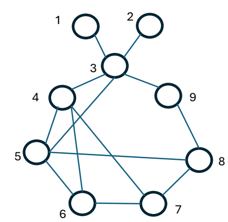
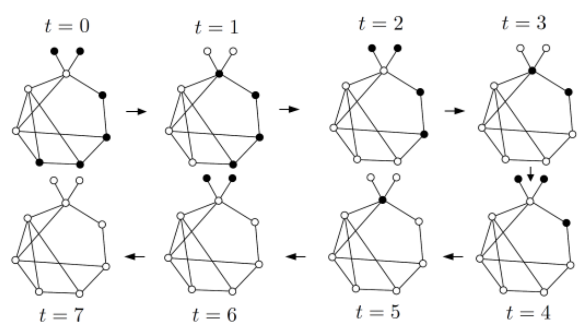
Model examen
Sisteme Distribuite
2024-2025

Notă: Oriunde se face referire la un sistem distribuit se va înțelege o colecție de agenți cu memorie locală (capacitate de stocare) care au capacitatea să comunice prin mesaje (folosind primitive send-recv). Pentru topologii netriviale, un nod poate face schimburi de mesaje doar cu nodurile vecine conform grafului topologiei. Dacă nu se specifică altfel, graful de conexiuni se consideră conex.

1. Considerați topologia din figură, a unui sistem distribuit cu stări binare (i.e. $x_i(t) \in \{0,1\}$). Pentru inițializarea $x(0) = [1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1]$. Determinați dacă actualizarea stărilor după recurența $x_i(t+1) = Maj(x_{\mathcal{N}_i}(t))$ atinge asimptotic consensul majoritar. Dați un scurt argument pentru comportamentul dedus.



Schiță de rezolvare: Calculând un număr de iterații evoluția lui $x(t)$, după recurența din enunț, observăm că la începând cu iterația 7 se atinge consensul pe valoarea minoritară. Prezentăm grafic (opțional) această evoluție.



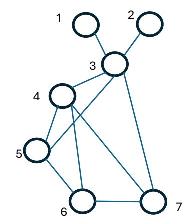
Teorema de imposibilitate [Land & Belew], din curs, justifică comportamentul observat.

Exercițiu. Rămâne întrebarea, atingem consens minoritar indiferent de inițializare?

2. Fie un sistem sincron cu n noduri anonime. Care dintre următoarele funcții sunt calculabile în acest context? Notăm $x_{[1]} \geq x_{[2]} \geq \cdots \geq x_{[1]}$.
   a. $f: R^n \to R, f(x) = x_{[1]} + x_{[n]}$
   b. $f: R^n \to R, f(x) = x_{[n]} \cdot x_{[n-1]}$
   c. $f: R^n \to R,\ f(x) = ||x||_\infty$

Idee de rezolvare: Utilizăm Teorema de imposibilitate pentru retele anonime din curs. Verificăm dacă funcțiile de la punctele a, b și c sunt *independente de ordine și multiplicitate*.

3. Graful $G = (V, E)$ din figură ilustrează topologia unui sistem distribuit cu vectorul de stare $x(t)$. Considerând algoritmul Flooding de medie cu ponderi uniforme (i.e. $x_i(t)$ se actualizează folosind ponderi $\frac{1}{d_i+1}$), răspundeți la următoarele întrebări:



a) Care este valoarea de consens asymptotic pentru inițializarea $x(0) = [1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0]^T$?

b) La momentul de timp $t = 2$, nodul 4 suferă un defect de tip *Crash*. Cum se schimbă valoarea de consens asimptotic în acest caz?

Schiță de rezolvare: a) Matricea de adiacență (binară) asociată grafului din figura este:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Adaptăm această matrice la ponderile uniforme asociate fiecărui nod $\frac{1}{d_i+1}$, unde d_i este gradului nodului i:

$$A = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 0 & 1/6 \\ 0 & 0 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 \\ 0 & 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1/4 & 1/4 & 0 & 1/4 & 1/4 \end{bmatrix}.$$

Vectorul propriu la stânga asociat valorii proprii maximale 1 este:

$$w = \begin{bmatrix} 0{,}1849 \\ 0{,}1849 \\ 0{,}5547 \\ 0{,}4622 \\ 0{,}3698 \\ 0{,}3698 \\ 0{,}3698 \end{bmatrix}.$$

Din Teorema Perron-Frobenius rezultă că valoarea de consens $c = w^T x(0) = 0{,}1849$.

b) Observăm ușor că $x(1) = [1/2\ 0\ 1/6\ 0\ 0\ 0\ 0]^T$, $x(2) = [0{,}34\ 0{,}084\ 0{,}12\ 0{,}034\ 0{,}042\ 0\ 0{,}042]^T$. Considerăm $x(2)$ ca punct inițial al unui nou proces iterativ pe un graf redus de 6 noduri. După defectul de la $t = 2$ noul graf are matricea de adiacență

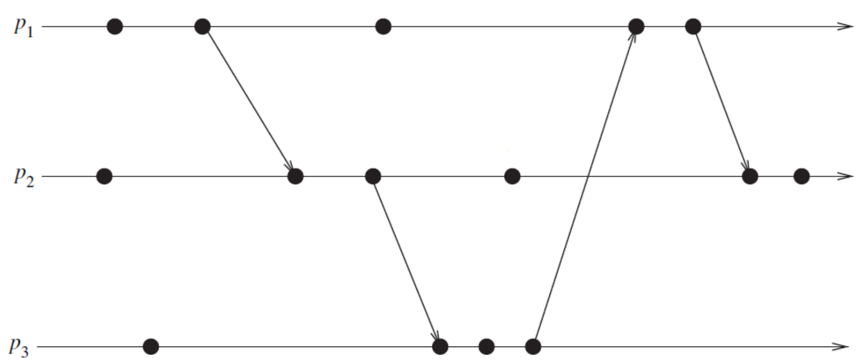
$$A_r = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 0 & 1/5 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

cu noul vector propriu la stânga (asociat valorii proprii 1):

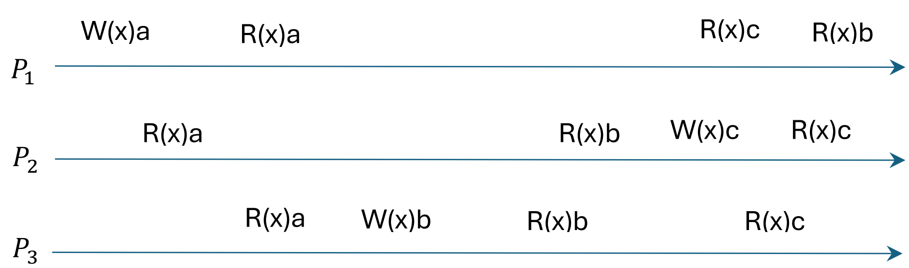
$$w_r = \begin{bmatrix} 0{,}2 \\ 0{,}1 \\ 0{,}25 \\ 0{,}15 \\ 0{,}15 \\ 0{,}15 \end{bmatrix}.$$

Valoarea de consens asimptotic finală se obține din produsul scalar dintre w_r și vectorul $x(2)$ din care se elimină componenta 4 (i.e. $c = 0{,}1153$).

4. Completați valorile ceasurilor vectoriale pentru fiecare proces. Determinați cel mai lung șir de evenimente ordonate cauzal care pornește din p_2 și evidențiați acest șir pe grafic.



5. Care modele de consistență (strictă, secvențială sau cauzală) sunt respectate în seria de evenimente din următoarea diagramă?



Idee de rezolvare: Consistența strictă este evident încălcată. Evenimentele de scriere asupra lui x sunt văzute diferit între cele 3 procese (procesul P_1 citește ordinea acb), de aceea nici consistența secvențială nu este validă. Evenimentele de scriere W(x)a și W(x)c sunt în relație cauzală datorită relației $W_1(x)a \to R_2(x)a \to R_2(x)b \to W_2(x)c$. De asemenea avem și lanțul de precedențe $W_1(x)a \to R_3(x)a \to W_3(x)c$, care implică faptul că $W_1(x)a$ precedă cauzal pe $W_3(x)c$. Ambele perechi de scrieri sunt văzute uniform în toate procesele, ceea ce implică validitatea modelului de consistență cauzală.