Seminar 5 1.11.2021

(vezi S4) Fie $f: A \to B$ funcție. Să se arate că:

f e injectivă $\Leftrightarrow (\exists)\ h: B \to A$ a.î. $h \circ f = 1_A$.

$\Leftarrow$ evid

$\boxed{"\Rightarrow"}$ f e inj. $\underset{a_1, a_2 \in A}{(\forall)\ a_1 \neq a_2} \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$

f injectivă $\Rightarrow |A| = |f(A)|$

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & B \\ \cup & & \cup \\ a & \longmapsto & f(a) \end{array}$$

Notez cu $b_a := f(a)$

Vrem să construim $h: B \to A$

Avem 2 cazuri de analizat:

Cazul 1 $f(A) = B$ ($\Rightarrow f$ bijectivă) $\Rightarrow B = \{b_a \mid a \in A\}$ $= \{f(a) \mid a \in A\}$

$h: B \to A$ $h(b_a) = a$ $(\forall)\ b_a \in B$

(Verificare: $(h \circ f)(a) = h(f(a)) = h(b_a) = a$ $(\forall)\ a \in A$) (1)

Cazul 2 $\underset{\{b_a \mid a \in A\}}{f(A)} \neq B$ Def. $h: B \to A$ astfel:

$$\boxed{h(x) = \begin{cases} a & , x = b_a \\ a_0 & , x \in B \setminus f(A) \end{cases}}$$

unde $a_0 \in A$ este un element fixat oarecare

(Verificare: $(h \circ f)(a) = h(f(a)) = h(b_a) = a$ $(\forall)\ a \in A$) (2)

Din (1) și (2) $\Rightarrow (\exists)\ h: B \to A$ a.î. $h \circ f = 1_A$.

Aplicație la ($f: A \to B$ surj $\Leftrightarrow (\exists)\, g: B \to A$ a.î. $f \circ g = 1_B$)

Exemplu $f: \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $f(a,b) = a$ (proiecția canonică pe prima comp.)

f surj (nu e inj.)

Dem: Fie $n \in \mathbb{N}$ $f(n,0) = n \overset{n}{\underset{\text{ales arbitrar}}{\Rightarrow}} \mathrm{Im}(f) = \mathbb{N} \Rightarrow$
$\Rightarrow f$ e surj.

$$f^{-1}(X) = \{(a,b) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} \mid f(a,b) \in X\}$$

$X \subseteq \mathbb{N}$

De ex: $X = \{0\} \Rightarrow f^{-1}(\{0\}) = \{(0,b) \mid b \in \mathbb{N}\}$

$X = \{2,3,5,7\} \Rightarrow f^{-1}(\{2,3,5,7\}) = \{(2,b) \mid b \in \mathbb{N}\} \cup \{(3,b) \mid b \in \mathbb{N}\} \cup \{(5,b) \mid b \in \mathbb{N}\} \cup \{(7,b) \mid b \in \mathbb{N}\}$

Dacă notăm $A_a = \{(a,b) \mid b \in \mathbb{N}\}$ atunci

$$f^{-1}(\{2,3,5,7\}) = A_2 \cup A_3 \cup A_5 \cup A_7.$$

Cum construiesc? $g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ a.î. $f \circ g = 1_{\mathbb{N}}$

$$f^{-1}(\{c\}) = \{(c,b) \mid b \in \mathbb{N}\} (= A_c)$$

$g_1: \mathbb{N} \to \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ $g_1(0) = (0,0)$ $g_1(1) = (1,1)$
$g_1(2) = (2,2)$ ... $g_1(n) = (n,n)$, ...

$(f \circ g_1)(k) = f(g_1(k)) = f(k,k) = k \; (\forall) k \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow f \circ g_1 = 1_{\mathbb{N}}$.

$g_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

$g_2(0) = (0,1) \quad g_2(1) = (1,2) \ldots$

$g_2(n) = (n, n+1)$

$\boxed{\text{Prb 2}}$ Să se arate că pentru orice mulțime A nu există funcții surjective $f : A \to \mathcal{P}(A)$

$\boxed{\text{Prb 3}}$ Să se arate că nu există funcții $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a.î. $|f(x) - f(y)| > 1$ $(\forall)\, x \neq y$.

$\boxed{\text{Dem Prb 2}}$ Pp red. abs. că $(\exists)\, f : A \to \mathcal{P}(A)$ o funcție surjectivă.

$a \mapsto f(a)$, $a \in A$, $f(a) \in \mathcal{P}(A)$

$f(a) \in \mathcal{P}(A) \Leftrightarrow f(a)$ este o submulțime a lui A

Considerăm submulțimea lui A:

$A \supseteq M = \{a \in A \mid a \notin f(a)\}$ (*)

$M \in \mathcal{P}(A)$

Din faptul că f e surjectivă și $M \in \mathcal{P}(A)$

$\Rightarrow (\exists)\, b \in A$ a.î. $f(b) = M$. (1)

$b \in A$:

1) $b \in M \overset{(1)}{=} f(b) \Rightarrow b \in f(b) \xRightarrow[(*)]{\text{def. } M} b \notin M$ ✗

2) $b \notin M \overset{(1)}{=} f(b) \Rightarrow b \notin f(b) \xRightarrow[(*)]{\text{def } M} b \in M$ ✗

Prin urmare, pp e falsă $\Rightarrow$ nu $\nexists$ fct. surj. $f : A \to \mathcal{P}(A)$. $\boxtimes$

<u>Comentariu</u> Cum $g : A \to \mathcal{P}(A)$ $g(a) = \{a\}$ $(\forall) a \in A$ este injectivă $\Rightarrow |A| \leq |\mathcal{P}(A)|$.

Din <u>prb 2</u> $\Rightarrow$ nu există funcții bijective $f : A \to \mathcal{P}(A)$ (pt. că nu există surjective) $\overset{def}{\Rightarrow}$ C3

$|A| < |\mathcal{P}(A)|$.

<u>Observație</u> $|\mathbb{N}| < |\mathcal{P}(\mathbb{N})| < |\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))| < \ldots$

$\underset{|\mathbb{R}|}{\parallel}$ ~~Tb.~~ dem!

(În particular, cum $\mathbb{R} \simeq \mathcal{P}(\mathbb{N})$, obținem o nouă dem, folosind Prb 2, a faptului că $\mathbb{R}$ nu e numărabilă)

<u>Prb 4</u> Găsiți imaginea funcției $f : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}$, $f(x,y) = x^2 - y^2$.

<u>Dem Prb 3</u> Pp. reducere la absurd că $(\exists)$ fct. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a.î. $|f(x) - f(y)| > 1$ $(\forall) x \neq y$

f e injectivă!

$|f(\mathbb{R})| = |\mathbb{R}| \overset{C4}{\Longrightarrow} f(\mathbb{R})$ e nenumărabilă. (1)

$\mathbb{R} = \bigcup [n, n+1]$ $(\forall) x \in \mathbb{R}$ <u>$x \in [[x], [x]+1]$</u>

$m \in \mathbb{Z}$

$$|f(x) - f(y)| > 1 \ (\forall) x \neq y \Rightarrow \underset{1}{\left| f(\mathbb{R}) \cap [m, m+1) \right| \ \leq} \quad (\forall) m \in \mathbb{Z}$$

(în orice interval $[m, m+1)$ găsesc cel mult o valoare a lui f)

$$f(\mathbb{R}) = f(\mathbb{R}) \cap \mathbb{R} = f(\mathbb{R}) \cap \left(\bigcup_{m \in \mathbb{Z}} [m, m+1) \right)$$

$$\begin{pmatrix} \cap \\ \mathbb{R} \end{pmatrix} \overset{\cap}{=} \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} \underbrace{\left(f(\mathbb{R}) \cap [m, m+1) \right)}_{\text{are cel mult 1 elem}} \Rightarrow \left(f(\mathbb{R}) \text{ e finită sau numărabilă } (*) \right)$$

(1)

$\Rightarrow P_p$ e falsă $\Rightarrow$ Nu $(\exists)$ funcții $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a.î. $|f(x) - f(y)| > 1 \ (\forall) x \neq y$.

$(*)$: Observăm că $f(\mathbb{R})$ ar fi în bijecție cu o submulțime a lui $\mathbb{Z}$, deci ar fi finită dacă e finită și ar fi numărabilă dacă e infinită.

Pb 5 Arătați că oricare 2 din următoarele mulțimi sunt echipotente:

$(-\infty;a]$; $[b,+\infty)$, $[c,d]$, $[c,d)$, $(c,d]$, (c,d), $(0,1)$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_+$, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}_+^*$. -(vezi C4 pt. anumite bijecții)

Sol Pb4 $f:\mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}$ $f(x,y)=x^2-y^2$

$\mathbb{Z}^2 = \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$

Calculați $\mathrm{Im} f$. $\mathrm{Im}(f)=\{k \mid k\in\mathbb{Z}$ a.î. $(\exists)x,y\in\mathbb{Z}$ $k=x^2-y^2\}$

x par $\Rightarrow x=2l, l\in\mathbb{Z}$ $x^2=(2l)^2=4l^2 \Rightarrow x^2$ dă restul 0 la împ cu 4

x impar $\Rightarrow x=2l+1, l\in\mathbb{Z}$ $x^2=(2l+1)^2=4l^2+4l+1=$

$=4l(l+1)+1 \Rightarrow$ x^2 dă restul 1 la împ. cu 4

Restul împ. lui x^2 la 4 poate fi 0 sau 1. $\Rightarrow$ $(x\in\mathbb{Z})$

$\Rightarrow$ Restul împ. lui x^2-y^2 la 4 poate fi 0, 1 sau 3 ($0/1 - 0/1 \rightsquigarrow 0-0, 0-1, 1-0, 1-1$)

$0-0=0$, $0-1=-1$, $1-0=1$, $1-1=0$

$\Downarrow$

$\mathrm{Im}(f)\subseteq\mathbb{Z}\setminus\{4k+2 \mid k\in\mathbb{Z}\}=\mathbb{Z}\setminus(4\mathbb{Z}+2)$. $(*)$

$k=5$ $x^2-y^2=5$ ec în $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$

$(x-y)(x+y)=5$

$\begin{cases} x-y=5 \\ x+y=1 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} x=3 \\ y=-2 \end{cases}$ ...

(I) k impar, i.e. $k \in (4\mathbb{Z}+1) \cup (4\mathbb{Z}+3)$

$$x^2-y^2=k$$
$$(x-y)(x+y)=k$$
$$\begin{cases} x-y=k \\ x+y=1 \end{cases}$$
$$x=\frac{k+1}{2} \in \mathbb{Z} \ (k \text{ impar})$$
$$y=\frac{1-k}{2} \in \mathbb{Z} \ (k \text{ impar})$$

Deci ec $x^2-y^2=k$, k impar, are soluție (de exemplu $x=\frac{k+1}{2}$, $y=\frac{1-k}{2}$)

(II) k par, $\underline{k \in 4\mathbb{Z}}$ $\quad k=4t$

$$x^2-y^2=k$$
$$(x-y)(x+y)=k$$
$$\begin{cases} x+y=\frac{k}{2} \\ x-y=2 \end{cases}$$
$$2x=\frac{k}{2}+2=2t \quad +2=2t+2$$
$$x=t+1$$
$$y=t-1$$

Prin urmare, pt $k \in 4\mathbb{Z}$ ec $x^2-y^2=k$ are soluție (de ex. $x=\frac{k}{4}+1$, $y=\frac{k}{4}-1$)

Din I și II + (*) $\Rightarrow \operatorname{Im}(f)=\mathbb{Z} \setminus (4\mathbb{Z}+2)$

Prbs

Bijecție între $\mathbb{R}$ și $\mathbb{R}_+^*$

$$\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}_+^* \qquad f(x) = e^x \ (\forall) x \in \mathbb{R}$$

$$\mathbb{R}_+^* \xrightarrow{g} \mathbb{R} \qquad \cancel{f}g(x) = \ln(x) \ (\forall) x \in \mathbb{R}$$
