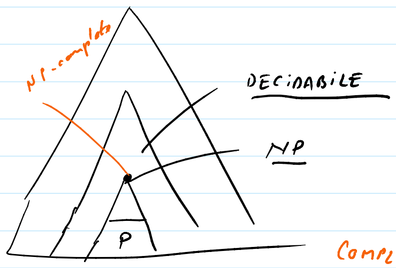
CURS #10

Tuesday, December 20, 2022 2:03 PM

PROBLEME DIN AFARA CLASEI NP



COMPLEXITY ZOO

Pb de decizie $A \subset \Sigma^*$

$$A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

Exp NP-complete

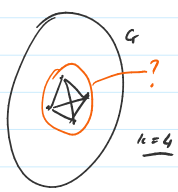
CLIQUE **INPUT** $G = (V, E)$ graf

$1 \le k \ (\le n)$

DE DECIS $\exists\, S \subseteq V$

$|S| = k$ a.î.

$\forall\, v, w \in S \ (v, w) \in E$



CLIQUE $O(n^k)$

Algoritm BRUTE-FORCE

Încercăm toate

S cu $|S| = k$

(T) CLIQUE NP-completă

Pb înrudită Găsim o clică maximă

Clique

DA witness (G, k) → $|S| = k$

Putem găsi un witness pt ↓ ?

NO

MAX-CLIQUE

w ↓ S $O(n^2)$ | w ↓ S

$\forall T$ $|T| = |S| + 1$ T nu este o clică

$\exists\, w \ P(G, k, w)$

$\exists\, w \ \forall T \ P(G, k, w, T)$

CLIQUE diferită de MAX-CLIQUE pt că

d.p.d.v logic prima problemă $\exists$

- a doua problemă $\exists \forall$

O paralelă între $\frac{\text{r.e.}}{\text{recursive}}$ și $\frac{NP}{P}$

recursivă $A(x)=\begin{cases}1\\0\end{cases}$ M.T. care se oprea.

P $A(x)=\begin{cases}1\\0\end{cases}$ M.T care se oprește în $\le \underbrace{p(|x|)}_{\text{polinom}}$ pași

recursiv enumerabil $A(x)=\begin{cases}1 & x\in A \to \text{M.T se oprește}\\ ? & x\notin A \to \text{nu ne interesează}\end{cases}$

NP $A(x)=\begin{cases}1 & x\in A \to \text{M.T se oprește în timp } \le p(|x|)\\ ? & x\notin A\end{cases}$

$\to M(x,w)$

$|w|\le p(|x|)$ pt că
$M(x,w)$ trebuie să se oprească
în timp $\le p(|x|)$

NP $=\{A \mid \exists$ predicat $P(\cdot,\cdot)$ calculabil în timp polinomial, $\exists$ polinom $q\}$

$$\boxed{x\in A \iff \exists w \ |w|\le q(|x|) \ P(x,w)=TRUE}$$

$P(x,w) \to P$

r.e. $\exists$ predicat recursiv $P(\cdot,\cdot)$ a.î.

$$\boxed{x\in A \iff \exists w \ P(x,w)=TRUE}$$

$P \to$ recursiv

Putem încerca să dem P ≠ NP prin analogie cu rec ≠ r.e.

P ≠ NP → M.T. universală pt P
nu o putem calcula în P

rec ≠ r.e. → mașina Turing universală

$$\boxed{A \text{ r.e.} \not\Rightarrow \bar{A} \text{ r.e.}}$$

$\boxed{A \text{ r.e.} \not\Rightarrow \bar{A} \text{ r.e.}}$

$A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 \end{cases}$ $\quad \bar{A}(x) = \begin{cases} 1 & x \notin A \\ 0 \end{cases}$

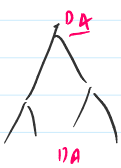
$A \in NP \overset{?}{\Rightarrow} \bar{A} \in NP$?

<u>Nu știm</u> $\quad A \in P \Rightarrow \bar{A} \in P$

Dacă știm că $A \in NP \not\Rightarrow \bar{A} \in NP$

$$\Downarrow$$

$$P \neq NP$$



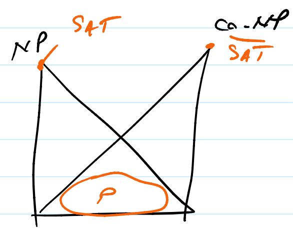
$NP = \left(\exists^{\leq p(|x|)}\right) P$

$co\text{-}NP = \{ A \mid \bar{A} \in NP \}$

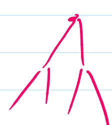
$co\text{-}NP = \left(\forall^{\leq p(|x|)}\right) P$

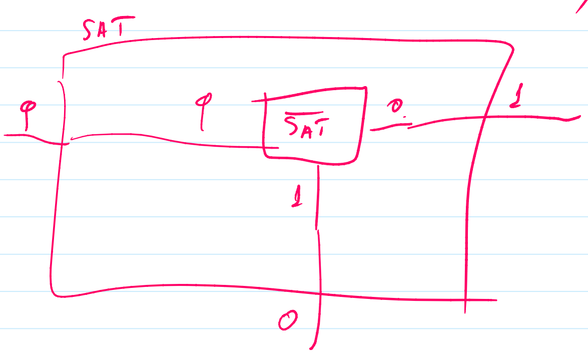
<u>Obs</u> $\quad P = NP \Rightarrow P = NP = co\text{-}NP$

Se crede că $NP \neq co\text{-}NP$



$TAUT = \{ \varphi \mid \varphi \text{ Tautologie} \}$

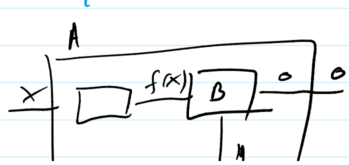




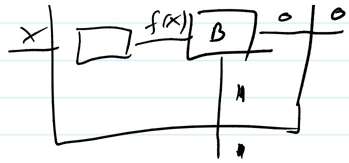
Pot folosi un alg pt $\overline{SAT}$ pt a rezolva SAT

$$\Downarrow$$

<u>nu</u> este $\leq_m^p$



nu este ($\le_m^p$)



Def $A \le_T^p B$ (A se reduce Turing la B)

există o mașină Turing care rulează în timp polinomial și folosește o subrutină pt B care decide A

Exp $\overline{SAT} \le_T^p SAT$

MAXCLIQUE $\le_T^p$ SAT

input G

for $k = 1$ to n

if $(G,k) \in$ CLIQUE $\leftarrow \varphi(G,k) \in SAT$

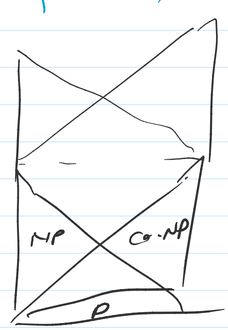
$(G,k+1) \notin$ CLIQUE $\leftarrow \varphi(G,k+1) \in \overline{SAT}$

return k

P^{SAT}

$\boxed{CLIQUE \le_m^p SAT}$

φ



Def $\Sigma_2^p = \{ A \mid \exists P(\cdot,\cdot)$ predicat calc. polinomial, polinom g a.î.

$x \in A \iff (\exists^{\le g(|x|)} y_1)(\forall^{\le g(|x|)} y_2)\, P(x, y_1, y_2)$

$(\exists y_1, |y_1| \le g(|x|))$

$\Pi_2^p = \{ A \mid$

$x \in A \iff (\forall y_1)(\exists y_2)\, P(x, y_1, y_2)$

$\Pi_2 - A$

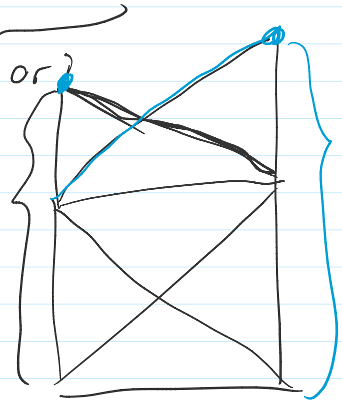
$x \in A \Leftrightarrow (\forall y_1)(\exists y_2)\, P(x, y_1, y_2)$

Obs $\Sigma_1^P = NP$ $\qquad \Pi_1^P = co\text{-}NP$

$\exists$

$\Sigma_k^P \; \underbrace{(\exists \forall \exists \forall \ldots)}_{k \text{ ori}} \qquad \Pi_k^P \; \underbrace{(\forall \exists \forall \exists \ldots)}_{k \text{ ori}}$

Σ_2^P



Π_2^P

$$P \subseteq \underbrace{NP \cap co\text{-}NP}_{\Sigma_1^P \cap \Pi_1^P} \subseteq \Sigma_2^P \cap \Pi_2^P \subseteq \ldots$$

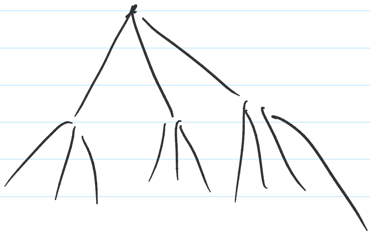
$$\boxed{PH = \bigcup_{k \geq 1} \Sigma_k^P = \bigcup_{k \geq 1} \Pi_k^P}$$

ierarhie polinomială

(T) $A \in \Sigma_2^P \Leftrightarrow$ există o M.T nedeterministă polinomială care fol. o subrutină pt SAT

$A = L(M, SAT)$

NP^{SAT}



<u>Exp</u> MAXCLIQUE $\in \Sigma_2^P \cap \Pi_2^P$

<u>Probleme complete pt Σ_k^P</u>

Joc G cu 2 jucători

Poziție w

<u>De decis</u> Am eu o strategie de câștig în $\leq k$ mutări ?

$w \to DA \quad (\exists m_1)(\forall m_2)(\exists m_3) \ldots P(w, m_1, \ldots m_k)$

eu tu eu

QBF quantified boolean formula. (toate var cuantificate)

<u>Se dă</u> formulă logică cuantificată

$(\exists x \, \forall y \, P(x, y))$

<u>De decis</u> <u>Adev</u> sau <u>FALSĂ</u> ?

$\forall k \quad \forall A \in \Sigma_k^P \qquad A \leq_m^P QBF$

$\forall k \quad \forall A \in \Pi_k^P \qquad A \leq_m^P QBF$

<u>Solvere</u>