Curs 4

26.10.2021

Aplicație la Thm Cantor-Bernstein

① Arătați că $\mathbb{N}$ și $\underbrace{\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\ldots\times\mathbb{N}}_{2021}$ sunt echipotente.

Aplic Cantor-Bernstein: $f: \mathbb{N} \to \underbrace{\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\ldots\times\mathbb{N}}_{2021}$

$f(n) = (n, n, \ldots, n, n)$ f inj

$g: \underbrace{\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\ldots\times\mathbb{N}}_{2021} \to \mathbb{N}$

g inj

unicitatea descomp. în factori primi

$g(n_1, n_2, \ldots, n_{2021}) = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \ldots p_{2021}^{n_{2021}}$

$p_1, p_2, \ldots, p_{2021}$ prime $\neq$ 2 câte 2

Th. Euclid: Avem o infinitate de nr. prime în $\mathbb{N}$

$\mathbb{N}$ și $\underbrace{\mathbb{N}\times\ldots\times\mathbb{N}}_{2021}$ sunt echipotente

Am văzut în C3:

$$|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}| < |\mathbb{R}| = |\mathbb{C}|$$

dem C3   dem C3   Temă!

$(a+bi)+(c+di) = (a+c)+(b+d)i$

$(a+bi)\cdot(c+di) = (ac-bd)+i(ad+bc)$

$\mathbb{C} \simeq (\mathbb{R}\times\mathbb{R}, +, *)$

$(a,b)+(c,d) = (a+c, b+d)$ $\rightsquigarrow a+bi$

$(a,b)*(c,d) = (ac-bd, ad+bc)$

Pt a arăta că $|\mathbb{R}| = |\mathbb{C}|$ e suficient să arăt că $|\mathbb{R}| = |\mathbb{R}\times\mathbb{R}|$

(Dem: aplic Cantor-Bernstein

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ $f(x) = (x,x)$ f inj

$g: \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Exc!)

$|\mathbb{Q}| \leq |\mathbb{R}|$ ($i: \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ $i(x) = x$ i inj)

Pt a arăta că $|\mathbb{Q}| < |\mathbb{R}|$ e suficient să demonstrăm (conform definiției) că $\mathbb{Q}$ și $\mathbb{R}$ nu sunt echipotente, i.e. $\mathbb{R}$ nu e numărabilă.

$\mathbb{R}$ nu e numărabilă

<u>Dem</u> (Cantor) Pp. red. abs că $\mathbb{R}$ e numărabilă $\leadsto$ $(0,1)$ este numărabil (Vezi mai jos o bij între $\mathbb{R}$ și $(0,1)$)

$\Downarrow$

Pot scrie toate nr. din $(0,1)$ într-un șir $\{a_0, a_1, a_2, \dots\}$

$$a_0 = 0, a_{00}\, a_{01}\, a_{02}\, a_{03} \dots$$
$$a_1 = 0, a_{10}\, a_{11}\, a_{12}\, a_{13} \dots$$
$$a_2 = 0, a_{20}\, a_{21}\, a_{22}\, a_{23} \dots$$
$$\vdots$$
$$a_n = 0, a_{n0}\, a_{n1}\, a_{n2}\, a_{n3} \dots$$
$$\vdots$$

Pt fiecare n, aleg b_{nn} cifră diferită de $0, 9, a_{nn}$

Vreau să-mi construiesc un număr b din $(0,1)$ care nu apare în șirul

$$b = 0, b_{00}\, b_{11}\, b_{22}\, b_{33} \dots \in (0,1)$$

În aceste condiții b e diferit de orice $a_n \Rightarrow b \notin \{a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$ $\times$

(Dc $b = a_n \Rightarrow \dots$) Prin urmare, presupunerea e falsă și $\mathbb{R}$ e nenumărabilă.

<u>Detalii</u> Dc $b = a_n \Rightarrow$

$$b = 0, b_{00}\, b_{11}\, b_{22} \dots \overset{0,9}{\underset{\ne}{b_{nn}}} \dots$$
$$\parallel$$
$$a_n = 0, a_{n0}\, a_{n1}\, a_{n2} \dots a_{nn} \dots$$

$$0,111999\dots$$
$$\parallel$$
$$0,112000\dots$$

Cum $b = a_n$ și $b_{nn} \ne a_{nn} \Rightarrow$ Zecimalele de după b_{nn} trebuie să fie ori toate 0 ori toate 9 $\times$ (alegerea lui b_{ii}).

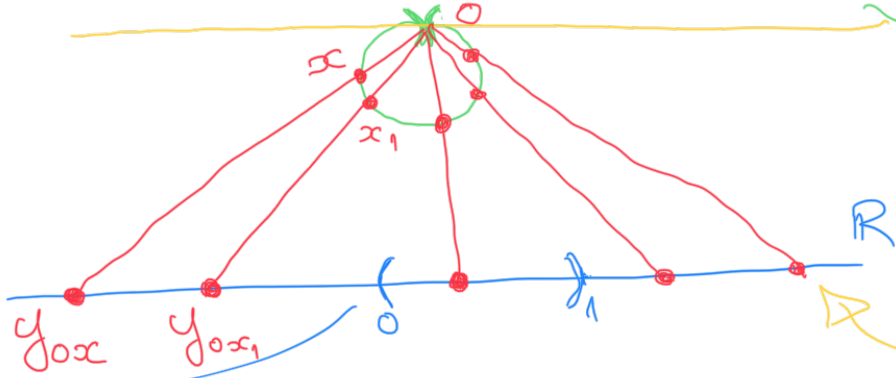
---

① $|\mathbb{R}| = |(0,1)|$ ($\Leftrightarrow$ $\mathbb{R}$ și $(0,1)$ sunt echipotente)

$(0,1)$

transform acest segment într-un cerc fără un punct a.î.

proiecția stereografică



tangenta în cerc la pct. "lipsă" este paralelă cu R

(∀) dr. care trece prin O și ≠ tangenta în O la cerc taie cercul și dreaptă în exact un punct

Definesc $f:(0,1)\to\mathbb{R}$ astfel:

$f(x)=y_{0x}$ (∀) x

def. geometrică (vezi figura de mai sus)

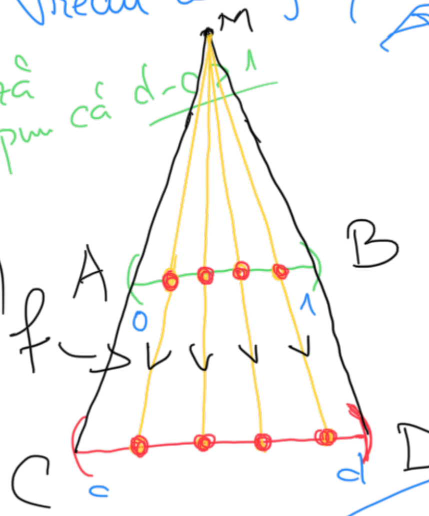
f e bijectivă

$\Leftarrow$ $\mathbb{R}$ și $(0,1)$ sunt echipotente

---

② Vreau o bijecție între $(0,1)$ și (c,d) (merge ce am scris mai sus)

pt poză presupun că $d-c>1$

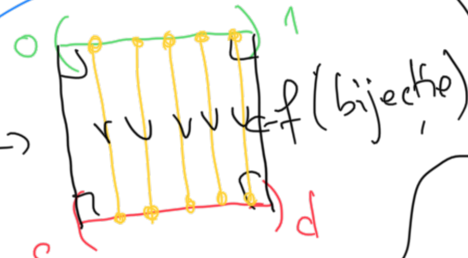


AB∥CD

Dacă $d-c=1$

GEOMETRIC

dreptunghi →



ALGEBRIC (RIGUROS)

Caut $h:(0,1)\to(c,d)$ de grad 1

$h(x)=mx+p$ a.î.

h e bijecție și $h(0)=c$
$h(1)=d$

$\left(\begin{array}{l} c=h(0)=p \Rightarrow p=c \\ d=h(1)=m+p \Rightarrow m=d-c \end{array}\right)$

Definesc $h:(0,1)\to(c,d)$

$h(x)=(d-c)x+c$

h e bijecție! (Exc)

Def 1 Fie $A\neq\emptyset$. O relație binară "$\sim$" pe mulțimea A reprezintă o submulțime a lui $A\times A$. Dacă $(a,b)\in\sim$ vom scrie $a\sim b$.

Exemplu 1 Dacă $A=\{1,2,3,4\}$ atunci $\sim = \{(1,2),(2,3),(3,4),(3,3)\}$ este o relație binară pe A. Putem scrie acest lucru și: $1\sim 2$, $2\sim 3$, $3\sim 4$, $3\sim 3$.

Def 2 O relație binară "$\sim$" pe mulțimea $A\ (\neq \emptyset)$ s.n. relație de echivalență dacă îndeplinește simultan condițiile:

1) reflexivă: $a\sim a\ (\forall) a\in A$

2) simetrică: $a\sim b \Rightarrow b\sim a$

3) tranzitivă: $a\sim b$ și $b\sim c \Rightarrow a\sim c$

Exemplu 1 (continuare) Rel binară "$\sim$" de la exemplul 1 nu e nici reflexivă ($1\not\sim 1 \xrightarrow{\text{not}} 1$ nu e în relație cu 1), nici tranzitivă ($1\sim 2$, $2\sim 3$ dar $1\not\sim 3$), nici simetrică ($1\sim 2$ dar $2\not\sim 1$)

Obs Dacă $|A|=n \leadsto$ avem 2^{n^2} rel binare pe mulțimea A.

Câte sunt relații de echivalență? (vezi seminar)

Exemple (Rel de echiv.)

1) Geometrie
- Relația de paralelism pe mulțimea dreptelor din plan.
- Relația de asemănare/congruență pe mulțimea Δ din plan.

2) Algebră
- Rel de egalitate pe o mulțime nevidă. ($\underset{=}{\downarrow} = \{(a,a) \mid a\in A\}$)
- Rel de echiv. asociată unei funcții $f: A\to B$ "$\sim_f$" pe mulțimea A:

$$x\sim_f y \Longleftrightarrow f(x)=f(y).$$