# TEORIE EXAMEN ANALIZĂ

1. Noțiunile de corp ordonat, corp complet ordonat, corp arhimedian.
2. Cele două teoreme privind legătura dintre corpurile ordonate și arhimediene.
3. Definiția limitei unui șir convergent.
4. Proprietățile șirurilor convergente.
5. Demonstrația pentru produsul a două șiruri convergente.
6. Teorema privind convergența șirurilor monotone.
7. Distanță, normă (definiție)
8. Definiția șirurilor convergente și a șirurilor Cauchy în spații metrice.
9. Propoziția privind șirurile convergente și Cauchy în spații metrice + DEM.
10. Noțiunea de limită superioară, definiții și proprietăți.
11. Demonstrația propoziției privind caracterizarea limitei superioare ca punct limită.
12. Caracterizarea limitei superioare.
13. Teorema Cesaro-Stolz.
14. Criteriile de convergență pentru serii (serii de puteri).
15. Topologie, mulțime deschisă, vecinătate, mulțime închisă în spațiu topologic (și în spațiu metric).
16. $\mathring{A}$, $A'$, $\bar{A}$, $Fr(A)$
17. Definiția funcțiilor continue
18. Teorema privind continuitatea funcției compuse. + DEMONSTRAȚIE
19. Teorema privind caracterizarea continuității într-un spațiu metric. + DEMONSTRAȚIE.
20. Teorema privind caracterizarea continuității într-un spațiu topologic. + DEMONSTRAȚIE.
21. Convergența simplă și uniformă.
22. Păstrarea continuității prin convergența uniformă (teoremă + DEM).
23. Teorema lui Fermat, Rolle, Lagrange, Cauchy, l'Hospital, f' are proprietatea lui Darboux (cu DEMONSTRAȚIE la toate în afară de l'Hospital).
24. Teorema Cauchy Hadamard.
25. Polinomul Taylor.
26. Prima și a doua teoremă a lui Taylor (fără rest și cu rest L.).

27. Teorema privind păstrarea derivabilității pentru limita unui șir de funcții.
28. Condiții necesare și suficiente de extrem local pentru funcții de o variabilă.
29. Definiția derivatei parțiale și a derivatei unei funcții de mai multe variabile.
30. Proprietățile derivatelor parțiale și derivatei unei funcții de mai multe variabile. + DEMONSTRAȚIE
31. Derivata și derivata parțială de ordin 2. matrice
32. Condiții necesare și suficiente de extrem local pentru funcții de mai multe variabile.
33. Teorema lui Fermat pentru funcții de mai multe variabile + DEMONSTRAȚIE
34. Derivarea funcțiilor compuse și inverse. (propoziții).
35. Teorema funcțiilor implicite.
36. Teorema multiplicatorilor lui Lagrange.

## STRUCTURA EXAMENULUI

TEORIE
- I o teoremă + demonstrație 2p
- II 2 enunțuri 2p

30-35 min.

EXERCIȚII
- I cu funcții de o variabilă 2p
- II cu funcții de mai multe variabile 2p

1p oficiu, 2p seminar

## EXEMPLU EXAMEN

- Enunțați și demonstrați teorema lui Rolle.
- Definiți polinomul Taylor.
  Caracterizarea continuității în spații metrice.
- Să se studieze convergența seriei $\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{\sqrt[n]{C_{2n}^n}}$
- Să se determine punctele de extrem local pentru funcția $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2+y^2-xy$.

Scanned by CamScanner

# TEORIE EXAMEN ANALIZĂ

① **DEF.** $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ se numește **CORP ORDONAT** dacă:

1) $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ corp comutativ
2) $(\mathbb{R}, \leq)$ mulțime total ordonată
3) i) dacă $x \leq y$ și $z \in \mathbb{R} \Rightarrow x+z \leq y+z$
   ii) dacă $x \leq y$ și $z \geq 0 \Rightarrow xz \leq yz$

**DEF.** Un corp ordonat $(S, +, \cdot, \leq)$ se numește **COMPLET ORDONAT** dacă $\forall A \subset S$ mărginită superior $\Rightarrow \exists \sup A$.

**DEF.** Un corp ordonat $(S, +, \cdot, \leq)$ se numește **ARHIMEDIAN** dacă $\forall x \in S \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}$ a.î. $x < n$.

② **TEOREMĂ.** Orice corp complet ordonat este arhimedian.

**TEOREMĂ.** Fie $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ un corp arhimedian și $(S, +, \cdot, \leq)$ un corp complet ordonat.

Atunci $\exists!\, f : \mathbb{R} \to S$ morfism de corpuri ordonate.
Dacă $\mathbb{R}$ este complet ordonat $\Rightarrow f$ este izomorfism.

③ **DEFINIȚIE.** Un șir $(x_n)_{n \geq 1} \subset \mathbb{R}$ se numește **CONVERGENT** la $a \in \mathbb{R}$ și notăm $x_n \to a$ sau $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$ dacă:

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon$ a.î. $\forall n \geq n_\varepsilon \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$.

$x_n \to \infty$ dacă $\forall M > 0, \exists n_M$ a.î. $n \geq n_M \Rightarrow x_n \geq M$.

**(4) PROPRIETĂȚI.** Fie $(x_n)_n \subseteq \mathbb{R}$, $(y_n)_n \subset \mathbb{R}$ și $a, b \in \mathbb{R}$.
Dacă $x_n \to a$, $y_n \to b$:

1) $(x_n)_n$ mărginit
2) $(x_n + y_n)_n \to a+b$
3) $(x_n y_n)_n \to ab$
4) $|x_n| \to |a|$
5) Dacă $x_n \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $a \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{x_n} \to \frac{1}{a}$.

**(5) DEMONSTRAȚIE.**

$x_n \to a$, $y_n \to b$
$(x_n y_n)_n \to ab$

---

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \tilde{n}_\varepsilon$ a.î. $\forall n \geq \tilde{n}_\varepsilon \Rightarrow |x_n y_n - ab| < \varepsilon$.

$\exists M > 0$ a.î. $|x_n| \leq M$, $\forall n \geq 1$.

$|x_n y_n - ab| = |x_n y_n - x_n b + x_n b - ab| \leq |x_n||y_n - b| + |b||x_n - a|$

$|x_n y_n - ab| \leq |x_n| \varepsilon + |b| \varepsilon$

$\leq \varepsilon (M + |b|)$

**(6) TEOREMĂ.** Orice șir monoton și mărginit este convergent.

**(7) DEFINIȚIE.** Fie $X$ o mulțime, o funcție $d: X \times X \to [0, \infty)$ se numește **DISTANȚĂ** dacă:

1) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2) $d(x,y) = d(y,x)$, $\forall x, y \in X$
3) $d(x,y) + d(y,z) \geq d(x,z)$, $\forall x, y, z \in X$

**DEFINIȚIE.** O funcție $\| \ \| : \mathbb{R}^m \to [0,\infty)$ se numește **NORMĂ** dacă:

1) $\|x\| = 0 \iff x = 0$
2) $\|ax\| = |a| \|x\|$ $\qquad \forall a \in \mathbb{R}, \ \forall x, y \in \mathbb{R}^m$
3) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

8 **DEFINIȚIE.** Fie $(X,d)$ un spațiu metric. Un șir $(x_m)_m \subset X$ se numește **CONVERGENT** la $a$ (vom scrie $\lim\limits_{m\to\infty} x_m = a$ în $(X,d)$) dacă $\forall \varepsilon > 0, \exists m_\varepsilon$ a.î. $\forall m \geq m_\varepsilon \Rightarrow d(x_m, a) < \varepsilon \iff d(x_m, a) \to 0$.

**DEFINIȚIE.** Fie $(X,d)$ un spațiu metric. Un șir $(x_m)_m \subset X$ se numește **CAUCHY** dacă $\forall \varepsilon > 0, \exists m_\varepsilon$ a.î. $\forall m, n \geq m_\varepsilon \Rightarrow d(x_m, x_n) < \varepsilon$.

9 **PROPOZIȚIE.** Fie $(X,d)$ un spațiu metric. Atunci:

1) Orice șir Cauchy din $X$ este mărginit
2) Orice șir convergent din $X$ este Cauchy.
3) Orice șir convergent este mărginit.
4) Un șir Cauchy care are un subșir convergent este convergent.

**DEMONSTRAȚIE:**

1) Fie $(x_m)_{m\geq 1}$ un șir Cauchy.

$\forall \varepsilon > 0, \exists m_\varepsilon$ a.î. $\forall m, n \geq m_\varepsilon \Rightarrow d(x_m, x_n) < \varepsilon$.

$\varepsilon = 1 \Rightarrow \forall m \geq m_1, \ d(x_m, x_{m_1}) < 1 \iff x_m \in B(x_{m_1}, 1)$.

$r = \max\left\{1, 1 + \max\limits_{i=1}^{m_1} d(x_i, x_{m_1})\right\}$

$\forall m \geq 1, \ x_m \in B(x_{m_1}, r)$

2) $x_m \to a$

$\forall \varepsilon > 0, \exists m_\varepsilon$ a.î. $\forall m \geq m_\varepsilon \Rightarrow d(x_m, a) < \frac{\varepsilon}{2}$.

$\forall m, n \geq m_\varepsilon \Rightarrow d(x_m, x_n) \leq d(x_m, a) + d(x_n, a) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

1) + 2) $\Rightarrow$ 3)

4) $(x_n)_{n\geq 1}$ Cauchy $\Rightarrow \forall \varepsilon>0, \exists n_\varepsilon$ a.î. $\forall m,n \geq n_\varepsilon \Rightarrow d(x_m, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}$

Fie $(x_{n_k})$ a.î. $x_{n_k} \to a \Rightarrow \forall \varepsilon>0, \exists k_\varepsilon$ a.î. $\forall k \geq k_\varepsilon \Rightarrow d(x_{n_k}, a) < \frac{\varepsilon}{2}$.

$(k\to\infty, n_k \to \infty)$

$\exists k_0 \geq k_\varepsilon$ a.î. $\forall k \geq k_0 \Rightarrow n_k > n_\varepsilon \Rightarrow \left.\begin{matrix}\forall n \geq n_\varepsilon \\ k \geq k_0\end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} k \geq k_\varepsilon \\ n_k \geq n_\varepsilon\end{matrix}$

$\Rightarrow d(x_n, a) \leq d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, a) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

**10** DEFINIȚIE. Fie $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$ și $u_n = \sup\limits_{k\geq n} x_k$. Atunci:

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = \lim_{n\to\infty} u_n = \inf_{n\geq 1} u_n = \inf_{n\geq 1} \sup_{k\geq n} x_k.$$

PROPRIETĂȚI:

1) $\overline{\lim}\,(-x_n) = -\underline{\lim}\, x_n$
2) $\overline{\lim}\, x_n + y_n \leq \overline{\lim}\, x_n + \overline{\lim}\, y_n$
3) $\overline{\lim}\, x_n + y_n \geq \underline{\lim}\, x_n + \overline{\lim}\, y_n$
4) dacă $\exists \lim x_n \Rightarrow \overline{\lim}\,(x_n + y_n) = \lim x_n + \overline{\lim}\, y_n$
5) $x_n > 0 \Rightarrow \overline{\lim}\, \frac{1}{x_n} = \frac{1}{\underline{\lim}\, x_n}$
6) $x_n, y_n \geq 0 \Rightarrow \overline{\lim}\, x_n y_n \leq \overline{\lim}\, x_n \cdot \overline{\lim}\, y_n$

**11** PROPOZIȚIE. Limita superioară a unui șir este un punct limită.

(Fie $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$ și $a = \overline{\lim}\, x_n \Rightarrow \exists\, x_{n_k} \to a$)

DEMONSTRAȚIE:

Scanned by CamScanner

$(x_{n_k})$ $\quad |x_{n_k} - a| < \frac{1}{k}$

$n_k < n_{k+1}$

$(x_n)_n \subset \mathbb{R}$ $\quad a = \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n \in \mathbb{R}$

$k=1$ $\quad a = \inf_{n\geq 1} u_n \ \left(u_n = \sup_{k\geq n} x_k\right) \Rightarrow \exists m_1$ a.î. $a \leq u_{m_1} < a+1$

$u_{m_1} = \sup_{k\geq m_1} x_k \Rightarrow \exists n_1 \geq m_1$ a.î. $x_{n_1} \leq u_{m_1}$

$u_m - 1 < x_{n_1}$

$a-1 \leq u_{m-1} < x_{n_1} \leq u_{m_1} < a+1 \Rightarrow |x_{n_1} - a| < 1.$

$k=2$ $\quad a = \inf_{n\geq 1} u_n \Rightarrow \exists m_2 > n_1$ a.î. $a \leq u_{m_2} < a + \frac{1}{2}$

$u_{m_2} = \sup_{k\geq m} x_k \Rightarrow \exists n_2 \geq m_2 > n_1$ . a.î.

$a - \frac{1}{2} < u_{m_2} - \frac{1}{2} < x_{n_2} \leq u_{m_2} < a + \frac{1}{2} \Rightarrow |x_{n_2} - a| < \frac{1}{2}.$

Presupunem că l-am găsit pe $x_{n_k}$.

$a = \inf_{n\geq 1} u_n$ și $u_n \searrow \Rightarrow \exists m_{k+1} > n_k$ a.î. $a \leq u_{m_{k+1}} < a + \frac{1}{k+1}$

$u_{m_{k+1}} = \sup_{k\geq m_{k+1}} x_k \Rightarrow \exists n_{k+1} \geq m_{k+1} > n_k$ a.î.

$a - \frac{1}{k+1} < u_{m_{k+1}} - \frac{1}{k+1} < x_{n_{k+1}} < u_{m_{k+1}} < a + \frac{1}{k+1}$

$\Rightarrow |x_{n_{k+1}} - a| < \frac{1}{k+1}$

## 12 CARACTERIZAREA LIMITEI SUPERIOARE

Fie $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$ un șir mărginit. Atunci $a = \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n \Leftrightarrow$

1) $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon$ a.î. $\forall n \geq n_\varepsilon \Rightarrow x_n < a + \varepsilon$

2) $\exists x_{n_k} \to a.$

(13) TEOREMA CESARO-STOLZ. Fie $(x_n)_{n\in A}$, $(y_n)_{n\in A}$ două șiruri de numere reale a.î.:

i) $y_n > 0$, $\forall n \in A$

ii) $(y_n)_{n\in A}$ strict crescător și nemărginit

iii) $\left(\dfrac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}\right)_{n\in A}$ are limita $l \in \overline{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty]$.

Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = l$

(14) CRITERIUL CAUCHY.

$\sum\limits_{n\geq 1} x_n$ este convergentă $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon$ a.î. $\forall n \geq n_\varepsilon$, $p \in \mathbb{N} \Rightarrow \left|\sum\limits_{k=n}^{n+p} x_k\right| < \varepsilon$.

CRITERIU. Orice serie absolut convergentă este convergentă.

CRITERIUL SUFICIENT DE DIVERGENȚĂ. Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, atunci $\sum\limits_n a_n$ e divergentă.

SERII DE PUTERI

Fie seria $\sum\limits_{n\geq 0} a_n (x-x_0)^n$.

$$\rho = \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}} \in [0, \infty)$$

1) Dacă $\rho = \infty$, $D = \mathbb{R}$

2) Dacă $\rho = 0$, $D = \{0\}$

3) Dacă $0 < \rho < \infty \Rightarrow (-\rho, \rho) < D < [-\rho, \rho]$.

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = \overline{\lim_{n\to\infty}} |x| \cdot \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{|x|}{\rho}$$

$\dfrac{|x|}{\rho} > 1$ $\quad |x| > \rho \Rightarrow$ serie divergentă

$\dfrac{|x|}{\rho} < 1$ $\quad |x| < \rho \Rightarrow$ serie absolut convergentă

# (14) CRITERII DE CONVERGENȚĂ PENTRU SERII CU TERMENI POZITIVI

## 1. Criteriul raportului

Fie seria $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $a_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ astfel încât există $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \overset{not.}{=} l$.

1) Dacă $l < 1$, seria este convergentă.
2) Dacă $l > 1$, seria este divergentă.
3) Dacă $l = 1$, criteriul nu decide.

## 2. Criteriul radicalului

Fie seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât există $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \overset{not.}{=} l$.

a) Dacă $l < 1$, seria este convergentă.
b) Dacă $l > 1$, seria este divergentă.
c) Dacă $l = 1$, criteriul nu decide.

## 3. Criteriul Raabe-Duhamel

Fie seria $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $a_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ astfel încât există

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \overset{not.}{=} l.$$

a) Dacă $l < 1$, seria este divergentă.
b) Dacă $l > 1$, seria este convergentă.
c) Dacă $l = 1$, criteriul nu decide.

## 4. Criteriul condensării

Dacă $(a_n)_{n\geq 0} \subseteq [0,\infty)$ este un șir monoton descrescător, atunci seriile $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ și $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ au aceeași natură (i.e. sunt ambele convergente sau sunt ambele divergente).

# CRITERII DE COMPARAȚIE PENTRU SERII CU TERMENI POZITIVI

## Criteriul de comparație cu inegalități

Fie seriile $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$, $a_n \in \mathbb{R}_+$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n \in \mathbb{R}_+$, $\forall n \in \mathbb{N}$ astfel încât există $n_0 \in \mathbb{N}$ cu proprietatea că $\forall n \geq n_0$, avem $a_n \leq b_n$.

a) Dacă $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ este convergentă, atunci $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ este convergentă.

b) Dacă $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ este divergentă, atunci $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ este divergentă.

## Criteriul de comparație cu limită

Fie seriile $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$, $a_n \in \mathbb{R}_+$, $b_n \in \mathbb{R}_+^*$ $\forall n \in \mathbb{N}$ astfel încât există $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \overset{\text{not.}}{=} l$.

a) Dacă $l \in (0,\infty)$, atunci seriile $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ și $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ au aceeași natură.

b) Dacă $l = 0$ și $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ este convergentă, atunci $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ este convergentă.

c) Dacă $l = \infty$ și $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ este divergentă, atunci $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ este divergentă.

# CRITERII DE CONVERGENȚĂ PENTRU SERII CU TERMENI OARECARE

## Criteriile Abel-Dirichlet

**I** Fie $(x_n)_{n\geq 0} \subseteq \mathbb{R}$, $(y_n)_{n\geq 0} \subseteq \mathbb{R}$.

Presupunem că:

i) Există $M>0$ astfel încât $\forall n \in \mathbb{N}$, avem $|y_0+y_1+\ldots+y_n| \leq M$.

ii) Șirul $(x_n)_{n\geq 0}$ este monoton descrescător și $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$

Atunci seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n y_n$ este convergentă.

**II** Fie $(x_n)_{n\geq 0} \subseteq \mathbb{R}$, $(y_n)_{n\geq 0} \subseteq \mathbb{R}$.

Presupunem că:

i) Șirul $(x_n)_{n\geq 0}$ este monoton și mărginit.

ii) Seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n$ este convergentă.

Atunci seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n y_n$ este convergentă.

## Criteriul lui Leibniz

Fie $(x_n)_{n\geq 0} \subseteq \mathbb{R}$ un șir monoton descrescător astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. Atunci seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n x_n$ este convergentă.

(15) DEFINIȚIE. Fie $X \neq \phi$ o mulțime și $\mathcal{T} \subset P(X)$. $\mathcal{T}$ se numește **TOPOLOGIE** dacă:

1) $\phi, X \in \mathcal{T}$
2) $D_1, D_2 \in \mathcal{T} \Rightarrow D_1 \cap D_2 \in \mathcal{T}$
3) $(D_i)_{i\in J} \subset \mathcal{T} \Rightarrow \bigcup_{i\in J} D_i \in \mathcal{T}$

DEFINIȚIE. Fie $X \neq \phi$ și $\mathcal{T} \subset P(X)$ o topologie pe $X$.

I. O mulțime $G \subseteq X$ s.n. **DESCHISĂ** dacă $G \in \mathcal{T}$.

II. O mulțime $F \subseteq X$ s.n. **ÎNCHISĂ** dacă $X \setminus F \in \mathcal{T}$.

DEFINIȚIE. $V \subset \mathbb{R}$ s.n. **VECINĂTATE** a lui $a$ dacă $\exists\, \varepsilon > 0$ a.î. $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subset V$.

(16) $A \subset X$, $(X, \mathcal{T})$ spațiu topologic.

$A' = \{a \in X \mid \forall V \in \mathcal{V}_a \Rightarrow V \cap A \setminus \{a\} \neq \phi\}$ – puncte de acumulare

$\bar{A} = \{a \in X \mid \forall V \in \mathcal{V}_a \Rightarrow V \cap A \neq \phi\}$ – închiderea lui A

$\mathring{A} = \{a \in X \mid A \in \mathcal{V}_a\}$ – interiorul lui A

$Fr(A) = \bar{A} \setminus \mathring{A}$ – frontiera lui A

$iz(A) = \bar{A} \setminus A'$ – puncte izolate

(17) DEFINIȚIE. Fie $(X_1, \mathcal{T}_1)$ și $(X_2, \mathcal{T}_2)$ spații topologice, $a \in X_1$ și $f: X_1 \to X_2$. $f$ se numește **CONTINUĂ** în $a$ dacă $V \in \mathcal{V}_{f(a)} \Rightarrow f^{-1}(V) \in \mathcal{V}_a$.

**18** Fie $(X_1, \tau_1), (X_2, \tau_2), (X_3, \tau_3)$ spații topologice, $a \in X_1$, $f: X_1 \to X_2$, $g: X_2 \to X_3$. Dacă $f$ este continuă în a și $g$ este continuă în $f(a) \Rightarrow g \circ f$ este continuă în a.

**19** TEOREMĂ. Fie $(X_1, d_1)$ și $(X_2, d_2)$ două spații metrice, $a \in X_1$ și $f: X_1 \to X_2$. Atunci, următoarele afirmații sunt echivalente:

1) $f$ este continuă în a

2) $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \delta_\varepsilon > 0$ a.î. $d_1(x,a) < \delta_\varepsilon \Rightarrow d_2(f(x), f(a)) < \varepsilon$.

3) $\forall (x_n)_n \subset X$, $x_n \to a \Rightarrow f(x_n) \to f(a)$

DEMONSTRAȚIE:

1) $\Rightarrow$ 2)

Fie $\varepsilon > 0 \Rightarrow B(f(a), \varepsilon) \in \mathcal{V}_{f(a)}$

$f$ continuă în $a \Rightarrow f^{-1}(B(f(a), \varepsilon)) \in \mathcal{V}_a \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists \delta_\varepsilon > 0$ a.î. $B(a, \delta_\varepsilon) < f^{-1}(B(f(a), \varepsilon))$

$f(B(a, \delta_\varepsilon)) < B(f(a), \varepsilon)$

$\forall x \in B(a, \delta_\varepsilon) \Rightarrow f(x) \in B(f(a), \varepsilon) \Leftrightarrow$

$\forall x$ a.î. $d_1(a,x) < \delta_\varepsilon \Rightarrow d_2(f(a), f(x)) < \varepsilon$.

2) $\Rightarrow$ 1)

$V \in \mathcal{V}_{f(a)} \Rightarrow \varepsilon_V > 0$ a.î. $B(f(a), \varepsilon_V) \subset V$.

$\xRightarrow{2)} \exists \delta_{\varepsilon_V} > 0$ a.î. $d_1(a,x) < \varepsilon$

$\Rightarrow d_2(f(a), f(x)) < \varepsilon_V$

$\Leftrightarrow x \in B(a_1, \varepsilon_V)$

$\Rightarrow f(x) \in B(f(a), \varepsilon_V) \subset V \mid f^{-1}$

$\underset{\in \mathcal{V}_a}{B(a, \varepsilon_V)} \subset f^{-1}(B(f(a), \varepsilon_V)) \subset f^{-1}(V) \in \mathcal{V}_{f(a)}$

2) $\Rightarrow$ 3)

Fie $x_n \to a$.

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon$ a.î. $\forall n \geq n_\varepsilon \Rightarrow d_1(x_n, a) < \varepsilon \Leftrightarrow x_n \in B(a, \varepsilon)$ (1)

$f$ continuă în $a$

$\forall \eta > 0 \Rightarrow \exists \delta_\eta > 0$ a.î. $d_1(a, x) < \delta_\eta \Rightarrow d_2(f(a), f(x)) < \eta$ (2)

$\varepsilon = \delta_\eta \quad \forall n \geq n_{\delta_\eta} \xRightarrow{1)} d_1(x_n, a) < \delta_\eta \xRightarrow{2)} d_2(f(a), f(x)) < \eta$

3) $\Rightarrow$ 2)

$x_n \to a \Rightarrow f(x_n) \to f(a)$.

Vrem să arătăm că $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0$ a.î.

$d_1(x, a) < \varepsilon \Rightarrow d_2(f(x), f(a)) < \delta_\varepsilon$.

Presupunem că nu se verifică 2.

$\exists \varepsilon > 0$ a.î. $\forall \delta > 0 \Rightarrow \exists x_\delta$ cu $d_1(x, a) < \delta \Rightarrow d_2(f(x), f(a)) \geq \varepsilon$

$\delta = \frac{1}{n}, \; y_n = x_{\frac{1}{n}}$

$d_1(y_n, a) < \frac{1}{n}$ și $d_2(f(x), f(a)) \geq \varepsilon$

$y_n \to a$ și $f(x) \not\to f(a)$.

**20** TEOREMĂ. Fie $(X_1, \tau_1)$ și $(X_2, \tau_2)$ spații topologice și $f : X_1 \to X_2$.
Următoarele afirmații sunt echivalente:

1) $f$ este continuă pe $X_1$
2) $\forall D \in \tau_2 \Rightarrow f^{-1}(D) \in \tau_1$
3) $\forall F = \overline{F} \subset X_2 \Rightarrow f^{-1}(F) = \overline{f^{-1}(F)}$

DEMONSTRAȚIE:

1) $\Rightarrow$ 2)

$D \in \tau_2 \quad (D = \overset{\circ}{D} \subset X_2)$

$$\left.\begin{array}{l} x \in f^{-1}(D) \Rightarrow f(x) \in D \\ D \in \mathcal{V}_{f}(x) \\ f \text{ continuă în } x \end{array}\right\} \Rightarrow f^{-1}(D) \in \mathcal{V}_x \Rightarrow f^{-1}(D) \in \tau_1$$

2) $\Rightarrow$ 1)

Fie $x \in X$ și $V \in \mathcal{V}_{f(x)} \Rightarrow \exists D \in \mathcal{T}_2$ a.î. $f(x) \in D \subset V \Rightarrow$

$x \in \underbrace{f^{-1}(D)}_{\in \mathcal{T}_1} \subset f^{-1}(V) \Rightarrow f^{-1}(V) \in \mathcal{V}_x$

$f$ este continuă în $x$.

2) $\Rightarrow$ 3)

$F$ închisă din $X_2 \Rightarrow X_2 \setminus F \in \mathcal{T}_2 \overset{2)}{\Longrightarrow} f^{-1}(X_2 \setminus F) \in \mathcal{T}_1$

$f^{-1}(X_2 \setminus f^{-1}(F)) = X_1 \setminus f^{-1}(F)$

$\Rightarrow f^{-1}(F)$ închisă

3) $\Rightarrow$ 2) Analog.

**(21)** DEFINIȚIE. Fie $f_n, f : A \to \mathbb{R}$.

$f_n$ CONVERGE SIMPLU către $f$ ($f_n \xrightarrow{s} f$) dacă $\forall x \in A$, $f_n(x) \to f(x)$.

$\forall x \in A$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_{\varepsilon,x}$ a.î. $\forall n \geq n_{\varepsilon,x} \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

$f_n$ CONVERGE UNIFORM către $f$ ($f_n \xrightarrow{u} f$) dacă:

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_\varepsilon$ a.î. $\forall n \geq n_\varepsilon \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$, $\forall x \in A \Leftrightarrow$

$a_n = \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$.

**(22)** TEOREMĂ. Fie $f_n, f : (a,b) \to \mathbb{R}$ a.î. $f_n \xrightarrow{u} f$ și $c \in (a,b)$ a.î. $f_n$ să fie continuă în $c$ în $\forall c \in (a,b)$. Atunci $f$ este continuă în $c$.

DEMONSTRAȚIE:

$f_n \xrightarrow{u} f \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon$ a.î. $\forall n \geq n_\varepsilon \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ (1)

$n \geq n_\varepsilon$ fixat

$f_n$ continuă în $c \Rightarrow$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0$ a.î. $|x - c| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f_n(x) - f_n(c)| < \frac{\varepsilon}{3}$ (2)

$x$ a.î. $|x - c| < \delta_\varepsilon$

$$|f(x)-f(c)| = |f(x)-f_m(x)+f_m(x)-f_m(c)+f_m(c)-f(c)| \leq$$
$$\leq \underbrace{|f(x)-f_m(x)|}_{<\frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{|f_m(x)-f_m(c)|}_{<\frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{|f_m(c)-f(c)|}_{<\frac{\varepsilon}{3}}$$
$$\leq \varepsilon$$

23 TEOREMA LUI FERMAT. Fie $f:(a,b)\to\mathbb{R}$, $c\in(a,b)$ un punct de extrem local pentru $f$. Dacă $\exists f'(c) \Rightarrow f'(c)=0$.

DEMONSTRAȚIE:

Presupunem că $c$ este un punct de minim local.

$\Rightarrow \exists\, \varepsilon>0$ a.î. $\forall x\in(c-\varepsilon, c+\varepsilon) \Rightarrow f(x)\geq f(c)$. $((c-\varepsilon, c+\varepsilon)\subset(a,b))$

$x<c \Rightarrow f(x)-f(c)\geq 0$ și $x-c<0$

$$\Rightarrow f'(c) = \lim_{\substack{x\to c\\ x<c}} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq 0$$

$x>c \Rightarrow f(x)-f(c)\geq 0$, $x-c>0 \Rightarrow \dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}\geq 0$

$$\Rightarrow f'(c) = \lim_{x\to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0$$

$\Rightarrow f'(c)=0$

TEOREMA LUI ROLLE. Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, derivabilă pe $(a,b)$, continuă în $a$ și $b$ ($\Rightarrow f$ continuă pe $[a,b]$) și $f(a)=f(b)$. Atunci $\exists\, c\in(a,b)$ a.î. $f'(c)=0$.

DEMONSTRAȚIE:

$f$ este continuă pe $[a,b] \Rightarrow \exists\, c,d\in[a,b]$ a.î.

$$M = \sup_{x\in[a,b]} f(x) = f(c) \text{ și } m = \inf_{x\in[a,b]} f(x) = f(d).$$

Cazul I: $M>f(a)=f(b) \Rightarrow c\in(a,b) \Rightarrow c$ este punct de maxim local $\xRightarrow{T.F.} f'(c)=0$

Cazul II: $m<f(a)=f(b) \Rightarrow d\in(a,b) \Rightarrow d$ este punct de minim local $\xRightarrow{T.F.} f'(d)=0$

Cazul III: $M=m=f(a)=f(b) \Rightarrow f'(x)=0, \forall x\in(a,b)$ ($f$ constantă)

TEOREMA LUI LAGRANGE. Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ derivabilă pe $(a,b)$, continuă în a și b. Atunci $\exists\, c\in(a,b)$ a.î. $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$.

DEMONSTRAȚIE:

$h:[a,b]\to\mathbb{R},\ h(x)=f(x)-\alpha x$

h derivabilă pe $(a,b)$, continuă pe $[a,b]$

Punem condiția $h(a)=h(b)$. $\Rightarrow f(a)-\alpha a=f(b)-\alpha b$

$\Rightarrow \alpha(b-a)=f(b)-f(a) \Rightarrow \alpha=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

T. Rolle $\Rightarrow \exists\, c\in(a,b)$ a.î. $h'(c)=0 \Rightarrow f'(c)-\alpha=0$

$f'(c)=\alpha=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

TEOREMA LUI CAUCHY. Fie $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ derivabile pe $(a,b)$, continue pe $[a,b]$, a.î. $g'(x)\neq 0,\ \forall\, x\in(a,b)$. Atunci $\exists\, c\in(a,b)$ a.î.

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

DEMONSTRAȚIE:

Din T.L. pentru g pe $[a,b]\Rightarrow$

$\exists\, d\in(a,b)$ a.î. $\frac{g(b)-g(a)}{b-a}=g'(d)\neq 0 \Rightarrow g(b)\neq g(a)$.

$h:[a,b]\to\mathbb{R},\ h(x)=f(x)-\alpha g(x)$

h derivabilă pe $(a,b)$, continuă pe $[a,b]$

$h'(x)=f'(x)-\alpha g'(x)$

$h(a)=h(b)$

$f(a)-\alpha g(a)=f(b)-\alpha g(b)$

$\Rightarrow f(b)-f(a)=\alpha(g(b)-g(a))$

$\Rightarrow \alpha=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$

TEOREMĂ. Fie $f:(a,b)\to \mathbb{R}$ derivabilă pe $(a,b)$. Atunci $f'$ are proprietatea lui Darboux.

## DEMONSTRAȚIE:

$a<c<d<b$

$f'(c)<f'(d)$ și $\alpha\in(f'(c),f'(d))$

$? \Rightarrow \exists\, x_0\in(c,d)$ a.î. $f'(x_0)=\alpha$.

$h:(a,b)\to\mathbb{R}$, $h(x)=f(x)-\alpha x$ derivabilă

$h$ este mărginită pe $[c,d]$ ($h$ continuă)

$\exists\, x_0\in[c,d]$ a.î. $h(x_0)=\inf\limits_{x\in[c,d]} h(x)$

Cazul I: $x_0\in(c,d)\Rightarrow x_0$ punct de minim local $\Rightarrow$

$h'(x_0)=0=f'(x_0)-\alpha \Rightarrow f'(x_0)=\alpha$

Cazul II: $x_0=c$

$h'(c)=f'(c)-\alpha<0$

$h'(c)=\lim\limits_{x\to c}\dfrac{h(x)-h(c)}{x-c}$

$\Rightarrow \exists\, \varepsilon>0$ a.î. $\forall x\in(c-\varepsilon, c+\varepsilon) \Rightarrow \dfrac{h(x)-h(c)}{x-c}<0$.

$x\in(c,c+\varepsilon)\Rightarrow h(x)<h(c)$

$h(c)=m=\inf\limits_{y\in[c,d]} h(y)<h(x)$

Cazul III: $x_0=d$.

TEOREMA LUI L'HOSPITAL. Fie $f,g:(a,b)\to\mathbb{R}$ $(b\in\mathbb{R}\cup\{\infty\})$

a.î. $\lim\limits_{x\to b} f(x)=\lim\limits_{x\to b} g(x)\in\{0,\pm\infty\}$.

Dacă $\exists$ $f'$ și $g'$ pe $(a,b)$, $g'(x)\neq 0$, $\forall x\in(a,b)$ și

$$\exists\ l=\lim_{x\to b}\frac{f'(x)}{g'(x)} \Rightarrow \exists \lim_{x\to b}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to b}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

DEMONSTRAȚIE:

1) $l\in\mathbb{R}$

2) $l\in\{\pm\infty\}$

1) $l\in\mathbb{R}$, $b\in\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to b} f(x)=0$

$$\tilde{f},\tilde{g}:[a,b]\to\mathbb{R},\quad \tilde{f}(x)=\begin{cases}f(x), & x\in(a,b)\\ 0, & x=b\end{cases},\quad \tilde{g}(x)=\begin{cases}g(x), & x\in(a,b)\\ 0, & x=b\end{cases}$$

$\tilde{f},\tilde{g}$ - continue pe $[a,b]$

$a<x<b$

$\tilde{f}$ și $\tilde{g}$ verifică condițiile din T.C. pe $[x,b]$ $\Rightarrow\exists\ c$ a.î.

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\tilde{f}(x)}{\tilde{g}(x)}=\frac{\tilde{f}(x)-\tilde{f}(b)}{\tilde{g}(x)-\tilde{g}(b)}=\frac{\tilde{f}'(c_x)}{\tilde{g}'(c_x)}=\frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}$$

$x\to b\Rightarrow c_x\to b$

$$\lim_{x\to b}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to b}\frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}=l$$

2) $f,g:(b,\infty)\to\mathbb{R}$

$t:(b,\infty)\to\left(0,\frac{1}{b}\right)$, $t(x)=\frac{1}{x}$

$F,G:\left(0,\frac{1}{b}\right)\to\mathbb{R}$, $F=f\circ t$, $G=g\circ t$

$$F'(x)=\left(f\left(\frac{1}{x}\right)\right)'=-\frac{1}{x^2}f'\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$G'(x)=-\frac{1}{x^2}g'\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\lim_{x\searrow 0}\frac{F'(x)}{G'(x)}=\lim_{\substack{x\searrow 0\\ y=\frac{1}{x}}}\frac{-\frac{1}{x^2}f'\left(\frac{1}{x}\right)}{-\frac{1}{x^2}g'\left(\frac{1}{x}\right)}=\lim_{y\to\infty}\frac{f'(y)}{g'(y)}=l$$

$$\lim_{x\searrow 0}\frac{F(x)}{G(x)}=\lim_{x\searrow 0}\frac{F'(x)}{G'(x)}=l$$

$$\|$$

$$\lim_{x\searrow 0}\frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{g\left(\frac{1}{x}\right)}=\lim_{\substack{y\to\infty\\ \frac{1}{x}=y}}\frac{f(y)}{g(y)}$$

## 24 TEOREMA CAUCHY - HADAMARD

Fie $s(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ și $\rho = \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}}$

1) $\rho = 0 \quad D = \{0\} \quad (D = \{x \mid s(x)$ este convergentă $\})$

$\rho = \infty \quad D = \mathbb{R}$

$0 < \rho < \infty \quad (-\rho, \rho) \subset D \subset [-\rho, \rho]$

2) $\forall R < \rho$ seria este uniform convergentă pe $[-R, R]$ $(\subset (-\rho, \rho))$

3) $s_1(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^{n+1} \quad \rho_1 = \rho \quad \Rightarrow s' = s_1$

4) $s' = s_1$ pe $(-\rho, \rho)$.

## 25 DEFINIȚIE.

Fie $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ a.î. $\exists f^{(n)}$ pe $(a,b)$ și $\exists f^{(n+1)}(c)$. Se numește POLINOMUL TAYLOR de ordin $n+1$ asociat lui $f$ în $c$:

$$T_{f, n+1, c}(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(c)}{k!} (x-c)^k.$$

## 26 TEOREMA LUI TAYLOR CU REST LAGRANGE

Fie $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ derivabilă de $n+1$ ori pe $(a,b)$ și $x, c \in (a,b)$. Atunci $\exists\, \alpha \in (x, c)$ (sau $\alpha \in (c, x)$) a.î.:

$$f(x) = T_{f,n,c}(x) + R_{f,n,c}(x), \text{ unde}$$

$$R_{f,n,c} = \frac{f^{(n+1)}(\alpha)(x-c)^{n+1}}{(n+1)!}$$

V2. $f(x) = T_{f, n+1, c}(x) + (x-c)^{n+1} \omega(x)$

$$\lim_{x \to c} \omega(x) = 0, \quad \omega(x) = \frac{f(x) - f(c) - f'(c)(x-c)}{|x-c|}$$

27. TEOREMĂ. Fie $f_n, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ $(a,b \in \mathbb{R})$ a.î.:

1) $\exists f_n'$, $\forall n \geq 1$ și $f_n' \xrightarrow{u} g$

2) $\exists c \in (a,b)$ a.î. $(f_n(c))_{n \geq 1}$ să fie convergent

Atunci $\exists f : (a,b) \to \mathbb{R}$ a.î.:

1) $f_n \xrightarrow{u} f$

2) $f' = g$

28. TEOREMĂ. Fie $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ derivabilă pe $(a,b)$, $c \in (a,b)$ a.î. $\exists f''(c)$. Atunci:

1) Dacă $c$ este punct de minim local $\Rightarrow f'(c) = 0$ și $f''(c) \geq 0$

2) Dacă $f'(c) = 0$ și $f''(c) > 0 \Rightarrow c$ este punct de minim local.

3) Dacă $c$ este punct de maxim local $\Rightarrow f'(c) = 0$ și $f''(c) \leq 0$.

4) Dacă $f'(c) = 0$ și $f''(c) < 0 \Rightarrow c$ este punct de maxim local.

29. DEFINIȚIE. Fie $D \subset \mathbb{R}^n$ deschisă, $f : D \to \mathbb{R}^m$, $a \in D$.

Spunem că $f$ este derivabilă în $a$ dacă $\exists T \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ a.î.

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - T(x-a)}{\|x-a\|_2} = 0.$$

$T = f'(a)$ – derivata / diferențiala

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t}$$ – derivata parțială

Scanned by CamScanner

30 1. Derivata este unică.

DEMONSTRAȚIE:

Presupunem $T_1, T_2$ a.î.:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)-T_1(x-a)}{\|x-a\|_2}=0$$

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)-T_2(x-a)}{\|x-a\|_2}=0$$

$$\lim_{x\to a} \frac{T_1(x-a)-T_2(x-a)}{\|x-a\|_2}=0$$

$x=a+tv$, $v\in\mathbb{R}^n$, $v\neq 0$, $t\in\mathbb{R}$

$x\to a \Leftrightarrow t\to 0$

$$\lim_{t\to 0} \frac{T_1(tv)-T_2(tv)}{\|tv\|_2}=0$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{t}{|t|}\cdot\frac{T_1(v)-T_2(v)}{\|v\|_2}=0, \quad \left|\frac{t}{|t|}\right|=1$$

$T_1(v)=T_2(v)$, $\forall v\neq 0 \Rightarrow T_1=T_2$

2. Dacă $\exists f'(a) \Rightarrow f$ este continuă în $a$

DEMONSTRAȚIE:

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} \underbrace{f(a)+\underbrace{T(x-a)}_{T(0)=0}+\underbrace{\|x-a\|_2}_{0}\,\underbrace{\omega(x)}_{0}}=f(a)$$

unde $\omega(x)=\dfrac{f(x)-f(a)-T(x-a)}{\|x-a\|_2}$

3. Dacă $\exists f'(a) \Rightarrow \forall v \in \mathbb{R}^n, \exists \frac{\partial f}{\partial v}(a) = f'(a)(v)$:

DEMONSTRAȚIE:

$f$ derivabilă în $a \Rightarrow \exists T \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ a.î.:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)-T(x-a)}{\|x-a\|_2} = 0$$

$v \in \mathbb{R}^n, v \neq 0, x = a + tv$

$t \to 0 \Leftrightarrow x \to a$

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(a+tv)-f(x)-T(tv)}{\|tv\|_2} = 0 \Rightarrow \lim_{t \to 0} \frac{f(a+tv)-f(x)-T(tv)}{t\|v\|_2} = 0 \Rightarrow$$

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(a+tv)-f(a)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{T(tv)}{t} = T(v) = f'(a)(v)$$

4. Fie $a \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon > 0$, $f: B(a,\varepsilon) \to \mathbb{R}^m$.
Dacă $\exists \frac{\partial f}{\partial x_i}$ pe $B(a,\varepsilon)$ și $\exists M \geq 0$ a.î. $\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right| \leq M$ pe $B(a,\varepsilon)$

$\Rightarrow f$ este continuă în $a$.

5. Dacă $\exists \frac{\partial f}{\partial x_i}, \forall i = \overline{1,n}$ pe $B(a,\varepsilon)$ și $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ este continuă în $a \Rightarrow$

$$\exists f'(a) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \; \dots \; \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right)$$

31 Derivata de ordinul 2 reprezintă derivata derivatei de ordin 1.

$f: D = \mathring{D} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$a \in D$, $u, v \in \mathbb{R}^n$, $u \neq 0$, $v \neq 0$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}(a) = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)(a)$$

Fie $f: D = \mathring{D} \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ a.î. $\exists$ în $\mathbb{R}^q$ $\frac{\partial f}{\partial x_i}, \forall i = \overline{1,p}$, în toate punctele din $D$ și fie $c \in D$. Definim (dacă membrul drept există)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(c) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(c) \quad \forall i,j \in \{1,\dots,p\}$$ derivata parțială de ordin 2.

## 32) CONDIȚII NECESARE ȘI SUFICIENTE DE EXTREM LOCAL PENTRU FUNCȚII DE MAI MULTE VARIABILE.

Fie $D=\overset{\circ}{D}\subset\mathbb{R}^n$, $a\in D$, $f:D\to\mathbb{R}$ a.î. $\exists f'$ pe $D$ și $f''(a)$. Atunci:

1. Dacă $a$ este punct de minim local $\Rightarrow f'(a)=0$, $f''(a)\geq 0$.
2. Dacă $f'(a)=0$ și $f''(a)>0 \Rightarrow a$ punct de minim local
3. Dacă $a$ este punct de maxim local $\Rightarrow f'(a)=0$ și $f''(a)\leq 0$. $(-f''(a)\geq 0)$
4. Dacă $f'(a)=0$ și $f''(a)<0 \Rightarrow a$ punct de maxim local

## 33) TEOREMA LUI FERMAT

Fie $D=\overset{\circ}{D}\subset\mathbb{R}^n$, $f:D\to\mathbb{R}$, $a\in D$ a.î. $\exists f'(a)$ și $a$ să fie punct de extrem local pentru $f$. Atunci $f'(a)=0$.

SEMINAR: Fie $f:D\to\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}$, $c\in\overset{\circ}{D}$ un punct de extrem local al lui $f$. Dacă $f$ este derivabilă în $c$, atunci $c$ este punct critic al lui $f$.

### DEMONSTRAȚIE:

Presupunem că $a$ este punct de minim local.

$\exists\, \varepsilon>0$ a.î. $B(a,\varepsilon)\subset D$ și $\forall x\in B(a,\varepsilon) \Rightarrow f(a)\leq f(x)$

$v\in\mathbb{R}^n$, $v\neq 0$, $\|v\|<1$

$g_v:(-\varepsilon,\varepsilon)\to D$, $g_v(t)=f(a+tv)$

$0$ este punct de minim local pentru $g_v \Rightarrow g_v'(0)=0$

$g_v'(0)=f'(a)(v)=0$

$f'(a)(v)=0,\ \forall v\in\mathbb{R}^n \Rightarrow f'(a)=0$

## 34 DERIVAREA FUNCȚIILOR COMPUSE

Fie $D=\mathring{D}\subset\mathbb{R}^n$, $G=\mathring{G}\subset\mathbb{R}^m$, $f:D\to G$, $g:G\to\mathbb{R}^m$ și $a\in D$.
Dacă $\exists\ f'(a)$ și $g'(f(a)) \Rightarrow \exists\ (g\circ f)'(a)=g'(f(a))\circ f'(a)$.

## DERIVAREA FUNCȚIILOR INVERSE

Fie $D=\mathring{D}$, $G=\mathring{G}\subset\mathbb{R}^n$, $f:D\to G$ bijectivă și $a\in D$.
Dacă $\exists\ f'(a)$ și este inversabilă și $f^{-1}$ este continuă în $a \Rightarrow$
$\exists\ (f^{-1})'(f(a))=(f'(a))^{-1}$

$(f^{-1})'(f(a))=\dfrac{1}{f'(a)}$ continuă

## 35 TEOREMA FUNCȚIILOR IMPLICITE

Fie $D=\mathring{D}\subset\mathbb{R}^{n+m}$, $(a,b)\in\mathbb{R}^{n+m}$ $(a\in\mathbb{R}^n, b\in\mathbb{R}^m)$, $g:D\to\mathbb{R}^m\in C^1$,
$x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, $y=(y_1,\dots y_m)\in\mathbb{R}^m$, a.î. $\dfrac{\partial g}{\partial y}(a)$ să fie
derivabilă și $g(a,b)=0 \Rightarrow$

$\exists\ \varepsilon>0, \exists\ \delta>0$ a.î. $\forall x\in B(b,\varepsilon) \Rightarrow \exists\ x\in B(a,\delta)$ a.î. $f(x,y)=0$

$(\exists!\ \varphi:B(b,\varepsilon)\to B(a,\varepsilon)$ a.î. $f(\varphi(x),x)=0$
$\varphi\in C^1$, $\varphi(a)=b$ )

## 36 TEOREMA MULTIPLICATORILOR LUI LAGRANGE

Fie $D=\mathring{D}\subset\mathbb{R}^n$, $f:D\to\mathbb{R}\in C^1$ și $g:D\to\mathbb{R}^m$ $(m<n)$.
Dacă $a\in D$ este un punct de extrem local pentru $f$ pe mulțimea
$A=\{x\in D \mid g(x)=0\}$ și rang $g'=m$ (maxim) atunci $\exists\ \alpha_1,\dots\alpha_m$ a.î.
$h'_{\alpha_1,\dots\alpha_m}(a)=0$, unde $h_{\alpha_1,\dots\alpha_m}=f+\alpha_1 g_1+\alpha_2 g_2+\dots+\alpha_m g_m$,
$g=(g_1,g_2,\dots g_m)$.