcție de clasă C^1, $E\in\mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ astfel că $\bar{E}\subseteq D$, $\varphi(E)\in\mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ și $\det J_\varphi(x)\neq 0$ $(*)$ $x\in\mathring{E}$. Orice funcție $f:\varphi(E)\to\mathbb{R}$ integrabilă Riemann pe $\varphi(E)$, funcția $f\circ\varphi\,|\det J_\varphi|:E\to\mathbb{R}$ este integrabilă Riemann pe E și $\int_{\varphi(E)}f=\int_E f\circ\varphi\,|\det J_\varphi|$

8 IANUARIE 2020
- SĂPTĂMÂNA 8 -

SCHIMBĂRI DE VARIABILĂ ÎN INTEGRALA MULTIPLĂ

1. Trecerea de la coordonate polare în $\mathbb{R}^2$

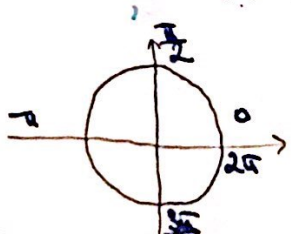
$\varphi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$

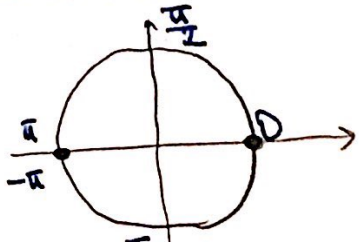
$\varphi(R,\alpha)=(\overset{x}{R\cos\alpha},\overset{y}{R\sin\alpha})$

$$\det J_\varphi(R,\alpha)=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial R} & \frac{\partial x}{\partial\alpha}\\ \frac{\partial y}{\partial R} & \frac{\partial y}{\partial\alpha}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos\alpha & -R\sin\alpha\\ \sin\alpha & R\cos\alpha\end{vmatrix}$$

$$=R\cos^2\alpha+R\sin^2\alpha=R$$

Condiții: $R\geq 0$, $\alpha\in[0,2\pi]$ sau $\alpha\in[-\pi,\pi]$





Scanned with CamScanner

[2] TRECEREA LA COORDONATE POLARE ÎN $\mathbb{R}^2$

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

$$\varphi(R, \alpha) = (aR\cos\alpha,\ bR\sin\alpha) : a, b \in \mathbb{R}$$

$$\det J_\varphi(R, \alpha) = \begin{vmatrix} a\cos\alpha & -aR\sin\alpha \\ b\sin\alpha & bR\cos\alpha \end{vmatrix} = abR\cos^2\alpha + abR\sin^2\alpha = abR(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) = abR$$

Condiții: $R \geq 0$, $\alpha \in [0, 2\pi]$ sau $\alpha \in [-\pi, \pi]$

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = R^2$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = R^2$$

[3] TEOREMA LA COORDONATE SFERICE ÎN $\mathbb{R}^3$

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

$$\varphi(R, \alpha, \beta) = (\overbrace{R\sin\alpha\cos\beta}^{x},\ \overbrace{R\sin\alpha\sin\beta}^{y},\ \overbrace{R\cos\alpha}^{z})$$

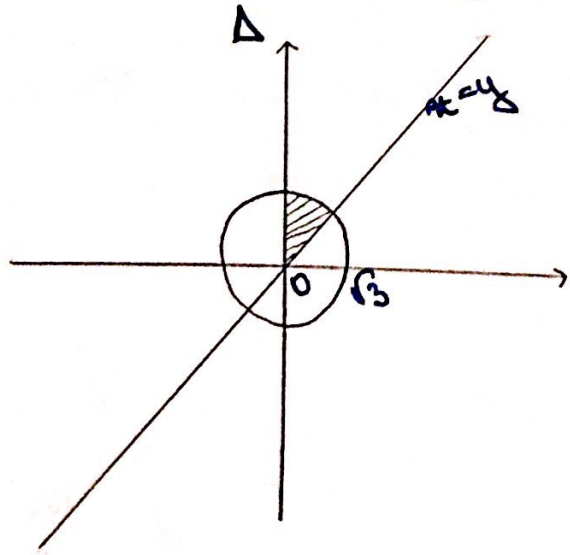
$$\det J_\varphi(R, \alpha, \beta) = -R^2\sin\alpha$$

Condiții: $R \geq 0$, $\alpha \in [0, 2\pi]$, $\beta \in [0, 2\pi]$ sau $\in [-\pi, \pi]$

APLICAȚII:

$$\iint xy\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy,\quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 3,\ 0 \leq x \leq y\}$$

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\quad \varphi(R, \alpha) = (\overbrace{R\cos\alpha}^{x}, R\sin\alpha)$$



$$D : \begin{cases} x^2 + y^2 = 3 \\ 0 \leq x \leq y \end{cases}$$

$$D' : \begin{cases} R^2\cos^2\alpha + R^2\sin^2\alpha \leq 3 \\ 0 \leq R\cos\alpha \leq R\sin\alpha \\ \cancel{0 \leq x \leq y} \\ R \geq 0 \\ \alpha \in [0, 2\pi] \end{cases}$$

Scanned with CamScanner

$$\begin{cases} R^2 \leq 3 \\ 0 \leq r\cos\alpha \leq r\sin\alpha \\ R \geq 0 \\ \alpha \in [0, 2\pi] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq R \leq \sqrt{3} \\ \alpha \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ r\cos\alpha \leq r\sin\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq R \leq \sqrt{3} \\ \frac{\pi}{4} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\Delta' : \begin{cases} 0 \leq R \leq \sqrt{3} \\ \frac{\pi}{4} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\Delta' = \{0, \sqrt{3}\} \times \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\iint_{\Delta} xy\sqrt{x^2+y^2}\, dx\, dy = \iint_{\Delta'} R\sin\alpha \sqrt{R^2\cos^2\alpha + R^2\sin^2\alpha}\, |\det J_p(R,\alpha)|\, dR\, d\alpha$$

$$= \iint_{\Delta'} R\sin\alpha \cdot |R| \cdot |R|\, dR\, d\alpha = \iint_{\Delta'} R^3 \sin\alpha\, dR\, d\alpha = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\sqrt{3}} R^3 \sin\alpha\, dR\right) d\alpha$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\sqrt{3}} R^3 \sin\alpha\, dR\right) d\alpha = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{R^4}{4}\sin\alpha \Big|_0^{\sqrt{3}}\right) d\alpha$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{9}{4}\sin\alpha\, d\alpha = \frac{9}{4}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\alpha\, d\alpha = -\frac{9}{4}\cos\alpha \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{9}{4}\cdot\cos\frac{\pi}{2} + \frac{9}{4}\cos\frac{\pi}{4}$$

$$= 0 + \frac{9}{4}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{9\sqrt{2}}{8}$$

Scanned with CamScanner

INTEGRALE CURBILINII

1. Drumuri în $\mathbb{R}^n$

Definiția 1: Se numește drum în $\mathbb{R}^n$ orice funcție continuă $d:[a,b]\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$

Notație: $d:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ drum

$d(t)=(d_1(t),\dots,d_n(t))$

$d_1,d_2,\dots,d_n:[a,b]\to\mathbb{R}$

$d\overset{not}{=}(d_1,\dots,d_n)$

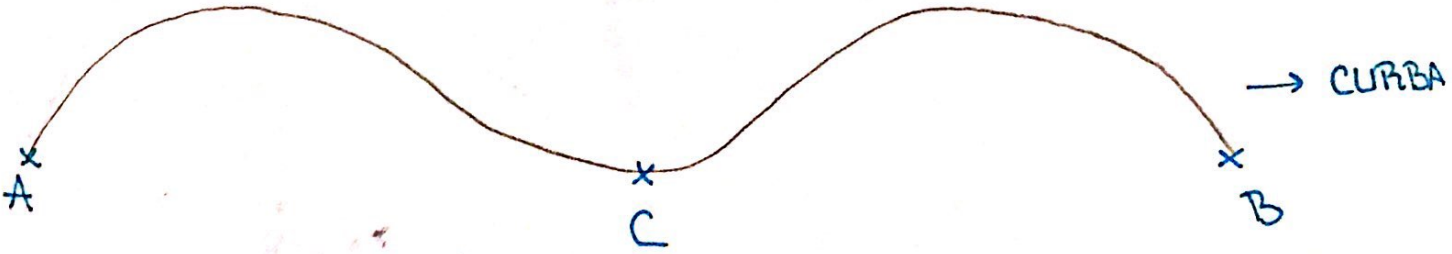
Definiția 2: Fie $d=(d_1,\dots,d_n):[a,b]\to\mathbb{R}^n$ un drum

a) d se numește drum închis dacă $d(a)=d(b)$

b) d se numește drum simplu dacă $d|_{(a,b)}$ este injectivă

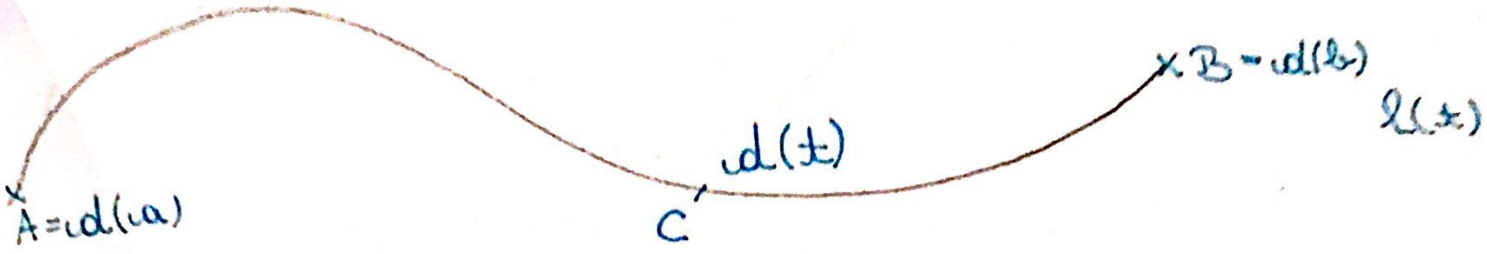
c) d se numește drum de clasă C^1 dacă $d_1,\dots,d_n$ sunt funcții derivabile și derivatele lor sunt funcții continue

d) O mulțime $C\subseteq\mathbb{R}^n$ se numește curbă de clasă C^1 dacă (∃) un drum de clasă C^1, $d:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ a.î. $C=\mathcal{I}_{md}$ (imaginea drumului)



Observație: Oricărui drum $d:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ de clasă C^1 i se asociază funcția lungime $l:[a,b]\to\mathbb{R}$

Scanned with CamScanner



Teorema 1: Fie $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ un drum de clasă C. Atunci funcția lungime $l : [a,b] \to \mathbb{R}$ asociată drumului α este de clasă C^1 pe $[a,b]$ și pt $\forall\, t \in [a,b]$:

$$l'(t) = \|\alpha'(t)\| = \|(\alpha_1'(t), \alpha_2'(t), \dots, \alpha_n'(t))\| = \sqrt{(\alpha_1'(t))^2 + \dots + (\alpha_n'(t))^2}$$

2 Integrala curbilinie de primul tip:

Se consideră:

1) $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ - drum de clasă C^1
2) $F : D \supseteq \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ - funcție continuă
3) $\operatorname{Im} \alpha = C \subseteq D$

$$\begin{tikzcd}
{[a,b]} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, "F \circ \alpha"'] & C \subseteq D \arrow[d, "F"] \\
& \mathbb{R}
\end{tikzcd}$$

Observație: funcția $(F \circ \alpha) \cdot l' : [a,b] \to \mathbb{R}$ - funcție continuă pe $[a,b]$

Definiția 3: Integrala Riemann $\int_a^b (F \circ \alpha)(t) \cdot l'(t)\, dt$ se numește integrala curbilinie de primul tip a funcției f pe drumul α (pe curba C)

Notație: $\int_\alpha F\, dl = \int_\alpha F\, dl \overset{def}{=} \int_a^b (F \circ \alpha)(t) \cdot l'(t)\, dt$

Scanned with CamScanner

3 Integrala curbilinie de al doilea tip

Definiția 4: Se numește formă diferențiabilă de gradul I pe $\mathbb{R}^n$ orice funcție continuă $\omega: D=\mathring{D}\subseteq\mathbb{R}^n \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$

funcțiile liniare $:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$

Notație: $\omega(x_1,\dots,x_n)=P_1(x_1,\dots,x_n)dx_1+P_2(x_1,\dots,x_n)dx_2+\dots+P_n(x_1,\dots,x_n)dx_n$

proiecție

$P_1,P_2,\dots,P_n: D=\mathring{D}\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ funcții continue

$\omega \overset{not}{=} P_1dx_1+P_2dx_2+\dots+P_ndx_n$

Se consideră:

1) $d:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ drum de clasă C^1; $d=(d_1,\dots,d_n)$

2) $\omega=P_1dx_1+P_2dx_2+\dots+P_ndx_n$ forma diferențială de gradul I

$P_1,P_2,\dots,P_n: D=\mathring{D}\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$

3) $c=\operatorname{Im} d\subseteq D$

Definiția 5: Integrala Riemann $\int_a^b[(P_1\circ d)(t)\,d_1'(t)+\dots+(P_n\circ d)(t)\,d_n'(t)]dt$ se numește integrala curbilinie de al doilea tip a formei diferențiale ω pe drumul d (pe curba C)

Notație: $\int_d \omega=\int_c \omega \overset{def}{=} \int_a^b[(P_1\circ d)\cdot d_1'(t)+\dots+(P_n\circ d)\cdot d_n'(t)]dt$

Scanned with CamScanner