Curs 18

Propoziție. Fie $A \subset \mathbb{R}^n$ mărginită. Atunci:

i) $\mu^*(A) \le \mu^*(\operatorname{Fr} A) + \mu_*(\mathring{A})$

ii) $\mu^*(\overline{A}) = \mu^*(A)$.

iii) $\mu_*(A) = \mu_*(\mathring{A})$.

Propoziție. Fie $A \subset \mathbb{R}^n$ mărginită. Sunt echivalente:

i) $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$.

ii) $\overline{A} \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$, $\mathring{A} \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ și $\mu(\overline{A}) = \mu(\mathring{A})$.

iii) $\operatorname{Fr} A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ și $\mu(\operatorname{Fr} A) = 0$.

Propoziție. 1) Fie $A \subset \mathbb{R}^p$ și $B \subset \mathbb{R}^q$ două mulțimi mărginite. Atunci $A \times B \subset \mathbb{R}^{p+q}$ este mărginită și

$$\mu^*(A\times B) \le \mu^*(A)\cdot\mu^*(B) \text{ și } \mu_*(A\times B) \ge \mu_*(A)\cdot\mu_*(B).$$

2) Fie $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^p)$ și $B \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^q)$. Atunci $A \times B \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^{p+q})$ și $\mu(A\times B) = \mu(A)\cdot\mu(B)$.

Exemple de mulțimi măsurabile/nemăsurabile Jordan

1. $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y=1\}$ nu este măsurabilă Jordan.

Justificare. A nu este mărginită $\Rightarrow A \notin \mathcal{J}(\mathbb{R}^2)$. $\square$

2. $A = [0,1] \cap \mathbb{Q}$ nu este măsurabilă Jordan.

Justificare. $\bar{A} = \overline{[0,1] \cap \mathbb{Q}} = [0,1] \Rightarrow \mu^*(A) =$
$= \mu^*(\bar{A}) = \mu^*([0,1]) = \mu([0,1]) = \mu([0,1)) = 1-0 = 1.$

$\mathring{A} = \phi \Rightarrow \mu_*(A) = \mu_*(\mathring{A}) = \mu_*(\phi) = \mu(\phi) = 0.$

$\mu_*(A) \neq \mu^*(A) \Rightarrow A \notin \mathcal{J}(\mathbb{R})$. $\square$

3. $A = \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}\} \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^2)$.

Justificare. $A \subset [0,1] \times \{0\} = \{(x,0) \mid x \in [0,1]\} \Rightarrow$
$\Rightarrow \mu^*(A) \leq \mu^*([0,1] \times \{0\}) = \mu([0,1] \times \{0\}) = (1-0) \cdot 0 = 0.$

Avem $0 \leq \mu_*(A) \leq \mu^*(A) = 0$, i.e. $\mu_*(A) = \mu^*(A) = 0$,
i.e. $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^2)$. $\square$

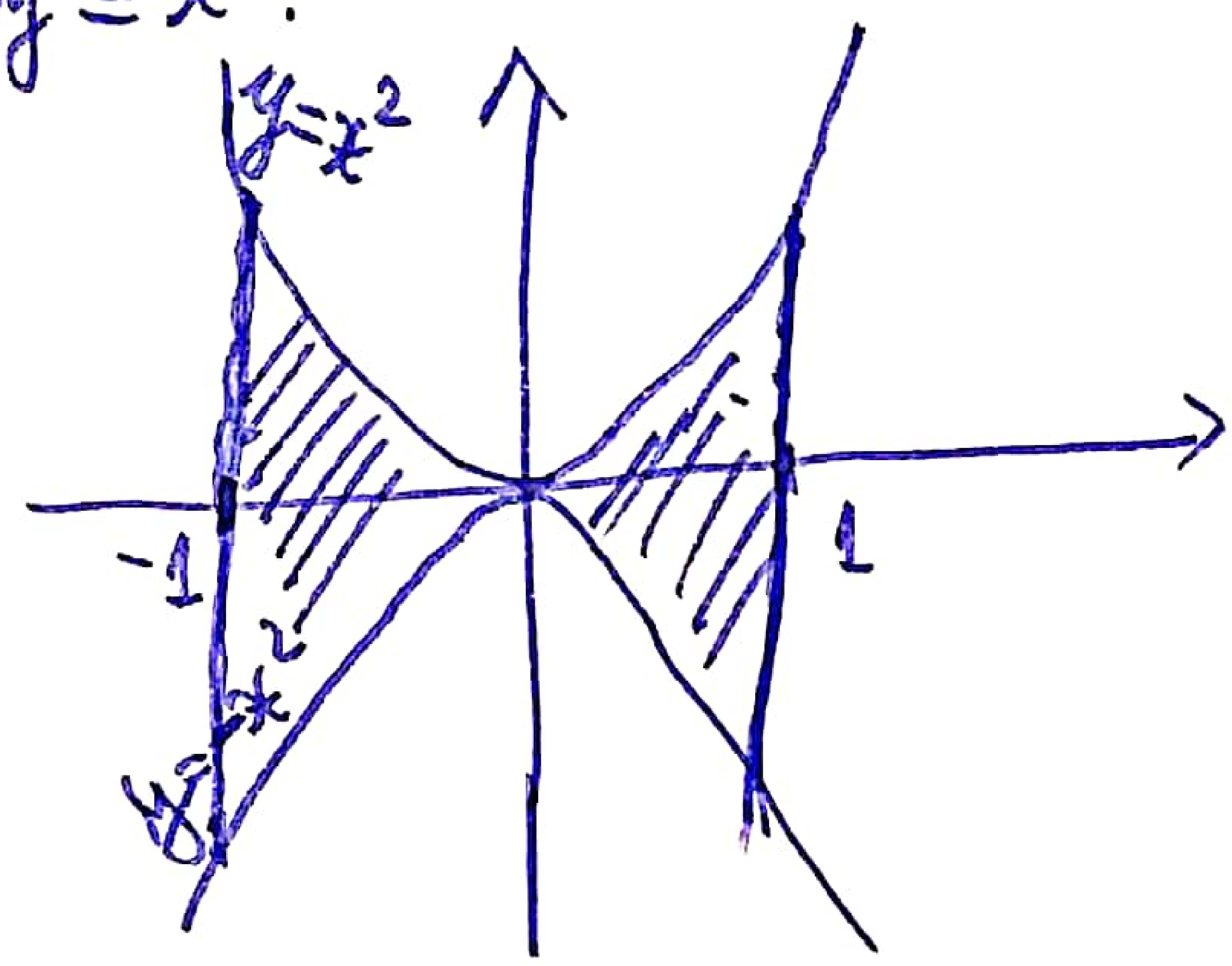
Propoziție. 1) Dacă $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ sunt integrabile Riemann și $f(x) \leq g(x)$ $\forall x \in [a,b]$, atunci mulțimea $I'_{f,g} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a,b],\ f(x) \leq y \leq g(x)\} \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^2)$ și $\mu(I'_{f,g}) = \int_a^b (g(x) - f(x))\, dx$.

2) Dacă $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ este integrabilă Riemann, atunci $G_f=\{(x,f(x))\mid x\in[a,b]\}\in\mathcal{J}(\mathbb{R}^2)$ și $\mu(G_f)=0$.

Exercițiu. Fie $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid |x|\le 1,\ |y|\le x^2\}$. Arătați că $A\in\mathcal{J}(\mathbb{R}^2)$ și calculați $\mu(A)$.

Soluție. $|x|\le 1 \Leftrightarrow -1\le x\le 1$.

$|y|\le x^2 \Leftrightarrow -x^2\le y\le x^2$.



Avem $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x\in[-1,1],\ -x^2\le y\le x^2\}$.

Fie $f,g:[-1,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=-x^2$, $g(x)=x^2$.

f,g integrabile Riemann și $f(x)\le g(x)\ \forall x\in[-1,1]$.

Rezultă că $A\in\mathcal{J}(\mathbb{R}^2)$ și $\mu(A)=\int_{-1}^{1}(g(x)-f(x))\,dx=$

$$=\int_{-1}^{1}(x^2+x^2)\,dx=2\,\frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{1}=2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)=\frac{4}{3}.\ \square$$

<u>Definiție</u>. Fie $X \neq \phi$, $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$, $\mathcal{A} \neq \phi$ și $\lambda : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}_+ = [0, \infty]$. Tripletul $(X, \mathcal{A}, \lambda)$ se numește spațiu cu măsură aditivă dacă:

1) $\forall A, B \in \mathcal{A}$ avem $A \cup B \in \mathcal{A}$ și $A \setminus B \in \mathcal{A}$ (va rezulta că $A \cap B \in \mathcal{A}$).

2) $\forall A, B \in \mathcal{A}$ a.î. $A \cap B = \phi$, avem $\lambda(A \cup B) = \lambda(A) + \lambda(B)$.

<u>Observație</u>. $(\mathbb{R}^n, \mathcal{E}(\mathbb{R}^n), vol)$ și $(\mathbb{R}^n, \mathcal{J}(\mathbb{R}^n), \mu)$ sunt spații cu măsură aditivă și $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$.

<u>Definiție</u>. Fie $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$. O familie finită $\mathcal{A} = (A_i)_{i=\overline{1,m}} \subset \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ se numește descompunere Jordan a lui A dacă:

1) $\bigcup\limits_{i=1}^{m} A_i = A$.

2) $\mu(A_i \cap A_j) = 0$ $\forall i, j \in \{1, \dots, m\}$, $i \neq j$.

Fie $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ și $\mathcal{A} = (A_i)_{i=\overline{1,m}}$ o descompunere Jordan a lui A.

<u>Definiție</u>. 1) $\|\mathcal{A}\| \overset{def}{=} \max\limits_{i \in \{1,\dots,m\}} diam(A_i)$, (norma descompunerii $\mathcal{A}$)

unde $diam(A_i) = \sup\{d(x,y) \mid x, y \in A_i\}$.

2) O familie $(\alpha_i)_{i=\overline{1,m}} \subset A$ se numește familie de puncte intermediare asociată descompunerii $\mathcal{A}$ dacă $\alpha_i \in A_i \ \forall\, i = \overline{1,m}$.

<u>Observații</u>. 1) Pentru orice $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ și orice $\varepsilon > 0$, există $\mathcal{A}$ o descompunere Jordan a lui A a.î. $\|\mathcal{A}\| < \varepsilon$.

2) Dacă $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ și $\mathcal{A} = (A_i)_{i=\overline{1,m}}$ este o descompunere Jordan a lui A, atunci $\mu(A) = \sum\limits_{i=1}^{m} \mu(A_i)$.

<u>Exemplu</u>. Fie $A = [a,b]$, $a < b$ și $\Delta: a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = b$ o diviziune a intervalului $[a,b]$. Familia $\mathcal{A} = ([x_{i-1}, x_i])_{i=\overline{1,m}}$ este o descompunere Jordan

a lui A.

<u>Definiție.</u> Fie $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$, $f: A \to \mathbb{R}$ o funcție mărginită, $\mathcal{A} = (A_i)_{i=\overline{1,m}}$ o descompunere Jordan a lui A și $(\alpha_i)_{i=\overline{1,m}}$ o familie de puncte intermediare asociată descompunerii $\mathcal{A}$. Suma $\sum_{i=1}^{m} f(\alpha_i)\mu(A_i)$ se numește suma Riemann asociată funcției f, descompunerii Jordan $\mathcal{A}$ și familiei de puncte intermediare $(\alpha_i)_{i=\overline{1,m}}$ și se notează $\sigma_{\mathcal{A}}(f, (\alpha_i)_{i=\overline{1,m}})$.

<u>Definiție.</u> Fie $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ și $f: A \to \mathbb{R}$ o funcție mărginită. Spunem că f este integrabilă Riemann dacă există $I \in \mathbb{R}$ a.î. $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta_\varepsilon > 0$ cu proprietatea că pentru orice descompunere Jordan $\mathcal{A}$ a lui A, $\|\mathcal{A}\| < \delta_\varepsilon$ și pentru orice familie de puncte intermediare $(\alpha_i)_{i=\overline{1,m}}$ asociată lui $\mathcal{A}$, avem $\left|\sigma_{\mathcal{A}}(f, (\alpha_i)_{i=\overline{1,m}}) - I\right| < \varepsilon$.

Observație. Numărul real I din definiția de mai sus, dacă există, este unic.

Notație. $I \overset{not.}{=} \int_A f(x_1, \dots, x_n)\, dx_1\, dx_2 \dots dx_n$.

Notații. 1) Dacă $n=2$, $I \overset{not.}{=} \iint_A f(x, y)\, dx\, dy$.

2) Dacă $n=3$, $I \overset{not.}{=} \iiint_A f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$.

Observație. În contextul de mai sus,

$$\int_A f(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \dots dx_n = \lim_{\|\mathcal{A}\| \to 0} \sigma_{\mathcal{A}}\left(f, (\alpha_i)_{i=\overline{1,m}}\right).$$

Exercițiu. Fie $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ a.î. $\mu(A) = 0$ și $f : A \to \mathbb{R}$ o funcție mărginită. Arătați că $\int_A f(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \dots dx_n = 0$.

Soluție. Fie $\mathcal{A} = (A_i)_{i=\overline{1,m}}$ o descompunere Jordan a lui A. Avem $\mu(A_i) = 0 \ \forall i = \overline{1,m}$. Fie $(\alpha_i)_{i=\overline{1,m}}$ o familie de puncte intermediare asociată descompunerii $\mathcal{A}$.

$$\sigma_{\mathcal{A}}\left(f, (\alpha_i)_{i=\overline{1,m}}\right) = \sum_{i=1}^{m} f(\alpha_i)\mu(A_i) = \sum_{i=1}^{m} f(\alpha_i) \cdot 0 =$$

$= 0.$

Deci $\int_A f(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \dots dx_n = \lim\limits_{\|\mathcal{A}\| \to 0} \sigma_{\mathcal{A}}(f, (\alpha_i)_{i=\overline{1,m}})$

$= 0.$ □

Exercițiu. Fie $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ și $f : A \to \mathbb{R}$ o funcție constantă $f \equiv a \in \mathbb{R}$. Arătați că $\int_A f(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \dots dx_n =$
$= a\mu(A)$.

Soluție. Fie $\underset{(A_i)_{i=\overline{1,m}}}{\underset{\parallel}{\mathcal{A}}}$ o descompunere Jordan a lui A.

$$\sigma_{\mathcal{A}}(f, (\alpha_i)_{i=\overline{1,m}}) = \sum_{i=1}^{m} f(\alpha_i)\mu(A_i) = \sum_{i=1}^{m} a\mu(A_i) =$$

$$= a\sum_{i=1}^{m} \mu(A_i) = a\mu(A).$$

Deci $\int_A f(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \dots dx_n = \lim\limits_{\|\mathcal{A}\| \to 0} \sigma_{\mathcal{A}}(f, (\alpha_i)_{i=\overline{1,m}}) =$

$= a\mu(A).$ □

Propoziție. Fie $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ și $f : A \to \mathbb{R}$.

1. Dacă f este continuă și mărginită, atunci f este integrabilă Riemann.

2. Dacă A este compactă și f este continuă, atunci f este integrabilă Riemann.

<u>Propoziție.</u> Fie $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$, $a \in \mathbb{R}$ și $f, g : A \to \mathbb{R}$ a.î. f și g sunt funcții integrabile Riemann. Atunci $f+g$ și af sunt integrabile Riemann și

$$\int_A (f+g)(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \dots dx_n = \int_A f(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \dots dx_n + \int_A g(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \dots dx_n$$

și $\int_A (af)(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \dots dx_n = a \int_A f(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \dots dx_n$.

Dacă $f \leq g$, atunci $\int_A f(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \dots dx_n \leq$
$\leq \int_A g(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \dots dx_n$.

<u>Propoziție.</u> Fie $A, B \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ a.î. $\mu(A \cap B) = 0$ și $f : A \cup B \to \mathbb{R}$ o funcție mărginită. Sunt echivalente:

1) f este integrabilă Riemann pe A și pe B (i.e. $f|_A$ și $f|_B$ sunt integrabile Riemann).

2) f este integrabilă Riemann (pe $A\cup B$).

Observație. Dacă 1) sau 2) din propoziția precedentă e adevărată, atunci $\int_{A\cup B} f(x)\,dx = \int_A f(x)\,dx + \int_B f(x)\,dx$.

Teoremă (Teorema lui Fubini)

Fie $B\subset\mathbb{R}^n$ o mulțime compactă și măsurabilă Jordan și două funcții continue $\alpha,\beta: B\to\mathbb{R}$, $\alpha(x)\le\beta(x)\ \forall\ x\in B$.

Fie $A=\{(x_1,\dots,x_{n+1})\in\mathbb{R}^{n+1} \mid (x_1,\dots,\hat{x}_j,\dots,x_{n+1})\in B$ și $\alpha((x_1,\dots,\hat{x}_j,\dots,x_{n+1}))\le x_j\le\beta((x_1,\dots,\hat{x}_j,\dots,x_{n+1}))\}$, unde $(x_1,\dots,\hat{x}_j,\dots,x_{n+1}) = (x_1,\dots,x_{j-1},x_{j+1},\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ și $f:A\to\mathbb{R}$ o funcție continuă.

Atunci A este mulțime compactă și măsurabilă Jordan și $\int_A f(x_1,\dots,x_{n+1})\,dx_1\dots dx_{n+1} =$

$$=\int_B\left(\int_{\alpha(x_1,\dots,\hat{x}_j,\dots,x_{n+1})}^{\beta(x_1,\dots,\hat{x}_j,\dots,x_{n+1})} f(x_1,\dots,x_{n+1})\,dx_j\right)dx_1\dots dx_{j-1}\,dx_{j+1}\dots dx_{n+1}.$$

Cazuri particulare ale teoremei precedente

1. Integrala dublă

i) Dacă $A=[a,b]\times[c,d]$ și $f:A\to\mathbb{R}$ este o funcție continuă, atunci A este mulțime compactă și măsurabilă Jordan și $\iint_A f(x,y)\,dx\,dy=\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx=$

$$=\int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right)dy.$$

ii) Dacă $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\in[a,b],\ \alpha(x)\le y\le\beta(x)\}$, unde $\alpha,\beta:[a,b]\to\mathbb{R}$ sunt funcții continue și $f:A\to\mathbb{R}$ este o funcție continuă, atunci A este mulțime compactă și măsurabilă Jordan și $\iint_A f(x,y)\,dx\,dy=$

$$=\int_a^b\left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,dy\right)dx.$$

iii) Dacă $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y\in[c,d],\ \varphi(y)\le x\le\psi(y)\}$, unde $\varphi,\psi:[c,d]\to\mathbb{R}$ sunt funcții continue și $f:A\to\mathbb{R}$ este o funcție continuă, atunci A este mulțime compactă și măsurabilă Jordan și $\iint_A f(x,y)\,dx\,dy =$

$$= \int_c^d \left(\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\,dx \right) dy.$$

2. Integrala triplă

i) Dacă $A = [a,b] \times [c,d] \times [k,p]$ și $f : A \to \mathbb{R}$ este o funcție continuă, atunci A este mulțime compactă și măsurabilă Jordan și

$$\iiint_A f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_a^b \left(\int_c^d \left(\int_k^p f(x,y,z)\,dz \right) dy \right) dx =$$

$$= \int_a^b \left(\int_k^p \left(\int_c^d f(x,y,z)\,dy \right) dz \right) dx = \ldots$$

ii) Dacă $B \subset \mathbb{R}^2$ este o mulțime compactă și măsurabilă Jordan și $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in B,\ \varphi(x,y) \le z \le \psi(x,y)\}$, unde $\varphi, \psi : B \to \mathbb{R}$ sunt funcții continue și $f : A \to \mathbb{R}$ este o funcție continuă, atunci A este mulțime compactă și măsurabilă Jordan și $\iiint_A f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz =$

$$= \iint_B \left(\int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x,y,z)\,dz \right) dx\,dy.$$

etc.

<u>Exercițiu</u>. Determinați:

a) $\iint_A (2x+y)\,dx\,dy$, unde $A=[0,1]\times[0,2]$.

<u>Soluție</u>. $A=[0,1]\times[0,2] \Rightarrow A$ compactă și $A\in J(\mathbb{R}^2)$.

Fie $f: A\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=2x+y$.
f continuă.

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \iint_A (2x+y)\,dx\,dy =$$

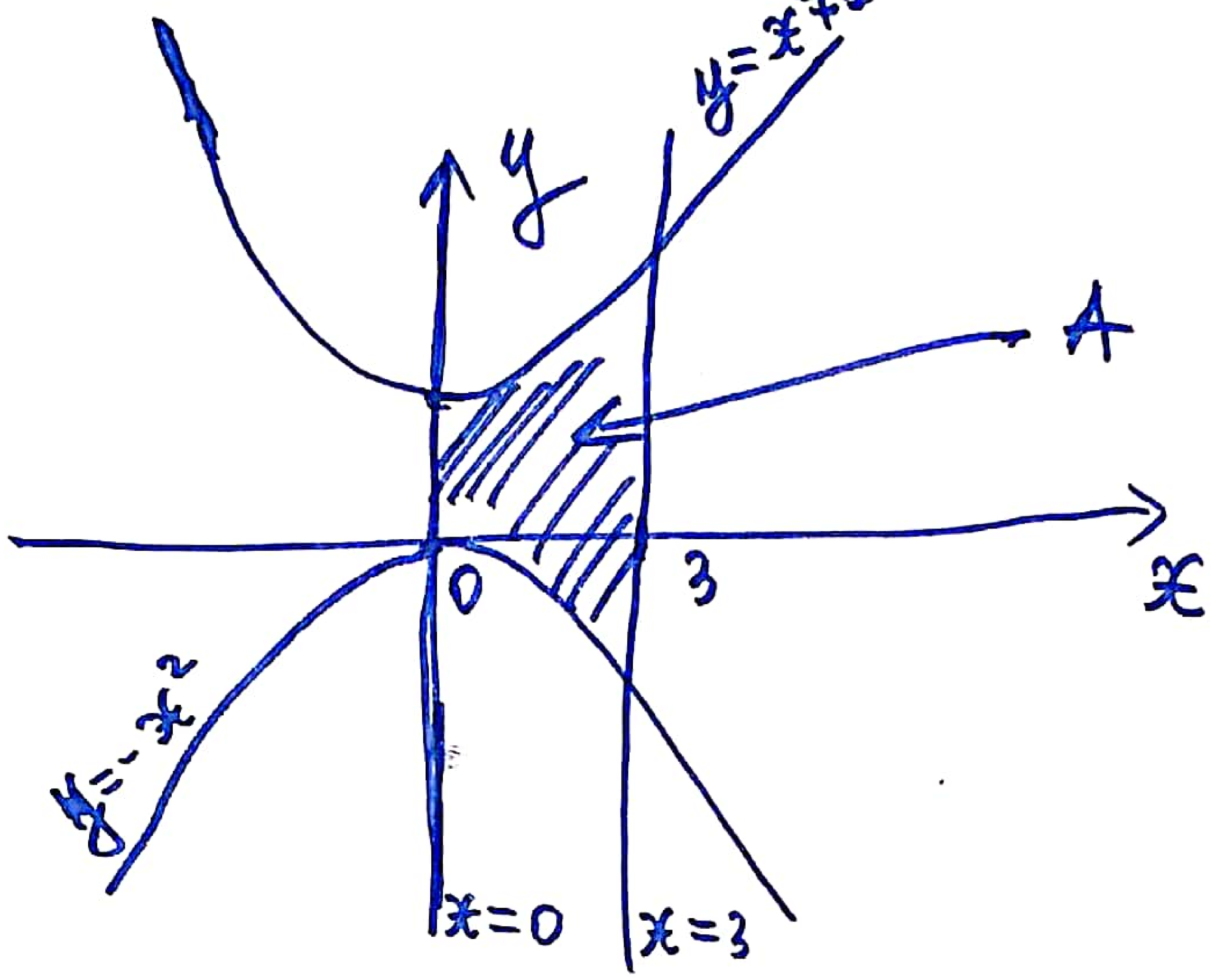
$$= \int_0^1 \left(\int_0^2 (2x+y)\,dy \right) dx = \int_0^1 \left(2xy + \frac{y^2}{2} \right) \Bigg|_{y=0}^{y=2} dx =$$

$$= \int_0^1 \left[2x(2-0) + \frac{1}{2}(4-0) \right] dx = \int_0^1 (4x+2)\,dx =$$

$$= \overset{2}{\cancel{4}} \frac{x^2}{\cancel{2}} \Bigg|_{x=0}^{x=1} + 2x \Bigg|_{x=0}^{x=1} = 2+2=4. \quad \square$$

b) $\iint_A (3x+y)\,dx\,dy$, unde A este mulțimea plană mărginită de $y=x^2+1$, $y=-x^2$, $x=0$ și $x=3$.

Soluție.



$A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\in[0,3],\ -x^2\le y\le x^2+1\}$.

Fie $\alpha,\beta:[0,3]\to\mathbb{R}$, $\alpha(x)=-x^2$, $\beta(x)=x^2+1$.

α,β continue

A compactă și $A\in\mathcal{J}(\mathbb{R}^2)$.

Fie $f:A\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=3x+y$.

f continuă

$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy=\iint_A (3x+y)\,dx\,dy=$

$$= \int_0^3 \left(\int_{-x^2}^{x^2+1} (3x+y)\,dy \right) dx = \int_0^3 \left(3xy + \frac{y^2}{2} \right) \Bigg|_{y=-x^2}^{y=x^2+1} dx =$$

$$= \int_0^3 \left\{ 3x\left(x^2+1+x^2\right) + \frac{1}{2}\left[(x^2+1)^2 - (-x^2)^2 \right] \right\} dx =$$

$$= \int_0^3 \left[6x^3 + 3x + \frac{1}{2}\left(\cancel{x^4} + 2x^2 + 1 - \cancel{x^4} \right) \right] dx =$$

$$= \int_0^3 \left(6x^3 + x^2 + 3x + \frac{1}{2} \right) dx = \overset{3}{\cancel{6}}\, \frac{x^4}{\underset{2}{\cancel{4}}} \Bigg|_{x=0}^{x=3} + \frac{x^3}{3} \Bigg|_{x=0}^{x=3} +$$

$$+ 3\,\frac{x^2}{2} \Bigg|_{x=0}^{x=3} + \frac{1}{2}x \Bigg|_{x=0}^{x=3} = \frac{3}{2}(81-0) + \frac{1}{3}(27-0) +$$

$$+ \frac{3}{2}(9-0) + \frac{1}{2}(3-0) = \frac{243}{2} + 9 + \frac{27}{2} + \frac{3}{2} = \frac{273}{2} + 9 =$$

$$= \frac{273+18}{2} = \frac{291}{2}. \ \square$$

c) $\iiint_A x\,dx\,dy\,dz$, unde $A = [0,1] \times [1,2] \times [2,3]$.

<u>Soluție.</u> $A = [0,1] \times [1,2] \times [2,3] \Rightarrow A$ compactă și $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^3)$.

Fie $f : A \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = x$.

f continuă.

$$\iiint_A f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_A x\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \int_0^1 \left(\int_1^2 \left(\int_2^3 x\,dz \right) dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_1^2 x z \Big|_{z=2}^{z=3} dy \right) dx =$$

$$= \int_0^1 \left(\int_1^2 x(3-2)\,dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_1^2 x\,dy \right) dz =$$

$$= \int_0^1 x y \Big|_{y=1}^{y=2} dx = \int_0^1 x(2-1)\,dx = \int_0^1 x\,dx = \frac{x^2}{2} \Big|_{x=0}^{x=1} =$$

$$= \frac{1}{2}. \ \square$$