MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI ÎNVĂȚĂMÎNTULUI

Constantin Udriște **Constantin Radu** **Constantina Dicu**
Odetta Mălăncioiu

PROBLEME DE ALGEBRĂ, GEOMETRIE ȘI ECUAȚII DIFERENȚIALE

EDITURA DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ
BUCUREȘTI 1981

Referent științific: Prof: dr. doc. **Radu Miron**

Redactor: **Iliescu Gabriela**
Tehnoredactor: **Velcovici Constantina**

PREFAȚĂ

Această carte se adresează studenților de la institutele de învățămînt superior tehnic, în special celor de la profilul mecanic, și cadrelor didactice de specialitate. De asemenea ea mai poate fi folosită și de către studenții și cadrele didactice de la alte forme de învățămînt superior, materialul conținînd următoarele capitole de matematici: algebră liniară și geometrie analitică, geometrie analitică în spațiul cu trei dimensiuni, geometrie diferențială și ecuații diferențiale.

Lucrarea are la bază cărțile [63], [58], [59], [51] pe care le completează substanțial prin idei noi sugerate de întreaga bibliografie și de problemele lucrate cu studenții.

Față de culegerile de probleme de profil apropiat, prezenta se deosebește prin probleme originale elaborate de autori în cadrul activității din Institutul politehnic București, prin modul de îmbinare a noțiunilor de algebră, geometrie și analiză potrivit actualei programe analitice precum și prin finalizarea soluțiilor unor probleme numerice cu scheme logice și programe FORTRAN. Testele făcute cu studenții din Institutul politehnic București și discuțiile metodice purtate în cadrul colectivului Catedrei matematici I au arătat că această manieră de prezentare este impusă de nevoile actuale și de perspectivă ale învățămîntului superior tehnic.

Mulțumim profesorului dr. docent Radu Miron de la Universitatea din Iași și profesorului dr. Valter Olariu de la Institutul politehnic București pentru observațiile deosebit de utile făcute asupra manuscrisului.

august 1981 Autorii

CUPRINS

CAPITOLUL 1

ALGEBRĂ LINIARĂ ȘI GEOMETRIE ANALITICĂ

§ 1. MATRICE ȘI DETERMINANȚI

1.1. Fie $\mathbf{I}_{m,n} = \{(i, j) \mid i = 1, 2, ..., m;\ j = 1, 2, ..., n\}$. Orice funcție $\mathbf{A}$ definită pe $\mathbf{I}_{m,n}$ se numește *matrice* de tip $m \times n$. Valorile $\mathbf{A}(i, j) = a_{ij}$ se numesc *elementele matricei* și ele sînt dispuse într-un tabel dreptunghiular cu m linii și n coloane

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2n} \\ \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} \ldots a_{mn} \end{bmatrix}.$$

O matrice de tipul $m \times n$ se mai numește și *matrice dreptunghiulară* și prescurtat se notează prin $\mathbf{A} = [a_{ij}]$.

O matrice de tipul $m \times 1$ se numește *matrice (vector) coloană*, iar o matrice de tipul $1 \times n$ se numește *matrice (vector) linie*. Dacă $m = n$, atunci matricea $\mathbf{A}$ se numește *matrice pătratică*, iar n se numește *ordinul matricei*.

1.2. Matricea care se obține din $\mathbf{A}$ prin schimbarea liniilor în coloane (sau a coloanelor în linii) se numește *matricea transpusă* a lui $\mathbf{A}$ și se notează cu ${}^t\mathbf{A}$.

1.3. Fie $\boldsymbol{K}$ unul dintre cîmpurile $\boldsymbol{R}$ sau $\boldsymbol{C}$, iar $\mathcal{M}_{m\times n}(\boldsymbol{K})$ mulțimea matricelor de tipul $m \times n$ cu elemente din $\boldsymbol{K}$. *Adunarea matricelor* și respectiv *înmulțirea cu scalari* se definesc astfel: dacă $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ și $\mathbf{B} = [b_{ij}]$ aparțin lui $\mathcal{M}_{m\times n}(\boldsymbol{K})$, atunci $\mathbf{A} + \mathbf{B} = [a_{ij} + b_{ij}]$ și respectiv $k\mathbf{A} = [ka_{ij}]$, $k \in \boldsymbol{K}$.

Adunarea matricelor are proprietățile

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$$

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})$$

$$\mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{A}$$

$$\mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = \mathbf{0},$$

unde $\mathbf{0}$ este *matricea zero*, iar „$-\mathbf{A}$" este *matricea opusă* lui $\mathbf{A}$.

Produsul dintre un scalar și o matrice are proprietățile

$$1\mathbf{A} = \mathbf{A}$$

$$(kl)\mathbf{A} = k(l\mathbf{A})$$

$$(k + l)\mathbf{A} = k\mathbf{A} + l\mathbf{A}$$

$$k(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = k\mathbf{A} + k\mathbf{B}$$

Precizare. În cele ce urmează matricele au elemente din $\boldsymbol{K}$.

1.4. Dacă $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ este o matrice de tipul $m \times n$, iar $\mathbf{B} = [b_{jk}]$ este o matrice de tipul $n \times p$, atunci prin *produsul* celor două matrice se înțelege matricea

$$\mathbf{AB} = \left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}\right]$$

de tipul $m \times p$. Înmulțirea matricelor are proprietățile

$$(\mathbf{AB})\,\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$$

$$(\mathbf{B} + \mathbf{C})\,\mathbf{D} = \mathbf{BD} + \mathbf{CD}$$

Matricele $\mathbf{X}$ și $\mathbf{Y}$ cu proprietatea $\mathbf{XY} = \mathbf{YX}$ vor fi numite *matrice comutabile*.

1.5. O matrice pătratică $\mathbf{A}$ pentru care $\mathbf{A} = {}^t\mathbf{A}(\mathbf{A} = -{}^t\mathbf{A})$ se numește *simetrică (antisimetrică)*. Orice matrice pătratică poate fi scrisă în mod unic ca suma dintre o matrice simetrică și o matrice antisimetrică.

1.6. O matrice pătratică $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ care are proprietățile $a_{ij} = 0$, $i \neq j$ și $\exists l$ așa ca $a_{ll} \neq 0$ se numește *matrice diagonală*. O matrice diagonală în care $a_{ll} = 1$, $l = 1, 2, ..., n$, se numește *matrice unitate* și se notează cu $\mathbf{I}$. Avem $\mathbf{IA} = \mathbf{AI} = \mathbf{A}$.

1.7. O matrice pătratică care satisface condiția ${}^t\mathbf{AA} = \mathbf{I}$ se numește *matrice ortogonală*.

1.8. Dacă $\mathbf{A}$ este o matrice pătratică, atunci puterile naturale ale lui $\mathbf{A}$ se definesc inductiv:

$$\mathbf{A}^{\circ} = \mathbf{I}, \quad \mathbf{A}^n = \mathbf{AA}^{n-1} \quad \text{pentru } n = 1, 2, \ldots$$

1.9. Fie mulțimea $J_n = \{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\}$. O aplicație bijectivă $\sigma: J_n \to J_n$ se numește *permutare* a mulțimii J_n și se notează prin

$$\sigma = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \ldots \alpha_n \\ \sigma(\alpha_1) & \sigma(\alpha_2) \ldots \sigma(\alpha_n) \end{pmatrix}$$

Signatura unei permutări σ se definește prin

$$\varepsilon_\sigma = \begin{cases} +\,1, & \text{dacă } \sigma \text{ este o permutare pară} \\ -\,1, & \text{dacă } \sigma \text{ este o permutare impară.} \end{cases}$$

1.10. *Simbolul lui Kronecker*,

$$\delta^i_j = \begin{cases} 1, & \text{dacă } i = j \\ 0, & \text{dacă } i \neq j. \end{cases}$$

1.11. Presupunem că indicii $i_1, i_2, ..., i_n$ și $j_1, j_2, ..., j_n$ iau valori din mulțimea $\{1, 2, ..., m$, unde $m \geqslant n\}$. Definim *simbolul lui Kronecker generalizat*:

$$\delta^{i_1 i_2 \ldots i_n}_{j_1 j_2 \ldots j_n} = \begin{cases} 0, & \text{dacă întregii } (i_1, i_2, ..., i_n) \text{ sau } (j_1, j_2, ..., j_n) \text{ nu sînt distincți,} \\ 0, & \text{dacă întregii } (i_1, i_2, ..., i_n) \text{ și } (j_1, j_2, ..., j_n) \text{ sînt distincți dar} \\ & \text{mulțimile } \{i_1, i_2, ..., i_n\} \text{ și } \{j_1, j_2, ..., j_n\} \text{ nu sînt egale} \\ \varepsilon_\sigma, & \text{dacă întregii } (i_1, i_2, ..., i_n) \text{ și } (j_1, j_2, ..., j_n) \text{ sînt distincți, iar} \\ & \text{mulțimile } \{i_1, i_2, ..., i_n\} \text{ și } \{j_1, j_2, ..., j_n\} \text{ sînt egale, unde} \\ & \sigma = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 \ldots i_n \\ j_1 & j_2 \ldots j_n \end{pmatrix} \end{cases}$$

1.12. Cu ajutorul simbolului lui Kronecker generalizat se definești simbolul ε:

$$\varepsilon^{i_1 i_2 \dots i_n} = \delta^{i_1 i_2 \dots i_n}_{1\,2 \dots n}, \quad \varepsilon_{j_1 j_2 \dots j_n} = \delta^{1\,2 \dots n}_{j_1 j_2 \dots j_n},$$

și se constată că

$$\varepsilon^{i_1 i_2 \dots i_n} \varepsilon_{j_1 j_2 \dots j_n} = \delta^{i_1 i_2 \dots i_n}_{j_1 j_2 \dots j_n}.$$

1.13. Fie $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ o matrice pătratică cu elemente din cîmpul **K** (numere reale sau complexe). Elementul din $\boldsymbol{K}$ definit prin

$$\det \mathbf{A} = \sum_{j_1, j_2, \dots j_n = 1}^{n} \varepsilon^{j_1 j_2 \dots j_n} a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n}$$

se numește *determinantul matricei* **A** și tradițional se notează prin $|a_{ij}|$ sau

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nn} \end{vmatrix}$$

Vectorii $[a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}]$, $i = 1, 2, \dots, n$, poartă numele de *liniile determinantului*, iar vectorii ${}^t[a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{nj}]$ $j = 1, 2, \dots, n$, poartă numele de *coloanele determinantului.*

Numărul n se numește *ordinul determinantului.*

1.14. Dacă **A** este o matrice pătratică și ${}^t\mathbf{A}$ este transpusa sa, atunci $\det \mathbf{A} = \det {}^t\mathbf{A}$. De aceea orice proprietate referitoare la liniile unui determinant este adevărată și pentru coloane.

1.15. (1) Dacă elementele unei linii (coloane) sînt respectiv sume de cîte doi termeni, atunci determinantul se descompune într-o sumă de doi determinanți.

(2) Dacă elementele unei linii (coloane) se multiplică cu $t \in \boldsymbol{K}$, atunci determinantul se multiplică cu t. În general $\det ({}^t\mathbf{A}) = t^n \det \mathbf{A}$, unde n este ordinul lui **A** și $t \in \boldsymbol{K}$.

(3) Dacă într-un determinant se schimbă două linii (coloane) între ele, atunci se schimbă și semnul determinantului.

Consecințe: (i) Un determinant este nul dacă: are două linii (coloane) egale sau are două linii (coloane) proporționale sau una din linii (coloane) este o combinație liniară de alte linii (coloane). (ii) Valoarea unui determinant nu se schimbă dacă: schimbăm liniile în coloane de același ordin sau la elementele unei linii (coloane) adăugăm combinații liniare formate cu elementele din celelalte linii (coloane).

1.16. *(Dezvoltările lui Laplace).* Fie determinantul $|a_{ij}|$ de ordinul n atașat matricei $\mathbf{A} = [a_{ij}]$.

Determinantul de ordinul $n - 1$ care se obține suprimînd linia i și coloana j din $|a_{ij}|$ se numește *minorul elementului* a_{ij} și se notează cu *minor* a_{ij}. Numărul $cof\, a_{ij} = (-1)^{i+j}$ *minor* a_{ij} se numește *complementul algebric sau cofactorul elementului* a_{ij}.

Avem

$$\sum_{l=1}^{n} a_{pl}\, cof\, a_{ql} = \delta_{pq} \det \mathbf{A}, \quad \sum_{k=1}^{n} a_{kp}\, cof\, a_{kq} = \delta_{pq} \det \mathbf{A}.$$

1.17. Matricele pătratice **A** pentru care $\det \mathbf{A} \neq 0$ ($\det \mathbf{A} = 0$) se numesc *matrici nesingulare (singulare).*

1.18. Fie **A** o matrice pătratică. Matricea $\mathbf{A}^{-1}$ care satisface condițiile $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$ se numește *matrice inversă* lui **A**.

O matrice pătratică **A** posedă o inversă dacă și numai dacă $\det \mathbf{A} \neq 0$. Această matrice inversă se poate determina astfel: se calculează $\det \mathbf{A} \neq 0$; se face matricea transpusă, ${}^t\mathbf{A}$, și matricea reciprocă $\mathbf{A}^+$ (= matricea ale cărei elemente sînt cofactorii elementelor lui ${}^t\mathbf{A}$); $\mathbf{A}^{-1} = \dfrac{1}{\det \mathbf{A}} \mathbf{A}^+$.

Matricea inversă unei matrice are proprietățile:

$$({}^t\mathbf{A})^{-1} = {}^t(\mathbf{A}^{-1}),\ (\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A},$$

$$(k\mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{k} \mathbf{A}^{-1}, \text{ unde } k \in \boldsymbol{K} - \{0\},$$

$$(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}.$$

Cu ajutorul matricei inverse se definesc puterile întregi, negative, ale unei matrice nesingulare:

$$\mathbf{A}^{-n} = (\mathbf{A}^{-1})^n, \quad n = 1, 2, \dots$$

1.19. Fie $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ o matrice de tipul $m \times n$ și p un număr natural $\leqslant \min\{m, n\}$. Prin suprimarea în matricea **A** a $(m - p)$ linii și $(n - p)$ coloane, se obține o matrice pătratică de ordinul p al cărui determinant se numește minor de ordinul p al matricei **A**.

Dacă matricea **A** posedă un minor nenul de ordinul p, iar toți minorii de ordinul $p + 1$ sînt nuli sau nu există, atunci numărul p se numește *rangul* matricei **A**. Rezultă

$$\operatorname{rang} \mathbf{A} = \operatorname{rang} {}^t\mathbf{A},$$

$$\operatorname{rang} \mathbf{AB} \leqslant \min(\operatorname{rang} \mathbf{A}, \operatorname{rang} \mathbf{B}),$$

iar dacă **B** este o matrice pătratică nesingulară, atunci

$$\operatorname{rang} \mathbf{AB} = \operatorname{rang} \mathbf{BA} = \operatorname{rang} \mathbf{A}.$$

1.20. Fie $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ o matrice de tipul $m \times n$. Următoarele operații se numesc *transformări elementare*.

(1) Schimbarea a două linii (coloane) între ele.

(2) Înmulțirea elementelor unei linii (coloane) cu un număr nenul.

(3) Adunarea la elementele unei linii (coloane) a elementelor corespondente din altă linie (coloană) înmulțite cu același număr nenul.

Matricele obținute din matricea **A** prin transformări elementare au același rang ca și matricea **A**. Mai mult, în cazul în care **A** este o matrice pătratică nesingulară, matricea inversă $\mathbf{A}^{-1}$ poate fi obținută cu ajutorul transformărilor elementare.

1.21. Fie $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ o matrice de numere reale sau complexe, de tipul $m \times n$, și $b_1, b_2, \dots, b_m$ niște numere reale sau complexe date. O mulțime de ecuații de forma

$$(*) \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

se numește *sistem de m ecuații liniare cu n necunoscute* x_j. Printr-o *soluție* a sistemului se înțelege orice n — uplu $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ care verifică toate ecuațiile sistemului. Matricea **A** se numește *matricea coeficienților sistemului*.

Fie $\mathbf{B} = {}^t[b_1, b_2, \ldots, b_m]$ și $\mathbf{X} = {}^t[x_1, x_2, \ldots, x_n]$. Sistemul (*) este echivalent cu ecuația matriceală (**) $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$. Matricea $[\mathbf{A}/\mathbf{B}]$ se numește *matricea extinsă* a sistemului.

1.22. Sistemul (*) este compatibil dacă și numai dacă rang $\mathbf{A}$ = rang $[\mathbf{A}/\mathbf{B}]$.

Dacă $\mathbf{A}$ este o matrice pătratică nesingulară, atunci (**) are soluția $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$.

Exerciții și probleme

1. Fie mulțimea $\left\{p_k \mid 0 < p_k < 1, \sum_{k=1}^{n} p_k = 1\right\}$ și matricea complexă $\mathbf{A}=[a_{kl}]$, pătratică de ordinul n, ale cărei elemente au modulul cel mult egal cu unu. Să se arate că $\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} p_k p_l |a_{kl}|^2 = 1$ dacă și numai dacă $|a_{kl}| = 1$, $k, l = 1, 2, \ldots, n$, unde $|a_{kl}|$ înseamnă modulul numărului a_{kl}.

Soluție. Fie $|a_{kl}| = 1$. Rezultă $\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} p_k p_l |a_{kl}|^2 = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} p_k p_l = \left[\sum_{k=1}^{n} p_k\right]^2 = 1$.

Fie $0 < p_k < 1$, $\sum_{k=1}^{n} p_k = 1$, $|a_{kl}| \leqslant 1$, $\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} p_k p_l |a_{kl}|^2 = 1$. Rezultă $\left[\sum_{k=1}^{n} p_k\right]^2 = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} p_k p_l = 1$ și prin diferență găsim $\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} p_k p_l (1 - |a_{kl}|^2) = 0$. Deoarece toți termenii sumei din stînga sînt pozitivi, ultima egalitate implică $p_k p_l(1 - |a_{kl}|^2) = 0$. Deci $|a_{kl}|^2 = 1$, adică $|a_{kl}| = 1$, $\forall k, l \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

2. Fie matricele

$$\Phi = \left[\begin{array}{cc|ccccc} 0 & \mathbf{I}_{n-2} & & & & & \\ \mathbf{I}_{n-2} & 0 & & & 0 & & \\ \hline & & 0 & -k & 0 & bc\lambda & -ca\lambda \\ & & k & 0 & 0 & -ak\lambda & -bk\lambda \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & b\mu & -a\mu \\ & & -bc\lambda & ak\lambda & -b\mu & 0 & -c \\ & & ca\lambda & bk\lambda & a\mu & c & 0 \end{array}\right],$$

$$\xi = {}^t[0, \ldots, (a^2 + b^2)\lambda, 0, -c\mu, a, b],$$

$$\eta = [0, \ldots, (a^2 + b^2)\lambda, 0, -c\mu, ad, bd],$$

$$\mathbf{g} = \mathbf{I}_{2n+1}, \text{ unde } \lambda = \frac{\sqrt{1 - k^2}}{k\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \mu = \frac{1}{k}, \quad k = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Să se arate că:

$$\Phi^2 = -\mathbf{I} + \xi\eta, \quad \eta\xi = 1, \quad \Phi\xi = 0, \quad \eta\Phi = 0, \quad {}^t\eta = \mathbf{g}\xi, \quad {}^t\Phi\mathbf{g}\Phi = \mathbf{g} - {}^t\eta\eta.$$

Ansamblul $(\Phi, \xi, \eta, \mathbf{g})$ se numește *structură metrică aproape cocomplexă* pe $\boldsymbol{R}^{2n+1}$.

3. Fie (x, y, z, w) coordonatele unui punct din $\mathbf{R}^4$ și matricele

$$\varphi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad g = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1+y^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1+z^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+y^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\xi = {}^t[0,\ 0,\ 0,\ 2], \quad \eta = \left[0,\ 0,\ 0,\ \frac{1}{2}\right].$$

Să se verifice relațiile

$$\varphi^2 = \mathbf{I} - \xi\eta,\ \eta\xi = 1,\ \varphi\xi = 0,\ \eta\varphi = 0,\ {}^t\eta = g\xi,\ {}^t\varphi g\varphi = g - {}^t\eta\eta.$$

Ansamblul (φ, ξ, η, g) se numește *structură metrică coprodus* pe $\boldsymbol{R}^4$.

4. Fie matricele $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ și $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$ cu elemente din cîmpul $\boldsymbol{K}$.

1) Să se determine o condiție necesară și suficientă pentru ca $\mathbf{A}$ și $\mathbf{B}$ să fie comutabile, adică $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$.

2) Folosind rezultatul de la punctul 1) să se exprime $\mathbf{A}^2$ în funcție de matricele $\mathbf{A}$ și $\mathbf{I}$.

Aceeași problemă pentru matricea $\mathbf{A}^{-1}$, în cazul cînd $\mathbf{A}^{-1}$ există.

Aplicație la matricea $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

R: 1) $a\mathbf{A} + b\mathbf{B} = c\mathbf{I}$.

5. 1) Să se dea exemple de mulțimi înzestrate cu operații de „înmulțire" și „adunare" pentru care sînt adevărate identitățile $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$, $(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$.

2) Să se arate că relațiile din 1) nu sînt satisfăcute de matricele $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. Ce modificări trebuie să facem pentru a obține relații adevărate pentru mulțimea matricelor pătratice de ordinul n?

R: 1) $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{C}$, mulțimea matricelor pătratice (de ordinul n) comutabile etc.

2) $(x + y)^2 = x^2 + xy + yx + y^2$, $(x + y)(x - y) = x^2 - xy + yx - y^2$.

6. Se consideră matricea $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Să se verifice că $\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ și să se determine $\mathbf{A}^3$, $\mathbf{A}^4$ și apoi $\mathbf{A}^n$, $n \in \boldsymbol{N}$.

$$R:\ \mathbf{A}^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ n & 1 & 0 \\ \dfrac{n(n+1)}{2} & n & 1 \end{bmatrix}.$$

7. Să se arate că dacă $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$, atunci $(\mathbf{A} + \mathbf{I})^n = I + (2^n - 1)\,\mathbf{A}$, $n \in \boldsymbol{N}$.

Soluție. Utilizăm metoda inducției complete.

Evaluăm $(\mathbf{A} + \mathbf{I})^2$, ținînd seama de egalitatea din ipoteză și de faptul că matricea $\mathbf{I}$ este comutabilă cu orice matrice. Obținem $(\mathbf{A} + \mathbf{I})^2 = \mathbf{I} + 3\mathbf{A} = \mathbf{I} + (2^2 - 1)\mathbf{A}$.

Presupunem adevărată egalitatea $(\mathbf{A}+\mathbf{I})^n = \mathbf{I} + (2^n - 1)\mathbf{A}$.

Să arătăm că ea este adevărată și pentru $n+1$. Într-adevăr $(\mathbf{A}+\mathbf{I})^{n+1} = (\mathbf{A}+\mathbf{I})(\mathbf{A}+\mathbf{I})^n = (\mathbf{A}+\mathbf{I})[\mathbf{I}+(2^n-1)\mathbf{A}]$,
$(\mathbf{A}+\mathbf{I})^{n+1} = \mathbf{I} + (2^{n+1}-1)\mathbf{A}$. De aceea egalitatea propusă are loc pentru orice număr natural n.

8. O matrice pătratică se numește *stochastică*, dacă elementele ei sînt nenegative și suma elementelor de pe fiecare linie este egală cu unitatea.

Să se arate că:

1) Produsul a două matrice stochastice de ordinul n este tot o matrice stochastică de ordinul n.

2) Puterile naturale ale unei matrice stochastice de ordinul n sînt matrice stochastice de ordinul n.

3) Dacă liniile unei matrice stochastice sînt egale între ele, atunci toate puterile naturale ale matricei sînt egale cu matricea inițială.

9. O matrice $\mathbf{P} = [p_{ij}]$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, care are proprietățile $p_{ij} \geqslant 0$, $\sum_{i=1}^{n} p_{ij} = 1$, $\sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1$ se numește matrice *dublu stochastică*.

1) Să se arate că produsul a două matrice dublu stochastice este o matrice dublu stochastică.

2) Să se probeze că orice matrice dublu stochastică, care nu are toate elementele egale, conține o submatrice

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

astfel încît $\min(a, d) > \max(b, c)$ sau $\max(a, d) < \min(b, c)$.

3) Să se găsească forma unei matrice dublu stochastice care comută cu toate matricele dublu stochastice.

4) Să se arate că produsul tuturor elementelor dintr-o matrice dublu stochastică de tipul $n \times n$ este cel mult $1/n^{n^2}$. Cînd este atinsă această valoare?

10. Fie $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ o matrice pătratică ale cărei elemente a_{ij} sînt funcții reale diferențiabile pe o mulțime deschisă din $\mathbf{R}^m$ și fie d operatorul de diferențiere.

1) Definim $d\mathbf{A} = [da_{ij}]$. Să se verifice relațiile

$$d(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = d\mathbf{A} + d\mathbf{B}, \quad d(\mathbf{AB}) = (d\mathbf{A})\mathbf{B} + \mathbf{A}d\mathbf{B}.$$

2) Fie $\Delta = \det \mathbf{A}$. Să se arate că $d\Delta = \sum_{i, j=1}^{n} \mathbf{A}_{ij} da_{ij}$, unde $\mathbf{A}_{ij}$ este cofactorul elementului a_{ij}, iar n este ordinul matricei $\mathbf{A}$.

11. Considerăm funcțiile reale $u_1, u_2, \ldots, u_n$ definite pe (a, b) pe care le presupunem derivabile de n ori. Determinantul $\mathbf{W}(x) = \det [u_j^{(i-1)}(x)]$ se numește *wronskianul* funcțiilor $u_1, u_2, \ldots, u_n$. Să se arate că $\mathbf{W}'(x)$ este determinantul matricei obținută din $[u_j^{(i-1)}(x)]$ prin derivarea ultimei linii.

12. Să se determine matricea inversă pentru fiecare dintre matricele următoare:

$$1)\ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}; \quad 2)\ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}; \quad 3)\ \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

13. Se dă matricea complexă

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} -a & -b & x & -x \\ -b & -c & y & -y \\ -x & -y & -d & 0 \\ x & y & 0 & d \end{bmatrix}, \qquad ac-b^2\neq 0, \qquad d\neq 0.$$

Să se arate că

$$\mathbf{A}^{-1}=\begin{bmatrix} -\frac{c}{m} & \frac{b}{m} & u & u \\ \frac{b}{m} & -\frac{a}{m} & v & v \\ -u & -v & -\frac{1}{d}+\mathrm{w} & \mathrm{w} \\ -u & -v & \mathrm{w} & \frac{1}{c}+\mathrm{w} \end{bmatrix}$$

unde $u=(cx-by)/md$, $v=(ay-bx)/md$, $\mathrm{w}=(ay^2-2bxy+cx^2)/md^2$, $m=ac-b^2$.

14. Fie $\mathfrak{M}_{2\times 2}(\boldsymbol{R})$ inelul matricelor reale de ordinul doi și $\mathfrak{M}$ submulțimea matricelor $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$ cu $a,\ b\in\boldsymbol{R}$.

1) Să se arate că $\mathfrak{M}$ este un cîmp (corp comutativ).

2) Fie $\boldsymbol{C}$ cîmpul numerelor complexe. Să se arate că funcția $\mathrm{f}\colon \boldsymbol{C}\to\mathfrak{M}$ definită prin $\mathrm{f}(a+\mathrm{i}b)=\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$ este un izomorfism.

3) Să se calculeze $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}^{60}$.

Soluție. 1) Fie matricele $\mathbf{A},\ \mathbf{A}'\in\mathfrak{M}$. Rezultă

$$\mathbf{A}+\mathbf{A}'=\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} a' & b' \\ -b' & a' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a+a' & b+b' \\ -(b+b') & a+a' \end{bmatrix}\in\mathfrak{M}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{A}'=\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a' & b' \\ -b' & a' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} aa'-bb' & ab'+ba' \\ -(ab'+ba') & aa'-bb' \end{bmatrix}\in\mathfrak{M}$$

Evident matricele $-\mathbf{A}$ și $\mathbf{O}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ aparțin lui $\mathfrak{M}$, iar adunarea determină pe $\mathfrak{M}$ o structură de grup comutativ.

Înmulțirea determină pe $\mathfrak{M}-\{\mathrm{O}\}$ o structură de grup comutativ. Într-adevăr ea este comutativă, asociativă ; matricea unitate de ordinul doi aparține lui $\mathfrak{M}-\{\mathrm{O}\}$ și orice matrice $\mathbf{A}\neq\mathrm{O}$ este inversabilă, iar $\mathbf{A}^{-1}\in\mathfrak{M}-\{\mathrm{O}\}$.

Să justificăm ultima afirmație: pentru $\mathbf{A} \neq \mathbf{O}$ avem $\det \mathbf{A} = a^2 + b^2 \neq 0$ și prin metoda Gauss, de exemplu, obținem

$$\begin{array}{lcc|cc l}
\mathrm{A}: & a & b & 1 & 0 & \cdot \dfrac{b}{a} \\
 & -b & a & 0 & 1 & + \\
\hline
 & a & b & 1 & 0 & + \\
 & 0 & \dfrac{b^2}{a} + a & \dfrac{b}{a} & 0 & \cdot -\dfrac{ab}{a^2+b^2} \\
\hline
 & a & 0 & \dfrac{a^2}{a^2+b^2} & \dfrac{-ab}{a^2+b^2} & \\
 & 0 & \dfrac{a^2+b^2}{a} & \dfrac{b}{a} & 1 & \\
\hline
 & 1 & 0 & \dfrac{a}{a^2+b^2} & \dfrac{-b}{a^2+b^2} & : \mathbf{A}^{-1} \\
 & 0 & 1 & \dfrac{b}{a^2+b^2} & \dfrac{a}{a^2+b^2} &
\end{array}$$

2) Funcția $\mathrm{f}\colon \boldsymbol{C} \to \mathcal{M}$ este bijectivă. Într-adevăr, $a_1 + \mathrm{i}b_1 \neq a_2 + \mathrm{i}b_2$ implică $\mathrm{f}(a_1 + \mathrm{i}b_1) = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ -b_2 & a_2 \end{bmatrix} = \mathrm{f}(a_2 + \mathrm{i}b_2)$ și $\forall \mathbf{A} \in \mathcal{M}$, $\exists a + \mathrm{i}b \in \boldsymbol{C}$ astfel încît $\mathrm{f}(a + \mathrm{i}b) = \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$. În plus se constată că $\mathrm{f}(z_1 + z_2) = \mathrm{f}(z_1) + \mathrm{f}(z_2)$ și $\mathrm{f}(z_1 z_2) = \mathrm{f}(z_1)\,\mathrm{f}(z_2)$, $\forall z_1, z_2 \in \boldsymbol{C}$.

3) Se observă că

$$\begin{bmatrix} \dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2} & \dfrac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\dfrac{\pi}{3} & \sin\dfrac{\pi}{3} \\ -\sin\dfrac{\pi}{3} & \cos\dfrac{\pi}{3} \end{bmatrix} = \mathrm{f}\left(\cos\frac{\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

și

$$\begin{bmatrix} \dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2} & \dfrac{1}{2} \end{bmatrix}^{60} = \mathrm{f}^{60}\left(\cos\frac{\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right) = \mathrm{f}\left(\cos 60 \cdot \frac{\pi}{3} + \mathrm{i}\sin 60 \cdot \frac{\pi}{3}\right) =$$

$$= \mathrm{f}(\cos 20\pi + \mathrm{i}\sin 20\pi) = \mathrm{f}(1 + \mathrm{i}\,0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

15. Fie matricea reală $\mathbf{A}$ ale cărei elemente sînt $a_{ij} = \delta_{ij} + p_i p_j$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

1) Să se arate că $\det \mathbf{A} = 1 + \sum_{i=1}^{n} p_i^2$.

2) Să se determine $\mathbf{A}^{-1}$.

Soluție. 1) Mai întîi se folosește descompunerea unui determinant într-o sumă de doi determinanți și apoi proprietăți ale determinanților

$$|\delta_{ij}+p_ip_j| = \begin{vmatrix} 1+p_1^2 & 0+p_1p_2 & 0+p_1p_n \\ 0+p_2p_1 & 1+p_2^2 & 0+p_2p_n \\ \dots & \dots & \dots \\ 0+p_np_1 & 0+p_np_2 & 1+p_n^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0\dots 0 \\ 0 & 1\dots 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0\dots 1 \end{vmatrix} +$$

$$+\begin{vmatrix} p_1^2 & 0\dots 0 \\ p_2p_1 & 1\dots 0 \\ \dots & \dots \\ p_np_1 & 0\dots 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & p_1p_2\dots 0 \\ 0 & p_2^2\dots 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & p_np_2\dots 1 \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} 1 & 0\dots p_1p_n \\ 0 & 1\dots p_2p_n \\ \dots & \dots \\ 0 & 0\dots p_n^2 \end{vmatrix} = 1+\sum_{i=1}^{n} p_i^2.$$

2) Deoarece $\det \mathbf{A} \neq 0$, matricea $\mathbf{A}^{-1}$ există. Căutăm pe $\mathbf{A}^{-1} = [b_{jk}]$ cu elemente de forma $b_{jk} = x\delta_{jk} + yp_jp_k$. Observăm că $\delta_{ik} \equiv x\delta_{ik} + xp_ip_k + + yp_ip_k + yp_ip_k \sum_{j=1}^{n} p_j^2$ dacă și numai dacă $x = 1$ și $y = \dfrac{-1}{\det \mathbf{A}}$. Deci $b_{jk} = \delta_{jk} - \dfrac{1}{\det \mathbf{A}} p_jp_k$.

16. Fie **A** o matrice simetrică nesingulară, $\mathbf{A}^{-1}$ inversa ei și **B** o matrice pătratică de același ordin cu matricea **A**. Să se determine inversa matricei

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} + {}^t\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} & -{}^t(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}) \\ -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} & \mathbf{A}^{-1} \end{bmatrix}$$

R: $\mathbf{A}^{-1}$ este o matrice simetrică și $\mathbf{G}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{-1} & {}^t(\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}) \\ \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1} & \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\,{}^t\mathbf{B} \end{bmatrix}$.

17. Fie **G** o matrice pătratică simetrică nesingulară de ordinul n și **X**, **Y** două matrice de tipul $1 \times n$ astfel încît $\mathbf{X}\mathbf{G}^{-1}\,{}^t\mathbf{Y} = 0$, $\mathbf{X}\mathbf{G}^{-1}\,{}^t\mathbf{X} = \mathbf{Y}\mathbf{G}^{-1}\,{}^t\mathbf{Y} = = -1$. Să se găsească determinantul și, cînd este posibil, inversa matricei $\mathbf{H} = \mathbf{G} + a\,{}^t\mathbf{X}\mathbf{X} + b\,{}^t\mathbf{Y}\mathbf{Y}$.

R: $\det \mathbf{H} = -(1-a)(1-b)$ și deci **H** este nesingulară $\Leftrightarrow a \neq 1,\ b \neq 1$;
$\mathbf{H}^{-1} = \mathbf{G}^{-1} - \dfrac{a}{1-a}\,{}^t(\mathbf{X}\mathbf{G}^{-1})(\mathbf{X}\mathbf{G}^{-1}) - \dfrac{b}{1-b}\,{}^t(\mathbf{Y}\mathbf{G}^{-1})(\mathbf{Y}\mathbf{G}^{-1})$.

18. Matricea **A** ale cărei elemente sînt $a_{ij} = \dfrac{1}{x_i + y_j}$ se numește *matrice Cauchy*.

1) Să se verifice că

$$\det \mathbf{A} = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} (x_j - x_i)(y_j - y_i) / \prod_{1\leqslant i,j\leqslant n} (x_i + y_i)$$

2) În ipoteza $\det \mathbf{A} \neq 0$, să se arate că

$$b_{ij} = \Big(\prod_{1\leqslant k<n} (x_j + y_k)(x_k + y_i)\Big) / (x_j + y_i)\Big(\prod_{\substack{1\leqslant k\leqslant n\\ k\neq j}} (x_j - x_k)\Big) \prod (y_i - y_k).$$

sînt elementele lui $\mathbf{A}^{-1}$.

3) Care este suma celor n^2 elemente ale lui $\mathbf{A}^{-1}$?

R: 3) $(x_1 + \dots + x_n) + (y_1 + \dots + y_n)$.

19. Matricea **H** ale cărei elemente sînt $h_{ij} = \dfrac{1}{i+j-1}$ se numește *matrice Hilbert.*

1) Să se arate că orice matrice Hilbert este un caz particular de matrice Cauchy.

2) Să se găsească $\mathbf{H}^{-1}$. Să se arate că fiecare element al inversei este un număr întreg, iar suma tuturor elementelor inversei este n^2.

20. Fie $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ o matrice pătratică. Numărul $\Sigma a_{1j_1} \dots a_{1j_n}$ se numește *permanentul* matricei **A**. Care este permanentul matricei

$$\begin{bmatrix} 1\times 1 & 1\times 2 \dots & 1\times n \\ 2\times 1 & 2\times 2 \dots & 2\times n \\ \dots & \dots & \dots \\ n\times 1 & n\times 2 \dots & n\times n \end{bmatrix}?$$

R: $(n!)^3$. Există $n!$ termeni. Fiecare termen are cîte un factor din fiecare linie și fiecare coloană, adică are valoarea $(n!)^2$.

21. Se consideră *matricea Vandermonde*

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \dots & \dots & & \dots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

1) Să se arate că $\det \mathbf{V} = \prod\limits_{i<j} (x_j - x_i)$.

2) În ipoteza $\det \mathbf{V} \neq 0$, să se găsească $\mathbf{V}^{-1}$.

3) Care este suma celor n^2 elemente ale lui $\mathbf{V}^{-1}$?

22. Se consideră matricea *combinatorială*

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} x+y & y & \dots & y \\ y & x+y & \dots & y \\ \dots & \dots & & \dots \\ y & y & \dots & x+y \end{bmatrix}$$

1) Să se arate că $\det \mathbf{C} = x^{n-1}(x+ny)$.

2) În ipoteza $\det \mathbf{C} \neq 0$, să se verifice că

$$b_{ij} = (-y + \delta_{ij}(x+ny)) \frac{1}{x(x+ny)}$$

sînt elementele lui $\mathbf{C}^{-1}$.

3) Care este suma celor n^2 elemente ale lui $\mathbf{C}^{-1}$?

R: 3) $\dfrac{n}{x+ny}$.

23. *Program de inversare a unei matrice prin metoda Gauss-Jordan.*

Fie $\mathbf{A} = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{n\times n}$ o matrice pătratică de ordinul n nesingulară. Se construiește matricea extinsă **C** cu n linii și $2n$ coloane, primele n coloane conținînd matricea de inversat **A**, iar ultimele n coloane matricea unitate **I** de ordinul n. În urma transformărilor elementare

$$\left.\begin{array}{ll} c_{kj} = a_{kj}/a_{kk}, & j = \overline{2n,\ k} \\ c_{ij} = a_{ij} - a_{ik}a_{kj}, & j = \overline{2n,\ k}; \quad i = \overline{1,\ n} \end{array}\right\} k = \overline{1,n}$$

se aduce matricea unitate **I** în primele n coloane și în următoarele n coloane se obține matricea inversă $\mathbf{A}^{-1}$.

Programul și subprogramele necesare sînt (Fig. A.1)

```
|C|  5  SUBPRØGRAM DE CITIRE ÎN MEMØRIE A UNEI
        MATRICE A(NXN)
        SUBRØUTINE CITIRE (N, A)
        DIMENSIØN A(N, N)
        READ (105,1) ((A(I, J), J = 1, N, I = 1, N)
     1  FØRMAT (10F6.2)
        RETURN
        END

|C|     SUBPRØGRAM DE SCRIERE A UNEI MATRICE A(NXN)
        SUBRØUTINE SCRIERE (N, A)
        DIMENSIØN A(N, N)
        DØ 1 I = 1, N)
     1  PRINT 2, (A(I, J), J = 1, N)
     2  FØRMAT (11X, 10E12.2)
        RETURN
        END

|C|     SUBPRØGRAM DE ÎNMULȚIRE A 2 MATRICE C(MXL)=
        = A(MXN) × B(NXL)
        SUBRØUTINE PRØDUS (C, A, B, M, N, L)
        DIMENSIØN A(M, N), B(N, L), C(M, L)
        DØ 1 I = 1, M
        DØ 1 J = 1, L
        C(I, J) = O
        DØ 1 K = 1, N
     1  C(I, J) = C(I, J) + A(I, K) * B(K, J)
        RETURN
        END

|C|     SUBPRØGRAM DE CØPIERE A UNEI MATRICE ÎN
        MEMØRIE
        SUBRØUTINE CØPIA (N, A, B)
        DIMENSION A(N, M), B(N, N)
        DØ 1 I = 1, N
        DØ 1 J = 1, N
     1  B(I, J) = A(I, J)
        RETURN
        END
```

```
C     SUBPRØGRAM DE CALCUL AL MATRICEI INVERSE
      PRIN METØDA GAUSS-JØRDAN
C     INVERSA ESTE PLASATĂ ÎN LØCUL MATRICEI A
C     S-A NØTAT: DET = DETERMINANTUL LUI A; EPS =
        = TØLERANTA ELEMENTULUI PIVØT
      SUBRØUTINE JØRDAN (N, EPS, A, DET)
      DIMENSIØN A(N, N), B(10), C(10), IZ(10)
      DET = 1.
      DØ 1 I 1, N
1     IZ(I) = I
      DØ 2 I = 1, N
      K = I
      Y = A(I, I)
      IM 1 = I - 1
      IP 1 = I + 1
      DØ 3 J = IP 1, N
      W = A(I, J)
      IF(ABS(W).LE.ABS(Y)) GØTØ 3
      K = J
      Y = W
3     CØNTINUE
      DET = Y * DET
      IF(K.NE.I) DET = - DET
      IF(ABS(Y).LT.EPS) GØTØ 10
      Y = 1/Y.
      DØ 4 J = 1, N
      C(J) = A(J, K)
      A(J, K) = A(J, I)
      A(J, I) = -C(J) * Y
      A(I, J) = A(I, J) * Y
4     B(J) = A(I, J)
      J = IZ(I)
      IZ(I) = IZ(K)
      IZ(K) = J
      A(I, I) = Y
      DØ 5 K = 1, N
      IF(K.EQ.I) GØTØ 5
      DØ 6 J = 1, N
      IF(J.EQ.I) GØTØ 6
      A(K, J) = A(K, J) - B(J) * C(K)
6     CØNTINUE
5     CØNTINUE
2     CØNTINUE
      DØ 7 L = 1, N
      K = IZ(L)
      DØ 8 J = L, N
      IF(K.EQ.J) GØTØ 7
      DØ 9 I = 1, N
      W = A(J, I)
      A(J, I) = A(K, I)
      A(K, I) = W
```

```
9      CØNTINUE
       I = IZ(K)
       IZ(K) = IZ(J)
       IZ(J) = I
       K = I
8      CØNTINUE
7      CØNTINUE
       RETURN
10     PRINT 11
11     FØRMAT (11X; MATRICE SINGULARA'//)
       RETURN
       END
C      PRØGRAMUL PRINCIPAL
       DIMENSIØN A(10, 10), B(10, 10), C(10, 10)
       PRINT 1
1    * FØRMAT (26X 'INVERSARE DE MATRICE PRIN METØDA
       JØRDAN'
       (26X, 39('=')//)
21     READ (105, 2, END = 20)N
2      FØRMAT (I2)
       CALL CITIRE (N, A)
       PRINT 3
3      FØRMAT (26X 'MATRICEA A:'/26X, 11('=')//)
       CALL SCRIERE (N, A)
       CALL CØPIA (N, A, B)
       CALL JØRDAN (N, 1.E-3, A, DET)
       PRINT 6, DED
6      FØRMAT (26X 'DETERMINANTUL MATRICEI A ESTE:
     * '/E 12.5//)
       PRINT 4
4      FØRMAT (/26X 'MATRICEA INVERSA: '/26X, 22('=')//)
       CALL SCRIERE (N, A)
       PRINT 5
5      FØRMAT (/26X 'VERIFICAREA INVERSĂRII A * AINV =
     *   I'/26X, 31 ('=')/)
       CALL PRØDUS (C, A, B, N, N, N)
       CALL SCRIERE (N, C)
       GØTØ 21
20     STØP
       END
```

Exemplu numeric

MATRICEA **A**:

. 2000E + 01	. 5000E + 01	. 4000E + 01
. 5000E + 01	. 2000E + 01	. 5000E + 01
. 7000E + 01	. 1000E + 01	. 5000E + 01

Determinantul matricei **A** este: . 24000E + 02

MATRICEA INVERSĂ AINV ESTE:

. 2083E + 00	—. 8750E + 00	. 7083E + 00
. 4167E + 00	—. 7500E + 00	. 4167E + 00
—. 3750E + 00	. 1375E + 01	—. 8750E + 00

Verificarea inversării A * AINV = I (matricea unitate)

. 1000E + 01	. 1490E − 05	. 1907E − 05
. 1907E − 05	. 1000E + 01	. 9537E − 06
−. 2861E − 05	−. 1371E − 05	. 1000E + 01

Fig. A.1.

24. Fie $\boldsymbol{K}$ un corp comutativ și $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ $i = 1, 2, ..., m$, $j = 1, 2, .., n$, o matrice de tipul $m \times n$ cu elemente din $\boldsymbol{K}$. Să se arate că rang $\mathbf{A} = 1$ dacă și numai dacă există $u_i, v_j \in \boldsymbol{K}$ (nu toate nule) astfel încît $a_{ij} = u_i v_j$.

Soluție. Dacă $a_{ij} = u_i v_j$, atunci rang $\mathbf{A} = 1$, deoarece liniile matricei $\mathbf{A}$ sînt proporționale.

Presupunem rang $\mathbf{A} = 1$. Aceasta înseamnă că nu toți vectorii linie sînt nuli și că dacă $a_h = (a_{h1}, a_{h2}, ..., a_{hn}) \neq 0$, $h =$ fix, atunci oricare alt vector linie $a_i = (a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in})$ este de forma $a_i = \gamma_i a_h$, adică $a_{ij} = \gamma_i a_{hj}$. Punînd $\gamma_i = u_i$, $a_{hj} = v_j$, se obține $a_{ij} = u_i v_j$.

25. Se consideră circuitul din figura 1.1 în care $E = 60$ V și conductorii au rezistențele 2Ω. Să se determine intensitățile curenților care circulă prin conductori.

Indicație. Folosind legile lui Kirchhoff obținem sistemul:

$I_1 - i_1 - I_2 = 0$, (nodul A)

$I_2 - i_2 - I_3 = 0$, (nodul D)

$I_3 - i_3 - I_4 = 0$ (nodul C)

$I_4 - i_4 - I_1 = 0$ (nodul B)

$I_1 r + i_1 r - i_4 r = E$ (circuitul AFB)

$I_2 r + i_2 r - i_1 r = 0$ (circuitul ADF)

$i_2 r - i_3 r - i_1 r = 0$ (circuitul DCF)

$I_4 r - i_4 r - i_3 r = 0$ (circuitul CFB)

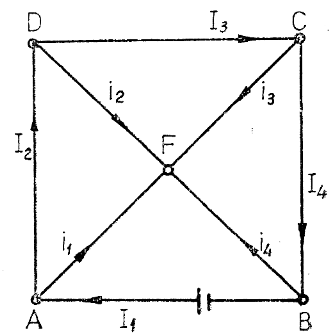


Fig. 1.1.

26. Se consideră (vectorii) matricele

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

cu ajutorul cărora definim matricea $\mathbf{A} = \mathbf{I} + \mathbf{X}^t\mathbf{Y}$.

1) Să se arate că există un polinom de gradul doi cu coeficienți reali, $P(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, astfel încît

$$\mathbf{P}(\mathbf{A}) = \alpha \mathbf{A}^2 + \beta \mathbf{A} + \gamma \mathbf{I} = \mathbf{O}.$$

2) În ipoteza ${}^t\mathbf{X}\mathbf{Y} = \mathbf{O}$, să se cerceteze existența lui $\mathbf{A}^{-1}$.

3) Să se rezolve sistemul $\mathbf{BX} = \mathbf{Y}$, unde $\mathbf{B} = [b_{ij}]$ este dată prin

$$b_{ij} = \begin{cases} \beta, & i \neq j \\ \alpha, & i = j \end{cases}.$$

Soluție. 1) Fie matricea $\mathbf{P(A)} = \alpha \mathbf{A}^2 + \beta \mathbf{A} + \gamma \mathbf{I} = (\alpha + \beta + \gamma)\,\mathbf{I} + (2\alpha + \beta)\,\mathbf{X}^t\mathbf{Y} + \alpha\,(\mathbf{X}^t\mathbf{Y})\,(\mathbf{X}^t\mathbf{Y}) = (\alpha + \beta + \gamma)\,\mathbf{I} + (2\alpha + \beta + \rho)\,\mathbf{X}^t\mathbf{Y}$. Condițiile $\alpha + \beta + \gamma = 0$, $2\alpha + \beta + \rho = 0$ determină coeficienții polinomului $P(x)$, fiind evident compatibile.

2) Se observă că

$$\mathbf{A} = \mathbf{I} + \mathbf{X}^t\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 1 + x_1y_1 & x_1y_2 & \dots & x_1y_n \\ x_2y_1 & 1 + x_2y_2 & \dots & x_2y_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_ny_1 & x_ny_2 & \dots & 1 + x_ny_n \end{bmatrix}$$

și $\det \mathbf{A} = 1 + x_1y_1 + \dots + x_ny_n = 1 + {}^t\mathbf{XY}$. De aceea ${}^t\mathbf{XY} = 0$ implică $\det \mathbf{A} = 1$ și deci $\mathbf{A}$ nesingulară.

3) Matricea

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & \beta \dots \beta \\ \beta & \alpha & \beta \dots \beta \\ \dots & \dots & \dots \dots \\ \beta & \beta & \beta \dots \alpha \end{bmatrix}$$

este matrice nesingulară dacă și numai dacă $\alpha \neq \beta$, $\alpha \neq \beta(1 - n)$ și în acest caz

$$\mathbf{B}^{-1} = \frac{1}{(\alpha - \beta)[\alpha + \beta(n - 1)]} \begin{bmatrix} \alpha & -\beta & -\beta \dots & -\beta \\ -\beta & \alpha & -\beta & -\beta \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\beta & -\beta & -\beta \dots & \alpha \end{bmatrix}$$

În ipoteza $\alpha \neq \beta$, $\alpha \neq \beta(1 - n)$, sistemul $\mathbf{BX} = \mathbf{Y}$ are soluția unică $\mathbf{X} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{Y}$. Dacă $\alpha = \beta \neq 0$, atunci sistemul $\mathbf{BX} = \mathbf{Y}$ se scrie explicit sub forma $\alpha(x_1 + \dots + x_n) = y_1, \dots, \alpha(x_1 + \dots + x_n) = y_n$ și admite soluții numai dacă $y_1 = \dots = y_n$; pentru $\alpha = \beta(1 - n) \neq 0$ sistemul se transcrie $(1 - n)\, x_1 + \dots + x_n = \frac{y_1}{\beta}, \dots, x_1 + \dots + (1 - n)\, x_n = \frac{y_n}{\beta}$ și admite soluții numai dacă $y_1 + \dots + y_n = 0$; cazul $\alpha = \beta = 0$ este banal. Explicitatea soluțiilor este evidentă.

27. Programul FØRTRAN pentru metoda lui Gauss de rezolvare a unui sistem liniar (Fig. A.2).

```
1   5
      SUBRØUTINE GAUSS 1 (N, A, B, X, DET, KAR, TØL)
C     KAR AM NØTAT RANGUL MATRICEI
C     TØL ESTE TØLERANTA
      DIMENSIØN A(6,6), B(6), X(6)
      INTEGER ØRD(6)
      KS = 1
      DØ 1 I = 1,N
    1 ØRD(I)=I
      N1=N-1
      DØ 2 K=1, N1
      AM=ABS(A(K,K))
      IM=K
```

```
      JM=K
      DØ 3 I=K,N
      DØ 3 J=K,N
      IF(AM.GE.ABS(A(I,J))) GØTØ 3
      AM=ABS(A(I,J))
      IM=I
      JM=J
 3    CØNTINUE
      IF(AM.GT.TØL) GØTØ 11
      KAR=K
      RETURN
 11   T=B(IM)
      B(IM)=B(I)
      B(K)=T
      DØ 4 J=K,N
      T=A(IM,J)
      A(IM,J)=A(K,J)
 4    A(K,J)=T
      DØ 5 I=1,N
      T=A(I,JM)
      A(I,JM)=A(I,K)
 5    A(I,K)=T
      M=ØRD(JM)
      ØRD(JM)=ØRD(K)
      ØRD(K)=M
      K1=K+1
      DØ 6 I=K1,N
      C=-A(I,K)/A(K,K)
      B(I)=B(I)+C * B(K)
      DØ 6 J=K,N
 6    A(I,J)=A(I,J)+C*A(K,J)
 2    CØNTINUE

C     REZØLVAREA SISTEMULUI TRIUNGHIULAR

      X(N)=B(N)/A(N,N)
      DØ 20 K=1,N1
      S=O
      NK=N-K
      NK1=N-K+1
      DØ 21 L=NK1,N
 21   S=S+A(NK,L)*X(L)
 20   X(NK)=(B(NK)-S)/A(NK,NK)
      DØ 7 I=1,N1
      DØ 8 J=1,N
      IF(ØRD(J).EQ.I) GØTØ 9
 8    CØNTINUE
 9    M=ØRD(I)
      ØRD(I)=ØRD(J)
      ØRD(J)=M
      T=X(I)
      X(I)=X(J)
      X(J)=T
```

```
7        CØNTINUE
         DET=1
         DØ 10 I=1,N
         DET1=DET
         DET=DET*A(I,I)
         IF(DET1*DET.LT.O) KS=-1
10       CØNTINUE
         KAR=N
         RETURN
         END

C        PRØGRAMUL PRINCIPAL

         DIMENSIØN A(6,6), B(6), X(6), AS(6,6), BS(6)
         EPS=1.E-3
19       READ(105,1)N
1        FORMAT (I2)
         READ (105,2) ((A(I,J), J=1,N), I=1,N)
2        FØRMAT (10F8.2)
         WRITE (108,3)
3        FØRMAT (20X, 'MATRICEA SISTEMULUI ESTE'/20X,
      *  26('=')//)
         DØ 31 I=1,N
31       WRITE (108,4) (A(I,J), J=1,N)
4        FØRMAT (11X, 10E12.4)
         DØ 7 I=1,N
7        BS(I)=B(I)
         DØ 33 I=1,N
         DØ 33 J=1,N
33       AS(I,J)=A(I,J)
         CALL GAUSS 1(N,A,B,X,DET,KAR,EPS)
         WRITE (108,6)
6        FØRMAT (10X, 'METØDA LUI GAUSS CU PIVØT MAXIM
      *  NE FURNIZEAZĂ SØLUŢIILE''//)
         DØ 9 I=1,N
9        WRITE (108,10) I, X(I)
10       FØRMAT (10X, 'X(',I2,') =', E12.5)
         WRITE (108,15)
15       FØRMAT (11X, 'IN CALCULE S-A FØLØSIT TØLERANŢA',
      *  E12.5)
         WRITE (108,8) KAR, DER
8        FØRMAT (11X 'RANGUL MATRICEI A ESTE:', I 2/11X'/
      *  DETERMINANTUL
      *  MATRICEI A ESTE:', E12.5)
         WRITE (108,14)
14       FØRMAT (11X 'VERIFICAREA SØLUTIEI ØBTINUTE'/)
         DØ 34 I=1,N
         B(I) = O.
         DØ 34 J=1,N
34       B(I)=B(I)+AS(I,J)*X(J)
         DØ 11 I=1,N
         B(I)=BS(I)-B(I)
11       WRITE (108,40) I, B(I)
```

```
40      FØRMAT (11X 'DELTAB(',12,') =', E12.5)
        GØTØ 19
        STØP
        END
```

Exemplu numeric

S-a rulat sistemul

$$\begin{cases} 1{,}5\, x_1 - 3{,}2\, x_2 + 6\, x_3 + 4{,}5\, x_4 + x_5 + 0{,}3\, x_6 = 0{,}82 \\ -3{,}6\, x_1 + 2{,}5\, x_2 - 1{,}8\, x_3 - 0{,}6\, x_4 + 2\, x_6 = 0{,}59 \\ 3\, x_1 - 5\, x_2 + 0{,}7\, x_3 - 1{,}4\, x_4 - 4{,}2\, x_5 = -3{,}92 \\ x_1 - 2\, x_2 + 3\, x_3 - 1{,}8\, x_4 + 11\, x_5 = 1{,}91 \\ -3{,}2\, x_1 + 0{,}5\, x_2 + 2{,}5\, x_3 + 1{,}1\, x_4 + 3{,}8\, x_5 + 4{,}6\, x_6 = 1{,}89 \\ -5\, x_1 + x_2 + 0{,}5\, x_3 + 3\, x_5 - 4\, x_6 = -0{,}24 \end{cases}$$

S-a obținut soluția

$$\begin{cases} X(1) = .26064\text{E} + 00 \\ X(2) = .75560\text{E} + 00 \\ X(3) = .29061\text{E} + 00 \\ X(4) = .14330\text{E} + 00 \\ X(5) = .23970\text{E} + 00 \\ X(6) = .13292\text{E} + 00 \end{cases}$$

În calcule s-a folosit toleranța: .10000E−02.
Rangul matricei sistemului este: 6.
Determinantul matricei sistemului este: .30111E+05

VERIFICAREA SOLUȚIEI OBȚINUTE
DELTA $B(1)$ = −.19073E−05
DELTA $B(2)$ = .95367E−06
DELTA $B(3)$ = .95367E−06
DELTA $B(4)$ = .10000E−07
DELTA $B(5)$ = .95367E−06
DELTA $B(6)$ = .19073E−05

Fig. A.2.

§ 2. SPAȚII VECTORIALE

2.1. O mulțime $\boldsymbol{K}$ împreună cu două aplicații ale lui $\boldsymbol{K}\times\boldsymbol{K}$ în $\boldsymbol{K}$, numite respectiv *adunare* și *înmulțire*, care satisfac condițiile:

(1) adunarea determină pe $\boldsymbol{K}$ o structură de grup comutativ,

(2) înmulțirea determină pe $\boldsymbol{K} - \{0\}$ o structură de grup,

(3) înmulțirea este distributivă față de adunare, se numește *corp*. Un corp în care înmulțirea este comutativă se numește *cîmp (corp comutativ)*.

Precizare. Noi vom folosi în special cîmpul numerelor reale $\boldsymbol{R}$ și cîmpul numerelor complexe $\boldsymbol{C}$.

2.2. O mulțime $\mathbf{V}$ se numește *spațiu vectorial peste cîmpul* $\boldsymbol{K}$ dacă admite
(1) o structură de grup comutativ, notată aditiv,

$$(v, w) \rightarrow v + w;$$

(2) o funcție f: $\boldsymbol{K} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$, notată prin $(k, v) \rightarrow kv$, astfel încît $\forall k, l \in \boldsymbol{K}$, $\forall v, w \in \mathbf{V}$ să avem

$$1\,v = v$$

$$k\,(lv) = (kl)\,v$$

$$(k + l)\,v = kv + lv$$

$$k\,(v + w) = kv + kw.$$

Elementele lui $\mathbf{V}$ se numesc *vectori*, elementele lui $\boldsymbol{K}$ se numesc *scalari*, iar aplicația f se numește *înmulțirea cu scalari.*

Un spațiu vectorial peste $\boldsymbol{R}$ se numește *spațiu vectorial real*. Un spațiu vectorial peste $\boldsymbol{C}$ se numește *spațiu vectorial complex.*

2.3. Fie $\mathbf{V}$ un spațiu vectorial peste cîmpul $\boldsymbol{K}$. O submulțime nevidă $\mathbf{W}$ a lui $\mathbf{V}$ se numește *subspațiu vectorial al lui* $\mathbf{V}$ dacă

(1) $\forall u, v \in \mathbf{W}$, $u + v \in \mathbf{W}$,

(2) $\forall k \in \boldsymbol{K}$, $\forall u \in \mathbf{W}$, $ku \in \mathbf{W}$.

sau echivalent

$$\forall u, v \in \mathbf{W},\ \forall k, l \in \boldsymbol{K},\ ku + lv \in \mathbf{W}.$$

2.4. Fie $\mathbf{V}$ un spațiu vectorial peste cîmpul $\boldsymbol{K}$ și $\mathbf{S}$ o submulțime nevidă a lui $\mathbf{V}$. Un vector $v \in \mathbf{V}$ de forma

$$v = \sum_{i=1}^{p} k_i a_i, \quad \text{unde} \quad a_i \in \mathbf{S},\ k_i \in \boldsymbol{K},$$

se numește *combinație liniară finită de elemente din* $\mathbf{S}$.

Mulțimea tuturor combinațiilor liniare finite de elemente din $\mathbf{S}$ este un subspațiu vectorial al lui $\mathbf{V}$. Acest subspațiu se numește *subspațiul generat de submulțimea* $\mathbf{S}$ *sau acoperirea liniară a lui* $\mathbf{S}$ și se notează cu $\mathbf{L}(\mathbf{S})$.

2.5. Dacă $\mathbf{W}_1$ și $\mathbf{W}_2$ sînt două subspații ale spațiului vectorial $\mathbf{V}$, atunci
(1) mulțimea

$$\mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2 = \{v = v_1 + v_2 \mid v_1 \in \mathbf{W}_1,\ v_2 \in \mathbf{W}_2\},$$

numită *suma dintre* $\mathbf{W}_1$ *și* $\mathbf{W}_2$, este un subspațiu vectorial al lui $\mathbf{V}$;

(2) intersecția $\mathbf{W}_1 \cap \mathbf{W}_2$ este un subspațiu vectorial al lui $\mathbf{V}$;

(3) reuniunea $\mathbf{W}_1 \cup \mathbf{W}_2$ nu este un subspațiu vectorial al lui $\mathbf{V}$. Se observă însă că $\mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2 = \mathbf{L}(\mathbf{W}_1 \cup \mathbf{W}_2)$.

2.6. Fie $\mathbf{W}_1$ și $\mathbf{W}_2$ două subspații vectoriale și $v \in \mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2$. Descompunerea $v = v_1 + v_2$, $v_1 \in \mathbf{W}_1$, $v_2 \in \mathbf{W}_2$, este unică dacă și numai dacă $\mathbf{W}_1 \cap \mathbf{W}_2 = \{0\}$.

Dacă $\mathbf{W}_1 \cap \mathbf{W}_2 = \{0\}$, atunci suma $\mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2$ se numește *sumă directă* și se notează cu $\mathbf{W}_1 \oplus \mathbf{W}_2$. În plus, dacă $\mathbf{W}_1 \oplus \mathbf{W}_2 = \mathbf{V}$, atunci $\mathbf{W}_1$ și $\mathbf{W}_2$ se numesc *subspații suplimentare.*

2.7. Fie $\mathbf{V}$ un spațiu vectorial peste cîmpul $\boldsymbol{K}$. O mulțime $\mathbf{S}$ de elemente din $\mathbf{V}$ este numită *liniar dependentă* dacă există o mulțime finită de elemente distincte din S, să zicem $v_1, ..., v_p$, și scalarii $k_1, ..., k_p$, cel puțin unul dintre scalari fiind diferit de zero, astfel încît $\sum_{i=1}^{p} k_i v_i = 0$. Mulțimea **S** se zice *liniar independentă* dacă nu este liniar dependentă; cu alte cuvinte pentru orice alegere a elementelor $v_i \in \mathbf{S}$ și a scalarilor k_i, relația $\sum_{i=1}^{p} k_i v_i = 0$ implică $k_1 = ... = k_p = 0$.

Uneori în loc de mulțime liniar dependentă respectiv liniar independentă se zice direct *vectori liniar dependenți respectiv liniar independenți.*

2.8. Fie $\mathbf{S} = \{v_1, ..., v_p\}$ o mulțime liniar independentă și $\mathbf{L(S)}$ acoperirea liniară a lui **S**. Orice mulțime de $p + 1$ elemente din $\mathbf{L(S)}$ este liniar dependentă.

2.9. Fie **V** un spațiu vectorial peste cîmpul $\boldsymbol{K}$. O mulțime B de elemente din **V** este numită *bază* pentru **V** dacă B este liniar independentă și generează pe **V**. Spațiul **V** se numește *finit dimensional* dacă posedă o bază finită sau dacă $\mathbf{V} = \{0\}$. În caz contrar **V** se numește infinit dimensional.

2.10. Dacă **V** este un spațiu finit dimensional, atunci orice două baze ale lui **V** au același număr de elemente.

Dacă **V** are o bază formată din n elemente, atunci numărul n se numește *dimensiunea lui* **V**. Se scrie $\dim \mathbf{V} = n$ sau $\mathbf{V}_n$.

2.11. Orice mulțime de vectori liniar independenți din $\mathbf{V}_n$ este o submulțime a unei baze. Orice mulțime formată din n elemente liniar independente din $\mathbf{V}_n$ este o bază a lui $\mathbf{V}_n$.

2.12. Fie $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ o bază a spațiului vectorial $\mathbf{V}_n$. Orice vector $v \in \mathbf{V}$ se exprimă unic în forma

$$v = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i.$$

Numerele x_i se numesc *coordonatele lui v în raport cu baza B*, iar bijecția $f: \mathbf{V} \to \boldsymbol{K}^n$ definită prin $v \to (x_1, x_2, ..., x_n)$ se numește *sistem de coordonate* pe **V**.

2.13. Dacă în $\mathbf{V}_n$ este fixată o bază B, atunci se preferă identificarea $v = (x_1, x_2, ..., x_n)$. În acest caz $kv = (kx_1, kx_2, ..., kx_n)$ și dacă $w = (y_1, y_2, ..., y_n)$, atunci $v + w = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)$.

2.14. Fie $\mathbf{V}_n$ un spațiu vectorial peste cîmpul $\boldsymbol{K}$, $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ o matrice pătratică cu elemente din $\boldsymbol{K}$ și $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ o bază a lui $\mathbf{V}_n$. Mulțimea $\mathbf{B}' = \left\{e_i' = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} e_j,\ i = 1, 2, ..., n\right\}$ este o bază a lui $\mathbf{V}_n$ dacă și numai dacă $\det \mathbf{A} \neq 0$.

Dacă $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ și $B' = \{e_1', e_2', ..., e_n'\}$ sînt baze ale lui $\mathbf{V}_n$, iar x_i respectiv x_i' sînt coordonatele unui vector v în raport cu B și B', atunci $x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j'$, $i = 1, 2, ..., n$.

Notînd $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, $\mathbf{A} = [a_{ij}]$, $\mathbf{X}' = \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix}$ avem scrierea matriceală $\mathbf{X} = \mathbf{AX}'$.

2.15. Fie $\mathbf{V}$ și $\mathbf{W}$ două spații vectoriale peste cîmpul $\boldsymbol{K}$. O aplicație $\mathcal{T}:\mathbf{V} \to \mathbf{W}$ care satisface

$$\mathcal{T}(u + v) = \mathcal{T}(u) + \mathcal{T}(v)$$

$$\mathcal{T}(ku) = k\mathcal{T}(u), \quad \forall u, v \in \mathbf{V}, \quad \forall k \in \boldsymbol{K},$$

se numește *transformare liniară*. O transformare liniară bijectivă se numește *izomorfism*.

Două spații vectoriale $\mathbf{V}$ și $\mathbf{W}$ peste cîmpul $\boldsymbol{K}$, de dimensiuni finite, sînt izomorfe dacă și numai dacă au aceeași dimensiune.

2.16. Fie $\mathbf{V}$ un spațiu vectorial real. Pe $\mathbf{V} \times \mathbf{V}$ definim operațiile

$$(u, v) + (x, y) = (u + x, v + y),$$

$$(a + ib)(u, v) = (au - bv, bu + av),$$

unde $a + ib \in \boldsymbol{C}$. Se arată că $\mathbf{V} \times \mathbf{V}$ este un spațiu vectorial peste $\boldsymbol{C}$.

Spațiul vectorial complex $\mathbf{V} \times \mathbf{V}$ se numește *complexificatul* spațiului $\mathbf{V}$ și se notează cu ${}^{C}\mathbf{V}$.

Se observă că $(0, v) = \mathrm{i}(v, 0)$ și dacă admitem identificarea $(u, 0) \equiv u$, atunci $(u, v) = (u, 0) + (0, v) = u + \mathrm{i}v$. Deci ${}^{C}\mathbf{V} = \mathbf{V} \oplus (\mathrm{i}\mathbf{V})$, unde $\mathrm{i}\mathbf{V} = \{(0, v) \mid v \in \mathbf{V}\}$.

În particular, ${}^{C}\boldsymbol{R}^n = \boldsymbol{C}^n$.

2.17. Fie $\mathbf{V}$ un spațiu vectorial complex. Spațiul vectorial real ${}^{R}\mathbf{V}$ care coincide cu $\mathbf{V}$ ca grup și în care înmulțirea cu un număr real se face ca în $\mathbf{V}$ se numește *trecerea în real* a lui $\mathbf{V}$. În particular, ${}^{R}\boldsymbol{C}^n = \boldsymbol{R}^{2n}$.

2.18. Fie $\mathbf{V}$ un spațiu vectorial complex. O aplicație (v, w) definită pe $\mathbf{V} \times \mathbf{V}$ și cu valori în $\boldsymbol{C}$ care are proprietățile

$$(v, w) = \overline{(w, v)}$$

$$(u, v + w) = (u, v) + (u, w),$$

$$k(v, w) = (kv, w), \ \forall k \in \boldsymbol{C},$$

$$(v, v) \geqslant 0; \ (v, v) = 0 \Leftrightarrow v = 0,$$

se numește *produs scalar* pe $\mathbf{V}$.

Axiomele precedente au următoarele consecințe

$$(v, kw) = \bar{k}(v, w),$$

$$(u + v, w) = (u, w) + (v, w),$$

inegalitatea lui Schwarz $|(v, w)|^2 \leqslant (v, v)(w, w)$.

Dacă $\mathbf{V}$ este un spațiu vectorial real, atunci în definiția precedentă $\boldsymbol{C}$ se înlocuiește cu $\boldsymbol{R}$, axioma $(v, w) = \overline{(w, v)}$ se înlocuiește cu $(v, w) = (w, v)$, iar consecința $(v, kw) = \bar{k}(v, w)$ devine $(v, kw) = k(v, w)$.

2.19. Un spațiu vectorial (real sau complex) pe care s-a definit un produs scalar se numește *spațiu euclidian (real sau complex)*.

2.20. Fie $\mathbf{V}$ un spațiu euclidian. Funcția $\| \ \| : \mathbf{V} \to \boldsymbol{R}_+$ definită prin $\|v\| = \sqrt{(v, v)}$ este o *normă*. Cu această noțiune inegalitatea lui Schwarz se transcrie $|(v, w)| \leqslant \|v\| \|w\|$.

2.21. Proprietățile normei care nu depind de alegerea produsului scalar pe $\mathbf{V}$ sînt următoarele

$$\|v\| > 0 \text{ pentru } v \neq 0, \ \|0\| = 0,$$

$$\|kv\| = |k|\,\|v\|, \ k = \text{scalar},$$

$$\|v + w\| \leqslant \|v\| + \|w\| \text{ (inegalitatea triunghiului).}$$

2.22. Un spațiu vectorial dotat cu o normă se numește *spațiu vectorial normat*. Un spațiu vectorial normat în care norma provine dintr-un produs scalar se numește *spațiu prehilbertian*.

Un spațiu prehilbertian complet (în sensul că orice șir Cauchy de elemente din spațiu este un șir convergent) se numește *spațiu Hilbert*.

2.23. Fie $\mathbf{V}$ un spațiu vectorial normat. Funcția definită prin $d(u, v) = \|u - v\|$ este o *distanță* pe $\mathbf{V}$, adică satisface relațiile:

$$d(u, v) \geqslant 0; \ d(u, v) = 0 \Leftrightarrow u = v;$$

$$d(u, v) = d(v, u)$$

$$d(u, v) \leqslant d(u, w) + d(w, v), \ \forall u, v, w \in \mathbf{V}.$$

Astfel orice spațiu vectorial normat este un spațiu metric.

2.24. Fie $\mathbf{V}$ un spațiu euclidian real și v, w doi vectori nenuli din $\mathbf{V}$. Prin *unghiul dintre v și w* înțelegem numărul $\theta \in [0, \pi]$ definit de egalitatea

$$\cos\theta = \frac{(v, w)}{\|v\|\,\|w\|}.$$

2.25. Fie v un vector nenul din spațiul euclidian $\mathbf{V}$. Vectorul $e = \frac{1}{\|v\|} v$ se numește *versorul* lui $\mathbf{V}$. Evident $\|e\| = 1$.

2.26. Fie $\mathbf{V}$ un spațiu euclidian. Doi vectori din $\mathbf{V}$ se numesc *ortogonali* dacă produsul lor scalar este nul. O submulțime $S \subset \mathbf{V}$ se numește *mulțime ortogonală* dacă $(v, w) = 0, \ \forall v, \ w \in \mathbf{S}$. O mulțime ortogonală se numește *ortonormată* dacă fiecare vector al său are norma 1.

2.27. Orice mulțime ortogonală de elemente nenule dintr-un spațiu euclidian $\mathbf{V}$ este liniar independentă. În particular dacă $\dim \mathbf{V} = n$, atunci orice mulțime ortogonală alcătuită din n elemente nenule este o bază a lui $\mathbf{V}$.

2.28. Fie $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ o bază ortogonală în $\mathbf{V}_n$ și $v = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ un vector oarecare. Coordonatele lui v au expresiile

$$x_i = \frac{(x, e_i)}{(e_i, e_i)}, \quad i = 1, 2, ..., n.$$

În particular dacă B este o bază ortonormată, atunci $x_i = (x, e_i)$.

Coordonatele unui vector în raport cu baza ortonormată a spațiului euclidian se numesc *coordonate euclidiene*.

2.29. *(Formula lui Parseval)*. Fie $B = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ o bază ortonormată din $\mathbf{V}_n$. Pentru orice doi vectori $v, w \in \mathbf{V}_n$ avem

$$(v, w) = \sum_{i=1}^{n} (v, e_i)\,\overline{(w, e_i)}.$$

În particular

$$\|v\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |(v, e_i)|^2.$$

2.30. Orice spațiu euclidian finit dimensional are o bază ortonormată. Demonstrația acestei teoreme se reduce la procedeul de ortogonalizare Gram-Schmidt.

2.31. Fie **V** un spațiu euclidian și **S** o submulțime a sa. Un vector din **V** se zice *ortogonal lui* **S** dacă el este ortogonal pe orice vector din **S**. Mulțimea tuturor vectorilor ortogonali lui **S** se notează cu $\mathbf{S}^{\perp}$.

$\mathbf{S}^{\perp}$ este un subspațiu vectorial al lui **V**. În cazul că și **S** este un subspațiu, atunci $\mathbf{S}^{\perp}$ se numește *complementul ortogonal* al lui **S**.

2.32. Fie **V** un spațiu euclidian și **W** un subspațiu finit dimensional al lui **V**. Avem $\mathbf{V} = W \oplus W^{\perp}$, adică orice element $v \in \mathbf{V}$ se poate exprima unic în forma $v = w + w^{\perp}$, unde $w \in \mathbf{W}$ și $w^{\perp} \in \mathbf{W}^{\perp}$. În plus $\|v\|^2 = \|w\|^2 + \|w^{\perp}\|^2$.

Fie $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ o bază ortonormată a lui **W** și v un vector din **V**. Vectorul $w = \sum_{i=1}^{n} (v, e_i)\, e_i$ se numește proiecția lui v pe subspațiul W.

Exerciții și probleme

1. *(Spațiul vectorial aritmetic).* Fie $\boldsymbol{K}$ un cîmp oarecare cu ajutorul căruia construim mulțimea $\boldsymbol{K}^n = \boldsymbol{K} \times \boldsymbol{K} \times \ldots \times \boldsymbol{K} = \{(k_1, k_2, \ldots, k_n) \mid k_i \in \boldsymbol{K}\}$. $\forall x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \boldsymbol{K}^n$ definim

$$x + y = (x_1 + y_1,\ x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$$

$$kx = (kx_1,\ kx_2, \ldots, kx_n), \quad \forall k \in \boldsymbol{K}.$$

Să se arate că mulțimea $\boldsymbol{K}^n$ este un spațiu vectorial peste $\boldsymbol{K}$.

2. Fie cîmpul $\boldsymbol{K}_{(2)}$ ale cărui elemente sînt 0 și 1, iar operațiile de adunare și înmulțire sînt definite după cum urmează

+	0	1
0	0	1
1	1	0

.	0	1
0	0	0
1	0	1

1) Să se organizeze $\boldsymbol{K}_{(2)}^2 = \boldsymbol{K}_{(2)} \times \boldsymbol{K}_{(2)}$ ca spațiu vectorial peste $\boldsymbol{K}_{(2)}$.

2) Cîte elemente conține acest spațiu?

3) Să se arate că oricare ar fi $w \in \mathbf{K}_{(2)}^2$ avem $w + w = (0, 0)$.

3. Să se arate că mulțimea $\mathcal{M}_{m \times n}(\boldsymbol{K})$ a matricelor de tipul $m \times n$ cu elemente din cîmpul $\boldsymbol{K}$ este un spațiu vectorial peste **K** în raport cu adunarea matricelor și înmulțirea dintre un scalar și o matrice.

4. Să se arate că mulțimea $\boldsymbol{K}[X]$ a polinoamelor în nedeterminata X cu coeficienți din cîmpul $\boldsymbol{K}$ este un spațiu vectorial peste cîmpul $\boldsymbol{K}$ în raport cu adunarea polinoamelor și cu înmulțirea dintre un polinom și un element din $\boldsymbol{K}$.

Soluție. Fie f, g, h$\in \boldsymbol{K}[X]$, $f = a_0 + a_1X + \ldots + a_mX^m$, $g = b_0 + b_1X + \ldots + b_nX^n$, $h = c_0 + c_1X + \ldots + c_pX^p$ cu $a_m, b_n, c_p \neq 0$. Fără a scădea generalitatea putem presupune $m \leqslant n \leqslant p$.

Să arătăm că perechea $(\boldsymbol{K}[X], +)$ este un grup aditiv comutativ.

$f+g=g+f : f+g=(a_0+a_1X+...+a_mX^m)+(b_0+b_1X+...+b_nX^n) =$ (definiție), $(a_0+b_0)+(a_1+b_1)X+...+(a_m+b_m)X^m+b_{m+1}X^{m+1}+...+b_nX^n =$ (comutativitatea adunării pe $\boldsymbol{K}$), $(b_0+a_0)+(b_1+a_1)X+...+(b_m+a_m)X^m+b_{m+1}X^{m+1}+...+b_nX^n =$ (definiție) $g+f$;

$(f+g)+h=f+(g+h) : (f+g)+h=[a_0+b_0+(a_1+b_1)X+...+(a_m+b_m)X^m+b_{m+1}X^{m+1}+...+b_nX^n]+(c_0+c_1X+...+c_pX^p) =$ (definiție), $[(a_0+b_0)+c_0]+[(a_1+b_1)+c_1]X+...+[(a_m+b_m)+c_m]X^m+(b_{m+1}+c_{m+1})X^{m+1}+...+(b_n+c_n)X^n+c_{n+1}X^{n+1}+...+c_pX^p =$ (asociativitatea adunării din $\boldsymbol{K}$), $[a_0+(b_0+c_0)]+[a_1+(b_1+c_1)]X+...+[a_m+(b_m+c_m)]X^m+(b_{m+1}+c_{m+1})X^{m+1}+...+(b_n+c_n)X^n+c_{n+1}X^{n+1}+...+c_pX^p =$ (definiție), $f+(g+h)$;

Elementul neutru este $f=0$, iar opusul lui f este $-f$.

Să verificăm proprietățile aplicației kf.

$1f=f : 1f =$ (definiție), $(1\cdot a_0)+(1\cdot a_1)X+...+(1\cdot a_m)X^m =$ (proprietățile înmulțirii din $\boldsymbol{K}$), $a_0+a_1X+...+a_mX^m=f$;

$(kl)f=k(lf)$, $k, l\in\boldsymbol{K}$: $(kl)f =$ (definiție), $(kl)a_0+(kl)a_1X+...+(kl)a_mX^m =$ (proprietățile înmulțirii din $\boldsymbol{K}$), $k(la_0)+k(la_1)X+...+k(la_m)X^m =$ (definiție), $k(lf)$;

$(k+l)f=kf+lf$: $(k+l)f =$ (definiție), $(k+l)a_0+(k+l)a_1X+...+(k+l)a_mX^m =$ (proprietățile înmulțirii din $\boldsymbol{K}$), $[(ka_0)+(la_0)]+[(ka_1)+(la_1)]X+...+[(ka_m)+(la_m)]X^m =$ (definiție), $kf+lf$;

$k(f+g)=kf+kg$: $k(f+g) =$ (definiție), $k(a_0+b_0)+k(a_1+b_1)X+...+k(a_m+b_m)X^m+... =$ (proprietățile înmulțirii din $\mathbf{K}$), $[(ka_0)+(kb_0)]+[(ka_1)+(kb_1)]X+...+[(ka_m)+(kb_m)]X^m+... =$ (definiție), $kf+kg$.

5. Fie $\boldsymbol{K}[X]$ spațiul vectorial peste cîmpul $\boldsymbol{K}$ al polinoamelor în nedeterminata X cu coeficienți din $\boldsymbol{K}$. Să se stabilească care dintre următoarele submulțimi este un spațiu vectorial peste cîmpul $\boldsymbol{K}$.

1) mulțimea $\boldsymbol{K}_n[X]$ a polinoamelor de grad cel mult n,

2) mulțimea polinoamelor de grad cel puțin n.

R: 1) Da, 2) Nu.

6. Fie $\mathbf{V}$ un spațiu vectorial peste cîmpul $\boldsymbol{K}$ și $\mathbf{S}$ o mulțime nevidă. Definim $F=\{f \mid f: \mathbf{S}\to\mathbf{V}\}$, $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$, $\forall f, g\in F$, $(kf)(x)=kf(x)$, $\forall k\in\boldsymbol{K}$. Să se arate că F este un spațiu vectorial peste $\boldsymbol{K}$.

7. Să se arate că următoarele mulțimi sînt respectiv spații vectoriale reale în raport cu adunarea funcțiilor și cu înmulțirea dintre o funcție și un număr real.

1) $\{f \mid f: I\to\boldsymbol{R},\ I=$ interval din R, f este derivabilă$\}$

2) $\{f \mid f: I\to\boldsymbol{R},\ I=$ interval din R, f admite primitive$\}$

3) $\{f \mid f: [a, b]\to\boldsymbol{R}$, f este integrabilă$\}$.

8. Să se arate că mulțimea soluțiilor unei ecuații diferențiale ordinare, liniară și omogenă, este un spațiu vectorial real în raport cu adunarea funcțiilor și înmulțirea dintre un număr real și o funcție.

Indicație. O ecuație diferențială ordinară, liniară și omogenă, are forma $a_0(x)y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+...+a_{n-1}(x)y^{(1)}+a_n(x)y=0$, unde $x\to a_i(x)$ sînt funcții reale continui.

9. Să se stabilească care dintre următoarele perechi de operații definesc pe $\boldsymbol{R}^2$ o structură de spațiu vectorial și care nu,

1) $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, 0)$; $\quad k(x_1, x_2) = (kx_1, kx_2),\ k \in \boldsymbol{R}$

2) $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, y_2)$; $\quad k(x_1, x_2) = (kx_1, kx_2),\ k \in \boldsymbol{R}$

3) $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$; $\quad k(x_1, x_2) = (0, kx_2),\ k \in \boldsymbol{R}$

4) $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$; $\quad k(x_1, x_2) = (\alpha + i\beta)(x_1, x_2) =$
$= (\alpha x_1 - \beta x_2, \beta x_1 + \alpha x_2)$; $\ k \in \mathbb{C},\ \ \alpha, \beta \in \boldsymbol{R}$

R: 1) Nu admite element neutru față de adunare; 2) Adunarea nu este comutativă; 3) Nu este îndeplinită axioma $1v = v$; 4) Da.

10. Fie $\mathbf{V}_3$ spațiul vectorial real al segmentelor orientate cu originea comună în care considerăm următoarele submulțimi de vectori.

1) mulțimea U a vectorilor care formează cu un vector nenul dat v un unghi $\varphi \in [0, \pi]$;

2) mulțimea O_1 a vectorilor ale căror extremități se află în primul octant;

3) mulțimea W a vectorilor ale căror extremități aparțin unui plan dat π.

Să se precizeze care dintre mulțimile U, O_1, W sînt subspații vectoriale.

11. Dîndu-se spațiul vectorial $\mathbf{P}_n$ al funcțiilor polinomiale reale care au cel mult gradul n, să se cerceteze care din următoarele submulțimi sînt subspații vectoriale

1) $\mathbf{A} = \{p(x) \mid p(0) = h,\ h \in \boldsymbol{R}\}$, $\quad$ 2) $\mathbf{B} = \{p(x) \mid 3\,p(0) - 2p(1) = 0\}$

3) $\mathbf{C} = \{p(x) \mid p(1) + p(2) + \ldots + p(k) = 0\}$

12. Fie subspațiile vectoriale $\mathbf{W}$ și $\mathbf{U}$ generate respectiv de vectorii $w_1 = (1, 1, 1)$, $w_2 = (0, 3, 1)$, $w_3 = (2, -1, 1)$; $u_1 = (1, -2, 4)$, $u_2 = (-2, 4, -8)$.

1) Să se verifice dacă sînt subspații suplimentare.

2) Să se găsească descompunerea vectorului $v = (5, -7, 13)$ pe aceste subspații.

Soluție. Va trebui să arătăm că $\mathbf{W} \cap \mathbf{U} = \{0\}$ și $\mathbf{W} \oplus \mathbf{U} = \boldsymbol{R}^3$. Subspațiul vectorial $\mathbf{W} \cap \mathbf{U}$ conține acei vectori pentru care

$$\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \alpha_3 w_3 = \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2.$$

Folosind operațiile cu vectori, această egalitate vectorială se transcrie în forma

$$\begin{cases} \alpha_1 + 0 \cdot \alpha_2 + 2\alpha_3 = \beta_1 - 2\beta_2 \\ \alpha_1 + 3\alpha_2 - \alpha_3 = -2\beta_1 + 4\beta_2 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 4\beta_1 - 8\beta_2 \end{cases}$$

Privim acest ansamblu de egalități ca fiind un sistem liniar în necunoscutele $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ cu parametrii β_1, β_2. Rangul matricei sistemului este doi și deci, conform teoremei Rouché, compatibilitatea este asigurată de anularea determinantului caracteristic,

$$\beta_1 - 2\beta_2 = 0.$$

Obținem soluția $\beta_1 = 2k$, $\beta_2 = k$, $k \in \boldsymbol{R}$ pentru care $\beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 = 2ku_1 + ku_2 = (0, 0, 0)$. Cu β_j, $j = 1, 2$, astfel găsiți deducem

$$\begin{cases} \alpha_1 + 3\alpha_2 - \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0, \end{cases}$$

de unde $\alpha_1 = -2h$, $\alpha_2 = h$, $\alpha_3 = h$, $h \in \boldsymbol{R}$. Se verifică $\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \alpha_3 w_3 = (0, 0, 0)$ și deci singurul vector comun subspațiilor $\mathbf{W}$ și $\mathbf{U}$ este vectorul zero.

Se știe că suma a două subspații vectoriale coincide cu acoperirea liniară a reuniunii subspațiilor respective. Deci $\mathbf{W} + \mathbf{U} = \mathbf{L}(\{w_1, w_2, w_3, u_1, u_2\})$. Un vector $v \in (\mathbf{W} + \mathbf{U})$ este de *forma* $v = k_1 w_1 + k_2 w_2 + k_3 w_3 + k_4 u_1 + k_5 u_2$ și deci aparține lui $\boldsymbol{R}^3$. Rezultă $\mathbf{W} + \mathbf{U} \subseteq \boldsymbol{R}^3$. Să arătăm că $\boldsymbol{R}^3 \subseteq \mathbf{W} + \mathbf{U}$. Într-adevăr, pentru fiecare $v = (v_1, v_2, v_3)$ există numerele reale k_1, k_2, k_3, k_4, k_5 astfel încît

$$k_1 w_1 + k_2 w_2 + k_3 w_3 + k_4 u_1 + k_5 u_2 = v$$

deoarece această relație este echivalentă cu sistemul liniar

$$(*) \begin{cases} k_1 + 2k_3 + k_4 - 2k_5 = v_1 \\ k_1 + 3k_2 - k_3 - 2k_4 + 4k_5 = v_2 \\ k_1 + k_2 + k_3 + 4k_4 - 8k_5 = v_3, \end{cases}$$

care este compatibil nedeterminat. Prin urmare $\mathbf{W} \oplus \mathbf{U} = \boldsymbol{R}^3$.

2) Înlocuirea lui $v = (5, -7, 13)$ în $(*)$ conduce la sistemul liniar

$$\begin{cases} k_1 + 2k_3 + k_4 - 2k_5 = 5 \\ k_1 + 3k_2 - k_3 - 2k_4 + 4k_5 = -7 \\ k_1 + k_2 + k_3 + 4k_4 - 8k_5 = 13 \end{cases}$$

a cărui soluție este $(-2\lambda, \lambda, 1+\lambda, 3+2\mu, \mu)$; $\lambda, \mu \in \boldsymbol{R}$.

Vectorul v se descompune unic $v = x + y = [(-2\lambda) w_1 + \lambda w_2 + (1+\lambda) w_3] + [(3 + 2\mu) u_1 + \mu u_2]$, $\lambda, \mu \in \boldsymbol{R}$.
Găsim $v = (2, -1, 1) + (3, -6, 12)$.

13. *(Subspațiul funcțiilor reale pare)*. Să se arate că mulțimea funcțiilor $f : (-a, a) \to \boldsymbol{R}$ care satisfac condiția $f(-x) = f(x)$, $\forall x \in (-a, a)$ este un subspațiu vectorial al spațiului tuturor funcțiilor reale definite pe $(-a, a)$.

(Subspațiul funcțiilor reale impare). Să se arate că mulțimea funcțiilor $f : (-a, a) \to \boldsymbol{R}$ care satisface condiția $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in (-a, a)$, este un subspațiu al spațiului tuturor funcțiilor reale definite pe $(-a, a)$.

Observație. Subspațiile vectoriale ale funcțiilor pare și respectiv impare sînt suplimentare în spațiul vectorial F al tuturor funcțiilor reale întrucît intersecția lor este funcția zero și

$$f(x) = \frac{1}{2}\{f(x) + f(-x)\} + \frac{1}{2}\{f(x) - f(-x)\}, \quad \forall x \in (-a, a); \quad \forall f \in F,$$

adică orice funcție este suma dintre o funcție pară și una impară.

14. Fie numerele reale distincte $a_1, a_2, \ldots, a_n$ și funcțiile exponențiale $f_1, f_2, \ldots, f_n$ definite respectiv prin $f_i(x) = e^{a_i x}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Să se arate că $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ este o mulțime liniar independentă în spațiul vectorial real al tuturor funcțiilor reale definite pe $\boldsymbol{R}$.

Soluție. Utilizăm inducția. Oricare dintre funcțiile $f_i(x) = e^{a_i x}$ este liniar independentă deoarece este diferită de zero. Presupunem că $n-1$ dintre aceste funcții sînt liniar independente. Să arătăm că cele n funcții sînt liniar independente. Pentru aceasta fie $k_1, k_2, \dots, k_n$ numerele reale cu proprietatea $k_1 f_1 + k_2 f_2 + \dots + k_n f_n = 0$ sau echivalent $\sum\limits_{i=1}^{n} k_i e^{a_i x} = 0$, $\forall x \in \boldsymbol{R}$. Notînd $a_m = \max\limits_n a_n$ rezultă $k_1 e^{(a_1 - a_m)x} + \dots + k_{m-1} e^{(a_{m-1} - a_m)x} + k_m + k_{m+1} e^{(a_{m+1} - a_m)x} + \dots + k_n e^{(a_n - a_m)x} = 0$. Trecînd la limită pentru $x \to \infty$ găsim $k_m = 0$ și rămîne $k_1 f_1 + \dots + k_{m-1} f_{m-1} + k_{m+1} f_{m+1} + \dots + k_n f_n = 0$. Pe de altă parte, prin ipoteză, $\{f_1, f_2, \dots, f_n\} - \{f_m,\ m = \text{fixat}\}$ este o mulțime liniar independentă. Deci $k_1 = k_2 = \dots = k_n = 0$.

15. Fie $\boldsymbol{D}$ un domeniu din $\boldsymbol{R}^n$ și $C^0(\boldsymbol{D})$ mulțimea funcțiilor reale continui definite pe $\boldsymbol{D}$.

1) Să se arate că $C^0(\boldsymbol{D})$ este un spațiu vectorial real.

2) Să se demonstreze că dacă $f \neq \text{const}$, atunci $\{1, f, f^2, \dots, f^n, \dots\}$ este o mulțime liniar independentă în $C^0(\boldsymbol{D})$.

16. 1) *(Spațiul vectorial aritmetic cu n dimensiuni).* Fie spațiul vectorial aritmetic $\boldsymbol{K}^n$. Să se arate că vectorii

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0), \quad e_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, e_n = (0, 0, \dots, 1)$$

constituie o bază a lui $\boldsymbol{K}^n$ și deci $\dim \boldsymbol{K}^n = n$.

Mulțimea $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ se numește *baza canonică* a lui $\boldsymbol{K}^n$.

2) Fie $\mathcal{M}_{m\times n}(\boldsymbol{K})$ spațiul vectorial al matricelor de tipul $m \times n$. Să se arate că matricele

$$E_{ij} = \begin{array}{c c} & \\ & \left[\begin{array}{ccccc} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & & & & \dots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \dots & & & & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{array}\right] \\ & \begin{array}{ccccc} & & j & & \end{array} \end{array}$$

(rîndul i, coloana j)

constituie o bază a lui $\mathcal{M}_{m\times n}(\boldsymbol{K})$ și deci $\dim \mathcal{M}_{m\times n}(\boldsymbol{K}) = mn$.

Mulțimea $\{E_{ij};\ i = 1, 2, \dots, m;\ j = 1, 2, \dots, n\}$ se numește *baza canonică* a lui $\mathcal{M}_{m\times n}(\boldsymbol{K})$.

3) Fie $\boldsymbol{K}_n[X]$ spațiul vectorial al polinoamelor de grad cel mult n, în nedeterminata X. Să se arate că polinoamele

$$1, X, X^2, \dots, X^n$$

constituie o bază a lui $\boldsymbol{K}_n[X]$ și deci $\dim \boldsymbol{K}_n[X] = n+1$.

Mulțimea $\{1, X, X^2, \dots, X^n\}$ poartă numele de *baza canonică* a lui $\boldsymbol{K}_n[X]$.

4) Fie $\boldsymbol{K}[X]$ spațiul vectorial al tuturor polinoamelor în nedeterminata X. Să se arate că polinoamele

$$1, X, X^2, \dots, X^n, \dots$$

constituie o bază a lui $\boldsymbol{K}[X]$ și deci $\dim \boldsymbol{K}[X] = \infty$.

Mulțimea $\{1, X, X^2, \dots, X^n, \dots\}$ poartă numele de *bază canonică* a lui $\boldsymbol{K}[X]$.

Soluție. 1) Relația $k_1 e_1 + k_2 e_2 + \dots + k_n e_n = 0$ implică $(k_1, k_2, \dots, k_n) = (0, 0, \dots, 0)$ și deci $k_1 = k_2 = \dots = k_n = 0$. Astfel vectorii $e_1, e_2, \dots, e_n$ sînt liniar independenți.

Orice element $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ din $\boldsymbol{K}^n$ se poate scrie în forma $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$ și deci $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ generează pe $\boldsymbol{K}^n$.

În concluzie $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ este o bază a lui $\boldsymbol{K}^n$.

2) Fie $A = [a_{ij}]$ o matrice de tipul $m \times n$ cu elemente din $\boldsymbol{K}$. Aplicația $\mathcal{T}$: $\mathcal{M}_{m\times n}(\boldsymbol{K}) \to \boldsymbol{K}^{mn}$ definită prin

$$[a_{ij}] \to (a_{11}, ..., a_{1n}, a_{21}, ..., a_{2n}, ..., a_{m1}, ..., a_{mn})$$

este un izomorfism. De aceea $\{E_{ij};\ i = 1, 2, ..., m;\ \ j = 1, 2, ..., n\}$ este o bază a lui $\mathcal{M}_{m\times n}(\boldsymbol{K})$ și dim $\mathcal{M}_{m\times n}(\boldsymbol{K}) = mn$.

3) Fie $p = a_0 + a_1X + ... + a_nX^n$ un polinom de gradul cel mult n cu coeficienți din $\boldsymbol{K}$. Aplicația $\mathcal{T}$: $\boldsymbol{K}_n[X] \to \boldsymbol{K}^{n+1}$ definită prin

$$p \to (a_0, a_1, ..., a_n)$$

este un izomorfism. De aceea $\{1, X, X^2, ..., X^n\}$ este o bază a lui $\boldsymbol{K}_n[X]$ și dim $\boldsymbol{K}_n[X] = n + 1$.

4) Reamintim că o mulțime infinită de vectori dintr-un spațiu vectorial se numește liniar independentă dacă orice submulțime finită a sa este liniar independentă.

Presupunem $k_{i_1}X^{i_1} + k_{i_2}X^{i_2} + ... + k_{i_p}X^{i_p} = 0$, $i_1 < i_2 ... < i_p$. Rezultă $k_{i_1} = k_{i_2} = ... = k_{i_p} = 0$ și deci submulțimea $\{X^{i_1}, X^{i_2}, ..., X^{i_p}\}$ este liniar independentă. Deoarece succesiunea $i_1 < i_2 < ... < i_p$ este arbitrară rezultă că $\{1, X, X^2, ..., X^n, ...\}$ este o mulțime independentă.

Pe de altă parte, orice polinom se poate scrie ca o combinație liniară finită de elemente din $\{1, X, X^2, ..., X^n, ...\}$. Cu alte cuvinte $\mathbf{L}(\{1, X, X^2, ..., X^n, ...\}) = \boldsymbol{K}[X]$.

Astfel $\{1, X, X^2, ..., X^n, ...\}$ este o bază a lui $\boldsymbol{K}[X]$ și deci dim $\boldsymbol{K}[X] = \infty$.

17. Considerăm funcțiile reale continui $x \to a_i(x)$, $i = 0, 1, ..., n$, și ecuația diferențială ordinară, liniară și omogenă,

$$a_0(x)\, y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}(x)\, y^{(1)} + a_n(x) y = 0, \quad a_0(x) \neq 0, \quad \forall x \in I$$

Să se arate că dimensiunea spațiului vectorial real al tuturor soluțiilor acestei ecuații este n.

Soluție. Fie $\mathbf{Y}$ spațiul vectorial real al soluțiilor ecuației date. Oricărei funcții $y \in \mathbf{Y}$ îi putem atașa ansamblul $(y(0), y^{(1)}(0), ..., y^{(n-1)}(0))$. Obținem aplicația $\mathcal{T}$: $\mathbf{Y} \to \boldsymbol{R}^n$, $\mathcal{T}(y) = (y(0), y^{(1)}(0), ..., y^{(n-1)}(0))$. Această aplicație este liniară și are ca imagine întreg spațiul $\boldsymbol{R}^n$. Într-adevăr, teorema de existență precizează că pentru orice condiții inițiale $(y(0), y^{(1)}(0), ..., y^{(n-1)}(0))$ există o soluție $y \in \mathbf{Y}$.

Pe de altă parte, teorema de unicitate asigură că $\mathcal{T}$ este injectivă.

În concluzie $\mathcal{T}$ este un izomorfism și deci dim $\mathbf{Y} = n$.

18. Fiind dat un polinom nenul p al spațiului vectorial $\boldsymbol{R}_n[X]$, să se arate că p și primele sale n derivate formează o mulțime liniar independentă.

19. Să se arate că polinoamele $1, X-a, (X-a)^2, ..., (X-a)^n$, $a \in \boldsymbol{R}$ formează o bază a spațiului $\boldsymbol{R}_n[X]$. Să se expliciteze coordonatele unui polinom $p \in \boldsymbol{R}_n[X]$ în această bază.

20. Să se precizeze care dintre următoarele submulțimi din $\boldsymbol{R}^3$ sînt subspații vectoriale și în caz afirmativ să se stabilească dimensiunea subspațiului

A: $x_1 - x_2 + 5x_3 = 0$, **B**: $x_1 - x_2 + 5x_3 = 4$, **C**: $\operatorname{tg} x_1 = \pm 1$,

D: $\operatorname{tg} x_2 = 0$, **E**: $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 25$, **F**: $x_1 = x_2 = x_3$,

G: $x_1 = x_3 = 0$, **H**: $2^{x_2} + 7^{x_3} = 15$.

Soluție. Submulțimea **A** se mai poate scrie

$$\mathbf{A} = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_i \in \boldsymbol{R},\ x_1 - x_2 + 5x_3 = 0\} \text{ sau } \mathbf{A} = \{(x_2 - 5x_3, x_2, x_3) \mid x_2, x_3 \in \boldsymbol{R}\}$$

Această mulțime este subspațiu deoarece

$$x + y = (x_2 - 5x_3, x_2, x_3) + (y_2 - 5y_3, y_2, y_3) = [x_2 + y_2 - 5(x_3 + y_3), x_2 + y_2, x_3 + y_3] \in \mathbf{A}$$

$$\lambda x = \lambda(x_2 - 5x_3, x_2, x_3) = [\lambda(x_2 - 5x_3), \lambda x_2, \lambda x_3] \in \mathbf{A};\ \lambda \in \boldsymbol{R}.$$

B nu este subspațiu vectorial deoarece adunarea și înmulțirea cu scalari ($\lambda \neq 1$) nu sînt definite (vezi și problema 10.3).

$\mathbf{C} = \left\{x \mid x = \left(k\dfrac{\pi}{4}, x_2, x_3\right),\ k \in \boldsymbol{Z},\ x_2, x_3 \in \boldsymbol{R}\right\}$ nu este subspațiu vectorial.

$\mathbf{D} = \{x \mid x = (x_1, k\pi, x_3),\ k \in \boldsymbol{Z},\ x_1, x_3 \in \boldsymbol{R}\}$ nu este subspațiu vectorial

E și **H** nu sînt subspații vectoriale. Submulțimea **E** este echivalentă cu submulțimea vectorilor de poziție ale căror extremități se află pe sfera $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 25$, submulțime care nu este subspațiu.

F este subspațiu vectorial deoarece **F** este izomorfă cu subspațiul vectorilor ale căror extremități se află pe bisectoarea triedrului $(O; x_1, x_2, x_3)$; $\dim \mathbf{F} = 1$.

G este subspațiu vectorial deoarece **G** este izomorfă cu subspațiul vectorilor cu originea în O, ale căror extremități se află pe axa ordonatelor Ox_2; $\dim \mathbf{G} = 1$.

21. Să se arate că mulțimile $\mathbf{U} = \{u_1 = (1, 5, 3),\ u_2 = (2, 0, 6)\}$, $\mathbf{W} = \{w_1 = (-1, 7, -3),\ w_2 = (4, 5, 12)\}$ generează același subspațiu în $\mathbf{R}^3$.

Soluție. Acoperirea liniară a lui **U** este de forma

$\mathbf{L}(\mathbf{U}) = \{k_1u_1 + k_2u_2,\ k_1, k_2 \in \boldsymbol{R}\} = \{(k_1 + 2k_2, 5k_1, 3k_1 + 6k_2),\ k_1, k_2 \in \boldsymbol{R}\}$

Analog $\mathbf{L}(\mathbf{W}) = \{\mathrm{h}_1\mathrm{w}_1 + \mathrm{h}_2\mathrm{w}_2,\ \mathrm{h}_1, \mathrm{h}_2 \in \boldsymbol{R}\} = \{(-\mathrm{h}_1 + 4\mathrm{h}_2, 7\mathrm{h}_1 + 5\mathrm{h}_2, -3\mathrm{h}_1 + 12\mathrm{h}_2),\ \mathrm{h}_1, \mathrm{h}_2 \in \boldsymbol{R}\}$.

Se constată că vectorii din $\mathbf{L}(\mathbf{U})$ se află în planul $3x - z = 0$, deoarece $3x - z = 3(k_1 + 2k_2) - (3k_1 + 6k_2) = 0$; $\mathbf{L}(\mathbf{W})$ generează același subspațiu.

22. Fie $C^0(\boldsymbol{R})$ spațiul vectorial real al funcțiilor reale și continue; să se stabilească care dintre următoarele submulțimi ale lui $\mathbf{C}^0(\boldsymbol{R})$ sînt liniar dependente respectiv liniar independente. Să se stabilească dimensiunile subspațiilor generate

1) $\{e^{ax}, xe^{ax}, x^2e^{ax}\}$

2) $\{e^x, e^{-x}, \operatorname{ch} x\}$

3) $\{1, \cos 2x, \sin^2 x\}$

R: 1) $k_1e^{ax} + k_2xe^{ax} + k_3x^2e^{ax} = 0,\ \forall x \in \boldsymbol{R}$; deoarece $e^{ax} \neq 0$, rezultă $k_1 + k_2x + k_3x^2 = 0,\ \forall x \in \boldsymbol{R} \Rightarrow k_1 = k_2 = k_3 = 0$; $\dim \mathbf{L}\{e^{ax}, xe^{ax}, x^2e^{ax}\} = 3$.

2) $\operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$; $\dim \mathbf{L}\{e^x, e^{-x}, \operatorname{ch} x\} = 2$;

3) $\dim \mathbf{L}\{1, \cos 2x, \sin^2 x\} = 2$.

23. Fie S o submulțime din $\boldsymbol{C}^3$ formată din vectorii

1) $v_1 = (-\mathrm{i}, 1+\mathrm{i}, 3-2\mathrm{i})$, $v_2 = (1 - \mathrm{i}, 0, \mathrm{i})$, $v_3 = (1, -1 + \mathrm{i}, 2 + 3\mathrm{i})$, $v_4 = (-2 + 2\mathrm{i}, 0, -2\mathrm{i})$.

2) $v_1 = (5-2\mathrm{i}, 0, 1-\mathrm{i})$, $v_2 = (-1-\mathrm{i}, 2+\mathrm{i}, \mathrm{i})$, $v_3 = (3-4\mathrm{i}, 4 + 2\mathrm{i}, 1+\mathrm{i})$.

Să se stabilească dimensiunea subspațiului generat și să se specifice care vectori din submulțime *pot* constitui o bază.

Soluție. Dacă vectorii sînt exprimați în baza canonică, atunci dimensiunea subspațiului generat coincide cu rangul matricei ale cărei coloane sînt coordonatele fiecărui vector. În cazul nostru

$$\text{rang}\begin{bmatrix} -i & 1-i & 1 & -2+2i \\ 1+i & 0 & -1+i & 0 \\ 3-2i & i & 2+3i & -2i \end{bmatrix} = 2 = \dim \mathbf{L}(S)$$

$$2)\ v_3 = v_1 + 2v_2; \qquad \dim \mathbf{L}(S) = 2.$$

24. În C^7 să se expliciteze subspațiul vectorilor $u = (u_1, u_2, ..., u_7)$ ale căror coordonate satisfac sistemul

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6 + u_7 = 0$$

$$u_1 - u_2 - u_3 - u_4 - u_5 - u_6 + u_7 = 0$$

$$u_1 + u_2 - u_3 - u_4 + u_5 + u_6 - u_7 = 0.$$

Să se stabilească dimensiunea subspațiului și să se dea exemplu de o bază.

Soluție. Din teoria sistemelor liniare și omogene deducem că acest sistem admite și soluții distincte de cea banală ($m=3$, $n=7$, $r=3$); există ∞^4 soluții. Considerăm determinantul principal

$$\Delta_p = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

și obținem soluția $u_4 = u_1 - u_3$, $u_6 = -u_1 - u_2 - u_5$, $u_7 = -u_1$.

Subspațiul $\mathbf{U}$ al soluțiilor sistemului este

$$\mathbf{U} = \{u | u = (u_1, u_2, u_3, u_1 - u_3, u_5, -u_1 - u_2 - u_5, -u_1)\}.$$

Evident $\dim \mathbf{U} = 4$. Un vector din subspațiul $\mathbf{U}$ este de forma

$$u = u_1(1, 0, 0, 1, 0, -1, -1) + u_2(0, 1, 0, 0, 0, -1, 0) + u_3(0, 0, 1, -1, 0, 0, 0) + u_5(0, 0, 0, 0, 1, -1, 0).$$

O bază a acestui subspațiu este

$$\mathbf{B} = \{e_1 = (1, 0, 0, 1, 0, -1, -1),\ e_2 = (0, 1, 0, 0, 0, -1, 0),\ e_3 = (0, 0, 1, -1, 0, 0, 0),\ e_4 = (0, 0, 0, 0, 1, -1, 0)\}.$$

25. Fie $\mathcal{A} = \left\{ A \,|\, A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & x \\ y & 0 & 0 \\ u & z & 0 \end{bmatrix},\ x = y + z;\ \ x, y, z, u \in \boldsymbol{R} \right\}.$

Să se arate că

1) mulțimea $\mathcal{A}$ este un subspațiu vectorial al lui $\mathcal{M}_{3\times 3}(\boldsymbol{R})$;

2) matricele **M**, **N**, **P** constituie o bază a subspațiului $\mathcal{A}$, unde

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{N} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3) constituie aceste matrice o bază pentru spațiul vectorial $(\mathcal{A}, \boldsymbol{Z}_{(2)})$, unde $\boldsymbol{Z}_{(2)}$ reprezintă clasele de resturi modulo doi?

Soluție. 1) Oricare ar fi matricele $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{A}$ și oricare ar fi scalarii reali k, l, rezultă $(k\mathbf{A} + l\mathbf{B}) \in \mathcal{A}$. Această apartenență decurge din operațiile de înmulțire a unei matrice cu un scalar, de adunare a matricelor și din operațiile cu numere reale.

2) Conform definiției bazei, mulțimea $\{\mathbf{M}, \mathbf{N}, \mathbf{P}\}$ este liniar independentă. Condiția $k_1\mathbf{M} + k_2\mathbf{N} + k_3\mathbf{P} = 0$ conduce la un sistem liniar și omogen

$$-3k_1 + k_2 - k_3 = 0, \qquad -2k_1 + k_2 - k_3 = 0,$$

$$k_1 + 3k_2 + 3k_3 = 0, \quad -k_1 = 0,$$

care admite numai soluția banală $k_1 = k_2 = k_3 = 0$.

Orice vector $\mathbf{A} \in \mathcal{A}$ se scrie ca o combinație liniară de vectorii **M**, **N**, **P**,

$$\mathbf{A} = \alpha_1\mathbf{M} + \alpha_2\mathbf{N} + \alpha_3\mathbf{P},$$

unde α_1, α_2, α_3 reprezintă coordonatele matricei A în baza $\{\mathbf{M}, \mathbf{N}, \mathbf{P}\}$. Găsim

$$A = -zM + \frac{1}{6}(3y - 5z + u)\,\mathbf{N} + \frac{1}{6}(7z - 3y + u)\,\mathbf{P}.$$

Observație. Se știe că $\dim \mathcal{M}_{3\times3}(\boldsymbol{R}) = 3\times3 = 9$. Deoarece matricele din submulțimea $\mathcal{A}$ se bucură de șase condiții suplimentare $a_{11} = a_{12} = a_{22} = a_{23} = a_{33} = 0$, $a_{13} = a_{21} + a_{32}$, urmează că $\dim \mathcal{A} = 3$.

3) Matricele **M**, **N**, **P** nu constituie o bază pentru $(\mathcal{A}, \boldsymbol{Z}_{(2)})$ deoarece ele sînt liniar dependente ($\mathbf{N} = \mathbf{P}$ modulo 2).

26. Să se găsească o bază a sumei și intersecției subspațiilor vectoriale **W** și **U** generate respectiv de vectorii

$$w_1 = (2, 1, 0, 1), \qquad w_2 = (-2, -1, -1, -1), \qquad w_3 = (3, 0, 2, 3);$$

$$u_1 = (1, 1, 2, -1), \qquad u_2 = (0, -1, -1, 2), \qquad u_3 = (-1, 2, 1, -5)$$

Soluție. Subspațiul $\mathbf{W} + \mathbf{U}$ este generat de $\mathbf{W} \cup \mathbf{U}$; prin urmare vectorii mulțimii $\mathbf{W} + \mathbf{U}$ sînt vectori ai acoperirii liniare $\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \alpha_3 w_3 + \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \beta_3 u_3$. În particular din sumă fac parte și vectorii $w_i (i = 1, 2, 3)$, $u_j (j = 1, 2, 3)$.

Pentru a găsi o bază lui $\mathbf{W} + \mathbf{U}$ vom căuta mai întîi o bază formată din vectorii w_i, u_j. Vectorii w_1, w_2, w_3 sînt liniar independenți și ne propunem să stabilim dacă mulțimea $\{w_1, w_2, w_3, u_1\}$ este in dependentă și poate constitui o bază. Din relația $k_1w_1 + k_2w_2 + k_3w_3 + k_4u_1 = 0$ obținem un sistem liniar și omogen al cărui determinant este

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Deci sistemul admite numai soluția banală $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 0$.

Am găsit în subspațiul $\mathbf{W} + \mathbf{U}$ patru vectori liniar independenți și, evident, oricare cinci vectori sînt dependenți, deci $\dim(\mathbf{W} + \mathbf{U}) = 4$.

Se știe că $\mathbf{W} \cap \mathbf{U} = \{v \mid v \in \mathbf{W} \text{ și } v \in \mathbf{U}\}$; orice vector $v \in \mathbf{W}$ se scrie ca o combinație liniară $v = \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \alpha_3 w_3$, respectiv $v \in \mathbf{U}$, $v = \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \beta_3 u_3$; prin urmare subspațiul $\mathbf{W} \cap \mathbf{U}$ va conține acei vectori pentru care

$$\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \alpha_3 w_3 = \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \beta_3 u_3.$$

Se obține sistemul

$$\begin{aligned} 2\alpha_1 - 2\alpha_2 + 3\alpha_3 &= \beta_1 - \beta_3 \\ \alpha_1 - \alpha_2 &= \beta_1 - \beta_2 + 2\beta_3 \\ -\alpha_2 + 2\alpha_3 &= 2\beta_1 - \beta_2 + \beta_3 \\ \alpha_1 - \alpha_2 + 3\alpha_3 &= -\beta_1 + 2\beta_2 - 5\beta_3 \end{aligned}$$

Întrucît rangul matricei sistemului este trei, compatibilitatea este asigurată dacă determinantul caracteristic este nul.

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & 3 & \beta_1 - \beta_3 \\ 1 & -1 & 0 & \beta_1 - \beta_2 + 2\beta_3 \\ 0 & -1 & 2 & 2\beta_1 - \beta_2 + \beta_3 \\ 1 & -1 & 3 & -\beta_1 + 2\beta_2 - 5\beta_3 \end{vmatrix} = 0; \quad \beta_1 - \beta_2 + 2\beta_3 = 0$$

Deci orice vector $v \in \mathbf{W} \cap \mathbf{U}$ este de forma

$$\begin{aligned} v &= (\beta_1 - \beta_3,\ \beta_1 - \beta_2 + 2\beta_3,\ 2\beta_1 - \beta_2 + \beta_3,\ -\beta_1 + 2\beta_2 - 5\beta_3) = \\ &= (\beta_1 - \beta_3,\ 0,\ \beta_1 - \beta_3,\ \beta_1 - \beta_3) = (\beta_1 - \beta_3)(1, 0, 1, 1). \end{aligned}$$

Prin urmare am găsit în subspațiul $\mathbf{W} \cap \mathbf{U}$ o bază formată dintr-un singur vector $v = (1, 0, 1, 1)$; $\dim(\mathbf{W} \cap \mathbf{U}) = 1$.

27. Fie $\mathbf{V}_5$ spațiul vectorial real al polinoamelor în $\cos x$ care au cel mult gradul 4. Să se scrie transformarea de coordonate care permite trecerea de la baza $B = \{1, \cos x, \cos^2 x, \cos^3 x, \cos^4 x\}$ la baza $B' = \{1, \cos x, \cos 2x, \cos 3x, \cos 4x\}$ și să se găsească inversa acestei transformări.

Soluție. Matricea de trecere de la B la B' se obține din

$$1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot \cos x + 0 \cdot \cos^2 x + 0 \cdot \cos^3 x + 0 \cdot \cos^4 x$$

$$\cos x = 0 \cdot 1 + 1 \cdot \cos x + 0 \cdot \cos^2 x + 0 \cdot \cos^3 x + 0 \cdot \cos^4 x$$

$$\cos 2x = -1 \cdot 1 + 0 \cdot \cos x + 2 \cdot \cos^2 x + 0 \cdot \cos^3 x + 0 \cdot \cos^4 x$$

$$\cos 3x = 0 \cdot 1 - 3 \cdot \cos x + 0 \cdot \cos^2 x + 4 \cdot \cos^3 x + 0 \cdot \cos^4 x$$

$$\cos 4x = 1 \cdot 1 + 0 \cdot \cos x - 8 \cdot \cos^2 x + 0 \cdot \cos^3 x + 8 \cdot \cos^4 x.$$

Deci

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}.$$

Dacă a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 sînt coordonatele unui vector din $\mathbf{V}$ în raport cu baza B și b_0, b_1, b_2, b_3, b_4 sînt coordonatele aceluiași vector în raport cu baza B', atunci ${}^t[a_0, a_1, a_2, a_3, a_4] = A \cdot {}^t[b_0, b_1, b_2, b_3, b_4]$ adică, explicit, $a_0 = b_0 - b_2 + b_4$, $a_1 = b_1 - 3b_3$, $a_2 = 2b_2 - 8b_3$, $a_3 = 4b_3$, $a_4 = 8b_4$. Inversa acestei transformări este $b_0 = a_0 + \frac{1}{2} a_2 + a_3 - \frac{1}{8} a_4$, $b_1 = a_1 + \frac{3}{4} a_3$, $b_2 = \frac{1}{2} a_2 + a_3$, $b_3 = \frac{1}{4} a_3$, $b_4 = \frac{1}{8} a_4$.

28. Să se stabilească formulele de transformare ale coordonatelor cînd se trece de la baza $e = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ la baza $e' = \{e'_1, e'_2, e'_3, e'_4\}$.

$$e_1 = (1, 2, -1, 0), \quad e_2 = (1, -1, 1, 1), \quad e_3 = (-1, 2, 1, 1),$$
$$e_4 = (-1, -1, 0, 1)$$

$$e'_1 = (2, 1, 0, 1), \quad e'_2 = (0, 1, 2, 2), \quad e'_3 = (-2, 1, 1, 2), \quad e'_4 = (1, 3, 1, 2).$$

R: $x'_1 = x_2 - x_3 + x_4, \quad x'_2 = -x_1 + x_2, \quad x'_3 = x_4,$

$$x'_4 = x_1 - x_2 + x_3 - x_4.$$

29. Fie $\mathbf{V}$ un spațiu vectorial real n-dimensional.

1) Să se demonstreze că orice două baze $e = \{e_1, \ldots, e_n\}$ $e' = \{e'_1, \ldots, e'_n\}$ din $\mathbf{V}$ sînt legate prin $e'_j = \sum_i a_{ij} e_i$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, unde $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ este o matrice nesingulară.

2) Să se arate că $e \sim e' \Leftrightarrow \det \mathbf{A} > 0$ este o relație de echivalență.

Această relație împarte mulțimea bazelor lui $\mathbf{V}$ în două clase de echivalență numite *orientări* ale lui $\mathbf{V}$.

30. Fie $\mathbf{V}$ un spațiu vectorial real și ${}^{C}\mathbf{V}$ complexificatul său. Să se arate că

1) dacă S este o mulțime liniar independentă din $\mathbf{V}$, atunci $S\times\{0\}$ este o mulțime liniar independentă în ${}^{C}\mathbf{V}$.

2) dacă $\{e_1, ..., e_n\}$ este o bază a lui $\mathbf{V}$, atunci $\{(e_1, 0), ..., (e_n, 0)\}$ este o bază a lui ${}^{C}\mathbf{V}$. Consecință, $\dim_{C}{}^{C}\mathbf{V} = \dim_{R}\mathbf{V}$.

Soluție. 1) Prin ipoteză, pentru orice alegere a elementelor $v_1, ..., v_p$ din S și a scalarilor $k_1, ..., k_p$ din $\boldsymbol{R}$, relația $k_1v_1 + ... + k_pv_p = 0$ implică $k_1 = ... = k_p = 0$.

Presupunem $(k_1 + il_1)(v_1, 0) + ... + (k_p + il_p)(v_p, 0) = (0, 0)$, adică $(k_1v_1 + ... + k_pv_p, l_1v_1 + ... + l_pv_p) = (0, 0)$ sau $k_1v_1 + ... + k_pv_p = 0$, $l_1v_1 + ... + l_pv_p = 0$. Acestea implică $k_1 = ... = k_p = 0$ respectiv $l_1 = ... = l_p = 0$ și deci $S \times \{0\}$ este liniar independentă.

2) Dacă $\{e_1, ..., e_n\}$ este o mulțime liniar independentă în $\mathbf{V}$, atunci mulțimea $\{(e_1, 0), ..., (e_n, 0)\}$ este liniar independentă în ${}^{C}\mathbf{V}$.

Presupunem că $\{e_1, ..., e_n\}$ generează pe $\mathbf{V}$. Atunci $\forall u, v \in \mathbf{V}$ putem scrie $u = u_1e_1 + ... + u_ne_n$, $v = v_1e_1 + ... + v_ne_n$. Rezultă $u + iv \equiv (u, v) = (u_1e_1 + ... + u_ne_n, v_1e_1 + ... + v_ne_n) = (u_1e_1 + ... + u_ne_n, 0) + (0, v_1e_1 + ... + v_ne_n) = (u_1e_1 + ... + u_ne_n, 0) + i(v_1e_1 + ... + v_ne_n, 0) = (u_1 + iv_1)(e_1, 0) + ... + (u_n + iv_n)(e_n, 0)$ și deci $\{(e_1, 0), ..., (e_n, 0)\}$ generează pe ${}^{C}\mathbf{V}$.

31. Fie $\mathbf{V}$ un spațiu vectorial complex și ${}^{R}\mathbf{V}$ trecerea sa în real. Să se arate că dacă $\dim \mathbf{V} = n$, atunci $\dim {}^{R}\mathbf{V} = 2n$.

Soluție. Fie $\{e_1, ..., e_n\}$ o bază în $\mathbf{V}$. Definim $\{f_1, ..., f_{2n}\}$ prin $f_1 = e_1, ..., f_n = e_n$, $f_{n+1} = (0, 1)\cdot e_1 = ie_1, ..., f_{2n} = (0, 1)\cdot e_n = ie_n$. Pentru $\forall v \in \mathbf{V}$ putem scrie $v = \sum\limits_{k=1}^{n} v_ke_k$, $v_k \in \boldsymbol{C}$ sau dacă înlocuim $v_k = (\Re e\, v_k, \Im m\, v_k)$, atunci

$$v = \left(\sum_{k=1}^{n} (\Re e\, v_k)\, e_k, \sum_{k=1}^{n} (\Im m\, v_k)\, e_k\right) = \sum_{k=1}^{n} (\Re e\, v_k)\, e_k + i \sum_{k=1}^{n} (\Im m\, v_k)\, e_k =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} [(\Re e\, v_k)\, f_k + (\Im m\, v_i)\, f_{n+k}].$$

Pe de altă parte se poate verifica ușor că $\{f_1, ..., f_{2n}\}$ este o mulțime liniar independentă în ${}^{R}\mathbf{V}$.

32. *(Spații euclidiene canonice)* 1) Fie $x = (x_1, ..., x_n)$ și $y = (y_1, ..., y_n)$ doi vectori oarecare din spațiul vectorial aritmetic $\boldsymbol{R}^n$. Să se arate că aplicația definită prin $(x, y) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_iy_i$ este un produs scalar pe $\boldsymbol{R}^n$.

2) Fie $x = (x_1, ..., x_n)$ și $y = (y_1, ..., y_n)$ doi vectori oarecare din spațiul vectorial aritmetic $\boldsymbol{C}^n$. Să se arate că aplicația definită prin $(x, y) = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j\bar{y}_j$ este un produs scalar pe $\boldsymbol{C}^n$.

3) Să se arate că spațiul vectorial real al tuturor funcțiilor cu valori reale, continue pe un interval $[a, b]$, este un spațiu euclidian real în raport cu aplicația definită prin

$$(\mathrm{f}, \mathrm{g}) = \int_a^b \mathrm{f}(t)\, \mathrm{g}(t)\, \mathrm{d}t.$$

4) Să se arate că spațiul vectorial complex al tuturor funcțiilor cu valori complexe, continue pe un interval $[a, b]$, este un spațiu euclidian complex în raport cu aplicația definită prin

$$(f, g) = \int_a^b f(t)\,\overline{g(t)}\,dt,$$

Soluție. 3) Problema revine la a arăta că (f, g) este un produs scalar. Într-adevăr continuitatea asigură existența integralei și dacă f, g, h sînt trei funcții oarecare cu valori reale, continue pe $[a, b]$ și dacă r este un număr real, atunci

$$(f, g) = \int_a^b f(t)\,g(t)\,dt = \int_a^b g(t)\,f(t)\,dt = (g, f),$$

$$(f, g + h) = \int_a^b f(t)\,(g(t) + h(t))\,dt = \int_a^b (f(t)\,g(t) + f(t)\,h(t))\,dt =$$

$$= \text{(liniaritatea integralei)}, \int_a^b f(t)\,g(t)\,dt + \int_a^b f(t)\,h(t)\,dt = (f, g) + (f, h),$$

$$r(f, g) = r\int_a^b f(t)\,g(t)\,dt = \int_a^b (rf(t)\,(g(t)\,dt = (rf, g),$$

$(f, f) = \int_a^b f^2(t)\,dt > 0$ pentru $f \neq 0$. Într-adevăr, prin ipoteză, există un punct $t_0 \in (a, b)$ astfel încît $f(t_0) > 0$. Prin continuitate, există un interval deschis I astfel încît $t_0 \in I \subset [a, b]$ și $f^2(t) > 0$, $\forall t \in I$. Fie $[c, d] \subset I$, $c < d$, și $m = \inf f^2(t) = f^2(t_1) > 0$. Rezultă $0 < m(d - c) \leqslant \int_c^d f^2(t)\,dt \leqslant \int_a^b f^2(t)\,dt$.

33. Fie **V** spațiul vectorial real al șirurilor reale $\{x_n\}$ pentru care seria Σx_n^2 este convergentă. Fie $x = \{x_n\}$, $y = \{y_n\}$ două elemente din **V**.

1) Să se arate că seria $\Sigma x_n y_n$ este absolut convergentă.

2) Să se verifice că aplicația definită prin $(x, y) = \Sigma x_n y_n$ este un produs scalar pe **V**.

3) Să se calculeze (x, y) pentru $x_n = \dfrac{1}{n}$, $y_n = \dfrac{1}{n+1}$. Apoi să se determine $\|x - y\|$ știind că $\Sigma \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$.

Soluție. 1) Ținînd seama că pentru orice două numere reale a și b avem $|ab| \leqslant \dfrac{a^2}{2} + \dfrac{b^2}{2}$, rezultă $\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leqslant \dfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} (x_i^2 + y_i^2) = \dfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \dfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} y_i^2$. În baza unei teoreme de la serii cu termeni pozitivi, seria $\Sigma |x_i y_i|$ este convergentă și deci seria $\Sigma x_i y_i$ este absolut convergentă.

2) Să verificăm numai faptul că forma pătratică atașată este pozitiv definită. Deoarece $(x, x) = \Sigma x_n^2 \geqslant 0$, $\forall x \in \mathbf{V}$ este suficient să arătăm $(x, x) = 0 \Rightarrow x = 0$. Într-adevăr, relațiile $0 \leqslant x_1^2 \leqslant x_1^2 + x_2^2 \leqslant \ldots \leqslant x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \leqslant \ldots \leqslant \Sigma x_n^2 = 0$ implică $0 = x_1 = x_2 = \ldots = x_n = \ldots$ (s-a ținut seama și de faptul că limita unui șir crescător convergent este supremumul mulțimii valorilor șirului).

3) $(x, y) = \Sigma \frac{1}{n(n+1)} = 1$ deoarece $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, $x_1 y_1 + \ldots$ $\ldots + x_n y_n = 1 - \frac{1}{n+1}$ și $\lim_{n\to\infty} (x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n) = 1$.

Avem $\| x - y \| = \sqrt{(x - y, x - y)} = \sqrt{\Sigma \frac{1}{n^2(n+1)^2}}$. Ținînd seama de identitatea $\frac{1}{n^2(n+1)^2} = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)^2 = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} - 2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$ se deduce $\| x - y \| = \sqrt{\frac{\pi^2 - 9}{3}}$.

34. Fie **P** spațiul vectorial real al tuturor funcțiilor polinomiale reale definite pe $[-1, 1]$.

1) Să se arate că $1, x, \ldots, x^n, \ldots$ formează o bază în **P**.

2) Să se demonstreze că **P** este un spațiu euclidian în raport cu aplicația definită prin

$$(\mathrm{p}, \mathrm{q}) = \int_{-1}^{1} \mathrm{p}(x)\, \mathrm{q}(x)\, \mathrm{d}x.$$

3) Polinoamele obținute din $1, x, \ldots, x^n, \ldots$ prin procedeul de ortogonalizare se numesc *polinoame Legendre.* Să se scrie primele 5 polinoame Legendre.

Soluție. 3) Mai întîi notăm $\mathrm{p}_i(x) = x^i$, $i \in \boldsymbol{N}$. Fie $\mathrm{q}_0(x) = \mathrm{p}_0(x) = 1$. Deoarece $(\mathrm{q}_0, \mathrm{p}_0) = \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x = 2$ și $(\mathrm{p}_1, \mathrm{q}_0) = \int_{-1}^{1} x\, \mathrm{d}x = 0$ găsim

$$\mathrm{q}_1(x) = \mathrm{p}_1(x) - \frac{(\mathrm{p}_1, \mathrm{q}_0)}{(\mathrm{q}_0, \mathrm{q}_0)} \mathrm{q}_0(x) = \mathrm{p}_1(x) = x.$$

Analog, relațiile $(\mathrm{p}_2, \mathrm{q}_0) = \int_{-1}^{1} x^2\, \mathrm{d}x = \frac{2}{3}$, $(\mathrm{p}_2, \mathrm{q}_1) = \int_{-1}^{1} x^3\, \mathrm{d}x = 0$, $(\mathrm{q}_1, \mathrm{q}_1) = \int_{-1}^{1} x^2\, \mathrm{d}x = \frac{2}{3}$ implică

$$\mathrm{q}_2(x) = \mathrm{p}_2(x) - \frac{(\mathrm{p}_2, \mathrm{q}_0)}{(\mathrm{q}_0, \mathrm{q}_0)} \mathrm{q}_0(x) - \frac{(\mathrm{p}_2, \mathrm{q}_1)}{(\mathrm{q}_1, \mathrm{q}_1)} \mathrm{q}_1(x) = x^2 - \frac{1}{3}.$$

La fel se găsesc

$$\mathrm{q}_3(x) = x^3 - \frac{3}{5} x,\ \mathrm{q}_4(x) = x^4 - \frac{6}{7} x^2 + \frac{3}{35},\ \mathrm{q}_5(x) = x^5 - \frac{10}{9} x^3 + \frac{5}{21} x.$$

Prin inducție se poate dovedi că

$$\mathrm{q}_n(x) = \frac{n!}{(2n)!} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} (x^2 - 1)^n.$$

35. Fie $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ și $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ doi vectori oarecare din spațiul vectorial real $\mathbf{V}_n$. Să se cerceteze care dintre expresiile

$$1)\ (x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i |y_i|, \quad 2)\ (x, y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i y_i|,$$

$$3)\ (x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i^2\right)^{1/2}, \quad 4)\ (x, y) = \sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} y_i^2$$

definesc produse scalare pe $\mathbf{V}_n$.

R: 1) Nu; $(x, y + z) \neq (x, y) + (x, z)$, deoarece $|y_i + z_i| \leqslant |y_i| + |z_i|$; 2) Nu; $(x, y + z) \neq (x, y) + (x, z)$; $|c|(x, y) = (cx, y)$; 3) Nu, idem ca 2); 4) Da; $(x, y) = 2(x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n)$.

36. Pe spațiul vectorial $\mathbf{C}^\circ([1, \mathrm{e}])$ al funcțiilor reale continue pe intervalul $[1, \mathrm{e}]$ definim produsul scalar

$$(\mathrm{f}, \mathrm{g}) = \int_1^{\mathrm{e}} (\ln x)\, \mathrm{f}(x)\, \mathrm{g}(x)\, \mathrm{d}x.$$

1) Să se calculeze $\|\mathrm{f}\|$ pentru $x \to \mathrm{f}(x) = \sqrt{x}$.

2) Să se găsească o funcție afină $x \to \mathrm{g}(x) = a + bx$ care este ortogonală funcției constante $\mathrm{f}(x) = 1$.

R: 1) $\|\mathrm{f}\| = \sqrt{(\mathrm{f}, \mathrm{f})} = \sqrt{\int_1^{\mathrm{e}} x \ln x\, \mathrm{d}x} = \frac{1}{2}\sqrt{\mathrm{e}^2 + 1}$;

2) $(\mathrm{f}, \mathrm{g}) = 0 \Rightarrow \int_1^{\mathrm{e}} (a + bx) \ln x\, \mathrm{d}x = 0 \Rightarrow a + b\,\frac{\mathrm{e}^2 + 1}{4} = 0$;

$\mathrm{g}(x) = b\left(x - \frac{\mathrm{e}^2 + 1}{4}\right), \quad b \in \boldsymbol{R}.$

37. Fie $\mathbf{P}_n$ spațiul vectorial real al funcțiilor polinomiale reale de grad mai mic sau egal n.

1) Să se arate că aplicațiile $(,): \mathbf{P}_n \times \mathbf{P}_n \to \boldsymbol{R}$ definite prin formulele

$$(*)\ (\mathrm{p}, \mathrm{q}) = \sum_{j=0}^{n} a_j b_j, \quad (**)\ (\mathrm{p}, \mathrm{q}) = \sum_{j=0}^{n} (j\,!)^2 a_j b_j$$

unde $\mathrm{p}(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$, $\mathrm{q}(x) = \sum_{j=0}^{n} b_j x^j$ sînt respectiv produse scalare.

2) Să se stabilească mărimea unghiurilor $\sphericalangle(\mathrm{p}, \mathrm{q})$ și $\sphericalangle(\mathrm{p}, \mathrm{r})$, unde $\mathrm{p}(x) = 12x^2 - 4x + 3$, $\mathrm{q}(x) = 2x^2 + 3x - 4$, $\mathrm{r}(x) = 3x^2 + 12x - 4$ utilizînd produsul scalar $(*)$.

3) Să se arate că funcțiile polinomiale definite respectiv prin $1, x, \frac{x^2}{2\,!}, \frac{x^3}{3\,!}, \ldots, \frac{x^n}{n\,!}$ formează o bază ortonormată față de produsul scalar $(**)$.

Soluție. 3) Baza $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ este ortonormată dacă

$$(e_j, e_k) = \delta_{jk} = \begin{cases} 1 \text{ pentru } j = k \\ 0 \text{ pentru } j \neq k. \end{cases}$$

Calculăm produsele scalare

$$\left(\frac{x^j}{j\,!}, \frac{x^k}{k\,!}\right) = (j\,!)^2\left(\frac{1}{j\,!}\cdot 0\right) + (k\,!)^2\left(0\cdot\frac{1}{k\,!}\right) = 0 \text{ pentru } j = k;$$

deci vectorii $\frac{x^j}{j!}$ și $\frac{x^k}{k\,!}$ sînt ortogonali.

$$\left(\frac{x^j}{j\,!}, \frac{x^j}{j\,!}\right) = (j\,!)^2\left(\frac{1}{j\,!}\cdot\frac{1}{j\,!}\right) = 1;\ j = 1, 2, \ldots, n,$$

deci norma fiecărui vector din bază este unu, prin urmare baza este ortonormată.

38. Fie $\boldsymbol{R}_2[X]$ spațiul vectorial real al polinoamelor care au cel mult gradul doi și $(\mathrm{p}, \mathrm{q}) = \sum_{j=0}^{2} a_j b_j$ un produs scalar pe $\boldsymbol{R}_2[X]$, unde $\mathrm{p} = \sum_{j=0}^{2} a_j X^j$, $\mathrm{q} = \sum_{j=0}^{2} b_j X^j$. Considerăm polinoamele

$$\mathrm{p}_1 = 3X^2 + 2X + 1,\ \ \mathrm{p}_2 = -X^2 + 2X + 1,\ \ \mathrm{p}_3 = 3X^2 + 2X + 5,$$
$$\mathrm{p}_4 = 3X^2 + 5X + 2.$$

1) Să se găsească un polinom p_0 de grad cel mult doi care este echidistant polinoamelor p_1, p_2, p_3, p_4; 2) să se calculeze această distanță.

Soluție. 1) Fie $\mathrm{p}_0 = a_2X^2 + a_1X + a_0$.

$$\mathrm{p}_1 - \mathrm{p}_0 = (3 - a_2)\,X^2 + (2 - a_1)\,X + (1 - a_0) \text{ etc...}$$

Trebuie să impunem

$$\|\mathrm{p}_1 - \mathrm{p}_0\| = \|\mathrm{p}_2 - \mathrm{p}_0\| = \|\mathrm{p}_3 - \mathrm{p}_0\| = \|\mathrm{p}_4 - \mathrm{p}_0\|;$$

se obține

$$a_0 = 3,\ a_1 = 3,\ a_2 = 1, \text{ deci } \mathrm{p}_0 = X^2 + 3X + 3.$$

2) Distanța este 3.

39. Fie $\mathbf{V}$ spațiul vectorial real al tuturor funcțiilor continui $\mathrm{f}: [0, \infty) \to \boldsymbol{R}$ pentru care $\int_0^\infty e^{-x}\mathrm{f}^2(x)\,\mathrm{d}x$ este convergentă.

1) Să se arate că $\int_0^\infty e^{-x}\mathrm{f}(x)\,\mathrm{g}(x)\,\mathrm{d}x$, $\forall \mathrm{f}, \mathrm{g} \in \mathbf{V}$, este absolut convergentă.

2) Să se verifice că $(\mathrm{f}, \mathrm{g}) = \int_0^\infty e^{-x}\mathrm{f}(x)\,\mathrm{g}(x)\,\mathrm{d}x$ este un produs scalar pe $\mathbf{V}$.

3) Se dă $\mathrm{f}(x) = e^{-x^2+x}$ și $\mathrm{g}_n(x) = x^n$. Să se determine $\lim_{n\to\infty} \theta_n$, unde θ_n este unghiul dintre f și g_n.

Soluție. 1) Deoarece $|fg| \leqslant \frac{1}{2}(f^2 + g^2)$ și $\int_0^\infty e^{-x} f^2(x)\,dx$, $\int_0^\infty e^{-x} g^2(x)\,dx$ sînt convergente rezultă că $\int_0^\infty e^{-x} |f(x)\,g(x)|\,dx$ este convergentă și deci $\int_0^\infty e^{-x} f(x)\,g(x)\,dx$ este absolut convergentă.

3) Evident $(f, g_n) = \int_0^\infty e^{-x^2} x^n\,dx = \left(\text{facem } x^2 = t \text{ și deci } x\,dx = \frac{1}{2}\,dt\right)$, $\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-t} t^{\frac{n-1}{2}}\,dt = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)$.

Calculăm pătratul normei lui f:

$$\|f\|^2 = \int_0^\infty e^{-2x^2+x}\,dx = e^{\frac{1}{8}} \int_0^\infty e^{-2\left(x-\frac{1}{4}\right)^2} dx = \left(\text{punem } \sqrt{2}\left(x - \frac{1}{4}\right) = t,\right.$$

$$\left. dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\,dt\right), \quad \frac{e^{1/8}}{\sqrt{2}} \int_{-\frac{\sqrt{2}}{4}}^\infty e^{-t^2} dt = \frac{e^{1/8}}{\sqrt{2}}\left(\int_{-\frac{\sqrt{2}}{4}}^0 e^{-t^2} dt + \int_0^\infty e^{-t^2} dt\right) = \Big(\text{în prima}$$

integrală schimbăm pe t în $-t$, iar în a doua punem

$$\left. t^2 = u,\ dt = \frac{1}{2u^{1/2}}\,du\right), \frac{e^{1/8}}{\sqrt{2}}\left(\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{4}} e^{-t^2} dt + \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-u} u^{-1/2}\,du\right) =$$

$$= \frac{e^{1/8}}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\mathrm{erf}\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right) + \frac{1}{2}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \frac{e^{1/8}\sqrt{\pi}}{2}\left(\mathrm{erf}\left(\frac{2}{4}\right) + 1\right).$$

Analog $\|g_n\|^2 = \int_0^\infty e^{-x} x^{2n}\,dx = \Gamma(2n+1) = (2n)\,!$.

Rezultă

$$\cos\theta_n = \frac{\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\left[\frac{e^{1/8}\sqrt{\pi}}{2}\left(\mathrm{erf}\left(\frac{2}{4}\right)+1\right)\right]^{1/2} ((2n)\,!)^{1/2}}, \quad \theta_n \in [0, \pi]$$

și ținînd seama că $\Gamma\left(p + \frac{1}{2}\right) = \frac{1.3\ldots(2p-1)}{2^p}\sqrt{\pi}$, $p = 1, 2, \ldots$, găsim $\lim_{n\to\infty} \theta_n = \frac{\pi}{2}$.

40. Fie $\mathcal{M}_{n\times n}(\boldsymbol{R})$ spațiul vectorial real al matricelor pătratice. Produsul scalar standard pe $\mathcal{M}_{n\times n}(\boldsymbol{R})$ este definit prin

$$(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \mathrm{tr}\,(\mathbf{A}^t\,\mathbf{B}) = \sum_{i,j} a_{ij} b_{ij}, \quad \mathbf{A} = [a_{ij}],\ \mathbf{B} = [b_{ij}].$$

Care dintre următoarele submulțimi din $\mathfrak{M}_{3\times 3}(\boldsymbol{R})$ este ortogonală?

$$\left\{\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2 & 3 & 4\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}\right\}$$

$$\left\{\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & -2 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}\right\}.$$

41. Care dintre următoarele mulțimi sînt baze ortonormate în $\boldsymbol{C}^3$?

$\{(i, 0, 0),\ (0, i, 0),\ (0, 0, i)\}$

$\{(1, 0, 0),\ (0, i, 0),\ (0, 0, 1)\}$

$\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i,\ 1-i, 0),\ \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 1),\ (0, 0, 1)\right\}$

$\{(1, i, 0),\ (-1, i, 0),\ (0, 0, 1)\}$.

42. Fie $\boldsymbol{R}^4$ spațiul euclidian canonic cu 4 dimensiuni. Să se găsească o bază ortonormată pentru subspațiul generat de vectorii

1) $x_1 = (0, 1, 1, 0)$, $x_2 = (0, 4, 0, 1)$, $x_3 = (1, -1, 1, 0)$, $x_4 = (1, 3, 0, 1)$.

2) $x_1 = (1, -1, 1, -1)$, $x_2 = (5, 1, 1, 1)$, $x_3 = (-3, -3, 1, -3)$.

Soluție. Utilizînd procedeul Gram-Schmidt construim o mulțime ortogonală $\{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ formată din vectori nenuli,

$$y_1 = x_1,\ y_{r+1} = x_{r+1} - \sum_{i=1}^{r} \frac{(x_{r+1}, y_i)}{(y_i, y_i)} y_i, \text{ pentru } r = 1, 2, 3.$$

Obținem

$y_1 = x_1 = (0, 1, 1, 0)$,

$$y_2 = x_2 - \frac{(x_2, y_1)}{(y_1, y_1)} y_1 = x_2 - 2y_1 = (0, 2, -2, 1),$$

$$y_3 = x_3 - \frac{(x_3, y_1)}{(y_1, y_1)} y_1 - \frac{(x_3, y_2)}{(y_2, y_2)} y_2 = x_3 - 0\cdot y_1 + \frac{4}{9} y_2 =$$

$$= \left(1, -\frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{4}{9}\right),$$

$$y_4 = x_4 - \frac{(x_4, y_1)}{(y_1, y_1)} y_1 - \frac{(x_4, y_2)}{(y_2, y_2)} y_2 - \frac{(x_4, y_3)}{(y_3, y_3)} y_3 =$$

$$= x_4 - \frac{3}{2} y_1 - \frac{7}{9} y_2 - \frac{10}{11} y_3 = \left(\frac{1}{11}, \frac{1}{22}, -\frac{1}{22}, -\frac{2}{11}\right).$$

Împărțim fiecare vector din baza ortogonală prin norma sa și obținem o bază ortonormată

$$\frac{y_1}{\|y_1\|}=\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \quad \frac{y_2}{\|y_2\|}=\left(0, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right),$$

$$\frac{y_3}{\|y_3\|}=\left(\frac{3}{\sqrt{11}}, -\frac{1}{3\sqrt{11}}, \frac{1}{3\sqrt{11}}, \frac{4}{3\sqrt{11}}\right),$$

$$\frac{y_4}{\|y_4\|}=\left(\frac{\sqrt{22}}{11}, \frac{\sqrt{22}}{22}, -\frac{\sqrt{22}}{22}, -\frac{2\sqrt{22}}{11}\right).$$

2) $y_1=(1, -1, 1, -1)$, $y_2=(4, 2, 0, 2)$, $y_3=(0, 0, 0, 0)$.

Deoarece y_3 este vectorul nul, înseamnă că vectorii x_1, x_2, x_3 sînt liniar dependenți. Întrucît vectorii y_1, y_2 sînt nenuli, vectorii x_1 și x_2 sînt liniar independenți. Prin urmare dim $\mathbf{L}(\{x_1, x_2, x_3\})=2$. Atunci mulțimea $\{y_1, y_2\}$ este o bază ortogonală a acestui subspațiu.

Baza ortonormată conține tot doi vectori

$$\frac{y_1}{\|y_1\|}=\frac{1}{2}(1, -1, 1, -1), \quad \frac{y_2}{\|y_2\|}=\frac{1}{\sqrt{6}}(2, 1, 0, 1).$$

43. Să se scrie programul FORTRAN atașat procedeului de ortogonalizare Gram-Schmidt.

Aplicație: $e_1=(3, -1, -1, -2)$, $e_2=(1, 1, -1, -1)$, $e_3=(1, 0, 0, -1)$, $e_4=(0, -1, 1, 1)$.

Soluție. Fig. A.3

```
      DIMENSIØN A(20, 20), U(20), V(20), Q(19)
      READ (105, 1) N
    1 FØRMAT (I2)
      DØ 10 I = 1, N
   10 READ (105, 2) (A(I, J), J = 1, N)
    2 FØRMAT (4F4.2)
      WRITE (108,17)
   17 FØRMAT (' '.' VECTØRII DIN BAZA SÎNT:'//)
      DØ 11 I = 1, N
   11 WRITE (108,3) I, (A(I, J), J = 1, N)
    3 FØRMAT ('.' E ('.I2.') = ('.4(F6.2,3X).')')
      DØ 4 K = 2, N
      DØ 5 I = 1, N
    5 U(I) = A(K, I)
      L = K - 1
      DØ 6 I = 1, L
      DØ 7 J = 1, N
    7 V(J) = A(I, J)
      P = PSCAL (U, V, N)
      R = PSCAL(V, V, N)
```

```
6  Q(I) = P/R
   DØ 8 J = 1, N
   DØ 8 I = 1, L
8  A(K.J) = A(K,J) - Q(I)*A(I,J)
4  CØNTINUE
   WRITE (108,19)
19 FØRMAT ("///' VECTØRII ØRTØGØNALI SINT:'//)
   DØ 12 I = 1.N
12 WRITE (108,15) I,(A(I,J),J = 1,N)
15 FØRMAT (".' F('.I2.')=('.4(F9.4,3X).')')
   STØP
   END

   FUNCTIØN PSCAL (A, B, M)
   DIMENSIØN A(M), B(M)
   PSCAL = 0.
   DØ 1 K = 1, M
1  PSCAL = PSCAL + A(K)*B(K)
   RETURN
   END

   VECTORII DIN BAZA SÎNT:

E(1) = (3.00  -1.00  -1.00  -2.00)
E(2) = (1.00   1.00  -1.00  -1.00)
E(3) = (1.00    .00    .00  -1.00)
E(4) = ( .00  -1.00   1.00   1.00)

   VECTORII ORTOGONALI SÎNT:

F(1) = (3.0000  -1.0000  -1.0000  -2.0000)
F(2) = ( .0000   1.3333  - .6667  - .3333)
F(3) = ( .0000    .1429    .4286  - .2857)
F(4) = ( .4000    .2000    .2000    .4000)
*STOP*
```

Fig. A.3

44. Fie $\boldsymbol{R}$ spațiul euclidian canonic cu o dimensiune.

1) Să se complexifice spațiul $\boldsymbol{R}$.

2) Să se demonstreze că spațiul complexificat ${}^{C}\boldsymbol{R}$ devine un spațiu euclidian dacă se introduce produsul scalar prin următorul procedeu

$$(*)\ (z_1, z_2) = (v^1 + \mathrm{i}w^1, v^2 + \mathrm{i}w^2) = (v^1v^2 + w^1w^2) + \mathrm{i}(w^1v^2 - v^1 \cdot w^2).$$

3) Dacă $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ este o bază ortonormată în $\boldsymbol{R}^n$, să se arate că $\{e_1 + \mathrm{i}0, e_2 + \mathrm{i}0, \ldots, e_n + \mathrm{i}0\}$ este o bază ortonormată în ${}^{C}\boldsymbol{R}^n$.

Soluție. 1) Vectorii spațiului ${}^{C}\boldsymbol{R}$ sînt perechile $(v, w) = v + \mathrm{i}w$, unde $v, w \in \boldsymbol{R}$. Introducem operațiile de adunare și înmulțire cu scalari astfel

$$(1)\ (v^1, w^1) + (v^2, w^2) = (v^1 + v^2) + \mathrm{i}(w^1 + w^2)$$

$$(2)\ k(v, w) = (\alpha + \mathrm{i}\beta)(v + \mathrm{i}w) = (\alpha v - \beta w) + \mathrm{i}(\beta v + \alpha w)$$

Se verifică fără dificultate toate axiomele spațiului vectorial, prin urmare mulțimea ${}^{C}\boldsymbol{R}$ este un spațiu vectorial complex.

$$2)\ (z_1, z_2) = (v^1v^2 + w^1w^2) + i(w^1v^2 - v^1w^2) =$$
$$= v^2v^1 + w^2w^1 + i((v^2 w^1) - (w^2 v^1)) = (z_2, z_1)$$
$$(z_1, (z_2 + z_3)) = (v^1 + iw^1)[(v^2 + v^3) + i(w^2 + w^3)] =$$
$$= [v^1(v^2 + v^3) + w^1(w^2 + w^3)] + i[w^1(v^2 + v^3) - v^1(w^2 + w^3)] =$$
$$= [(v^1v^2) + (w^1w^2)] + i[(w^1v^2) - (v^1w^2)] + (v^1v^3) +$$
$$+ (v^1w^3) + i[(w^1v^3) - (v^1w^3)] = (z_1, z_2) + (z_1, z_3)$$
$$(kz_1, z_2) = ([(\alpha + i\beta)(v^1 + iw^1)], (v^2 + iw^2)) =$$
$$= [(\alpha v^1 - \beta w^1) + i(\beta v^1 + \alpha w^1)](v^2 + iw^2)[(\alpha v^1 - \beta w^1)\cdot v^2] +$$
$$+ [(\beta v^1 + \alpha w^1)w^2] + i\{[(\beta v^1 + \alpha w^1)v^2] - (\alpha v^1 - \beta w^1)w^2]\} =$$
$$= \alpha[(v^1v^2) + (w^1w^2)] - \beta[(w^1v^2) - (v^1w^2)] + i\{\beta[(v^1v^2) + (w^1w^2)] +$$
$$+ \alpha[(w^1v^2) - (v^1w^2)]\} = (\alpha + i\beta)\{[(v^1v^2) + (w^1w^2) + i[(w^1v^2) -$$
$$- (v^1\cdot w^2)]\} = k(z_1z_2)$$
$$(z, z) = ((v + iw)(v + iw)) = [(vv) + (ww)] + i[(wv) - (vw)] =$$
$$= (vv) + (ww) > 0,\ \text{deoarece}\ (vv) > 0,\ (ww) > 0.$$

c) $((e_k + i0), (e_j + i0)) = (e_k, e_j) + (0,0) + i(0, e_j) - (e_k, 0) = (e_k, e_j) = \delta_{kj}$.

45. Fie $\mathbf{V}$ un spațiu vectorial complex înzestrat cu produsul scalar (,). Notînd cu ${}^{R}\mathbf{V}$ trecerea în real a lui $\mathbf{V}$, să se arate că funcția definită prin $\langle v, w\rangle = \mathcal{R}e(v, w)$ este un produs scalar pe ${}^{R}\mathbf{V}$.

1) Fie $v \in \mathbf{V}$. Să se verifice că v și iv sînt ortogonali în ${}^{R}\mathbf{V}$.

2) Să se arate că dacă $\{e_1, \ldots, e_n\}$ este o mulțime ortogonală din $\mathbf{V}$, atunci $\{e_1, ie_1, \ldots, e_n, ie_n\}$ este o mulțime ortogonală în ${}^{R}\mathbf{V}$.

46. În spațiul euclidian canonic $\boldsymbol{R}^4$, fie vectorul $v = (14, -3, -6, -7)$ și submulțimea $S = \{a_1, a_2, a_3\}$, unde $a_1 = (-3, 0, 7, 6)$, $a_2 = (1, 4, 3, 2)$, $a_3 = (2, 2, -2, -2)$. Să se găsească proiecția ortogonală w a lui v pe $\mathbf{L}(S)$ și vectorul $w^{\perp}$.

Soluție. Acoperirea liniară a vectorilor a_1, a_2, a_3 notată cu $\mathbf{L}(S)$ nu este o mulțime liniar independentă. Vectorul proiecție îl notăm cu w și acesta poate fi reprezentat ca o combinație liniară $w = k_1a_1 + k_2a_2 + k_3a_3$.

Notăm cu $w^{\perp}$ „perpendiculara" coborîtă din v pe $\mathbf{L}(S)$. Deoarece $(w^{\perp}, a_i) = 0$, i = 1, 2, 3, putem determina scalarii k_1, k_2, k_3 ca soluție a sistemului liniar

$$(a_1, a_1)\, k_1 + (a_2, a_1)\, k_2 + (a_3, a_1)\, k_3 = (v, a_1)$$
$$(a_1, a_2)\, k_1 + (a_2, a_2)\, k_2 + (a_3, a_2)\, k_3 = (v, a_2)$$
$$(a_1, a_3)\, k_1 + (a_2, a_3)\, k_2 + (a_3, a_3)\, k_3 = (v, a_3)$$

Vectorul $w^{\perp}$ se obține ca diferență $w^{\perp} = v - w$.

Pe cazul concret efectuînd produsele scalare obținem sistemul liniar neomogen

$$\begin{aligned} 47k_1 + 15k_2 - 16k_3 &= -63 \\ k_1 + k_2 \qquad\quad &= -1 \\ -2k_1 \qquad\quad + k_3 &= 3, \end{aligned}$$

care admite o infinitate simplă de soluții $k_1 = \frac{1}{2}(\alpha - 3)$, $k_2 = \frac{1}{2}(1 - \alpha)$, $k_3 = \alpha$; $\alpha \in \boldsymbol{R}$.

Găsim $w = (5, 2, -9, -8)$; $w^{\perp} = v - w = (9, -5, 3, 1)$.

47. În spațiul euclidian canonic $\boldsymbol{R}^4$, fie submulțimea

$$S = \{a_1, a_2, a_3\},$$

unde $a_1 = (1, 3, 0, 2)$, $a_2 = (3, 7, -1, 2)$, $a_3 = (2, 4, -1, 0)$.

1) Să se găsească sistemul de ecuații liniare care descriu complementul ortogonal $\mathbf{L}^{\perp}(S)$ al acoperirii liniare a lui $\mathbf{L}(S)$.

2) Să se găsească o bază a complementului ortogonal $\mathbf{L}^{\perp}(S)$.

Soluție. 1) Întrucît $a_2 = a_1 + a_3$, urmează că $\dim \mathbf{L}(S) = 2$, deci $\dim \mathbf{L}^{\perp}(S) = 2$. Fie un vector $v \in L^{\perp}(S)$; $v = (x_1, x_2, x_3, x_4)$. Ecuațiile care descriu $\mathbf{L}^{\perp}(S)$ pot fi

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 2x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned} \quad \text{sau} \quad \begin{aligned} x_1 + 3x_2 \qquad + 2x_4 &= 0 \\ 3x_1 + 7x_2 - x_3 + 2x_4 &= 0. \end{aligned}$$

2) Folosind sistemele de ecuații de mai sus, găsim soluțiile $\left(\frac{3}{2}\alpha_1, -\frac{1}{2}\alpha_1 - 2\alpha_2, \alpha_1, \alpha_2\right)$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \boldsymbol{R}$, respectiv $\left(\frac{3}{2}\beta_1 + 4\beta_2, -\frac{1}{2}\beta_1 - 2\beta_2, \beta_1, \beta_2\right)$, $\beta_1, \beta_2 \in \boldsymbol{R}$.

Vectorii $(-3, -1, -2, 0)$, $(1, -1, -2, 1)$ determină o bază a lui $\mathbf{L}^{\perp}(S)$.

48. Fie $\mathbf{F}$ spațiul vectorial euclidian canonic al funcțiilor reale continue definite pe $[0, 2\pi]$.

1) Să se verifice că mulțimea $\{f_0, f_1, f_2, \ldots\}$, unde $f_0(x) = 1$, $f_{2n-1}(x) = \cos nx$, $f_{2n}(x) = \sin nx$, $n \in \mathbf{N}^*$, este liniar independentă și să se ortonormeze.

2) Notăm cu $\mathbf{W}$ subspațiul de dimensiune $2n + 1$ generat de $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} f_0$, $\frac{1}{\sqrt{\pi}} f_1, \ldots, \frac{1}{\sqrt{\pi}} f_{2n}$ *(spațiul vectorial al polinoamelor trigonometrice)*. Să se explicite proiecția lui $f \in \mathbf{F}$ pe $\mathbf{W}$. Aplicație: $f(x) = x$.

Soluție. 1) În **F** avem produsul scalar $(f, g) = \int_0^{2\pi} f(x)\, g(x)\, dx$. Prin calcul direct, pentru $m \neq n$, se găsește

$$\int_0^{2\pi} f_n(x)\, f_m(x)\, dx = 0,$$

adică $\{f_0, f_1, f_2, ...\}$ este o mulțime ortogonală. Acest rezultat împreună cu faptul că nici una dintre funcțiile $f_0, f_{2n-1}\ f_{2n}$, $n \in N^*$, nu este funcția zero arată că $\{f_0, f_1, f_2, ...\}$ este o mulțime independentă.

Deoarece

$$(f_0, f_0) = \int_0^{2\pi} dx = 2\pi, \ (f_{2n-1}, f_{2n-1}) = \int_0^{2\pi} \cos^2 nx\, dx = \pi,$$

$$(f_{2n}, f_{2n}) = \int_0^{2\pi} \sin^2 nx\, dx = \pi,$$

rezultă $||f_0|| = \sqrt{2\pi}$, $||f_{2n-1}|| = ||f_{2n}|| = \sqrt{\pi}$. De aceea mulțimea ortonormată atașată este

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} f_0, \ \frac{1}{\sqrt{\pi}} f_{2n-1}, \ \frac{1}{\sqrt{\pi}} f_{2n}, \quad n \in \mathbf{N}^*\right\}.$$

2) Fie $f \in \mathbf{F}$ și f_n proiecția lui f pe **W**. Se știe că (vezi 2.32)

$$f_n = \sum_{i=0}^{2n} (f, f_i)\, f_i, \ \text{ unde } (f, f_i) = \int_0^{2\pi} f(x)\, f_i(x)\, dx.$$

Numerele (f, f_i) se numesc *coeficienții Fourier atașați lui f*.

Pentru $f(x) = x$ găsim

$$(f, f_0) = \int_0^{2\pi} x\, dx = 2\pi^2, \ (f, f_{2n-1}) = \int_0^{2\pi} x \cos nx\, dx = 0,$$

$$(f, f_{2n}) = \int_0^{2\pi} x \sin nx\, dx = -\frac{2\pi}{n}.$$

§ 3. TRANSFORMĂRI LINIARE

3.1. Fie **V** și **W** două spații vectoriale peste cîmpul $\boldsymbol{K}$. O funcție $\mathcal{T}: \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ cu proprietățile

$$\mathcal{T}(x + y) = \mathcal{T}(x) + \mathcal{T}(y), \quad \forall x, y \in \mathbf{V},$$

$$\mathcal{T}(kx) = k\mathcal{T}(x), \ \forall k \in \boldsymbol{K}, \ \forall x \in \mathbf{V},$$

se numește *transformare liniară (operator liniar sau homomorfism de spații vectoriale)*.

Precizare: uneori in loc de $\mathcal{T}(x)$ se scrie $\mathcal{T} x$.

O transformare liniară $\mathcal{L}: \mathbf{V} \to \boldsymbol{K}$ (cîmpul $\boldsymbol{K}$ este considerat ca spațiu vectorial aritmetic cu o dimensiune peste $\boldsymbol{K}$) se numește *formă liniară*.

3.2. Funcția $\mathcal{T}: \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ este o transformare liniară dacă și numai dacă

$$\mathcal{T}(kx + ly) = k\mathcal{T}(x) + l\mathcal{T}(y), \ \forall k, l \in \boldsymbol{K}, \ \forall x, y \in \mathbf{V}.$$

3.3. Fie $\mathcal{T}: \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ o transformare liniară.

(1) $\mathcal{T}(0) = 0$.

(2) Dacă $\mathbf{U}$ este un subspațiu vectorial al lui $\mathbf{V}$, atunci $\mathcal{T}(\mathbf{U})$ este un subspațiu vectorial al lui $\mathbf{W}$.

(3) Dacă vectorii $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbf{V}$ sînt liniar dependenți, atunci și vectorii $\mathcal{T}(x_1), \mathcal{T}(x_2), \ldots, \mathcal{T}(x_n) \in \mathbf{W}$ sînt liniar dependenți.

3.4. Fie $\mathcal{T}: \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ o transformare liniară.

Mulțimea

$$\mathrm{Ker}(\mathcal{T}) = \{x \mid x \in \mathbf{V}, \mathcal{T}(x) = 0\},$$

numită *nucleul lui* $\mathcal{T}$, este un subspațiu vectorial al lui $\mathbf{V}$.

Mulțimea $\mathrm{Im}(\mathcal{T}) = \mathcal{T}(\mathbf{V})$, numită *imaginea lui* $\mathbf{V}$ *prin* $\mathcal{T}$, este un subspațiu vectorial al lui $\mathbf{W}$ (fig. 1.2).

Dacă $\mathbf{V}$ este finit dimensional, atunci și spațiul vectorial $\mathrm{Im}\,(\mathcal{T})$ este finit dimensional și

$$\dim \mathrm{Ker}(\mathcal{T}) + \dim \mathrm{Im}(\mathcal{T}) = \dim \mathbf{V}.$$

Dimensiunea nucleului lui $\mathcal{T}$ se numește *defectul* lui $\mathcal{T}$, iar dimensiunea imaginii lui $\mathbf{V}$ prin $\mathcal{T}$ se numește *rangul* lui $\mathcal{T}$.

3.5. Fie $\mathcal{L}(\mathbf{V}, \mathbf{W})$ mulțimea tuturor transformărilor liniare definite pe $\mathbf{V}$ și cu valori în $\mathbf{W}$. Adunarea transformărilor liniare și înmulțirea cu scalari se definesc ca la funcții; dacă $\mathcal{S}, \mathcal{T} \in \mathcal{L}(\mathbf{V}, \mathbf{W})$, atunci

$$(\mathcal{S} + \mathcal{T})\,(x) = \mathcal{S}(x) + \mathcal{T}(x), \ \forall x \in \mathbf{V},$$

$$(k\mathcal{S})\,(x) = k\mathcal{S}(x), \ \forall k \in \boldsymbol{K}, \ \forall x \in \mathbf{V}.$$

În raport cu aceste operații mulțimea $\mathcal{L}(\mathbf{V}, \mathbf{W})$ este un spațiu vectorial peste cîmpul $\boldsymbol{K}$.

Elementele lui $\mathcal{L}(\mathbf{V}, \mathbf{V})$ se numesc *endomorfisme* ale lui $\mathbf{V}$.

Spațiul vectorial $\mathcal{L}(\mathbf{V}, \boldsymbol{K})$ al tuturor formelor liniare definite pe $\mathbf{V}$ și cu valori în $\boldsymbol{K}$ se numește *dualul lui* $\mathbf{V}$. Dualul lui $\mathcal{L}(\mathbf{V}_n, \boldsymbol{K})$ se dientifică cu $\mathbf{V}_n$.

3.6. Compunerea a două transformări liniare, definită ca la funcții, este numită *înmulțire (produs)* și are ca rezultat tot o transformare liniară. Evident compunerea nu este comutativă dar este asociativă.

Compunerea poate fi combinată cu operațiile algebrice de adunare și înmulțire cu scalari:

(1) dacă $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ sînt transformări liniare pentru care au sens $\mathcal{A} + \mathcal{B}$, $\mathcal{A}\mathcal{C}$ și $\mathcal{B}\mathcal{C}$, atunci $\forall k, l \in \boldsymbol{K}$,

$$(k\mathcal{A} + l\mathcal{B})\,\mathcal{C} = k\mathcal{A}\mathcal{C} + l\mathcal{B}\mathcal{C}$$

(2) dacă $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ sînt transformări liniare pentru care au sens $\mathcal{A} + \mathcal{B}$, $\mathcal{C}\mathcal{A}$ și $\mathcal{C}\mathcal{B}$,atunci, $\forall k, l \in \boldsymbol{K}$,

$$\mathcal{C}(k\mathcal{A} + l\mathcal{B}) = k\mathcal{C}\mathcal{A} + l\mathcal{C}\mathcal{B}.$$

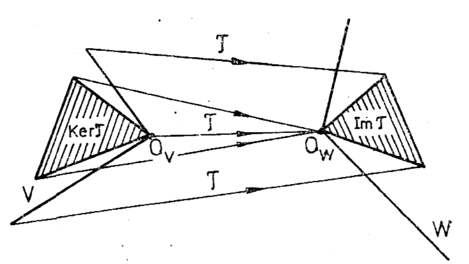


Fig. 1.2

Fie $\mathcal{T}$ un endomorfism al lui $\mathbf{V}$. Puterile naturale ale lui $\mathcal{T}$ se definesc inductiv:

$$\mathcal{T}^0 = \mathcal{J},\ \mathcal{T}^n = \mathcal{T}\mathcal{T}^{n-1},\ n = 1, 2, \ldots$$

unde $\mathcal{J}$ este transformarea identitate.

3.7. Fie $\mathcal{T}: \mathbf{U} \to \mathbf{V}$ o transformare liniară bijectivă (inversabilă). Inversa $\mathcal{T}^{-1}: \mathbf{V} \to \mathbf{U}$ este tot o transformare liniară. În plus dacă $\mathcal{T}: \mathbf{U} \to \mathbf{V}$ și $\mathcal{S}: \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ sînt transformări liniare bijective, atunci $\mathcal{S} \circ \mathcal{T} : \mathbf{U} \to \mathbf{W}$ este o transformare liniară bijectivă și $(\mathcal{S} \circ \mathcal{T})^{-1} = \mathcal{T}^{-1} \circ \mathcal{S}^{-1}$.

O transformare liniară bijectivă se numește *izomorfism* de spații vectoriale.

3.8. Dacă $\mathcal{T}: \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ este o transformare liniară, atunci următoarele afirmații sînt echivalente.

(1) $\mathcal{T}$ este injectivă.

(2) $\mathcal{T}: \mathbf{V} \to \mathcal{T}(\mathbf{V})$ este inversabilă.

(3) $\operatorname{Ker}(\mathcal{T}) = \{0\}$.

3.9. Presupunem că $\mathcal{T}: \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ este o transformare liniară, iar $\dim \mathbf{V} = n$. Atunci următoarele afirmații sînt echivalente.

(1) $\mathcal{T}$ este injectivă.

(2) Dacă $v_1, \ldots, v_p \in \mathbf{V}$ sînt vectori liniar independenți, atunci și $\mathcal{T}(v_1), \ldots, \mathcal{T}(v_p) \in \mathcal{T}(\mathbf{V}) \subset \mathbf{W}$ sînt vectori liniar independenți.

(3) $\dim \mathcal{T}(\mathbf{V}) = n$.

(4) Dacă $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ este o bază pentru $\mathbf{V}$, atunci $\{\mathcal{T}(e_1), \mathcal{T}(e_2), \ldots, \mathcal{T}(e_n)\}$ este o bază pentru $\mathcal{T}(\mathbf{V})$.

3.10. Fie $\mathbf{V}_n$ și $\mathbf{W}$ două spații vectoriale peste cîmpul $\boldsymbol{K}$. Dacă $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ este o bază a lui $\mathbf{V}_n$, iar $w_1, w_2, \ldots, w_n$ sînt n vectori arbitrari din $\mathbf{W}$, atunci există o transformare liniară unică $\mathcal{T}: \mathbf{V}_n \to \mathbf{W}$ cu proprietatea $\mathcal{T}(e_i) = w_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

3.11. Fie $\mathbf{V}_n$ și $\mathbf{W}_m$ două spații vectoriale finit dimensionale peste cîmpul $\boldsymbol{K}$. Dacă $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ este o bază a lui $\mathbf{V}_n$, iar $\{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$ este o bază a lui $\mathbf{W}_m$, atunci există o matrice și numai una $\mathbf{T} = [t_{ij}]$ de tipul $m \times n$ astfel încît $\mathcal{T}(e_j) = \sum\limits_{i=1}^{m} t_{ij} w_i$. În plus, dacă $x = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j e_j$ are imaginea $\mathcal{T}(x) = \sum\limits_{i=1}^{m} y_i w_i$, atunci $y_i = \sum\limits_{j=1}^{n} t_{ij} x_j$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Notînd $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, $\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$, obținem scrierea matriceală $Y = \mathbf{T}\mathbf{X}$ a lui $\mathcal{T}$.

T se numește *matricea asociată* transformării liniare $\mathcal{T}$. Vom scrie $T = m(\mathcal{T})$.

Fie $\mathcal{L}(\mathbf{V}_n, \mathbf{W}_m)$ mulțimea tuturor transformărilor liniare de la $\mathbf{V}_n$ la $\mathbf{W}_m$ și $\mathcal{M}_{m\times n}(\boldsymbol{K})$ mulțimea tuturor matricelor de tipul $m \times n$ cu elemente din $\boldsymbol{K}$. Funcția $\mathrm{m}: \mathcal{L}(\mathbf{V}_n, \mathbf{W}_m) \to \mathcal{M}_{m\times n}(\boldsymbol{K})$ definită prin $\mathcal{T} \to \mathbf{T}$ este un izomorfism de spații vectoriale. De aceea $\mathcal{L}(\mathbf{V}_n, \mathbf{W}_m)$ are dimensiunea mn.

Izomorfismul m are proprietățile:

(1) $\mathrm{m}(\mathcal{S}\mathcal{T}) = \mathrm{m}(\mathcal{S})\, \mathrm{m}(\mathcal{T})$, dacă $\mathcal{S}\mathcal{T}$ are sens;

(2) dacă $\mathcal{S}: \mathbf{V}_n \to \mathbf{V}_n$ este inversabilă, atunci și $\mathrm{m}(\mathcal{S})$ este inversabilă și $\mathrm{m}(\mathcal{S}^{-1}) = (\mathrm{m}(\mathcal{S}))^{-1}$.

3.12. Fie $\mathcal{L}(\mathbf{V}_n, \boldsymbol{K})$ dualul lui $\mathbf{V}_n$. Baza $\{e^1, e^2, \ldots, e^n\}$ a lui $\mathcal{L}(\mathbf{V}_n, \boldsymbol{K})$ definită prin $e^i(e_j) = \delta^i_j$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, se numește *bază duală*.

Dacă $\mathbf{V}_n$ este un spațiu vectorial euclidian, atunci $\mathbf{V}_n$ se poate identifica cu $\mathcal{L}(\mathbf{V}_n, \boldsymbol{K})$.

3.13. Fie $\mathbf{V}_n$ un spațiu vectorial finit dimensional peste cîmpul $\boldsymbol{K}$ și $\mathcal{T}: \mathbf{V}_n \to \mathbf{V}_n$ o transformare liniară. Fixînd baze diferite în $\mathbf{V}_n$, lui $\mathcal{T}$ i se asociază matrice pătratice diferite.

Matricele $\mathbf{A}$ și $\mathbf{B}$, pătratice de ordinul n, cu elemente din $\boldsymbol{K}$, reprezintă aceeași transformare liniară $\mathcal{T}: \mathbf{V}_n \to \mathbf{V}_n$ dacă și numai dacă există o matrice nesingulară $\mathbf{C}$ astfel încît $\mathbf{B} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{AC}$. În acest caz matricele $\mathbf{A}$ și $\mathbf{B}$ se numesc *asemenea*, iar $\mathbf{C}$ este de fapt matricea de trecere de la baza veche la baza nouă.

3.14. Fie $\mathbf{V}$ un spațiu vectorial peste cîmpul $\boldsymbol{K}$. Endomorfismul $\mathcal{F}: \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ se numește:

(1) *automorfism* dacă este bijectiv;

(2) *proiecție* dacă $\mathcal{F}^2 = \mathcal{F}$;

(3) *involuție sau structură produs* dacă $\mathcal{F}^2 = \mathcal{J}$, unde $\mathcal{J}$ este identitatea;

(4) *structură complexă* dacă $\mathcal{F}^2 = -\mathcal{J}$, unde $\mathcal{J}$ este identitatea;

(5) *endormorfism nilpotent de indice n* dacă $\mathcal{F}^n = \mathcal{O}$, unde $n = 2, 3, \ldots$, iar $\mathcal{O}$ este transformarea zero. Un endomorfism nilpotent de indice doi și de rang maxim posibil se mai numește și *structură tangentă*.

3.15. Submulțimea lui $\mathcal{L}(\mathbf{V}, \mathbf{V})$ ale cărei elemente sînt automorfisme ale lui $\mathbf{V}$ este un grup în raport cu compunerea automorfismelor. Acesta poartă numele de *grupul liniar general* și se notează cu $\mathcal{GL}(\mathbf{V})$.

3.16. Dacă $\mathcal{Q}_i: \mathbf{V} \to \mathbf{V}$, $i = 1, 2, \ldots, p$, sînt proiecții cu proprietățile $\mathcal{Q}_i\mathcal{Q}_j = \mathcal{O}$ pentru $i \neq j$ și $\sum_{i=1}^{p} \mathcal{Q}_i = \mathcal{J}$ (identitatea), atunci

$$\mathbf{V} = \mathrm{Im}(\mathcal{Q}_1) \oplus \mathrm{Im}(\mathcal{Q}_2) \oplus \ldots \oplus \mathrm{Im}(\mathcal{Q}_p).$$

3.17. Presupunem că $\mathbf{V}$ și $\mathbf{W}$ sînt două spații vectoriale complexe și euclidiene.

Fie $\mathcal{T}: \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ o transformare liniară. Transformarea liniară $\mathcal{T}^*: \mathbf{W} \to \mathbf{V}$, definită prin $(x, \mathcal{T}y) = (\mathcal{T}^*x, y)$, $\forall x \in \mathbf{W}$, $\forall y \in \mathbf{V}$, se numește *adjuncta lui* $\mathcal{T}$.

Un endomorfism $\mathcal{T} \in \mathcal{L}(\mathbf{V}, \mathbf{V})$ se numește:

(1) *hermitian* dacă $\mathcal{T} = \mathcal{T}^*$;

(2) *antihermitian* dacă $\mathcal{T} = -\mathcal{T}^*$.

O transformare liniară $\mathcal{T} \in \mathcal{L}(\mathbf{V}, \mathbf{W})$ se numește *unitară* dacă păstrează produsul scalar, adică $(\mathcal{T}x, \mathcal{T}y) = (x, y)$, $\forall x, y \in \mathbf{V}$. Echivalent, $\mathcal{T}$ este unitar dacă și numai dacă $\|\mathcal{T}x\| = \|x\|$, $\forall x \in \mathbf{V}$.

Orice transformare unitară este injectivă.

Presupunem că $\mathbf{V}$ și $\mathbf{W}$ sînt finit dimensionale și că în fiecare este fixată o bază. Transformării $\mathcal{T}: \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ i se atașează matricea $\mathbf{T}$. Matricea $\mathbf{T}^* = {}^t\overline{\mathbf{T}}$ atașată lui $\mathcal{T}^*$ se numește *adjuncta matricei* $\mathbf{T}$.

Dacă $\mathbf{T} = {}^t\overline{\mathbf{T}}$, atunci matricea pătratică $\mathbf{T}$ se numește *hermitică*, iar dacă $\mathbf{T} = -{}^t\overline{\mathbf{T}}$, atunci matricea pătratică $\mathbf{T}$ se numește *antihermitică*.

O matrice pătratică $\mathbf{T}$ cu proprietatea $\mathbf{TT}^* = \mathbf{I}$, unde $\mathbf{I}$ este matricea unitate, se numește matrice *unitară*.

3.18. Presupunem că $\mathbf{V}$ și $\mathbf{W}$ sînt două spații vectoriale reale și euclidiene.

Fie $\mathcal{T}: \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ o transformare liniară. Transformarea liniară $\mathcal{T}^*: \mathbf{W} \to \mathbf{V}$ definită prin $(x, \mathcal{T}y) = (\mathcal{T}^*x, y)$, $\forall x \in \mathbf{W}$, $\forall y \in \mathbf{V}$, se numește *transpusa* lui $\mathcal{T}$.

Un endormofism $\mathcal{T} \in \mathcal{L}(\mathbf{V}, \mathbf{V})$ se numește:

(1) *simetric* dacă $\mathcal{T} = \mathcal{T}^*$;

(2) *antisimetric* dacă $\mathcal{T} = -\mathcal{T}^*$.

O transformare liniară $\mathcal{T} \in \mathcal{L}(\mathbf{V}, \mathbf{W})$ se numește *ortogonală* dacă păstrează produsul scalar, adică $(\mathcal{T}x, \mathcal{T}y) = (x, y)$, $\forall x, y \in \mathbf{V}$. Echivalent $\mathcal{T}$ este ortogonală dacă și numai dacă $\|\mathcal{T}x\| = \|x\|$, $\forall x \in \mathbf{V}$.

Orice transformare ortogonală este injectivă.

Presupunem că $\mathbf{V}$ și $\mathbf{W}$ sînt finit dimensionale și că în fiecare este fixată o bază ortonormată. Transformării $\mathcal{T}: \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ i se atașează matricea $\mathbf{T}$, iar lui $\mathcal{T}^*$ i se atașează ${}^t\mathbf{T}$.

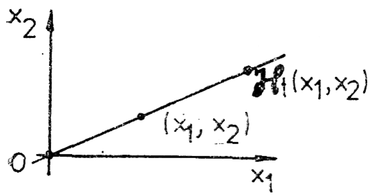
Unui endomorfism simetric îi corespunde o matrice simetrică, iar unui endomorfism antisimetric îi corespunde o matrice antisimetrică.

Unui endomorfism ortogonal îi corespunde o matrice ortogonală.

3.19. Transformări liniare clasice în $\boldsymbol{R}^2$

Denumire — *Definiție* — *Matricea asociată*

1. *Omotetia*

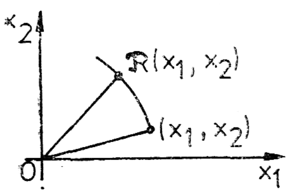


$\mathcal{H}_t(x_1, x_2) = (tx_1, tx_2)$

$\mathcal{H}_t(1, 0) = (t, 0)$, $\mathcal{H}_t(0, 1) = (0, t)$ $\Rightarrow H = \begin{bmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{bmatrix}$

$t > 1$ dilatare, $0 < t < 1$ contracție, $t = 1$ identitatea, $t = -1$ simetrie față de origine

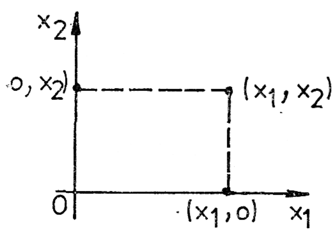
2. *Rotație de unghi* θ



$\mathcal{R}(x_1, x_2) = (x_1 \cos\theta - x_2 \sin\theta, x_1 \sin\theta + x_2 \cos\theta)$

$\mathcal{R}(1, 0) = (\cos\theta, \sin\theta)$, $\mathcal{R}(0, 1) = (-\sin\theta, \cos\theta)$ $\Rightarrow \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

3. *Proiecții canonice*



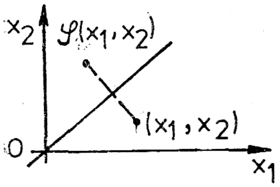
$\mathrm{pr}_1(x_1, x_2) = (x_1, 0)$

$\mathrm{pr}_2(x_1, x_2) = (0, x_2)$

$\mathrm{pr}_1(1, 0) = (1, 0)$, $\mathrm{pr}_1(0, 1) = (0, 0)$ $\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$;

$\mathrm{pr}_2(1, 0) = (0, 0)$, $\mathrm{pr}_2(0, 1) = (0, 1)$ $\Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

4. *Simetria față de prima bisectoare*



$\mathcal{S}(x_1, x_2) = (x_2, x_1)$

$\mathcal{S}(1, 0) = (0, 1)$, $\mathcal{S}(0, 1) = (1, 0)$ $\Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

Exerciții și probleme

1. Fie trei vectori x, y și z și trei 1-forme u, v, w care satisfac

$$u(x) = 1 - \beta^2 - \gamma^2, \quad u(y) = -\alpha\beta, \quad u(z) = -\alpha\gamma$$
$$v(x) = -\alpha\beta, \quad v(y) = 1 - \alpha^2 - \gamma^2 \quad v(z) = \beta\gamma,$$
$$w(x) = -\alpha\gamma, \quad w(y) = \beta\gamma, \quad w(z) = 1 - \alpha^2 - \beta^2.$$

Să se arate că x, y, z (sau u, v, w) sînt liniar dependenți $\Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$.

Soluție. Relația $ax + by + cz = 0$ implică

$$\begin{cases} (1 - \beta^2 - \gamma^2)\, a - \alpha\beta b - \alpha\gamma c = 0 \\ -\alpha\beta a + (1 - \alpha^2 - \gamma^2) b + \beta\gamma c = 0 \\ -\alpha\gamma a + \beta\gamma b + (1 - \alpha^2 - \beta^2)\, c = 0. \end{cases}$$

Acest sistem omogen admite soluții nebanale dacă și numai dacă determinantul

$$\begin{vmatrix} 1 - \beta^2 - \gamma^2 & -\alpha\beta & -\alpha\gamma \\ -\alpha\beta & 1 - \alpha^2 - \gamma^2 & \beta\gamma \\ -\alpha\gamma & \beta\gamma & 1 - \alpha^2 - \beta^2 \end{vmatrix} = (1 - \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2)^2$$

este nul.

2. Se consideră funcțiile $\mathcal{T} : \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^3$ definite respectiv prin

1) $\mathcal{T}(x) = a$, cu a un vector fixat din $\boldsymbol{R}^3$

2) $\mathcal{T}(x) = x + a$

3) $\mathcal{T}(x) = \lambda x$, cu $\lambda \in \boldsymbol{R}$

4) $\mathcal{T}(x) = (x_1, x_2, x_3^2)$, cu $x = (x_1, x_2, x_3) \in \boldsymbol{R}^3$

5) $\mathcal{T}(x) = (x_3, x_1, x_2)$

6) $\mathcal{T}(x) = (x_3, x_1, x_2 + k)$, cu $k \in \boldsymbol{R}$, $k \neq 0$

7) $\mathcal{T}(x) = (x_1 + 2x_2 - 3x_3,\ 3x_1 - x_2 + 3x_3,\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3)$

Să se cerceteze care dintre aceste funcții sînt transformări liniare.

Soluție. 1) Dacă $a \neq 0$ rezultă $\mathcal{T}(0) \neq 0$, deci transformarea $\mathcal{T}$ nu este aditivă; $\mathcal{T}$ nu este liniară.

Dacă $a = 0$ transformarea $\mathcal{T}$ este liniară.

2) Dacă $a \neq 0$ rezultă $\mathcal{T}(0) \neq 0$ și deci $\mathcal{T}$ nu este liniară; dacă $a = 0$, atunci $\mathcal{T}(x) = x$, $\mathcal{T}(y) = y$ și pentru $\alpha, \beta \in \boldsymbol{R}$ găsim

$$\mathcal{T}(\alpha x + \beta y) = \alpha x + \beta y = \alpha\mathcal{T}(x) + \beta\mathcal{T}(y), \text{ adică } \mathcal{T} \text{ este liniară.}$$

3) Asemănător,

$$\mathcal{T}(\alpha x + \beta y) = \lambda(\alpha x + \beta y) = \alpha(\lambda x) + \beta(\lambda y) = \alpha\mathcal{T}(x) + \beta\mathcal{T}(y),$$
$$\forall x,\ y \in \boldsymbol{R}^3 \text{ și } \alpha, \beta \in \boldsymbol{R}; \text{ rezultă } \mathcal{T} \text{ liniară.}$$

4) Fie și $y = (y_1, y_2, y_3) \in \boldsymbol{R}^3$ și $\alpha, \beta \in \boldsymbol{R}$. Avem $\alpha x + \beta y = (\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2, \alpha x_3 + \beta y_3)$ și atunci

$\mathcal{T}(\alpha x + \beta y)$, $=$ **conform definiției,** $[(\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2, (\alpha x_3 + \beta y_3)^2] \neq$ $\neq (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3^2) + (\beta y_1, \beta y_2, \beta y_3^2) = \alpha\mathcal{T}(x) + \beta\mathcal{T}(y)$; $\mathcal{T}$ nu este liniară.

5) $\mathcal{T}$ este liniară.

6) Deoarece $\mathcal{T}(0) = (0, 0, k) \neq (0, 0, 0) = 0$, rezultă că $\mathcal{T}$ nu este liniară.

7) Fie și $y = (y_1, y_2, y_3) \in \boldsymbol{R}^3$ și $\alpha, \beta \in \boldsymbol{R}$. Deoarece avem $\alpha x + \beta y = (\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2, \alpha x_3 + \beta y_3)$ rezultă,

$\mathcal{T}(\alpha x + \beta y)$, $=$ **conform definiției,** $(\alpha x_1 + \beta y_1 + 2\alpha x_2 + 2\beta y_2 - 3\alpha x_3 - 3\beta y_3, 3\alpha x_1 + 3\beta y_1 - \alpha x_2 - \beta y_2 + 3\alpha x_3 + 3\beta y_3, \quad 2\alpha x_1 + 2\beta y_1 + 3\alpha x_2 + 3\beta y_2 + + 2\alpha x_3 + 2\beta y_3) = [\alpha(x_1 + 2x_2 - 3x_3) + \beta(y_1 + 2y_2 - 3y_3), \quad \alpha(3x_1 - x_2 + + 3x_3) + \beta(3y_1 - y_2 + 3y_3), \quad \alpha(2x_1 + 3x_2 + 2x_3) + \beta(2y_1 + 3y_2 + 2y_3)] = = \alpha(x_1 + 2x_2 - 3x_3, 3x_1 - x_2 + 3x_3, 2x_1 + 3x_2 + 2x_3) + \beta(y_1 + 2y_2 - 3y_3, 3y_1 - y_2 + 3y_3, \; 2y_1 + 3y_2 + 2y_3) = \alpha\mathcal{T}(x) + \beta\mathcal{T}(y)$ și deci $\mathcal{T}$ este liniară. Aici s-au folosit axiomele operațiilor introduse în spațiul aritmetic $\boldsymbol{R}^3$.

3. Fie $\boldsymbol{R}_n[X]$ spațiul vectorial real al polinoamelor de grad cel mult n. Să se arate că funcția $\mathcal{T} : \boldsymbol{R}_n[X] \to \boldsymbol{R}_n[X]$ definită prin $\mathcal{T}p(x) = p(x + 2) - - p(x)$, $\forall x \in \boldsymbol{R}$, este o transformare liniară.

Soluție. Fie p și q două polinoame oarecare din $\boldsymbol{R}_n[X]$ și $k, l \in \boldsymbol{R}$. Găsim $\mathcal{T}(kp(x) + lq(x)) = \mathcal{T}[(kp + q)(x)]$, $=$ **conform definiției,** $(kp + lq)(x + 2) - - (kp + lq)(x) = kp(x + 2) + lq(x + 2) - kp(x) - lq(x) = k[p(x + 2) - - p(x)] + l[q(x + 2) - q(x)] = k\mathcal{T}p(x) + l\mathcal{T}q(x)$, $\forall x \in \boldsymbol{R}$. Deci $\mathcal{T}$ este o transformare liniară.

4. Să se cerceteze care din funcțiile definite mai jos sînt transformări liniare.

1) $\mathcal{T}(p(x)) = p(-x)$, $p \in \boldsymbol{R}_n[X]$, $\forall x \in \boldsymbol{R}$

2) $\mathcal{T}(p(x)) = p(x + 1)$, $p \in \boldsymbol{R}_n[X]$, $\forall x \in \boldsymbol{R}$

3) $\mathcal{T}(p(x)) = p(x + 1) - p(x)$, $p \in \boldsymbol{R}_n[X]$, $\forall x \in \boldsymbol{R}$

4) $\mathcal{T}(p(x)) = p(x^2)$, $p \in \boldsymbol{R}_n[X]$, $\forall x \in \boldsymbol{R}$

5) $\mathcal{T}(x) = (x_1^2, x_2^2, x_3^2)$, $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{V}_3$

6) $\mathcal{T}(x) = (e^{x_1}, e^{x_2})$, $x = (x_1, x_2) \in \mathbf{V}_2$

7) $\mathcal{T}(x) = (x_1 + 1, x_2 + 1, x_3 - 1)$, $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{V}_3$

8) $\mathcal{T}(x) = (x_1 + x_2, 0, x_1 + x_2 + x_3)$, $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{V}_3$

9) $\mathcal{T}(x) = (x_1, x_1 + x_2, x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$,
$x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{V}_4$

R: 1), 2), 3), 4), 8), 9) liniară; 5), 6), 7) neliniară.

5. Să se determine rangul și defectul transformării liniare $\mathcal{T} : \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^3$ definită prin

$$\mathcal{T}(x) = (x_1 + x_2 + x_3, \; x_1 + x_2 + x_3, \; x_1 + x_2 + x_3), \quad x = (x_1, x_2, x_3)$$

explicitînd cîte o bază în Ker $\mathcal{T}$ și Im $\mathcal{T}$.

Soluție. Conform definiției Ker $\mathscr{T}$ este mulțimea vectorilor $x = (x_1, x_2, x_3)$ pentru care $\mathscr{T}(x) = 0$, deci pentru care

$$(x_1 + x_2 + x_3,\ x_1 + x_2 + x_3,\ x_1 + x_2 + x_3) = (0, 0, 0).$$

Obținem sistemul $x_1 + x_2 + x_3 = 0,\ x_1 + x_2 + x_3 = 0,\ x_1 + x_2 + x_3 = 0$ care se reduce la ecuația $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, ceea ce arată că sistemul este dublu nedeterminat și are soluția $(x_1, x_2, x_3 = -x_1 - x_2)$.

În concluzie orice vector $x \in \operatorname{Ker} \mathscr{T}$ are forma

$$x = (x_1, x_2, -x_1 - x_2) = x_1 (1, 0, -1) + x_2(0, 1, -1).$$

Vectorii $e_1 = (1, 0, -1)$ și $e_2 = (0, 1, -1)$ sînt liniar independenți. De aceea $\{e_1, e_2\}$ este o bază în Ker $\mathscr{T}$ și deci $n = \dim(\operatorname{Ker} \mathscr{T}) = 2$. Avînd în vedere definiția subspațiului Im $\mathscr{T}$ și definiția lui $\mathscr{T}$ conchidem că orice vector din Im $\mathscr{T}$ are toate coordonatele egale. Rezultă că oricare doi vectori din această mulțime sînt liniar dependenți. Mai mult, orice vector din Im $\mathscr{T}$ se poate exprima funcție de vectorul $\mathrm{f} = (1, 1, 1)$; rezultă că o bază în Im $\mathscr{T}$ este formată din acest vector și atunci $r = \dim(\operatorname{Im} \mathscr{T}) = 1$.

6. Să se cerceteze care dintre funcțiile definite mai jos sînt transformări liniare și în acest caz să se determine defectul și rangul lor.

1) $\mathscr{T}(x) = [\ln|\operatorname{arc\,tg}(x_1 + x_2 + x_3)|,\ x_1,\ e^{x_1+x_2+x_3}],\ x = (x_1, x_2, x_3) \in \boldsymbol{R}^3$

2) $\mathscr{T}(x) = (x_1, x_1 + x_2, 0),\ x = (x_1, x_2, x_3) \in \boldsymbol{R}^3$

3) $\mathscr{T}(x) = (x_1 + x_2, 0, x_2 + x_3, 0, x_1 + x_3),\ x = (x_1, x_2, x_3) \in \boldsymbol{R}^3$

4) $\mathscr{T}(x) = x + (0, 3, 0)\ \ x = (x_1, x_2, x_3) \in \boldsymbol{R}^3$

5) $\mathscr{T}(x) = (x_1 - x_2, x_1 + x_2, 3x_1, x_1, x_2),\ x = (x_1, x_2) \in \boldsymbol{R}^2$

6) $\mathscr{T}(x) = (x_2, x_1, x_2 + x_3),\ x = (x_1, x_2, x_3) \in \boldsymbol{R}^3$

7) $\mathscr{T}(x) = (x_1 + x_3, 0, x_1 + x_2),\ x = (x_1, x_2, x_3) \in \boldsymbol{R}^3$

R: 1) Neliniară. 2) Liniară; dim Ker $\mathscr{T} = 1$; dim Im $\mathscr{T} = 2$. 3) Liniară; dim Ker $\mathscr{T} = 0$; dim Im $\mathscr{T} = 3$, 4) Neliniară. 5) Liniară; dim Ker $\mathscr{T} = 0$, dim Im $\mathscr{T} = 2$, 6) Liniară; dim Ker $\mathscr{T} = 0$; dim Im $\mathscr{T} = 3$. 7) Liniară; dim Ker $\mathscr{T} = 1$; dim Im $\mathscr{T} = 2$.

7. (*Derivata*). Fie spațiile vectoriale reale $\mathbf{V} = \{\mathrm{f}: (a, b) \to \boldsymbol{R} \mid \mathrm{f}$ derivabilă$\}$, $\mathbf{W} = \{\mathrm{g}: (a, b) \to \boldsymbol{R}\}$. Să se arate că funcția $\mathrm{D}: \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ definită prin $\mathrm{g} = \mathrm{D}(\mathrm{f}) \equiv \mathrm{f}'$ este o transformare liniară. Să se determine Ker D.

R: $\operatorname{Ker} \mathrm{D} = \{\mathrm{f}: (a, b) \to \boldsymbol{R} \mid \mathrm{f}(x) = c,\ \forall x \in (a, b)\}$.

8. *(Integrala definită).* Fie spațiul vectorial real $\mathbf{V} = \{\mathrm{f}: [a, b] \to \boldsymbol{R} \mid \mathrm{f}$ integrabilă în sens Riemann$\}$. Să se arate că funcția $\mathrm{I}: \mathbf{V} \to \boldsymbol{R}$ definită prin $\mathrm{I}(\mathrm{f}) = \int_a^b \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x$ este liniară.

9. *(Integrala nedefinită sau primitiva).* Fie spațiul vectorial real $\mathbf{V} = \{\mathrm{f}: [a, b] \to \boldsymbol{R} \mid \mathrm{f}$ continuă$\}$. Să se arate că funcția $\mathrm{P}: \mathbf{V} \to \mathbf{V}$, $\mathrm{g} = \mathrm{P}(\mathrm{f})$, $\mathrm{g}(x) = \int_a^x \mathrm{f}(t)\,\mathrm{d}t$ pentru $a \leqslant x \leqslant b$, este liniară și să se determine Ker P.

R: Ker P = {funcția zero}.

10. Fie $\mathbf{V}$ spațiul vectorial real al tuturor funcțiilor reale continue pe $[a, b]$. Să se verifice că funcția $\mathcal{T}: \mathbf{V} \to \mathbf{V}$, $g = \mathcal{T}(f)$, $g(x) = \int_a^b f(t)\cos(x-t)\,dt$ pentru $a \leqslant x \leqslant b$, este o transformare liniară. Să se expliciteze $\operatorname{Ker}\mathcal{T}$.

Soluție. $\mathcal{T}$ este bine definită deoarece g este o funcție continuă. Într-adevăr, $g(x+h) = \int_a^b f(t)\cos(x+h-t)\,dt$ și $|g(x+h) - g(x)| \leqslant \int_a^b |f(t)(\cos(x+h-t) - \cos(x-t))|\,dt <$ (se utilizează uniform continuitatea funcției cosinus pe $[a, b]$), ε pentru h dintr-o vecinătate a lui zero, adică $\lim\limits_{h\to 0} g(x+h) = g(x)$.

Fie $r, s \in \boldsymbol{R}$ și $f_1, f_2 \in \mathbf{V}$. Rezultă $\mathcal{T}(rf_1 + sf_2) = \int_a^b (rf_1(t) + sf_2(t))\cos(x-t)\,dt = r\int_a^b f_1(t)\cos(x-t)\,dt + s\int_a^b f_2(t)\cos(x-t)\,dt = r\mathcal{T}(f_1) + s\mathcal{T}(f_2)$, adică $\mathcal{T}$ este liniară.

Condiția $\int_a^b f(t)\cos(x-t)\,dt = 0$, $\forall x \in [a, b]$, este echivalentă cu $\left(\int_a^b f(t)\cos t\,dt\right)\cos x + \left(\int_a^b f(t)\sin t\,dt\right)\sin x = 0$, $\forall x \in [a, b]$. De aceea $\operatorname{Ker}\mathcal{T}$ conține acele funcții f pentru care $\int_a^b f(t)\cos t\,dt = 0$, $\int_a^b f(t)\sin t\,dt = 0$, adică funcțiile ortogonale funcțiilor cosinus și sinus.

11. Fie $\boldsymbol{D}$ un domeniu din $\boldsymbol{R}^n$ și $C^\infty(\boldsymbol{D})$ spațiul vectorial real al funcțiilor de clasă C^∞ pe $\boldsymbol{D}$. Fie $d^k: C^\infty(\boldsymbol{D}) \to C^\infty(\boldsymbol{D})$ operatorul de diferențiere de ordinul k. Să se găsească $\operatorname{Ker} d^2$.

12. Fie $\mathcal{T}: \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^2$ o transformare liniară dată prin imaginile $\mathcal{T}(e_1) = (2, 1)$, $\mathcal{T}(e_2) = (0, 1)$, $\mathcal{T}(e_3) = (1, 1)$, unde $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$.

1) Să se determine imaginea unui vector oarecare din $\boldsymbol{R}^3$.
2) Să se determine imaginea vectorului $f = (2, 3, -1)$ prin $\mathcal{T}$.

R: 1) Dacă $x = (x_1, x_2, x_3) \in \boldsymbol{R}^3$, atunci $\mathcal{T}(x) = (2x_1 + x_3, x_1 + x_2 + x_3)$. 2) $\mathcal{T}(f) = (3, 4)$.

13. Pe spațiul vectorial real al funcțiilor polinomiale de grad cel mult n, notat cu P_n, se definesc funcțiile

$$p(x) \to \mathcal{T}_1(p(x)) = xp(x),$$

$$p(x) \to \mathcal{T}_2(p(x)) = x\int_0^1 tp(t)\,dt, \ \forall x \in \boldsymbol{R}.$$

1) Să se arate că $\mathcal{T}_1$ și $\mathcal{T}_2$ sînt transformări liniare.
2) Să se verifice că $\mathcal{T}_1$ este injectivă, dar nu este surjectivă.
3) Să se determine $\operatorname{Ker}\mathcal{T}_2$ și $\operatorname{Im}\mathcal{T}_2$.

Soluție. 1) $\forall k, l \in \boldsymbol{R}$ și $\forall p, q \in P_n$, găsim

$$\mathcal{T}_2((kp + lq)(x)) = x\int_0^1 t(kp(t) + lq(t))\,dt = x\int_0^1 ktp(t)\,dt + x\int_0^1 ltq(t)\,dt = k\mathcal{T}_2(p(x)) + l\mathcal{T}_2(q(x))$$ și deci $\mathcal{T}_2$ este liniară.

Pentru $\mathcal{T}_1$ se procedează analog.

2) Deoarece $\mathcal{T}_1(p(x)) = xp(x) = 0$, $\forall x \in \boldsymbol{R}$, implică $p(x) = 0$, $\forall x \in \boldsymbol{R}$, adică $p(x) \equiv 0$, transformarea liniară $\mathcal{T}_1 \colon P_n \to P_{n+1}$ este injectivă. Ea nu este surjectivă întrucît nu orice polinom real de gradul $n + 1$ este divizibil cu x.

3) Fie $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$. Punem condiția $\mathcal{T}_2\,(p(x)) = 0$, $\forall x \in \boldsymbol{R}$, adică $\int_0^1 t \sum_{i=0}^{n} a_i t^i \, dt = \int_0^1 \sum_{i=0}^{n} a_i t^{i+1} \, dt = 0$ sau $\sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{i+2} = 0$. Deci $\operatorname{Ker} \mathcal{T}_2 = \left\{ p(x) \,\middle|\, p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i, \ \sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{i+2} = 0 \right\}$.

Notăm $q(x) = bx$. Ipoteza $q(x) = x \int_0^1 tp(t) \, dt$, $\forall x \in \boldsymbol{R}$, conduce la condiția $bx = x \sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{i+2}$, adică $b = \sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{i+2}$. Astfel este determinată și $\operatorname{Im} \mathcal{T}_2 \subset P_1$.

14. Fie $\mathcal{T} \in \mathcal{L}(\mathbf{V}, \mathbf{V})$ un endomorfism pentru care $\mathcal{T}^2 - \mathcal{T} + \mathcal{I} = \mathcal{O}$ ($\mathcal{O}$ este transformarea nulă, $\mathcal{I}$ este transformarea identică). Să se arate că $\mathcal{T}$ este inversabil.

Soluție. 1) Să dovedim că $\mathcal{T}$ este injectiv. Fie $x_1, x_2 \in \mathbf{V}$ pentru care $\mathcal{T}(x_1) = \mathcal{T}(x_2)$ și deci $\mathcal{T}^2(x_1) = \mathcal{T}^2(x_2)$. Egalitatea dată în enunțul problemei conduce la $\mathcal{T}^2(x_1) - \mathcal{T}(x_1) + x_1 = 0$, $\mathcal{T}^2(x_2) - \mathcal{T}(x_2) + x_2 = 0$.

Prin scădere găsim $x_1 = x_2$, adică $\mathcal{T}$ este injectiv.

2) Dovedim că $\mathcal{T}$ este surjectiv. Notînd $x = y - \mathcal{T}y$, rezultă $\mathcal{T}(x) = \mathcal{T}(y) - \mathcal{T}^2(y)$. Pe de altă parte, din enunț avem $\mathcal{I} = \mathcal{T} - \mathcal{T}^2$ de unde $\mathcal{I}(y) = (\mathcal{T} - \mathcal{T}^2)\,(y)$ sau $y = \mathcal{T}(y) - \mathcal{T}^2(y)$. Aceste egalități implică $y = \mathcal{T}(x)$, ceea ce arată că $\mathcal{T}$ este surjectiv. În concluzie $\mathcal{T}$ fiind bijectiv este inversabil.

Observație. În cazul $\dim \mathbf{V} = n$ era suficient să arătăm că $\mathcal{T}$ este injectiv.

15. 1) O funcție $\mathrm{f} \colon \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ se numește *funcție original* dacă are următoarele proprietăți:

(i) $\mathrm{f}(t) = 0$, pentru $t < 0$;

(ii) f este derivabilă pe porțiuni;

(iii) $\exists M > 0$ și $s \geqslant 0$ astfel încît $|\,\mathrm{f}(t)\,| \leqslant M e^{st}$, $\forall t \geqslant 0$. Numărul s se numește *indice de creștere.*

Să se verifice că mulțimea tuturor funcțiilor original este un spațiu vectorial real.

2) Fie $\Omega(a)$ subspațiul funcțiilor original care au indicele de creștere cel mult a și $C^\infty(a, \infty)$ spațiul vectorial real al funcțiilor de clasă C^∞ pe (a, ∞). Să se arate că funcția $\mathcal{L} \colon \Omega(a) \to C^\infty(a, \infty)$, $\mathcal{L}(\mathrm{f}) = F$, $F(p) = \int_0^\infty \mathrm{f}(t) e^{-pt} \, dt$ este o transformare liniară injectivă *(transformarea Laplace).*

16. Dacă $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2 \in \mathcal{L}\,(\boldsymbol{R}^3, \boldsymbol{R}^3)$ sînt date prin matricele

$$\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix},$$

în raport cu baza canonică a lui $\boldsymbol{R}^3$, atunci

1) să se determine imaginea lui $x=(0,\ 1,\ -1)$ prin $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_1^{-1}, \mathcal{T}_2, \mathcal{T}_2^{-1}$;

2) să se determine imaginea lui $y=(1,\ 3,\ -2)$ prin $\mathcal{T}_1+\mathcal{T}_2$ și $(\mathcal{T}_1+\mathcal{T}_2)^{-1}$;

3) să se determine imaginea lui $z=(1,\ 2,\ 0)$ prin $\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2$ și $\mathcal{T}_2\mathcal{T}_1$.

R: 1) $\mathcal{T}_1(x)=(1,1,-1)$, $\mathcal{T}_2(x)=(2,3,-5)$, $\mathcal{T}_1^{-1}(x)=\left(-\frac{4}{13}, \frac{12}{13}, -\frac{11}{13}\right)$, $\mathcal{T}_2^{-1}(x)=\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{10}, -\frac{1}{5}\right)$. 2) $(\mathcal{T}_1+\mathcal{T}_2)(y)=(13, 14, -9)$, $(\mathcal{T}_1+\mathcal{T}_2)^{-1}(y)=\left(-\frac{30}{43}, \frac{36}{43}, \frac{27}{86}\right)$. 3) $(\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2)(z)=(29, 16, 23)$, $(\mathcal{T}_2\mathcal{T}_1)(z)=(21, 21, 25)$.

17. Fie spațiul vectorial al matricelor pătratice de ordin doi $\mathcal{M}_{2\times2}(\boldsymbol{C})$ în care considerăm matricele

$$\mathbf{A}_1=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix},\ \mathbf{A}_2=\begin{bmatrix}0 & -\mathrm{i}\\ \mathrm{i} & 0\end{bmatrix},\ \mathbf{A}_3=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix},\ \mathbf{A}_4=\begin{bmatrix}\mathrm{i} & 0\\ 0 & \mathrm{i}\end{bmatrix}.$$

1) Să se determine o formă liniară $l:\mathcal{M}_{2\times2}(\boldsymbol{C})\to\boldsymbol{C}$ astfel încît $l(\mathbf{A}_1)=-4\mathrm{i}$, $l(\mathbf{A}_2)=6$, $l(\mathbf{A}_3)=2$, $l(\mathbf{A}_4)=4\mathrm{i}$.

2) Să se determine o bază a subspațiului format din matricele $\mathbf{A}$ pentru care $l(\mathbf{A})=4$.

Soluție. 1) Fie matricea $A\in\mathcal{M}_{2\times2}(\boldsymbol{C})$, $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}$, și baza canonică $u_1=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$, $u_2=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$, $u_3=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}$, $u_4=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ a acestui spațiu. Coeficienții formei liniare sînt $l(u_j)=\alpha_j$, $j=1,2,3,4$; $\alpha_j\in\boldsymbol{C}$. Deci $l(\mathbf{A})=\alpha_1a_{11}+\alpha_2a_{12}+\alpha_3a_{21}+\alpha_4a_{22}$. Spunem că am determinat această formă dacă cunoaștem coeficienții săi; pentru aceasta ne folosim de datele din enunț $l(\mathbf{A}_1)=\alpha_2+\alpha_3=-4\mathrm{i}$ ş.a.m.d. Sîntem conduși la sistemul liniar neomogen $\alpha_2+\alpha_3=-4\mathrm{i}$, $-\mathrm{i}\alpha_2+\mathrm{i}\alpha_3=6$, $\alpha_1-\alpha_4=2$, $\mathrm{i}\alpha_1+\mathrm{i}\alpha_4=4\mathrm{i}$ a cărui soluție este unică $\alpha_1=3$, $\alpha_2=\mathrm{i}$, $\alpha_3=-5\mathrm{i}$, $\alpha_4=1$. Deci $l(\mathbf{A})=3a_{11}+\mathrm{i}a_{12}-5\mathrm{i}a_{21}+a_{22}$.

2) Fie subspațiul $\mathcal{L}_2\subset\mathcal{M}_{2\times2}(\boldsymbol{C})$, $\mathcal{L}_2=\{\mathbf{A}\mid l(\mathbf{A})=4\}$. Elementele matricelor din $\mathcal{L}_2$ se află în relația

$$3a_{11}+\mathrm{i}a_{12}-5\mathrm{i}a_{21}+a_{22}=4.$$

$\dim\mathcal{L}_2=3$. O bază din acest subspațiu poate fi

$$\mathbf{B}_1=\begin{bmatrix}1 & 5\\ 1 & 1\end{bmatrix},\ \mathbf{B}_2=\begin{bmatrix}5\mathrm{i} & -3\mathrm{i}\\ 3 & 1\end{bmatrix},\ \mathbf{B}_3=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}.$$

18. Fie $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2\in\mathcal{L}(\boldsymbol{R}_3[\mathbf{X}], \boldsymbol{R}_3[\mathbf{X}])$ două endomorfisme definite astfel

$$\mathcal{T}_1(a_0+a_1\mathbf{X}+a_2\mathbf{X}^2+a_3\mathbf{X}^3)=a_0+a_1\mathbf{X}+a_2\mathbf{X}^2,$$

$$\mathcal{T}_2(\mathbf{X}^2+\mathbf{X}^3)=\mathbf{X}+\mathbf{X}^3,\ \mathcal{T}_2(\mathbf{X}+\mathbf{X}^3)=1+\mathbf{X}^3,\ \mathcal{T}_2(1+\mathbf{X}^3)=1+\mathbf{X}+\mathbf{X}^2+\mathbf{X}^3,\ \mathcal{T}_2(1+\mathbf{X}+\mathbf{X}^2+\mathbf{X}^3)=0.$$

Să se determine matricele transformărilor $\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2$ și respectiv $\mathcal{T}_2\mathcal{T}_1$ în raport cu baza canonică a lui $\boldsymbol{R}_3[\mathbf{X}]$.

Soluție. Notînd $e_1 = 1$, $e_2 = X$, $e_3 = X^2$, $e_4 = X^3$ și ținînd seama că $\mathscr{T}_2$ este o transformare liniară, găsim

$$\mathscr{T}_2(e_3) + \mathscr{T}_2(e_4) = e_2 + e_4 \qquad \text{și deci} \qquad \mathscr{T}_2(e_1) = \frac{1}{2}e_3 - \frac{1}{2}e_4$$

$$\mathscr{T}_2(e_2) + \mathscr{T}_2(e_4) = e_1 + e_4 \qquad \mathscr{T}_2(e_2) = -e_2 - \frac{1}{2}e_3 - \frac{1}{2}e_4$$

$$\mathscr{T}_2(e_1) + \mathscr{T}_2(e_4) = e_1 + e_2 + e_3 + e_4 \qquad \mathscr{T}_2(e_3) = -e_1 - \frac{1}{2}e_3 - \frac{1}{2}e_4$$

$$\mathscr{T}_2(e_1) + \mathscr{T}_2(e_2) + \mathscr{T}_2(e_3) + \mathscr{T}_2(e_4) = 0 \qquad \mathscr{T}_2(e_4) = e_1 + e_2 + \frac{1}{2}e_3 + \frac{3}{2}e_4.$$

Rezultă

$$\mathscr{T}_1\mathscr{T}_2(e_1) = \mathscr{T}_1\left(\frac{1}{2}e_3 - \frac{1}{2}e_4\right) = \frac{1}{2}e_3$$

$$\mathscr{T}_1\mathscr{T}_2(e_2) = \mathscr{T}_1\left(-e_2 - \frac{1}{2}e_3 - \frac{1}{2}e_4\right) = -e_2 - \frac{1}{2}e_3$$

$$\mathscr{T}_1\mathscr{T}_2(e_3) = \mathscr{T}_1\left(-e_1 - \frac{1}{2}e_3 - \frac{1}{2}e_4\right) = -e_1 - \frac{1}{2}e_3$$

$$\mathscr{T}_1\mathscr{T}_2(e_4) = \mathscr{T}_1\left(e_1 + e_2 + \frac{1}{2}e_3 + \frac{3}{2}e_4\right) = e_1 + e_2 + \frac{1}{2}e_3.$$

De aici găsim

$$T_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Definiția lui $\mathscr{T}_1$ implică $\mathscr{T}_1(e_1) = e_1$, $\mathscr{T}_1(e_2) = e_2$, $\mathscr{T}_1(e_3) = e_3$, $\mathscr{T}_1(e_4) = 0$. De aceea

$\mathscr{T}_2\,\mathscr{T}_1(e_1) = \mathscr{T}_2(e_1)$, $\mathscr{T}_2\,\mathscr{T}_1(e_2) = \mathscr{T}_2(e_2)$, $\mathscr{T}_2\,\mathscr{T}_1(e_3) = \mathscr{T}_2(e_3)$, $\mathscr{T}_2\,\mathscr{T}_1(e_4) = 0$,

și deci

$$T_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & -1/2 & -1/2 & 0 \end{bmatrix}.$$

19. Să se dovedească care dintre funcțiile definite mai jos sînt transformări liniare și în toate cazurile de liniaritate să se determine matricea asociată transformării în raport cu baza canonică a spațiului.

1) $\mathcal{T}(x) = (\mathrm{i}x_1, \mathrm{i}x_2, x_3)$, $x = (x_1, x_2, x_3) \in \boldsymbol{R}^3$, $\mathcal{T} : \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{C}^3$.

2) $\mathcal{T}(x) = \sin x$, $x \in \boldsymbol{C}$, $\mathcal{T} : \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{C}$

3) $\mathcal{T}(x) = (\mathrm{i}x_1 + \mathrm{i}x_2 + x_3,\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4,\ 0,\ \mathrm{i}x_4)$,
$x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \boldsymbol{C}^4$, $\mathcal{T} : \boldsymbol{C}^4 \to \boldsymbol{C}^4$

4) $\mathcal{T}(\mathbf{A}) = {}^t\mathbf{A}$, $\mathbf{A} \in \mathfrak{M}_{3\times 3}(\boldsymbol{K})$, $\mathcal{T} : \mathfrak{M}_{3\times 3}(\boldsymbol{K}) \to \mathfrak{M}_{3\times 3}(\boldsymbol{K})$

5) $\mathcal{T}(x) = x_1 + 2x_2 + 3x_3$, $x = (x_1, x_2, x_3) \in \boldsymbol{R}^3$, $\mathcal{T} : \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}$

6) $\mathcal{T}(x) = x_1 + \mathrm{i}x_2 - \mathrm{i}x_3$, $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$, $\mathcal{T} : \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{C}$

7) $\mathcal{T}(x) = (x, -\mathrm{i}x, 0)$, $x \in \boldsymbol{R}$, $\mathcal{T} : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{C}^3$

8) $\mathcal{T}(x) = \begin{bmatrix} x & \mathrm{i}x \\ -\mathrm{i}x & x \end{bmatrix}$, $x \in \boldsymbol{C}$, $\mathcal{T} : \boldsymbol{C} \to \mathfrak{M}_{2\times 2}(\boldsymbol{C})$.

R: 1) Liniară, $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathrm{i} & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{i} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. 2) Neliniară.

3) Liniară, $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathrm{i} & \mathrm{i} & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{i} \end{bmatrix}$. 4) Liniară, $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

5) Liniară, $\mathbf{T} = [1, 2, 3]$. 6) Liniară, $\mathbf{T} = [1, \mathrm{i}, -\mathrm{i}]$. 7) Liniară, $\mathbf{T} = [1, -\mathrm{i}, 0]$. 8) Liniară, $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 1 \end{bmatrix}$.

20. În spațiul vectorial real al tuturor funcțiilor reale fiecare dintre mulțimile

$$\{\sin x, \cos x\}, \quad \{e^{2x} \sin 3x, e^{2x} \cos 3x\}, \quad \{1, 1 - x, 1 - x - e^x\}$$

este liniară independentă și generează un subspațiu **V** finit dimensional. Utilizînd mulțimile date ca baze pentru **V**, să se găsească matricea atașată operatorului de derivare $D: \mathbf{V} \to \mathbf{V}$.

21. Fie $\mathcal{T} : \mathbf{V}_3 \to \mathbf{V}_3$ funcția definită prin egalitatea $\mathcal{T}(\vec{v}) = \vec{v} \times \vec{a}$, $\vec{a}$ fixat.

1) Să se arate că $\mathcal{T}$ este o transformare liniară.
2) Să se calculeze $\operatorname{Ker} \mathcal{T}$ și $\operatorname{Im} \mathcal{T}$ și să se arate că

$$\operatorname{Ker} \mathcal{T} \oplus \operatorname{Im} \mathcal{T} = \mathbf{V}_3.$$

3) Să se determine o bază în $\mathbf{V}_3$ față de care matricea lui $\mathcal{T}$ să fie de forma

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\|\vec{a}\|^2 & 0 \end{bmatrix}.$$

4) Să se determine subspațiile invariante ale lui $\mathcal{T}$.

Soluție. 1) Fie $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in \mathbf{V}_3$ și $\lambda, \mu \in \boldsymbol{R}$; rezultă:

$\mathcal{T}(\lambda\vec{v}_1 + \mu\vec{v}_2) = (\lambda\vec{v}_1 + \mu\vec{v}_2) \times \vec{a} = \lambda(\vec{v}_1 \times \vec{a}) + \mu(\vec{v}_2 \times \vec{a}) = \lambda\mathcal{T}(\vec{v}_1) + $
$+ \mu\mathcal{T}(\vec{v}_2)$ și deci $\mathcal{T}$ este liniară.

2) $\operatorname{Ker}\mathcal{T} = \{\vec{v} \in \mathbf{V}_3 \mid \mathcal{T}(\vec{v}) = \vec{0}\}$. Însă, $\mathcal{T}(\vec{v}) = \vec{0}$ implică $\vec{v} \times \vec{a} = \vec{0}$, adică $\vec{v} = k\vec{a}$, $k \in \boldsymbol{R}$ și deci $\operatorname{Ker}\mathcal{T} = \{k\vec{a} \mid k \in \boldsymbol{R}\}$ este mulțimea vectorilor coliniari cu $\vec{a}$.

$\operatorname{Im}\mathcal{T} = \{\mathcal{T}(\bar{v}) \mid \bar{v} \in \mathbf{V}_3\} = \{\vec{w} = \vec{v} \times \vec{a} \mid \vec{w} \perp \vec{v},\ \vec{w} \perp \vec{a}\}$, adică este mulțimea vectorilor din $\mathbf{V}_3$ ortogonali pe $\vec{a}$. Rezultă $\operatorname{Ker}\mathcal{T} \cap \operatorname{Im}\mathcal{T} = \{\vec{0}\}$. Pe de altă parte orice vector nenul $\vec{v} \in \mathbf{V}_3$ poate fi descompus unic ca suma a doi vectori, $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$, cu $\vec{v}_1$ coliniar cu $\vec{a}$, iar $\vec{v}_2$ ortogonal cu $\vec{a}$, adică $\vec{v}_1 \in \operatorname{Ker}\mathcal{T}$ și $\vec{v}_2 \in \operatorname{Im}\mathcal{T}$, de unde $\mathbf{V}_3 = \operatorname{Ker}\mathcal{T} \oplus \operatorname{Im}\mathcal{T}$.

3)Considerăm baza formată din vectorii $\vec{e}_1 = \vec{a}$, $\vec{e}_2 \in \operatorname{Im}\mathcal{T}$, $\vec{e}_3 = \vec{e}_2 \times \vec{a}$. Renumerotînd, obținem baza $\vec{f}_1 = \vec{e}_1$, $\vec{f}_2 = \vec{e}_3$, $\vec{f}_3 = \vec{e}_2$ în care

$$\mathcal{T}(\vec{f}_1) = \mathcal{T}(\vec{e}_1) = \vec{e}_1 \times \vec{a} = \vec{a} \times \vec{a} = \vec{0} = 0\cdot\vec{f}_1 + 0\cdot\vec{f}_2 + 0\cdot\vec{f}_3$$

$$\mathcal{T}(\vec{f}_2) = \mathcal{T}(\vec{e}_3) = \vec{e}_3 \times \vec{a} = (\vec{e}_2 \times \vec{a}) \times \vec{a} = \vec{a}(\vec{a}, \vec{e}_2) - \vec{e}_2(\vec{a}, \vec{a}) =$$
$$= -(\vec{a}, \vec{a})\,\vec{e}_2 = -\|\vec{a}\|^2\vec{f}_3 = 0\cdot\vec{f}_1 + 0\cdot\vec{f}_2 - \|\vec{a}\|^2\cdot\vec{f}_3,$$

deoarece $\vec{e}_2 \in \operatorname{Im}\mathcal{T}$ implică $(\vec{a}, \vec{e}_2) = 0$.

$$\mathcal{T}(\vec{f}_3) = \mathcal{T}(\vec{e}_2) = \vec{e}_2 \times \vec{a} = \vec{e}_3 = \vec{f}_2 = 0\cdot\vec{f}_1 + 1\cdot\vec{f}_2 + 0\cdot\vec{f}_3.$$

Rezultă că matricea lui $\mathcal{T}$ în raport cu baza $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\}$ are forma

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\|\vec{a}\|^2 & 0 \end{bmatrix}.$$

4) Subspațiile invariante ale transformării $\mathcal{T}$ sînt: $\{\vec{0}\}$, $\mathbf{V}_3$, $\operatorname{Ker}\mathcal{T}$ și $\operatorname{Im}\mathcal{T}$ deoarece

$$\mathcal{T}(\vec{0}) = \vec{0} \times \vec{a} = \vec{0} \Rightarrow \mathcal{T}(\vec{0}) \in \{\vec{0}\}$$

$$\mathcal{T}(\vec{v}) = \vec{v} \times \vec{a} \in \mathbf{V}_3, \quad \forall\vec{v} \in \mathbf{V}_3 \Rightarrow \mathcal{T}(\vec{v}) \in \mathbf{V}_3.$$

Dacă $\vec{v} \in \operatorname{Ker}\mathcal{T} \Rightarrow \vec{v} = k\vec{a}$ și atunci,

$$\mathcal{T}(\vec{v}) = \vec{v} \times \vec{a} = (k\vec{a}) \times \vec{a} = \vec{0},\ \mathcal{T}(\vec{v}) \in \operatorname{Ker}\mathcal{T}.$$

Dacă $\vec{v} \in \operatorname{Im}\mathcal{T} \Rightarrow (\vec{v}, \vec{a}) = \vec{0} \Rightarrow \vec{v} \perp \vec{a}$. Atunci,

$$\mathcal{T}(\vec{v}) = \vec{v} \times \vec{a} \Rightarrow \mathcal{T}(\bar{v}) \perp \bar{a} \Rightarrow \mathcal{T}(\bar{v}) \in \operatorname{Im}\mathcal{T}.$$

22. Să se determine matricele transformărilor liniare $\mathcal{T}_j: \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^3$, $j = 1, 2, 3$, în raport cu baza formată din vectorii $f_1 = (1, 2, 3)$, $f_2 = (2, 1, 3)$, $f_3 = (1, 1, 1)$ cunoscînd că

$$1)\ \mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad 2)\ \mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ -2 & 2 & -6 \\ -2 & 2 & -6 \end{bmatrix} \quad 3)\ \mathbf{T}_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 6 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

sînt matricele transformărilor respective în raport cu baza canonică a lui $\boldsymbol{R}^3$.

Indicație. Se aplică formula $\mathbf{B} = \mathbf{C}^{-1}\,\mathbf{AC}$, în care $\mathbf{C}$ este matricea de trecere.

23. Fie transformarea liniară $\mathcal{T}: \mathbf{V}_3 \to \mathbf{V}_3$ definită ca proiecția ortogonală a vectorilor din $\mathbf{V}_3$ pe planul $P: x - 3y + 2z = 0$. Să se determine matricea transformării în raport cu baza canonică a lui $\mathbf{V}_3$.

Indicație. Determinăm o bază convenabilă. Anume alegem $\vec{v}_1 = (1, 1, 1)$ conținut în planul P și determinăm un vector $\vec{v}_2 = (\alpha, \beta, \gamma)$ care să aparțină planului și să fie perpendicular pe $\vec{v}_1$. Din aceste condiții rezultă $\vec{v}_2 = (-5, 1, 4)$. Completăm baza cu vectorul $\vec{v}_3 = (1, -3, 2)$ normal la plan. Deoarece

$$\mathcal{T}(\vec{v}_1) = \vec{v}_1, \quad \mathcal{T}(\vec{v}_2) = \vec{v}_2, \quad \mathcal{T}(\vec{v}_3) = \vec{0}$$

rezultă că

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ este matricea transformării în baza } \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}.$$

Notăm prin $\mathbf{U}$ matricea transformării în baza canonică $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ și aplicăm formula $\mathbf{U} = \mathbf{C}^{-1}\,\mathbf{TC}$, unde $\mathbf{C}$ este matricea de trecere de la baza canonică la baza $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$.

24. Fie $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2 \in \mathcal{L}(\mathbf{V}, \mathbf{V})$ două proiecții. Să se arate că

1) $\mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2$ este tot o proiecție $\Leftrightarrow \mathcal{T}_1 \cdot \mathcal{T}_2 = \mathcal{T}_2 \cdot \mathcal{T}_1 = \mathcal{O}$:

2) $\operatorname{Im}(\mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2) = \operatorname{Im}\mathcal{T}_1 \oplus \operatorname{Im}\mathcal{T}_2$;

3) $\operatorname{Ker}(\mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2) = \operatorname{Ker}\mathcal{T}_1 \cap \operatorname{Ker}\mathcal{T}_2$.

Soluție. 1) $\mathcal{T}_1$ și $\mathcal{T}_2$ sînt proiecții, adică $\mathcal{T}_1^2 = \mathcal{T}_1$ și $\mathcal{T}_2^2 = \mathcal{T}_2$. Admitem că $\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2 = \mathcal{T}_2\mathcal{T}_1 = \mathcal{O}$. Aceasta implică $(\mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2)^2 = \mathcal{T}_1^2 + \mathcal{T}_1\mathcal{T}_2 + \mathcal{T}_2\mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2^2 = \mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2$ ceea ce arată că și transformarea sumă $\mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2$ este o proiecție. Reciproc, dacă admitem că $\mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2$ este o proiecție, obținem $\mathcal{T}_2\mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_1\mathcal{T}_2 = 0$.

Compunînd la stînga, respectiv la dreapta cu $\mathcal{T}_1$ găsim

$$\begin{matrix} \mathcal{T}_1\mathcal{T}_2\mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_1^2\mathcal{T}_2 = \mathcal{O} \\ \mathcal{T}_2\mathcal{T}_1^2 + \mathcal{T}_1\mathcal{T}_2\mathcal{T}_1 = \mathcal{O} \end{matrix} \quad \text{sau} \quad \begin{matrix} \mathcal{T}_1\mathcal{T}_2\mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_1\mathcal{T}_2 = \mathcal{O} \\ \mathcal{T}_2\mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_1\mathcal{T}_2\mathcal{T}_1 = \mathcal{O} \end{matrix}.$$

Prin scădere se obține $\mathcal{T}_2\mathcal{T}_1 - \mathcal{T}_1\mathcal{T}_2 = \mathcal{O}$. Prin urmare $\mathcal{T}_1\mathcal{T}_2 = \mathcal{T}_2\mathcal{T}_1 = \mathcal{O}$.

2) Incluziunea $\operatorname{Im}(\mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2) \subset \operatorname{Im}\mathcal{T}_1 \oplus \operatorname{Im}\mathcal{T}_2$ este evidentă. Fie $x \in \operatorname{Im}\mathcal{T}_1 \oplus \operatorname{Im}\mathcal{T}_2$, ceea ce înseamnă $x = x_1 + x_2$ cu $x_1 \in \operatorname{Im}\mathcal{T}_1$ și $x_2 \in \operatorname{Im}\mathcal{T}_2$. Găsim $(\mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2)(x) = (\mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2)(x_1) + (\mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2)(x_2) = (\mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2)\mathcal{T}_1(x_1) + (\mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2)\mathcal{T}_2(x_2) = \mathcal{T}_1^2(x_1) + \mathcal{T}_2^2(x_2) = x_1 + x_2 = x$; aceasta arată că $x \in \operatorname{Im}(\mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2)$, adică $\operatorname{Im}\mathcal{T}_1 \oplus \operatorname{Im}\mathcal{T}_2 \subset \operatorname{Im}(\mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2)$.

3) Deoarece $\operatorname{Ker}(\mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2) = \{x \in \mathbf{V} \mid (\mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2)(x) = 0\}$, iar $\operatorname{Ker}\mathcal{T}_1 \cap \operatorname{Ker}\mathcal{T}_2 = \{x \in \mathbf{V} \mid \mathcal{T}_1(x) = 0 \text{ și } \mathcal{T}_2(x) = 0\}$ se găsește $\operatorname{Ker}\mathcal{T}_1 \cap \operatorname{Ker}\mathcal{T}_2 \subset \operatorname{Ker}(\mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2)$.

Fie $x \in \operatorname{Ker}(\mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2)$, atunci $(\mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2)(x) = 0$ sau $\mathcal{F}_1(x) = -\mathcal{F}_2(x)$. De aici rezultă că $\mathcal{F}_1(x) = 0$ implică $\mathcal{F}_2(x) = 0$ și reciproc. Deci $x \in \operatorname{Ker} \mathcal{F}_1 \cap$ $\cap \operatorname{Ker} \mathcal{F}_2$, adică $\operatorname{Ker}(\mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2) \subset \operatorname{Ker} \mathcal{F}_1 \cap \operatorname{Ker} \mathcal{F}_2$.

25. Fie $\mathcal{T} \in \mathcal{L}(\mathbf{V}, \mathbf{V})$ un endomorfism nilpotent de indice $p \geqslant 2$.

1) Să se arate că endomorfismul $\mathcal{J} - \mathcal{T}$ este inversabil și că $(\mathcal{J} - \mathcal{T})^{-1} =$ $= \mathcal{J} + \mathcal{T} + \mathcal{T}^2 + \ldots \mathcal{T}^{p-1}$.

2) Să se verifice că dacă x este un vector astfel încît $\mathcal{T}^{p-1}(x) \neq 0$, atunci x, $\mathcal{T}(x), \ldots \mathcal{T}^{p-1}(x)$ sînt vectori liniar independenți.

Soluție. 1) $\mathcal{T}$ este nilpotent de indice p dacă $\mathcal{T}^p = \mathcal{O}$, $\mathcal{O}$ fiind transformare nulă. Rezultă

$$(\mathcal{J} - \mathcal{T})(\mathcal{J} + \mathcal{T} + \mathcal{T}^2 + \ldots + \mathcal{T}^{p-1}) = (\mathcal{J} + \mathcal{T} + \mathcal{T}^2 + \ldots +$$
$$+ \mathcal{T}^{p-1})(\mathcal{J} - \mathcal{T}) = \mathcal{J} - \mathcal{T}^p = \mathcal{J}.$$

De aceea endomorfismul $\mathcal{T}$ este inversabil și $(\mathcal{J} - \mathcal{T})^{-1} = \mathcal{J} + \mathcal{T} + \mathcal{T}^2 +$ $+ \ldots + \mathcal{T}^{p-1}$.

2) Fie scalarii $k_1, \ldots, k_{p-1}$ pentru care $k_0 x + k_1 \mathcal{T}(x) + \ldots + k_{p-1}\mathcal{T}^{p-1}(x) = \mathcal{O}$. Aplicînd succesiv pe $\mathcal{T}$ și ținînd seama că $\mathcal{T}^p = \mathcal{O}$ rezultă

$$k_0 \mathcal{T}(x) + k_1 \mathcal{T}^2(x) + \ldots + k_{p-1}\mathcal{T}^{p-1}(x) = 0$$
$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \qquad\qquad \ldots \quad \ldots$$
$$k_0 \mathcal{T}^{p-2}(x) + k_1 \mathcal{T}^{p-1}(x) = 0$$
$$k_0 \mathcal{T}^{p-1}(x) = 0.$$

Deoarece $\mathcal{T}^{p-1}(x) \neq 0$ rezultă $k_0 = k_1 = \ldots = k_{p-1} = 0$ și deci afirmația este adevărată.

26. Să se determine transformarea liniară $\mathcal{T}: \boldsymbol{R}^4 \to \boldsymbol{R}^4$ cu proprietatea că $\operatorname{Ker} \mathcal{T} = \operatorname{Im} \mathcal{T} = \mathbf{L}(e_1, e_2)$ unde $e_1 = (1{,}0,\ 1{,}0)$, $e_2 = (0{,}0,\ 1{,}1)$ și apoi să se găsească matricea lui $\mathcal{T}$ în raport cu o bază a lui $\boldsymbol{R}^4$ care conține vectorii e_1, e_2.

Indicație. Fie $e_3 = (0{,}0,\ 0{,}1)$ și $e_4 = (0{,}1,\ 0{,}0)$ așa încît $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ este o bază a lui $\boldsymbol{R}^4$. Punem $\mathcal{T}(e_1) = 0$, $\mathcal{T}(e_2) = 0$, $\mathcal{T}(e_3) = e_1$, $\mathcal{T}(e_4) = e_2$.

Atunci $\mathcal{T}(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 + \alpha_4 e_4) = 0$ implică $\alpha_3 e_1 + \alpha_4 e_2 = 0$, adică $\alpha_3 = \alpha_4 = 0$ (deoarece e_1 și e_2 sînt liniar independenți) și de aici rezultă $\operatorname{Ker} \mathcal{T} = \mathbf{L}(e_1, e_2)$. Egalitățile $\mathcal{T}(e_3) = e_1$, $\mathcal{T}(e_4) = e_2$ implică $\operatorname{Im} \mathcal{T} \supseteq \mathbf{L}(e_1, e_2)$ și deci $\operatorname{Im} \mathcal{T} = \mathbf{L}(e_1, e_2)$. Matricea este

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

27. Fie $\mathbf{V}_2$ spațiul vectorial al segmentelor orientate cu originea O identificat cu mulțimea punctelor din plan și fie $\mathcal{A}: \mathbf{V}_2 \to \mathbf{V}_2$ transformarea liniară definită prin $\mathcal{A}(\vec{a}) = \vec{b}$, $\mathcal{A}(\vec{b}) = \vec{c}$, unde $A(\vec{a})$ și $B(\vec{b})$ sînt două puncte fixe necoliniare cu $O(\vec{o})$, iar $C(\vec{c})$ un punct din plan. Să se determine $C(\vec{c})$ astfel încît

1) $\mathcal{A}$ să fie o proiecție.

2) $\mathcal{A}$ să fie o involuție.

R: 1) $C \equiv B$, 2) $C \equiv A$.

28. O transformare liniară $\mathcal{T}: \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ se numește *ciclică* dacă există un vector $v \in \mathbf{V}$ astfel încît $\{v, \mathcal{T}(v), \mathcal{T}^2(v), \ldots\}$ să genereze pe $\mathbf{V}$. Să se verifice că $\mathcal{T}: \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^3$, $\mathcal{T}(x, y, z) = (x+y, y+z, x)$ este o transformare liniară ciclică.

Indicație. Se caută un vector v astfel încît $\{v, \mathcal{T}(v), \mathcal{T}^2(v)\}$ să fie o mulțime liniar independentă.

29. Fie $\mathbf{V}$ un spațiu vectorial real de dimensiune n. O transformare liniară $\mathcal{J}: \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ care satisface relația $\mathcal{J}^2 = -\mathcal{I}$ se numește *structură complexă* pe $\mathbf{V}$ [58].

1) Să se arate că $\mathbf{V}$ admite o structură complexă dacă și numai dacă $n = 2m$.

2) Să se demonstreze că un spațiu vectorial real $\mathbf{V}$ care posedă o structură complexă $\mathcal{J}$ devine un spațiu vectorial complex de dimensiune m dacă înmulțirea cu numere complexe se definește prin

$$(a + ib)\, x = ax + b\mathcal{J}(x), \quad x \in \mathbf{V}, \ a, b \in \boldsymbol{R}.$$

3) Invers, fiind dat un spațiu vectorial complex $\mathbf{V}$ de dimensiune m, definim $\mathcal{J}: \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ prin $\mathcal{J}x = ix$, $x \in \mathbf{V}$. Să se arate că dacă $\mathbf{V}$ este considerat ca un spațiu vectorial real de dimensiune $2m$, atunci $\mathcal{J}$ este o structură complexă pe $\mathbf{V}$.

30. Considerăm transformările liniare $\mathbf{D}, \mathcal{T}: \boldsymbol{R}_n[\mathrm{X}] \to \boldsymbol{R}_n[\mathrm{X}]$ definite respectiv prin $\mathbf{D}p = p'$, $\mathcal{T}(p(x) = p(x + 1) - p(x))$, $p \in \boldsymbol{R}_n[\mathrm{X}]$, $\forall x \in \boldsymbol{R}$.

1) Să se arate că $\mathbf{D}$ este un endomorfism nilpotent și să se scrie matricea lui $\mathbf{D}$ în raport cu baza $\left\{1, \dfrac{X}{1!}, \dfrac{X^2}{2!}, \ldots, \dfrac{X^n}{n!}\right\}$.

2) Să se arate că

$$\mathcal{T} = \frac{1}{1!}\mathbf{D} + \frac{1}{2!}\mathbf{D}^2 + \ldots + \frac{1}{(n-1)!}\mathbf{D}^{n-1} + \frac{1}{n!}\mathbf{D}^n.$$

R: 1) $\mathbf{D}^{n+1} = O$,

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \ldots 0 \\ 0 & 0 & 1 \ldots 0 \\ 0 & 0 & 0 \ldots 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \ldots 1 \\ 0 & 0 & 0 \ldots 0 \end{bmatrix}.$$

2) $$p(x + h) = p(x) + \frac{h}{1!}p'(x) + \ldots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}p^{(n-1)}(x) + \frac{h^n}{n!}p^{(n)}(x)$$

$$p(x + 1) = p(x) + \frac{1}{1!}p'(x) + \ldots + \frac{1}{n!}p^{(n)}(x).$$

Deci

$$\mathcal{T}(p(x)) = p(x + 1) - p(x) = \frac{1}{1!}\mathbf{D}(p(x)) + \frac{1}{2!}\mathbf{D}^2(p(x)) + \ldots +$$

$$+ \frac{1}{n!}\mathbf{D}^n(p(x)) = \left(\frac{1}{1!}\mathbf{D} + \frac{1}{2!}\mathbf{D}^2 + \ldots + \frac{1}{n!}\mathbf{D}^n\right)(p(x)),$$

$\forall p \in \boldsymbol{R}_n[\mathrm{X}]$, $\forall x \in \boldsymbol{R}$ de unde

$$\mathcal{T} = \frac{1}{1!}\mathbf{D} + \frac{1}{2!}\mathbf{D}^2 + \ldots + \frac{1}{n!}\mathbf{D}^n.$$

31. Fie $\mathbf{V}$ un spațiu unitar și $\mathcal{T}:\mathbf{V}\to\mathbf{V}$ o transformare liniară pentru care $\|\mathcal{T}(x)\|=\|\mathcal{T}^*(x)\|$, $\forall x\in\mathbf{V}$, unde $\mathcal{T}^*$ este adjuncta lui $\mathcal{T}$. Să se arate că $\mathcal{T}\mathcal{T}^*=\mathcal{T}^*\mathcal{T}$.

Soluție. Relația $\|\mathcal{T}(x)\|=\|\mathcal{T}^*(x)\|$ implică $(\mathcal{T}x,\mathcal{T}x)=(\mathcal{T}^*x,\mathcal{T}^*x)$. Pe de altă parte, definiția adjunctei $(x,\mathcal{T}x)=(\mathcal{T}^*x,x)$ conduce la $(\mathcal{T}x,\mathcal{T}x)=$ $=((\mathcal{T}^*)^*x,x)=(x,\mathcal{T}^*(\mathcal{T}x))$ și $(\mathcal{T}^*x,\mathcal{T}^*x)=(x,\mathcal{T}(\mathcal{T}^*x))$.

Avînd în vedere aceste egalități, găsim $(x,\mathcal{T}\mathcal{T}^*x)=(x,\mathcal{T}^*\mathcal{T}x)$ sau $[x,(\mathcal{T}\mathcal{T}^*-\mathcal{T}^*\mathcal{T})x]=0$, $\forall x\in\mathbf{V}$.

Prin urmare $\mathcal{T}\mathcal{T}^*=\mathcal{T}^*\mathcal{T}$.

32. Fie $\mathcal{T}:\mathbf{V}\to\mathbf{V}$ un endomorfism dat prin matricea

$$\mathbf{T}=\begin{bmatrix}3+2i & 2-2i\\ 1-i & 3+4i\end{bmatrix},$$

în raport cu o bază a spațiului euclidian complex $\mathbf{V}$. Să se determine două transformări hermitiene $\mathcal{T}_1$ și $\mathcal{T}_2$ astfel ca $\mathcal{T}=\mathcal{T}_1+i\mathcal{T}_2$ și apoi să se determine matricele transformărilor $\mathcal{T}_1$ și $\mathcal{T}_2$.

Soluție. Fie $\mathcal{T}^*$ adjuncta lui $\mathcal{T}$. Transformările liniare $\mathcal{T}_1$ și $\mathcal{T}_2$ sînt

$$\mathcal{T}_1=\frac{\mathcal{T}+\mathcal{T}^*}{2}\quad\text{și}\quad\mathcal{T}_2=\frac{\mathcal{T}-\mathcal{T}^*}{2i}.$$

Acestea sînt hermitiene deoarece

$$\mathcal{T}_1^*=\left(\frac{\mathcal{T}+\mathcal{T}^*}{2}\right)^*=\frac{\mathcal{T}^*+\mathcal{T}}{2}=\mathcal{T}_1$$

și

$$\mathcal{T}_2^*=\left(\frac{\mathcal{T}-\mathcal{T}^*}{2i}\right)^*=\frac{\mathcal{T}^*-\mathcal{T}}{2(-i)}=\frac{\mathcal{T}-\mathcal{T}^*}{2i}=\mathcal{T}_2.$$

Dacă $\mathbf{T}=[t_{ij}]$ este matricea transformării $\mathcal{T}$ atunci $\mathbf{T}^*={}^t[\bar{t}_{ij}]$ este matricea transformării adjuncte $\mathcal{T}^*$. Avem

$$\mathbf{T}^*=\begin{bmatrix}3-2i & 1+i\\ 2+2i & 3-4i\end{bmatrix}$$

și

$$\mathbf{T}_1=\frac{\mathbf{T}+\mathbf{T}^*}{2}=\begin{bmatrix}3 & \frac{3}{2}-\frac{i}{2}\\ \frac{3}{2}+\frac{i}{2} & 3\end{bmatrix},\quad \mathbf{T}_2=\frac{\mathbf{T}-\mathbf{T}^*}{2i}=\begin{bmatrix}2 & -\frac{3}{2}-\frac{i}{2}\\ -\frac{3}{2}+\frac{i}{2} & 4\end{bmatrix},$$

unde $\mathbf{T}_1$ și $\mathbf{T}_2$ sînt matricele transformărilor $\mathcal{T}_1$ și $\mathcal{T}_2$.

33. Să se arate că transformarea liniară $\mathcal{T}:\mathcal{M}_{3\times3}(\boldsymbol{R})\to\mathcal{M}_{3\times3}(\boldsymbol{R})$ definită de egalitatea $\mathcal{T}(\mathbf{A})={}^t\mathbf{A}$, $\mathbf{A}\in\mathcal{M}_{3\times3}(\boldsymbol{R})$, este o involuție simetrică.

34. Fie $C^0(a,b)$ spațiul euclidian canonic al funcțiilor reale continui pe $[a,b]$.

1) Fie $\mathbf{V}$ subspațiul funcțiilor f de clasă C^1 pe $[a,b]$ pentru care $f(a)=$ $=f(b)$. Să se arate că operatorul de derivare $D:\mathbf{V}\to C^0(a,b)$, $D(f)=f'$ este antisimetric.

2) Fie **V** subspațiul funcțiilor f de clasă C^2 pe $[a, b]$ pentru care $p(a)\,\mathrm{f}(a) = 0$, $p(b)\,\mathrm{f}(b) = 0$, unde p este o funcție fixată, de clasă C^1. Notăm cu q o funcție fixată din $C^0\,(a, b)$. Să se arate că operatorul lui Sturm-Liouville $\mathcal{S}: \mathbf{V} \to C^0(a, b)$, $\mathcal{S}(\mathrm{f}) = (p\mathrm{f}')' + q\mathrm{f}$ este simetric.

Indicație. Produsul scalar pe $C^0(a, b)$ este definit prin $(u, v) = \int_a^b u(x)v(x)\mathrm{d}x$.

35. În spațiul complex $\boldsymbol{C}^3$ definim produsul scalar

$$(x, y) = x_1\bar{y}_1 + \mathrm{i}x_1\bar{y}_2 - \mathrm{i}x_2\bar{y}_1 + 4x_2\bar{y}_2 + x_3\bar{y}_3,$$

unde $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$, $y = y_1e_1 + y_2e_2 + y_3e_3$ iar $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$ este baza canonică a lui $\boldsymbol{C}^3$. Fie $\mathcal{T}: \boldsymbol{C}^3 \to \boldsymbol{C}^3$ transformarea liniară atașată matricei

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 1 & 2\lambda \\ 0 & 3 & \mathrm{i} \end{bmatrix}, \quad \lambda \in \boldsymbol{C}.$$

1) Să se determine matricea adjunctei lui $\mathcal{T}$.
2) Să se determine λ astfel încît **T** să fie inversabilă.

R: 1)

$$\mathbf{T}^* = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\mathrm{i} \\ -\frac{1}{3}\mathrm{i} & \frac{4}{3}\mathrm{i} & 1 \\ \mathrm{i} - 2\mathrm{i}\lambda & 8\lambda - 1 & \mathrm{i} \end{bmatrix}, \quad 2)\ \lambda \neq \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\mathrm{i}.$$

36. Fie $\mathcal{T}: \boldsymbol{R}^4 \to \boldsymbol{R}^4$ transformarea liniară definită prin

$$\mathcal{T}(x) = \left(\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4,\ \frac{1}{2}x_1 - \frac{5}{6}x_2 + \frac{1}{6}x_3 + \frac{1}{6}x_4,\right.$$

$$\left.\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{6}x_2 - \frac{5}{6}x_3 + \frac{1}{6}x_4,\ \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{6}x_2 + \frac{1}{6}x_3 - \frac{5}{6}x_4\right),$$

$x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \boldsymbol{R}^4$.

1) Să se arate că $\mathcal{T}$ este ortogonală.
2) Să se determine $\mathcal{T}^{-1}$.
3) Să se scrie matricele lui $\mathcal{T}$ și $\mathcal{T}^{-1}$ în raport cu baza canonică a lui $\boldsymbol{R}^4$.

Indicație. 1) Se arată că $\|\mathcal{T}(x)\| = \|x\|$ pentru orice $x \in \boldsymbol{R}^4$. 2) Se rezolvă sistemul $y = \mathcal{T}(x)$, $y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ în raport cu x_1, x_2, x_3, x_4 și se obține $\mathcal{T}^{-1}$.

37. Fie **V** un spațiu vectorial real, $^{\boldsymbol{C}}\mathbf{V}$ complexificatul său și $\mathcal{T}: \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ o transformare liniară. Funcția $^{\boldsymbol{C}}\mathcal{T}: {}^{\boldsymbol{C}}\mathbf{V} \to {}^{\boldsymbol{C}}\mathbf{V}$ definită prin $^{\boldsymbol{C}}\mathcal{T}(u, v) = (\mathcal{T}u, \mathcal{T}v)$, sau altfel scris $^{\boldsymbol{C}}\mathcal{T}(u + \mathrm{i}v) = \mathcal{T}u + \mathrm{i}\mathcal{T}v$, se numește *complexificata* lui $\mathcal{T}$.

1) Să se arate că $^{\boldsymbol{C}}\mathcal{T}$ este o transformare liniară care are proprietățile

$^{\boldsymbol{C}}(k\mathcal{T}) = k\,{}^{\boldsymbol{C}}\mathcal{T}$, $k \in \boldsymbol{R}$

$^{\boldsymbol{C}}(\mathcal{S} + \mathcal{T}) = {}^{\boldsymbol{C}}\mathcal{S} + {}^{\boldsymbol{C}}\mathcal{T}$,

$^{\boldsymbol{C}}(\mathcal{S}\mathcal{T}) = {}^{\boldsymbol{C}}\mathcal{S}\,{}^{\boldsymbol{C}}\mathcal{T}$,

$({}^{\boldsymbol{C}}\mathcal{T})^{-1} = {}^{\boldsymbol{C}}(\mathcal{T}^{-1})$, dacă $\mathcal{T}$ este inversabilă.

2) Fie $\{e_1, \ldots, e_n\}$ o bază a lui $\mathbf{V}_n$ și $\{(e_1, 0), \ldots, (e_n, 0)\}$ baza corespunzătoare din ${}^{C}\mathbf{V}$. Să se verifice că matricea ${}^{C}\mathbf{T}$ atașată lui ${}^{C}\mathcal{T}$ este egală cu matricea $\mathbf{T}$ atașată lui $\mathcal{T}$.

38. Fie $\mathcal{T} \in \mathcal{L}(\boldsymbol{C}^n, \boldsymbol{C}^m)$ o transformare liniară. Se numește reprezentare reală a transformării $\mathcal{T}$, transformarea liniară reală ${}^{R}\mathcal{T} : {}^{R}\boldsymbol{C}^n \to {}^{R}\boldsymbol{C}^m$ care coincide punctual cu $\mathcal{T}$, unde ${}^{R}\boldsymbol{C}^n$, ${}^{R}\boldsymbol{C}^m$ sînt trecerile în real ale spațiilor $\boldsymbol{C}^n$ și $\boldsymbol{C}^m$. Știind că $\mathcal{T} : \boldsymbol{C}^3 \to \boldsymbol{C}^3$ este transformarea liniară definită prin

$$\mathcal{T}(x) = (x_1 + \mathrm{i}x_2, x_1 + x_3, \mathrm{i}x_3), \quad x = (x_1, x_2, x_3) \in \boldsymbol{C}^3,$$

să se determine matricea reprezentării reale a lui $\mathcal{T}$ în baza $\{f_1, f_2, f_3\}$ unde $f_1 = (0, \mathrm{i}, 1)$, $f_2 = (0, 0, \mathrm{i})$, $f_3 = (\mathrm{i}, -2, 2)$.

Soluție. Mai întîi determinăm matricea transformării $\mathcal{T}$ în baza dată. Fie $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$ vectorii bazei canonice și

$$\begin{cases} \mathcal{T}(e_1) = (1, 1, 0) = (1, 0, 0) + (0, 1, 0) = e_1 + e_2 + 0\cdot e_3 \\ \mathcal{T}(e_2) = (\mathrm{i}, 0, 0) = \mathrm{i}\cdot e_1 + 0\cdot e_2 + 0\cdot e_3 \\ \mathcal{T}(e_3) = (0, 1, \mathrm{i}) = (0, 1, 0) + \mathrm{i}\,(0, 0, 1) = 0\cdot e_1 + e_2 + \mathrm{i}e_3. \end{cases}$$

Matricea lui $\mathcal{T}$ în această bază este

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & \mathrm{i} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \mathrm{i} \end{bmatrix}.$$

Deoarece $f_1 = \mathrm{i}e_2 + e_3$, $f_2 = \mathrm{i}e_3$, $f_3 = -\mathrm{i}e_1 - 2e_2 + 2e_3$ rezultă că matricea de trecere de la baza $\{e_1, e_2, e_3\}$ la baza $\{f_1, f_2, f_3\}$ este

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 & -2 \\ 1 & \mathrm{i} & 2 \end{bmatrix}.$$

Folosind 3.13 obținem matricea transformării $\mathcal{T}$ în baza $\{f_1, f_2, f_3\}$ și anume

$$\mathbf{U} = \mathbf{C}^{-1}\cdot \mathbf{T}\cdot \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -3 & -\mathrm{i} & -2-5\mathrm{i} \\ 4-\mathrm{i} & 2\mathrm{i} & 7+5\mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Dar

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & -2 \\ 4 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} + \mathrm{i}\begin{bmatrix} 0 & -1 & -5 \\ -1 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{A} + \mathrm{i}\mathbf{B}$$

așa încît matricea trecerii în real a lui $\mathcal{T}$ este

$$\mathbf{R}_{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & -\mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{A} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 0 & -2 & 0 & 1 & 5 \\ 4 & 0 & 7 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -1 & -5 & -3 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 5 & 4 & 0 & 7 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right].$$

39. O rotație a lui $\boldsymbol{R}^n$ este o transformare liniară ortogonală cu determinantul $+1$.

1) Să se arate că o transformare liniară $\mathcal{R}: \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^2$ este o rotație dacă și numai dacă există un număr real θ astfel încît matricea lui $\mathcal{R}$ în raport cu baza canonică a lui $\boldsymbol{R}^2$ să fie

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

2) Să se arate că orice rotație a lui $\boldsymbol{R}^3$ lasă fixă o direcție (admite un versor propriu în raport cu valoarea proprie 1).

3) Să se arate că dacă $\mathcal{R}$ este o rotație a lui $\boldsymbol{R}^3$, e_1 este un versor pentru care $\mathcal{R}(\vec{e}_1) = \vec{e}_1$ și $\vec{e}_2$ este un versor perpendicular pe $\vec{e}_1$, atunci matricea atașată lui $\mathcal{R}$ în raport cu baza ortonormată $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_1 \times \vec{e}_2\}$ este

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, \qquad \theta \in \boldsymbol{R}.$$

40. Fie $\mathbf{V}$ un spațiu vectorial normat și complet și $\mathcal{D} = \{a_0, a_1, \dots, a_n\}$ o diviziune a intervalului $[a, b] \subset \boldsymbol{R}$. O funcție $\mathrm{f}: [a, b] \to \mathbf{V}$ se numește *funcție în scară* în raport cu diviziunea $\mathcal{D}$ dacă există elementele $v_1, v_2, \dots, v_n \in \mathbf{V}$ astfel încît $\mathrm{f}(t) = v_i$, $a_{i-1} < t < a_i$, $i = 1, 2, \dots, n$. Valoarea $I(\mathrm{f}) = \sum_{i=1}^{n} (a_i - a_{i-1}) v_i$ este independentă de $\mathcal{D}$ și se numește *integrala* lui f.

Să se arate că mulțimea $Sc([a, b], \mathbf{V})$ a funcțiilor în scară definite pe $[a, b]$ și cu valori în $\mathbf{V}$ este un subspațiu vectorial al spațiului funcțiilor mărginite definite pe $[a, b]$ și cu valori în $\mathbf{V}$, iar $I: Sc([a, b], \mathbf{V}) \to \mathbf{V}$ este o aplicație liniară care satisface $\| I(\mathrm{f}) \| \leqslant (b - a) \| \mathrm{f} \|_0$, unde $\| \mathrm{f} \|_0$ este norma supremum.

§ 4. VALORI ȘI VECTORI PROPRII

4.1. Fie $\mathbf{V}$ un spațiu vectorial peste cîmpul $\boldsymbol{K}$($\boldsymbol{R}$ sau $\boldsymbol{C}$), fie $\mathcal{A}: \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ un endomorfism și $x \in \mathbf{V} - \{0\}$. Dacă există $\lambda \in \boldsymbol{K}$ astfel încît $\mathcal{A}x = \lambda x$, atunci x se numește *vector propriu*, iar λ se numește *valoare proprie* pentru transformarea liniară $\mathcal{A}$.

Mulțimea valorilor proprii ale lui $\mathcal{A}$ poartă denumirea de *spectrul* lui $\mathcal{A}$.

La un vector propriu al lui $\mathcal{A}$ corespunde o singură valoare proprie. Vectorii proprii ai lui $\mathcal{A}$ care corespund la valori proprii distincte sînt liniar independenți.

4.2. Mulțimea $S(\lambda) = \{x \mid x \in \mathbf{V},\ \mathcal{A}x = \lambda x,\ \lambda = \text{valoare proprie}\}$ este un subspațiu vectorial al lui $\mathbf{V}$ invariant față de $\mathcal{A}$, adică $\mathcal{A}(S) \subseteq S$. Acest subspațiu poate fi finit sau infinit dimensional și se numește *subspațiu propriu* corespunzător lui λ.

4.3. Fie $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ o matrice pătratică de ordinul n și $\mathbf{X} = [x_j]$ o matrice nenulă de tipul $n \times 1$ cu elemente din cîmpul $\boldsymbol{K}$($\boldsymbol{R}$ sau $\boldsymbol{C}$). Dacă există $\lambda \in \boldsymbol{K}$ astfel încît $\mathbf{AX} = \lambda\mathbf{X}$, atunci $\mathbf{X}$ se numește *vector propriu*, iar λ se numește *valoare proprie* pentru matricea $\mathbf{A}$.

Ecuația matriceală $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\,\mathbf{X} = 0$ este echivalentă cu sistemul liniar și omogen

$$\begin{aligned}
&(a_{11} - \lambda)\, x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0\\
&a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)\, x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + (a_{nn} - \lambda)\, x_n = 0,
\end{aligned}$$

care are soluții nebanale dacă și numai dacă

$$P(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \ldots & a_{2n}\\ \ldots & \ldots & & \ldots\\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Polinomul $P(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$ se numește *polinomul caracteristic al matricei* **A**, iar ecuația $P(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$, $\lambda \in \boldsymbol{K}$, se numește ecuația *caracteristică a matricei* **A**.

4.4. Fie **A** o matrice pătratică reală de ordinul n și $P(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$ ecuația ei caracteristică. Deoarece nu orice ecuație admite soluții în $\boldsymbol{R}$, dar admite în $\boldsymbol{C}$, uneori valorile proprii ale lui **A** se definesc ca fiind elemente din $\boldsymbol{C}$. În acest caz vectorii proprii corespunzători aparțin complexificatului lui $\boldsymbol{R}^n$.

Fie $\lambda_1, \lambda_2 \ldots, \lambda_n$ valorile proprii ale lui **A** în $\boldsymbol{C}$, fiecare valoare proprie fiind scrisă de atîtea ori cît este multiplicitatea sa. Avem $\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n = \det \mathbf{A}$, $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = \mathrm{tr}\, \mathbf{A}$.

Matricele asemenea au același polinom caracteristic și deci aceleași valori proprii.

4.5. Fie $\mathbf{V}_n$ un spațiu vectorial n-dimensional peste cîmpul $\boldsymbol{K}$($\boldsymbol{R}$ sau $\boldsymbol{C}$), fie $\mathcal{A}: \mathbf{V}_n \to \mathbf{V}_n$ un endomorfism și **A** matricea atașată lui $\mathcal{A}$ în raport cu o bază fixată în $\mathbf{V}_n$. Mulțimea valorilor proprii ale lui $\mathcal{A}$ constă din rădăcinile lui $P(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$ care fac parte din $\boldsymbol{K}$. Vectorii proprii ai lui $\mathcal{A}$ sînt soluțiile ecuației matriceale $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\,\mathbf{X} = 0$.

Polinomul $P(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$ este invariant față de o schimbare a bazei din $\mathbf{V}_n$, adică coeficienții lui $P(\lambda)$ depind de endomorfismul $\mathcal{A}$ și nu de reprezentarea matriceală particulară **A**. De aceea $P(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$ este numit *polinomul caracteristic* al lui $\mathcal{A}$, det **A** este numit *determinantul* lui $\mathcal{A}$, tr **A** este numită *urma* lui $\mathcal{A}$ etc.

Endomorfismul $\mathcal{A}: \mathbf{V}_n \to \mathbf{V}_n$ are cel mult n valori proprii distincte. Dacă $\mathcal{A}$ are exact n valori proprii distincte, atunci vectorii proprii corespunzători determină o bază a lui $\mathbf{V}_n$ și matricea **A** atașată lui $\mathcal{A}$ în raport cu această bază este o matrice diagonală avînd drept elemente pe diagonală valorile proprii ale lui $\mathcal{A}$.

4.6. Fie $\mathbf{V}_n$ un spațiu vectorial real de dimensiune n și $\mathcal{A}: \mathbf{V}_n \to \mathbf{V}_n$ un endomorfism. Notăm cu ${}^C\mathbf{V}_n$ complexificatul lui V_n și cu ${}^C\mathcal{A}$ complexificata lui $\mathcal{A}$. Deoarece $\mathcal{A}$ și ${}^C\mathcal{A}$ au aceeași reprezentare matriceală, valorile proprii ale lui ${}^C\mathcal{A}$ sînt valorile proprii în $\boldsymbol{C}$ ale matricei reale asociată lui $\mathcal{A}$. Avînd în vedere acest lucru, uneori ${}^C\mathcal{A}$ se identifică cu $\mathcal{A}$, căutîndu-se valorile proprii ale unui endomorfism real direct în $\boldsymbol{C}$ și bineînțeles vectorii proprii în complexificatul spațiului vectorial real.

4.7. Fie endomorfismul $\mathcal{A}: \mathbf{V}_n \to \mathbf{V}_n$ și $\mathbf{A}$ matricea asociată lui $\mathcal{A}$ în raport cu o bază fixată în $\mathbf{V}_n$. Endomorfismul $\mathcal{A}$ se numește *diagonalizabil* dacă există o bază a lui $\mathbf{V}_n$ față de care matricea $\mathbf{D}$ asociată lui $\mathcal{A}$ să fie o matrice diagonală; corespunzător matricea $\mathbf{A}$ se numește *diagonalizabilă* dacă există o matrice nesingulară $\mathbf{T}$ astfel încît $\mathbf{D} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}$ să fie o matrice diagonală.

Endomorfismul $\mathcal{A}: \mathbf{V}_n \to \mathbf{V}_n$ este diagonalizabil dacă și numai dacă (1) posedă n vectori proprii independenți sau dacă și numai dacă (2) polinomul caracteristic are toate rădăcinile în cîmpul peste care este luat $\mathbf{V}_n$ și oricare ar fi valoarea proprie λ, dimensiunea subspațiului propriu $S(\lambda)$ este egală cu ordinul de multiplicitate al lui λ.

4.8. Matricele de tipul $[\lambda]$, $\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$, ... se numesc *celule Jordan* atașate lui λ.

Fie endomorfismul $\mathcal{A}: \mathbf{V}_n \to \mathbf{V}_n$. Dacă toate valorile proprii ale lui $\mathcal{A}$ aparțin lui $\boldsymbol{K}$, atunci există o bază a lui $\mathbf{V}_n$ față de care $\mathcal{A}$ este reprezentată printr-o matrice de tipul

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{J}_2 & \dots & 0 \\ \dots & & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{J}_k \end{bmatrix}$$

unde $\mathbf{J}_i$ sînt celule Jordan atașate respectiv valorilor proprii λ_i. O celulă Jordan de ordinul p atașată unei valori proprii λ multiplă de ordinul $q \geqslant p$ corespunde vectorilor liniar independenți $e_1, e_2, \dots, e_p$ astfel încît $\mathcal{A}(e_1) = \lambda e_1$, $\mathcal{A}(e_2) = \lambda e_2 + e_1, \dots, \mathcal{A}(e_p) = \lambda e_p + e_{p-1}$. Vectorul e_1 este propriu, iar vectorii $e_2, \dots, e_p$ se numesc *vectori principali*.

4.9. Fie $\mathbf{V}$ un spațiu euclidian peste cîmpul $\boldsymbol{K}(\boldsymbol{R}$ sau $\boldsymbol{C})$, $\mathcal{A}: \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ un endomorfism, λ o valoare proprie a lui $\mathcal{A}$ și x un vector propriu atașat lui λ. În aceste condiții

$$\lambda = \frac{(\mathcal{A}x, x)}{(x, x)}.$$

4.10. În cazul spațiilor euclidiene complexe, valorile proprii ale unui endomorfism hermitian sînt reale, iar valorile proprii ale unui endomorfism antihermitian sînt pur imaginare.

Fie $\mathcal{A}$ un endomorfism hermitian sau antihermitian. Vectorii proprii ai lui $\mathcal{A}$ corespunzători la valori proprii distincte sînt ortogonali.

Presupunem că $\mathbf{V}_n$ este un spațiu euclidian complex n-dimensional. Dacă $\mathcal{A}: \mathbf{V}_n \to \mathbf{V}_n$ este hermitian sau antihermitian, atunci $\mathcal{A}$ posedă n vectori proprii care constituie o bază ortogonală a lui $\mathbf{V}_n$.

4.11. Pe spațiile euclidiene reale, valorile proprii ale unui endomorfism simetric sînt reale, iar valorile proprii ale unui endomorfism antisimetric sînt nule.

Dacă $\mathbf{V}_n$ este un spațiu euclidian real n-dimensional, iar $\mathcal{A}: \mathbf{V}_n \to \mathbf{V}_n$ este simetric, atunci $\mathcal{A}$ posedă n vectori proprii care constituie o bază ortonormată a lui $\mathbf{V}_n$. Această proprietate nu este adevărată pentru un endomorfism antisimetric.

4.12. Fie $\mathbf{V}$ un spațiu euclidian complex (real) și $\mathcal{A}: \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ un endomorfism unitar (ortogonal).

(1) Dacă există, valorile proprii ale lui $\mathcal{A}$ au modulul egal cu unu.

(2) Vectorii proprii ai lui $\mathcal{A}$ corespunzători unor valori proprii distincte sînt ortogonali.

(3) Dacă $\mathbf{V}$ este complex și n-dimensional, atunci $\mathcal{A}$ posedă n vectori proprii care constituie o bază ortonormată a lui $\mathbf{V}$.

4.13. Fie $\mathbf{V}_n$ un spațiu vectorial n-dimensional peste cîmpul $\boldsymbol{K}$ și $\mathcal{A}: \mathbf{V}_n \to \mathbf{V}_n$ un endomorfism căruia, în raport cu o bază a lui $\mathbf{V}_n$, i se atașează matricea $\mathbf{A}$.

Oricărui polinom $P(t) = a_0t^m + a_1t^{m-1} + \ldots + a_{m-1}t + a_m$ cu coeficienți din cîmpul $\mathbf{K}$ i se poate atașa polinomul $P(\mathcal{A}) = a_0\mathcal{A}^m + a_1\mathcal{A}^{m-1} + \ldots + a_{m-1}\mathcal{A} + a_m\mathcal{J}$ sau polinomul $P(\mathbf{A}) = a_0\mathbf{A}^m + a_1\mathbf{A}^{m-1} + \ldots + a_{m-1}\mathbf{A} + a_m\mathbf{I}$. Polinoamele $P(\mathcal{A})$ se numesc *polinoame de endomorfisme*, iar polinoamele $P(\mathbf{A})$ se numesc *polinoame de matrice*.

Teorema Cayley-Hamilton: dacă $P(\lambda)$ este polinomul caracteristic al matricei $\mathbf{A}$, atunci $P(\mathbf{A}) = \mathcal{O}$. Ca urmare a acestei teoreme, orice polinom în $\mathbf{A}$ de grad $\geqslant n$, unde n este ordinul matricei $\mathbf{A}$, poate fi exprimat printr-un polinom de gradul $n - 1$.

Oricărei serii de puteri $\mathrm{f}(t) = \Sigma a_m t^m$, cu coeficienți din $\boldsymbol{K}$, i se poate atașa seria $\mathrm{f}(\mathcal{A}) = \Sigma a_m \mathcal{A}^m$ sau seria $\mathrm{f}(\mathbf{A}) = \Sigma a_m \mathbf{A}^m$. Seriile $\Sigma a_m \mathcal{A}^m$ se numesc *serii de endomorfisme*, iar seriile $\Sigma a_m \mathbf{A}^m$ se numesc *serii de matrice*. Teorema Cayley-Hamilton asigură că $\Sigma a_m \mathbf{A}^m$ se reduce la un polinom de gradul $n - 1$, unde n este ordinul matricei $\mathbf{A}$.

Exerciții și probleme

1. Fie $\mathbf{V}$ spațiul vectorial real al funcțiilor continue pe $[a, b]$ și fie transformarea liniară $\mathcal{A}$ definită pe acest spațiu prin $\mathcal{A}x(t) = tx(t)$, $\forall x \in \mathbf{V}$, $\forall t \in [a, b]$. Să se arate că transformarea liniară $\mathcal{A}$ nu are nici o valoare proprie.

Soluție. Pentru ca $x \in \mathbf{V} - \{0\}$ să fie vector propriu trebuie să existe $\lambda \in \boldsymbol{R}$ astfel încît $\mathcal{A}x(t) = \lambda x(t)$, $\forall t \in [a, b]$ adică $tx(t) = \lambda x(t)$, $\forall t \in [a, b]$.

Se observă însă că nu există nici o constantă λ care să verifice ultima relație.

2. Fie $\mathbf{V}$ spațiul funcțiilor reale continue pe $[a, b]$. Să se arate că operatorul de integrare $\mathcal{T}: \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ definit prin $\mathrm{g} = \mathcal{T}(\mathrm{f})$, $\mathrm{g}(x) = \int_a^x \mathrm{f}(t)\,\mathrm{d}t$, $x \in [a, b]$ nu admite valori proprii și deci nici vectori proprii.

3. Fie $\mathbf{V}$ spațiul funcțiilor reale continue $\mathrm{f}: (-\infty, \infty) \to \boldsymbol{R}$ cu proprietatea că $\int_{-\infty}^x \mathrm{f}(t)\mathrm{d}t$ există $\forall x \in (-\infty, \infty)$. Să se găsească valorile proprii și vectorii proprii ai operatorului de integrare $\mathcal{T}: \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ definit prin $\mathrm{g} = \mathcal{T}(\mathrm{f})$, $\mathrm{g}(x) = \int_{-\infty}^x \mathrm{f}(t)\mathrm{d}t$, $x \in (-\infty, \infty)$.

R: Fiecare $\lambda < 0$ este o valoare proprie și $\mathrm{f}(x) = e^{\frac{x}{\lambda}}$ este vectorul propriu corespunzător.

4. Fie $\mathbf{V}$ spațiul vectorial al funcțiilor reale de clasă C^∞ pe $(0,1)$. Să se găsească valorile proprii și vectorii proprii ai transformării liniare $\mathcal{T}: \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ definită prin $g = \mathcal{T}(\mathrm{f})$, $\mathrm{g}(x) = x\mathrm{f}'(x)$, $\forall x \in (0, 1)$.

R: Fiecare $\lambda \in \boldsymbol{R}$ este o valoare proprie și $\mathrm{f}(x) = x^\lambda$ este vectorul propriu corespunzător.

5. Fie $\mathbf{V}$ spațiul vectorial real al funcțiilor reale continue pe $[0, 2\pi]$. Fie $\mathscr{T}: \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ transformarea liniară definită prin $g = \mathscr{T}(f)$, $g(x) = \int_0^{2\pi} (1+\sin(x-t))\, f(t)\, dt$, $x \in [0, 2\pi]$.

1) Să se arate că Im $\mathscr{T}$ este un subspațiu finit dimensional și să se găsească o bază pentru acest subspațiu.

2) Să se determine Ker $\mathscr{T}$.

3) Să se găsească valorile proprii și vectorii proprii ai lui $\mathscr{T}$.

Soluție. 1) Deoarece $g(x) = \int_0^{2\pi} (1 + \sin x \cos t - \sin t \cos x)\, f(t)\, dt = \int_0^{2\pi} f(t)\, dt + \left(\int_0^{2\pi} f(t) \cos t\, dt\right) \sin x - \left(\int_0^{2\pi} f(t) \sin t\, dt\right) \cos x$, imaginea lui $\mathscr{T}$ este subspațiul tridimensional generat de baza $\{1, \cos x, \sin x\}$.

2) Condiția $g(x) = 0$, $\forall x \in [0, 2\pi]$ implică $\int_0^{2\pi} f(t)\, dt = 0$, $\int_0^{2\pi} f(t) \cos t\, dt = 0$ și $\int_0^{2\pi} f(t) \sin t\, dt = 0$. Acestea sînt de fapt condițiile care fixează pe Ker $\mathscr{T}$. Se observă că dim Ker $\mathscr{T} = \infty$ deoarece mulțimea independentă $\{\cos kx, \sin kx,\ k = 2, 3, \ldots\}$ este inclusă în Ker $\mathscr{T}$.

3) Relația $\mathscr{T}(f) = \lambda f$, $f \in \mathbf{V} - \{0\}$ este echivalentă cu $\lambda f(x) = \int_0^{2\pi} f(t)\, dt + \left(\int_0^{2\pi} f(t) \cos t\, dt\right) \sin x - \left(\int_0^{2\pi} f(t) \sin t\, dt\right) \cos x$, $\forall x \in [0, 2\pi]$, $f \in \mathbf{V} - \{0\}$. Integrînd în ambii membrii de la 0 la 2π rezultă $\lambda \int_0^{2\pi} f(x)\, dx = 2\pi \int_0^{2\pi} f(t)\, dt$ și astfel, dacă $\int_0^{2\pi} f(x)\, dx \neq 0$, atunci $\lambda = 2\pi$.

Orice vector nenul din Ker $\mathscr{T}$ este un vector propriu al lui $\mathscr{T}$ în raport cu valoarea proprie zero.

Fie $\lambda = 2\pi$. Rezultă $f \in \mathrm{Im}\, \mathscr{T}$ și deci $f(x) = a + b \cos x + c \sin x$. Relația $\mathscr{T}(f) = 2\pi f$ implică $a \neq 0$, $b = c = 0$. Deci $f(x) = 1$ este un vector propriu atașat valorii proprii 2π.

6. Fie $\mathbf{V}$ spațiul funcțiilor $f: [0, \pi] \to \boldsymbol{R}$ de clasă C^2, care satisfac condițiile $f(0) = f(\pi) = 0$. Să se găsească valorile proprii și vectorii proprii pentru transformarea liniară $\mathscr{T}: \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ definită prin $\mathscr{T}(f) = f''$.

R: Valorile proprii sînt $-1^2, -2^2, \ldots, -n^2, \ldots$ Acestora le corespund respectiv vectorii proprii $f(x) = c_n \sin nx$ cu $c_n \neq 0$.

7. Fie $\mathbf{V}$ spațiul funcțiilor f de clasă C^∞ pe $[-1, 1]$. Să se arate că operatorul Sturm-Liouville $\mathscr{S}: \mathbf{V} \to \mathbf{V}$, $\mathscr{S}(f(x)) = ((x^2 - 1) f'(x))'$, $\forall x \in [-1, 1]$, admite valorile proprii $\lambda_n = n(n + 1)$, $n \in \boldsymbol{N}$, și corespunzător vectorii proprii $x \to P_n(x) = \frac{1}{n!\, 2^n} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$, $n \in \boldsymbol{N}$ *(polinoamele Legendre)*.

Indicație. Se pornește de la relația evidentă $(x^2 - 1)\, f_n'(x) = 2nx\, f_n(x)$, unde $f_n(x) = (x^2 - 1)^n$, și se derivează de $n + 1$ ori în ambii membri utilizînd formula Leibniz. Rezultă $(x^2 - 1)\, f_n^{(n+2)}(x) + 2x(n + 1)\, f_n^{(n+1)}(x) + n(n+1)\, f_n^{(n)}(x) = 2nx\, f_n^{(n+1)}(x) + 2n(n + 1)\, f_n^{(n)}(x)$ și deci $[(x^2 - 1)\, P_n'(x)]' = n(n + 1)\, P_n(x)$.

8. Fie $\mathbf{V}_2$ spațiul vectorial al segmentelor orientate cu originea O identificat cu mulțimea tuturor punctelor din plan. Fie $A(\vec{a})$ și $B(\vec{b})$ două puncte necoliniare cu $O(\vec{o})$ și fie $\mathcal{A}: \mathbf{V}_2 \to \mathbf{V}_2$ transformarea liniară definită prin $\mathcal{A}(\vec{a}) = \vec{b}$, $\mathcal{A}(\vec{b}) = \vec{c}$, unde $\vec{c}$ este vectorul de poziție al unui punct oarecare C din plan.

1) Presupunînd A și B fixe, să se afle locul geometric al punctului $C(\vec{c})$ astfel ca transformarea $\mathcal{A}$ să aibă un punct fix coliniar cu A și B.

2) În condițiile din 1), să se determine direcțiile invariante ale lui $\mathcal{A}$.

3) Considerînd $A(1, 0)$ și $B(0, 1)$ în raport cu un sistem de axe rectangulare xOy, să se explicitеze mulțimea punctelor $C(x, y)$ pentru care $\mathcal{A}$ admite două direcții invariante.

4) Să se determine locul punctelor $C(x, y)$ pentru care direcțiile invariante corespunzătoare sînt ortogonale.

Soluție. 1) Deoarece $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ este o bază în $\mathbf{V}_2$ rezultă $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$, $x, y \in \boldsymbol{R}$. Relațiile $\mathcal{A}(\vec{a}) = 0 \cdot \vec{a} + 1 \cdot \vec{b}$, $\mathcal{A}(\vec{b}) = \vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$ arată că matricea lui $\mathcal{A}$ în raport cu baza $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ este

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & x \\ 1 & y \end{bmatrix}.$$

Ecuația caracteristică a lui $\mathbf{A}$ are forma $P(\lambda) = \lambda^2 - y\lambda - x = 0$. Ea trebuie să admită soluția $\lambda = 1$ căci, prin ipoteză, $\mathcal{A}(\vec{d}) = \vec{d}$, unde $D(d) \neq \neq O(\vec{o})$. Astfel $x + y = 1$ și vectorul propriu corespunzător este $\vec{d} = x\vec{a} + \vec{b}$. Deoarece dreapta AB are vectorul director $\vec{b} - \vec{a}$ rezultă că dreapta care trece prin O și are direcția lui $\vec{d}$ intersectează pe AB dacă și numai dacă $x \neq -1$. În concluzie locul geometric al lui C este dreapta AB din care se exclude punctul ce corespunde lui $x = -1$ (deci $y = 1 - x = 2$), adică punctul $C^*(\vec{c}^* = -\vec{a} + 2\vec{b})$; (fig. 1.3).

2) Dacă $x + y = 1$ atunci ecuația caracteristică a lui $\mathcal{A}$ admite și soluția $\lambda_2 = -x$ și cum $x = -1$, rezultă $\lambda_2 = 1$ așa încît, în adevăr $\mathcal{A}$ admite încă o direcție invariantă dată de vectorul propriu corespunzător lui $\lambda_2 = -x$. Acest vector propriu este $\vec{u} = \vec{a} - \vec{b}$.

3) Deoarece $\vec{a} = \vec{i}$ și $\vec{b} = \vec{j}$, rezultă $\vec{c} = x\vec{i} + y\vec{j}$. Pentru ca $\mathcal{A}$ să admită două direcții invariante este necesar și suficient ca discriminantul ecuației $\lambda^2 - y\lambda - x = 0$ să fie strict pozitiv și mai mult ca rădăcinile să fie nenule, adică $x \neq 0$ și $y^2 + 4x > 0$. În concluzie mulțimea punctelor $C(x, y)$ cu proprietatea cerută este domeniul exterior parabolei $y^2 + 4x = 0$ din care scoatem axa Oy: $x = 0$ (fig. 1.4).

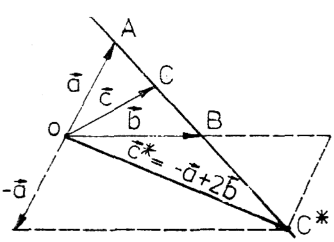


Fig. 1.3.

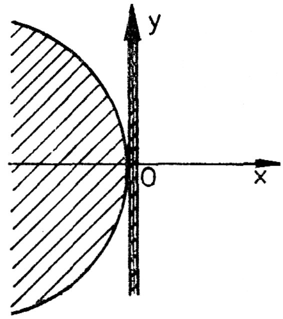


Fig. 1.4.

4) Fie $\boldsymbol{D}$: $y^2 + 4x > 0$, $x \neq 0$ și fie $C \in \boldsymbol{D}$. Valorile proprii λ_1 și λ_2 ale lui $\mathcal{A}$ sînt distincte și nenule. Vectorii proprii corespunzători sînt $\vec{e}_1 = \left(1, \frac{\lambda_1}{x}\right)$ și $\vec{e}_2 = \left(1, \frac{\lambda_2}{x}\right)$. Din condiția de ortogonalitate rezultă $1 + \frac{\lambda_1}{x} \cdot \frac{\lambda_2}{x} = 0$ sau $1 - \frac{\lambda_1 \lambda_2}{x^2} = 0$. Deoarece $\lambda_1 \lambda_2 = -x$ obținem $1 - \frac{1}{x} = 0$, de unde $x = 1$. Locul geometric căutat este dreapta $x = 1$.

9. Fie $\mathbf{V}$ un spațiu vectorial real, ${}^{C}\mathbf{V}$ complexificatul său și $\mathcal{T}: \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ o transformare liniară și ${}^{C}\mathcal{T}: {}^{C}\mathbf{V} \to {}^{C}\mathbf{V}$ complexificata lui $\mathcal{T}$. Presupunem că ${}^{C}\mathcal{T}$ admite valoarea proprie $\lambda = \alpha + i\beta$.

1) Să se arate că $\mathcal{T}$ admite un subspațiu invariant de dimensiune 1 sau 2.

2) Să se demonstreze că dacă λ este reală, atunci λ este o valoare proprie a lui $\mathcal{T}$.

Soluție. 1) Presupunem ${}^{C}\mathcal{T}(u, v) = (\alpha + i\beta)(u, v)$, $(u, v) \neq (0, 0)$, adică $(\mathcal{T}u, \mathcal{T}v) = (\alpha u - \beta v, \beta u + \alpha v)$. Echivalent $\mathcal{T}u = \alpha u - \beta v$, $\mathcal{T}v = \beta u + \alpha v$ și deci acoperirea liniară a lui $\{u, v\}$ este invariantă prin $\mathcal{T}$.

2) Fie $\beta = 0$ și $(u, v) \neq (0, 0)$. Rezultă $\mathcal{T}u = \alpha u$, $\mathcal{T}v = \alpha v$ și deci u sau v (acela care este nenul) este vectorul propriu al lui $\mathcal{T}$ în raport cu valoarea proprie α.

10. Fie $\mathbf{V}$ un spațiu vectorial real de dimensiune n. Un ansamblu $(\mathcal{F}, \xi, \eta)$, unde $\mathcal{F}$ este un endomorfism al lui $\mathbf{V}$, ξ este un vector din $\mathbf{V}$ și η este o formă liniară pe $\mathbf{V}$, care satisfac condițiile

$$\mathcal{F}^2 = -\mathcal{J} + \xi \cdot \eta, \qquad \eta(\xi) = 1$$

se numește *structură cocomplexă* pe $\mathbf{V}$ [58]. Evident $\mathcal{J}$ este identitatea pe $\mathbf{V}$, iar $\xi \cdot \eta$ este endomorfismul definit prin $(\xi \cdot \eta)(x) = \eta(x)\xi$, $x \in \mathbf{V}$.

1) Să se arate că relațiile de definiție implică

$$\mathcal{F}\xi = 0, \quad \eta \circ \mathcal{F} = 0, \quad \operatorname{rang} \mathcal{F} = n - 1, \quad \operatorname{rang}(\mathcal{F} + \xi\eta) = n.$$

2) Să se afle valorile proprii ale lui ${}^{C}\mathcal{F}: {}^{C}\mathbf{V} \to {}^{C}\mathbf{V}$ și să se arate că $n = 2m + 1$.

Reciproc, să se demonstreze că dacă $n = 2m + 1$, atunci pe $\mathbf{V}$ există o structură cocomplexă.

11. Fie $\mathbf{V}_n$ un spațiu vectorial real. Un endomorfism $\mathcal{F}$ al lui $\mathbf{V}_n$ cu proprietatea $\mathcal{F}^3 + \mathcal{F} = O$ se numește $\mathcal{F}$ — structură pe $\mathbf{V}_n$.

1) Să se găsească valorile proprii ale lui ${}^{C}\mathcal{F}: {}^{C}\mathbf{V}_n \to {}^{C}\mathbf{V}_n$.

2) Să se arate că dacă $\mathbf{V}_n$ este un spațiu euclidian și dacă admite o $\mathcal{F}$ — structură de rang $r (\leqslant n - 2)$, atunci $\mathbf{V}_n$ admite și o $\mathcal{F}$ — structură de rang $r + 2$.

Soluție. 1) Presupunem rang $\mathcal{F} = n$. Rezultă $\mathcal{F}(\mathcal{F}^2 + id) = O$ și deci $\mathcal{F}^2 = -id$. Fie ${}^{C}\mathcal{F}v = \lambda v$, $v \neq 0$. Din $({}^{C}\mathcal{F})^2 = -id$ găsim $\lambda^2 + 1 = 0$ și deci valorile proprii ale lui ${}^{C}\mathcal{F}$ sînt $-i$ și $+i$. Deoarece $\mathcal{F}$ este real, fiecare dintre aceste valori proprii este multiplu de ordinul m și deci $n = 2m$.

Presupunem rang $\mathcal{F} < n$ și ${}^{C}\mathcal{F}v = \lambda v$, $v \neq 0$. Relația $({}^{C}\mathcal{F})^3 + {}^{C}\mathcal{F} = O$ implică $\lambda(\lambda^2 + 1) = 0$ și deci valorile proprii ale lui ${}^{C}\mathcal{F}$ sînt 0, $-i$ și $+i$. Rezultă că rang $\mathcal{F}$ este un număr impar.

2) Fie rang $\mathcal{F} = r \leqslant n - 2$. Fie $W_0 = \operatorname{Ker} \mathcal{F}$; avem $\dim W_0 = n - r$. Pentru ${}^{C}\mathbf{V}_n$ rezultă descompunerea ${}^{C}\mathbf{V}_n = {}^{C}W_0 \oplus W_i \oplus W_{-i}$ unde W_i este subspațiul propriu atașat valorii proprii i.

Fie v_1, v_2 doi vectori independenți din W_0 și U_2 subspațiul generat de ei. Definim $\mathrm{f}: U_2 \to U_2$ prin $\mathrm{f}v_1 = -v_2$, $\mathrm{f}v_2 = v_1$. Rezultă $\mathrm{f}^2 x = -x$, $\forall x \in U_2$. Punînd $\mathrm{f}z = \mathrm{f}x$, $\forall z = y + x + w$, $x \in U_2$, $y \in W_i \cup W_{-i}$, $w \in W_0 \cap U_2^{\perp}$, obținem o extensie a lui f la $\mathbf{V}_n$. Transformarea liniară $\mathcal{G} = \mathrm{f} + \mathfrak{F}$ satisface $\mathcal{G}^3 z = -\mathcal{G}z$ și deci rang $\mathcal{G} = r + 2$.

Observație. Cele mai cunoscute $\mathfrak{F}$ — structuri sînt structura complexă (vezi problema 29 § 3) și structura cocomplexă (vezi problema 10).

12. Fie $\mathbf{V}$ un spațiu vectorial real de dimensiune n și un ansamblu $(\mathfrak{F}, \xi_a, \eta_a)$, $a = 1, 2, \ldots, p$, unde $\mathfrak{F}$ este o transformare liniară a lui $\mathbf{V}$, ξ_a sînt vectori din $\mathbf{V}$ și η_a sînt forme liniare pe $\mathbf{V}$, care satisfac relațiile

$$\mathfrak{F}^2 = -\mathcal{J} + \sum_{a=1}^{p} \xi_a \cdot \eta_a, \quad \eta_a(\xi_b) = \delta_{ab}, \quad a, b = 1, 2, \ldots, p.$$

1) Să se demonstreze că

$$\mathfrak{F}\xi_a = 0, \quad \eta_a \circ \mathfrak{F} = 0, \quad \text{rang } \mathfrak{F} = n - p \text{ este par.}$$

2) Să se verifice că transformarea liniară $\mathfrak{F} + \sum_{a=1}^{p} \xi_a \cdot \eta_a$ este nesingulară.

Indicație. 1) Pentru ultima parte se poate folosi observația că $\mathfrak{F}$ este o $\mathfrak{F}$ — structură pe $\mathbf{V}$. 2) Inversa lui $\mathfrak{F} + \sum_{a=1}^{p} \xi_a \cdot \eta_a$ este $-\mathfrak{F} + \sum_{a=1}^{p} \xi_a \cdot \eta_a$.

13. Fie $\mathcal{A}: \boldsymbol{R}^4 \to \boldsymbol{R}^4$ endomorfismul dat prin matricea

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

1) Să se determine valorile și vectorii proprii.

2) Dacă notăm $\mathrm{E} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ baza canonică din $\boldsymbol{R}^4$, să se arate că subspațiul generat de vectorii $v_1 = e_1 + 2e_2$ și $v_2 = e_2 + e_3 + 2e_4$ este invariant în raport cu endomorfismul $\mathcal{A}$.

Soluție. 1) $P(\lambda) = (\lambda - 1)^4$ așa încît $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 1$ este valoare proprie multiplă de ordinul patru. Din $\mathbf{A}x = 1 \cdot x$ unde $x = {}^t[x_1, x_2, x_3, x_4]$ obținem sistemul $2x_3 - x_4 = 0$, $2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0$ cu soluția $x_2 = 2x_1 + x_3$, $x_4 = 2x_3$.

Notînd $x_1 = a$ și $x_3 = b$ rezultă

$$x = \begin{bmatrix} a \\ 2a+b \\ b \\ 2b \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

și deci lui $\lambda = 1$ îi corespund doi vectori proprii $v_1 = {}^t[1\ 2\ 0\ 0]$, $v_2 = {}^t[0\ 1\ 1\ 2]$ în scriere matriceală, sau $v_1 = (1, 2, 0, 0)$, $v_2 = (0, 1, 1, 2)$ în scriere vectorială.

2) Din forma vectorilor proprii se vede că subspațiul generat de vectorii $v_1 = e_1 + 2e_2$, $v_2 = e_2 + e_3 + 2e_4$ este invariant în raport cu $\mathcal{A}$ deoarece v_1 și v_2 sînt tocmai vectorii proprii ai endomorfismului.

14. Să se determine valorile proprii și vectorii proprii pentru endomorfismul $\mathcal{A}: \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^3$ dat prin matricea $\mathbf{A}$.

$$1)\ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad 2)\ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad 3)\ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 7 & 4 & -1 \\ 4 & 7 & -1 \\ -4 & -4 & 4 \end{bmatrix},$$

$$4)\ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & -7 & -5 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

R: 1) $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 2, e_1 = (1, 0, 1), e_2 = (1, -1, 1), e_3 = (1, 2, 1)$; 2) $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = \lambda_3 = 1, e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 1)$; 3) $\lambda_1 = \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 12$, $e_1 = (5, -4, 4), e_2 = (-4, 5, 4), e_3 = (-1, -1, 1)$; 4) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ și vectorul propriu $e_1 = (-3, 1, 1)$.

15. Fie $\mathbf{P} = [p_{ij}]$ o matrice stochastică. Să se arate că $\lambda = 1$ este valoare proprie pentru $\mathbf{P}$ și că $v = (1, 1, \ldots, 1)$ este vectorul propriu corespunzător.

16. Să se cerceteze dacă matricea $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -2 & 5 \end{bmatrix}$ poate fi diagonalizată. În caz afirmativ să se determine matricea diagonalizatoare $\mathbf{T}$.

Soluție. $P(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \lambda(1 - \lambda)^2 (\lambda - 6)$. Rezultă valorile proprii $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = \lambda_3 = 1,\ \lambda_4 = 6$.

Deoarece rang $(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I}) = 3$ obținem vectorul propriu $e_1 = {}^t[-1\ 0\ 2\ 1]$.

Analog rang $(\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{I}) = 2$ și deci la valoarea proprie dublă $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ vor corespunde doi vectori proprii. Se obțin $e_2 = {}^t[0\ 1\ 0\ 0]$, $e_3 = {}^t[2\ 0\ 1\ 0]$.

Rang $(\mathbf{A} - \lambda_4 \mathbf{I}) = 3$ și deci $e_4 = {}^t[1\ 0\ -2\ 5]$ este vectorul propriu corespunzător valorii proprii $\lambda_4 = 6$.

Prin urmare matricea $\mathbf{A}$ este diagonalizabilă. Matricea diagonalizatoare

$$\mathbf{T} = [e_1 e_2 e_3 e_4] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Se obține

$$\mathbf{D} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

17. Să se determine valorile proprii, vectorii proprii și să se diagonalizeze matricele $\mathbf{A}$,

$$1)\ \begin{bmatrix} -1 & 0 & -3 \\ 3 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad 2)\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad 3)\ \begin{bmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & 1 \end{bmatrix},$$

4) $\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$.

R: 1) $\lambda_1 = -4, \lambda_2 = \lambda_3 = 2, e_1 = {}^t[1 \; -1 \; 1], e_2 = {}^t[1 \; 0 \; -1], e_3 = {}^t[1 \; 1 \; -1]$.

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

2) $\lambda_1 = \lambda_2 = -1, \quad \lambda_3 = 2, \quad e_1 = {}^t[-1 \; 1 \; 0], \quad e_2 = {}^t[-1 \; 0 \; 1], \quad e_3 = {}^t[1 \; 1 \; 1]$.

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

3) $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = 2; \quad e_1 = {}^t[-2 \; 1 \; 1] \quad e_2 = {}^t[2 \; -1 \; 2] \quad e_3 = {}^t[0 \; 0 \; 1]$.

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

4) $\lambda_1 = 1, \; \lambda_2 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \lambda_3 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = \bar{\lambda}_2,$

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad e_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}, \qquad e_3 = \bar{e}_2.$$

Determinăm vectorii u și v astfel ca $e_2 = u + iv$, $e_3 = u - iv$. Se obțin

$$u = {}^t[1 \;\; -1/2 \;\; -1/2], \quad v = {}^t[0 \;\; -\sqrt{3}/2 \;\; \sqrt{3}/2],$$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 1 & -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{array}\right].$$

18. Fie $\mathcal{T} : \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^3$ endomorfismul definit prin $\mathcal{T}(x) = (x_1 + 2x_2 - 4x_3, 2x_1 - 2x_2 - 2x_3, -4x_1 - 2x_2 + x_3)$, $x = (x_1, x_2, x_3) \in \boldsymbol{R}^3$. Să se determine o bază ortonormată în $\boldsymbol{R}^3$ față de care matricea endomorfismului să fie diagonală.

19. Fie matricea $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

1) Să se determine valorile proprii și vectorii proprii.

2) Folosind forma diagonală a matricei $\mathbf{A}$ să se determine $\mathbf{A}^k$, $k \in \mathbf{N}$ și să se scrie sub forma $\mathbf{A}^k = a_k\mathbf{A} + b_k\mathbf{I}$, unde $\mathbf{I}$ este matricea unitate de ordinul trei.

R: 1) $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 2$. Vectorii proprii $e_1 = {}^t[-1\ 1\ 0]$, $e_2 = {}^t[-1\ 0\ 1]$, $e_3 = {}^t[1\ 1\ 1]$.

2) $\mathbf{D} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, unde $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

$\mathbf{D}^k = \begin{bmatrix} (-1)^k & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^k & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{bmatrix} = a_k\mathbf{D} + b_k\mathbf{I}$. Se obține $b_k - a_k = (-1)^k$, $2a_k + b_k = 2^k$. Rezultă $a_k = \dfrac{2^k - (-1)^k}{3}$, $b_k = \dfrac{2[2^{k-1} + (-1)^k]}{3}$ și

$$\mathbf{A}^k = \mathbf{T}\mathbf{D}^k\mathbf{T}^{-1} = \frac{2^k - (-1)^k}{3} \cdot \mathbf{A} + \frac{2[2^{k-1} + (-1)^k]}{3} \cdot \mathbf{I}.$$

20. Fie spațiul euclidian canonic $\boldsymbol{R}^4$ și $\mathcal{A} : \boldsymbol{R}^4 \to \boldsymbol{R}^4$ endomorfismul dat prin matricea

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

1) Să se arate că $\mathcal{A}$ este ortogonal.

2) Să se verifice că toate valorile proprii ale lui ${}^C\mathcal{A} : {}^C\boldsymbol{R}^4 \to {}^C\boldsymbol{R}^4$ au modulul egal cu unitatea, iar vectorii proprii corespunzători sînt ortogonali.

3) Să se scrie matricea atașată lui $\mathcal{A}$ în raport cu baza (reală) ortonormată asociată canonic vectorilor proprii ai lui $\mathcal{A}$.

Soluție. 1) Deoarece $\mathbf{A} \cdot {}^t\mathbf{A} = \mathbf{I}$, matricea $\mathbf{A}$ este ortogonală. Deci și endomorfismul $\mathcal{A}$ este ortogonal

$$2)\ P(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\lambda & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda^2 - 1)\left(\lambda^2 - \frac{\lambda}{2} + 1\right).$$

Obținem $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = \dfrac{1}{4} + i\dfrac{\sqrt{15}}{4}$, $\lambda_4 = \dfrac{1}{4} - i\dfrac{\sqrt{15}}{4}$. Atunci, evident, $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$ și $|\lambda_3| = |\lambda_4| = \sqrt{\dfrac{1}{16} + \dfrac{15}{16}} = 1$.

3) Vectorii proprii corespunzători sînt respectiv $e_1 = (-\sqrt{3}, \sqrt{3}, -\sqrt{3}, 1)$, $e_2 = (-1, 1, 1, -\sqrt{3})$, $e_3 = (-1/4, 1/4, 1, \sqrt{3}/2) + i(\sqrt{15}/4, \sqrt{15}/4, 0, 0)$, $e_4 = \bar{e}_3$. Acestor vectori proprii li se atașează vectorii reali $u = \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ și $v = \left(\frac{\sqrt{15}}{4}, \frac{\sqrt{15}}{4}, 0, 0\right)$ astfel încît $e_3 = u + iv$ și $e_4 = u - iv$.

Se verifică imediat că $(e_1, e_2) = 0$, $(e_1, u) = 0$, $(e_1, v) = 0$ $(e_2, u) = 0$, $(e_2, v) = 0$.

4) Normăm vectorii (e_1, e_2, u, v), adică punem $u_1 = \frac{e_1}{\| e_1 \|}$, $u_2 = \frac{e_2}{\| e_2 \|}$, $u_3 = \frac{u}{\| u_3 \|}$, $u_4 = \frac{v}{\| v \|}$.

Coordonatele acestora formează matricea

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{10}} & -\frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{10}} & \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{15}} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}} & \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{10}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \end{bmatrix}.$$

Atunci în baza $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$, avem

$$\mathbf{D} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{15}}{4} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{15}}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix},$$

21. Fie $\mathcal{A} : \boldsymbol{R}^4 \to \boldsymbol{R}^4$ endomorfismul definit prin matricea

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix},$$

în raport cu baza canonică a lui $\boldsymbol{R}^4$. Să se determine matricea Jordan pentru ${}^{C}\mathcal{A}: {}^{C}\boldsymbol{R}^4 \to {}^{C}\boldsymbol{R}^4$ și să se scrie matricea corespunzătoare pentru $\mathcal{A}: \boldsymbol{R}^4 \to \boldsymbol{R}^4$.

Soluție. Polinomul caracteristic

$$P(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = [\lambda - (2 + i)]^2 [\lambda - (2 - i)]^2$$

are rădăcinile $\lambda_1 = \lambda_2 = 2+i$, $\lambda_3 = \lambda_4 = 2-i$. Acestea sînt valorile proprii ale lui ${}^{C}\mathcal{A}$.

Fie $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ un vector propriu asociat lui $\lambda_1 = 2+\mathrm{i}$, adică

$$\begin{bmatrix} -1-\mathrm{i} & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1-\mathrm{i} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1-\mathrm{i} & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1-\mathrm{i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Se obține sistemul $(-1-\mathrm{i})\,x_1 - x_2 = 0$, $2x_1 + (1-\mathrm{i})\,x_2 - x_3 = 0$, $(-1-\mathrm{i})\,x_3 - x_4 = 0$, $2x_3 + (1-\mathrm{i})x_4 = 0$ cu soluția $x_1 = 1$, $x_2 = -1-\mathrm{i}$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$. Astfel lui $\lambda = 2+\mathrm{i}$ îi corespunde un singur vector propriu independent; de exemplu $x = (1, -1-\mathrm{i}, 0, 0)$.

Analog, pentru $\lambda_3 = 2-\mathrm{i}$, găsim $\bar{x} = (1, -1+\mathrm{i}, 0, 0)$.

Din $\mathbf{A}y = \lambda_1 y + x$ rezultă $y = (0, -1, 2\mathrm{i}, 2-2\mathrm{i})$, iar din $\mathbf{A}\bar{y} = \lambda_3\bar{y} + \bar{x}$ deducem $\bar{y} = (0, -1, -2\mathrm{i}, 2+2\mathrm{i})$.

Matricea atașată lui ${}^{C}\mathcal{A}$ în raport cu baza $\{x, y, \bar{x}, \bar{y}\}$ este

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 2+\mathrm{i} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2+\mathrm{i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-\mathrm{i} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2-\mathrm{i} \end{bmatrix}.$$

Fie $x = a+\mathrm{i}b$, $y = c+\mathrm{i}d$, $\bar{x} = a-\mathrm{i}b$, $\bar{y} = c-\mathrm{i}d$. Bazei $\{x, y, \bar{x}, \bar{y}\}$ din ${}^{C}\boldsymbol{R}^4$ i se atașează baza $\{a = (1, -1, 0, 0)$, $b = (0, 1, 0, 0)$, $c = (0, -1, 0, 2)$, $d = (0, 0, 2, -2)\}$ din $\boldsymbol{R}^4$. Matricea de trecere de la baza canonică a lui $\boldsymbol{R}^4$ la baza $\{a, b, c, d\}$ este

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Se obține

$$\mathbf{B} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} = \left[\begin{array}{cc:cc} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right].$$

22. Să se determine bazele față de care următoarele endomorfisme au respectiv formele canonice Jordan.

1) $\mathcal{A}: \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^3$, $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & 6 & -15 \\ 1 & 5 & -5 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$. 2) $\mathcal{A}: \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^3$, $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -5 & 4 \end{bmatrix}$.

3) $\mathcal{A}: \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^3$, $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & -1 \end{bmatrix}$.

4) $\mathcal{A}: \boldsymbol{R}^4 \to \boldsymbol{R}^4$, $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Indicații. 1) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 3$. Pentru $\lambda = 3$ rezultă vectorul $x = (5b-2a, a, b)$ cu proprietatea $\mathcal{A}(x) = 3x$ și deci există o familie liberă care conține doi vectori proprii independenți. În concluzie matricea Jordan a endomorfismului conține două celule Jordan, iar baza față de care **A** admite această formă conține *doi vectori proprii* și *un vector principal.*

Construim vectorul $e_3 = (x_1, x_2, x_3)$ astfel încît $\mathbf{A}e_3 = 3e_3 + x$ (deoarece nu știm căruia dintre vectorii proprii posibili îi corespunde vectorul principal). Obținem sistemul

$$\begin{cases} 3x_1 + 6x_2 - 15x_3 = 5b-2a \\ x_1 + 2x_2 - \ \ 5x_3 = a \\ x_1 + 2x_2 - \ \ 2x_3 = b. \end{cases}$$

Din condiția de compatibilitate rezultă $a = b$. Soluția generală a sistemului este $x_2 = c$, $x_3 = d$, $x_1 = 5d - 2c + a$ și deci $e_3 = (5d - 2c + a, c, d)$.

Deoarece familia de vectori proprii este liniar independentă pentru $a = b$, numai un vector propriu din această familie aparține bazei căutate și acestui vector propriu îi va corespunde vectorul principal. Alegem de exemplu $a=b=1$ și obținem $e_2 = (3, 1, 1)$. Atunci $e_3 = (5d-2c+1, c, d)$ cu c și d nesupuși la restricții. Alegem de exemplu $c = d = 0$ și obținem $e_3 = (1, 0, 0)$. Pentru a determina cel de-al doilea vector propriu e_1 trebuie să alegem a și b astfel ca e_1, e_2 să fie liniar independenți. Luăm de exemplu $a = 1$, $b = 0$ astfel încît $e_1 = (-2, 1, 0)$. Atunci în baza $\{e_1, e_2, e_3\}$ obținem

$$\mathbf{J} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \text{unde } \mathbf{T} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

2) $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 2$. Pentru $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ se obține vectorul propriu $e_1 = (1, 1, 1)$; completăm cu vectorul principal $e_2 = (x_1, x_2, x_3)$ determinat de $\mathcal{A}(e_2) = e_2 + e_1$. Se obține $e_2 = (0, 1, 2)$. Pentru $\lambda = 2$ rezultă vectorul propriu $e_3 = (1, 2, 4)$. În baza $\{e_1, e_2, e_3\}$ avem

$$\mathbf{J} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{cu } \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

3) $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = -1$.

La $e_1 = (0, 1, -3)$, ca vector propriu pentru $\lambda = 0$, adăugăm vectorul principal $e_2 = (-1, 1, 2)$ determinat de $\mathcal{A}(e_2) = 0 \cdot e_2 + e_1$. Pentru $\lambda = -1$ se obține $e_3 = (0, 0, 1)$. În baza $\{e_1, e_2, e_3\}$ găsim

$$\mathbf{J} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{cu } \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

4) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 2$ căreia îi corespunde vectorul propriu $x = (a, -a, -b, b)$. Aceasta arată că există doi vectori proprii liniar independenți; va trebui să completăm baza cu doi vectori principali. Obținem

$e_1 = (1, -1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 0, -1, 1)$, ca vectori proprii și $e_3 = (0, -1, 1, 0)$, $e_4 = (0, 0, -1, 0)$ ca vectori principali. Față de baza $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ găsim

$$\mathbf{J} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{cu} \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

23. Să se aducă la forma Jordan endomorfismul $\mathcal{T} : \boldsymbol{R}^4 \to \boldsymbol{R}^4$ care în baza canonică a lui $\boldsymbol{R}^4$ are matricea

$$1)\ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad 2)\ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 2 & 1 \\ -17 & -6 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$3)\ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Soluție. 1) $P(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$ conduce la $(1-\lambda)^4 = 0$ și deci $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 1$ este valoarea proprie multiplă de ordinul patru. Numărul celulelor Jordan din forma canonică va fi egal cu dimensiunea subspațiului propriu corespunzător lui $\lambda = 1$,

$$\dim S_{\lambda=1} = 4 - \text{rang}\,(\mathbf{A} - 1 \cdot \mathbf{I}) = 4 - 3 = 1.$$

Deci avem, pentru $\lambda = 1$, un singur vector propriu și o celulă Jordan de ordinul 4.

Atunci din $\mathcal{T}(u_1) = 1 \cdot u_1$, $\mathcal{T}(u_2) = 1 \cdot u_2 + u_1$, $\mathcal{T}(u_3) = 1 \cdot u_3 + u_2$, $\mathcal{T}(u_4) = 1 \cdot u_4 + u_3$ obținem patru sisteme algebrice, unul omogen și celelalte trei neomogene, în care u_1 este vectorul propriu iar u_2, u_3, u_4 sînt vectorii principali. Se obține $u_1 = {}^t[8\ 0\ 0\ 0]$, $u_2 = {}^t[12\ 4\ 0\ 0]$, $u_3 = {}^t[4\ 3\ 2\ 0]$, $u_4 = {}^t[0\ 0\ 0\ 1]$. Matricea de trecere $\mathbf{T}$ are forma

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 8 & 12 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

așa încît

$$\mathbf{D} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2) $P(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0 \Leftrightarrow (1 - \lambda)^4 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 1$. În acest caz însă $\dim S_{\lambda=1} = 4 - \text{rang}\,(\mathbf{A} - 1 \cdot \mathbf{I}) = 4 - 2 = 2$ și deci numărul celulelor Jordan corespunzătoare lui $\lambda = 1$ este egal cu 2.

Deoarece $(\mathbf{A} - 1 \cdot \mathbf{I})^2 = \mathbf{O}$ (matricea nulă) rezultă că indicele de nilpotență al restricției lui $\mathcal{T}$ la subspațiul propriu este doi și deci vom avea două celule Jordan de ordinul 2 (același rezultat l-am fi obținut folosind sistemele algebrice obținute pentru determinarea vectorilor proprii și a vectorilor principali).

Așadar $\mathcal{T}(u_1) = 1 \cdot u_1$, $\mathcal{T}(u_2) = 1 \cdot u_2 + u_1$, $\mathcal{T}(u_3) = 1 \cdot u_3$, $\mathcal{T}(u_4) = 1 \cdot u_4 + u_3$. Se obține $u_1 = {}^t[2\ \ -4\ \ 7\ \ 17]$, $u_2 = {}^t[1\ \ 0\ \ 0\ \ 0]$, $u_3 = {}^t[1\ \ -2\ \ 1\ \ -6]$, $u_4 = {}^t[0\ \ 1\ \ 0\ \ 0]$. Deci

$$\mathbf{D} = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

3) $P(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)^2 (\lambda + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = \lambda_4 = -1$. $\dim S_{\lambda=1} = 4 - \operatorname{rang}(\mathbf{A} - 1 \cdot \mathbf{I}) = 4 - 3 = 1$; $\dim S_{\lambda=-1} = 4 - \operatorname{rang}(\mathbf{A} + 1 \cdot \mathbf{I}) = 4 - 3 = 1$ și deci avem doi vectori proprii. Deoarece atît $\lambda = 1$ cît și $\lambda = -1$ sînt duble rezultă că avem tot două celule Jordan de ordinul 2 (dacă s-ar admite o celulă de ordinul 1, ar însemna că cealaltă este de ordinul 3, ceea ce ar rezulta că valoarea proprie corespunzătoare primei celule este simplă și cealaltă triplă).

Obținem $u_1 = {}^t[3\ \ 2\ \ 1\ \ 0]$, $u_2 = {}^t[1\ \ 1\ \ 1\ \ 1]$, $u_3 = {}^t[3\ \ -2\ \ 1\ \ 0]$, $u_4 = {}^t[-1\ \ 1\ \ 1\ \ 1]$, iar

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

24. Fie $\mathbf{V}$ un spațiu vectorial real euclidian finit dimensional, $\mathcal{T}: \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ o transformare liniară simetrică și $\mathbf{S} = \{x \mid x \in \mathbf{V},\ \|x\| = 1\}$ sfera unitate. Definim $\mathrm{f}: \mathbf{S} \to \boldsymbol{R}$, $\mathrm{f}(x) = (\mathcal{T}(x), x)$ și notăm cu $v \in \mathbf{S}$ vectorul pentru care $\mathrm{f}(v)$ este valoarea minimă a lui f, iar cu $y \in \mathbf{S}$ un vector fixat ortogonal lui v.

1) Să se arate că $\dfrac{v + ty}{\sqrt{1 + t^2}}$, $t \in \boldsymbol{R}$, are lungimea unu. Definim $\mathrm{g}: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, $\mathrm{g}(t) = \mathrm{f}\left(\dfrac{v + ty}{\sqrt{1 + t^2}}\right)$.

2) Să se verifice că $\mathrm{g}(0) = \mathrm{f}(v)$ este minimul lui g.

3) Să se arate că

$$\frac{\mathrm{dg}}{\mathrm{d}t}(t) = \frac{2t}{(1 + t^2)^2} (\mathcal{T}(v + ty),\ v + ty).$$

4) Să se verifice că $\mathcal{T}(v)$ este perpendicular pe y, iar v este un vector propriu al lui $\mathcal{T}$.

25. Pe o bară de masă neglijabilă și de rigiditate constantă la încovoiere sînt fixate patru mase $m_1 = m$, $m_2 = 3m$, $m_3 = 2m$, $m_4 = 4m$. Să se determine pulsațiile proprii ale vibrațiilor transversale și modurile proprii de vibrație știind că matricea dinamică a sistemului este

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Soluție. Trebuie să determinăm valorile și vectorii proprii pentru matricea $\mathbf{A}$.

Ecuația caracteristică $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$ conduce la ecuația $\lambda(1-\lambda)^2(\lambda-6) = 0$ cu soluțiile $\lambda_1 = 0$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ și $\lambda_4 = 6$.

Pentru $\lambda_1 = 0$ obținem vectorul propriu $a_1 = {}^t[-1, 0, 2, 1]$, iar lui $\lambda = 1$ îi corespund vectorii proprii $a_2 = {}^t[0, 1, 0, 0]$, $a_3 = {}^t[2, 0, 1, 0]$. În sfîrșit, lui $\lambda = 6$ îi corespunde vectorul propriu $a_4 = {}^t[1, 0, -2, 5]$.

26. Să se determine direcțiile invariante în studiul vibrațiilor libere ale unui sistem constînd din trei mase (figura 1.5).

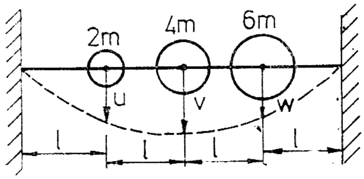


Fig. 1.5.

Soluție. Notăm prin ω frecvența, x vectorul deplasare de coordonate u, v, w, și $k = \frac{\sigma}{l}$, unde σ este tensiunea, iar $4l$ este lungimea barei.

Ecuațiile de mișcare sînt

$$\begin{cases} (2k - 2m\omega^2)\,u - kv = 0 \\ -ku + (2 - 4m\omega^2)\,v - kw = 0 \\ -kv + (2 - 6m\omega^2)\,w = 0, \end{cases}$$

sau,

$$\begin{bmatrix} 2k-2m\omega^2 & -k & 0 \\ -k & 2k-4m\omega^2 & -k \\ 0 & -k & 2k-6m\omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = 0.$$

Notînd prin $\lambda = m\omega^2/k$ această ecuație se transcrie

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$$

sau

$$\begin{cases} 2(1-\lambda)\,u - v = 0 \\ -u + 2\,(1-2\lambda)\,v - w = 0 \\ -v + 2(\,1 - 3\lambda)\,w = 0 \end{cases}$$

cu valorile proprii soluțiile ecuației $12\lambda^3 - 22\lambda^2 + 10\lambda - 1 = 0$. Vectorii proprii corespunzători dau direcțiile invariante în sistemul vibrațiilor libere.

27. Să se determine valoarea polinomului matriceal $P(\mathbf{A})$ în fiecare din cazurile

1) $P(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^4 - 8\mathbf{A}^3 + 24\mathbf{A}^2 - 32\mathbf{A} + 16\mathbf{I}$,

pentru $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{I}$ este matricea unitate de ordinul patru

2) $P(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^4 - 4\mathbf{A}^3 + 6\mathbf{A}^2 - 4\mathbf{A} + \mathbf{I}$;

pentru $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 & 4 \\ -4 & 5 & -2 & 7 \\ -3 & 3 & -2 & 5 \\ -2 & 2 & -2 & 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{I}$ este matricea unitate de ordinul patru

3) $P(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^3 - (a^2 + 2a)\,\mathbf{A}^2 + (a^2 + 2a^3)\,\mathbf{A} - a^4\mathbf{I}$,

pentru $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a^2 & 1 \\ a & 0 & a \end{bmatrix}$, $\mathbf{I}$ este matricea unitate de ordinul trei

Indicație. Se determină polinoamele caracteristice pentru fiecare matrice și apoi se aplică teorema lui Cayley-Hamilton. În toate cazurile se obține $P(\mathbf{A}) = \mathbf{O}$, unde $\mathbf{O}$ este matricea nulă de ordinul respectiv.

28. Folosind teorema lui Cayley-Hamilton să se calculeze $\mathbf{A}^{-1}$ și $\mathbf{A}^n$, pentru

1) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, 2) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, 3) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$,

4) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 5) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

R: 1) $P(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^2 - 2\mathbf{A} + \mathbf{I} = \mathbf{O}$, $\mathbf{A}(2\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \mathbf{I}$. Deci $\mathbf{A}^{-1} = 2\mathbf{I} - \mathbf{A}$, $\mathbf{A}^2 = 2\mathbf{A} - \mathbf{I}$, $\mathbf{A}^3 = 2\mathbf{A}^2 - \mathbf{A} = 3\mathbf{A} - 2\mathbf{I}$, prin inducție $\mathbf{A}^n = n\mathbf{A} - (n-1)\mathbf{I}$.

2) $P(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^2 - \mathbf{I} = \mathbf{O}$, $\mathbf{A}\cdot\mathbf{A} = \mathbf{I}$. Deci $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}$, $\mathbf{A}^2 = \mathbf{I}$, $\mathbf{A}^3 = \mathbf{A}$ și prin inducție $\mathbf{A}^n = \dfrac{1 + (-1)^n}{2}\,\mathbf{I} + \dfrac{1 - (-1)^n}{2}\,\mathbf{A}$.

3) $P(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^3 - 6\mathbf{A}^2 + 11\mathbf{A} - 6\mathbf{I} = \mathbf{O}$, $\mathbf{A}(\mathbf{A}^2 - 6\mathbf{A} + 11\mathbf{I}) = 6\mathbf{I}$. Rezultă

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{6}(\mathbf{A}^2 - 6\mathbf{A} + 11\mathbf{I}), \quad \mathbf{A}^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3(3n^2 - 12n + 13) + 1 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{bmatrix},$$

$$n \geqslant 2$$

4) $P(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^3 - \mathbf{A}^2 = \mathbf{O}$, $\mathbf{A}^3 = \mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$ și deci $\mathbf{A}^n = \mathbf{A}$ pentru $n \geqslant 1$. $\mathbf{A}^{-1}$ nu există deoarece $\mathbf{A}$ este singulară.

5) $P(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^3 - 4\mathbf{A}^2 + 5\mathbf{A} - 2\mathbf{I} = \mathbf{O}$, $\mathbf{A}^{-1} = \dfrac{1}{2}(\mathbf{A}^2 - 4\mathbf{A} + \mathbf{I})$.

$$\mathbf{A}^n = \begin{bmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & n & 1 \end{bmatrix}.$$

29. Fie $\mathcal{A}: \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^n$ o transformare liniară. Transformarea liniară $e^{\mathcal{A}}: \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^n$ definită de egalitatea

$$e^{\mathcal{A}} = \mathcal{I} + \frac{1}{1!}\mathcal{A} + \frac{1}{2!}\mathcal{A}^2 + \ldots + \frac{1}{n!}\mathcal{A}^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\mathcal{A}^n$$

numește *exponențiala transformării* $\mathcal{A}$.

1) Să se arate că pentru orice $\mathcal{A}$, seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{n!}\mathcal{A}^n$ este convergentă și convergența este uniformă pe fiecare mulțime $\mathbf{X} = \{\mathcal{A} \mid \|\mathcal{A}\| \leqslant k,\ k \in \boldsymbol{R}\}$, unde $\|\mathcal{A}\|$ este norma transformării.

2) Să se calculeze $e^{\mathcal{A}}$, știind că $\mathcal{A}$ este dată prin matricea ei în raport cu baza canonică a spațiului $\mathbf{R}^3$, în fiecare din cazurile de mai jos:

(a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$ (c) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 7 & 4 & -1 \\ 4 & 7 & -1 \\ -4 & -4 & 4 \end{bmatrix}$

(b) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ (d) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.

Soluție. 1) Admitem că $\|\mathcal{A}\| \leqslant k$. Atunci seria $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \|\mathcal{A}\|^n$ poate fi majorată de seria numerică $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} k^n$ care converge către e^k. Conform criteriului lui Weierstrass, seria $e^{\mathcal{A}}$ converge uniform pentru $\|\mathcal{A}\| \leqslant \mathbf{k}$.

2) (a) Valorile proprii ale lui $\mathcal{A}$ sînt $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = 3$. Corespunzător găsim vectorii proprii $f_1 = (-1, 1, 1)$, $f_2 = (11, 1, -14)$, $f_3 = (1, 1, 1)$.

Notînd vectorii bazei canonice cu $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$, putem scrie

(*) $f_1 = -e_1 + e_2 + e_3$, $f_2 = 11e_1 + e_2 - 14e_3$, $f_3 = e_1 + e_2 + e_3$. În raport cu baza $\{f_1, f_2, f_3\}$, numită și bază proprie, transformarea $\mathcal{A}$ are forma diagonală

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Pe baza teoremelor lui Dirac, rezultă că în raport cu baza proprie matricea transformării $e^{\mathcal{A}}$ este

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & e^3 \end{bmatrix}.$$

Pentru a găsi matricea lui $e^{\mathcal{A}}$ în baza inițială aplicăm formula (3.13). Anume, din relațiile (*) oținem matricea de trecere

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} -1 & 11 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -14 & 1 \end{bmatrix}, \text{ cu inversa } \mathbf{C}^{-1} = \frac{1}{30} \begin{bmatrix} -15 & 0 & 15 \\ 25 & 2 & 3 \\ -10 & -2 & 12 \end{bmatrix}.$$

Găsim

$$e^{\mathbf{A}} = \mathbf{CMC}^{-1} = \frac{1}{30} \begin{bmatrix} 15e+275e^{-2}-10e^3 & 22e^{-2}-2e^3 & -15e+33e^{-2}+12e^3 \\ -15e+25e^{-2}-10e^3 & 2e^{-2}-2e^3 & 15e+3e^{-2}+12e^3 \\ -15e+350e^{-2}-10e^3 & -28e^{-2}-2e^3 & 15e-42e^{-2}+12e^3 \end{bmatrix}.$$

(b) Valorile proprii sînt $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 2$, iar vectorii proprii, $f_1 = (1, 0, -1)$, $f_2 = (1, -1, 1)$, $f_3 = (1, 2, 1)$. În raport cu baza proprie, $\mathcal{A}$ are forma diagonală dată de matricea

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

iar matricea lui $e^{\mathfrak{A}}$, în aceeași bază, este

$$\mathbf{M}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & e^{-1} & 0\\ 0 & 0 & e^{2}\end{bmatrix}.$$

Matricea de trecere are forma

$$\mathbf{C}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & 2\\ -1 & 1 & 1\end{bmatrix} \text{ și inversa } \mathbf{C}^{-1}=\begin{bmatrix}1/2 & 1/3 & 1/6\\ 0 & -1/3 & 1/3\\ -1/2 & 1/3 & 1/6\end{bmatrix}.$$

Obținem

$$e^{\mathbf{A}}=\mathbf{CMC}^{-1}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}3(1+e^2) & 2(1-e^{-1}+e^2) & 1+2e^{-1}+e^2\\ -6e^2 & 2(e^{-1}+2e^2) & 2(e^2-e^{-1})\\ -3(1+e^2) & 2(-1-e^{-1}+e^2) & -1+2e^{-1}+e^2\end{bmatrix}.$$

(c) și (d), se procedează asemănător.

30. Polinomul

$$\mathrm{f}(\mathbf{A})=\sum_{j=1}^{n}\frac{(\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I})(\mathbf{A}-\lambda_2\mathbf{I})\dots(\mathbf{A}-\lambda_{j-1}\mathbf{I})(\mathbf{A}-\lambda_{j+1}\mathbf{I})\dots(\mathbf{A}-\lambda_n\mathbf{I})}{(\lambda_j-\lambda_1)(\lambda_j-\lambda_2)\dots(\lambda_j-\lambda_{j-1})(\lambda_j-\lambda_{j+1})\dots(\lambda_j-\lambda_n)}\,\mathrm{f}(\lambda_j)$$

se numește *polinomul Lagrange* de interpolare pentru funcția de matrice $\mathbf{A}\to \mathrm{f}(A)$ în cazul cînd matricea $\mathbf{A}$ are valori proprii distincte.

Folosind acest polinom să se calculeze $e^{\mathbf{A}t}$ în cazul matricelor

$$1)\ \mathbf{A}=\begin{bmatrix}3 & -1 & 1\\ -1 & 5 & -1\\ 1 & -1 & 3\end{bmatrix},\quad 2)\ \mathbf{A}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}.$$

Soluție. 1) $P(\lambda)=\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})=-(\lambda-2)(\lambda-3)(\lambda-6)$ așa încît valorile proprii sînt $\lambda_1=2,\ \lambda_2=3,\ \lambda_3=6$. Atunci polinomul Lagrange de interpolare se scrie

$$L(\lambda)=\frac{(\lambda-3)(\lambda-6)}{(2-3)(2-6)}e^2+\frac{(\lambda-2)(\lambda-6)}{(3-2)(3-6)}e^3+\frac{(\lambda-2)(\lambda-3)}{(6-2)(6-3)}e^6=$$

$$=\frac{1}{4}(\lambda-3)(\lambda-6)e^2-\frac{1}{3}(\lambda-2)(\lambda-6)e^3+\frac{1}{12}(\lambda-2)(\lambda-3)e^6,$$

și dacă ținem seama de $\mathrm{f}(x)=e^{tx}$, găsim

$$e^{\mathbf{A}t}=L(\mathbf{A}t)=(\mathbf{A}-3\mathbf{I})(\mathbf{A}-6\mathbf{I})\frac{e^{2t}}{4}-(\mathbf{A}-2\mathbf{I})(\mathbf{A}-6\mathbf{I})\frac{e^{3t}}{3}+(\mathbf{A}-2\mathbf{I})\times$$

$$\times(\mathbf{A}-3\mathbf{I})\frac{e^{6t}}{12}=\frac{1}{12}[3e^{2t}-4e^{3t}+e^{6t}]\cdot\mathbf{A}^2+\frac{1}{12}[-27e^{2t}+32e^{3t}-5e^{6t}]\times$$

$$\times\mathbf{A}+\frac{1}{2}[9e^{2t}-8e^{3t}+e^{6t}]\cdot\mathbf{I}.$$

Deoarece

$$\mathbf{A}^2=\begin{bmatrix} 11 & -9 & 7 \\ -9 & 27 & -9 \\ 7 & -9 & 11 \end{bmatrix}$$

se deduce

$$e^{\mathbf{A}t}=\begin{bmatrix} \frac{1}{2}e^{2t}+\frac{1}{3}e^{3t}+\frac{1}{6}e^{6t} & \frac{1}{3}e^{3t}-\frac{1}{3}e^{6t} & -\frac{1}{2}e^{2t}+\frac{1}{3}e^{3t}+\frac{1}{6}e^{6t} \\ \frac{1}{3}e^{3t}-\frac{1}{3}e^{6t} & -\frac{27}{2}e^{2t}+\frac{55}{3}e^{3t}-\frac{23}{6}e^{6t} & \frac{1}{3}e^{3t}-\frac{1}{3}e^{6t} \\ -\frac{1}{2}e^{2t}+\frac{1}{3}e^{3t}+\frac{1}{6}e^{6t} & \frac{1}{3}e^{3t}+\frac{1}{3}e^{6t} & \frac{1}{2}e^{2t}+\frac{1}{3}e^{3t}+\frac{1}{6}e^{6t} \end{bmatrix}.$$

2) $P(\lambda)=\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})=-(\lambda+1)^2(\lambda-2)$ iar polinomul minimal $P^*(\lambda)=(\lambda+1)(\lambda-2)$. Sîntem în cazul cînd valorile proprii sînt multiple, dar polinomul minimal al matricei are rădăcini simple. Polinomul de interpolare Lagrange are tot forma (*) dar gradul egal cu $m-1$, unde $m=$ grad $P^*(\lambda)$, iar $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ sînt zerourile polinomului minimal. Deci

$$L(\lambda)=\frac{\lambda-2}{1-2}e^{-1}+\frac{\lambda+1}{2+1}e^2=\frac{e^2}{3}(\lambda+1)-e^{-1}(\lambda-2),$$

iar

$$e^{\mathbf{A}t}=L(\mathbf{A}t)=\left(\frac{e^{2t}}{3}-e^{-t}\right)A+\left(\frac{e^{2t}}{3}+2e^{-t}\right)\mathbf{I}=$$

$$=\begin{bmatrix} \frac{e^{2t}}{3}+2e^{-t} & \frac{e^{2t}}{3}-e^{-t} & \frac{e^{2t}}{3}-e^{-t} \\ \frac{e^{2t}}{3}-e^{-t} & \frac{e^{2t}}{3}+2e^{-t} & \frac{e^{2t}}{3}-e^{-t} \\ \frac{e^{2t}}{3}-e^{-t} & \frac{e^{2t}}{3}-e^{-t} & \frac{e^{2t}}{3}+2e^{-t} \end{bmatrix}.$$

31. În cazul cînd matricea $\mathbf{A}=[a_{ij}]$ admite valori proprii multiple adică $P(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{m_1}\ldots(\lambda-\lambda_k)^{m_k}$, atunci funcția de matrice este

$$\mathrm{f}(\mathbf{A})=\sum_{i=1}^{k}\left(\sum_{j=0}^{m_j-1}\frac{\mathrm{f}^{(j)}(\lambda_j)}{j!}(\mathbf{A}-\lambda_j\mathbf{I})^j\right)\mathbf{E}_i,$$

unde $\mathbf{E}_i$ $(i=1, \ldots, k)$ sînt matrice date de egalitățile

$$\mathbf{E}_i=a_i(\lambda)\,(\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I})^{m_1}\ldots(\mathbf{A}-\lambda_{i-1}\mathbf{I})^{m_{i-1}}(\mathbf{A}-\lambda_{i+1}\mathbf{I})^{m_{i+1}}\ldots(\mathbf{A}-\lambda_k\mathbf{I})^{m_k},$$
$$(i=1, \ldots, k)$$

iar $a_k(\lambda)$ se calculează din descompunerea

$$\frac{1}{P(\lambda)}=\frac{a_1(\lambda)}{(\lambda-\lambda_1)^{m_1}}+\ldots+\frac{a_k(\lambda)}{(\lambda-\lambda_k)^{m_k}}.$$

Folosind descompunerea precedentă să se calculeze $e^{\mathbf{A}t}$ în cazurile

$$1)\ \mathbf{A}=\begin{bmatrix}3 & 2 & 0\\ 1 & 2 & -1\\ 1 & 2 & 2\end{bmatrix},\quad 2)\ \mathbf{A}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0\\ -2 & -3 & -1\end{bmatrix},$$

$$3)\ \mathbf{A}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0 & 0\\ -4 & -1 & 0 & 0\\ -3 & 3 & 1 & 0\\ -2 & 2 & -2 & 1\end{bmatrix},\quad 4)\ \mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & -1 & -1 & -2\\ 0 & 1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{bmatrix}.$$

Soluție. 1) $P(\lambda) = (\lambda - 2)^2(\lambda - 3)$.

$\dfrac{1}{P(\lambda)} = \dfrac{a\lambda + b}{(\lambda - 2)^2} + \dfrac{c}{\lambda - 3}$; rezultă $a = -1$, $b = 1$, $c = 1$, așa încît $a_1(\lambda) = -\lambda + 1$, $a_2(\lambda) = 1$ și atunci

$$\mathbf{E}_1 = a_1(\mathbf{A})\,(\mathbf{A}-3\mathbf{I}) = (\mathbf{I}-\mathbf{A})\,(\mathbf{A}-3\mathbf{I}) = -\mathbf{A}^2-2\mathbf{A}-3\mathbf{I} = \begin{bmatrix}-2 & -2 & 2\\ 0 & 1 & 0\\ -3 & -2 & 3\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{E}_2 = a_2(\mathbf{A})\cdot(\mathbf{A}-2\mathbf{I})^2 = \mathbf{A}^2-4\mathbf{A}+4\mathbf{I} = \begin{bmatrix}3 & 2 & -2\\ 0 & 0 & 0\\ 3 & 2 & -2\end{bmatrix}.$$

Deci

$$\mathrm{f}(\mathbf{A}) = \mathrm{f}(\lambda_1)\,\mathbf{E}_1 + \mathrm{f}'(\lambda_1)\,(\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{I})\mathbf{E}_1 + \mathrm{f}(\lambda_2)\,\mathbf{E}_2$$

și dacă ținem cont că $\mathrm{f}(x) = e^{tx}$, avem

$$e^{t\mathbf{A}} = e^{\lambda_1 t}\mathbf{E}_1 + \left.\frac{\mathrm{d}e^{\lambda t}}{\mathrm{d}\lambda}\right|_{\lambda=\lambda_1}(\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I})\,\mathbf{E}_1 + e^{\lambda_2 t}\mathbf{E}_2 = e^{2t}\mathbf{E}_1 + te^{2t}(\mathbf{A}-2\mathbf{I})\,\mathbf{E}_1 + e^{3t}\mathbf{E}_2 =$$

$$= \begin{bmatrix}-2-2t & -2 & 2+2t\\ t & 1 & -t\\ -3-2t & -2 & 3+2t\end{bmatrix} e^{2t} + \begin{bmatrix}3 & 2 & -2\\ 0 & 0 & 0\\ 3 & 2 & -2\end{bmatrix} e^{3t}.$$

2) Asemănător, $P(\lambda) = \lambda^2(\lambda + 1)$; $\dfrac{1}{P(\lambda)} = \dfrac{a\lambda + b}{\lambda^2} + \dfrac{c}{\lambda + 1}$ și de aici $a = -1$, $b = 1$ și $c = 1$. Deci $a_1(\lambda) = 1-\lambda$, $a_2(\lambda) = 1$ așa încît

$$\mathbf{E}_1 = a_1(\mathbf{A})\,(\mathbf{A}+\mathbf{I}) = (\mathbf{I}-\mathbf{A})\,(\mathbf{I}+\mathbf{A}) = \mathbf{I}-\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 5 & 3 & 1\end{bmatrix},$$

$$E_2 = a_2(\mathbf{A})\cdot\mathbf{A}^2 = \mathbf{I}\cdot\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 5 & 3 & 1\end{bmatrix}.$$

Rezultă

$$\mathrm{f}(\mathbf{A}) = \mathrm{f}(0)\,\mathbf{E}_1 + \mathrm{f}(0)\,\mathbf{A}\mathbf{E}_1 + \mathrm{f}(-1)\,\mathbf{E}_2$$

și de aici

$$e^{t\mathbf{A}} = \mathbf{E}_1 + t\mathbf{A}\mathbf{E}_1 + e^{-t}\mathbf{E}_2 = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -t & 1 & 0\\ 5-7t+5e^{-t} & 3-6t+3e^{-t} & 1-t+e^{-t}\end{bmatrix}.$$

3) $P(\lambda) = (\lambda + 1)^2(\lambda - 1)^2$,

$$\frac{1}{P(\lambda)} = \frac{a\lambda + b}{(\lambda + 1)^2} + \frac{c\lambda + d}{(\lambda - 1)^2} \text{ și de aici } a = \frac{1}{4},\ b = \frac{1}{2},\ c = -\frac{1}{4},\ d = \frac{1}{2}$$

astfel încît

$$a_1(\lambda) = \frac{1}{4}\lambda + \frac{1}{2}, \quad a_2(\lambda) = -\frac{1}{4}\lambda + \frac{1}{2}.$$

Rezultă

$$\mathbf{E}_1 = \left(\frac{1}{4}\mathbf{A} + \frac{1}{2}\mathbf{I}\right)(\mathbf{A} - \mathbf{I})^2 = \frac{1}{4}\mathbf{A}^3 - \frac{3}{4}\mathbf{A} + \frac{1}{2}\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 9/2 & -3/2 & 0 & 0 \\ 23/2 & -5/2 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$E_2 = \left(-\frac{1}{4}\mathbf{A} + \frac{1}{2}\mathbf{I}\right)(\mathbf{A} + \mathbf{I})^2 = -\frac{1}{4}\mathbf{A}^3 + \frac{3}{4}\mathbf{A} + \frac{1}{2}\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ -9/2 & 3/2 & 1 & 1 \\ -23/2 & -1/2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

și deci

$$e^{\mathbf{A}t} = e^{-t}\mathbf{E}_1 + te^{-t}(\mathbf{A} + \mathbf{I})\,\mathbf{E}_1 + e^t\mathbf{E}_2 + te^t(\mathbf{A} - \mathbf{I})\,\mathbf{E}_2 =$$

$$= \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 0 & 0 \\ (2 + 4t)\,e^{-t} + (4t - 2)\,e^t & e^{-t} & 0 & 0 \\ \left(\frac{9}{2} + 18t\right)e^{-t} - \left(\frac{9}{2} + 6t\right)e^t & -\frac{3}{2}e^{-t} + \frac{3}{2}e^t & e^t & 0 \\ \left(\frac{23}{2} + 18t\right)e^{-t} + \left(5t - \frac{23}{2}\right)e^t & -\frac{5}{2}e^{-t} - \left(\frac{1}{2} + 3t\right)e^t & -2te^t & e^t \end{bmatrix}.$$

4) Se procedează analog.

32. Fie $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ o matrice pătratică de ordinul n cu elemente reale sau complexe.

1) Să se arate că dacă $\mathbf{T}$ este o matrice pătratică nesingulară de același ordin cu $\mathbf{A}$, atunci $\mathbf{T}^{-1}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{T} = e^{\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}}$.

2) Dacă $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sînt valori proprii distincte ale matricei $\mathbf{A}$, atunci $e^{\mathbf{A}(t-t_0)}$ se reduce la forma diagonală

$$e^{\mathbf{D}(t-t_0)} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1(t-t_0)} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2(t-t_0)} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & e^{\lambda_n(t-t_0)} \end{bmatrix},$$

unde
$$\mathbf{D} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix},$$

iar $\mathbf{T}$ este matricea formată cu vectorii proprii corespunzători. Această afirmație este adevărată pentru orice matrice diagonalizabilă $\mathbf{A}$.

3) Presupunem că matricea $\mathbf{A}$ are valorile proprii $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ multiple, respectiv de ordinul $n_1, n_2, \ldots, n_k$, $(n_1 + n_2 + \ldots n_k = n)$, și că ea a fost redusă la forma canonică Jordan

$$\mathbf{J} = \mathbf{T}^{-1}\cdot \mathbf{A}\cdot \mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1 & 0 \ldots 0 \\ 0 & \mathbf{J}_2 \ldots 0 \\ \ldots & \ldots \ldots \\ 0 & 0 \ldots \mathbf{J}_k \end{bmatrix}.$$

Fie $\mathbf{J}_p$, $p = 1, \ldots, k$ o celulă Jordan de ordinul n_p,

$$\mathbf{J}_p = \begin{bmatrix} \lambda_p & 1 & 0 \ldots 0 \\ 0 & \lambda_p & 1 \ldots 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 \ldots 1 \\ 0 & 0 & 0 \ldots \lambda_p \end{bmatrix} = \lambda_p \mathbf{I}_p + \mathbf{E}_p, \quad \mathbf{E}_p = \left.\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 \ldots & 0 \\ \ldots & & & \ldots \\ 0 & 0 & 0 \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 0 \ldots & 0 \end{bmatrix}}_{n_p}\right\} n_p.$$

Să se arate că

$$e^{\mathbf{J}_p(t-t_0)} = e^{\lambda_p(t-t_0)} \begin{bmatrix} 1 & \dfrac{t-t_0}{1!} & \dfrac{(t-t_0)^2}{2!} & \ldots & \dfrac{(t-t_0)^{n_p-1}}{(n_p-1)!} \\ 0 & 1 & \dfrac{t-t_0}{1!} & \ldots & \dfrac{(t-t_0)^{n_p-2}}{(n_p-2)!} \\ \ldots & \ldots & \ldots & & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots \; 1 & \dfrac{t-t_0}{1!} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots \; 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Soluție. 1) Prin inducție se arată că $\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}^n\mathbf{T} = (\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T})^n$, $n \in \mathbf{N}$. Folosind această egalitate și definiția lui $e^{\mathbf{A}(t-t_0)}$ avem

$$e^{\mathbf{T}^{-1}\cdot\mathbf{A}(t-t_0)\mathbf{T}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T})^n (t-t_0)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbf{T}^{-1}\cdot\mathbf{A}^n\mathbf{T}(t-t_0)^n}{n!} =$$

$$= \mathbf{T}^{-1}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^n}{n!}(t-t_0)^n\right)\mathbf{T} = \mathbf{T}^{-1} e^{\mathbf{A}(t-t_0)}\mathbf{T}.$$

2) Dacă A are valori proprii distincte atunci ea poate fi redusă la forma diagonală

$$\mathbf{D} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & & & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix},$$

deci

$$e^{\mathbf{D}(t-t_0)} = e^{\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}(t-t_0)\mathbf{T}} = \mathbf{T}^{-1}e^{\mathbf{A}(t-t_0)}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1(t-t_0)} & 0 & 0 \ldots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2(t-t_0)} & 0 \ldots & 0 \\ \ldots \; \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 \ldots & e^{\lambda_n(t-t_0)} \end{bmatrix}.$$

3) Orice celulă Jordan $\mathbf{J}_p$ se poate scrie sub forma $\mathbf{J}_p = \lambda_p \mathbf{I}_p + \mathbf{E}_p$, unde $\mathbf{I}_p$ este matricea unitate de ordinul n_p, iar $\mathbf{E}_p$ are forma

$$\mathbf{E}_p = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \dots 0 \\ 0 & 0 & 1 \dots 0 \\ \dots & & \dots \\ 0 & 0 & 0 \dots 1 \\ 0 & 0 & 0 \dots 0 \end{bmatrix}.$$

Matricea $\mathbf{E}_p$ este nilpotentă de ordinul n_p, iar

$$\mathbf{E}_p^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \dots 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \dots 0 & 0 \\ \dots & & \dots & & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \dots 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \dots 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \dots 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Deoarece $\mathbf{I}_p$ și $\mathbf{E}_p$ sînt comutabile avem

$$e^{\mathbf{I}_p(t-t_0)} = e^{\lambda_p(t-t_0)\mathbf{I}_p} e^{(t-t_0)\mathbf{E}_p} =$$

$$= e^{\lambda_p(t-t_0)} \left[\mathbf{I}_p + \frac{t-t_0}{2!} \mathbf{E}_p + \frac{(t-t_0)^2}{2!} \mathbf{E}_p^2 + \dots \frac{(t-t_0)^{n_p-1}}{(n_p-1)!} \mathbf{E}_p^{n_p-1} \right] =$$

$$= e^{\lambda_p(t-t_0)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{t-t_0}{1!} & \frac{(t-t_0)^2}{2!} & \dots & \frac{(t-t_0)^{n_p-1}}{(n_p-1)!} \\ 0 & 1 & \frac{t-t_0}{1!} & \dots & \frac{(t-t_0)^{n_p-2}}{(n_p-2)!} \\ \dots & \dots & \dots & & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

33. Să se calculeze $e^{\mathbf{A}t}$ în fiecare din cazurile de mai jos

1) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$, 2) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, 3) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$,

4) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$, 5) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

R: 1) $e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} - e^t - 2e^{3t} & e^t - e^{3t} \\ 2e^{3t} - 2e^t & 2e^t - e^{3t} \end{bmatrix}$.

2) $e^{\mathbf{A}t} = \frac{e^t}{2} [(t^2 - 2t + 2)\mathbf{I} + (-2t^2 + 2t)\mathbf{A} + t^2\mathbf{A}^2]$.

3) $e^{\mathbf{A}t} = (4e^t - 3e^{2t} + 2te^{2t})\mathbf{I} + (4e^{2t} - 3te^{2t} - 4e^t)\mathbf{A} + (e^t - e^{2t} + te^{2t})\mathbf{A}^2$.

4) $e^{\mathbf{A}t} = (4e^{t} - 6e^{2t} + 4e^{3t} - e^{4t})\,\mathbf{I} + \left(-\dfrac{13}{3}e^{t} + \dfrac{19}{2}e^{2t} - 7e^{3t} + \dfrac{11}{6}e^{4t}\right)\mathbf{A} +$

$+\left(\dfrac{3}{2}e^{t} - 4e^{2t} + \dfrac{7}{2}e^{3t} - e^{4t}\right)\mathbf{A}^2 + \left(-\dfrac{1}{6}e^{t} + \dfrac{1}{2}e^{2t} - \dfrac{1}{2}e^{3t} + \dfrac{1}{6}e^{4t}\right)\mathbf{A}^3.$

5) $e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{I} + t\mathbf{A} + \dfrac{1}{2}t^2\mathbf{A}^2.$

34. Să se alcătuiască schema logică şi să se scrie programul FORTRAN pentru algoritmul „metoda lui Jacobi" de găsire a valorilor şi vectorilor proprii ale unei matrice reale simetrice.

Indicaţie (Figurile 1.6, 1.7, 1.8, 1.9).

Pe etape se procedează astfel:

a) matricea unitate este depusă în **U**, sînt calculate NORM şi DIAG;

b) alegerea celui mai mare element nediagonal;

c) K, L conţin indicii linie şi coloană ai celui mai mare element nediagonal;

d) se calculează $C = \cos\theta$ şi $S = \sin\theta$;

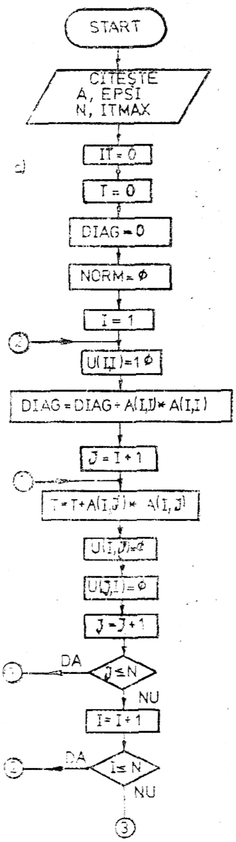


Fig. 1.6.

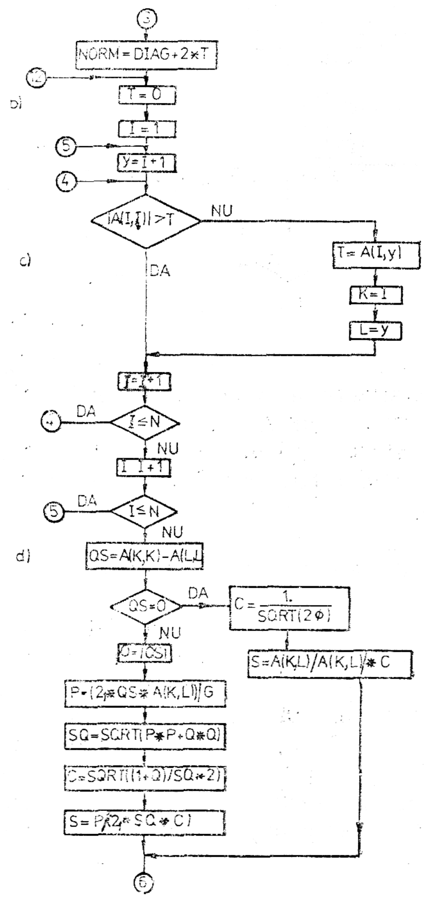


Fig. 1.7.

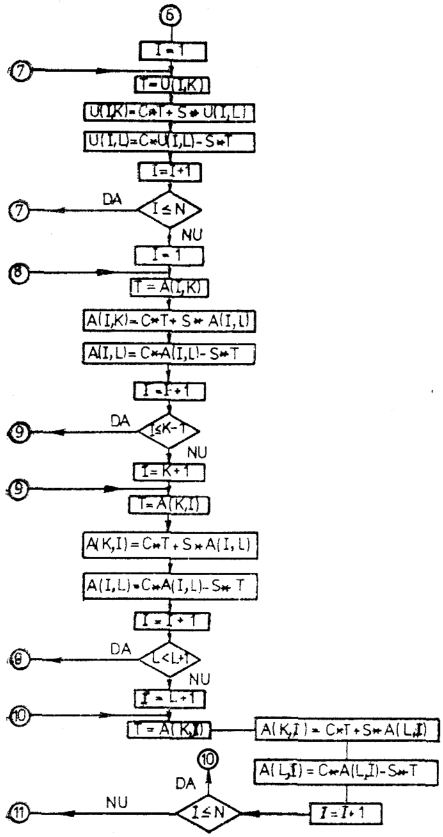


Fig. 1.8.

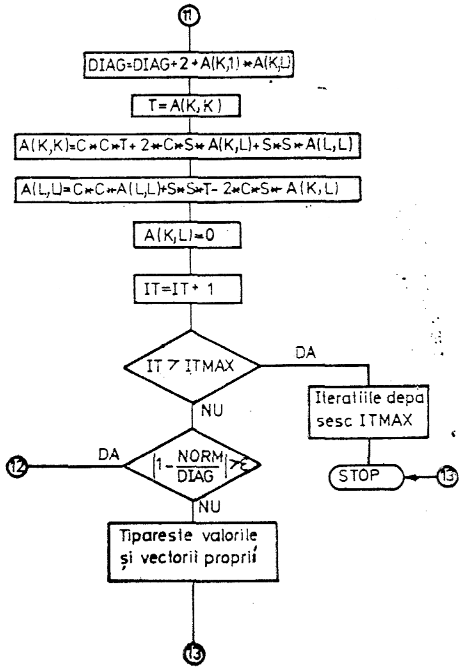


Fig. 1.9.

e) matricele **U** și **A** sînt necalculate. Deoarece $\mathbf{M} = {}^t\mathbf{UAU}$ este totdeauna simetrică, vom lucra tot timpul numai în partea superioară triunghiulară a lui **A**;

f) testăm dacă numărul de iterații depășește IT MAX și dacă este satisfăcut testul referitor la suma de pătrate a elementelor de pe diagonală.

§ 5. FORME BILINIARE ȘI PĂTRATICE

5.1. Fie **V** un spațiu vectorial peste un cîmp $\boldsymbol{K}$. O funcție $\mathcal{A}: \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \boldsymbol{K}$, $(x, y) \to \mathcal{A}(x, y)$, care este liniară în raport cu fiecare argument se numește *formă (funcțională) biliniară* sau *tensor covariant de ordinul doi* pe **V**.

O formă biliniară $\mathcal{A}$ se numește simetrică dacă $\mathcal{A}(x, y) = \mathcal{A}(y, x)$, $\forall x, y \in \mathbf{V}$.

5.2. Fie $\mathbf{V}_n$ un spațiu vectorial n-dimensional peste cîmpul $\boldsymbol{K}$. Fixăm o bază în $\mathbf{V}_n$ și notăm cu $x_1, x_2, \ldots, x_n$ coordonatele vectorului x și $y_1, y_2, \ldots, y_n$ coordonatele vectorului y. Vectorului x i se atașează matricea coloană $\mathbf{X} = [x_j]$, vectorului y i se atașează matricea coloană $\mathbf{Y} = [y_j]$, iar formei biliniare i se atașează matricea pătratică $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ astfel încît expresiile explicită, respectiv matriceală, ale lui $\mathcal{A}(x, y)$ sînt $\mathcal{A}(x, y) = \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_i\, y_j$, respectiv

$\mathcal{A}(x, y) = {}^t\mathbf{XAY}$. Dacă matricea $\mathbf{A}$ este nesingulară (singulară), atunci $\mathcal{A}$ se numește *nedegenerată (degenerată)*. În general, rangul matricei $\mathbf{A}$ se numește *rangul formei biliniare* $\mathcal{A}$. Forma biliniară $\mathcal{A}$ este simetrică dacă și numai dacă matricea asociată $\mathbf{A}$ este simetrică.

Fie $\mathbf{A}$ matricea atașată formei biliniare $\mathcal{A}$ în raport cu o bază a lui $\mathbf{V}_n$ și fie $\mathbf{S}$ matricea de trecere de la vechea bază la o nouă bază. Matricea atașată lui $\mathcal{A}$ în raport cu noua bază a lui $\mathbf{V}_n$ este $\mathbf{B} = {}^t\mathbf{SAS}$.

5.3. O aplicație $\mathcal{Q}: \mathbf{V} \to \boldsymbol{K}$ cu proprietatea că există o formă biliniară și simetrică $\mathcal{A}$ pe $\mathbf{V}$ astfel încît $\mathcal{Q}(x) = \mathcal{A}(x, x)$ se numește *formă (funcțională) pătratică* pe $\mathbf{V}$; forma biliniară $\mathcal{A}$ care intervine în această definiție se mai numește și *forma polară* sau *forma dedublată* a lui $\mathcal{Q}$.

5.4. O formă pătratică $\mathcal{Q}$ se numește *pozitiv semidefinită (negativ semidefinită)* dacă $\mathcal{Q}(x) \geqslant 0$ (respectiv $\leqslant 0$), $\forall x$. O formă pătratică $\mathcal{Q}$ se numește *pozitiv definită* (negativ definită) dacă $\mathcal{Q}(x) > 0$ (respectiv <0), $\forall x \neq 0$.

O formă biliniară simetrică $\mathcal{A}$ se numește *pozitiv definită (negativ definită, pozitiv semidefinită, negativ semidefinită)* dacă forma pătratică asociată $\mathcal{Q}$ are această proprietate.

O formă biliniară simetrică și pozitiv definită este un produs scalar și uneori se numește *tensor metric* sau *metrică riemanniană*.

5.5. Fixăm o bază în $\mathbf{V}_n$. Matricea simetrică $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ atașată formei biliniare simetrice $\mathcal{A}$ se numește *matricea asociată formei pătratice* $x \to \mathcal{Q}(x) = \mathcal{A}(x, x)$. Expresiile explicită și matriceală ale lui $\mathcal{Q}(x)$ sînt respectiv

$$\mathcal{Q}(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_i x_j, \quad \mathcal{Q}(x) = {}^t\mathbf{XAX}.$$

5.6. *Forme pătratice pe spații vectoriale reale* $\mathbf{V}_n$.

1) Se spune că forma pătratică $\mathcal{Q}: \mathbf{V}_n \to \boldsymbol{R}$ *a fost redusă la forma canonică* dacă s-a ales o bază în $\mathbf{V}_n$ astfel încît matricea simetrică $\mathbf{A}$ atașată lui $\mathcal{Q}$ să fie o matrice diagonală. Pentru reducerea efectivă a unei forme pătratice la forma canonică se cunosc mai multe metode:

(i) *Metoda lui Gauss.* Presupunînd că $\mathcal{Q}(x)$ posedă un termen în x_n^2, putem scrie $\mathcal{Q}(x) = a_{nn}x_n^2 + 2\sum_{i=1}^{n-1} a_{in}x_i x_n + \sum_{\substack{i<n\\ j<n}} a_{ij}x_i x_j = a_{nn}\left(x_n + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_{in}}{a_{nn}}\, x_i\right)^2 + \sum_{\substack{i<n\\ j<n}} a'_{ij}x_i x_j$. În forma pătratică $\sum_{\substack{i<n\\ j<n}} a'_{ij}x_i x_j$ nu figurează decît coordonate de indice inferior lui $n-1$ și de aceea ea poate fi privită ca o formă pe $\mathbf{V}_{n-1} \subset \mathbf{V}_n$.

Dacă $\mathcal{Q}$ nu conține pătrate, atunci în mod necesar trebuie să conțină cel puțin un termen nenul $a_{ij}x_i x_j$, $i \neq j$.

Schimbarea $x'_i = \dfrac{x_i + x_j}{2}$, $x'_j = \dfrac{x_i - x_j}{2}$ dă $a_{ij}(x_i'^2 - x_j'^2)$. Avînd un termen pătratic, putem aplica raționamentul de mai sus.

(ii) *Metoda valorilor proprii.* Deoarece orice matrice simetrică reală are valori proprii reale, rezultă că expresia $\mathcal{Q}(x)$ a oricărei forme pătratice $\mathcal{Q}: \mathbf{V}_n \to \boldsymbol{R}$ poate fi redusă prin $\mathbf{X} = \mathbf{SX}'$, la forma canonică $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i'^2$, unde $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sînt valorile proprii ale matricei asociate $\mathbf{A}$ (fiecare valoare proprie fiind scrisă de atîtea ori cît este multiplicitatea sa), iar $\mathbf{S}$ este matricea vectorilor proprii (coloane) ortonormați.

(iii) *Metoda lui Jacobi*. Fie $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ matricea simetrică atașată lui $\mathcal{Q}$ căreia îi atașăm determinanții

$$\Delta_0 = 1,\quad \Delta_1 = a_{11},\quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \ldots$$

Dacă $\Delta_i \neq 0$, $i = 1, 2, \ldots,$ atunci $\mathcal{Q}(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\Delta_{i-1}}{\Delta_i} x_i'^2$, unde $x_i' = x_i + \sum\limits_{j=i+1}^{n} c_{ij} x_j$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$ și $y_n = x_n$. Numerele c_{ij} sînt funcții raționale de a_{ij}.

2) Expresia unei forme pătratice de rang r poate fi adusă printr-o schimbare a bazei la tipul canonic

$$\mathcal{Q}(x) = (x_1')^2 + \ldots + (x_p')^2 - (x_{p+1}')^2 \ldots - (x_r')^2.$$

În această expresie numărul termenilor pozitivi (negativi) nu depinde de alegerea bazei.

Perechea $(p, r-p)$ se numește *signatura* formei pătratice $\mathcal{Q}$.

3) Fie $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ matricea simetrică atașată lui $\mathcal{Q}$. Forma pătratică $\mathcal{Q}: V_n \to \boldsymbol{R}$ este pozitiv definită dacă și numai dacă una dintre următoarele condiții este îndeplinită:

(i) are signatura $(n, 0)$;

(ii) determinanții

$$|a_{11}|,\quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \text{ etc.}$$

sînt strict pozitivi;

(iii) valorile proprii ale matricei $\mathbf{A}$ sînt strict pozitive.

Exerciții și probleme

1. Fie $\mathbf{P}$ spațiul vectorial al funcțiilor polinomiale reale care au cel mult gradul trei și fie $\mathcal{A}: \mathbf{P} \times \mathbf{P} \to \boldsymbol{R}$ funcția definită prin $\mathcal{A}(x, y) = \int_0^1 \int_0^1 x(t)\, y(s)\, dt\, ds.$

1) Să se arate că $\mathcal{A}$ este o formă biliniară.

2) Să se determine matricea ei în baza canonică a spațiului și apoi matricea în baza $\{t^2 - 1,\ t^2 - t,\ t^2,\ t^2 - t^3\}$.

Soluție. 1) $\mathcal{A}$ este liniară în ambele argumente. Într-adevăr folosind proprietățile integralelor duble avem

$$\mathcal{A}(\lambda x_1 + \mu x_2, y) = \int_0^1 \int_0^1 [\lambda x_1(t) + \mu x_2(t)]\, y(s)\, dt\, ds =$$

$$= \lambda \int_0^1 \int_0^1 x_1(t)\, y(s)\, dt\, ds + \mu \int_0^1 \int_0^1 x_2(t)\, y(s)\, dt\, ds = \lambda \mathcal{A}(x_1, y) + \mu \mathcal{A}(x_2, y);$$

$\lambda, \mu \in \boldsymbol{R}$.

Analog $\mathcal{A}(x, \alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha \mathcal{A}(x, y_1) + \beta \mathcal{A}(x, y_2)$, $\alpha, \beta \in \boldsymbol{R}$.

2) Elementele matricei **A**, atașată formei biliniare în baza canonică $\{1, t, t^2, t^3\}$, sînt

$$a_{11} = \mathcal{A}(1, 1) = \int_0^1\int_0^1 dt\,ds = \int_0^1 dt\int_0^1 ds = t\,|_0^1\, s\,|_0^1 = 1,$$

$$a_{12} = \mathcal{A}(1, s) = \int_0^1\int_0^1 1\cdot s\,dt\,ds = \int_0^1 dt\int_0^1 s\,ds = \frac{1}{2},$$

$$a_{13} = \mathcal{A}(1, s^2) = \int_0^1\int_0^1 1\cdot s^2\,dt\,ds = \int_0^1 dt\int_0^1 s^2\,ds = \frac{1}{3},$$

$$a_{14} = \mathcal{A}(1, s^3) = \int_0^1\int_0^1 1\cdot s^3\,dt\,ds = \int_0^1 dt\int_0^1 s^3\,ds = \frac{1}{4},$$

$$a_{22} = \mathcal{A}(t, s) = \int_0^1\int_0^1 t\cdot s\,dt\,ds = \int_0^1 t\,dt\int_0^1 s\,ds = \frac{t^2}{2}\Big|_0^1\,\frac{s^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{4},$$

$$a_{23} = \mathcal{A}(t, s^2) = \int_0^1\int_0^1 ts^2\,dt\,ds = \int_0^1 t\,dt\int_0^1 s^2\,ds = \frac{t^2}{2}\Big|_0^1\,\frac{s^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{6}\ \text{etc.}$$

Datorită faptului că forma biliniară este simetrică, matricea sa este

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/2 & 1/4 & 1/6 & 1/8 \\ 1/3 & 1/6 & 1/9 & 1/12 \\ 1/4 & 1/8 & 1/12 & 1/16 \end{bmatrix}.$$

Notăm cu B matricea formei în noua bază. Avem $B = {}^tSAS$, unde

$$S = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

este matricea de trecere. Efectuăm calculele și obținem

$$B = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 4 & 1 & -2 & -1/2 \\ 1 & 4 & -1/2 & -1/8 \\ -2 & -1/2 & 1 & 1/4 \\ -1/2 & -1/8 & 1/4 & 1/16 \end{bmatrix}.$$

2. Se dă forma biliniară

$$\mathcal{A}(x, y) = x_1y_2 - x_2y_1 + x_1y_3 - x_3y_1 + x_1y_4 - x_4y_1 + x_2y_3 - \\ - x_3y_2 + x_2y_4 - x_4y_2 + x_3y_4 - x_4y_3.$$

Să se scrie matriceal și să se găsească matricea corespunzătoare formei biliniare în raport cu baza $f_1 = (1, 1, 0, 0)$, $f_2 = (0, 1, 1, 0)$, $f_3 = (0, 1, 0, 1)$, $f_4 = (1, 0, 0, 1)$.

R:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 & 1 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

3. Să se precizeze care din următoarele funcții sînt forme biliniare și în caz afirmativ să se găsească spațiul nul relativ la al doilea argument.

1) $\mathcal{A}: \mathbf{P}_n \times \mathbf{P}_n \to \boldsymbol{R}$, $\mathcal{A}(x, y) = \int_0^2 x(t)[y(t) + k]\,\mathrm{d}t$, $k \in \boldsymbol{R} - \{0\}$.

2) $\mathcal{A}: \boldsymbol{R}^3 \times \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}$, $\mathcal{A}(x, y) = x_1y_2 - x_2y_1 + x_1y_3 - x_3y_1 + k$, $k \in \boldsymbol{R} - \{0\}$.

3) $\mathcal{A}: \boldsymbol{R}^4 \times \boldsymbol{R}^4 \to \boldsymbol{R}$, $\mathcal{A}(x, y) = 2x_1y_1 + x_2y_1 + x_2y_2 + 3x_3y_3 + x_4y_1 + x_4y_4$.

4) $\mathcal{A}: \boldsymbol{R}^4 \times \boldsymbol{R}^4 \to \boldsymbol{R}$, $\mathcal{A}(x, y) = 4x_1y_1 - 2x_1y_2 + x_2y_3 + x_2y_4 + 2x_3y_1 + x_3y_3 - 2x_4y_1 + x_4y_2$.

Soluție. 1) Funcția este liniară numai în primul argument; 2) Nu; 3) Da. Fie forma biliniară $\mathcal{A}: \mathbf{U} \times \mathbf{V} \to \boldsymbol{K}$. Mulțimea vectorilor $y \in \mathbf{V}$ pentru care $\mathcal{A}(x, y) = 0$, $\forall x \in \mathbf{U}$ formează un subspațiu liniar al lui $\mathbf{V}$ pe care-l notăm $\mathbf{W}$ și se numește *spațiul nul al lui $\mathcal{A}$ relativ la al doilea argument.* În cazul nostru $\sum_{=1}^{4} \sum_{=1}^{4} a_{ij}x_iy_j = 0\ \forall x_i$, $i = 1, 2, 3, 4$, deci $\sum_{j=1}^{4} a_{ij}y_j = 0$ sau

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \begin{aligned} 2y_1 \qquad\qquad\qquad &= 0 \\ y_1 + y_2 \qquad\qquad &= 0 \\ 3y_3 \qquad &= 0 \\ y_1 \qquad\qquad + y_4 &= 0 \end{aligned}$$

Am obținut un sistem liniar și omogen care admite numai soluția banală. Prin urmare $\mathbf{W} = \{0\}$; acest rezultat este evident deoarece forma biliniară este nedegenerată; rang $[a_{ij}] = 4$.

4) Da; matricea formei biliniare este

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Sistemul liniar și omogen $\mathbf{A}y = 0$ este $4y_1 - 2y_2 = 0$, $y_3 + y_4 = 0$, $2y_1 + y_3 = 0$, $-2y_1 + y_2 = 0$. Vectorul soluție este $v = (a/2, a, -a, a)$, $a \in \boldsymbol{R}$; prin urmare spațiul nul relativ la al doilea argument este un subspațiu vectorial unidimensional.

4. Fie $\mathbf{V}$ un spațiu vectorial și $\mathcal{A}$ o formă biliniară simetrică pe $\mathbf{V}$, iar $\mathbf{U} \subset \mathbf{V}$ un subspațiu în $\mathbf{V}$. Să se arate că

1) mulțimea, $\mathbf{U}^{\perp} = \{y \in \mathbf{V} \mid \mathcal{A}(x, y) = 0,\ x \in \mathbf{U}\}$ este un subspațiu al lui $\mathbf{V}$ *(complementul ortogonal* al lui $\mathbf{U}$ în $\mathbf{V}$ față de $\mathcal{A}$*)*;

2) dacă $\{e_1, e_2, \ldots, e_s\} \subset \mathbf{U}$ este o bază în $\mathbf{U}$, atunci $x \in \mathbf{U}^{\perp} \Leftrightarrow \mathcal{A}(e_1, x) = \ldots = \mathcal{A}(e_s, x) = 0$;

3) dacă $\mathbf{V}$ este finit dimensional, atunci $\dim \mathbf{V} \leqslant \dim \mathbf{U} + \dim \mathbf{U}^{\perp}$.

Soluție. 1) Fie $y_1, y_2 \in \mathbf{V}$ așa încît $\mathcal{A}(x, y_1) = \mathcal{A}(x, y_2) = 0$ și $\alpha_1, \alpha_2 \in \boldsymbol{K}$. Deoarece $\alpha_1y_1 + \alpha_2y_2 \in \mathbf{V}$ și $\mathcal{A}$ este biliniară, rezultă $\mathcal{A}(x, \alpha_1y_1 + \alpha_2y_2) = \alpha_1\mathcal{A}(x, y_1) + \alpha_2\mathcal{A}(x, y_2) = 0$. Deci $\alpha_1y_1 + \alpha_2y_2 \in \mathbf{U}^{\perp}$.

2) Dacă $x \in \mathbf{U}^{\perp}$, rezultă $\mathcal{A}(x, y)=0$, $\forall y \in \mathbf{U}$ și deci în particular $\mathcal{A}(x, e_j) = 0$, $j = 1, \ldots, s$. Reciproc din $\mathcal{A}(e_1, y) = \mathcal{A}(e_2, y) = \ldots = \mathcal{A}(e_s, y) = 0$, rezultă $\mathcal{A}(x, y) = 0$, $\forall x \in \mathbf{U}$, deoarece putem scrie $x = \sum_{k=1}^{s} \alpha_k e_k$, $\alpha_k \in \boldsymbol{K}$ și deci $\mathcal{A}(x, y) = \sum_{k=1}^{s} \alpha_k \mathcal{A}(e_k, y) = 0$. Prin urmare $x \in \mathbf{U}^{\perp}$.

3) Fie $\dim \mathbf{V} = n$ și $\{u_1, \ldots, u_n\}$ o bază a spațiului $\mathbf{V}$. Notînd cu $y_1, \ldots, y_n$ coordonatele vectorului y față de această bază, sistemul de ecuații $\mathcal{A}(e_1, y) = \ldots = \mathcal{A}(e_s, y) = 0$ devine

$$\begin{array}{c} \mathcal{A}(e_1, u_1)\, y_1 + \ldots + \mathcal{A}(e_1, u_n)\, y_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathcal{A}(e_s, u_1)\, y_1 + \ldots + \mathcal{A}(e_s, u_n)\, y_n = 0. \end{array}$$

Rangul acestui sistem este cel mult s, iar spațiul soluțiilor sale este $\mathbf{U}^{\perp}$ și deci $\dim \mathbf{U}^{\perp} \geqslant n - s = \dim \mathbf{V} - \dim \mathbf{U}$.

5. Fie $\mathbf{V}$ un spațiu vectorial real n-dimensional, $\mathcal{A}$ o formă biliniară simetrică și nedegenerată pe $\mathbf{V}$ și $\mathbf{W} \subset \mathbf{V}$ un subspațiu vectorial k-dimensional. Definim $\mathbf{W}^{\perp} = \{v \in \mathbf{V} \mid \mathcal{A}(v, w) = 0, \ \forall w \in \mathbf{U}\}$. Să se arate că

1) $\mathbf{W}^{\perp}$ este un subspațiu $(n - k)$-dimensional,

2) $\mathbf{W}^{\perp\perp} = \mathbf{W}$,

3) $\mathbf{V} = \mathbf{W} \oplus \mathbf{W}^{\perp}$,

dacă și numai dacă restricția $\mathcal{A}|_{\mathbf{W}}$ este nedegenerată.

6. Fie $\mathbf{V}$ un spațiu euclidian complex și $\mathcal{T} : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ un endomorfism. Definim forma pătratică

$$x \to \mathcal{Q}(x) = (\mathcal{T}(x), x), \ x \in \mathbf{V}.$$

1) Să se arate că dacă $\mathcal{T}$ este hermitian, atunci $\mathcal{Q}(x) \in \boldsymbol{R}$, $\forall x \in \mathbf{V}$, iar dacă $\mathcal{T}$ este antihermitian, atunci $\mathcal{Q}(x)$ este pur imaginar, $\forall x \in \mathbf{V}$.

2) Să se verifice relațiile

$$\mathcal{Q}(tx) = t\bar{t}\mathcal{Q}(x), \ \forall t \in \boldsymbol{C},$$

$$\mathcal{Q}(x + y) = \mathcal{Q}(x) + \mathcal{Q}(y) + (\mathcal{T}(x), y) + (\mathcal{T}(y), x), \ \forall x, y \in \mathbf{V},$$

și să se scrie formula corespunzătoare pentru $\mathcal{Q}(x + ty)$.

3) Să se verifice implicația $\mathcal{Q}(x) = 0, \ \forall x \in \mathbf{V} \Rightarrow \mathcal{T}(x) = 0, \ \forall x \in \mathbf{V}$.

4) Să se arate că dacă $\mathcal{Q}(x)$ este real $\forall x \in \mathbf{V}$, atunci $\mathcal{T}$ este hermitian.

7. Se dă forma pătratică $x \to \mathcal{Q}(x) = 2x_1x_2 - 6x_1x_3 - 6x_2x_3$.

1) Să se scrie matriceal și să se determine rangul formei.

2) Să se găsească expresia canonică prin metoda Gauss și să se stabilească matricea de trecere.

Soluție

1) $$\mathcal{Q}(x) = [x_1 \ x_2 \ x_3] \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -3 \\ -3 & -3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \ \text{rang } \mathcal{Q} = 3.$$

2) Întrucît toți coeficienții $a_{ii} = 0$, $i = 1, 2, 3$, vom face schimbarea $x_1 = y_1 - y_2$, $x_2 = y_1 + y_2$, $x_3 = y_3$. Obținem $\mathcal{Q}(x) = 2y_1^2 - 2y_2^2 - 12y_1y_3$. Grupăm termenii care conțin pe y_1, $\mathcal{Q}(x) = \frac{1}{2}(2y_1 - 6y_3)^2 - 2y_2^2 - 18y_3^2$.

Prin schimbarea $z_1 = 2y_1 - 6y_3$, $z_2 = y_2$, $z_3 = y_3$, obținem forma canonică $\mathcal{Q}(x) = \frac{1}{2} z_1^2 - 2z_2^2 - 18z_3^2$.

S-au efectuat următoarele transformări liniare $x \xrightarrow{\mathcal{T}_1} y \xrightarrow{\mathcal{T}_2} z$ sau matriceal $\mathbf{Z} = \mathbf{T}_2\,\mathbf{T}_1\,\mathbf{X}$, unde $\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{T}_2\,\mathbf{T}_1$, $\mathbf{S}$ fiind matricea de trecere.

$$\mathbf{S}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -6 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ și deci}$$

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -6 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

Găsim

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 & 3 \\ \frac{1}{2} & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Se știe că matricea atașată lui $\mathcal{Q}$ în raport cu noua bază este $\mathbf{B} = {}^t\mathbf{S}\mathbf{A}\mathbf{S}$. Deci

$${}^t\mathbf{SAS} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -3 \\ -3 & -3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 & 3 \\ \frac{1}{2} & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -18 \end{bmatrix}.$$

Am obținut matricea diagonală atașată formei canonice $z \to \mathcal{Q}(x) = \frac{1}{2} z_1^2 - 2z_2^2 - 18z_3^2$.

8. Se dă forma pătratică $x \to \mathcal{Q}(x) = 5x_1^2 + 6x_2^2 + 4x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3$. Utilizînd metoda lui Gauss, metoda lui Jacobi și respectiv metoda valorilor proprii, să se aducă $\mathcal{Q}(x)$ la expresia canonică și să se verifice teorema de inerție.

Soluție. Metoda lui Gauss. Grupăm termenii care conțin pe x_1; $\mathcal{Q}(x) = (5x_1^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3) + 6x_2^2 + 4x_3^2 = \frac{1}{5}(5x_1 - 2x_2 - 2x_3)^2 + \frac{26}{5}x_2^2 + \frac{16}{5}x_3^2 - \frac{8}{5}x_2x_3$. Facem transformarea $y_1 = 5x_1 - 2x_2 - 2x_3$, $y_2 = x_2$, $y_3 = x_3$. Obținem $\mathcal{Q}(x) = \frac{1}{5}y_1^2 + \frac{26}{5}y_2^2 + \frac{16}{5}y_3^2 - \frac{8}{5}y_2y_3$. Grupăm termenii care conțin pe y_2, apoi facem transformarea $z_1 = y_1$, $z_2 = \frac{26}{5}y_2 - \frac{4}{5}y_3$, $z_3 = y_3$. Obținem expresia canonică $\mathcal{Q}(x) = \frac{1}{5}z_1^2 + \frac{5}{26}z_2^2 + \frac{40}{13}z_3^2$ cu transformarea $z_1 = 5x_1 - 2x_2 - 2x_3$, $z_2 = \frac{26}{5}x_2 - \frac{4}{5}x_3$, $z_3 = x_3$.

Metoda lui Jacobi. Matricea simetrică atașată lui $\mathcal{Q}$ este

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -2 & -2 \\ -2 & 6 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Minorii principali sînt

$$\Delta_0 = 1,\ \Delta_1 = 5,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} = 26,\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 5 & -2 & -2 \\ -2 & 6 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 80,$$

toți nenuli și pozitivi.

Forma canonică este $\mathcal{Q}(x) = \frac{1}{5}y_1^2 + \frac{5}{26}y_2^2 + \frac{13}{40}y_3^2$, unde (y_1, y_2, y_3) sînt coordonatele vectorului în noua bază $\{e_1', e_2', e_3'\}$. Relațiile de legătură între vectorii bazei noi și celei vechi sînt

$$e_1' = \frac{1}{5}e_1,\ e_2' = \frac{1}{13}e_1 + \frac{5}{26}e_2,\ e_3' = \frac{3}{20}e_1 + \frac{1}{20}e_2 + \frac{13}{40}e_3.$$

Elementele c_{ij} ale matricei de trecere le găsim din modul cum se construiește noua bază; anume $e_1' = c_{11}e_1$, $e_2' = c_{21}e_1 + c_{22}e_2$, $e_3' = c_{31}e_1 + c_{32}e_2 + c_{33}e_3$. Impunem condițiile $\mathcal{A}(e_k', e_i) = 0$, $i \neq k$; $\mathcal{A}(e_k', e_k) = 1$, știind că $\mathcal{A}(e_k, e_i) = a_{ki}$ sînt elementele matricei $\mathbf{A}$ atașată formei pătratice $\mathcal{Q}$.

Metoda valorilor proprii. Matricea reală $\mathbf{A}$ atașată formei pătratice $\mathcal{Q}$ este o matrice simetrică și deci are valori proprii reale. Aceste valori proprii vor constitui coeficienții formei canonice. Ne propunem să determinăm valorile proprii și vectorii proprii corespunzători transformării a cărei matrice este $\mathbf{A}$.

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & -2 & -2 \\ -2 & 6-\lambda & 0 \\ -2 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Obținem valorile proprii distincte $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 5$, $\lambda_3 = 8$ și deci vectorii proprii corespunzători vor fi ortogonali.

Pentru $\lambda_1 = 2$ coordonatele vectorului propriu corespunzător e_1' vor fi date de sistemul $3e_{11} - 2e_{21} - 2e_{31} = 0, -2e_{11} + 4e_{21} = 0, -2e_{11} + 2e_{31} = 0$. Obținem $e_1' = (2, 1, 2)$; prin normalizare $\frac{e_1'}{\| e_1' \|} = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

Analog pentru $\lambda_2 = 5$, obținem $\frac{e_2'}{\| e_2' \|} = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$.

Coordonatele vectorului e_3' se obțin fie ca soluție a sistemului $-3e_{31} - 2e_{32} - 2e_{33} = 0, -2e_{31} - 2e_{32} = 0, -2e_{31} - 4e_{33} = 0$, fie din condițiile de ortogonalitate $(e_3', e_1') = 0$ și $(e_3', e_2') = 0$, găsim $\frac{e_3'}{\| e_3' \|} = \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$.

Transformarea ortogonală care ne conduce la forma canonică este $x_1 = \frac{2}{3} x_1' + \frac{1}{3} x_2' + \frac{2}{3} x_3'$, $x_2 = \frac{1}{3} x_1' + \frac{2}{3} x_2' - \frac{2}{3} x_3'$, $x_3 = \frac{2}{3} x_1' - \frac{2}{3} x_2' - \frac{1}{3} x_3'$. Prin această transformare forma pătratică devine

$$\mathcal{Q}(x) = 2x_1'^2 + 5x_2'^2 + 8x_3'^2.$$

Mai facem observația că forma canonică de mai sus s-a obținut cu ajutorul unei baze ortonormate.

Observații. Am redus $\mathcal{Q}$ la forma canonică prin trei metode diferite și am obținut o sumă de trei pătrate; formele canonice au aceeași signatură $(3, 0)$, prin urmare se verifică teorema de inerție.

Forma pătratică este pozitiv definită, deoarece se verifică oricare din condițiile (i) signatura este $(3, 0)$ sau (ii) $\Delta_1 = 5$, $\Delta_2 = 26$, $\Delta_3 = 80$, toți determinanții fiind strict pozitivi sau (iii) valorile proprii ale matricei $\mathbf{A}$ sînt strict pozitive, $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 5$, $\lambda_3 = 8$.

9. Să se arate că forma pătratică $x \to \mathcal{Q}(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{1 + |j - i|} \cdot x_i x_j$ este pozitiv definită.

Soluție. Considerăm funcțiile $t \to b_{ij}(t) = t^{|i-j|}$ cu ajutorul cărora fixăm matricea $\mathbf{B} = [b_{ij}(t)]$.

Minorii principali ai acestei matrice sînt

$$\Delta_1 = 1,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & t \\ t & 1 \end{vmatrix} = 1 - t^2,\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & t & t^2 \\ t & 1 & t \\ t^2 & t & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & t & t^2 \\ 0 & 1-t^2 & t-t^3 \\ 0 & 1-t^3 & t-t^4 \end{vmatrix} =$$

$= (1 - t^2)^2$. Prin inducție se poate arăta că minorul de ordin h este

$$\Delta_h = \begin{vmatrix} 1 & t & t^2 & \dots & t^{h-1} \\ t & 1 & t & \dots & t^{h-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ t^{h-1} & t^{h-2} & t^{h-3} & \dots & 1 \end{vmatrix} = (1 - t^2)^{h-1}.$$

Toți minorii $\Delta_h (h = 1, 2, \dots, n)$ sînt strict pozitivi pentru $t \in (0, 1)$; prin urmare forma pătratică $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(t)\, x_i x_j$ este pozitiv definită, $\forall t \in (0, 1)$. Se constată că

$$\int_0^1 b_{11}(t)\, dt = \int_0^1 1 \cdot dt = 1 = a_{11},\quad \int_0^1 b_{12}(t)\, dt = \int_0^1 t\, dt = \frac{1}{2} = a_{12}.$$

În general

$$\int_0^1 b_{ij}(t)\,dt = \int_0^1 t^{|i-j|}\,dt = \left.\frac{t^{1+|i-j|}}{1+|i-j|}\right|_0^1 = \frac{1}{1+|i-j|} = a_{ij}.$$

Putem scrie

$$0 < \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij}(t)\, x_i x_j\right) dt = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\int_0^1 b_{ij}(t)\,dt\right) x_i x_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j, \quad \forall x \neq 0,$$

adică forma pătratică $\mathcal{Q}$ este pozitiv definită.

10. Să se reducă la forma canonică

1) $\mathcal{Q}(x) = \sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{i<j} x_i x_j, \qquad x = (x_1, \ldots, x_n) \in \boldsymbol{R}^n.$

2) $\mathcal{Q}(x) = \sum_{i<j} x_i x_j, \qquad x = (x_1, \ldots, x_n) \in \boldsymbol{R}^n.$

3) $\mathcal{Q}(x) = \sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{3}{2} \sum_{i<j} x_i x_j, \quad x = (x_1, \ldots, x_n) \in \boldsymbol{R}^n.$

Soluție. 1) În raport cu baza canonică, $\mathcal{Q}(x) = \sum_{i=1}^n x_i^2 + \frac{1}{2} \cdot \sum_{i \neq j} x_i x_j$ are matricea

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \ldots & 1/2 \\ 1/2 & 1 \quad \ldots & 1/2 \\ \ldots & \ldots\ \ldots & \ldots \\ 1/2 & 1/2 \ldots & 1 \end{bmatrix}.$$

Ecuația caracteristică

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1/2 \ \ldots & 1/2 \\ 1/2 & 1-\lambda \ldots & 1/2 \\ \ldots & \ldots \quad \ldots & \ldots \\ 1/2 & 1/2 \ \ldots & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

se mai scrie

$$(1/2 - \lambda)^{n-1}\left(\frac{n+1}{2} - \lambda\right) = 0 \text{ și are rădăcinile}$$

$\lambda_1 = \frac{n+1}{2}$, $\lambda_2 = \lambda_3 = \ldots = \lambda_n = 1/2$. În concluzie, expresia canonică este

$$\mathcal{Q}(x) = \frac{n+1}{2} x_1'^2 + \frac{1}{2}(x_2'^2 + x_3'^2 + \ldots + x_n'^2).$$

11. Dîndu-se următoarele forme pătratice, să se găsească pentru fiecare o bază ortonormată față de care forma pătratică să aibă o expresie canonică.

1) $\mathcal{Q}: \boldsymbol{R}^4 \to \boldsymbol{R}$, $\mathcal{Q}(x) = 2x_1x_2 - 6x_1x_3 - 6x_2x_4 + 2x_3x_4$

2) $\mathcal{Q}: \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}$, $\mathcal{Q}(x) = 3x_1^2 + 6x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 - 8x_1x_3 - 4x_2x_3$

3) $\mathcal{Q}: \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}$, $\mathcal{Q}(x) = -x_1^2 + x_2^2 - 5x_3^2 + 6x_1x_3 + 4x_2x_3$.

R: 1) $e_1' = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, $e_2' = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $e_3' = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $e_4' = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$; $\mathcal{Q}(x) = -4x_1'^2 - 2x_2'^2 + 2x_3'^2 + 4x_4'^2$;

2) $e_1' = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{2}{3}, \frac{\sqrt{2}}{6}\right)$, $e_2' = \left(0, \frac{1}{3}, -\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$, $e_3' = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{2}{3}, \frac{\sqrt{2}}{6}\right)$;
$\mathcal{Q}(x) = 7x_1'^2 - 2x_2'^2 + 7x_3'^2$.

3) $e_1' = \left(\frac{2}{\sqrt{21}}, \frac{1}{\sqrt{21}}, -\frac{4}{\sqrt{21}}\right)$, $e_2' = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$, $e_3' = \left(\frac{3}{\sqrt{14}},\right.$
$\left.-\frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{1}{\sqrt{14}}\right)$; $\mathcal{Q}(x) = -7x_1'^2 + 2x_2'^2$.

12. Fie $\mathbf{F} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\boldsymbol{R})$ și $\mathbf{I}$ matricea unitate din $\mathcal{M}_{n\times n}(\boldsymbol{R})$.

1) Să se verifice că forma pătratică atașată matricei $\mathbf{G} = \mathbf{I} + {}^t\mathbf{F}\mathbf{F}$ este pozitiv definită.

2) Să se arate că dacă $\mathbf{F}^2 = -\mathbf{I}$, atunci n este par și $\det \mathbf{F} = 1$.

Soluție. 1) Evident ${}^t\mathbf{G} = {}^t\mathbf{I} + {}^t({}^t\mathbf{F}\mathbf{F}) = \mathbf{G}$, adică $\mathbf{G}$ este o matrice simetrică. Se observă că ${}^t\mathbf{X}\mathbf{G}\mathbf{X} = {}^t\mathbf{X}\mathbf{X} + {}^t\mathbf{X}({}^t\mathbf{F}\mathbf{F})\mathbf{X} = {}^t\mathbf{X}\mathbf{X} + {}^t(\mathbf{F}\mathbf{X})(\mathbf{F}\mathbf{X}) > 0$, $\forall \mathbf{X} \neq 0$.

2) Deoarece $\det \mathbf{F}^2 = (\det \mathbf{F})^2 = (-1)^n \det \mathbf{I} = (-1)^n$, iar $\mathbf{F}$ este reală, rezultă $n =$ par. Din $(\det \mathbf{F})^2 = 1$ deducem că $\det \mathbf{F}$ este sau -1 sau $+1$.

Pe de altă parte, ${}^t\mathbf{F}\mathbf{G} + \mathbf{G}\mathbf{F} = {}^t\mathbf{F} + {}^t\mathbf{F}({}^t\mathbf{F}\mathbf{F}) + \mathbf{F} + ({}^t\mathbf{F}\mathbf{F})\mathbf{F} = {}^t\mathbf{F} + {}^t(\mathbf{F}^2)\mathbf{F} + \mathbf{F} + {}^t\mathbf{F}\mathbf{F}^2 = 0$, adică matricea $\mathbf{G}\mathbf{F}$ este antisimetrică. Ținînd seama de relațiile $(\det \mathbf{G})(\det \mathbf{F}) = \det(\mathbf{G}\mathbf{F})$, $\det \mathbf{G} > 0$, și de faptul că determinantul unei matrice antisimetrice de ordin par este strict pozitiv, rezultă $\det \mathbf{F} = 1$.

13. Fie $\mathbf{V}_{2n}$ un spațiu vectorial euclidian raportat la o bază oarecare, fie $\mathbf{G}$ matricea atașată produsului scalar și $\mathbf{J}$ matricea atașată unei structuri tangente pe $\mathbf{V}$, adică $\mathbf{J}^2 = 0$ și rang $\mathbf{J} = n$. Să se arate că forma pătratică atașată matricei $\mathbf{H} = \mathbf{G}\mathbf{J} + {}^t\mathbf{J}\mathbf{G}$ are signatura (n, n).

Soluție. Matricea $\mathbf{H}$ este simetrică, ${}^t\mathbf{H} = {}^t(\mathbf{G}\mathbf{J} + {}^t\mathbf{J}\mathbf{G}) = {}^t(\mathbf{G}\mathbf{J}) + {}^t({}^t\mathbf{J}\mathbf{G}) = {}^t\mathbf{J}\,{}^t\mathbf{G} + {}^t\mathbf{G}\mathbf{J} = {}^t\mathbf{J}\mathbf{G} + \mathbf{G}\mathbf{J} = \mathbf{H}$. Alegem baza $\{v_1, \ldots, v_{2n}\}$ a lui $\mathbf{V}_{2n}$ astfel încît $\mathbf{J}v_a = v_{a+n}$, $a = 1, 2, \ldots, n$. În raport cu această bază avem

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \mathbf{I}_n & 0 \end{bmatrix} \text{ și } \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ {}^t\mathbf{B} & \mathbf{C} \end{bmatrix},$$ unde $\mathbf{A}$ și $\mathbf{C}$ sînt în mod necesar matrice pozitiv definite.

Rezultă $\mathbf{H} = \mathbf{G}\mathbf{J} + {}^t\mathbf{J}\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} + {}^t\mathbf{B} & \mathbf{C} \\ \mathbf{C} & 0 \end{bmatrix}$ și deci $\mathbf{H}$ este nedegenerată.

Alegem baza $\{u_1, \ldots, u_{2n}\}$ a lui $\mathbf{V}_{2n}$ astfel încît $\mathbf{J}u_a = u_{a+n}$, $\mathbf{G}(u_a, u_{a+n}) = 0$, $a = 1, 2, \ldots, n$. În raport cu această bază găsim

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \mathbf{I}_n & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & 0 \\ 0 & \mathbf{C} \end{bmatrix},$$ unde $\mathbf{A}$ și $\mathbf{C}$ sînt matrice pozitiv definite. Deci

$\mathbf{H} = \mathbf{G}\mathbf{J} + {}^t\mathbf{J}\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{C} \\ \mathbf{C} & 0 \end{bmatrix}$. Pe de altă parte, ${}^t\xi\mathbf{H}\xi = [{}^t\mathbf{X}, {}^t\mathbf{Y}] \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{C} \\ \mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \end{bmatrix} = 2\,{}^t\mathbf{X}\mathbf{C}\mathbf{Y}$. Făcînd schimbarea $\mathbf{X} = \mathbf{X}_1 + \mathbf{Y}_1$, $\mathbf{Y} = \mathbf{X}_1 - \mathbf{Y}_1$, găsim ${}^t\mathbf{X}\mathbf{C}\mathbf{Y} = {}^t\mathbf{X}_1\mathbf{C}\mathbf{X}_1 - {}^t\mathbf{Y}_1\mathbf{C}\mathbf{Y}_1$. Ținînd seama că $\mathbf{C}$ este o matrice pozitiv definită, rezultă că forma pătratică atașată lui $\mathbf{H}$ are signatura (n, n).

14. Fie $\mathbf{V}$ un spațiu vectorial real euclidian $2n$-dimensional înzestrat cu o structură complexă $\mathcal{F}$. Să se arate că $\mathbf{V}$ admite o metrică g astfel încît

$$g(\mathcal{F}x, \mathcal{F}y) = g(x, y), \quad \forall x, y \in \mathbf{V}.$$

Ansamblul $(\mathcal{F}, g)$ se numește *structură metrică hermitiană* pe **V**.

R: $g(x, y) = \frac{1}{2}\{h(x, y) + h(\mathcal{F}x, \mathcal{F}y)\}$, $\forall x, y \in \mathbf{V}$, unde h este produsul scalar dat prin definiția lui **V** ca spațiu euclidian [58].

15. Fie **V** un spațiu vectorial real euclidian $(2n+1)$-dimensional înzestrat cu o structură cocomplexă $(\mathcal{F}, \xi, \eta)$. Să se arate că **V** admite o metrică g astfel încît

$$\eta(x) = g(\xi, x), \quad g(\mathcal{F}x, \mathcal{F}y) = g(x, y) - \eta(x)\,\eta(y), \qquad \forall x, y \in \mathbf{V}.$$

Ansamblul $(\mathcal{F}, \xi, \eta, g)$ se numește *structură metrică cocomplexă* pe **V**.

R. $g(x, y) = \frac{1}{2}\{h(x, y) + h(\mathcal{F}x, \mathcal{F}y) + \eta(x)\,\eta(y)\}$, unde $h(x, y) = f(x - \eta(x)\xi, y - \eta(y)\xi) + \eta(x)\,\eta(y)$, iar f este metrica dată inițial pe **V** [58].

16. Fie **V** un spațiu vectorial real de dimensiune n. Un ansamblu $(\mathcal{F}, \xi, \eta)$, unde F este o transformare liniară a lui **V**, $\xi \in \mathbf{V}$ și η este o formă liniară pe **V**, care satisfac condițiile

$$\mathcal{F}^2 = id - \xi \cdot \eta, \quad \eta(\xi) = 1$$

se numește *structură coprodus* pe **V**. Evident $\xi \cdot \eta$ este endomorfismul definit prin $(\xi \cdot \eta)(x) = \eta(x)\,\xi$, $x \in \mathbf{V}$.

1) Să se arate că dacă $(\mathcal{F}, \xi, \eta)$ este o structură coprodus, atunci

$$\mathcal{F}\xi = 0, \quad \eta \circ F = 0, \quad \operatorname{rang} \mathcal{F} = n - 1, \quad \operatorname{rang}(\mathcal{F} - \xi \cdot \eta) = n.$$

2) Să se afle valorile proprii ale lui $\mathcal{F}$.

3) Să se arate că **V** admite o metrică g astfel încît

$$\eta(x) = g(\xi, x), \quad g(\mathcal{F}x, \mathcal{F}y) = g(x, y) - \eta(x)\,\eta(y), \qquad \forall x, y \in \mathbf{V}.$$

Ansamblul $(\mathcal{F}, \xi, \eta, g)$ se numește *structură metrică coprodus pe* **V**.

R. 1) $(\mathcal{F} - \xi \cdot \eta)^2 = id$. 2) Valorile proprii ale lui $\mathcal{F}$ sînt -1, 0, $+1$.

17. Fie **V** un corp acționat de sarcini de suprafață $\mathbf{T} \in C^1(\boldsymbol{D}_3 \subset \boldsymbol{R}^3)$ și de forțe masice F pe unitatea de volum. Să se arate că energia de deformație a corpului, pe unitatea de volum, exprimată în deformații specifice (sau tensiuni) este o formă pătratică pozitiv definită.

Soluție. Se știe că

$$U_0 = \frac{\lambda + 2\mu}{2}(\varepsilon_{xx}^2 + \varepsilon_{yy}^2 + \varepsilon_{zz}^2) + \lambda(\varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy} + \varepsilon_{yy}\varepsilon_{zz} + \varepsilon_{zz}\varepsilon_{xx}) + 2\mu(\varepsilon_{xy}^2 + \varepsilon_{yz}^2 + \varepsilon_{zx}^2).$$

Matricea acestei forme pătratice,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\lambda+2\mu}{2} & \frac{\lambda}{2} & \frac{\lambda}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\lambda}{2} & \frac{\lambda+2\mu}{2} & \frac{\lambda}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\lambda}{2} & \frac{\lambda}{2} & \frac{\lambda+2\mu}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu \end{bmatrix},$$

are toți minorii principali strict pozitivi. Deci forma pătratică U_0 este pozitiv definită.

În tensiuni avem

$$\mathbf{U}_0 = \frac{1}{2E}[\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 + \sigma_{zz}^2 - 2\gamma(\sigma_{yy}\sigma_{zz} + \sigma_{zz}\sigma_{xx} + \sigma_{xx}\sigma_{yy}) +$$

$$+ 2(1+\gamma)(\sigma_{yz}^2 + \sigma_{zx}^2 + \sigma_{xy}^2) \quad \text{cu} \quad -1 < \gamma < 1/2.$$

18. Să se scrie programul FORTRAN al algoritmului lui Jacobi de determinare a semnului unei forme pătratice. Aplicație:

$$\mathcal{Q}(x) = x_1^2 + 7x_2^2 + 2x_3^2 + 3x_4^2 + 5x_5^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_4 + 4x_2x_4 + 2x_3x_4.$$

Soluție (Fig. A.4).

```
      DIMENSIØN B(5.5).DELTA(5)
      READ(105,1) N
    1 FØRMAT(I2)
      DØ 2 I=1,N
    2 READ(105,3) (B(I, J), J=1,N)
    3 FØRMAT(5F4.2)
      WRITE(108,30)
   30 FØRMAT('  ', 'MATRICEA FØRMEI PATRATICE ESTE:' //)
      DØ 40 I=1, N
   40 WRITE(108,45) (B(I, J), J=1,N)
   45 FØRMAT('  ', 5(F9.3,3X))
      IF(N.EQ.1) GØ TØ 11
      DELTA(1) = B(1,1)
      DØ 4 I=2,N
      CALL DETER(B,I,DET)
    4 DELTA(I)=DET
      WRITE(108,25) (DELTA(I),I=1,N)
   25 FØRMAT('  ' //' DELTA:  ',5(F8.3,3X)/)
      DØ 5 I=1,N
      IF(DELTA(I).LE.0) GØ TO 6
    5 CØNTINUE
   14 WRITE(108,10)
   10 FØRMAT('  ', 'FØRMA PATRATICA ESTE PØZITIV DEFINITA')
      GØ TØ 20
    6 DØ 7 I=1,N,2
      IF(I.LT.N) GØ TØ 15
      IF(DELTA(I).LT.O) GØ TØ 12
      GØ TØ 13
   15 IF(DELTA(I).LT.O.AND.DELTA(I+1).GT.O) GØ TØ 7
   13 WRITE(108,8)
    8 FØRMAT('  ', 'FØRMA PATRATICA NU ESTE NICI PØZITIV NICI NEGATIV
      DEFINITA')
      GØ TØ 20
    7 CØNTINUE
   12 WRITE(108,9)
    9 FØRMAT('  ', 'FØRMA PATRATICA ESTE NEGATIV DEFINITA')
      GØ TØ 20
```

```
11 IF(B(1,1) 12,13,14
20 STØP
   END
   SUBRØUTINE DETER(B,N,DET)
   DIMENSIØN A(5,5),B(5,5)
   WRITE(108,3) N
 3 FØRMAT('  '/// 'DELTA', I1)
   DØ 200 I=1,N
200 WRITE(108,100) (B(I,J),J=1,N)
100 FØRMAT('  ', 5F9.3)
   DØ 2 I=1,N
   DØ 2 J=1,N
 2 A(I,J)=B(I,J)
   DET=1.
   N1=N-1
   DØ 1 I=1,N1
   J1=I
   K1=I
   DØ 10 J2=I,N
   DØ 10 K2=I,N
   IF(ABS(A(J1,K1)).GE.ABS(A(J2,K2))) GØ TØ 10
   J1=J2
   K1=K2
10 CØNTINUE
   IF(ABS(A(J1,K1)).GT.1.E-20) GØ TØ 11
   DET=0
   RETURN
11 IF(J1.EQ.I) GØ TØ 12
   DØ 5 K=I,N
   X=A(I,K)
   A(I,K)=A(J1,K)
 5 A(J1,K)=-X
12 IF(K1.EQ.I) GØ TØ 13
   DØ 6 J=I,N
   X=A(J,I)
   A(J,I)=A(J,K1)
 6 A(J,K1)=-X
13 I1=I+1
   DØ 30 J=I1,N
   IF(A(J,I).EQ.O) GØ TØ 30
   X=A(J,I)/A(I,I)
   DØ 7 K=I1,N
 7 A(J,K)=A(J,K)-X*A(I,K)
30 CØNTINUE
 1 DET=DET*A(I,1)
   DET=DET*A(N,N)
   RETURN
   END
```

Forma pătratică dată este pozitiv definită.

6.1. Fie $\mathbf{V} = \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \ldots\}$ un spaţiu vectorial euclidian. O mulţime $\boldsymbol{E} = \{A, B, C, \ldots\}$ se numeşte *spaţiu punctual euclidian* dacă există o funcţie $\mathrm{f}: \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{E} \to \mathbf{V}$ astfel încît

(i) $\mathrm{f}(A, B) + \mathrm{f}(B, C) = \mathrm{f}(A, C)$, $A, B, C \in \boldsymbol{E}$,

(ii) funcţiile parţiale $\mathrm{f}_A: \boldsymbol{E} \to \mathbf{V}$ definite prin $\mathrm{f}_A(B) = \mathrm{f}(A, B)$ sînt bijective.

$\mathbf{V}$ se numeşte *spaţiu director;* elementele lui $\mathbf{V}$ se numesc *vectori directori;* elementele lui $\boldsymbol{E}$ se numesc *puncte;* f se numeşte *funcţie de structură afină.*

Spaţiul punctul euclidian $\boldsymbol{E}$ se numeşte *real (complex)* dacă $\mathbf{V}$ este un spaţiu vectorial real(complex). *Dimensiunea* lui $\boldsymbol{E}$ se defineşte ca fiind dimensiunea lui $\mathbf{V}$. Un spaţiu punctul euclidian de dimensiune n va fi notat cu $\boldsymbol{E}_n$.

6.2. Pentru orice punct $A \in \boldsymbol{E}$ şi orice vector $\vec{v} \in \mathbf{V}$ există un singur punct $B \in \boldsymbol{E}$ astfel încît $\vec{v} = \mathrm{f}(A, B)$.

6.3. Există spaţii punctuale euclidiene care nu sînt spaţii vectoriale. Orice spaţiu vectorial euclidian $\mathbf{V}$ este un spaţiu punctual euclidian deoarece funcţia $\mathrm{f}: \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ definită prin $\mathrm{f}(\vec{u}, \vec{v}) = \vec{v} - \vec{u}$ satisface (i) şi (ii).

6.4. Fie $\boldsymbol{E}$ un spaţiu punctual euclidian, $\mathbf{V}$ spaţiul vectorial euclidian asociat şi f funcţia de structură afină. O pereche ordonată (A, B) de puncte din $\boldsymbol{E}$ se numeşte *vector tangent la $\boldsymbol{E}$* în punctul A *(segment orientat, vector legat).* Punctul A se numeşte *originea* sau *punctul de aplicaţie* al vectorului tangent, iar B se numeşte extremitatea sa. Dacă A este originea lui $\boldsymbol{E}$, atunci (A, B) se numeşte *vectorul de poziţie* al punctului B.

Mulţimea tuturor vectorilor tangenţi la $\boldsymbol{E}$ în punctul A se numeşte *spaţiul tangent la $\boldsymbol{E}$ în punctul* A şi se notează cu $T_A\boldsymbol{E}$. Această mulţime este un spaţiu vectorial euclidian izomorf cu $\mathbf{V}$.

Doi vectori tangenţi (A, B) şi (C, D) se numesc egali dacă au aceeaşi parte vectorială $\mathrm{f}(A, B) = \mathrm{f}(C, D)$ şi acelaşi punct de aplicaţie, $A = C$. Doi vectori (A, B) şi (C, D) care au aceeaşi parte vectorială, $\mathrm{f}(A, B) = \mathrm{f}(C, D)$, dar care au puncte de aplicaţie diferite, $A \neq C$, se numesc *paraleli.*

Mulţimea tuturor vectorilor tangenţi la $\boldsymbol{E}$ paraleli cu un vector tangent dat se numeşte *vector liber* şi se identifică cu un vector director (element al lui $\mathbf{V}$).

6.5. Un vector legat (A, B) se notează cu $\overrightarrow{AB}$ sau cu $\vec{v}$ dacă $\mathrm{f}(A, B) = \vec{v}$; un vector liber se notează fie prin $\overrightarrow{AB}$, dacă $\overrightarrow{AB}$ este un segment orientat din mulţimea numită vector liber, fie prin $\vec{v}$ dacă $\mathrm{f}(A, B) = \vec{v}$.

6.6. Fie $\boldsymbol{E}$ un spaţiu punctual euclidian. Funcţia $\mathrm{d}: \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{R}_+$ definită prin $\mathrm{d}(A, B) = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB})}$ este o distanţă pe $\boldsymbol{E}$.

6.7. Fie Σ o mulţime închisă din $\boldsymbol{E}_n$, fie A un punct oarecare din $\boldsymbol{E}_n$ şi B un punct oarecare din Σ. Marginea inferioară

$$\mathrm{d} = \mathrm{d}(A, \Sigma) = \inf_{B \in \Sigma} \mathrm{d}(A, B)$$

se numeşte *distanţa de la A la Σ.* Aceasta este de fapt minimul funcţiei $B \to \mathrm{d}(A, B)$.

Fie Σ_1 și Σ_2 două mulțimi închise din $\boldsymbol{E}_n$, fie A un punct oarecare din Σ_1 și B un punct oarecare din Σ_2. Marginea inferioară

$$d = d(\Sigma_1, \Sigma_2) = \inf_{A \in \Sigma_1,\ B \in \Sigma_2} d(A, B)$$

se numește *distanța de la Σ_1 la Σ_2*. Dacă Σ_1 este compactă și dacă $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \emptyset$, atunci $d = d(\Sigma_1, \Sigma_2)$ este minimul funcției $(A, B) \to d(A, B)$.

6.8. Fie $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ o bază ortonormată a spațiului director $\mathbf{V}$ și O originea spațiului punctual euclidian $\boldsymbol{E}_n$. Ansamblul $\mathcal{R} = \{0;\ \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ se numește *reper cartezian* în $\boldsymbol{E}_1$.

Coordonatele $(x_1, \ldots, x_n)$ ale vectorului de poziție $\overrightarrow{OM} = x_1\vec{e}_1 + \ldots + x_n\vec{e}_n$ se numesc *coordonatele carteziene ale punctului M* în raport cu $\mathcal{R}$.

Fie $A(x_1, \ldots, x_n)$ și $B(y_1, \ldots, y_n)$. Rezultă $AB = (y_1 - x_1)\vec{e}_1 + \ldots + (y_n - x_n)\vec{e}_n$, $d(A, B) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + \ldots + (y_n - x_n)^2}$.

6.9. Distanța de la un punct $M_0(x_{10}, \ldots, x_{n0})$ la un hiperplan $P: a_1x_1 + \ldots + a_nx_n + b = 0$.

$$d(M_0;\ P) = \frac{|a_1x_{10} + \ldots + a_nx_{n0} + b|}{\sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2}}.$$

6.10. Unghiul dintre două drepte orientate de vectori directori $\vec{a}$ respectiv $\vec{b}$,

$$\cos\varphi = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{\|\vec{a}\|\ \|\vec{b}\|}, \quad \varphi \in [0, \pi].$$

6.11. Unghiul dintre două hiperplane orientate cu vectorii normali $\vec{n}_1$ respectiv $\vec{n}_2$,

$$\cos\varphi = \frac{(\vec{n}_1, \vec{n}_2)}{\|\vec{n}_1\|\ \|\vec{n}_2\|} \quad \varphi \in [0, \pi].$$

6.12. Unghiul dintre dreapta orientată de direcție $\vec{a}$ și hiperplanul orientat de normala $\vec{n}$,

$$\sin\varphi = \frac{(\vec{n}, \vec{a})}{\|\vec{n}\|\ \|\vec{a}\|}, \quad \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

6.1.3 Măsura p-paralelipipedului $(0;\ \vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_p)$,

$$V = \sqrt{\det[(u_i, u_j)]}.$$

6.14. *Izometrii.*

Fie $\boldsymbol{E}_n$ un spațiu punctual euclidian n-dimensional.

1) O aplicație a lui $\boldsymbol{E}_n$ în el însuși care păstrează distanța se numește *izometrie*.

2) Orice izometrie este de forma $i = t \circ \mathrm{O}$, unde t este o translație, iar O este o transformare ortogonală.

Fiind date două repere $\mathcal{R} = \{0;\ \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ și $\mathcal{R}' = \{0';\ \vec{e}_1', \ldots, \vec{e}_n'\}$ există o singură izometrie $i = t \circ \mathrm{O}: \boldsymbol{E}_n \to \boldsymbol{E}_n$ astfel încît $\mathrm{O}(\vec{e}_1) = \vec{e}_i'$.

3) Fie $i = t \circ \mathrm{O}$ o izometrie. Dacă $\det \mathrm{O} = +1$, atunci i se numește *deplasare (izometrie pozitivă)*, iar dacă $\det \mathrm{O} = -1$, atunci i se numește *antideplasare (izometrie negativă)*.

6.15. *Hipercuadrice.*

Fie $\boldsymbol{E}_n$ un spațiu punctual euclidian real n-dimensional raportat la un reper cartezian.

1) Mulțimea

$$H = \left\{ x \mid x = (x_1, \ldots, x_n) \in \boldsymbol{R}^n, \ \sum_{i,\, j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j + 2 \sum_{i=1}^{n} b_i x_i + c = 0 \right\}$$

se numește *hipercuadrică* sau *suprafață algebrică de ordinul al doilea.*

Dacă utilizăm matricele $\mathbf{A} = [a_{ij}]$, $\mathbf{B} = [b_1, \ldots, b_n]$, $\mathbf{X} = {}^t[x_1, \ldots, x_n]$, atunci ecuația hipercuadricei H se transcrie ${}^t\mathbf{XAX} + \mathbf{BX} + c = 0$.

2) Hiperplanul tangent la o hipercuadrică H într-un punct $x_0 = (x_{10}, \ldots, x_{n0})$ în care cel puțin unul dintre numerele $\sum_j a_{ij} x_{j0} + b$ este diferit de zero, are ecuația matriceală (obținută prin dedublare)

$${}^t\mathbf{X}(\mathbf{AX}_0 + {}^t\mathbf{B}) + \mathbf{BX}_0 + c = 0,$$

iar normala la H în x_0 are ecuația

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_0 + s(\mathbf{AX}_0 + {}^t\mathbf{B}), \qquad s \in \boldsymbol{R}.$$

3) Cuadrica H are un centru de simetrie dacă și numai dacă rang $\mathbf{A} =$ rang $[\mathbf{A}, {}^t\mathbf{B}]$.

Ecuația unei hipercuadrice cu centru poate fi redusă, printr-o izometrie, la forma canonică

$$\alpha_1 x_1^2 + \ldots + \alpha_r x_r^2 + \gamma = 0.$$

Ecuația unei hipercuadrice fără centru poate fi redusă, printr-o izometrie, la forma canonică

$$\alpha_1 x_1^2 + \ldots + \alpha_r x_r^2 = 2x_{r+1}.$$

Exerciții și probleme

1. Fie $\boldsymbol{E}$ un spațiu punctual euclidian real și $\mathrm{d} : \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{R}_+$ distanța pe $\boldsymbol{E}$.

1) Pentru orice $M_1, \ldots, M_n \in \boldsymbol{E} (n > 1)$ există relația

$$\overrightarrow{M_1M_2} + \overrightarrow{M_2M_3} + \ldots + \overrightarrow{M_{n-1}M_n} + \overrightarrow{M_nM_1} = \vec{0}_{\mathbf{V}},$$

numită *relația lui Chasles.* ($\vec{0}_{\mathbf{V}}$ este vectorul nul din spațiul director $\mathbf{V}$).

2) Să se arate că punctul G este centrul de greutate al sistemului de puncte $\{M_1, \ldots, M_n\} \subset \boldsymbol{E}$ cu ponderile $\mu_1, \ldots, \mu_n \in \boldsymbol{K}$, $\mu_1 + \ldots + \mu_n = 1$, dacă și numai dacă

$$\mu_1 \overrightarrow{GM_1} + \mu_2 \overrightarrow{GM_2} + \ldots + \mu_n \overrightarrow{GM_n} = \vec{0}_{\mathbf{V}}.$$

3) Dacă $(\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_2M_3}) = 0$, să se dovedească egalitatea

$$\mathrm{d}^2(M_1, M_3) = \mathrm{d}^2(M_1, M_2) + \mathrm{d}^2(M_2, M_3).$$

4) Dacă $M \in \boldsymbol{E}$, să se scrie expresia

$$\mathrm{f}(M) = (\overrightarrow{MM_1}, \overrightarrow{MM_2}) + (\overrightarrow{MM_2}, \overrightarrow{MM_3}) + (\overrightarrow{MM_3}, \overrightarrow{MM_1})$$

funcție de $d(M_1, M_2)$, $d(M_2, M_3)$, $d(M_3, M_1)$ și $d(M, G)$, unde

$G = \frac{1}{3} M_1 + \frac{1}{3} M_2 + \frac{1}{3} M_3$ este centrul de greutate al sistemului $\{M_1, M_2, M_3\}$.

5) Să se expliciteze locul geometric al punctelor $M \in \boldsymbol{E}$ pentru care $f(M) = 0$.

Soluție. 1) Demonstrăm prin inducție. Pentru $n = 2$ avem $\overrightarrow{M_1M_2} + \overrightarrow{M_2M_1} = \overrightarrow{M_1M_1} = \vec{0}_V$, deci relația este adevărată.

Admitem că relația este adevărată pentru $n - 1$ puncte $M_1, \ldots, M_{n-1}$ și o vom demonstra pentru n puncte $M_1, \ldots, M_n$. În adevăr,

$$\overrightarrow{M_1M_2} + \overrightarrow{M_2M_3} + \ldots + \overrightarrow{M_{n-2}M_{n-1}} + \underbrace{(\overrightarrow{M_{n-1}M_n} + \overrightarrow{M_nM_1})}_{M_{n-1}M_1} = \overrightarrow{M_1M_2} +$$

$$+ \overrightarrow{M_2M_3} + \ldots + \overrightarrow{M_{n-2}M_{n-1}} + \overrightarrow{M_{n-1}M_1} = \vec{0}_V. \text{ (conform ipotezei)}.$$

2) Dacă $\mu_1\overrightarrow{GM_1} + \mu_2\overrightarrow{GM_2} + \ldots + \mu_n\overrightarrow{GM_n} = \vec{0}_V$, $\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_n = 1$, pentru un punct fixat $O \in \boldsymbol{E}$, obținem succesiv

$$\mu_1(\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OM_1}) + \mu_2(\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OM_2}) + \ldots + \mu_n(\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OM_n}) = \vec{0}_V,$$

$$(\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_n)\overrightarrow{GO} + (\mu_1\overrightarrow{OM_1} + \ldots + \mu_n\overrightarrow{OM_n}) = \vec{0}_V,$$

$$\overrightarrow{OG} = \mu_1\overrightarrow{OM_1} + \ldots + \mu_n\overrightarrow{OM_n} \quad \text{și deci}$$

$$G = \mu_1 M_1 + \mu_2 M_2 + \ldots + \mu_n M_n.$$

Reciproc, dacă G este centrul de greutate al sistemului $\{M_1, \ldots, M_n\}$, adică egalitatea precedentă este adevărată, atunci

$$\vec{0}_V = \overrightarrow{\mathbf{GG}} = \sum_{i=1}^{n} \mu_i\overrightarrow{GM_i}.$$

3) Pe baza relației lui Chasles, $\overrightarrow{M_1M_3} = \overrightarrow{M_1M_2} + \overrightarrow{M_2M_3}$ avem

$$d^2(M_1, M_3) = \|\overrightarrow{M_1M_3}\|^2 = (\overrightarrow{M_1M_2} + \overrightarrow{M_2M_3})^2 = \|\overrightarrow{M_1M_2}\|^2 +$$

$$+ 2\underbrace{(\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_2M_3})}_{=0} + \|\overrightarrow{M_2M_3}\| = d^2(M_1, M_2) + d^2(M_2, M_3).$$

4) În baza egalității $\overrightarrow{GM_1} + \overrightarrow{GM_2} + \overrightarrow{GM_3} = \vec{0}_V$ și a relației lui Chasles obținem

$$f(M) = (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GM_1}, \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GM_2}) + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GM_2}, \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GM_3}) +$$

$$+ (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GM_3}, \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GM_1}) = 3d^2(M, G) + 2(\overrightarrow{MG}, \underbrace{\overrightarrow{GM_1} + \overrightarrow{GM_2} + \overrightarrow{GM_3}}_{=\vec{0}_V}) +$$

$$+ (\overrightarrow{GM_1}, \overrightarrow{GM_2}) + (\overrightarrow{GM_2}, \overrightarrow{GM_3}) + (\overrightarrow{GM_3}, \overrightarrow{GM_1}) = 3d^2(M, G) + (\overrightarrow{GM_1}, \overrightarrow{GM_2}) +$$

$$+ (\overrightarrow{GM_2}, \overrightarrow{GM_3}) + (\overrightarrow{GM_3}, \overrightarrow{GM_1}).$$

Însă

$$(\overrightarrow{GM_1}, \overrightarrow{GM_2}) = \left(\frac{1}{3}(\overrightarrow{M_2M_1} + \overrightarrow{M_3M_1}),\ \frac{1}{3}(\overrightarrow{M_1M_2} + \overrightarrow{M_3M_2})\right) =$$

$$= -\frac{2}{9}\,\mathrm{d}^2(M_1, M_2) - \frac{1}{9}(\overrightarrow{M_3M_1}, \overrightarrow{M_2M_3}),$$

$$(\overrightarrow{GM_2}, \overrightarrow{GM_3}) = -\frac{2}{9}\,\mathrm{d}^2(M_2, M_3) - \frac{1}{9}(\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_3M_1}),$$

$$(\overrightarrow{GM_3}, \overrightarrow{GM_1}) = -\frac{2}{9}\,\mathrm{d}^2(M_3, M_1) - \frac{1}{9}(\overrightarrow{M_2M_3}, \overrightarrow{M_1M_2}).$$

Deci

$$\mathrm{f}(M) = 3\mathrm{d}^2(M, G) - \frac{2}{9}[\mathrm{d}^2(M_1, M_2) + \mathrm{d}^2(M_2, M_3) + \mathrm{d}^2(M_3, M_1)] -$$

$$-\frac{1}{18}[(\underbrace{\overrightarrow{M_1M_2} + \overrightarrow{M_2M_3} + \overrightarrow{M_3M_1}}_{=\vec{0}_V})^2 - \|\overrightarrow{M_1M_2}\|^2 - \|\overrightarrow{M_2M_3}\|^2 - \|\overrightarrow{M_3M_1}\|^2] =$$

$$= 3\mathrm{d}^2(M, G) - \frac{1}{6}[\mathrm{d}^2(M_1, M_2) + \mathrm{d}^2(M_2, M_3) + \mathrm{d}^2(M_3, M_1)].$$

5) $\mathrm{f}(M) = 0$ implică $\mathrm{d}^2(M, G) = \frac{1}{18}[\mathrm{d}^2(M_1, M_2) + \mathrm{d}^2(M_2, M_3) + \mathrm{d}^2(M_3, M_1)]$

și deci locul geometric căutat este mulțimea

$$\left\{M \in \boldsymbol{E} \mid \mathrm{d}^2(M, G) = \frac{1}{18}[\mathrm{d}^2(M_1, M_2) + \mathrm{d}^2(M_2, M_3) + \mathrm{d}^2(M_3, M_1)\right\}$$

și reprezintă o *hipersferă* cu centrul în G și de rază

$$\mathbf{R} = \frac{1}{3\sqrt{2}}\sqrt{\mathrm{d}^2(M_1, M_2) + \mathrm{d}^2(M_2, M_3) + \mathrm{d}^2(M_3, M_1)}.$$

2. Fie L_3 mulțimea dreptelor din $\boldsymbol{R}^3$ care intersectează planul P: $x_3 = 0$, iar $D \in L_3$ o dreaptă de ecuații $x_1 = ax_3 + c$, $x_2 = bx_3 + d$, $(a, b, c, d) \in \boldsymbol{R}^4$. Fie $\mathrm{f} : L_3 \to \boldsymbol{R}^4$ funcția care asociază dreptei $D \in L_3$ punctul $(a, b, c, d) \in \boldsymbol{R}^4$.

1) Să se arate că mulțimile

$$S_1 = \{\mathrm{f}(D) \mid D \in L_3,\ M \in D\},\ S_2 = \{\mathrm{f}(D) \mid D \in L_3,\ D \subset Q\}$$

sînt subspații afine în $\boldsymbol{R}^4$ de dimensiune doi știind că M este un punct din $\boldsymbol{R}^3$, iar Q un plan din $\boldsymbol{R}^3$ secant cu planul P.

2) Să se demonstreze că o condiție suficientă pentru ca un subspațiu afin al lui $\boldsymbol{R}^4$ să fie S_1 sau S_2 este ca el să aibă drept subspațiu director un subspațiu vectorial de dimensiune doi conținut în mulțimea

$$\Sigma = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \boldsymbol{R}^4 \mid x_1x_4 = x_2x_3\}.$$

Soluție. 1) Dacă $M = (a_1, a_2, a_3) \in \boldsymbol{R}^3$, atunci

$S_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \boldsymbol{R}^4 \mid a_1 = x_1a_3 + x_3,\ a_2 = x_2a_3 + x_4\}$, adică S_1 este mulțimea punctelor din $\boldsymbol{R}^4$ ale căror coordonate x_1, x_2, x_3, x_4 verifică sistemul de ecuații liniare $a_3x_1 + x_3 - a_1 = 0$, $a_3x_2 + x_4 - a_2 = 0$.

Deoarece

rang $\begin{bmatrix} a_3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & a_4 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 2$ rezultă că S_1 este un subspațiu afin din $\boldsymbol{R}^4$ de dimensiune doi. Sistemul liniar omogen asociat caracterizează subspațiul vectorial asociat lui S_1, față de baza canonică din $\boldsymbol{R}^4$. Rezultă că, pentru $a_3 = 0$, direcția lui S_1 este subspațiul $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \boldsymbol{R}^4 \mid x_2 = 0,\ x_3 = 0\}$; iar pentru $a_3 = 0$, direcția lui S_1 este subspațiul vectorial

$$\left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \boldsymbol{R}^4 \mid x_1 = -\frac{1}{a_3}\, x_2,\ x_3 = -\frac{1}{a_3}\, x_4\right\}.$$

Dacă $Q: a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4 = 0$, unde $a_1 \neq 0$ sau $a_2 \neq 0$, atunci

$$S_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \boldsymbol{R}^4 \mid a_1x_1 + a_2x_2 + a_3 = 0,\ a_1x_3 + a_2x_4 + a_4 = 0\}.$$

Deoarece $a_1^2 + a_2^2 \neq 0$, rezultă

$$\text{rang} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & a_2 \end{bmatrix} = 2 \quad \text{și} \quad \text{deci}$$

S_2 este un subspațiu afin din $\boldsymbol{R}^4$ de dimensiune doi.

2) Un subspațiu vectorial de dimensiune doi poate fi reprezentat printr-una din mulțimile

$$\mathbf{U}(\lambda) = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \boldsymbol{R}^4 \mid x_1 = \lambda x_2,\ x_3 = \lambda x_4\},\ \lambda \in \boldsymbol{R}\}$$

$$\mathbf{V}(\mu) = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \boldsymbol{R}^4 \mid x_1 = \mu x_3,\ x_2 = \mu x_4\},\ \mu \in \boldsymbol{R}\}$$

$$\mathbf{U}(\infty) = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \boldsymbol{R}^4 \mid x_2 = 0,\ x_4 = 0\},$$

$$\mathbf{V}(\infty) = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \boldsymbol{R}^4 \mid x_3 = 0,\ x_4 = 0\}.$$

Subspațiile $\mathbf{U}(\lambda)$ și $\mathbf{V}(\lambda)$ împreună cu $\mathbf{U}(\infty)$ și $\mathbf{V}(\infty)$, generează mulțimea

$$\Sigma = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \boldsymbol{R}^4 \mid x_1x_4 = x_2x_3\} \subset \boldsymbol{R}^4.$$

Fie S un subspațiu afin al lui $\boldsymbol{R}^4$ astfel încît subspațiul său director să fie $\mathbf{U}(\lambda)$, $\lambda \in \boldsymbol{R}$. În raport cu reperul canonic al lui $\boldsymbol{R}^4$, sistemul ecuațiilor liniare ale lui S va fi de forma

$$\begin{cases} x_1 - \lambda x_2 + \alpha = 0 \\ x_3 - \lambda x_4 + \beta = 0, \quad \text{unde} \quad \alpha, \beta \in \boldsymbol{R}. \end{cases}$$

Dacă considerăm planul $Q: x_1 - \lambda x_2 + \alpha x_3 + \beta = 0$, atunci Q este secant planului P și din definiția lui S_2 urmează în mod necesar $S = S_2$. Dacă S' este un subspațiu afin al lui $\boldsymbol{R}^4$ astfel încît subspațiul său director este $\mathbf{U}(\infty)$, atunci sistemul ecuațiilor liniare ale lui S' în raport cu reperul canonic din $\boldsymbol{R}^4$ va fi de forma

$$\begin{cases} x_2 + a = 0 \\ x_4 + b = 0, \quad \text{cu} \quad a, b \in \boldsymbol{R}. \end{cases}$$

Luînd $Q: x_2 + ax_3 + b = 0$, rezultă că Q este secant cu P și deci $S' = S_2$. Pentru S_1 se face o discuție analogă.

3. În $\mathbf{R}^n$, să se afle distanța dintre $\Sigma : x_n = \frac{x_1^2}{12} + \frac{x_2^2}{4}$ și $P : x_1 - x_2 - 2x_n = 4$.

Soluție. Distanța cerută este distanța dintre hiperplanul P și hiperplanul tangent la cuadrica Σ paralel cu hiperplanul P.

Fie $x_1 - x_2 - 2x_n = \lambda$ ecuația fasciculului de hiperplane paralele cu P. Determinăm pe λ astfel încît hiperplanul corespunzător să fie tangent la S, adică eliminînd pe x_n din sistemul $x_n = \frac{x_1^2}{12} + \frac{x_2^2}{4}$, $x_1 - x_2 - 2x_n = \lambda$ impunem ca ecuația obținută $(x_1 - 3)^2 + 3(x_2 + 1)^2 = 12 - 6\lambda$ să reprezinte un punct în hiperplanul x_1Ox_2. Găsim $\lambda = 2$, iar $x_1 = 3$, $x_2 = -1$, $x_n = 1$ este varietatea liniară de tangență. Distanța de la punctul $(3, -1, x_3, x_4, \ldots, 1)$ la hiperplanul P este distanța căutată, $d = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

4. Fie hiperplanul $P: x_1 + 3x_2 + 5x_3 + \ldots + (2n - 1)\, x_n - 1/4 = 0$ și punctul $M(1, 1, \ldots, 1)$. Se cer

1) distanța de la punctul M la planul P,

2) coordonatele simetricului punctului M față de planul P.

Soluție. 1) $d = \frac{|1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1 - 1/4|}{\sqrt{1 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n - 1)^2}} = \frac{|n^2 - 1/4|}{\sqrt{\frac{n(4n^2 - 1)}{3}}}$.

2) Ecuațiile parametrice ale dreptei D, care trece prin M și este ortogonală hiperplanului P, sînt

$$x_1 = 1 + t,\ x_2 = 1 + 3t,\ x_3 = 1 + 5t, \ldots, x_n = 1 + (2n-1)\, t,\ t \in \boldsymbol{R}.$$

Intersectăm dreapta D cu hiperplanul P și găsim coordonatele punctului proiecție M_0',

$$M_0'\left(1 - \frac{3}{4} n,\ 1 - 3\frac{3}{4} n,\ 1 - 5\frac{3}{4} n, \ldots, 1 - (2n-1)\frac{3}{4} n\right).$$

Știind că $x_i' = \frac{x_i + x_i''}{2}$ $i = 1, 2, \ldots, n$, coordonatele punctului simetric $M_0''(x_1'', x_2'', \ldots, x_n'')$ vor fi

$$M_0''\left(1 - \frac{3}{2} n,\ 1 - 3\frac{3}{2} n,\ 1 - 5\frac{3}{2} n, \ldots, 1 - (2n-1)\frac{3}{2} n\right).$$

5. Să se calculeze unghiul dintre hiperplanele

$$P_1: x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \ldots + nx_n - 1 = 0,$$

$$P_2: 2x_1 + 3x_2 + \ldots + (n + 1)\, x_n - 1 = 0.$$

R: $\cos \varphi = 2(n + 2)\sqrt{\frac{n + 1}{(2n + 1)(2n + 9n + 13)}}$.

6. Să se arate că distanța de la $O(0, 0, \ldots, 0)$ la hiperplanul $P: x_1 + \frac{x_2}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{x_n}{\sqrt{n}} + 1 = 0$ satisface relația

$$\frac{1}{\sqrt{1 + n\left(1 - \frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right)}} \leqslant \mathrm{d}(O; P) \leqslant \frac{1}{\sqrt{n(\sqrt[n]{n+1} - 1)}}.$$

Indicație. $n(\sqrt[n]{n+1} - 1) \leqslant 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} \leqslant 1 + n\left(1 - \frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right)\ \forall n \in \mathbf{N} - \{0\}$.

7. Se dă familia de hiperplane $P: a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = 0$. Știind că toate hiperplanele trec prin punctul $(1, 1, \ldots, 1)$ și că există un punct $M_0(x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0})$ cu proprietatea

$$\mathrm{d}(M_0; P) = \frac{1}{k} \left| a_1x_{10} + a_2x_{20} + \ldots + a_nx_{n0} \right|, \ k \neq \text{const}{=}0,$$

să se arate că

$$-\frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}} k^3 \leqslant \sum_{i=1}^{n} a_i^3 \leqslant \frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}} k^3.$$

8. În spațiul cu patru dimensiuni considerăm două plane A și B generate de vectorii $\vec{a}_1, \vec{a}_2$, și $\vec{b}_1, \vec{b}_2$ respectiv

1) $\vec{a}_1 = (1, 0, 0, 0), \vec{a}_2 = (0, 1, 0, 0); \vec{b}_1 = (1, 1, 1, 1), \vec{b}_2 = (-1, -1, 1, 1)$.

2) $\vec{a}_1 = (1, 0, 0, 0), \vec{a}_2 = (0, 1, 0, 0); \vec{b}_1 = (1, 1, 1, 1), \vec{b}_2 = (1, 1, -1, -1)$.

Să se găsească unghiul φ dintre planul A și un vector oarecare din planul B. Apoi să se verifice că funcția $\varphi: B \to [0, \pi]$, care asociază fiecărui vector din B unghiul pe care-l face cu planul A, este surjectivă.

Soluție. 1) Un vector oarecare din planul B se exprimă în forma $t_1\vec{b}_1 + t_2\vec{b}_2 = (t_1 - t_2, t_1 - t_2, t_1 + t_2, t_1 + t_2)$. Proiecția sa pe planul A are coordonatele $(t_1 - t_2, t_1 - t_2, 0, 0)$. Notînd cu φ unghiul dintre vectorul nenul $t_1\vec{b}_1 + t_2\vec{b}_2$ și planul A, trebuie să avem

$$\cos^2\varphi = \frac{\|(t_1 - t_2, t_1 - t_2, 0, 0)\|^2}{\|(t_1 - t_2, t_1 - t_2, t_1 + t_2, t_1 + t_2)\|^2} = \frac{1}{2}\,\frac{t_1^2 - 2t_1t_2 + t_2^2}{t_1^2 + t_2^2} =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2}\,\frac{(\lambda - 1)^2}{\lambda^2 + 1}, & \lambda = \frac{t_1}{t_2} \quad \text{pentru } t_2 \neq 0 \\ \frac{1}{2} & \quad\quad\quad\quad\ \text{pentru } t_2 = 0. \end{cases}$$

Funcția $\lambda \to \frac{(\lambda - 1)^2}{\lambda^2 + 1}$ admite un minim egal cu 0 pentru $\lambda = 1$ și un maxim egal cu 1 pentru $\lambda = -1$. De aceea $0 \leqslant |\cos\varphi| \leqslant 1$ sau $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$, adică φ este surjectivă.

2) Analog.

9. În $\boldsymbol{R}^{2n}$ considerăm un paralelipiped $(0; \vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_{2n})$, astfel încît

$$(\vec{u}_i, \vec{u}_j) = \begin{cases} \dfrac{\delta_i(\delta_i - 1)}{x_i^2} & \text{pentru } i = j, \\ & , \quad x_i \neq 0, \; x_j \neq 0 \\ \dfrac{\delta_i \delta_j}{x_i x_j} & \text{pentru } i \neq j \end{cases}$$

unde $\delta_1 + \dots + \delta_{2n} < 1$ și $\delta_i > 0$. Să se determine volumul acestui paralelipiped.

R: $V^2 = \left(1 - \sum\limits_{i=1}^{2n} \delta_i\right) \prod\limits_{i=1}^{2n} \left(\dfrac{-\delta_i}{x_i^2}\right)$.

10. Să se determine transformarea afină a planului care nu posedă puncte fixe și nici drepte invariante.

Soluție. O transformare afină $\mathcal{T}$ a planului este definită prin $\mathcal{T}(x) = \mathbf{A}x + b$, unde $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\boldsymbol{R})$, $b \in \mathcal{M}_{2\times 1}(\boldsymbol{R})$, $x = {}^t[x_1, x_2]$.

Fie $\{u, v\}$ o bază a planului și b un vector care nu aparține dreptei generate de u. Funcția $cu + dv \rightarrow (c + d)\, u + dv + b$ are proprietățile dorite. Într-adevăr, pentru orice vector w, vectorii $\mathcal{T}(w) - w$ și $\mathcal{T}^2(w) - w$ sînt independenți.

Să arătăm că funcția precedentă este singura care satisface datele problemei. Fie $\mathcal{T}(x) = Ax + b$ o transformare afină oarecare. Ipoteza că $x = \mathbf{A}x + b$ nu are nici o soluție implică faptul că matricea $A - I$ este singulară; ipoteza că dreapta generată de b nu este invariantă prin $\mathcal{T}$ implică $\mathbf{A} \neq \mathbf{I}$. Rezultă rang $(\mathbf{A} - \mathbf{I}) = 1$ și forma Jordan a lui $\mathbf{A}$,

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ sau } \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}, \quad a \neq 0.$$

Fie $\{u, v\}$ baza Jordan corespunzătoare. În primul caz $\mathcal{T}$ se confundă cu transformarea de mai sus și b nu aparține dreptei generată de u deoarece această dreaptă nu este invariantă prin $\mathcal{T}$. Al doilea caz este imposibil deoarece $b = ru + sv$ implică faptul că dreapta $t \rightarrow tu - \dfrac{s}{a}v$ este invariantă prin $\mathcal{T}$.

11. Fie $\boldsymbol{E}_n$ un spațiu punctual euclidian real și $i: \boldsymbol{E}_n \rightarrow \boldsymbol{E}_n$ o izometrie.

1) Să se arate că imaginea prin i a unei hipersfere este tot o hipersferă.

2) Fie $n = 2$. Să se demonstreze că dacă i este o deplasare care are cel puțin două puncte fixe, atunci i este identitatea pe $\boldsymbol{E}_2$. Rămîne valabilă această proprietate și în cazul antideplasării?

Soluție. 1) Fie Σ sfera de centru O și rază r și M un punct al lui Σ. Relația $\mathrm{d}(O, M) = r$ implică $\mathrm{d}(i(O), i(M)) = r$ și deci $i(M)$ aparține sferei $i(\Sigma)$ cu centrul în $i(O)$ și de rază r.

2) Fie $A, B \in \boldsymbol{E}_2$, $A \neq B$, și $i: \boldsymbol{E}_2 \rightarrow \boldsymbol{E}_2$ o deplasare pentru care $i(A) = A$ și $i(B) = B$. Fie $\mathbf{V}_2$ spațiul vectorial atașat lui $\boldsymbol{E}_2$ și $j: \mathbf{V}_2 \rightarrow \mathbf{V}_2$ transformarea liniară indusă de i. Rezultă $j(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{i(A)\, i(B)} = \overrightarrow{AB}$, iar aceasta implică coincidența lui j cu identitatea pe $\mathbf{V}_2$. Deoarece $\overrightarrow{Ai(M)} = \overrightarrow{i(A)\, i(M)} = j(\overrightarrow{AM}) = \overrightarrow{AM}$, adică $i(M) = M$, izometria este identitatea pe $\boldsymbol{E}_2$.

Antideplasările nu au proprietatea precedentă.

12. 1) Să se arate că operația de compunere definește pe mulțimea izometriilor lui $\boldsymbol{E}_n$ o structură de grup *(grupul izometric)*.

2) Să se demonstreze că operația de compunere definește pe mulțimea deplasărilor lui $\boldsymbol{E}_n$ o structură de grup *(grupul deplasărilor = subgrup al grupului izometric)*. Acest grup admite subgrupurile: *grupul rotațiilor* de același centru (deplasări cu punct fix) și *grupul translațiilor*.

13. Se dă hipercuadrica $H: x_5 = 2x_1x_2 + 2x_3x_4$.

1) Să se găsească ecuația canonică.

2) Să se găsească ecuația hiperplanului P tangent la H în $A = (1, 1, 1, 1, 4)$. Să se scrie ecuațiile normalei la H în A.

3) Să se determine punctele din H în care normalele sînt paralele cu dreapta

$$D: \frac{x_1 + 2}{3} = \frac{x_2 + 1}{-2} = \frac{x_3 - 1}{-2} = \frac{x_4}{1} = \frac{x_5}{-1}.$$

4) Să se verifice că imaginea funcției $f: H \to \boldsymbol{R}^5$, $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(\frac{2x_2}{\rho}, \frac{2x_1}{\rho}, \frac{2x_4}{\rho}, \frac{2x_3}{\rho}, \frac{-1}{\rho}\right)$, $\rho = \sqrt{1 + 4(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)}$, este semihipersfera $S: x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 = 1$, $x_5 < 0$.

R: 1) $x_5 = x_1'^2 + x_2'^2 - x_3'^2 - x_4'^2$, unde $x_1' = \frac{\sqrt{2}}{2} x_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} x_2$, $x_2' = \frac{\sqrt{2}}{2} x_3 + \frac{\sqrt{2}}{2} x_4$, $x_3' = \frac{\sqrt{2}}{2} x_1 - \frac{\sqrt{2}}{2} x_2$, $x_4' = \frac{\sqrt{2}}{2} x_3 - \frac{\sqrt{2}}{2} x_4$.

2) $P: x_5 + 4 = 2(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$; Normala: $x_1 = 1 - 2t$, $x_2 = 1 - 2t$, $x_3 = 1 - 2t$, $x_4 = 1 - 2t$, $x_5 = t$, $t \in \boldsymbol{R}$.

3) Direcția normalei la H este dată de vectorul $(2x_2, 2x_1, 2x_4, 2x_3, -1)$. Acest vector trebuie să fie paralel cu dreapta D, adică

$$\frac{2x_2}{3} = \frac{2x_1}{-2} = \frac{2x_4}{-2} = \frac{2x_3}{1} = \frac{-1}{-1}.$$

Din $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{3}{2}$, $x_3 = \frac{1}{2}$, $x_4 = -1$, $x_5 = 2x_1x_2 + 2x_3x_4$ găsim punctul $\left(-1, \frac{3}{2}, \frac{1}{2} -1, -4\right)$.

CAPITOLUL 2

GEOMETRIE ANALITICĂ ÎN E_3

§ 1. VECTORI LIBERI

Fie E_3 spațiul geometriei elementare (spațiu d punctual euclidian real tridimensional).

1.1. Mulțimea segmentelor orientate din E_3 care au aceeași direcție, același sens și aceeași lungime se numește *vector liber*.

Un vector liber se reprezintă grafic printr-unul dintre segmentele orientate care aparțin acestei mulțimi.

Notații: $\vec{a}, \vec{b}$ etc. sau $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{PQ}$ etc.

Lungimea unui vector $\overrightarrow{AB}$ sau $\vec{a}$ se notează prin $\|\overrightarrow{AB}\|$ sau $\|\vec{a}\|$.

Un vector de lungime unu se numește *versor* sau *vector unitate*.

Vectorul care are lungimea zero se numește *vector nul* și se notează cu $\vec{0}$.

Vectorii care au aceeași direcție se numesc *coliniari*. Doi vectori coliniari care au sensuri opuse și aceeași lungime se numesc *vectori opuși*.

Doi vectori se numesc *egali* dacă au aceeași direcție, același sens și aceeași lungime.

1.2. Mulțimea vectorilor liberi din E_3 este un spațiu vectorial real tridimensional în raport cu adunarea vectorilor (regula paralelogramului) și cu înmulțirea dintre un număr real și un vector.

1.3. Fie $\{O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ un reper cartezian în E_3 (fig. 2.1). Fiecare vector $\vec{a}$ se exprimă în mod unic în forma $\vec{a} = r\vec{i} + s\vec{j} + t\vec{k}$, iar numerele (r, s, t) se numesc *coordonatele euclidiene* ale lui $\vec{a}$. Lungimea lui $\vec{a}$ este $\|\vec{a}\| = \sqrt{r^2+s^2+t^2}$.

Fie $\vec{a} = (r_1, s_1, t_1)$ și $\vec{b} = (r_2, s_2, t_2)$. Rezultă

$$\vec{a} + \vec{b} = (r_1 + r_2, s_1 + s_2, t_1 + t_2),$$
$$k\vec{a} = (kr_1, ks_1, kt_1), \quad k \in \mathbf{R}.$$

Dacă $A(x_1, y_1, z_1)$ și $B(x_2, y_2, z_2)$ sînt puncte date, atunci

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}$$

și

$$d(A, B) = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

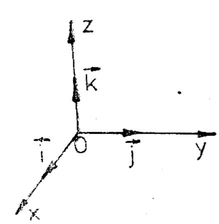


Fig. 2.1

1.4. Numărul

$$(\vec{a}, \vec{b}) = \begin{cases} \|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\| \cos\varphi, & \text{pentru } \vec{a} \neq \vec{0} \text{ și } \vec{b} \neq \vec{0} \\ 0, & \text{pentru } \vec{a} = \vec{0} \text{ sau/și } \vec{b} = \vec{0}, \end{cases}$$

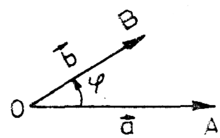


Fig. 2.2

unde φ este unghiul dintre $\vec{a}$ și $\vec{b}$ (fig. 2.2) se numește *produsul scalar* al vectorilor $\vec{a}$ și $\vec{b}$.

În coordonate, $(\vec{a}, \vec{b}) = r_1r_2 + s_1s_2 + t_1t_2$. În acest caz unghiul dintre vectorii nenuli $\vec{a}$ și $\vec{b}$ poate fi găsit prin

$$\cos\varphi = \frac{r_1r_2 + s_1s_2 + t_1t_2}{\sqrt{r_1^2 + s_1^2 + t_1^2}\sqrt{r_2^2 + s_2^2 + t_2^2}}, \qquad \varphi \in [0, \pi].$$

Fie $\vec{b}$ un vector nenul și $\vec{e} = \dfrac{\vec{b}}{\|\vec{b}\|}$. Numărul $(\vec{a}, \vec{e})$ se numește *mărimea algebrică a proiecției* lui $\vec{a}$ pe direcția orientată determinată de $\vec{b}$.

1.5. Vectorul

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{cases} \|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\| \sin\varphi\,\vec{e}, & \text{pentru } \vec{a} \text{ și } \vec{b} \text{ necoliniari} \\ \vec{0}, & \text{pentru } \vec{a} \text{ și } \vec{b} \text{ coliniari}, \end{cases}$$

unde $\vec{e}$ este un versor perpendicular pe $\vec{a}$ și $\vec{b}$ și cu sensul dat de regula mîinii drepte pentru tripletul $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{e})$, iar φ este unghiul dintre $\vec{a}$ și $\vec{b}$, se numește *produsul vectorial* dintre $\vec{a}$ și $\vec{b}$.

Definiția este echivalentă cu

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ r_1 & s_1 & t_1 \\ r_2 & s_2 & t_2 \end{vmatrix}.$$

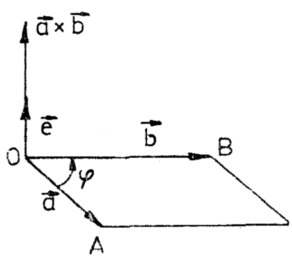


Fig. 2.3

Aria paralelogramului ce se poate construi pe segmentele reprezentative ale lui $\vec{a}$ și $\vec{b}$ (fig. 2.3) este $\|\vec{a} \times \vec{b}\|$. De asemenea se satisface *identitatea lui Lagrange* $\|\vec{a} \times \vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 \cdot \|\vec{b}\|^2 - (\vec{a}, \vec{b})^2$.

1.6. Expresia $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ se numește *dublu produs vectorial*. Se satisface identitatea $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{c})\,\vec{b} - (\vec{a}, \vec{b})\,\vec{c}$ și *identitatea lui Jacobi* $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{0}$ (mulțimea tuturor vectorilor liberi din $\boldsymbol{E}_3$ este o algebră Lie).

1.7. Numărul $(\vec{a}, \vec{b} \times \vec{c})$ se numește *produsul mixt* al celor trei vectori. Modulul acestui număr reprezintă *volumul paralelipipedului* ce se poate construi pe segmentele reprezentative, cu origine comună, ale celor trei vectori (fig. 2.4).

Dacă $\vec{a} = (r_1, s_1, t_1)$, $\vec{b} = (r_2, s_2, t_2)$ și $\vec{c} = (r_3, s_3, t_3)$, atunci definiția este echivalentă cu

$$(\vec{a}, \vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} r_1 & s_1 & t_1 \\ r_2 & s_2 & t_2 \\ r_3 & s_3 & t_3 \end{vmatrix}.$$

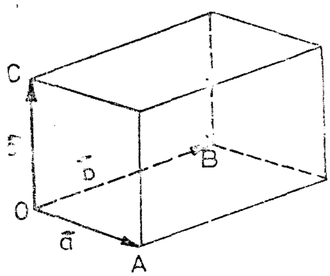


Fig. 2.4

Se satisface *identitatea lui Lagrange.*

$$(\vec{a}\times\vec{b},\ \vec{c}\times\vec{d}) = \begin{vmatrix} (\vec{a},\ \vec{c}) & (\vec{a},\ \vec{d}) \\ (\vec{b},\ \vec{c}) & (\vec{b},\ \vec{d}) \end{vmatrix}.$$

1.8. Baza vectorială $\{\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}\}$ se numește *orientată pozitiv (negativ)* dacă $(\vec{a},\ \vec{b}\times\vec{c})$ este pozitiv (negativ).

Exerciții și probleme

1. Fie trapezul dreptunghic $ABCD$ în care $AD \parallel BC$, $\overrightarrow{AD} = \vec{p}$; $\overrightarrow{AB} = \vec{q}$; $\widehat{ABC} = \frac{5\pi}{6}$. Să se descompună celelalte laturi și diagonalele trapezului după direcțiile vectorilor $\vec{p}$ și $\vec{q}$.

2. Se duce o paralelă A_1B_1 la latura AB a unui triunghi ABC; $A_1 \in AC$, $B_1 \in BC$ și se construiesc cercurile care au ca diametre AB_1 și A_1B (fig. 2.5). Să se arate că axa radicală a celor două cercuri este înălțimea care trece prin cel de al treilea vîrf.

3. Să se calculeze unghiul dintre vectorii $\vec{m}$ și $\vec{n}$ știind că $\vec{a}\perp\vec{b}$, $\vec{c}\perp\vec{d}$, unde $\vec{a} = \vec{m} - \vec{n}$, $\vec{b} = 2\vec{m} + 3\vec{n}$, $\vec{c} = 3\vec{m} + \vec{n}$, $\vec{d} = -\vec{m} + 3\vec{n}$.

R: Ortogonalitatea vectorilor conduce la $2\|\vec{m}\|^2 + (\vec{m},\ \vec{n}) - 3\|\vec{n}\|^2 = 0$, $-3\|\vec{m}\|^2 + 8(\vec{m},\ \vec{n}) + 3\|\vec{n}\|^2 = 0$. Adunînd obținem $\|\vec{m}\| = 9\|\vec{n}\| \cos\varphi$. Găsim $\varphi = \arccos\left(\pm\frac{1}{\sqrt{57}}\right)$.

4. Se dau punctele A, B, C prin vectorii lor de poziție $\overrightarrow{OA} = 14\vec{i} - 7\vec{j} + 2\vec{k}$ $\overrightarrow{OB} = 2\vec{i} + 2\vec{j} - 7\vec{k}$, $\overrightarrow{OC} = -2\vec{i} + 7\vec{j} + 2\vec{k}$. Să se arate că 1) Triunghiul AOB este dreptunghic, 2) Triunghiul BOC este isoscel. Se cer 3) perimetrul triunghiului ABC, 4) măsura unghiului BAC, 5) expresia analitică a versorului bisectoarei unghiului BAC.

5. În capătul de sus, B, al unui stîlp vertical, BD, este articulat un scripete mic peste care trece un fir. Capătul din A al firului este fixat de un suport, iar de celălalt capăt, trecînd peste scripetele mic C, este prins corpul de greutate P. Știind că $\alpha = 30°$ și $\beta = 45°$, să se determine forța care va supune la compresiune stîlpul de susținere BD (fig. 2.6).

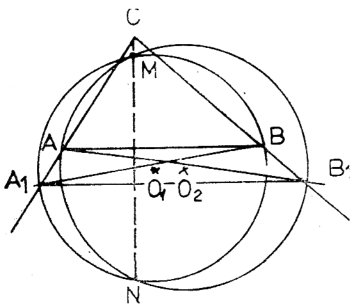


Fig. 2.5

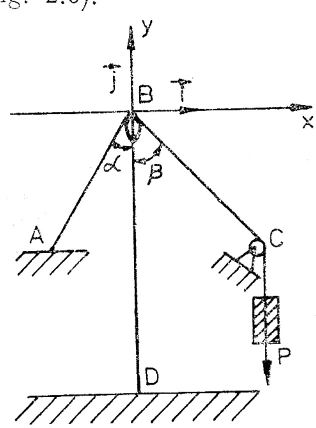


Fig. 2.6

Soluție. Compresiunea în stîlp este dată de suma proiecțiilor verticale ale tensiunilor din firul trecut după scripetele B.

Față de reperul cartezian $\{B; \vec{i}, \vec{j}\}$, forța de compresiune, $\vec{F} = -(P\cos\alpha + P\cos\beta)\vec{j} = -\frac{P}{2}(\sqrt{3}+\sqrt{2})\vec{j}$; $\|\vec{F}\| = \frac{P}{2}(\sqrt{3}+\sqrt{2})$.

6. Știind că tensiunea în cablul AC este de 2 100 N, să se determine tensiunile necesare în cablurile AB și AD astfel ca rezultanta lor în A să fie verticală (fig. 2.7, a, b).

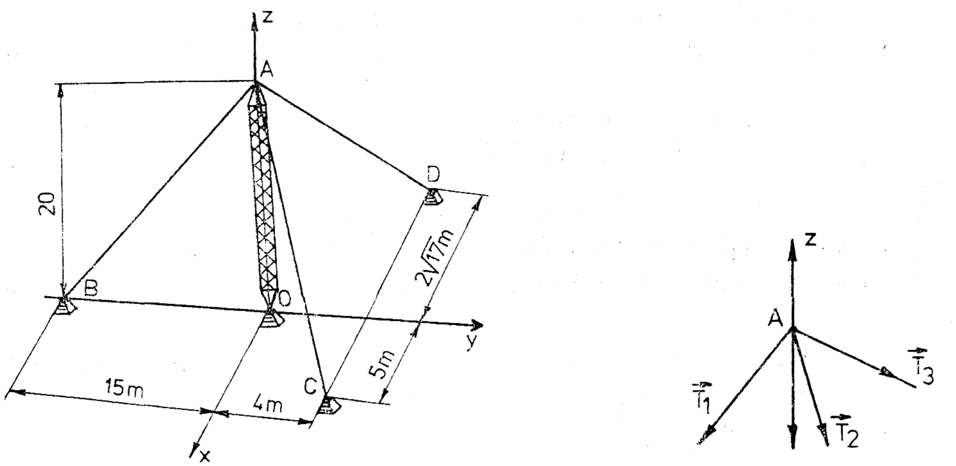


Fig. 2.7

Soluție. Fie reperul cartezian $\{O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$. Cunoscînd direcțiile tensiunilor, putem scrie $\vec{T}_1 = \frac{T_1}{25}(-15\vec{j} - 20\vec{k})$, $\vec{T}_2 = \frac{T_2}{21}(5\vec{i} + 4\vec{j} - 20\vec{k}) = 100(5\vec{i} + 4\vec{j} - 20\vec{k})$, $\vec{T}_3 = \frac{T_3}{22}(-2\sqrt{17}\,\vec{i} + 4\vec{j} - 20\vec{k})$.

Punînd condiția ca rezultanta în A să fie verticală, obținem $500 - \frac{T_3\sqrt{17}}{11} = 0$, $-\frac{3}{5}T_1 + 400 + \frac{2}{11}T_3 = 0$.

Rezultă $T_1 \approx 1\,083\ N$, $T_3 \approx 1\,375\ N$.

7. Fie forțele $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$ (fig. 2.8), avînd aceeași mărime, $\|\vec{F}_1\| = \|\vec{F}_2\| = \|\vec{F}_3\| = P$. Să se găsească relația dintre lungimile l_1, l_2, l_3 astfel încît sistemul format din cele trei forțe să se reducă la o rezultantă unică. Să se determine mărimea și direcția rezultantei și distanța de la originea O pînă la suportul rezultantei.

Indicație. Torsorul în O este $\vec{R} = P(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$; $\vec{M}_0 = -P(l_3\vec{i} + l_1\vec{j} + l_2\vec{k})$. Pentru a apărea o rezultantă unică este necesar ca momen-

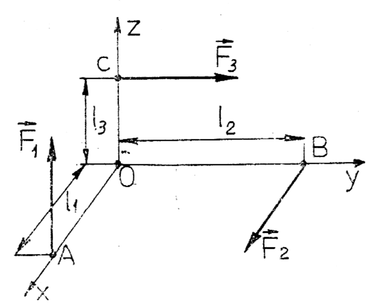


Fig. 2.8

tul minim, $m = \vec{M}\frac{\vec{R}}{\|\vec{R}\|}$ să fie nul, adică $l_1 + l_2 + l_3 = 0$. Mărimea rezultantei, $\|\vec{R}\| = \sqrt{3}\,P$, direcția sa fiind definită de $\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Distanța de la origine la suportul forței este $d = \sqrt{\frac{l_1^2 + l_2^2 + l_3^2}{3}}$.

8. Se dau vectorii $\vec{a} = \vec{i} + 2\lambda\vec{j} - (\lambda - 1)\vec{k}$, $\vec{b} = (3 - \lambda)\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$. Se cere

1) valoarea lui λ pentru care $\vec{a}$ și $\vec{b}$ sînt ortogonali.

2) mărimea algebrică a proiecției vectorului $\vec{a}$ pe vectorul $\vec{a} + \vec{b}$ pentru $\vec{a} \perp \vec{b}$,

3) expresia analitică a versorului perpendicular simultan pe $\vec{a}$ și $\vec{b}$.

9. Fie vectorii $\overrightarrow{OA} = \vec{j} - 3\vec{k}$, $\overrightarrow{AC} = 4\vec{i} + 7\vec{j}$, $\overrightarrow{BC} = 4\vec{i} + 8\vec{j} - 8\vec{k}$. Se cere

1) vectorul de poziție al punctului B, respectiv C,

2) lungimea înălțimii triunghiului ABC coborîtă din A,

3) expresia analitică a unui vector $\vec{v}$ din planul yOz astfel ca $\vec{v} \perp \overrightarrow{BC}$ și $\|\vec{v}\| = \|\overrightarrow{BC}\|$.

10. Se consideră triunghiul ABC pentru care vectorii de poziție sînt $\overrightarrow{OA} = 2\vec{i} + 6\vec{j} + 7\vec{k}$, $\overrightarrow{OB} = -3\vec{i} - 2\vec{j}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$. Se cer

1) măsura unghiului ABC,
2) perimetrul triunghiului ABC,
3) aria triunghiului ABC,
4) lungimea înălțimii BB'.

R: 1) $\cos(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}}) = \frac{58}{\sqrt{138 \cdot 29}}$, 2) $\|\overrightarrow{AB}\| + \|\overrightarrow{BC}\| + \|\overrightarrow{CA}\| = \sqrt{138} + \sqrt{29} + \sqrt{51}$, 3) aria $(ABC) = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\| = \frac{1}{2}\sqrt{638}$, 4) $\|\overrightarrow{BB'}\| = \sqrt{\frac{638}{51}}$.

11. Fie un solid rigid care se rotește în jurul dreptei $D: \frac{x}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{2}$ cu viteza unghiulară $\vec{\omega}$. Să se determine vectorul viteză al punctului $M_0\,(3, 1, -5)$ din solid (fig. 2.9).

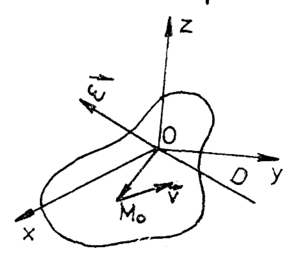


Fig. 2.9

Soluție. Vectorul viteză al punctului M_0 este $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}_0$, unde $\vec{r}_0$ este vectorul de poziție al punctului M_0, iar $\vec{\omega} = \pm\omega\vec{u}$, $\vec{u}$ fiind versorul direcției dreptei D.

$$\vec{u} = \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} = \frac{2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \frac{2}{3}\vec{i} - \frac{1}{3}\vec{j} + \frac{2}{3}\vec{k},\quad \omega = \pm\omega\left(\frac{2}{3}\vec{i} - \frac{1}{3}\vec{j} + \frac{2}{3}\vec{k}\right),$$

$$\vec{v} = \pm\frac{\omega}{3}\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -5 \end{vmatrix},\quad \vec{v} = \pm\frac{\omega}{3}(3\vec{i} + 16\vec{j} + 5\vec{k}),\quad \|\vec{v}\| = \omega\frac{\sqrt{290}}{3}.$$

12. În vîrfurile A, B, D, E, H, ale unei plăci hexagonale acționează forțe perpendiculare pe placă cu sensurile din figura 2.10. Se cunosc modulele forțelor $F_B = 1N$, $F_H = 2N$. Știind că latura hexagonului regulat este $l = 2$, să se determine forțele aplicate în vîrfurile A, D, E astfel încît placa să rămînă în echilibru.

Soluție. Se atașează plăcii sistemul de axe $Oxyz$ față de care vîrfurile hexagonului au coordonatele $A(-3, -\sqrt{3}, 0)$, $B(-2, 0, 0)$, $D(1, -\sqrt{3}, 0)$ $E(0, -2\sqrt{2}, 0)$, $H(-2, -2\sqrt{2}, 0)$. Pentru ca placa să stea în echilibru sînt necesare următoarele condiții: forța rezultantă a sistemului să fie zero și momentul rezultant al sistemului de forțe să fie zero.

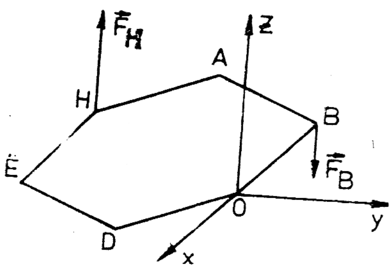


Fig. 2.10

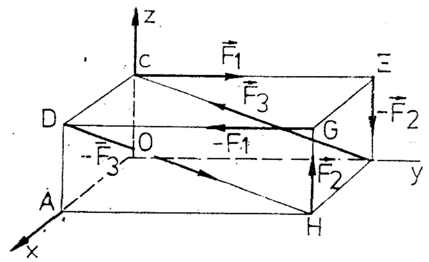


Fig. 2.11

Prin urmare $\vec{F}_A + \vec{F}_B + \vec{F}_D + \vec{F}_E + \vec{F}_H = \vec{0}$ și $\overrightarrow{OA} \times \vec{F}_A + \overrightarrow{OB} \times \vec{F}_B + \overrightarrow{OD} \times \vec{F}_D + \overrightarrow{OE} \times \vec{F}_E + \overrightarrow{OH} \times \vec{F}_H = \vec{0}$. Aceste relații sînt echivalente cu $(\vec{F}_A + \vec{F}_D + \vec{F}_E)\vec{k} = -\vec{k}$, respectiv

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & -\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & F_A \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & F_D \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & F_E \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & F_H \end{vmatrix} = \vec{0}.$$

Rezultă sistemul $F_A + F_D + F_E = -1$, $-F_A - F_D - 2F_E = 4$, $3F_A - F_D = -2$ a cărui soluție este $F_A = 0$, $F_D = 2$, $F_E = -3$, sau $F_A = 0$, $F_D = (2N)\,k$, $F_E = (-3N)\,\vec{k}$.

13. Trei cupluri acționează asupra unui paralelipiped avînd muchiile $OA = OC = a$, $OB = 3a$ (fig. 2.11). Știind că $\|\vec{F}_1\| = 2\vec{F}$, $\|\vec{F}_2\| = \frac{F}{2}$, $\|\vec{F}_3\| = 3F$, să se determine mărimea și direcția momentului cuplului rezultant.

Soluție. Expresiile analitice ale forțelor care formează cuplurile sînt $\vec{F}_1 = 2F\vec{j}$, $\vec{F}_2 = \frac{F}{2}\vec{k}$, $\vec{F}_3 = -\frac{9F}{\sqrt{10}}\vec{j} + \frac{3F}{\sqrt{10}}\vec{k}$.

Momentele celor trei cupluri sînt $\overrightarrow{M}_1 = \overrightarrow{DC} \times \vec{F}_1 = -2aF\vec{k}$, $\overrightarrow{M}_2 = \overrightarrow{BH} \times \vec{F}_2 = -\frac{aF}{2}\vec{j}$, $\overrightarrow{M}_3 = \overrightarrow{HB} \times \vec{F}_3 = \frac{3aF}{\sqrt{10}}\vec{j} + \frac{9aF}{\sqrt{10}}\vec{k}$.

Cuplul rezultant are momentul $\overrightarrow{M} = \sum_{i=1}^{3} M_i = aF\left(\frac{3}{\sqrt{10}} - \frac{1}{2}\right)\vec{j} + aF\left(\frac{9}{\sqrt{10}} - 2\right)\vec{k}$, cu $\|\overrightarrow{M}\| = aF\sqrt{\frac{53}{4} - \frac{39}{\sqrt{10}}}$ și direcția definită de cosinusurile directoare

$$\cos\alpha = 0, \qquad \cos\beta = \frac{\frac{3}{\sqrt{10}} - \frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{53}{4} - \frac{39}{\sqrt{10}}}}, \qquad \cos\gamma = \frac{\frac{9}{\sqrt{10}} - 2}{\sqrt{\frac{53}{4} - \frac{39}{\sqrt{10}}}}.$$

14. Să se calculeze aria paralelogramului construit pe segmentele reprezentative, cu origine comună ale vectorilor

1) $\vec{r}_1 = -\sin v \sin u\vec{i} + \sin v \cos u\vec{j}$;

$\vec{r}_2 = \cos v \cos u\vec{i} + \cos v \sin u\vec{j} + \frac{\cos^2 v}{\sin v}\vec{k}$

2) $\vec{r}_1 = \frac{1 + \cos v}{\cos^2 u}\vec{j} + \frac{\sin u \sin v}{\cos^2 u}\vec{k}$;

$\vec{r}_2 = -\sin v\vec{i} - \sin v \operatorname{tg} u\vec{j} + \frac{\cos v}{\cos u}\vec{k}$,

folosind identitatea lui Lagrange.

15. Se dau vectorii $\vec{a} = \vec{p} - \alpha\vec{q} + 3\vec{r}$, $\vec{b} = \alpha\vec{p} - \vec{q} + \vec{r}$, $\vec{c} = 3\vec{p} + \vec{q} - \vec{r}$, unde $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$ sînt versori reciproc ortogonali.

1) Să se găsească valoarea lui α astfel încît vectorii $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, să fie coplanari.

2) Pentru $\alpha = 2$, să se afle înălțimea paralelipipedului construit pe segmentele reprezentative ale vectorilor $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, înălțime corespunzătoare bazei formate de vectorii $\vec{a}$ și $\vec{b}$.

16. Să se calculeze lungimile diagonalelor și aria paralelogramului construit pe segmentele reprezentative, cu origine comună, ale vectorilor $\vec{a}$, $\vec{b}$, unde $\vec{a} = 5\vec{p} - 3\vec{q}$, $\vec{b} = \vec{p} + 2\vec{q}$, $\|\vec{p}\| = 3$, $\|\vec{q}\| = 2$, $(\widehat{\vec{p}, \vec{q}}) = \frac{\pi}{6}$.

R: $\vec{d}_1 = \vec{a} + \vec{b} = 6\vec{p} - \vec{q}$; $\|\vec{d}_1\|^2 = (\vec{d}_1, \vec{d}_1)$, $\|\vec{d}_1\| = \sqrt{328 - 36\sqrt{3}}$;

$\vec{d}_2 = \vec{a} - \vec{b}$, $\|\vec{d}_2\| = \sqrt{244 - 120\sqrt{3}}$; $\vec{a} \times \vec{b} = 13(\vec{p} \times \vec{q})$; $\|\vec{a} \times \vec{b}\| = 13\|\vec{p}\|\,\|\vec{q}\| \sin\frac{\pi}{6} = 39$.

17. Să se determine volumul paralelipipedului construit pe segmentele reprezentative ale vectorilor $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$,

1) $\vec{a} = \vec{m} - 2\vec{n} + \vec{p}$, $\vec{b} = 3\vec{m} + 5\vec{n} - 2\vec{p}$, $\vec{c} = 2\vec{m} + 7\vec{n} - 3\vec{p}$

2) $\vec{a} = \vec{m} - 2\vec{n} + \vec{p}$, $\vec{b} = 3\vec{m} + 5\vec{n} - 4\vec{p}$, $\vec{c} = 2\vec{m} + 7\vec{n} - 3\vec{p}$

știind că $\|\vec{m}\| = 3$, $\|\vec{n}\| = \sqrt{2}$, $\|\vec{p}\| = 1$, $(\vec{n}, \vec{p}) = \frac{\pi}{6}$, iar unghiul format de vectorul $\vec{m}$ și planul determinat de vectorii $\vec{n}$ și $\vec{p}$ are măsura $\frac{\pi}{4}$.

R: 1) $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0$, prin urmare vectorii $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ sînt coplanari,

2) $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 22(\vec{m}, \vec{n}, \vec{p}) = 22\|\vec{m}\|\,\|\vec{n}\times\vec{p}\| \cos\frac{\pi}{4} = 33\sqrt{2}\,\|\vec{n}\|\,\|\vec{p}\| \sin(\vec{n}, \vec{p}) = 33$.

18. Fie triedrul $(O;\ \vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$. *Vectorii reciproci* vectorilor $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ se definesc prin

$$\vec{a}' = \frac{\vec{b}\times\vec{c}}{(\vec{a}, \vec{b}\times\vec{c})}, \qquad \vec{b}' = \frac{\vec{c}\times\vec{a}}{(\vec{a}, \vec{b}\times\vec{c})}, \qquad \vec{c}' = \frac{\vec{a}\times\vec{b}}{(\vec{a}, \vec{b}\times\vec{c})}.$$

Triedrul $(O;\ \vec{a}', \vec{b}', \vec{c}')$ se numește *triedrul reciproc*. Să se arate că

1) următoarele relații caracterizează complet vectorii reciproci

$$\begin{array}{lll} (\vec{a}, \vec{a}') = 1 & (\vec{a}, \vec{b}') = 0 & (\vec{a}, \vec{c}') = 0 \\ (\vec{b}, \vec{a}') = 0 & (\vec{b}, \vec{b}') = 1 & (\vec{b}, \vec{c}') = 0 \\ (\vec{c}, \vec{a}') = 0 & (\vec{c}, \vec{b}') = 0 & (\vec{c}, \vec{c}') = 1, \end{array}$$

2) $((\vec{a}'\times\vec{b}'), [(\vec{b}'\times\vec{c}')\times(\vec{c}'\times\vec{a}')]) = \frac{1}{(\vec{a}, \vec{b}\times\vec{c})^2}$,

3) $\frac{(\vec{a}', \vec{b}\times\vec{c}) + (\vec{a}, \vec{b}'\times\vec{c}) + (\vec{a}, \vec{b}\times\vec{c}')}{(\vec{a}, \vec{b}'\times\vec{c}') + (\vec{b}, \vec{c}'\times\vec{a}') + (\vec{c}, \vec{a}'\times\vec{b}')} = \frac{\vec{a}'^2 + \vec{b}'^2 + \vec{c}'^2}{\vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2}(\vec{a}, \vec{b}\times\vec{c})^2$

4) Să se verifice aceste relații pentru cazul numeric $\vec{a} = -2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = 5\vec{i} - 3\vec{j} + 9\vec{k}$, $\vec{c} = 9\vec{i} + 4\vec{j} + 2\vec{k}$.

19. Se dau vectorii $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}, \vec{b} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}, \vec{c} = -\vec{j} + 2\vec{k}$. Se cere

1) volumul paralelipipedului construit pe segmentele reprezentative, cu origine comună, ale vectorilor $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$;

2) expresia analitică a vectorilor reciproci $\vec{a}'$, $\vec{b}'$, $\vec{c}'$;

3) volumul paralelipipedului construit pe segmentele reprezentative ale vectorilor reciproci $\vec{a}'$, $\vec{b}'$, $\vec{c}'$;

4) să se arate că $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) \neq (\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$ pentru vectorii dați mai sus.

R: 1) $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 7$; 2) $\vec{a}' = \frac{1}{7}(5\vec{i} - 6\vec{j} - 3\vec{k})$, $\vec{b}' = \frac{1}{7}(-\vec{i} + 4\vec{j} + 2\vec{k})$, $\vec{c}' = \frac{1}{7}(3\vec{i} - 5\vec{j} + \vec{k})$; 3) $(\vec{a}', \vec{b}', \vec{c}') = \frac{1}{7}$.

4) $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = -9\vec{i} + \vec{j} - 17\vec{k}$; $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} = -23\vec{i} - 13\vec{j} + 4\vec{k}$. Cei doi vectori sînt egali dacă $\vec{a}\|\vec{c}$ sau $\vec{b}\perp\vec{a}$, $\vec{b}\perp\vec{c}$.

20. Să se arate că vectorii $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j}$, $\vec{b} = -\vec{i} + 3\vec{k}$, $\vec{c} = -\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ pot constitui o bază pentru V_3. Să se scrie expresia analitică a vectorului $\vec{v} = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ în această bază.

21. Să se rezolve ecuația vectorială $\vec{x}\times(\vec{x}\times\vec{a}) = \vec{b}$.

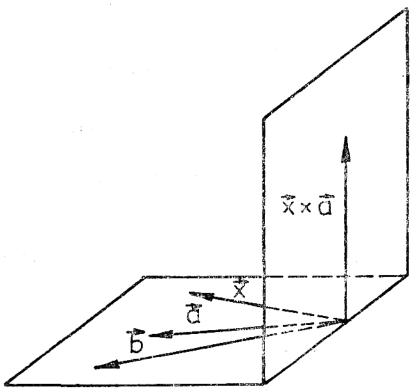


Fig. 2.12

Soluție. Explicităm dublul produs vectorial și atunci ecuația devine $\vec{x}(\vec{x}, \vec{a}) = x^2\vec{a} + \vec{b}$. Se observă că vectorii $\vec{x}, \vec{a}, \vec{b}$ sînt coplanari. Dacă $\vec{a}$ și $\vec{b}$ sînt coliniari atunci $\vec{x}\perp\vec{a}$; dacă $\vec{a}$ și $\vec{b}$ sînt necoliniari (fig. 2.12), atunci se caută o soluție de forma $\vec{x} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$; această soluție trebuie să verifice ecuația vectorială,

$$(\alpha\vec{a} + \beta\vec{b})\times[(\alpha\vec{a} + \beta\vec{b})\times\vec{a}] = \vec{b}$$

sau

$$\begin{vmatrix} \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} & \vec{a} \\ (\alpha\vec{a} + \beta\vec{b})^2 & (\vec{a}, (\alpha\vec{a} + \beta\vec{b}))] \end{vmatrix} = \vec{b},$$

de unde

$$\vec{a}[-\alpha\beta(\vec{a}, \vec{b}) - \beta^2\vec{b}^2] + [\alpha\beta\vec{a}^2 + \beta^2(\vec{a}, \vec{b})]\,\vec{b} = \vec{b}.$$

Egalitatea are sens dacă

$$\alpha\beta(\vec{a}, \vec{b}) + \beta^2\vec{b}^2 = 0 \qquad \alpha\beta\vec{a}^2 + \beta^2(\vec{a}, \vec{b}) = 1.$$

Am obținut un sistem în $\alpha\beta$ și β, unde

$$\beta^2 = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{(\vec{a}, \vec{b})^2 - \vec{a}^2\vec{b}^2}, \qquad \alpha\beta = \frac{\vec{b}^2}{(\vec{a}, \vec{b})^2 - \vec{a}^2\vec{b}^2}$$

$(\vec{a}, \vec{b})^2 - \vec{a}^2\vec{b}^2 \neq 0$ deoarece $\vec{a}\times\vec{b} \neq \vec{0}$. Vectorul $\vec{x}$ se mai poate scrie $\vec{x} = \alpha\left(\vec{a} + \frac{\beta}{\alpha}\vec{b}\right)$. Deducem $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\beta^2}{\alpha\beta} = -\frac{(\vec{a}, \vec{b})}{b^2}$. Rezultă

$$\vec{x} = \alpha\,\frac{\vec{a}b^2 - \vec{b}(\vec{a}, \vec{b})}{b^2}.$$

§ 2. DREAPTA ȘI PLANUL

2.1. Dreapta determinată de un punct $M_0(x_0, y_0, z_0)$ și de vectorul director $\vec{a}(l, m, n)$,

D: $\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{a}$, $t\in\mathbf{R}$ (ecuația vectorială),

D: $x = x_0 + lt,\ y = y_0 + mt,\ z = z_0 + nt,\ t \in \boldsymbol{R}$

(ecuații parametrice),

$$D: \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}.$$

Convenție: dacă un numitor este zero, atunci numărătorul corespunzător trebuie egalat cu zero.

2.2. Dreapta determinată de două puncte $M_i(x_i, y_i, z_i)$, $i = 1, 2$,

$$D: \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

2.3. Unghiul dintre două drepte orientate D_1, D_2, de vectori directori $\vec{a}$ respectiv $\vec{b}$,

$$\cos\varphi = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{\|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|}, \qquad \varphi \in [0, \pi].$$

2.4. Planul determinat de un punct $M_0(x_0, y_0, z_0)$ și de un vector normal $\vec{n}(a, b, c)$.

$$P:\ a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

2.5. Ecuația generală a unui plan,

$$ax + by + cz + d = 0, \qquad a^2 + b^2 + c^2 \neq 0.$$

2.6. Planul determinat de trei puncte necoliniare $M_i(x_i, y_i, z_i)$, $i = 1, 2, 3$,

$$P: \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

2.7. Planul determinat de un punct $M_0(x_0, y_0, z_0)$, și de doi vectori necoliniari $\vec{u}(l_1, m_1, n_1)$ și $\vec{v}(l_2, m_2, n_2)$,

P: $\vec{r} = \vec{r}_0 + r\vec{u} + s\vec{v}$ (ecuația vectorială)

$$P: \begin{cases} x = x_0 + rl_1 + sl_2 \\ y = y_0 + rm_1 + sm_2, \quad r,\ s \in \boldsymbol{R} \text{ (ecuații parametrice)}, \\ z = z_0 + rn_1 + sn_2 \end{cases}$$

$$P: \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0.$$

2.8. Unghiul dintre două plane orientate P_1, P_2 cu vectorii normali $\vec{n}_1$ respectiv $\vec{n}_2$,

$$\cos\varphi = \frac{(\vec{n}_1, \vec{n}_2)}{\|\vec{n}_1\|\,\|\vec{n}_2\|}, \qquad \varphi \in [0, \pi].$$

2.9. Dreapta ca intersecție de plane,

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}, \qquad \operatorname{rang}\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix} = 2$$

Vectorul $(a_1\vec{i} + b_1\vec{j} + c_1\vec{k}) \times (a_2\vec{i} + b_2\vec{j} + c_2\vec{k})$ dă direcția dreptei.

Dacă $r, s \in \boldsymbol{R}$, $r^2 + s^2 \neq 0$, atunci

$$r(a_1x + b_1y + c_1z + d_1) + s(a_2x + b_2y + c_2z + d_2) = 0$$

este ecuația fasciculului de plane care trec prin dreapta considerată.

2.10. Distanța de la un punct A la o dreaptă D ce trece prin M_0 și are direcția $\vec{a}$,

$$\mathbf{d}(A\,;\,D) = \frac{\|\overrightarrow{M_0A} \times \vec{a}\|}{\|\vec{a}\|}.$$

2.11. Distanța de la un punct $M_0(x_0, y_0, z_0)$ la planul P: $ax + by + cz + d = 0$,

$$\mathbf{d}(M_0\,;\,P) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

2.12. Unghiul dintre o dreaptă orientată de direcție $\vec{a}$ și un plan orientat de normală $\vec{n}$,

$$\sin\varphi = \frac{(\vec{a}, \vec{n})}{\|\vec{a}\|\,\|\vec{n}\|}, \qquad \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

2.13. Pentru a determina ecuațiile perpendicularei comune a două drepte D_1 și D_2 de vectori directori $\vec{a}_1$ respectiv $\vec{a}_2$ se poate proceda astfel:

— se găsește direcția perpendicularei comune, $\vec{n} = \vec{a}_1 \times \vec{a}_2$,

— se scrie ecuația unui plan P_1 ce trece prin D_1 și conține pe $\vec{n}$,

— se scrie ecuația unui plan P_2 ce trece prin D_2 și conține pe $\vec{n}$. $P_1 \cap P_2$ este perpendiculara comună căutată.

Distanța dintre dreptele D_1 și D_2 este

$$\mathbf{d}(D_1, D_2) = \frac{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1, \vec{a}_1 \times \vec{a}_2|}{\|\vec{a}_1 \times \vec{a}_2\|}.$$

Exerciții și probleme

1. Se dau punctele $A(3, -1, 3)$, $B(5, 1, -1)$, $C(0, 4, -3)$. Se cer

1) ecuațiile carteziene, parametrice și ecuația vectorială ale dreptelor AB, respectiv AC;

2) măsura unghiului dintre aceste drepte;

3) ecuația carteziană și ecuația vectorială ale planului care conține punctul C și este perpendicular pe dreapta AB;

4) locul geometric al punctelor egal depărtate de punctele A și B;

5) distanța dintre planele obținute la 3) și 4).

Soluție. 1) Conform cu § 2.2 obținem AB: $\frac{x-3}{2}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-3}{-4}$, unde putem considera $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}$. Ecuațiile parametrice sînt $x=3+t$, $y=-1+t$, $z=3-2t$, $t\in\mathbf{R}$. Ecuația vectorială a dreptei AB este $\vec{r}=\vec{r}_A+t\vec{a}$, unde $\vec{r}_A$ este vectorul de poziție al punctului A; o altă formă pentru ecuația vectorială a unei drepte este $\vec{r}\times\vec{a}=\vec{b}$, unde $\vec{b}=\vec{r}_A\times\vec{a}$; deci AB: $\vec{r}\times(\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k})=-\vec{i}+9\vec{j}+4\vec{k}$. Analog AC; $\frac{x-3}{-3}=\frac{y+1}{5}=$ $=\frac{z-3}{-6}$; $x=3-3s$, $y=-1+5s$, $z=3-6s$, $s\in\mathbf{R}$; $\vec{r}\times(-3\vec{i}+5\vec{j}-$ $-6\vec{k})=-9\vec{i}+9\vec{j}+12\vec{k}$.

2) Notăm $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}$, $\vec{b}=-3\vec{i}+5\vec{j}-6\vec{k}$. Conform cu § 2.3

$$\cos\varphi=\frac{1\cdot(-3)+1\cdot5+(-2)\cdot(-6)}{\sqrt{1^2+1^2+(-2)^2}\sqrt{(-3)^2+5^2+(-6)^2}}=\sqrt{\frac{7}{15}}$$

și deci $\varphi=\arccos\sqrt{\frac{7}{15}}$.

3) Vectorul director al dreptei AB este un vector coliniar cu normala planului căutat P. Conform cu 2.4 ecuația planului P este: $1(x-0)+$ $+1(y-4)+(-2)(z+3)=0$ sau $x+y-2z-10=0$. Ecuația vectorială este P: $(\vec{r},\ (\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}))=10$.

4) Locul geometric este planul mediator Q al segmentului AB; Q: $x+y-2z-2=0$.

5) $P \parallel Q$; fie M_0 un punct cunoscut al planului Q, $M_0(1,\ 1,\ 0)$; $\mathbf{d}(P,\ Q)=\mathbf{d}(M_0,\ P)$. Conform cu 2.11,

$$\mathbf{d}(M_0,\ P)=\frac{|1\cdot1+1\cdot1+(-2)\cdot0-10|}{\sqrt{1^2+1^2+(-2)^2}}=\frac{4}{3}\sqrt{6}.$$

2. Se consideră punctele $A(1,\ 3,\ 0)$, $B(3,\ -2,\ 1)$, $C(\alpha,\ 1,\ -3)$, $D(7,\ -2,\ 3)$. Să se determine α astfel încît punctele să fie coplanare; să se scrie ecuația carteziană a planului determinat de ele. Ce se poate spune despre acest plan?

3. Să se scrie ecuația planului care trece prin punctul $M_0(2,\ -1,\ 1)$ și este perpendicular pe dreapta definită de planele P_1: $x+2y+2z+2=0$, P_2: $x+y+z+1=0$.

R: Direcția normalei la plan coincide cu direcția dreptei D, unde

$$D:\begin{cases} x+2y+2z+2=0\\ x+y+z+1=0.\end{cases}$$

Vectorul director al dreptei D este $\vec{a}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\vec{j}-\vec{k}$.

P: $y-z+2=0$. Planul obținut este paralel cu Ox.

4. Să se scrie ecuația planului care trece prin $M_0\ (1,\ -1,\ 3)$ și este paralel cu dreptele

$$1)\ D_1:\begin{cases} 5x+y-2z+12=0\\ x-3=0\end{cases},\qquad D_2:\begin{cases} x+y-z=0\\ 2x-5y+3z-1=0.\end{cases}$$

5. Să se scrie ecuația planului care trece prin $M_0(-1, 3, 3)$ și conține dreapta D

1) $D: \begin{cases} x + 2y + 3z - 1 = 0 \\ 2x - y - z - 3 = 0, \end{cases}$

2) $D: \dfrac{x-4}{1} = \dfrac{y+2}{0} = \dfrac{z+1}{2},$

3) $D: \ x = 1 + 2t, \ y = -1 + t, \ z = 1 + 3t, \ t \in \boldsymbol{R}.$

6. Se dau planele $P: \ 2x - y - z - 2 = 0$, $Q: \ x + 2y + 2z + 1 = 0$, $R: \ x + 7y + 7z + \alpha = 0$ și punctul $A(1, -2, 5)$. Se cer

1) expresia analitică a versorului direcției dreptei $D = P \cap Q$.
2) $\mathrm{d}(A, Q)$,
3) simetricul punctului A față de planul Q,
4) simetricul punctului A față de dreapta D.
5) Valoarea lui α astfel ca planele P, Q, R să se taie după o dreaptă.

Soluție.

3) Fie A' simetricul lui A față de planul Q. Pentru a găsi pe A' scriem mai întîi dreapta ce trece prin A și este perpendiculară pe Q,

$$D: \ x = 1 + t, \quad y = -2 + 2t, \quad z = 5 + 2t, \quad t \in \boldsymbol{R}.$$

Fie $\{A_0\} = D \cap Q$, $A_0\left(\frac{1}{9}, -\frac{34}{9}, \frac{29}{9}\right)$; coordonatele lui A' se găsesc observînd că punctul proiecție A_0 este mijlocul segmentului AA'.

Astfel din $\dfrac{1 + x_{A'}}{2} = \dfrac{1}{9}$, $\dfrac{-2 + y_{A'}}{2} = -\dfrac{34}{9}$, $\dfrac{5 + z_{A'}}{2} = \dfrac{29}{9}$ rezultă $A'\left(-\frac{7}{9}, -\frac{46}{9}, \frac{13}{9}\right)$,

4) Notăm cu A_1 simetricul punctului A față de dreapta D. Vom calcula mai întîi coordonatele proiecției ortogonale a punctului A pe dreapta D. Fie acest punct A_0; $\{A_0\} = D \cap P_1$, unde P_1 este planul care conține punctul A și este perpendicular pe dreapta D (fig. 2.13) P_1: $y - z + 7 = 0$. Coordonatele punctului proiecție A_0 constituie soluția sistemului $2x - y - z - 2 = 0$, $x + 2y + 2z + 1 = 0$, $y - z + 7 = 0$.

Rezultă $A_0\left(\frac{3}{5}, -\frac{39}{10}, \frac{31}{10}\right)$. Punctul A_0 fiind mijlocul segmentului AA_1 avem

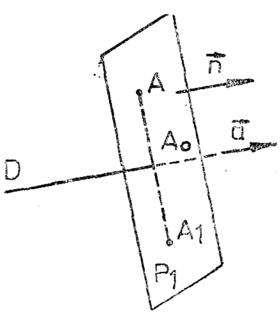


Fig. 2.13.

$$\frac{1 + x_{A_1}}{2} = \frac{3}{5}, \quad \frac{-2 + y_{A_1}}{2} = \frac{-39}{10},$$

$$\frac{5 + z_{A_1}}{2} = \frac{31}{10}; \quad A_1\left(\frac{1}{5}, -\frac{29}{5}, \frac{6}{5}\right).$$

Facem observația că simetricul unui punct față de un plan, respectiv simetricul unui punct față de o dreaptă, se determină cu ajutorul proiecției acelui punct pe plan, respectiv pe dreaptă.

7. Asupra unui cub avînd latura $l = 5$, acționează un sistem alcătuit din forțele $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$, $\vec{F}_4$ și cuplul $\vec{C}_1$, ca în figura 2.14. Știind că $\|\vec{F}_1\| = \|\vec{F}_2\| = 120\ N$, $\|\vec{F}_3\| = \|\vec{F}_4\| = 120\sqrt{2}\ N$ și $\|\vec{C}_1\| = 600\ N$, se cere:

1) să se reducă sistemul dat în punctul A,
2) să se arate cu ce este echivalent sistemul,
3) să se scrie ecuațiile axei centrale.

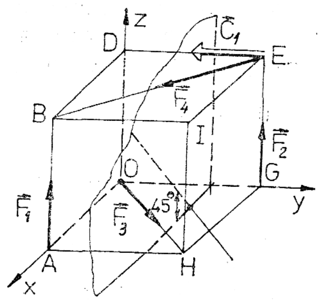


Fig. 2.14.

Soluție. 1) Față de reperul cartezian $\{0: \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, cele patru forțe au expresiile analitice, $\vec{F}_1 = 120\,\vec{k}$, $\vec{F}_2 = 120\,\vec{k}$, $\vec{F}_3 = 120\vec{i} + 120\vec{j}$, $\vec{F}_4 = 120\vec{i} - 120\vec{j}$. Vectorul rezultant, $\vec{R} = 240(\vec{i} + \vec{k})$.

Aplicînd relația de definiție a momentului forței față de punct, pentru fiecare din cele patru forțe se obține,

$$\vec{M}_{A_1} = \vec{0}; \quad \vec{M}_{A_2} = \vec{AG}\times\vec{F}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -5 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 120 \end{vmatrix} = 600(\vec{i} + \vec{j});$$

$$\vec{M}_{A_3} = \vec{AO}\times\vec{F}_3 = -600\,\vec{k}; \quad \vec{M}_{A_4} = \vec{AE}\times\vec{F}_4 = 600(\vec{i} + \vec{j}).$$

Momentul cuplului fiind $\vec{M}_{C_1} = -600\,\vec{j}$, prin însumare se obține momentul rezultant $\vec{M}_A = 600(2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k})$.

2) Deoarece momentul rezultant $\vec{M}_A$ nu este perpendicular pe rezultanta $\vec{R}$, sistemul se reduce la un torsor veritabil.

3) Se face trecerea în originea O. Se aplică relația $\vec{M}_O = \vec{M}_A + \vec{OA}\times\vec{R} = 600(2\vec{i} - \vec{j} - \vec{k})$. Ecuațiile axei centrale sînt $y = \frac{15}{4}$, $x - z = \frac{5}{2}$.

Ea este situată în planul $y = \frac{15}{4}$ și înclinată cu 45° față de planul xOy.

8. Se dau dreapta D: $\frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{1}$ și planul P: $2x - y + 2z + 3 = 0$. Se cer

1) mărimea unghiului dintre dreaptă și plan,

2) ecuația planului Q care e perpendicular pe dreapta D și care conține punctul $D \cap Q$,

3) punctele dreptei D care se află la distanța de două unități față de planul P.

9. În spațiul fizic tridimensional considerăm o sursă de lumină și o oglindă plană. Modelăm acest spațiu prin spațiul punctual euclidian real $\boldsymbol{R}^3$. Presupunînd că, față de reperul canonic din $\boldsymbol{R}^3$, planul oglinzii este P: $x + y + z = 1$, iar direcția unei raze de lumină ce cade pe P este dată de vectorul $\vec{a}(1, -1, 1)$, să se afle:

1) punctul de incidență dintre raza de lumină și oglindă,

2) unghiul de incidență,

3) ecuațiile dreptei ce reprezintă raza reflectată,

4) punctul în care raza reflectată întîlnește un ecran situat în planul ce trece prin O și este paralel cu axele Ox și Oy.

10. Se dau dreptele $D_1: \begin{cases} x - y + z - 3 = 0 \\ 2x + y - 2z + 5 = 0 \end{cases}$, $D_2: \dfrac{x-1}{-5} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z+1}{3}$ și punctul $M_0(-3, 4, 0)$. Se cer

1) ecuația planului P determinat de M_0 și D_2,
2) distanța de la M_0 la D_2,
3) unghiul dintre dreptele D_1 și D_2,
4) ecuațiile dreptei D care trece prin M_0 și se sprijină pe D_1 și D_2.

11. Să se scrie ecuația planului determinat de dreptele

1) $D_1: \begin{cases} 9x - 2y + 3z - 16 = 0 \\ 5x - 2y + z - 6 = 0 \end{cases}$ și $D_2: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z-5}{-4}$

2) $D_1: \dfrac{x-4}{3} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z+3}{2}$ și $D_2: \dfrac{x}{3} = \dfrac{y+2}{-1} = \dfrac{z}{2}$

Să se calculeze distanța dintre dreptele D_1 și D_2.

Soluție. 1) Stabilim expresia analitică a vectorului director $\vec{a}_1$ al dreptei D_1,

$$\vec{a}_1 = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 9 & -2 & 3 \\ 5 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 4\vec{i} + 6\vec{j} - 8\vec{k}.$$

Se constată că $\vec{a}_1 = 2\vec{a}_2$, deci dreptele D_1 și D_2 sînt paralele (fig. 2.15).

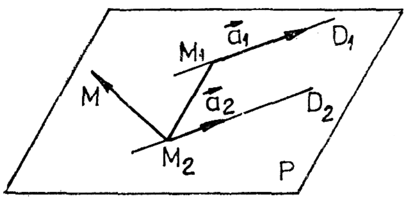


Fig. 2.15.

Vectorul normal la planul P determinat de aceste drepte este $\vec{n} = \vec{a}_2 \times \overrightarrow{M_2M_1}$, unde $M_1 \in D_1$, $M_1\left(0, -\dfrac{1}{2}, 5\right)$; $M_2 \in D_2$, $M_2(1, -1, 5)$. Găsim $\vec{n} = 2(\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k})$. Ecuația carteziană implicită a planului P este $x + 2y + 2z - 9 = 0$.

2) $D_1 \| D_2$, $\vec{a}_1 \| \vec{a}_2 = 3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$, P: $x - 17y - 10z - 34 = 0$, $d(M_1, D_2) = \sqrt{\dfrac{195}{7}}$.

12. Se dau dreptele

1) $D_1: \dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z}{1}$, $D_2: \dfrac{x+1}{7} = \dfrac{y-8}{-3} = \dfrac{z-3}{1}$;

2) $D_1: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z}{1}$, $D_2: \dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z+1}{1}$.

Să se calculeze mărimea unghiului celor două drepte și să se stabilească poziția relativă a dreptelor. Să se scrie ecuațiile perpendicularei comune celor două drepte.

Soluție. 1) Elemente cunoscute $M_1(\vec{r}_1) \in D_1$, $M_1(2, -1, 0)$, $\vec{a}_1 = (-1, 3, 1)$, $M_2(\vec{r}_2) \in D_2$, $M_2(-1, 8, 3)$, $\vec{a}_2 = (7, -3, 1)$; $\cos\varphi = -\frac{15}{\sqrt{649}}$.

Pentru a decide poziția relativă calculăm distanța dintre drepte, conform cu 2.13,

$$\mathbf{d}(D_1, D_2) = \frac{|(\vec{r}_2 - \vec{r}_1, \vec{a}_1 \times \vec{a}_2)|}{\|\vec{a}_1 \times \vec{a}_2\|} = \frac{\begin{vmatrix} -3 & 9 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \\ 7 & -3 & 1 \end{vmatrix}}{\sqrt{6^2 + 8^2 + (-18)^2}} = 0$$

Deoarece $\mathbf{d} = 0$, rezultă că dreptele sînt concurente.

2) $M_1(1, -1, 0)$, $\vec{a}_1 = (2, 3, 1)$; $M_2(2, 0, -1)$; $\vec{a}_2 = (2, 2, 1)$.

$\mathbf{d} = \frac{3}{\sqrt{5}}$ sau $(\vec{a}_1, \vec{b}_2) + (\vec{a}_2, \vec{b}_1) = -3 \neq 0$. Deci dreptele sînt oarecare. Conform cu 2.13 ecuațiile perpendicularei comune sînt date de intersecția planelor P_1 și P_2,

$$\begin{cases} (\overrightarrow{M_1M}, \vec{a}_1 \times \vec{n}) = 0 \\ (\overrightarrow{M_2M}, \vec{a}_2 \times \vec{n}) = 0; \end{cases}$$

$\overrightarrow{M_1M} = \vec{r} - \vec{r}_1, = (x-1)\vec{i} + (y+1)\vec{j} + z\vec{k}$, $\vec{n} = \vec{a}_1 \times \vec{a}_2 = \vec{i} - 2\vec{k}$ etc. Obținem

$$\begin{cases} 6x - 5y + 3z - 11 = 0 \\ 4x - 5y + 2z - 6 = 0. \end{cases}$$

13. Fie punctul A_0 $(-2, 0, 1)$, dreapta D_1: $\frac{x-3}{3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-7}{2}$, planul P: $11x + 6y - z + 2 = 0$. Să se scrie ecuațiile dreptei D_2 care trece prin A_0, intersectează dreapta D_1 și este paralelă cu planul P.

14. Să se scrie ecuația carteziană a planului care trece prin dreapta $D: \begin{cases} 2x - y + z - 3 = 0 \\ x + y - 3z + 1 = 0 \end{cases}$ și este echidistant față de punctele $A(3, -5, 4)$, $B(-5, 1, 0)$.

R: $M_0(-1, -2, 2)$, $M_0 \in P$, P: $15x - 9y + 11z - 25 = 0$.

15. Fie dreapta $D: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{3}$ și punctul $A(-1, -1, 2)$. Se cer

1) ecuația carteziană și vectorială a planului determinat de D și A;
2) distanța de la punctul A la dreapta D;
3) coordonatele simetricului punctului A față de dreapta D.

R: 1) $P: x - 5y + 3z - 10 = 0$, $(\vec{r}, (\vec{i} - 5\vec{j} + 3\vec{k})) = 10$, 2) $\mathbf{d} = \sqrt{10}$, 3) $A'(5, -1, 0)$.

16. Să se studieze poziția relativă a planelor P: $x + y - 2z = 3$, Q: $x - y - z = -1$, R: $3x + 3y - 6z = 5$.

R: Studiul poziției celor trei plane revine la studiul sistemului format de ecuațiile celor trei plane; rangul matricei sistemului este doi și determinantul caracteristic corespunzător este nenul. Conform teoremei lui Rouché sistemul este incompatibil, deci cele trei plane nu au nici un punct în comun. Se observă că planele P și R sînt paralele; aceste plane determină pe Q două drepte paralele.

17. Fie planul P: $3x + y - z - 9 = 0$ și punctul $A(4, 7, -1)$. Se cer

1) distanța de la punctul A la planul P,

2) coordonatele simetricului punctului A față de plan.

Să se stabilească coordonatele a două puncte din plan și să se verifice teorema celor trei perpendiculare sau o consecință a acesteia.

R: 1) $\mathbf{d}(A, P) = \sqrt{11}$; 2) $A'(-2, 5, 1)$, 3) Fie $M_1(3, 1, 1)$, $M_2(0, 8, -1)$ puncte ale planului P. Fie A_0 proiecția punctului A pe planul P, $A_0(1, 6, 0)$. Va trebui să găsim coordonatele punctului B astfel ca $A_0B \perp M_1M_2$ și apoi să arătăm că $AB \perp M_1M_2$. Ortogonalitatea dreptelor va fi dovedită prin ortogonalitatea vectorilor. Fie $\vec{v} = (l, m, n)$ vectorul director al dreptei A_0B. Din condițiile $A_0B \in P$, $A_0B \perp M_1M_2$ obținem sistemul $3l + m - n = 0$, $3l - 7m + 2n = 0$. Parametrii directori ai lui $\vec{v}$ vor fi $\frac{l}{5} = \frac{m}{9} = \frac{n}{24}$. Obținem $B\left(\frac{57}{62}, \frac{363}{62} \frac{-12}{31}\right)$.

18. Se dau punctele $M_0(1, 0, 1)$, $A(0, 2, 1)$, $B(-2, 0, 1)$ și planul P: $x - y + 2z = 0$. Se cere

1) proiecția M_0' a punctului M_0 pe planul P;

2) proiecția M_0'' a punctului M_0 pe dreapta AB,

3) să se verifice că dreapta $M_0''M_0$ este perpendiculară pe dreapta AB și să se determine poziția dreptei AB față de planul P.

4) $M(x, y, z)$ fiind un punct arbitrar în planul P, să se exprime distanța M_0M și să se afle coordonatele lui M, astfel ca această distanță să fie minimă.

R: 1) $M_0'\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} 0\right)$; 2) $M_0''\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 1\right)$; 3) Dreapta AB este conținută în planul P; 4) Notăm $\mathbf{d} = \|\overrightarrow{M_0M}\|^2$; $\mathbf{d} = (x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2$. Deoarece $M \in P$, avem $\mathbf{d}(x, y) = (x-1)^2 + y^2 + \left(\frac{y-x}{2} - 1\right)^2$. Din sistemul $\frac{\partial \mathbf{d}}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial \mathbf{d}}{\partial y} = 0$ obținem punctul critic $x = y = \frac{1}{2}$. Deoarece $(x, y) \to \mathbf{d}(x, y)$ este convexă, punctul $M_0''\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$ este un punct de minim global. Deci distanța minimă este atinsă pentru $M = M_0'$.

19. Fie planele P_1: $x - 3y + z - 1 = 0$, P_2: $x + 2y - 2 = 0$. Să se scrie ecuația carteziană a simetricului lui P_1 față de P_2.

R: Planul căutat P_3 face parte din fasciculul determinat de P_1 și P_2; P_3: $3x + y + z - 3 = 0$.

20. Se dau planul P: $x - y + 2z - 3 = 0$, dreapta D: $\frac{x-1}{3} = \frac{y}{-2} = \frac{z+1}{1}$ și punctul O' $(3, -2, 4)$.

1) Să se determine ecuația simetricului planului P în raport cu punctul O'.

2) Să se determine ecuațiile simetricei drepte D în raport cu punctul O'.

R: 1) $x - y + 2z - 23 = 0$; $\frac{x-2}{3} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z-8}{1}$.

21. Să se determine ecuațiile simetricei drepte D în raport cu dreapta D_1;
D: $\frac{x+1}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z-2}{4}$, D_1: $\frac{x}{1}=\frac{y}{-2}=\frac{z+1}{3}$.

R: $\frac{7x+15}{2}=\frac{7y+16}{-25}=\frac{7z+4}{20}$.

22. Se consideră planul $P: 3x-2y+z-4=0$ și dreapta $D: \frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-2}{5}$. Se cer

1) ecuațiile proiecției ortogonale a dreptei D pe planul P,
2) ecuațiile dreptei simetrice dreptei D față de planul P.

R: 1) $D_1: \begin{cases} 3x-2y+z-4=0 \\ x+y-z+2=0 \end{cases}$; 2) Considerăm punctele $A_1(1, -1, 2)$, $A_2\left(0, -\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ situate pe dreapta D. Calculăm simetricele acestor puncte față de planul P; găsim $A_1'\left(-\frac{2}{7}, -\frac{1}{7}, \frac{11}{7}\right)$, respectiv $A_2'\left(-\frac{3}{14}, -\frac{33}{14}, -\frac{4}{7}\right)$. Dreapta căutată este $A_1' A_2'$ de ecuații $\frac{7x+2}{1}=\frac{7y+1}{-31}=\frac{7z-11}{-30}$.

23. Se dau dreapta D_1: $\frac{x-1}{4}=\frac{y}{1}=\frac{z+2}{-1}$, planele $P: 2x-5y+3z-7=0$, $Q: 3y-z+1=0$ și punctul $M_0(2, 0, -3)$. Se cer

1) distanța de la dreapta D_1 la planul P,
2) planul care trece prin D_1 și este paralel cu $D_2=P\cap Q$,
3) dreapta care trece prin M_0 și se sprijină pe D_1 și D_2.

R: 1) $(\vec{a}_1, \vec{n})=0 \Rightarrow D_1 \| P$; $d(D_1, P)=d(M_1, P)=\frac{11}{\sqrt{38}}$, 2) Dreapta D_1 se mai poate scrie $D_1: \begin{cases} x-4y-1=0 \\ y+z+2=0 \end{cases}$. Planul cerut R face parte din fasciculul $x+(-4+\lambda)y+\lambda z-1+\lambda=0$; $\vec{a}_2=(-2, 1, 3)$ $(\vec{n}_\lambda, \vec{a}_2)=0$, $\lambda=\frac{3}{2}$, $R: 2x-5y+3z+4=0$; 3) $D_3: \begin{cases} x-4y-1+\lambda(y+z+2)=0 \\ 2x-5y+3z-7+\mu(3y-z+1)=0 \end{cases}$
λ și μ se determină din condiția $M_0 \in D_3$; $\lambda=1, \mu=3. D_3: \begin{cases} x-3y+z+1=0 \\ x+2y-2=0 \end{cases}$.

24. Se dau planele $P: 4x-y-2z-11=0$, $Q: x-2y+3z-8=0$, $R: x+2y+z-2=0$.

1) Să se calculeze unghiurile dintre plane.
2) Să se stabilească punctul comun al planelor.
3) Să se scrie ecuațiile dreptei D de direcție $(-1, 1, 2)$ care se sprijină pe dreptele $D_1=P\cap Q$, $D_2=P\cap R$.

R: 1) Planele sînt ortogonale, 2) $M_0(3, -1, 1)$, 3) $D: \begin{cases} x-y+z-5=0 \\ 7x+5y+z-17=0. \end{cases}$

3.1. Izometriile de bază sînt: *rotația, simetria în raport cu un plan, simetria în raport cu un punct și translația.*

Rotațiile și simetriile se mai numesc și *transformări ortogonale.* Ele sînt aplicații liniare date prin matrici ortogonale.

Orice izometrie este de forma $i = t \circ o$, unde t este o translație iar o este o transformare ortogonală.

3.2. Fie $i = t \circ o$ *izometrie* care mută reperul $\mathcal{R} = \{0; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ în reperul $\mathcal{R}' = \{O'; \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'\}$. Izometria i se numește *pozitivă (deplasare)* dacă baza $\{\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'\}$ este orientată pozitiv și *negativă (antideplasare)* în caz contrar.

Principalele izometrii pozitive sînt *rotațiile și translațiile,* iar principalele izometrii negative sînt *simetria în raport cu un plan* și *simetria în raport cu un punct.*

3.3. Schimbarea reperului printr-o transformare ortogonală o (fig. 2.16),

$$\begin{aligned} O' = o(O) = 0, \quad \vec{i}' &= o(\vec{i}) = a_{11}\vec{i} + a_{21}\vec{j} + a_{31}\vec{k} \\ \vec{j}' &= o(\vec{j}) = a_{12}\vec{i} + a_{22}\vec{j} + a_{32}\vec{k} \\ \vec{k}' &= o(\vec{k}) = a_{13}\vec{i} + a_{23}\vec{j} + a_{33}\vec{k} \end{aligned}$$

unde

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

este o matrice ortogonală, adică $\mathbf{A}^t\mathbf{A} = \mathbf{I}$.

În coordonate,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = {}^t\mathbf{A} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Această izometrie este pozitivă dacă $\det \mathbf{A} = +1$ *(rotație)* și negativă dacă $\det \mathbf{A} = -1$ *(rotație și simetrie).*

3.4. Schimbarea reperului printr-o translație t (fig. 2.17) $O' = t(O)$, $\vec{i}' = t(\vec{i}) = \vec{i}$, $\vec{j}' = t(\vec{j}) = \vec{j}$, $\vec{k}' = t(\vec{k}) = \vec{k}$ sau în coordonate

$$x = x' + a, \qquad y = y' + b, \qquad z = z' + c,$$

unde $O'(a, b, c)$.

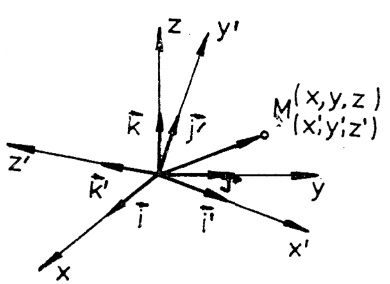


Fig. 2.16.

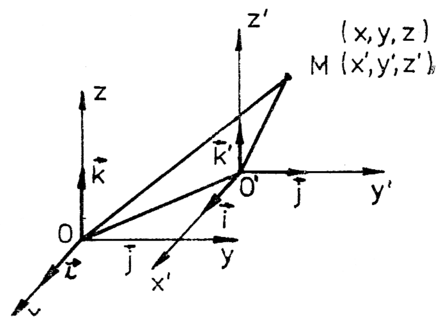


Fig. 2.17.

3.5. Schimbarea generală $i = t \circ o$

$$O' = (t \circ o)(O) = t(O), \quad \vec{i}' = t(o(\vec{i})) = o(\vec{i}), \quad \vec{j}' = t(o(\vec{j})) = o(\vec{j}),$$

$$\vec{k}' = t(o(\vec{k})) = o(\vec{k})$$

sau în coordonate

$$\begin{bmatrix} x-a \\ y-b \\ z-c \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = {}^t\mathbf{A} \begin{bmatrix} x-a \\ y-b \\ z-c \end{bmatrix}.$$

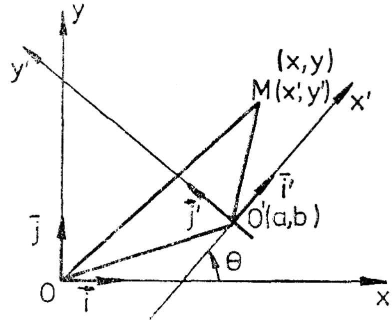


Fig. 2.18.

3.6. În particular putem vorbi despre izometrii în plan. Din acestea reținem *roto-translațiile* care sînt caracterizate prin (fig. 2.18)

$$\begin{cases} x = x' \cos\theta - y' \sin\theta + a \\ y = x' \sin\theta + y' \cos\theta + b \end{cases}$$

Exerciții și probleme

1. Fie hexagonul regulat $ABCDEF$ care raportat la sistemul xCy are vîrfurile B și E pe axa Cx, respectiv Cy (fig. 2.19). Se consideră un alt sistem $x'Fy'$ orientat pozitiv, axa absciselor fiind FA.

1) Să se stabilească formulele de trecere de la xCy la $x'Fy'$.

2) Să se găsească coordonatele vîrfurilor C și E față de $x'Fy'$.

3) Să se determine distanța de la punctul $x = -2$, $y = 1$ la punctul $x' = -2$, $y' = 1$.

Soluție. 1) Izometria se compune dintr-o translație în $F(-2, -2\sqrt{3})$ și o rotație de unghi $\theta = \frac{2}{3}\pi$; conform cu 3.6 scriem

$$x = -\frac{1}{2}x' - \frac{\sqrt{3}}{2}y' - 2$$

$$y = \frac{\sqrt{3}}{2}x' - \frac{1}{2}y' - 2\sqrt{3}.$$

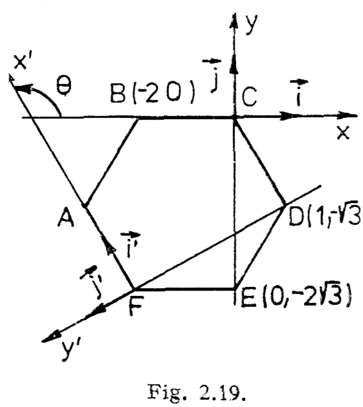


Fig. 2.19.

2) Coordonatele punctului C față de noul sistem sînt date de

$$0 = -\frac{1}{2}x' - \frac{\sqrt{3}}{2}y' - 2, \quad 0 = \frac{\sqrt{3}}{2}x' - \frac{1}{2}y' - 2\sqrt{3}.$$

Obținem $C(2, -2\sqrt{3})$. Analog $E(-1, -\sqrt{3})$.

3) Fie punctul M_1 $(-2,1)$ raportat la sistemul xCy și M_2 $(-2,1)$ raportat la noul sistem $x'Fy'$. Vom stabili coordonatele lui M_2 față de sistemul vechi.

$$x = -\frac{1}{2}(-2) - \frac{\sqrt{3}}{2}(+1) - 2,\quad y = \frac{\sqrt{3}}{2}(-2) - \frac{1}{2}(+1) - 2\sqrt{3}.$$

Obținem $M_2\left(-1 - \frac{\sqrt{3}}{2},\ -\frac{1}{2} - 3\sqrt{3}\right)$;$\|\overrightarrow{M_1M_2}\| = \sqrt{31 + 8\sqrt{3}}$.

2. Fie sistemul de coordonate $Oxyz$ și un alt sistem $O'x'y'z'$ situat față de cel inițial ca în figura 2.20.

1) Să se determine transformarea care face trecerea de la sistemul $Oxyz$ la sistemul $O'x'y'z'$, știind că O' se depărtează de O de-a lungul lui Ox, rectiliniu și uniform, cu viteza v.

2) Să se arate că ecuațiile lui Newton privitoare la dinamica punctului material, $x = m\dfrac{d^2x}{dt^2}$, $y = m\dfrac{d^2y}{dt^2}$, $z = m\dfrac{d^2z}{dt^2}$ sînt invariante față de transformarea de mai sus.

R. 1) $x' = x - vt$, $y' = y$, $z' = z$ *(grupul de transformări al lui Galilei din cinematica clasică)*. Pentru stabilirea lor s-a lucrat cu sisteme inerțiale, adică cu sisteme care se mișcă rectiliniu și uniform și nu sînt acționate de forțe, sau sînt acționate de forțe care sînt în echilibru.

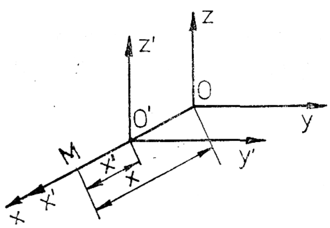


Fig. 2.20.

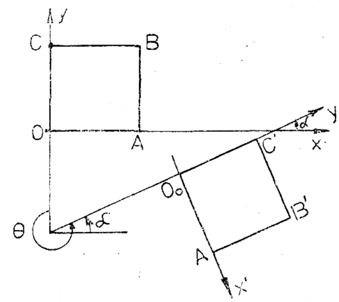


Fig. 2.21.

3. Fie sistemul xOy și fie punctele O, A $(2, 0)$, B $(2, 2)$, C $(0, 2)$ vîrfurile unui pătrat. Fie izometria i cu proprietatea $i\,(OABC) = O_0\,A'\,B'\,C'$, unde coordonatele noii origini O_0 sînt $(3, -1)$ și noua axă a ordonatelor O_0C' face cu vechea axă a absciselor un unghi ascuțit α pentru care $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{3}{4}$ (fig. 2.21). Se cer

1) coordonatele vîrfurilor pătratului $O_0A'B'C'$ față de sistemul xOy,

2) să se determine punctul fix al izometriei.

Soluție. 1) Unghiul de rotație este $\theta = \dfrac{3\pi}{2} + \alpha$; $\sin\theta = -\cos\alpha = -\dfrac{4}{5}$, $\cos\theta = \sin\alpha = \dfrac{3}{5}$. Sistemul $x'O_0y'$ se obține din sistemul xOy printr-o rototranslație caracterizată de formulele $x = \dfrac{3}{5}x' + \dfrac{4}{5}y' + 3$, $y = -\dfrac{4}{5}x' + \dfrac{3}{5}y' - 1$.

Față de noul sistem $x'O_0y'$ vîrfurile O_0, A', B', C' au aceleași coordonate ca vîrfurile O, A, B, C față de vechiul sistem xOy. Coordonatele punctului A' față de sistemul xOy le găsim din relațiile $x = \frac{3}{5} \cdot 2 + \frac{4}{5} \cdot 0 + 3$, $y = -\frac{4}{5} \cdot 2 + \frac{3}{5} \cdot 0 - 1$; $A'\left(\frac{21}{5}, -\frac{13}{5}\right)$. Analog $B'\left(\frac{29}{5}, -\frac{7}{5}\right)$, $C'\left(\frac{23}{5}, \frac{1}{5}\right)$.

2) În formulele de transformare luăm $x = x'$, $y = y'$. Obținem punctul M_0 ale cărui coordonate sînt $x = \frac{1}{2}$, $y = -\frac{7}{2}$ față de ambele sisteme.

4. În sistemul triortogonal $Oxyz$ fie cubul de latură unitate cu unul din vîrfuri în origine. Considerăm noua origine cu vîrful în B (0, 1, 0), iar noua axă a absciselor are direcția $A'B$ (fig. 2.22). Axa ordonatelor By' aparține planului xOy și face un unghi obtuz cu Oy. Axa Bz' completează triedrul tridreptunghic orientat pozitiv.

1) Se cer formulele care caracterizează această izometrie.

2) Dîndu-se ΔM_1M_2, M_3, unde M_1 (— 1, 1,3), M_2 (— 3, 0, 1), M_3 (0, 3, 1), să se calculeze coordonatele vîrfurilor triunghiului transformat $M_1'M_2'M_3'$ prin izometria de mai sus, precum și lungimile laturilor și măsura unghiurilor.

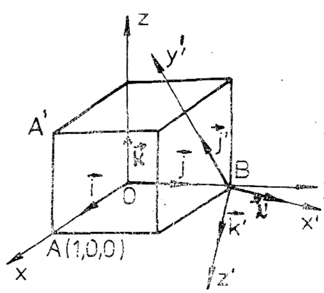


Fig. 2.22.

Soluție. 1) $\overrightarrow{A'B} = -\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$, $\vec{i}' = -\frac{1}{\sqrt{3}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{j} - \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{k}$; $\vec{j}' = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j}$ unde $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, $-\frac{1}{\sqrt{3}}\alpha + \frac{1}{\sqrt{3}}\beta = 0$ (deoarece $(\vec{i}', \vec{j}') = 0$). Condițiile din enunț conduc la expresia analitică a versorului $\vec{j}' = -\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}$. Întrucît $\vec{k}' = \vec{i}' \times \vec{j}'$, $\vec{k}' = -\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}\vec{j} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\vec{k}$.

Izometria se compune dintr-o translație și o rotație ale cărei formule sînt

$$x = -\frac{1}{\sqrt{3}}x' - \frac{\sqrt{2}}{2}y' - \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}z',$$

$$y = 1 + \frac{1}{\sqrt{3}}x' - \frac{\sqrt{2}}{2}y' + \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}z', \quad z = -\frac{1}{\sqrt{3}}x' + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}z'.$$

2) Ținînd seama de corespondențele $M_1 \leftrightarrow M_1'$, $M_2 \leftrightarrow M_2'$, $M_3 \leftrightarrow M_3'$ și de formulele de mai sus găsim $M_1'\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{7}{\sqrt{6}}\right)$, $M_2'\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{4}{\sqrt{2}}, \frac{4}{\sqrt{6}}\right)$, $M_3'\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\sqrt{2}, \frac{4}{\sqrt{6}}\right)$. $\|\overrightarrow{M_1M_2}\| = \|\overrightarrow{M_1'M_2'}\| = 3$ etc ... $\sphericalangle M_2M_1M_3 = \sphericalangle M_2'M_1'M_3' = \frac{\pi}{2}$ etc. ...

5. Fie sistemul triortogonal $Oxyz$ față de care considerăm punctele $A(3, 0, 0)$ $B(0, 2, 0)$, $C(0, 0, 6)$. Construim sistemul rotit $Ox'y'z'$ astfel: Oz' are direcția și sensul înălțimii OO' a tetraedrului $OABC$; Oy' este paralelă cu $O'A'$, unde A' este piciorul înălțimii dusă din A în triunghiul ABC, iar axa Ox' este astfel aleasă încît sistemul $Ox'y'z'$ să fie orientat pozitiv.

1) Se cere matricea rotației.

2) Să se determine direcția invariantă (subspațiul propriu real unidimensional) și planul invariant față de această rotație.

Soluție: 1) Se știe din geometria elementară că ortocentrul O' al feței ABC coincide cu proiecția punctului O pe această față a tetraedrului. Coordonatele punctului O' sînt $\left(\frac{6}{7}, \frac{9}{7}, \frac{3}{7}\right)$. Versorul axei Oz' îl notăm cu $\vec{k}'$; versorul direcției $O'A'$ va fi $\vec{j}'$, iar $\vec{i}' = \vec{j}' \times \vec{k}'$; $\vec{i}' = \frac{1}{\sqrt{10}}\vec{j} - \frac{3}{\sqrt{10}}\vec{k}$, $\vec{j}' = -\frac{5}{\sqrt{35}}\vec{i} + \frac{3}{\sqrt{35}}\vec{j} + \frac{1}{\sqrt{35}}\vec{k}$; $\vec{k}' = \frac{2}{\sqrt{14}}\vec{i} + \frac{3}{\sqrt{14}}\vec{j} + \frac{1}{\sqrt{14}}\vec{k}$.

Matricea de trecere este

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{5}{\sqrt{35}} & \frac{2}{\sqrt{14}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{35}} & \frac{3}{\sqrt{14}} \\ -\frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{35}} & \frac{1}{\sqrt{14}} \end{bmatrix}.$$

Noua bază $\{\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'\}$ fiind orientată pozitiv urmează că matricea $\mathbf{A}$ este ortogonală și $\det \mathbf{A} = +1$.

2) Formulele de transformare se scriu concis

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}\mathbf{X}' \text{ sau } \mathbf{X}' = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{X}, \text{ unde } \mathbf{X} = {}^t[x, y, z],\ \mathbf{X}' = {}^t[x', y', z'].$$

Fie $\mathbf{X} = \mathbf{X}'$ și deci $\mathbf{X} = \mathbf{A}\mathbf{X}$, $\mathbf{X} = {}^t\mathbf{A}\mathbf{X}$. Rezultă $(\mathbf{A} - {}^t\mathbf{A})\,\mathbf{X} = 0$. Această relație matriceală conduce la sistemul liniar și omogen

$$\left(-\frac{5}{\sqrt{35}} - \frac{1}{\sqrt{10}}\right) y + \left(\frac{2}{\sqrt{14}} + \frac{3}{\sqrt{10}}\right) z = 0$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{10}} + \frac{5}{\sqrt{35}}\right) x + \left(\frac{3}{\sqrt{14}} - \frac{1}{\sqrt{35}}\right) z = 0$$

$$\left(-\frac{3}{\sqrt{10}} - \frac{2}{\sqrt{14}}\right) x + \left(\frac{1}{\sqrt{35}} - \frac{3}{\sqrt{14}}\right) y = 0$$

al cărui determinat este nul prin urmare sistemul admite și soluții diferite de cea banală.

Soluția sistemului este $x = t(2\sqrt{35} - 15\sqrt{14})$, $y = t(10\sqrt{14} + 21\sqrt{10})$, $z = t(7\sqrt{10} + 10\sqrt{35})$, $t \in \boldsymbol{R}$.

Există deci o direcție invariantă la rotația de axe de mai sus. Aceasta este axa de rotație ale cărei ecuații carteziene sînt

$$\frac{x}{2\sqrt{35} - 15\sqrt{14}} = \frac{y}{10\sqrt{14} + 21\sqrt{10}} = \frac{z}{7\sqrt{10} + 10\sqrt{35}}.$$

Planul invariant (real) este asociat valorilor proprii complexe conjugate ale complexificatei rotației. Fiind complementul ortogonal al axei de rotație, acest plan are ecuația

$$(2\sqrt{35} - 15\sqrt{14})\,x + (10\sqrt{14} + 21\sqrt{10})\,y + (7\sqrt{10} + 10\sqrt{35})\,z = 0.$$

6. Se dau planul $P\colon x + y + 3z + 5 = 0$ și dreapta $D\colon \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+2}{-1} = \dfrac{z}{-2}$.

1) Să se determine ecuația planului Q, simetricul lui P față de dreapta D.
2) Să se expliciteze izometria $i(P) = Q$.

Soluție. Considerăm trei puncte cunoscute în planul P; fie $M_1\,(-5, 0, 0)$, $M_2\,(0, -5, 0)$, $M_3\,(-1, -1, -1)$. Stabilim coordonatele simetricelor acestor puncte față de dreapta D. Găsim $M_1'\left(\frac{13}{3}, \frac{-4}{3}, \frac{16}{3}\right)$, $M_2'\left(\frac{8}{3}, \frac{1}{3}, \frac{-4}{3}\right)$, respectiv $M_3'\left(\frac{8}{3}, \frac{-8}{3}, \frac{5}{3}\right)$. Aceste puncte determină unic planul Q, a cărui ecuație este $3x - y - z - 9 = 0$.

2) Conform cu 3.5 izometria este caracterizată de ecuațiile

$$x = a + a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}z'$$
$$y = b + a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}z'$$
$$z = c + a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}z'$$

Întrucît M_1' este transformatul lui M_1 prin izometria i, rezultă sistemul $13\,a_{11} - 4\,a_{12} + 16\,a_{13} = -15 - 3a$, $8a_{11} + a_{12} - 4\,a_{13} = -3\,a$, $8\,a_{11} - 8\,a_{12} + 5\,a_{13} = -3 - 3\,a$, a cărui soluție este $\left(-\frac{1+a}{3}, \frac{a-4}{9}, \frac{a-7}{9}\right)$. Analog, din $i\,(M_2) = M_2'$ obținem $a_{21} = -\frac{b+4}{3}$, $a_{22} = \frac{b-3}{9}$, $a_{23} = \frac{b+9}{9}$ și din $i(M_3) = M_3'$ obținem $a_{31} = -\frac{c}{3}$, $a_{32} = \frac{c+4}{9}$, $a_{33} = \frac{c+1}{9}$.

Din condiția de ortogonalitate a matricei $\mathbf{A}$ deducem $a = b + 4$, $c = 3b + 11$.

7. Fie reperul cartezian $\{O', \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ care prin rotație r este transformat în reperul cartezian $\{O; \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'\}$. Se aleg ca parametri ce caracterizează această rotație unghiurile lui Euler ψ, θ, φ din figura 2.23. Planele $(O; \vec{i}, \vec{j})$ și $(O; \vec{i}', \vec{j}')$ se intersectează după o dreaptă a cărei direcție este dată de versorul său director $\vec{u}$.

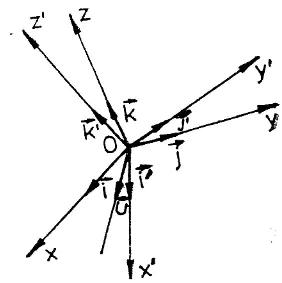


Fig. 2.23.

Fie următoarele rotații particulare:
r_1 rotația de unghi ψ în jurul axei de direcție $\vec{k}$, $r_1(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) = (O; \vec{u}, \vec{v}, \vec{k})$; r_2 rotația de unghi θ în jurul axei de direcție $\vec{u}$, $r_2\,(O; \vec{u}, \vec{v}, \vec{k}) = (O; \vec{u}, \vec{w}, \vec{k}')$; r_3 rotația de unghi φ în jurul axei de direcție $\vec{k}'$, $r_3\,(O; \vec{u}, \vec{w}, \vec{k}') = (O; \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$.

Să se scrie matricea M_i, $i = 1, 2, 3$ atașată respectiv rotația r_i, $i = 1, 2, 3$ și să se arate că rotația totală r se descompune în cele trei rotații particulare, adică $r = r_3 \circ r_2 \circ r_1$, iar matricea **M** atașată lui r este $\mathbf{M} = \mathbf{M}_3 \cdot \mathbf{M}_2 \cdot \mathbf{M}_1$

R: $$\mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_3 = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

§ 4. CONICE

Fie $\boldsymbol{E}_2$ un spațiu punctual euclidian real bidimensional raportat la un reper cartezian $\{O; \vec{i}, \vec{j}\}$.

4.1. Fie g: $\boldsymbol{E}_2 \to \boldsymbol{R}$ formă pătratică afină definită prin

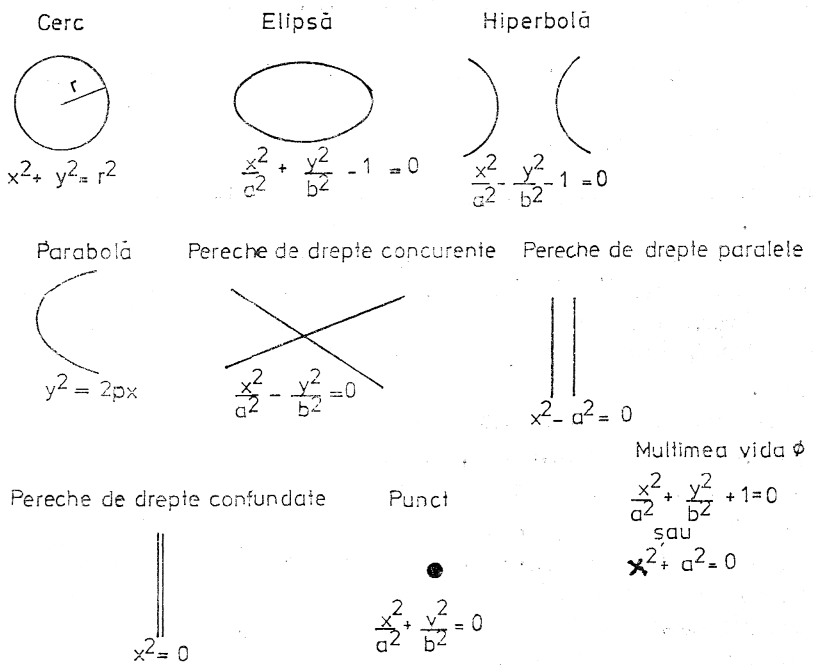
$$g(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{10}x + 2a_{20}y + a_{00}.$$

Mulțimea de nivel constant zero,

$$\Gamma = g^{-1}(0) = \{(x, y) \mid (x, y) \in \boldsymbol{R}^2, \quad g(x, y) = 0\}$$

se numește *conică* sau *curbă algebrică de ordinul al doilea.* Se notează $\Gamma: g(x, y) = 0$.

4.2. Utilizînd roto-translația care realizează trecerea de la reperul cartezian $\{O; \vec{i}, \vec{j}\}$ la un reper cartezian adecvat orientat pozitiv (numit *reper canonic* sau *natural*) față de care ecuația $g(x, y) = 0$ să aibă forma cea mai simplă posibilă (numită *ecuație redusă* sau *canonică*) rezultă că Γ este echivalentă cu una dintre următoarele mulțimi:



4.3. Față de roto-translații ecuația $g(x, y) = 0$ posedă următorii invarianți

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{10} \\ a_{12} & a_{22} & a_{20} \\ a_{10} & a_{20} & a_{00} \end{vmatrix}, \qquad \delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}; \qquad I = a_{11} + a_{22}.$$

Cu ajutorul acestora se poate preciza curba Γ.

Δ	Natura conicei
$\Delta = 0$	degenerată
$\Delta \neq 0$	nedegenerată

δ	Genul conicei
$\delta < 0$	hiperbolic
$\delta = 0$	parabolic
$\delta > 0$	eliptic

4.4. Centrul unei conice:

$$\begin{cases} \frac{1}{2} g_x(x, y) = a_{11}x + a_{12}y + a_{10} = 0. \\ \frac{1}{2} g_y(x, y) = a_{12}x + a_{22}y + a_{20} = 0. \end{cases}$$

Determinantul acestui sistem liniar este δ.

4.5. Pentru stabilirea ecuației canonice se poate proceda în modul următor.
(i) Dacă $a_{12} = 0$, atunci se face o translație.
(ii) Dacă $a_{12} \neq 0$, atunci se face mai întîi o rotație.

(varianta 1) Se face rotația $x = x' \cos\theta - y' \sin\theta$, $y = x' \sin\theta + y' \cos\theta$, unde θ este unghiul determinat de ecuația $(a_{11} - a_{22}) \sin 2\theta = 2a_{12} \cos 2\theta$, $\theta \in [0, \pi]$.

(varianta 2*)* Se determină valorile proprii λ_1, λ_2 și vectorii proprii ortonormați $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ ai matricei simetrice

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$$

atașată formei pătratice $a_{11}x^2 + 2\,a_{12}xy + a_{22}y^2$. Se notează cu $\mathbf{R}$ matricea formată cu coordonatele vectorilor $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ așezate pe coloane; avînd în vedere posibilitatea înlocuirii unuia dintre versorii $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ prin opusul său sau posibilitatea renumerotării valorilor proprii, putem presupune $\det \mathbf{R} = +1$. Rotația

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \mathbf{R} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

reduce forma pătratică la forma diagonală $\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2$. Versorii proprii $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ dau distanțele noilor axe.

După aceea, dacă este cazul, se face o translație.

4.6. Ecuația polarei lui $M_0(x_0, y_0)$ în raport cu Γ este

$$a_{11}xx_0 + a_{12}(xy_0 + x_0y) + a_{22}yy_0 + a_{10}(x + x_0) + a_{20}(y + y_0) + a_{00} = 0.$$

În particular această ecuație dă tangenta într-un punct $(x_0, y_0) \in \Gamma$.

4.7. Ecuația diametrului conjugat cu direcția (l, m):

$$lg_x(x, y) + mg_y(x, y) = 0.$$

4.8. Ecuația care determină direcțiile axelor,

$$(a_{11} - a_{22})\, lm + a_{12}(m^2 - l^2) = 0.$$

4.9. Ecuația care determină direcțiile asimptotice este

$$a_{11}l^2 + 2a_{12}lm + a_{22}m^2 = 0,$$

iar ecuația unei asimptote este

$$lg_x(x, y) + mg_y(x, y) = 0.$$

4.10. Cazul cînd Γ reprezintă un cerc ($a_{12} = 0$, $a_{11} = a_{22} \neq 0$) îl presupunem cunoscut și nu va mai fi discutat în cele ce urmează.

Exerciții și probleme

1. Se dă conica Γ: $x^2 - 4xy + 4y^2 - 6x + 2y + 1 = 0$.

1) Să se determine natura și genul.
2) Să se construiască conica.
3) Să se reducă la forma canonică.

Același enunț pentru conicele Γ_1: $16x^2 - 24xy + 9y^2 - 38x - 34y + 11 = 0$ și Γ_2: $y^2 - 3x + 2y + 7 = 0$.

Soluție. Calculăm invarianții conicei

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -2 & 4 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -25; \qquad \delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

Întrucît $\Delta \neq 0$, $\delta = 0$ conica este o parabolă.

Altă metodă. Matricea formei pătratice $x^2 - 4xy + 4y^2$ este

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

Ecuația caracteristică a acestei matrice

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ -2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0, \qquad \lambda(\lambda - 5) = 0 \text{ are soluțiile}$$

$\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 5$.

Întrucît produsul $\lambda_1\lambda_2$ este nul, conica este de gen parabolic.

2) Pentru construcție stabilim ecuația axei parabolei, coordonatele vîrfului, ecuația tangentei în vîrf și punctele de intersecție ale parabolei cu axele de coordonate.

Se știe că ecuația axei parabolei este $a_{11}\, g_x(x, y) + a_{12}\, g_y(x, y) = 0$ (sau $a_{12}\, g_x(x, y) + a_{22}\, g_y(x, y) = 0$, adică $(2x - 4y - 6) + (-2)(-4x + 8y + 2) = 0$; $x - 2y - 1 = 0$.

Intersectăm parabola cu axa de simetrie și obținem coordonatele vîrfului $V\,(1/5, -2/5)$.

Tangenta în vîrf are ecuația $2x + y = 0$.

Parabola nu taie axa Oy deoarece trinomul $4y^2 + 2y + 1 = 0$ nu are rădăcini reale (fig. 2.24). Axa absciselor este secantă parabolei în punctele $A_1(3 + 2\sqrt{2}, 0)$ și $A_2(3 - 2\sqrt{2}, 0)$.

Altă metodă. Ecuația parabolei se mai poate scrie

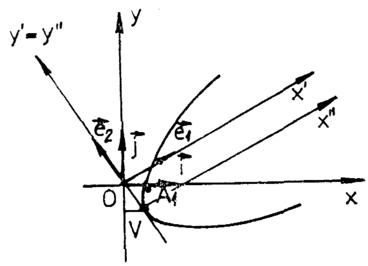


Fig. 2.24

$$(x - 2y + \lambda)^2 + 2x(-3, -\lambda) + 2y(1 + 2\lambda) + 1 - \lambda^2 = 0.$$

Ecuația axei și aceea a tangentei în vîrf este $x - 2y + \lambda = 0$, respectiv $2x(-3 - \lambda) + 2y(1 + 2\lambda) + 1 - \lambda^2 = 0$ pentru λ astfel determinat încît cele două drepte să fie perpendiculare. Se obține $\lambda = -1$. Apoi continuăm ca mai sus.

3) *Varianta* 1. Rotim sistemul xOy astfel încît noua axă a absciselor să aibă direcția axei de simetrie a parabolei. La 2) am stabilit ecuația axei $x - 2y - 1 = 0$, de unde $m = \operatorname{tg}\theta = \frac{1}{2}$. Întrucît $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, obținem $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$. Prin urmare formulele de rotație vor fi $x = \frac{1}{\sqrt{5}}(2x' - y')$, $y = \frac{1}{\sqrt{5}}(x' + 2y')$. Introducem în ecuația generală a parabolei și obținem ecuația acesteia raportată la sistemul rotit $x'Oy'$ ca fiind $5y'^2 - \frac{10}{\sqrt{5}}x' + \frac{10}{\sqrt{5}}y' + 1 = 0$. Restrîngem pătratele și obținem $\left(y' + \frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2 - 2\frac{\sqrt{5}}{5}x' = 0$. Efectuăm o translație a sistemului $x'Oy'$ în vîrful parabolei $V\left(0, -\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$, $x' = x''$, $y' = y'' - \frac{\sqrt{5}}{5}$; obținem ecuația canonică $y''^2 - 2\frac{\sqrt{5}}{5}x'' = 0$ raportată la sistemul rototranslatat $x''Vy''$.

Varianta 2. Coordonatele (u, v) ale vectorului propriu corespunzător valorii proprii λ se obțin din ecuația matriceală

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \lambda\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

sau echivalent, coordonatele (u, v) sînt soluții ale sistemului

$$(1)\begin{cases} (1 - \lambda)u - 2v = 0 \\ -2u + (4 - \lambda)v = 0. \end{cases}$$

Pentru $\lambda_1 = 0$ sistemul (1) are soluția $u = 2k$, $v = k$, $k \in \boldsymbol{R} - \{0\}$; pentru $\lambda_2 = 5$ obținem soluția $(-k, 2k)$, $k \in \boldsymbol{R} - \{0\}$.

Vectorii proprii ortonormați sînt $\vec{e}_1 = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$, respectiv $\vec{e}_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$.

Întrucît

$$\det \mathbf{R} = \det \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{bmatrix} = 1$$

efectuăm rotația

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(2x' - y') \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(x' + 2y'). \end{cases}$$

Ecuația carteziană a parabolei raportată la sistemul rotit $x'Oy'$ este $5y'^2 - 2\sqrt{5}x' + 2\sqrt{5}y' + 1 = 0$. Procedăm ca la varianta 1; completăm pătratele, efectuăm translația în vîrf și obținem ecuația canonică $y''^2 - 2\dfrac{\sqrt{5}}{5}x'' = 0$.

Γ_1: ecuația axei de simetrie a parabolei este $4x - 3y - 1 = 0$, deci $\operatorname{tg} \theta = \dfrac{4}{3}$; formulele de rotație sînt $x = \dfrac{1}{5}(3x' - 4y')$, $y = \dfrac{1}{5}(4x' + 3y')$.

Față de sistemul rotit $x'Oy'$ ecuația parabolei este $25y'^2 - 50x' + 10y' + 11 = 0$.

Efectuăm translația $x' = x'' - \dfrac{1}{5}$, $y' = y'' - \dfrac{1}{5}$ și obținem ecuația canonică $y''^2 - 2x'' = 0$ față de sistemul rototranslatat $x''Vy''$.

Γ_2: Întrucît $a_{12} = 0$ (vezi 4.5 (i)) restrîngem pătratele $(y+1)^2 - 3(x-2) = 0$ și efectuăm o translație în vîrful parabolei dată de formulele $x = x' + 2$, $y = y' - 1$. Obținem ecuația canonică $y'^2 - 3x' = 0$ față de sistemul translatat $x'Vy'$.

2. Se dau hiperbola Γ: $4xy + 3y^2 + 16x + 12y - 36 = 0$, dreapta D: $x - y + 2 = 0$ și punctele $A(0,2)$, $B(-1,2)$. Se cer

1) centrul, axele și asimptotele hiperbolei,
2) polara punctului B în raport cu conica,
3) tangenta în punctul A la conică,
4) tangentele la conică paralele cu dreapta D,
5) polul dreptei D în raport cu conica,
6) diametrul conjugat direcției lui D,
7) să se reducă hiperbola la forma canonică și să se construiască.

Soluție. 1) Coordonatele centrului,

$$\begin{cases} 2y + 8 = 0 \\ 2x + 3y + 6 = 0. \end{cases}$$

Obținem $C(3, -4)$.

Fie (l, m) o direcție oarecare și $k = \dfrac{m}{l}$ panta ei; atunci ecuația (4.8) se scrie

$$(a_{11} - a_{22})\,k + a_{12}(k^2 - 1) = 0.$$

În cazul nostru, $2k^2 - 3k - 2 = 0$ cu rădăcinile $k_1 = 2$, $k_2 = -\dfrac{1}{2}$.

Pentru a scrie ecuațiile axelor ținem seama că sînt drepte care trec prin centrul C al conicei sau ținem seama că axele sînt diametrii conjugați perpendiculari și folosim (4.7). Obținem $x + 2y + 5 = 0$, $2x - y - 10 = 0$.

Pantele asimptotelor (vezi 4.9) sînt rădăcinile ecuației $a_{22}k^2 + 2a_{12}k + a_{11} = 0$ unde $k = \frac{m}{l}\cdot$ Obținem $y + 4 = 0$, $4x + 3y = 0$ (fig. 2.27).

2) Ecuația polarei unui punct față de conică se scrie prin dedublare (vezi 4.6),

$$2\,[(-1)\,y + 2x] + 3y\cdot 2 + 8\,(x - 1) + 6\,(y + 2) - 36 = 0$$

sau

$$6x + 5y - 16 = 0.$$

3) $A \in \Gamma$; același procedeu ca la punctul precedent; obținem ecuația $x + y - 2 = 0$.

4) Orice dreaptă paralelă cu dreapta D este de forma $x - y + \lambda = 0$, $\lambda \in \boldsymbol{R}$. Intersectăm cu conica și punem condiția ca ecuația găsită pentru determinarea lui y să aibă rădăcină dublă

$$\begin{cases} x - y + \lambda = 0 \\ 4xy + 3y^2 + 16x + 12y - 36 = 0 \end{cases}$$

și deci

$$7y^2 + 4y(7 - \lambda) - 4(4\lambda + 9) = 0.$$

Din $(7 - \lambda)^2 + 7(4\lambda + 9) = 0$ deducem $\lambda_1, \lambda_2 \in \boldsymbol{C}$, ceea ce înseamnă că nu există tangente la hiperbolă paralele cu dreapta D.

5) Fie $M_0\,(x_0, y_0)$ polul dreptei D. Scriem ecuația polarei acestui punct prin dedublare și punem condiția ca această dreaptă să coincidă cu D. Obținem sistemul

$$\frac{2y_0 + 8}{1} = \frac{2x_0 + 3y_0 + 6}{-1} = \frac{8x_0 + 6y_0 - 36}{2}.$$

Rezultă $M_0(8, -6)$.

6) Direcția dreptei D este $\frac{m}{l} = 1$. Conform cu (4.7) obținem ecuația $2x + 5y + 14 = 0$.

7) Matricea formei pătratice $4xy + 3y^2$ este

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Ecuația caracteristică a acestei matrice

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ 2 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0, \text{ are soluțiile } \lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 4.$$

Coordonatele (u, v) ale vectorului propriu corespunzător valorii proprii λ sînt soluțiile sistemului

$$\begin{cases} -\lambda u + 2v = 0 \\ 2u + (3 - \lambda)\,v = 0. \end{cases}$$

Pentru $\lambda_1 = -1$ obținem vectorul $(-2k, k)$, $k \in \boldsymbol{R} - \{0\}$, iar prin normalizare versorul propriu $\vec{e}_1 = \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$.

Analog pentru $\lambda_2 = 4$ obținem $\vec{e}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$. Deoarece

$$\det \mathbf{R} = \det \begin{bmatrix} \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} = -1 \text{ (rotație și simetrie)},$$

pentru a avea numai rotație putem folosi unul din următoarele procedee:

a) renumerotăm $\lambda_1' = \lambda_2$, $\lambda_2' = \lambda_1$ de unde rezultă $\vec{e}_1' = \vec{e}_2$, $\vec{e}_2' = \vec{e}_1$.
Rotația

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \quad \text{sau} \quad \begin{aligned} x &= \frac{1}{\sqrt{5}}(x' - 2y') \\ y &= \frac{1}{\sqrt{5}}(2x' + y') \end{aligned}$$

conduce la $4x'^2 - y'^2 + 8\sqrt{5}\,x' - 4\sqrt{5}y' - 36 = 0$. Completăm pătratele în x' și y',

$$4(x' + \sqrt{5})^2 - (y' + 2\sqrt{5})^2 - 36 = 0.$$

Efectuăm o translație a sistemului xOy în punctul $C(-\sqrt{5}, -2\sqrt{5})$ dată de $x' = x'' - \sqrt{5}$, $y' = y'' - 2\sqrt{5}$. Obținem ecuația canonică a hiperbolei

$$\text{(a)} \quad \frac{x''^2}{9} - \frac{y''^2}{36} - 1 = 0.$$

Pentru construcție efectuăm o rotație a sistemului de axe xOy. Axele Ox', Oy' au direcțiile versorilor $\vec{e}_1'$, respectiv $\vec{e}_2'$ (fig. 2.25);

b) întrucît orice direcție în plan este caracterizată de perechi de numere reale proporționale, convenim să luăm versorii proprii $\vec{e}_1^{\,*} = -\vec{e}_1$, $\vec{e}_2^{\,*} = \vec{e}_2$.
Rotația

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{-1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1' \\ y_1' \end{bmatrix}$$

conduce la $x_1^2 - 4y_1^2 - 4\sqrt{5}x_1 - 8\sqrt{5}y_1 + 36 = 0$. Direcțiile pozitive ale axelor Ox_1 respectiv Oy_1 sînt determinate de versorii $\vec{e}_1^{\,*}$, $\vec{e}_2^{\,*}$. Sistemul rotit x_1Oy_1 este translatat în $C\,(2\sqrt{5}, -\sqrt{5})$ folosind formulele $x_1 = x_2 + 2\sqrt{5}$, $y_1 = y_2 - \sqrt{5}$. Obținem forma canonică a hiperbolei.

$$\text{(b)} \quad \frac{x_2^2}{36} - \frac{y_2^2}{9} + 1 = 0$$

(cu vîrfurile pe axa ordonatelor Cy_2) raportată la sistemul rototranslatat x_2Cy_2 (fig. 2.26).

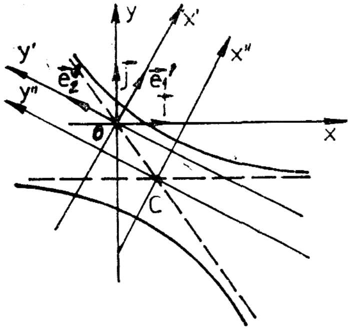


Fig. 2.25.

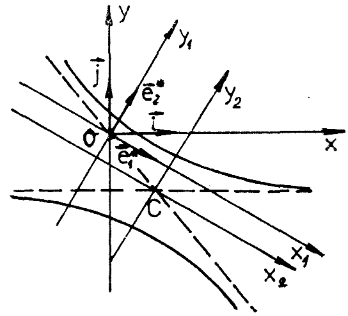


Fig. 2.26.

Prin cele două procedee am obținut ecuația redusă a hiperbolei sub forme diferite (a), respectiv (b), întrucît ecuația este raportată la sisteme diferite $x''Cy''$, respectiv x_2Cy_2; facem observația că în desen este vorba de una și aceeași hiperbolă.

3. Să se stabilească natura conicelor și să se construiască

1) $16x^2 + 4xy + 19y^2 + 104x - 212y - 356 = 0$,

2) $3x^2 - 4xy - 2x + 4y - 3 = 0$,

3) $9x^2 + 24xy + 16y^2 - 52x + 14y - 6 = 0$,

4) $9x^2 + 6xy + y^2 - 5x - 7y - 4 = 0$,

5) $x^2 + 2xy + y^2 - 7x - 7y + 6 = 0$,

6) $11x^2 - 24xy + 4y^2 - 94x + 48y + 119 = 0$,

7) $4x^2 + 16y^2 + 4x - 80y + 85 = 0$.

4. Să se scrie ecuația conicei care este tangentă axei Ox în punctul $M_0(-3, 0)$ și pentru care cunoaștem două perechi de diametri conjugați $x - 3y + 2 = 0$ și $x + 5y - 6 = 0$; $x - 2y + 1 = 0$ și $2x + y - 3 = 0$. Să se stabilească natura conicei obținute, să se reducă la forma canonică și să se construiască.

5. Se dă conica Γ: $x^2 + 2xy + y^2 + 3x - 3y - 18 = 0$.

1) Să se construiască conica.

2) Să se scrie ecuația fasciculului de conice bitangente parabolei în punctele de intersecție cu prima bisectoare a axelor de coordonate. Să se discute natura conicelor din fascicul.

3) Să se expliciteze ecuația dreptelor din fascicul.

4) Să se reducă la forma canonică și să se construiască hiperbola echilaterală din fascicul.

R: 1) Parabola are vîrful $V(3, -3)$; ecuația axei de simetrie a parabolei este $x + y = 0$. Parabola intersectează axa absciselor în $A_1(-6, 0)$, $A_2(3, 0)$. 2) $g(x, y) + \lambda(x - y)^2 = 0$, $x^2(1 + \lambda) + 2xy(1 - \lambda) + y^2(1 + \lambda) + 3x - 3y - 18 = 0$; $\Delta = -9(8\lambda + 1)$, $\delta = 4\lambda$, $I = 2(1 + \lambda)$; elipse reale pentru $\lambda \in (0, +\infty)$, parabolă $\lambda = 0$, hiperbole $\lambda \in (-\infty, 0) - \left\{-\frac{1}{8}\right\}$, drepte reale concurente $\lambda = -\frac{1}{8}$.

3) Pentru $\lambda = -1/8$ obținem ecuația conicei degenerate $7x^2 + 18xy + 7y^2 + 24x - 24y - 144 = 0$. Aceasta este $D_1 \cup D_2$, unde

D_1: $7x + y(9 + 4\sqrt{2}) + 12(1 + 2\sqrt{2}) = 0$,

D_2: $7x + y(9 - 4\sqrt{2}) + 12(1 - 2\sqrt{2}) = 0$.

4) $\Delta \neq 0$, $\delta < 0$, $I = 0$; $\lambda = -1$; $4xy + 3x - 3y - 18 = 0$. Rotația $x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y')$, $y = \frac{1}{\sqrt{2}}(-x' + y')$ urmată de translația $x' = x'' + 3\frac{\sqrt{2}}{4}$, $y' = y''$ conduce la ecuația redusă $\frac{x''^2}{\frac{63}{8}} - \frac{y''^2}{\frac{63}{8}} + 1 = 0$.

6. Se dă conica Γ: $4xy - 3y^2 + 4x - 14y - 7 = 0$.

1) Să se găsească ecuațiile axelor de simetrie, asimptotelor și ecuația diametrului conjugat direcției $k = 1$.

2) Să se reducă la forma canonică și să se construiască conica.

R: 1) $2x + y - 3 = 0$, $x - 2y - 4 = 0$; 2) $y + 1 = 0$, $4x - 3y - 11 = 0$, $2x - y - 5 = 0$; 2) Matricea rotației este

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}.$$

Ecuația hiperbolei față de sistemul $x'Oy'$ este $x'^2 - 4y'^2 - \frac{6}{\sqrt{5}}x' - \frac{32}{\sqrt{5}}y' - 7 = 0$.

În urma translației în punctul $C\left(\frac{3}{\sqrt{5}}, \frac{-4}{\sqrt{5}}\right)$ obținem sistemul $x''Cy''$ față de care conica are ecuația canonică. $\frac{x''^2}{4} - \frac{y''^2}{1} + 1 = 0$. Vîrfurile hiperbolei conjugate se află pe axa Cy''.

7. Pentru ce valori ale lui λ și μ conicele din fasciculul $2x^2 + \lambda xy + 2y^2 - 7x + \mu y + 3 = 0$ sînt

1) conice cu centru?

2) conice nedegenerate fără centru?

R: $\delta = \frac{16 - \lambda^2}{4}$, $\Delta = \frac{-1}{4}(3\lambda^2 + 2\mu^2 + 7\lambda\mu + 50)$.

1) $\lambda \neq \pm 4$; 2) $\lambda = \pm 4$, $\mu \neq \mp 7$.

8. Să se scrie ecuația fasciculului de conice circumscrise triunghiului de vîrfuri $A(4, 0)$, $B(0, 2)$, $C(-1, 0)$ și să se discute natura conicelor.

R: $2x^2 + 3xy + (\lambda - 2)y^2 - 6x + 8y - 8 = 0$;

$\lambda \in \left(-\infty, \frac{25}{8}\right) - \{0\}$ hiperbole; pentru valoarea particulară $\lambda = 0$ obținem drepte concurente perpendiculare, iar pentru $\lambda = \frac{25}{8}$ obținem parabolă; $\lambda \in \left(\frac{25}{8}, +\infty\right)$ elipse.

§ 5. **CUADRICE**

Fie $\boldsymbol{E}_3$ un spațiu punctual euclidian real tridimensional raportat la un reper cartezian $\{O;\ \vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}\}$.

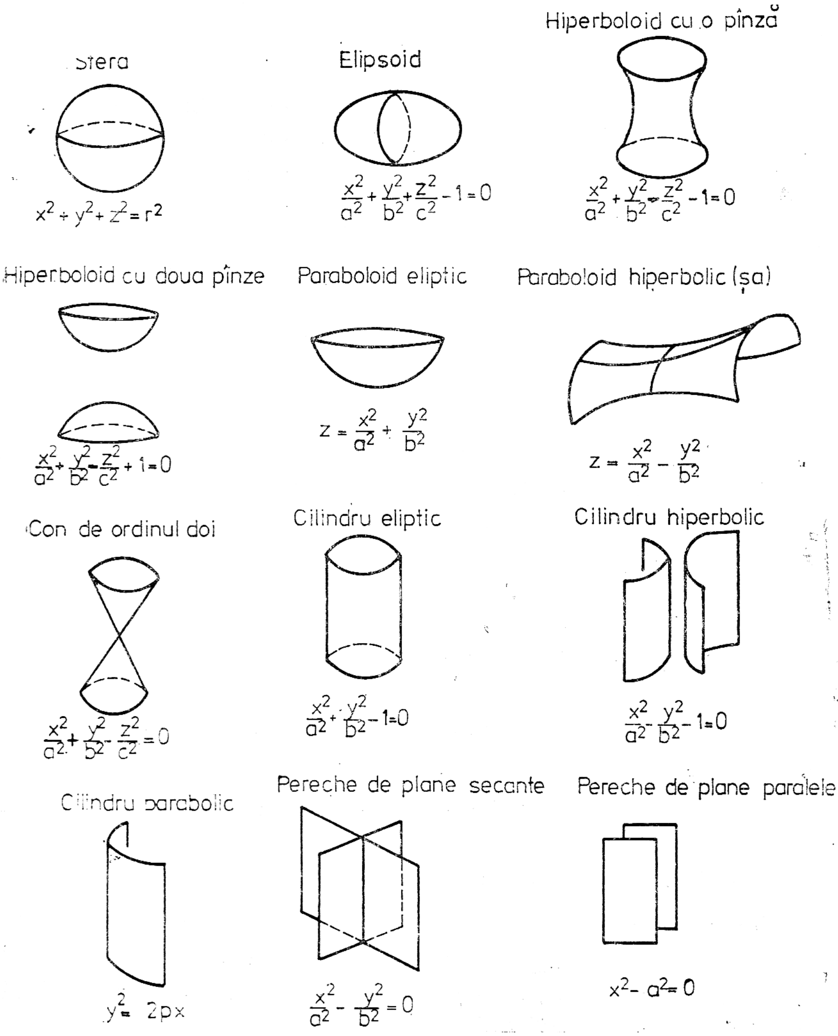
5.1. Fie $g: \boldsymbol{E}_3 \to \boldsymbol{R}$ forma pătratică afină definită prin $g(x, y, z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2\,a_{12}xy + 2\,a_{13}xz + 2\,a_{23}yz + 2\,a_{10}x + 2\,a_{20}y + 2\,a_{30}z + a_{00}$.

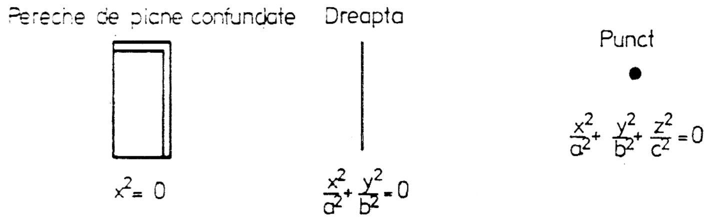
Mulțimea de nivel constant zero,

$$\Sigma = g^{-1}(0) = \{(x, y, z) \mid (x, y, z) \in \boldsymbol{R}^3,\quad g(x, y, z) = 0\},$$

se numește *cuadrică* sau *suprafață algebrică de ordinul al doilea*. Se notează $\Sigma : g(x, y, z) = 0$.

5.2. Prin trecerea de la reperul cartezian $\{O;\ \vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}\}$ la un reper cartezian adecvat orientat pozitiv (numit *reper canonic* sau *natural*) față de care ecuația $g(x, y, z) = 0$ să aibă forma cea mai simplă posibilă (numită *ecuație redusă* sau *canonică*) se dovedește că Σ este echivalentă cu una dintre următoarele mulțimi:





Mulțimea vidă Φ: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+1=0$ sau $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+1=0$ sau $x^2+a^2=0$

5.3. Față de *roto-translații* ecuația $g(x, y, z) = 0$ posedă următorii invarianți:

$$\Delta = \det \bar{\mathbf{A}}, \quad \delta = \det \mathbf{A}, \ \mathbf{J} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad I = \mathrm{tr}\mathbf{A},$$

unde

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{10} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{20} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{30} \\ a_{10} & a_{20} & a_{30} & a_{00} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix},$$

Precizarea naturii cuadricei Σ se poate face cu ajutorul numerelor Δ, δ, J și I.

Δ	Natura cuadricei
$\Delta = 0$	degenerată
$\Delta \neq 0$	nedegenerată

Dintre cuadricele nevide, sferele, elipsoizii, hiperboloizii și paraboloizii sînt cuadrice nedegenerate, iar restul sînt cuadrice degenerate.

5.4. *Sferele* sînt caracterizate prin $a_{12} = a_{13} = a_{23} = 0$ și $a_{11} = a_{22} = a_{33} \neq 0$.

5.5. Centrul unei cuadrice:

$$\begin{cases} \frac{1}{2} g_x(x, y, z) = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{10} = 0 \\ \frac{1}{2} g_y(x, y, z) = a_{12}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{20} = 0 \\ \frac{1}{2} g_z(x, y, z) = a_{13}x + a_{23}y + a_{33}z + a_{30} = 0. \end{cases}$$

Determinantul acestui sistem liniar este δ.

5.6. Pentru obținerea ecuației canonice se poate proceda astfel:

(i) Dacă $a_{12} = a_{13} = a_{23} = 0$, se face o translație.

(ii) Dacă cel puțin unul dintre numerele a_{12}, a_{13}, a_{23} este diferit de zero, atunci se face mai întîi o rotație.

Se determină valorile proprii λ_1, λ_2, λ_3 și vectorii proprii ortonormați $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ ai matricei simetrice **A** atașată formei pătratice $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz$. Se notează cu **R** matricea formată cu coordonatele vectorilor $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ așezate pe coloane; avînd în vedere posibilitatea înlocuirii unuia dintre versorii $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ prin opusul său sau posibilitatea renumerotării valorilor proprii, putem presupune $\det \mathbf{R} = +1$. Rotația

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \mathbf{R} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$$

reduce forma pătratică la forma diagonală $\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2$. Versorii proprii $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ dau direcțiile noilor axe.

În final, dacă este cazul, se face o translație.

5.7. Planul tangent la o cuadrică într-un punct $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \Sigma$ în care cel puțin unul dintre numerele g_{x_0}, g_{y_0}, g_{z_0} este diferit de zero, are ecuația

$$(x - x_0)\, g_{\ 0} + (y - y_0)\, g_{y_0} + (z - z_0)\, g_{z_0} = 0.$$

Această ecuație se obține prin dedublare.

Normala la cuadrica Σ în punctul M_0 are ecuațiile

$$\frac{x - x_0}{g_{x_0}} = \frac{y - y_0}{g_{y_0}} = \frac{z - z_0}{g_{z_0}}.$$

Exerciții și probleme

1. Fie sfera $\Sigma: x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 6y + 4z - 15 = 0$, planele P_1: $4x - y + 3z - 13 = 0$, P_2: $4x - y + 3z - 39 = 0$ și dreapta D: $8x - 11y + 8z - 30 = 0$, $x - y - 2z = 0$.

1) Se cere centrul și raza cercului $\Gamma = \Sigma \cap P_1$: $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 6y + 4z - 15 = 0$, $4x - y + 3z - 13 = 0$.

2) Să se scrie ecuația sferei simetrice sferei Σ față de planul P_2.

3) Să se arate că prin dreapta D se pot duce două plane tangente sferei Σ.

Soluție. 1) Centrul sferei este $C(-1, 3, -2)$ și raza sferei este $r = \sqrt{(-1)^2 + 3^2 + (-2)^2 - (-15)}$, $r = \sqrt{29}$. Cercul Γ există dacă planul P_1 este secant sferei Σ; într-adevăr $\mathbf{d}(C; P_1) = \sqrt{26} < r$. Centrul C_1 al cercului Γ (fig. 2.27) se află la intersecția planului P_1 cu dreapta care trece prin C și are direcția normalei $\vec{n}_1$.

$$C_1 \begin{cases} 4x - y + 3z - 13 = 0 \\ \dfrac{x+1}{4} = \dfrac{y-3}{-1} = \dfrac{z+2}{3}. \end{cases}$$

Obținem $C_1(3, 2, 1)$. Din triunghiul dreptunghic AC_1C găsim raza r_1 a cercului Γ; $r_1 = C_1A = \sqrt{3}$.

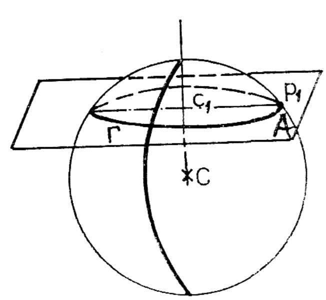


Fig. 2.27.

2) Fie Σ' sfera simetrică sferei Σ față de planul P_2. Centrul C' al sferei Σ' este simetricul punctului C față de planul P_2. Obținem $C'(15, -1, 10)$. Ținînd sema că cele două sfere au aceeași rază, ecuația sferei Σ' va fi

$$(x-15)^2+(y+1)^2+(z-10)^2=29.$$

3) Prin dreapta D se pot duce două plane tangente sferei Σ dacă această dreaptă este exterioară sferei; într-adevăr $\mathbf{d}(C; D)=\frac{29\sqrt{110}}{55}>r$. Planele tangente fac parte din fasciculul de plane $8x-11y+8z-30+\lambda(x-y-2z)=0$, $\lambda\in\boldsymbol{R}$.

Determinăm pe λ din condiția ca distanța de la centrul C al sferei la plan să fie egală cu raza r a sferei Σ,

$$\frac{|(-1)(8+\lambda)+3(-11-\lambda)+(-2)(8-2\lambda)-30|}{\sqrt{(8+\lambda)^2+(-11-\lambda)^2+(8-2\lambda)^2}}=\sqrt{29}.$$

Obținem trinomul $\lambda^2+\lambda-2=0$ cu rădăcinile reale și distincte $\lambda_1=-2$, $\lambda_2=1$. Cele două plane tangente sferei sînt π_1: $2x-3y+4z-10=0$, respectiv $\pi_2: 3x-4y+2z-10=0$.

2. Să se reducă la forma canonică și să se recunoască cuadricele

1) $36x^2+y^2+4z^2+72x+6y-40z+109=0$

2) $5x^2-8y^2+5z^2-6xz+8=0$

3) $x^2+3y^2+4yz-6x+8y+8=0$

4) $2y^2+4xy-8xz-4yz+6x-5=0$.

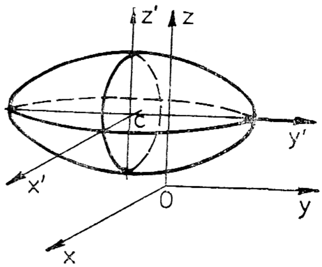


Fig. 2.28.

Soluție. 1) Întrucît $a_{12}=a_{13}=a_{23}=0$ (vezi 5.6 (i)), formăm pătrate perfecte. Obținem $36(x+1)^2+(y+3)^2+4(z-5)^2-36=0$ care reprezintă ecuația unui elipsoid. Efectuăm translația în centrul de simetrie al suprafeței $x=x'-1$, $y=y'-3$, $z=z'+5$ și obținem ecuația canonică $\frac{x'^2}{1}+\frac{y'^2}{36}+\frac{z'^2}{9}-1=0$ (fig. 2.28).

2) Efectuăm o rotație, axa Oy rămînînd neschimbată $x=x'\cos\theta-z'\sin\theta$, $y=y'$; $z=x'\sin\theta+z'\cos\theta$. Unghiul de rotație θ se alege astfel ca termenul $x'z'$ să dispară din ecuația suprafeței. Înlocuind în ecuația suprafeței obținem $x'^2(5-6\sin\theta\cos\theta)-8y'^2+z'^2(5+6\sin\theta\cos\theta)-6x'z'(\cos^2\theta-\sin^2\theta)+8=0$. Din condiția $\cos^2\theta-\sin^2\theta=0$ obținem $\theta=\frac{\pi}{4}$.

Rezultă ecuația canonică $\frac{x'^2}{4}-y'^2+z'^2+1=0$ și deci cuadrica este un hiperboloid cu două pînze cu vîrfurile pe Oy'.

3) Se face o rotație, axa Ox rămînînd fixă. Se procedează ca în cazul precedent și din ecuația $2\,\mathrm{tg}^2\,\theta+3\,\mathrm{tg}\,\theta-2=0$ obținem unghiul de rotație $\mathrm{tg}\,\theta_1=\frac{1}{2}$ și $\mathrm{tg}\,\theta_2=-2$, de unde $\sin\theta_1=\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos\theta_1=\frac{2}{\sqrt{5}}$ și $\sin\theta_2=$

$= -\frac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos\theta_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}$. În ambele cazuri obținem un hiperboloid cu o pînză rotit și translatat în centrul său de simetrie.

Altă metodă. Matricea formei pătratice $x^2 + 3y^2 + 4yz$ este

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Valorile proprii ale matricei sînt soluțiile ecuației

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Obținem $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 4$.

Coordonatele (u, v, w) ale vectorului propriu corespunzător valorii proprii λ sînt soluții ale sistemului

$$(1)\begin{cases} (1-\lambda)\,u & = 0 \\ (3-\lambda)\,v + 2w & = 0 \\ 2v + (-\lambda)\,w & = 0. \end{cases}$$

Pentru $\lambda_1 = -1$ sistemul (1) are soluția $u=0$, $v = -k$, $w = 2k$ sau normalizînd obținem vectorul propriu unitar $\vec{e}_1 = \left(0, \frac{-1}{\sqrt{5}}\, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$.

Pentru $\lambda_2 = 1$ sistemul (1) are soluția $(k, 0, 0)$, iar $\vec{e}_2 = (1, 0, 0)$; procedăm analog pentru $\lambda_3 = 4$ și obținem $\vec{e}_3 = \left(0, \frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$.

Matricea ortogonală ale cărei coloane sînt versorii proprii,

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

are determinantul 1. Prin rotația (vezi 5.6)

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} x = y' \\ y = -\frac{1}{\sqrt{5}}x' + \frac{2}{\sqrt{5}}z' \\ z = \frac{2}{\sqrt{5}}x' + \frac{1}{\sqrt{5}}z' \end{cases}$$

ecuația carteziană a cuadricei devine

$$-x'^2 + y'^2 + 4z'^2 - \frac{8}{\sqrt{5}}x' - 6y' + \frac{16}{\sqrt{5}}z' + 8 = 0.$$

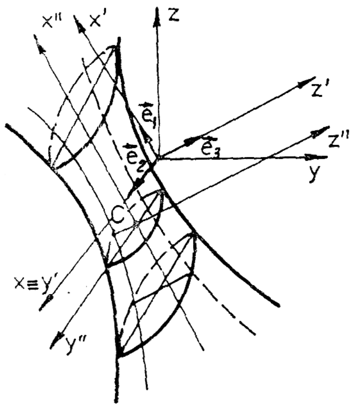


Fig. 2.29.

Completăm pătratele în x', y' şi z'. Obţinem

$$-\left(x' + \frac{4}{\sqrt{5}}\right)^2 + (y' - 3)^2 + $$
$$+ 4\left(z' + \frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 - 1 = 0.$$

Efectuăm o translaţie a sistemului $Ox'y'z'$ în punctul

$C\left(-\frac{4}{\sqrt{5}}, 3, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ dată de $x' = x'' -$

$$-\frac{4}{\sqrt{5}}, \quad y' = y'' + 3, \quad z' = z'' - \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Obţinem ecuaţia canonică a hiperboloidului cu o pînză $-x''^2 + y''^2 + 4z''^2 - 1 = 0$, ale cărui vîrfuri se află pe axele Cy'' şi Cz'' (fig. 2.29).

Observaţie. Coordonatele centrului conicei faţă de sistemul iniţial $Oxyz$ se pot afla ca soluţie a sistemului $g_x(x, y, z) = 0, g_y(x, y, z) = 0, g_z(x, y, z) = 0$; (vezi 5.5); $\frac{1}{2}(2x - 6) = 0$, $\frac{1}{2}(6y + 4z + 8) = 0$, $\frac{1}{2}(4y) = 0$; coordonatele centrului sînt $x_0 = 3$, $y_0 = 0$, $z_0 = -2$.

4) Formei pătratice $2y^2 + 4xy - 8xz - 4yz$ i se ataşează matricea

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 2 & 2 & -2 \\ -4 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

ale cărei valori proprii sînt $\lambda_1 = -4$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 6$.

Coordonatele (u, v, w) ale vectorului propriu corespunzător valorii proprii λ sînt soluţii ale sistemului

$$\begin{aligned} -\lambda u + 2v - 4w &= 0 \\ 2u + (2 - \lambda) v - 2w &= 0 \\ -4u - 2v + (-\lambda) w &= 0. \end{aligned}$$

Pentru $\lambda_1 = -4$ sistemul admite ca soluţie vectorul $(k, 0, k)$, $k \in \boldsymbol{R} - \{0\}$. Prin normalizare obţinem versorul propriu $\vec{e}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Analog, pentru $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 6$ obţinem vectorii proprii ortonormaţi $\vec{e}_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$, respectiv $\vec{e}_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$.

Întrucît

$$\det \mathbf{R} = \det \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} = -1 \text{ (rotaţie şi simetrie)},$$

pentru a avea numai rotație procedăm astfel: luăm

$\vec{e}_1^* = -\vec{e}_1, \vec{e}_2^* = \vec{e}_2, \vec{e}_3^* = \vec{e}_3$ sau renumerotăm $\lambda_1' = \lambda_2, \lambda_2' = \lambda_1, \lambda_3' = \lambda_3$, unde evident $\vec{e}_1' = \vec{e}_2, \vec{e}_2' = \vec{e}_1, \vec{e}_3' = \vec{e}_3$.

În cele ce urmează folosim al doilea procedeu. Rotația

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} \quad \text{sau} \quad \begin{aligned} x &= -\frac{1}{\sqrt{6}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y' + \frac{1}{\sqrt{3}}z' \\ y &= \frac{2}{\sqrt{6}}x' + \frac{1}{\sqrt{3}}z' \\ z &= \frac{1}{\sqrt{6}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y' - \frac{1}{\sqrt{3}}z' \end{aligned}$$

conduce la ecuația $-4y'^2 + 6z'^2 - \sqrt{6}x' + \frac{6}{\sqrt{2}}y' + \frac{6}{\sqrt{3}}z' - 5 = 0$.

Completăm pătratele și obținem

$$-4\left(y' - \frac{3}{4\sqrt{2}}\right)^2 + 6\left(z' + \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2 - \sqrt{6}\left(x' + \frac{35}{8\sqrt{6}}\right) = 0.$$

Efectuăm o translație în punctul $V\left(-\frac{35}{8\sqrt{6}}, \frac{3}{4\sqrt{3}}, -\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)$ și găsim $-4y''^2 + 6z''^2 - \sqrt{6}x'' = 0$, adică ecuația redusă a unui paraboloid hiperbolic.

Folosind formulele de transformare, coordonatele vîrfului paraboloidului față de sistemul inițial $Oxyz$ sînt $x = \frac{15}{16}$, $y = -\frac{13}{8} \cdot z = -\frac{3}{16}$.

3. Fie paraboloidul hiperbolic $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = z$ și punctul M_0 $(0, 2, -1)$.

1) Să se scrie ecuațiile generatoarelor rectilinii care trec prin M_0.

2) Să se calculeze măsura unghiului dintre aceste generatoare.

Soluție. 1) Problema are sens deoarece punctul M_0 aparține cuadricei. Cele două familii de generatoare rectilinii sînt

$$D_\lambda : \begin{cases} 2x + 3y - 6\lambda z = 0 \\ \lambda(2x - 3y) - 6 = 0 \end{cases} \text{pentru } z \neq 0,\ 2x - 3y \neq 0 \text{ și } D_\infty : \begin{cases} z = 0 \\ 2x - 3y = 0. \end{cases}$$

$$D_\mu : \begin{cases} 2x - 3y - 6\mu z = 0 \\ \mu(2x + 3y) - 6 = 0 \end{cases} \text{pentru } z \neq 0, 2x + 3y \neq 0 \text{ și } D_\infty : \begin{cases} z = 0 \\ 2x + 3y = 0. \end{cases}$$

Determinăm parametrii λ și μ impunînd condiția ca generatoarele să treacă prin M_0. Obținem $\lambda = -1$, $\mu = 1$. Ecuațiile generatoarelor vor fi

$$D_1 : \begin{cases} 2x + 3y + 6z = 0 \\ 2x - 3y + 6 = 0 \end{cases} \quad \text{sau} \quad D_1 : \frac{x}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{-2};$$

$$D_2 : \begin{cases} 2x - 3y - 6z = 0 \\ 2x + 3y - 6 = 0 \end{cases} \quad \text{sau} \quad D_2 : \frac{x}{3} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+1}{2}.$$

2) $\varphi = \arc\cos\frac{1}{\sqrt{17}}$.

4. Să se reducă la forma canonică și să se recunoască cuadricele

1) $x^2 - 16y^2 - 4z^2 - 32y + 16z - 16 = 0$

2) $2y^2 - 7z^2 + 112x - 16y - 14z - 87 = 0$

3) $xy + z^2 - 2 = 0$

4) $x^2 - y^2 + z^2 - 2xy - 2yz - 2xz - 5x - 1 = 0$

5) $x^2 + y^2 + 5z^2 - 6xy + 2xz - 2yz - 4x + 8y - 12z + 14=0$

5. Să se stabilească natura cuadricelor de ecuație

$$9x^2(1 + \lambda) - 16y^2(\lambda - 3) + 36(\lambda - 2)z^2 - 18(1 + \lambda)x - 64y(\lambda - 3) -$$
$$- 55\lambda + 57 = 0, \quad \lambda \in \boldsymbol{R}.$$

Soluție. Grupăm termenii astfel încît să formăm pătrate perfecte. Ecuația familiei de cuadrice se poate scrie

$$9(1 + \lambda)(x - 1)^2 - 16(\lambda-3)(y + 2)^2 + 36(\lambda - 2)z^2 - 144 = 0.$$

Efectuăm translația $x = x' + 1$, $y = y' - 2$, $z = z'$. Obținem

$$\frac{(1 + \lambda)x'^2}{16} - \frac{(\lambda - 3)y'^2}{9} + \frac{(\lambda - 2)z'^2}{4} - 1 = 0.$$

Se cercetează semnele expresiilor $1+\lambda$, $\lambda - 3$, $\lambda - 2$. Se găsesc: pentru $\lambda \in (-\infty, -1)$ hiperboloizi cu două pînze, pentru $\lambda \in (-1, 2) \cup (3, +\infty)$ hiperboloizi cu o pînză, pentru $\lambda \in (2, 3)$ elipsoizi, pentru $\lambda = -1$ cilindru hiperbolic, pentru $\lambda = 2$ cilindru eliptic, pentru $\lambda = 3$ cilindru circular.

6. Să se precizeze curbele de secțiune ale cuadricelor

$$1) \quad \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{1} = -2x,$$

$$2) \quad x^2 - \frac{y^2}{4} + z^2 + 1 = 0$$

cu planele $y + mz - 3 = 0$.

R: 1) parabole pentru $m \in \boldsymbol{R} - \{-2, 2\}$, drepte pentru $m = \pm 2$.

2) hiperbole pentru $m \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$, elipse pentru $m \in (-2, +2)$.

7. Dreapta D se rotește în jurul axei Oy. Să se stabilească pentru fiecare caz ecuația suprafeței obținute

1) D: $\frac{x - 1}{0} = \frac{y + 2}{1} = \frac{z - 3}{0}$, 2) D: $\frac{x}{3} = \frac{y + 2}{1} = \frac{z}{-1}$,

3) D: $\frac{x}{3} = \frac{y + 2}{1} = \frac{z - 3}{-1}$.

Soluție. Pentru fiecare caz se obține o suprafață de rotație generată de cercurile Γ: $x^2 + y^2 + z^2 = \lambda$, $y = \mu$.

1) Dreapta D este paralelă cu Oy; obținem un cilindru circular drept a cărui ecuație se găsește astfel: cercurile Γ se sprijină pe dreapta D și prin urmare sistemul, format din ecuațiile cercurilor Γ și ecuațiile dreptei D, trebuie să fie compatibil,

$$x^2 + y^2 + z^2 = \lambda, \quad y = \mu, \quad x - 1 = 0, \quad z - 3 = 0.$$

Eliminăm pe x, y, z și obținem condiția de compatibilitate $\mu^2 - \lambda + 10 = 0$. Din sistemul $\mu^2 - \lambda + 10 = 0$, $x^2 + y^2 + z^2 = \lambda$, $y = \mu$ eliminăm pe λ și μ și găsim ecuația carteziană a cilindrului, $x^2 + z^2 - 10 = 0$.

2) Dreapta D intersectează axa Oy în punctul V $(0, -2, 0)$; obținem un con circular

$$x^2 - 10\,(y + 2)^2 + z^2 = 0.$$

3) Dreapta D_2 și axa Oy sînt disjuncte; obținem hiperboloidul cu o pînză
$x^2 - 10\left(y + \frac{17}{10}\right) + z^2 - \frac{81}{10} = 0.$

8. Să se determine ecuația suprafeței generată prin mișcarea unei drepte, ce se sprijină simultan pe trei drepte date, D_1: $x + 2z + 2 = 0$, $y + z = 0$; D_2: $x + z - 1 = 0$, $y - 2 = 0$; D_3: $x = y = z$.

Soluție. O dreaptă variabilă Δ, ce se sprijină simultan pe D_1 și D_2, se obține la intersecția unui plan variabil trecînd prin D_1, cu un plan variabil trecînd prin D_2 adică

$$\Delta\colon x + 2z + 2 = \lambda(y + z), \; x + z - 1 = \mu(y - 2).$$

Punem condiția ca Δ să se sprijine și pe D_3, adică sistemul $x + 2z + 2 = \lambda(y + z)$, $x + z - 1 = \mu(y - 2)$, $x = y = z$, să fie compatibil. Găsim condiția de compatibilitate $4\lambda\mu - 2\lambda - 8\mu + 7 = 0$. Eliminînd parametrii λ și μ între această relație și ecuațiile dreptei Δ obținem ecuația suprafeței:

$$4x^2 + 7y^2 - 10xy - 5yz + 4xz + 8x - 10y + 2z = 0.$$

9. Să se determine ecuația carteziană implicită a suprafeței cilindrice a cărei generatoare este paralelă cu dreapta D: $x = y = z$ și se sprijină pe curba directoare C: $x = y^2$, $z = 0$.

Soluție. Orice dreaptă paralelă cu D are ecuațiile $x - z = \lambda$, $y - z = \mu$. Punem condiția ca această dreaptă să se sprijine pe C. Aceasta înseamnă că sistemul $x - z = \lambda$, $y - z = \mu$, $z = 0$, $x = y^2$, trebuie să fie compatibil. Eliminînd pe x, y și z găsim condiția de compatibilitate, $\lambda = \mu^2$. Înlocuind pe λ și μ găsim ecuația carteziană implicită a suprafeței, $y^2 - 2yz + z^2 - x + z = 0$.

10. Să se determine ecuația conului care trece prin dreptele D_1: $y = x$, $z = 0$; D_2: $y = -x$, $z = 0$, și prin punctul $(1, 2, 3)$, axa Oz fiind axă de simetrie.

R: $3x^2 - 3y^2 + z^2 = 0$.

11. Să se determine ecuația conului ale cărui generatoare sînt Ox, Oy, Oz și trece prin punctele $P_1(1, 2, 1)$ și P_2 $(-2, 1, 2)$.

R: $5xy - 3yz - 4xz = 0$.

12. Să se reprezinte domeniul $\overline{D}$, curba C, precum și proiecția lui C pe planul xOy în cazurile

1) $\overline{D}$: $x^2+y^2+z^2 \leqslant 6$, $x^2+y^2 \leqslant z$; C: $x^2+y^2+z^2=6$, $x^2+y^2=z$.

2) $\overline{D}$: $h^2(x^2+y^2) \geqslant r^2z^2$, $x^2+y^2 \leqslant r^2$, $z \geqslant 0$; C: $h^2(x^2+y^2)=r^2z^2$, $x^2+y^2=r^2$.

3) $\overline{D}$: $x^2+y^2+z^2 \leqslant r^2$, $x^2+y^2-rx \geqslant 0$, $x^2+y^2+rx \leqslant 0$;
C: $x^2+y^2+z^2=r^2$, $x^2+y^2-rx=0$, $x^2+y^2+rx=0$.

4) $\overline{D}$: $x^2+y^2 \leqslant 2rz$, $(x^2+y^2)^2-2r^2xy \leqslant 0$;
C: $x^2+y^2=2rz$, $(x^2+y^2)^2-2r^2xy=0$, unde $r, h>0$.

R: 1) figura 2.30, 2) figura 2.31. 3) figura 2.32, 4) figura 2.33.

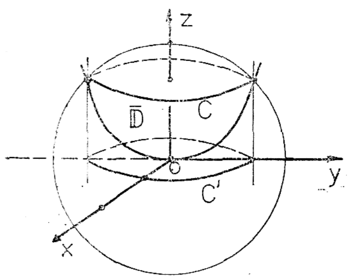


Fig. 2.30

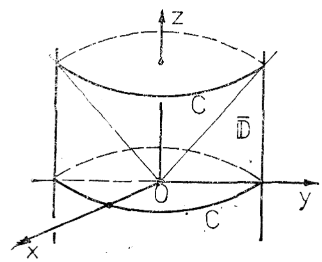


Fig. 2.31

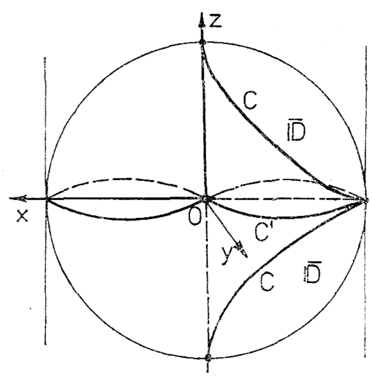


Fig. 2.32

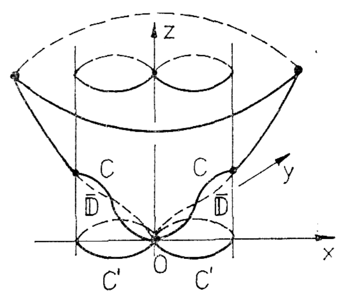


Fig. 2.33

§ 6. COORDONATE POLARE ȘI SEMIPOLARE

6.1. Fie O originea (polul), Ox axa polară și xOy reperul cartezian asociat reperului polar. Între coordonatele polare (ρ, θ) și coordonatele carteziene (x, y) ale punctului M (fig. 2.34) există relațiile

$$\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta. \end{cases}$$

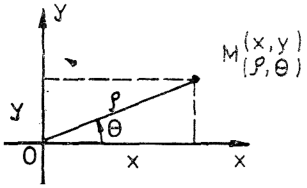


Fig. 2.34.

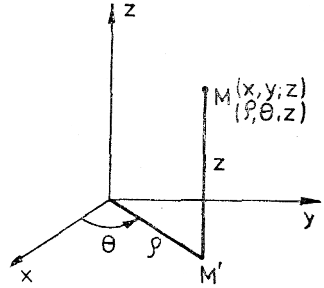


Fig. 2.35.

Dacă impunem $\rho > 0$, $\theta \in [0, 2\pi)$, atunci relațiile anterioare asigură corespondența biunivocă între mulțimea $\boldsymbol{R}^2 - \{0\}$ și mulțimea $(0, \infty) \times [0, 2\pi)$.

6.2. Ne situăm în spațiul $\boldsymbol{R}^3$. Între coordonatele cilindrice (ρ, θ, z) și coordonatele carteziene (x, y, z) ale punctului M avem relațiile (fig. 2.35)

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \\ z = z. \end{cases}$$

Dacă impunem $\rho > 0$, $\theta \in [0, 2\pi)$, $z \in \boldsymbol{R}$, atunci relațiile precedente asigură corespondența biunivocă între mulțimea $\boldsymbol{R}^3 - Oz$ și $(0, \infty) \times [0, 2\pi) \times \boldsymbol{R}$.

6.3. Între coordonatele sferice (r, θ, φ) și coordonatele (x, y, z) ale punctului M din spațiu avem relațiile (fig. 2.36)

$$\begin{cases} x = r \sin \varphi \cos \theta \\ y = r \sin \varphi \sin \theta \\ z = r \cos \varphi. \end{cases}$$

Dacă impunem restricțiile $r > 0$, $\theta \in [0, 2\pi)$, $\varphi \in (0, \pi)$, atunci formulele anterioare asigură corespondența biunivocă între mulțimile $\boldsymbol{R}^3 - Oz$ și $(0, \infty) \times [0, 2\pi) \times (0, \pi)$.

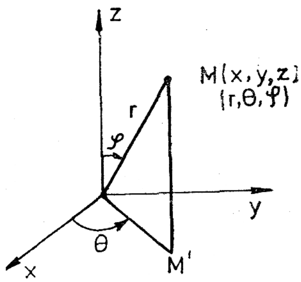


Fig. 2.36.

Exerciții și probleme

1. În coordonate polare se dau punctele $A(2, 0)$, $B\left(2, \frac{\pi}{3}\right)$, $C\left(2, \frac{2\pi}{3}\right)$, $D(2, \pi)$, $E\left(2, \frac{4\pi}{3}\right)$, $F\left(2, \frac{5\pi}{3}\right)$.

1) Se cere lungimea segmentelor AC și CF

2) Să se stabilească poziția punctelor în plan și să se afle coordonatele carteziene.

Soluție. 1) $AC = \sqrt{2^2 + 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot 2 \cos \frac{2\pi}{3}} = 2\sqrt{3}$, $CF = 4$.

2) Punctele sînt situate pe cercul Γ cu centrul în O și de rază 2.

Întrucît unghiul polar al fiecărui punct se obține din precedentul adăugînd $\frac{\pi}{3}$, punctele sînt vîrfurile unui hexagon regulat înscris în cercul Γ; $A(2, 0)$, $B(1, \sqrt{3})$, $C(-1, \sqrt{3})$, $D(-2, 0)$, $E(-1, -\sqrt{3})$, $F(1, -\sqrt{3})$.

2. Se dau punctele $A\left(\frac{5\sqrt{6}}{4}, \frac{5\sqrt{6}}{4}, -\frac{5}{2}\right)$, $B\left(-\frac{9}{2}, \frac{-3\sqrt{3}}{2}, -3\right)$, $C\left(-\frac{\sqrt{6}}{4}, -\frac{\sqrt{6}}{4}, \frac{-1}{2}\right)$ raportate la reperul triortogonal $Oxyz$. Să se calculeze coordonatele sferice ale acestor puncte. Unde sînt ele situate?

Soluție. $r_A = \sqrt{\left(\frac{5\sqrt{6}}{4}\right)^2 + \left(\frac{5\sqrt{6}}{4}\right)^2 + \left(-\frac{5}{2}\right)^2} = 5$; $\cos\varphi = \frac{\frac{-5}{2}}{5} = -\frac{1}{2}$, $\varphi \in (0, \pi)$ deci $\varphi = \frac{2\pi}{3}$; $\cos\theta = \sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\theta = \frac{\pi}{4}$; $A\left(5, \frac{\pi}{4}, \frac{2\pi}{3}\right)$; $r_B = 6$, $\cos\varphi = -\frac{1}{2}$, $\varphi \in (0, \pi)$, $\varphi = \frac{2\pi}{3}$, $\cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\theta = -\frac{1}{2}$, $\theta = \frac{7\pi}{6}$; $B\left(6, \frac{7\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}\right)$, $C\left(1, \frac{5\pi}{4}, \frac{2\pi}{3}\right)$. Punctele A și C sînt situate într-un plan care trece prin Oz și prin dreapta $D'OD$, astfel încît $\sphericalangle(Ox, D'OD) = \frac{\pi}{4}$.

Punctele A, B, C se află pe un con cu vîrful în origine, ale cărui generatoare fac un unghi de $\frac{2\pi}{3}$ cu Oz.

3. Axa polară a unui sistem de coordonate polare este paralelă cu axa absciselor a unui sistem cartezian rectangular și de același sens. Se dau coordonatele carteziene ale polului $O'(2, -3)$ și ale punctelor $A(2, 0)$, $B(0, -1)$, $C(0, -3)$, $D(2 + 2\sqrt{3}, -1)$, $E(1, -3 + \sqrt{3})$. Să se afle coordonatele polare ale acestor puncte.

R: $A\left(3, \frac{\pi}{2}\right)$, $B\left(2\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4}\right)$, $C(2, \pi)$, $D\left(4, \frac{\pi}{6}\right)$, $E\left(2, \frac{2\pi}{3}\right)$.

4. Se dau curbele Γ_1: $x^4 + y^4 + a(x^2 + y^2) = 0$, Γ_2: $x^4 - y^4 = x^2 - 3y^2$. Să se transcrie ecuațiile în coordonate polare și să se stabilească simetriile fiecărei curbe

R: Γ_1: $\rho = \frac{a}{\sqrt{\sin^4\theta + \cos^4\theta}}$. Întrucît $\rho(-\theta) = \rho(\theta)$ curba este simetrică față de axa polară; $\rho(\pi - \theta) = \rho(\theta)$ deci curba este simetrică față de o perpendiculară pe axa polară dusă prin pol; egalitatea $\rho(\pi + \theta) = \rho(\theta)$ implică simetrie față de pol;

Γ_2: $\rho = \sqrt{\frac{2\cos 2\theta - 1}{\cos 2\theta}}$; aceleași simetrii ca la curba precedentă.

5. Presupunem că în spațiu folosim coordonate sferice; care este locul geometric al punctelor $M\ (r, \theta, \varphi)$ pentru care 1) $r = 2$, 2) $\theta = \frac{2\pi}{3}$, 3) $\varphi = \frac{\pi}{3}$, 4) $r = 2$ și $\theta = \frac{2\pi}{3}$, 5) $r = 2$ și $\varphi = \frac{\pi}{3}$, 6) $\theta = \frac{2\pi}{3}$ și $\varphi = \frac{\pi}{3}$.

R: 1) Sfera Σ_1 cu centrul în O și raza 2; 2) semiplanul P care trece prin Oz și prin OM_0, $OM_0 \in xOy$, $\sphericalangle xOM_0 = \frac{2\pi}{3}$; 3) porțiunea de suprafață conică Σ_2 cu vîrful cu O, ale cărei generatoare fac unghiuri de $\frac{\pi}{3}$ cu semiaxa Oz; 4) semicercul Γ_1 al sferei Σ_1 din semiplanul P; 5) cercul Γ al sferei Σ_1 din suprafața conică Σ_2; 6) generatoarea suprafeței conice Σ_2 aflată în semiplanul P.

6. Presupunînd că în spațiu folosim coordonate cilindrice, care este locul geometric al punctelor $M(\rho, \theta, z)$ pentru care 1) $\rho = 2$, 2) $\theta = \frac{\pi}{3}$, 3) $z = -5$, 4) $\rho = 2$ și $\theta = \frac{\pi}{3}$, 5) $\rho = 2$ și $z = -5$, 6) $\theta = \frac{\pi}{3}$ și $z = -5$.

R: 1) cilindrul circular drept Σ cu generatoarele paralele cu Oz, la distanță doi de Oz; 2) semiplanul P care trece prin Oz și prin OM_0, $OM_0 \in xOy$, $\sphericalangle xOM_0 = \frac{\pi}{3}$; 3) planul Q paralel cu xOy la distanță cinci sub xOy; 4) dreapta $\rho = 2$, $\theta = \frac{\pi}{3}$; 5) cercul Γ din planul Q cu centrul în $(0, 0, -5)$ și de rază doi; 6) semidreapta $D = P \cap Q$.

CAPITOLUL 3

GEOMETRIE DIFERENȚIALĂ

§1. FUNCȚII DIFERENȚIABILE

1.1. În acest capitol, prin *funcție diferențiabilă* vom înțelege o funcție de clasă C^∞. Clasa de indice minim impusă de context poate fi ușor recunoscută.

1.2. Considerăm o funcție de tipul $f: \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^m$. Funcțiile $f_i = y_i \circ f : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$, unde y_i sînt funcțiile coordonate ale lui $\boldsymbol{R}^m$, se numesc *coordonatele euclidiene* ale lui f și se scrie $f = (f_1, \ldots, f_m)$.

Mulțimea
$G(f) = \{(x_1, \ldots, x_n, f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n)) \mid (x_1, \ldots, x_n) \in \boldsymbol{R}^n\} \subset \boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^m \equiv \equiv \boldsymbol{R}^{n+m}$ se numește *graficul* funcției $f = (f_1, \ldots, f_m)$. Evident $G(f)$ coincide cu mulțimea valorilor funcției

$$(x_1, \ldots, x_n) \to (x_1, \ldots, x_n, f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n)).$$

Funcția $f = (f_1, \ldots, f_m)$ este diferențiabilă dacă și numai dacă f_i sînt funcții diferențiabile. Unei funcții diferențiabile f i se asociază *matricea jacobian*

$$\mathbf{J}(f) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_2} \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}.$$

Dacă $n = m$, atunci determinantul $\det \mathbf{J}(f)$ se numește *jacobianul* lui f și se notează cu $\dfrac{D(f_1, \ldots, f_n)}{D(x_1, \ldots, x_n)}$.

1.3. Funcția $f = (f_1, \ldots, f_m)$ se numește:

1) *injectivă* dacă relațiile $\forall P, Q \in \boldsymbol{R}^n$, $f(P) = f(Q) \in \boldsymbol{R}^m$ implică $P = Q$;

2) *surjectivă* dacă $\forall Q \in \boldsymbol{R}^m$, $\exists P \in \boldsymbol{R}^n$ astfel încît $f(P) = Q$;

3) *bijectivă* dacă este injectivă și surjectivă;

4) *imersie* dacă $\mathbf{J}(f)$ are rangul n, $\forall P \in \boldsymbol{R}^n (n \leqslant m)$;

5) *submersie* dacă $\mathbf{J}(f)$ are rangul m, $\forall P \in \boldsymbol{R}^n (m \leqslant n)$;

6) *regulată* dacă este imersie sau submersie;

7) *difeomorfism* dacă $n = m$, dacă este diferențiabilă și dacă posedă inversă diferențiabilă.

1.4. Dacă funcția $f = (f_1, \ldots, f_m)$ nu este regulată într-un punct P, atunci P se numește *punct singular* sau *punct critic*, iar $f(P)$ se numește *valoare singulară* sau *valoare critică*.

1.5. Fie $f : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ o funcție diferențiabilă și

$$d^2f(P)\,(dx) = \sum_{i,\,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(P)\, dx_i\, dx_j$$

hessiana sa *(diferențiala de ordinul doi)*. Fie P un punct critic al lui f. Dacă forma pătratică $d^2f(P)$ este nedegenerată, adică $\det\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(P)\right] \neq 0$, atunci P se numește *punct critic nedegenerat*. În caz contrar P se numește *punct critic degenerat*.

Punctele critice nedegenerate ale unei funcții diferențabile $f: \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ sînt izolate.

1.6. *Teorema funcției inverse.* Fie $f: \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^n$ o funcție diferențiabilă. Dacă $P \in \boldsymbol{R}^n$ este un punct în care $\det \mathbf{J}(f) \neq 0$, atunci există o vecinătate $\boldsymbol{D}$ a lui P astfel încît restricția lui f la $\boldsymbol{D}$ să fie un difeomorfism.

1.7. *Teorema funcției implicite.* Fie $f = (f_1, \ldots, f_m): \boldsymbol{R}^{n+m} \to \boldsymbol{R}^m$ o funcție diferențiabilă. Dacă în $(A, B) \in \boldsymbol{R}^{n+m}$ avem $f(A, B) = 0$ și $\frac{D(f_1, \ldots, f_m)}{D(y_1, \ldots, y_m)}(A, B) \neq 0$, atunci există o vecinătate $\boldsymbol{D}$ a lui A și o funcție diferențiabilă (unică) $g: \boldsymbol{D} \to \boldsymbol{R}^m$ astfel încît $g(A) = B$ și $f(P, g(P)) = 0$, $\forall P \in \boldsymbol{D}$.

1.8. Pentru definiția diferențiabilității nu este necesar ca domeniul de definiție al funcției să fie toată mulțimea $\boldsymbol{R}^n$, dar este necesar ca acest domeniu să fie o mulțime deschisă în $\boldsymbol{R}^n$.

Fie S o mulțime oarecare din $\boldsymbol{R}^n$. O funcție $f: S \to \boldsymbol{R}^m$ se numește diferențiabilă pe S dacă poate fi extinsă diferențiabil la un interval deschis din $\boldsymbol{R}^n$ care conține pe S.

1.9. Fie I un interval din $\boldsymbol{R}$ și $f: I \to \boldsymbol{R}^m$. În acest caz noțiunea de derivată parțială se reduce la noțiunea de derivată de la funcțiile de o singură variabilă. De asemenea, au sens și noțiunile de derivată la stînga și derivată la dreapta.

1.10. Considerăm funcția diferențiabilă $f: \boldsymbol{R}^n \to \mathbf{R}$ și $\vec{v}$ un vector tangent la $\boldsymbol{R}^n$ în punctul P. Numărul

$$D_{\vec{v}} f(P) = \frac{d}{dt} f(P + tV)\Big|_{t=0},$$

unde V este punctul atașat lui $\vec{v}$, se numește *derivata lui f în raport cu $\vec{v}$ sau derivata lui f după direcția lui $\vec{v}$.*

Dacă $\vec{v}_P = (v_1, \ldots, v_n)_P$, atunci

$$D_{\vec{v}} f(P) = v_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(P) + \ldots + v_n \frac{\partial f}{\partial x_n}(P) = (\vec{v}, \nabla f(P)),$$

unde ∇f este *gradientul* lui f.

1.11. Fie S o mulțime din $\boldsymbol{R}^n$. O funcție $\vec{V}$ care asociază fiecărui punct $P \in S$ un vector $\vec{V}(P)$ tangent la $\boldsymbol{R}^n$ în punctul P se numește *cîmp vectorial* pe S (fig. 3.1). Dacă funcția $\vec{V}$ este constantă, atunci cîmpul se numește *paralel*.

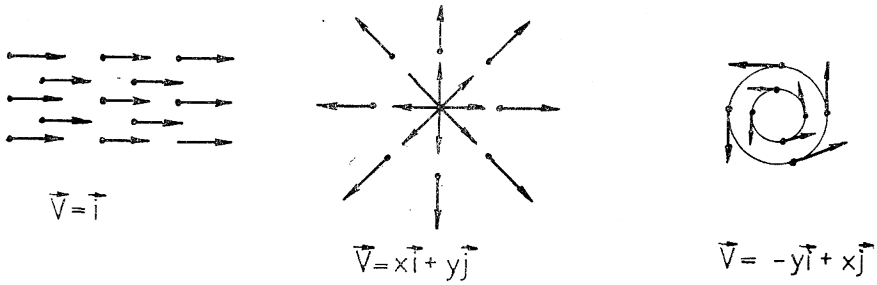


Fig. 3.1

Algebra cîmpurilor vectoriale se construiește pe baza următoarelor definiții

$$(\vec{V} + \vec{W})(P) = \vec{V}(P) + \vec{W}(P), \ (\mathrm{f}\vec{V})(P) = \mathrm{f}(P)\,\vec{V}(P), \ \mathrm{f}: S \to \boldsymbol{R}.$$

Evident au sens și noțiunile de dependență și independență (punctual) liniară.

Cîmpurile paralele $\vec{U}_1, \vec{U}_2, \ldots, \vec{U}_n$ definite prin $\vec{U}_1(P) = (1, 0, \ldots, 0)_P$, $\vec{U}_2(P) = (0, 1, \ldots, 0)_P, \ldots, \vec{U}_n(P) = (0, 0, \ldots, 1)_P$ se numesc *cîmpuri fundamentale*, iar ansamblul lor se numește *cîmpul reperului natural*. Orice cîmp $\vec{V}$ poate fi scris în forma

$$\vec{V}(P) = \mathrm{f}_1(P)\,\vec{U}_1(P) + \mathrm{f}_2(P)\,\vec{U}_2(P) + \ldots + \mathrm{f}_n(P)\,\vec{U}_n(P),$$

funcțiile $P \to \mathrm{f}_i(P)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, numindu-se *coordonatele euclidiene ale lui* $\vec{V}$. Deci un cîmp vectorial este echivalent cu o funcție de tipul $\mathrm{f} = (\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, \ldots, \mathrm{f}_n): S \to \boldsymbol{R}^n$.

Un cîmp vectorial se numește *diferențiabil* dacă coordonatele sale sînt funcții diferențiabile.

Produsul scalar a două cîmpuri vectoriale, produsul vectorial a $n-1$ cîmpuri vectoriale și produsul mixt a n cîmpuri vectoriale se definesc punctual, adică prin intermediul operațiilor corespunzătoare de la vectorii tangenți.

1.12. Fie $\vec{V}$ un cîmp vectorial pe $\boldsymbol{R}^n$ și $\mathrm{f}: \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ o funcție diferențiabilă. Funcția $\mathrm{D}_{\vec{V}}\,\mathrm{f}$ definită prin $P \to \mathrm{D}_{\vec{V}(P)}\,\mathrm{f}$ se numește *derivata lui f în raport cîmpul* $\vec{V}$. În particular găsim

$$\mathrm{D}_{\vec{U}_1}\,\mathrm{f} = \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial x_1}, \ D_{\vec{U}_2}\,\mathrm{f} = \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial x_2}, \ldots, \mathrm{D}_{\vec{U}_n}\,\mathrm{f} = \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial x_n}.$$

1.13. Fie $\vec{W}$ un cîmp vectorial pe $\boldsymbol{R}^n$ și $\vec{v} \in T_P\boldsymbol{R}^n$. Vectorul

$$\mathrm{D}_{\vec{v}}\vec{W}(P) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\vec{W}(P + tV)\Big|_{t=0}$$

tangent la $\boldsymbol{R}^n$ în punctul P se numește *derivata covariantă a lui* $\vec{W}$ *în raport cu* $\vec{v}$. Dacă $\vec{W} = w_1\vec{U}_1 + w_2\vec{U}_2 + \ldots + w_n\vec{U}_n$, atunci

$$\mathrm{D}_{\vec{v}}\vec{W} = (\mathrm{D}_{\vec{v}}w_1)\,\vec{U}_1 + (\mathrm{D}_{\vec{v}}w_2)\,\vec{U}_2 + \ldots + (\mathrm{D}_{\vec{v}}w_n)\,\vec{U}_n.$$

În particular, derivatele covariante ale cîmpurilor paralele sînt nule.

Fie cîmpurile vectoriale diferențiabile $\vec{Y}$, $\vec{Z}$, fie $\vec{v}$, $\vec{w} \in T_P\mathbf{R}^n$ și a, $b \in \mathbf{R}$. Avem

$$\mathrm{D}_{a\vec{v}+b\vec{w}}\vec{Y} = a\mathrm{D}_{\vec{v}}\vec{Y} + b\mathrm{D}_{\vec{w}}\vec{Y}$$

$$\mathrm{D}_{\vec{v}}(a\vec{Y} + b\vec{Z}) = a\mathrm{D}_{\vec{v}}\vec{Y} + b\mathrm{D}_{\vec{v}}\vec{Z}$$

$$\mathrm{D}_{\vec{v}}(\mathrm{f}\vec{Y}) = (\mathrm{D}_{\vec{v}}\mathrm{f})\vec{Y} + \mathrm{f}\mathrm{D}_{\vec{v}}\vec{Y}$$

$$\mathrm{D}_{\vec{v}}(\vec{Y}, \vec{Z}) = (\mathrm{D}_{\vec{v}}\vec{Y}, \vec{Z}) + (\vec{Y}, D_{\vec{v}}\vec{Z}).$$

1.14. Fie cîmpurile vectoriale diferențiabile $\vec{V}$ și $\vec{W}$. Cîmpul vectorial $\mathrm{D}_{\vec{V}}\vec{W}$ definit prin $(\mathrm{D}_{\vec{V}}\vec{W})(P) = \mathrm{D}_{\vec{V}(P)}\vec{W}$ se numește *derivata covariantă a cîmpului $\vec{W}$ în raport cu cîmpul $\vec{V}$*. Dacă

$$\vec{W} = w_1\vec{U}_1 + w_2\vec{U}_2 + \ldots + w_n\vec{U}_n, \text{ atunci}$$

$$\mathrm{D}_{\vec{V}}\vec{W} = (\mathrm{D}_{\vec{V}}w_1)\vec{U}_1 + (\mathrm{D}_{\vec{V}}w_2)\vec{U}_2 + \ldots + (\mathrm{D}_{\vec{V}}w_n)\vec{U}_n.$$

Exerciții și probleme

1. Să se arate că pe $\boldsymbol{R}^n$ nu există nici o distanță diferențiabilă.

Soluție. Dacă $\mathrm{d}: \boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ este o distanță diferențiabilă pe $\boldsymbol{R}^n$, atunci $\rho: \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ definită prin $\rho(x, y) = \mathrm{d}((x, 0, \ldots, 0), (y, 0, \ldots, 0))$ este o distanță diferențiabilă pe $\boldsymbol{R}$. De aceea este suficient să demonstrăm că pe $\boldsymbol{R}$ nu există nici o distanță diferențiabilă.

Fie $\rho: \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ o metrică diferențiabilă. Deoarece $\rho(x, y) \geqslant \rho(x, x) = 0$, adică (x, x) este un punct de minim global, în mod necesar avem

$$\frac{\partial\rho}{\partial x}(x, x) = 0, \quad \frac{\partial\rho}{\partial y}(x, x) = 0.$$

Fie $z > y$. Din $\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z)$ rezultă

$$\frac{\rho(x, z) - \rho(x, y)}{z - y} \leqslant \frac{\rho(y, z) - \rho(y, y)}{z - y}$$

și deci

$$\lim_{z \searrow y} \frac{\rho(x, z) - \rho(x, y)}{z - y} \leqslant \lim_{z \searrow y} \frac{\rho(y, z) - \rho(y, y)}{z - y}.$$

Aceasta împreună cu diferențiabilitatea implică

$$\frac{\partial\rho}{\partial y}(x, y) \leqslant \frac{\partial\rho}{\partial y}(y, y) = 0.$$

Analog, în ipoteza $z < y$, se arată că $\frac{\partial \rho}{\partial y}(x, y) \geq 0$.

Cele două inegalități satisfăcute de $\frac{\partial \rho}{\partial y}$ implică $\frac{\partial \rho}{\partial y}(x, y)=0$, $\forall (x, y) \in \boldsymbol{R}^2$.

Analog, $\frac{\partial \rho}{\partial x}(x, y) = 0$, $\forall (x, y) \in \boldsymbol{R}^2$. Deci $d\rho = 0$, adică $\rho(x, y) = \text{const.}$ Dar $\rho(x, x) = 0$ implică $\rho = 0$.

2. Fie $\boldsymbol{D}$ o mulțime deschisă din $\boldsymbol{R}^n$, fie I un interval din $\boldsymbol{R}$ și $\mathrm{f}: \boldsymbol{D} \to R$ $\alpha: I \to \boldsymbol{D}$ două funcții diferențiabile. Să se arate că $\mathrm{f} \circ \alpha$ este constantă dacă și numai dacă $\dot{\alpha} \perp \nabla \mathrm{f} \circ \alpha$.

3. Fie funcția $\mathrm{f}: \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ de clasă C^1. Se presupune că ecuația $\mathrm{f}(x_1, x_2, \ldots, \ldots, x_n) = 0$ definește pe x_i, $i =$ fixat, ca funcție de clasă C^1 de celelalte $n-1$ variabile. Se construiește matricea pătratică de ordinul n, $\mathbf{A} = [a_{ij}]$, astfel ca $a_{ii} = 1$ și $a_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial x_j}$ pentru orice $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Să se arate că $\det \mathbf{A} = -(n-2)\, 2^{n-1}$.

Soluție. Aplicăm operatorul de derivare totală. Obținem $\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial x_j} + \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial x_i} \times \frac{\partial x_i}{\partial x_j} = 0$, $i \neq j$, adică $\frac{\partial x_i}{\partial x_j} = -\frac{\dfrac{\partial \mathrm{f}}{\partial x_j}}{\dfrac{\partial \mathrm{f}}{\partial x_i}}$, deoarece prin ipoteză $\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial x_i}(x) \neq 0$.

Notăm $\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial x_i} = \mathrm{f}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Atunci, $a_{ij} = -\frac{\mathrm{f}_i}{\mathrm{f}_j}$, pentru $i \neq j$.

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & -\frac{\mathrm{f}_1}{\mathrm{f}_2} & -\frac{\mathrm{f}_1}{\mathrm{f}_3} & \ldots & -\frac{\mathrm{f}_1}{\mathrm{f}_n} \\ -\frac{\mathrm{f}_2}{\mathrm{f}_1} & 1 & -\frac{\mathrm{f}_2}{\mathrm{f}_3} & \ldots & -\frac{\mathrm{f}_2}{\mathrm{f}_n} \\ -\frac{\mathrm{f}_3}{\mathrm{f}_1} & -\frac{\mathrm{f}_3}{\mathrm{f}_2} & 1 & \ldots & -\frac{\mathrm{f}_3}{\mathrm{f}_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\ -\frac{\mathrm{f}_n}{\mathrm{f}_1} & -\frac{\mathrm{f}_n}{\mathrm{f}_2} & -\frac{\mathrm{f}_n}{\mathrm{f}_3} & \ldots & 1 \end{vmatrix} = \frac{\mathrm{f}_1\mathrm{f}_2 \ldots \mathrm{f}_n}{\mathrm{f}_1\mathrm{f}_2 \ldots \mathrm{f}_n} \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & \ldots & -1 \\ -1 & 1 & -1 & \ldots & -1 \\ -1 & -1 & 1 & \ldots & -1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & & \ldots \\ -1 & -1 & -1 & \ldots & 1 \end{vmatrix}$$

Adunăm toate liniile la prima, scoatem factor comun pe $-(n-2)$ și prima linie astfel obținută, (cu toate elementele egale cu unitatea, o adunăm la toate celelalte. Determinantul devine

$$\det \mathbf{A} = -(n-2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 2 \end{vmatrix}.$$

Dezvoltînd cu regula lui Laplace după elementele primei coloane, găsim $\det \mathbf{A} = -(n-2)\, 2^{n-1}$.

4. Fie funcția f: $\boldsymbol{D} \to \boldsymbol{R}^3$ dată prin $f(u, v) = (u^2, uv, v^2)$, $\boldsymbol{D}: u > 0, v > 0$.

1) Să se arate că este injectivă și imersie, dar nu este surjectivă.

2) Să se determine $f(\boldsymbol{D})$ și să se arate că $f^{-1}: f(\boldsymbol{D}) \to \boldsymbol{D}$ este continuă.

5. Fie funcția f: $\boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$, definită prin $f(x, y) = x^4 - ax^2y + by^3$, $a, b \neq 0$. Să se stabilească dacă este injectivă, surjectivă, submersie.

6. Fie $f = (x, y): \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^2$, $x = \rho \cos\theta$, $y = \rho \sin\theta$ și restricția sa g: $(0, \infty) \times (0, 2\pi) \to \boldsymbol{R}^2 - \{(x, y) \mid x \geqslant 0, y = 0\}$.

1) Să se cerceteze aplicabilitatea teoremei funcției inverse pentru f.

2) Să se arate că g este un difeomorfism global. Să se găsească g^{-1}.

R: 1) $\dfrac{D(x, y)}{D(\rho, \theta)} = \rho \neq 0 \Leftrightarrow \rho \neq 0$. 2) g este o bijecție cu Jacobianul nenul (fig. 3.2);

$$g^{-1}(x, y) = \begin{cases} \left(\sqrt{x^2 + y^2}, \arccos \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) & \text{pentru } y > 0 \\ (-x, \pi) & \text{pentru } y = 0, x < 0 \\ \left(\sqrt{x^2 + y^2}, \pi + \arccos \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) & \text{pentru } y < 0 \end{cases}$$

7. Se dă funcția $f = (x, y, z): \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^3$, $x = \rho \cos\theta$, $y = \rho \sin\theta$, $z = z$ și restricția sa g: $(0, \infty) \times (0, 2\pi) \times (-\infty, \infty) \to \boldsymbol{R}^3 - \{(x, y, z) \mid x \geqslant 0, y = 0\}$.

1) Să se cerceteze aplicabilitatea teoremei funcției inverse pentru f.

2) Să se arate că g este un difeomorfism global. Să se găsească g^{-1}.

Soluție. Pentru funcția diferențiabilă f obținem

$$\frac{D(x, y, z)}{D(\rho, \theta, z)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \rho\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho.$$

Deoarece $\dfrac{D(x, y, z)}{D(\rho, \theta, z)} = \rho \neq 0 \Leftrightarrow \rho \neq 0$, rezultă că există mulțimi deschise din $\boldsymbol{R}^3$ pe care f este C^∞ — inversabilă. De exemplu, $\boldsymbol{D} = (0, \infty) \times (0, 2\pi) \times (-\infty, \infty)$. Imaginea lui $\boldsymbol{D}$ prin f este mulțimea deschisă care se obține

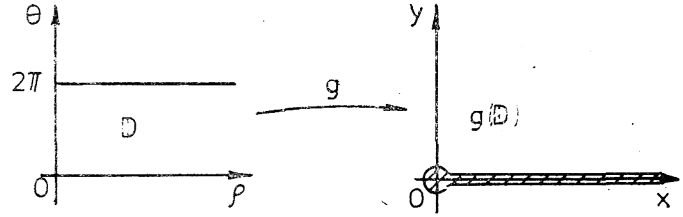


Fig. 3.2

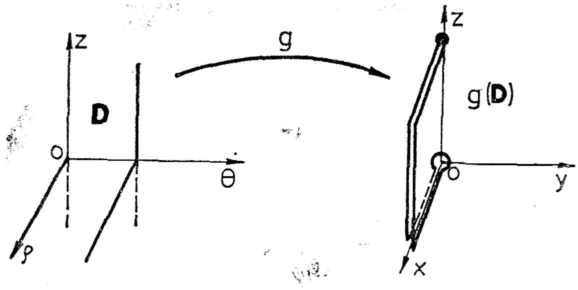


Fig. 3.3

scoțînd din $\boldsymbol{R}^3$ semiplanul xOz, $x \geqslant 0$ (fig. 3.3). Închiderea lui $\boldsymbol{D}$ este $\overline{\boldsymbol{D}}=[0, \infty)\times[0, 2\pi]\times\boldsymbol{R}$, iar $f(\overline{\boldsymbol{D}}) = \boldsymbol{R}^3$.

2) Funcția g este injectivă. Într-adevăr, relația $g(\rho_1, \theta_1, z_1)=g(\rho_2, \theta_2, z_2)$, adică $(\rho_1 \cos\theta_1, \rho_1 \sin\theta_1, z_1) = (\rho_2 \cos\theta_2, \rho_2 \sin\theta_2, z_2)$, implică $(\rho_1, \theta_1, z_1) = (\rho_2, \theta_2, z_2)$. Funcția g este și surjectivă deoarece $g((0, \infty)\times(0, 2\pi)\times(-\infty, \infty)) = \mathbf{R}^3 - \{(x, y, z) \mid x \geqslant 0,\ y = 0\}$. g este un difeomorfism global deoarece este o bijecție cu Jacobianul nenul.

Rezolvînd sistemul

$$\rho\cos\theta = x,\ \rho\sin\theta = y,\ z = z,\ (x, y, z)\in\boldsymbol{R}^3 - \{(x, y, z)/x\geqslant 0,\ y = 0\},$$

găsim

$$g^{-1}(y, x, z) = \begin{cases} \left(\sqrt{x^2+y^2},\ \arccos\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ z\right) & \text{pentru } y > 0 \\ (-x, \pi, z) & \text{pentru } y = 0,\ x < 0 \\ \left(\sqrt{x^2+y^2},\ \pi + \arccos\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ z\right) & \text{pentru } y < 0. \end{cases}$$

8. Considerăm funcția $f = (x, y, z)\colon \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^3$, $x = r\sin\varphi\cos\theta$, $y = r\sin\varphi\sin\theta$, $z = r\cos\varphi$ și restricția sa $g : (0, \infty)\times(0, \pi)\times(0, 2\pi)\to\boldsymbol{R}^3 - \{(x, y, z) \mid x\geqslant 0,\ y = 0\}$.

1) Să se cerceteze aplicabilitatea teoremei funcției inverse pentru f.

2) Să se arate că g este un difeomorfism global. Să se găsească g^{-1}.

R: 1) $\dfrac{D(x, y, z)}{D(r, \varphi, \theta)} = r^2\sin\varphi \neq 0 \Leftrightarrow r \neq 0$ și $\varphi \neq k\pi,\ k\in\mathbf{Z}$.

2) g este o bijecție cu Jacobianul nenul (fig. 3.4). Restricția lui g^{-1} la $x > 0,\ y > 0,\ z > 0$ este

$$g^{-1}(x, y, z) = \left(\sqrt{x^2+y^2+z^2},\ \arccos\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\ \arcsin\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right).$$

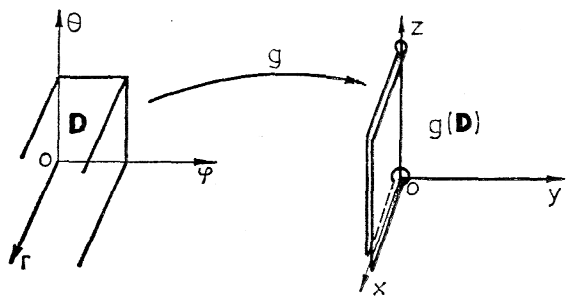


Fig. 3.4

9. Se consideră funcția $t \to (a \cos t, b \sin t)$, $t \in \boldsymbol{R}$. Să se stabilească dacă este injectivă, surjectivă, imersie.

10. Considerăm funcția $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}^2$,

$$f(t) = \begin{cases} \left(e^{-\frac{1}{t}}, e^{-\frac{1}{t}} \sin e^{\frac{1}{t}}\right), & t > 0 \\ (0, 0) & , t = 0 \\ \left(-e^{\frac{1}{t}}, e^{\frac{1}{t}} \sin e^{-\frac{1}{t}}\right), & t < 0. \end{cases}$$

Să se arate că este diferențiabilă și admite originea ca punct singular.

11. Fie $f = (u, v): \boldsymbol{R}^2 - \{(0, 0)\} \to \mathbf{R}^2 - \{(0, 0)\}$, $u = \dfrac{kx}{x^2 + y^2}$, $v = \dfrac{ky}{x^2 + y^2}$. Să se arate că f este un difeomorfism.

R: f este bijecție, $f^{-1} = (x, y): \boldsymbol{R}^2 - \{(0, 0)\} \to \boldsymbol{R}^2 - \{(0, 0)\}$, $x = \dfrac{ku}{u^2 + v^2}$, $y = \dfrac{kv}{u^2 + v^2}$, este diferențiabilă, deci f este difeomorfism.

12. Se consideră funcția $f: \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ definită prin

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_1 - x_2)^2 x_2 + (x_1 - x_2) x_3 + \sum_{a=1}^{n-3} x_{a+3} e^{a(x_1 - x_2)},$$

pentru $n \geq 4$. Să se arate că rangul *hessianei* lui f, adică rangul matricei $\left[\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right]$, este cel mult 2.

Soluție. Notăm

$$p_1 = \frac{\partial f}{\partial x_1} = 2(x_1 - x_2) x_2 + x_3 + \sum_{a=1}^{n-3} a x_{a+3} e^{a(x_1 - x_2)},$$

$$p_2 = \frac{\partial f}{\partial x_2} = -2(x_1 - x_2) x_2 + (x_1 - x_2)^2 - x_3 - \sum_{a=1}^{n-3} a x_{a+3} e^{a(x_1 - x_2)},$$

$$p_3 = \frac{\partial f}{\partial x_3} = x_1 - x_2, \ p_{a+3} = e^{a(x_1 - x_2)}, \ a = 1, 2, \ldots, n - 3.$$

Fie $f_\alpha: \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$, $\alpha = 1, 2, \ldots, n - 2$, funcțiile reale definite respectiv prin

$$f_1(y) = y_1 + y_2 - y_3^2, \ f_2(y) = e^{y_3} - y_4,$$

$$f_3(y) = e^{2y_3} - y_5, \ldots, f_{n-2}(y) = e^{(n-3) y_3} - y_n.$$

Notăm $f = (f_1, f_2, ..., f_{n-2})$, $f: \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^{n-2}$. Se găsește

$$J_y(f) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2y_3 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & e^{y_3} & -1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 2e^{2y_3} & 0 & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & & \ldots \\ 0 & 0 & (n-3)\,e^{(n-3)y_3} & 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 \end{bmatrix}$$

și, evident, rang $J_y(f) = n-2$, $\forall y \in \boldsymbol{R}^n$.

Se observă că $f_\alpha(p_1, ..., p_n) = 0$, $\alpha = 1, 2, ..., n-2$, pe $\boldsymbol{R}^n$. Derivînd în raport cu x_i, $i = 1, 2, ..., n$, obținem

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_\alpha}{\partial y_j}(p_1, ..., p_n)\frac{\partial p_j}{\partial x_i} = 0,$$

adică fiecare dintre vectorii $\left[\frac{\partial p_1}{\partial x_i}, ..., \frac{\partial p_n}{\partial x_i}\right]$ poate fi privit ca o soluție a sistemului omogen

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_\alpha}{\partial y_j}(p)\,\xi^j = 0,\ \alpha = 1, 2, ..., n-2.$$

Deoarece rang $J_y(f) = \text{rang}\left[\frac{\partial f_\alpha}{\partial y_j}\right] = n-2$ în orice punct din $\boldsymbol{R}^n$, rezultă rang $\left[\frac{\partial p_j}{\partial x_i}\right] = \text{rang}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right] \leqslant 2$ pe $\boldsymbol{R}^n$. În $(1, 0, ..., 0)$ se găsește rangul doi.

13. Fie funcția diferențiabilă $f: \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$, dată prin $f(x, y) = y^2 - (x-a)^2(x-b)$. Să se determine punctele critice ale lui f și să se precizeze natura lor.

Soluție. Fie $J(f) = [(x-a)(-3x+a+b), 2y]$. Minorii matricei $J(f)$ se anulează simultan în $P(a, 0)$, deci P este punct critic al lui f.

Atașăm funcției f hessiana sa, $d^2f(x, y)(dx, dy) = (-6x + 4a+2b)\,dx^2 + 2\,dy^2$. Pentru $P(a, 0)$, $df(P)(dx, dy) = -2(a-b)\,dx^2 + 2dy^2$. Matricea atașată formei d^2f are determinantul

$$\begin{vmatrix} -2(a-b) & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -4(a-b).$$

Pentru $a \neq b$, $P(a, 0)$ este punct critic nedegenerat.

Pentru $a = b$, $P(a, 0)$ este punct critic degenerat.

14. Fie $f: \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}$ definită prin $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2x_1^2x_3 + x_2x_3^2 + x_2x_3 + x_1x_4^2$, $P(1, 0, 2, -1)$ și $\vec{v} = (1, 1, 0, 1)$ un vector tangent la $\mathbf{R}^4$ în P. Să se calculeze $D_{\vec{v}}f(P)$.

15. Fie $\vec{V}_1 = -a\vec{i} - b\vec{j} + (a+b)\vec{k}$, $\vec{V}_2 = -b\vec{i} + (a+b)\vec{j} - a\vec{k}$, $\vec{V}_3 = (a+b)\vec{i} - a\vec{j} - b\vec{k}$. Să se arate că $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3$ sînt liniar dependente. Să se exprime cîmpul $\vec{V}_3$ ca o combinație liniară de $\vec{V}_1$ și $\vec{V}_2$.

R: $(\vec{V}_1 \times \vec{V}_2, \vec{V}_3) = 0$, $\vec{V}_3 = -\vec{V}_1 - \vec{V}_2$.

16. Fie $\vec{v} = (1, 2, -5)$ și $P(1, 3, -1)$. Să se găsească $D_{\vec{v}}f(P)$ știind că: 1) $f = x^2y + z^2$, 2) $f = x^7 - y^5z$, $f = \text{arc tg}\,(xy)$.

R: 1) 18; 2) 2032; 3) 1/2.

17. Fie $\vec{W} = x_1^2x_4\vec{U}_1 + x_3x_2^2\vec{U}_2 + x_1x_3^2\vec{U}_3 + x_2^3x_4^2\vec{U}_4$ un cîmp vectorial pe $\boldsymbol{R}^4$, vectorul $\vec{v} = (-1, 1,0, 2)$ și $P(1, 0, -1, 0)$. Să se calculeze $D_{\vec{v}}\vec{W}(P)$.

18. Fie $\vec{V} = -z\vec{i} + y\vec{k}$ și $\vec{W} = e^x \cos y\vec{i} + e^y \sin x\vec{j}$.

Să se determine:

1) $D_{\vec{V}}\vec{W}$, 2) $D_{\vec{V}}\vec{V}$, 3) $D_{\vec{V}}(x^2\vec{W})$, 4) $D_{\vec{W}}(x\vec{V})$, 5) $D_{\vec{V}}(D_{\vec{V}}\vec{W})$, 6) $D_{\vec{V}}(x\vec{W} - y\vec{V})$.

R: 1) $D_{\vec{V}}\vec{W} = -ze^x \cos y\vec{i} - ze^y \cos y\vec{j}$, 2) $D_{\vec{V}}\vec{V} = -y\vec{i}$, 3) $D_{\vec{V}}(x^2W) = xze^x \cos y\,(-2-x)\,\vec{i} - xze^y(2 \sin x + x \cos x)\,\vec{j}$, 4) $D_{\vec{W}}(x\vec{V}) = -e^xz \cos y\,\vec{i} + (e^xy \cos y + e^yx \sin x)\,\vec{k}$, 5) $D_{\vec{V}}(D_{\vec{V}}\vec{W}) = (e^xz^2 \cos y - e^xy \cos y)\,\vec{i} + ye^y \cos y\vec{j}$, 6) $D_{\vec{V}}(x\vec{W} - y\vec{V}) = [y^2 - e^xz \cos y\,(1 + x)]\vec{i} - ze^y (\sin x + x \cos x)\,\vec{j}$.

19. Cîmpul vectorial $[\vec{V}, \vec{W}] = D_{\vec{V}}\vec{W} - D_{\vec{W}}\vec{V}$ se numește *croșetul* cîmpurilor vectoriale $\vec{V}$ și $\vec{W}$. Să se demonstreze relațiile

1) $D_{[\vec{V}, \vec{W}]}f = D_{\vec{V}}(D_{\vec{W}}f) - D_{\vec{W}}(D_{\vec{V}}f)$,

2) $[\vec{V}, \vec{W}] = -[\vec{W}, \vec{V}]$,

3) $[\vec{U}, [\vec{V}, \vec{W}]] + [\vec{W}, [\vec{U}, \vec{V}]] + [\vec{V}, [\vec{W}, \vec{U}]] = 0$,

4) $[f\vec{V}, g\vec{W}] = f(D_{\vec{V}}g)\,\vec{W} - g\,(D_{\vec{W}}f)\,\vec{V} + fg[\vec{V}, \vec{W}]$.

§ 2. CURBE

i. Curbe în $\boldsymbol{R}^n$

Fie $\boldsymbol{R}^n$ spațiul euclidian canonic cu n dimensiuni, $T_P\boldsymbol{R}^n$ spațiul tangent în punctul P la $\boldsymbol{R}^n$ și $\mathcal{J}_P: \boldsymbol{R}^n \to T_P\boldsymbol{R}^n$ izomorfismul canonic. Notăm cu I un interval deschis (alteori interval închis, semiînchis sau reuniune de intervale) din $\boldsymbol{R}$.

i.1. O funcție diferențiabilă $\alpha : I \to \boldsymbol{R}^n$ se numește *curbă* și se notează cu α. Uneori numai imaginea $\alpha(I)$ este numită curbă. În acest caz α se numește *parametrizare*, iar $t \in I$ se numește *parametru*.

De asemenea, din definiția lui $\alpha(I)$ rezultă echivalența $P \in \alpha(I) \Leftrightarrow \exists t \in I$, $P = \alpha(t)$.

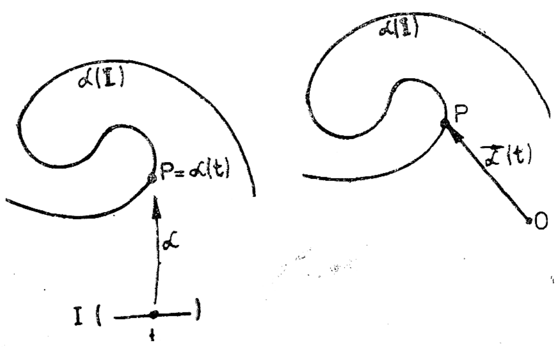


Fig. 3.5

Deoarece lui α i se atașează o funcție și numai una de tipul $\vec{\alpha} = I_0 \circ \alpha \colon I \to T_0\boldsymbol{R}^n$, mulțimea $\alpha(I)$ poate fi privită ca fiind descrisă de extremitatea vectorului variabil $\vec{\alpha}$ cu originea fixată în originea O a lui $\boldsymbol{R}^n$ (fig. 3.5).

Dacă raportăm pe $\boldsymbol{R}^n$ la baza canonică, atunci funcțiile α și $\vec{\alpha}$ sînt caracterizate prin coordonatele lor euclidiene

$$\alpha(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t)), \quad t \in I$$

$$\vec{\alpha}(t) = x_1(t)\,\vec{e}_1 + \ldots + x_1(t)\,\vec{e}_n, \quad t \in I.$$

Într-un context în care numai imaginea $\alpha(I)$ este numită curbă, relațiile $x_1 = x_1(t), \ldots, x_n = x_n(t)$ se numesc *ecuațiile parametrice* ale curbei, iar $\vec{\alpha} = \vec{\alpha}(t)$ se numește *ecuația vectorială* a curbei.

i.2. Un punct $P \in \alpha(I)$ se numește *simplu* dacă există o singură valoare a lui $t \in I$ astfel încît $\alpha(t) = P$. Dacă există mai multe valori distincte t astfel încît $\alpha(t) = P$, atunci P se numește *punct multiplu* (dublu, triplu etc.). În general, cardinalul mulțimii $\alpha^{-1}(P)$ se numește *multiplicitatea* punctului P.

O funcție diferențiabilă și injectivă $\alpha \colon I \to \boldsymbol{R}^n$ se numește *curbă simplă* deoarece ipoteza de injectivitate asigură faptul că $\alpha(I)$ posedă numai puncte simple.

i.3. O curbă $\alpha \colon [a, b] \to \boldsymbol{R}^n$ pentru care $\alpha(a) = \alpha(b)$ se numește *curbă închisă*.

Această definiție nu are același conținut cu definiția topologică a unei mulțimi închise. Într-adevăr, pentru orice curbă $\alpha \colon [a, b] \to \boldsymbol{R}^n$, imaginea $\alpha([a, b])$ este închisă în $\boldsymbol{R}^n$ în sens topologic, deoarece α este implicit o funcție continuă, dar aceasta n-are nici o legătură cu condiția $\alpha(a) = \alpha(b)$.

i.4. O curbă $\alpha \colon I \to \boldsymbol{R}^n$ se numește *periodică* dacă există un număr $T > 0$ astfel încît $t + T \in I$, $\alpha(t + T) = \alpha(t)$, $\forall t \in I$. Cel mai mic număr $T > 0$ care are această proprietate se numește *perioada* lui α.

Se poate demonstra că imaginea unei curbe închise admite o reprezentare parametrică periodică.

i.5. Fie $\alpha \colon I \to \boldsymbol{R}^n$ o curbă. Vectorul $\vec{\alpha}'(t)$ cu originea în $\alpha(t)$ se numește *vector viteză*. Evident $\vec{\alpha}'(t) \in T_{\alpha(t)}\boldsymbol{R}^n$.

Un punct $\alpha(t) = P \in \alpha(I)$ corespunzător unei valori a lui t pentru care $\vec{\alpha}'(t) \neq 0$ se numește *punct regulat*. Dacă $\vec{\alpha}'(t)$ nu se anulează pe I, atunci curba α se numește *regulată*. Dreapta determinată de punctul regulat P și de vectorul $\vec{\alpha}(t)$ se numește *tangenta curbei* în punctul considerat.

i.6. Un punct $\alpha(t) = P \in \alpha(I)$ corespunzător unei valori a lui t pentru care $\vec{\alpha}(t) = \vec{0}$ se numește *punct singular*.

Dacă $\exists n > 1$ astfel încît

$$\vec{\alpha}'(t) = \vec{\alpha}''(t) = \ldots = \vec{\alpha}^{(n-1)}(t) = \vec{0}, \quad \vec{\alpha}^{(n)}(t) \neq \vec{0},$$

atunci P se numește *punct singular de ordinul n*. În acest caz punctul $\alpha(t) = P$ și vectorul $\vec{\alpha}^{(n)}(t)$ definesc o dreaptă care se numește *tangenta la curbă* în punctul singular.

i.7. O funcție $\vec{Y}$ care asociază fiecărui $t \in I$ un vector $\vec{Y}(t)$ tangent la $\boldsymbol{R}^n$ în punctul $\alpha(t)$ se numește *cîmp vectorial pe curba* $\alpha: I \to \boldsymbol{R}^n$. În particular $\vec{\alpha}'$ este numit *cîmp viteză*, iar $\vec{\alpha}''$ este numit *cîmp accelerație.*

i.8. Fie α o curbă pentru care imaginea $\alpha(I)$ este conexă. Curba α împreună cu o alegere a unui sens de parcurs pe $\alpha(I)$ se numește *curbă orientată.*

Dacă α este o curbă regulată, atunci se consideră drept pozitiv acel sens de parcurs pe $\alpha(I)$ care este coerent cu sensul lui $\vec{\alpha}'(t)$, adică cu sensul pozitiv pe tangentă.

i.9. Dacă într-o extremitate t_0 a intervalului deschis I avem $\lim\limits_{t \to t_0} \|\vec{\alpha}(t)\| = \infty$, atunci spunem că α posedă o *ramură infinită. Direcția asimptotică* corespunzătoare acestei ramuri infinite este dată de

$$\vec{u} = \lim_{t \to t_0} \frac{\vec{\alpha}(t)}{\|\vec{\alpha}(t)\|} \quad \text{(dacă există !).}$$

În ipoteza că ramura admite o direcție asimptotică $\vec{u}$, punctul $P = \alpha(t)$ și vectorul $\vec{u}$ determină o dreaptă D_P. Dacă D_P are o limită D, pentru $t \to t_0$, atunci dreapta D este *asimptotă* ramurii infinite.

i.10. Fie $\alpha: I \to \boldsymbol{R}^n$ o curbă și t_0 o extremitate a intervalului deschis I. Dacă $\lim\limits_{t \to t_0} \alpha(t) = A$, atunci A se numește *punct asimptotic* al curbei α.

i.11. În studiul proprietăților curbelor regulate $\alpha: I \to \boldsymbol{R}^n$ se utilizează următoarele elemente:

1) *viteza,* $v(t) = \|\vec{\alpha}'(t)\|$,
2) *elementul de arc,* $\mathrm{d}s = v(t)\,\mathrm{d}t$,
3) *lungimea unui arc de curbă,* $\int_a^b v(t)\,\mathrm{d}t,\ a < b;\ a, b \in I$,
4) *abscisa curbilinie,* $s = \int_a^t v(t)\,\mathrm{d}t,\ s: I \to J$,
5) *reprezentarea normală a lui* α, $\beta = \alpha_0 s^{-1}: J \to \boldsymbol{R}^n$.

i.12. Fie $\alpha_1, \alpha_2 : I \to \mathbf{R}^n$ două curbe care au un punct regulat comun $M_0 = \alpha_1(t_0) = \alpha_2(t_0)$. Dacă

$$\lim_{t \to t_0} \frac{\vec{\alpha}_2(t) - \vec{\alpha}_1(t)}{(t - t_0)^i} = \begin{cases} \vec{0} \text{ pentru } i = 1, \dots, n-1,\ n \\ \neq \vec{0} \text{ pentru } i = n + 1 \end{cases}$$

atunci se spune că $\alpha_1(I)$ și $\alpha_2(I)$ au în M_0 un *contact de ordinul* n.

Se observă că α_1 și α_2 au în punctul regulat comun M_0 un contact de ordinul n dacă și numai dacă M_0 este un punct singular de ordinul $n + 1$ pentru curba $\alpha_2 - \alpha_1$ sau dacă și numai dacă au loc relațiile

$$\vec{\alpha}_1^{(k)}(t_0) = \vec{\alpha}_2^{(k)}(t_0),\quad k = 0, 1, \dots, n \ \text{ și } \ \vec{\alpha}_1^{(n+1)}(t_0) \neq \vec{\alpha}_2^{(n+1)}(t_0).$$

1. Fie curba $\alpha: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}^4$, $\alpha(t) = (\sin t,\ 1 + \cos t,\ \sin t + \cos^2 t,\ \sin^2 t)$. Să se arate că:

1) α este periodică,
2) restricția la $[0, \pi)$ este o curbă simplă,
3) curba trece prin punctele $(1, 1, 1, 1)$ și $(0, 2, 1, 0)$,
4) punctul $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ 1 + \frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{2}\right)$ este regulat, iar tangenta la curbă în acest punct este perpendiculară pe dreapta de direcție $\vec{d} = (1, 1, -\sqrt{2}, -2, -1)$.

Soluție. 1) Deoarece funcțiile $\sin t$ și $\cos t$ sînt periodice, de perioadă 2π, rezultă $\alpha(t + 2\pi) = \alpha(t)$, $\forall t \in \boldsymbol{R}$.

2) Restricția $\alpha:[0, \pi) \to \boldsymbol{R}^4$ este injectivă. Într-adevăr, din $\alpha(t_1) = \alpha(t_2)$ rezultă sistemul $\sin t_1 = \sin t_2$, $1 + \cos t_1 = 1 + \cos t_2$, $\sin t_1 + \cos^2 t_1 = \sin t_2 + \cos^2 t_2$, $\sin^2 t_1 = \sin^2 t_2$, care are soluția unică $t_1 = t_2$.

3) $(1, 1, 1, 1) = \alpha\left(\frac{\pi}{2}\right)$, iar $(0, 2, 1, 0) = \alpha(0)$.

4) Găsim $\vec{\alpha}'(t) = (\cos t,\ -\sin t,\ \cos t - 2\cos t \sin t,\ 2 \sin t \cos t)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ 1 + \frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{2}\right) = \alpha\left(\frac{\pi}{4}\right)$, $\vec{\alpha}'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ -\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}} - 1,\ 1\right) \neq \vec{0}$. Deci punctul considerat este un punct regulat al curbei.

Fie $\vec{\alpha}'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \vec{d}_1$. Rezultă $(\vec{d}_1, \vec{d}) = 0$, adică $\vec{d}_1 \perp \vec{d}$. Deoarece $\vec{d}_1$ este vectorul director al tangentei la curbă, afirmația din enunț este demonstrată.

2. Fie curba $\alpha: \boldsymbol{R} - \{-1, 1\} \to \boldsymbol{R}^5$, $\alpha(t) = \left(\frac{1}{t-1},\ \frac{2t}{t^2-1},\ \frac{t^2+1}{t^2-1},\ \frac{2}{t+1},\ \frac{t}{t-1}\right)$.

1) Să se determine tangenta la curbă în punctul $(-1, 0, -1, 2, 0)$.
2) Să se cerceteze ramurile infinite ale curbei.

Soluție. 1) $(-1, 0, -1, 2, 0) = \alpha(0)$. Vectorul director al tangentei la curbă este

$$\vec{\alpha}'(t) = \left(\frac{-1}{(t-1)^2},\ \frac{-2t^2-2}{(t^2-1)^2},\ \frac{-4t}{(t^2-1)^2},\ \frac{-2}{(t+1)^2},\ \frac{-1}{(t-1)^2}\right).$$

$\vec{\alpha}'(0) = (-1, -2, 0, -2, -1)$. Tangenta la curbă este dreapta

$$\frac{x_1+1}{-1} = \frac{x_2}{-2} = \frac{x_3+1}{0} = \frac{x_4-2}{-2} = \frac{x_5}{-1}.$$

2) Curba α ar putea avea ramuri infinite pentru $t = \pm\infty$ sau $t = \pm 1$. Calculăm $\lim\limits_{t \to \pm\infty} \alpha(t) = (0, 0, 1, 0, 1)$. Punctul $(0, 0, 1, 0, 1) \in \boldsymbol{R}^5$ este punct asimptotic al curbei α.

Deoarece $\lim\limits_{t\to -1} x_2(t) = \lim\limits_{t\to -1} x_3(t) = \lim\limits_{t\to -1} x_4(t) = \infty$, avem $\lim\limits_{t\to -1} \|\vec{\alpha}(t)\| = \infty$, deci curba posedă o ramură infinită pentru $t \to -1$.

$$\|\vec{\alpha}(t)\| = \sqrt{x_1^2(t) + x_2^2(t) + x_3^2(t) + x_4^2(t) + x_5^2(t)} =$$

$$= \frac{\sqrt{2t^4 + 2t^3 + 12t^2 - 6t + 6}}{(t-1)(t+1)}.$$

$$\frac{\vec{\alpha}(t)}{\|\vec{\alpha}(t)\|} = \frac{(t+1,\ 2t,\ t^2+1,\ 2(t-1),\ t(t+1))}{\sqrt{2t^4 + 2t^3 + 12t^2 - 6t + 6}}$$

$$\lim_{t\to -1} \frac{\vec{\alpha}(t)}{\|\vec{\alpha}(t)\|} = \left(0,\ \frac{-1}{\sqrt{6}},\ \frac{1}{\sqrt{6}},\frac{-2}{\sqrt{6}},\ 0\right) = \vec{u},$$

direcția asimptotică corespunzătoare ramurii infinite obținută pentru $t \to -1$. Asimptotă nu există.

Deoarece $\lim\limits_{t\to 1} x_1(t) = \lim\limits_{t\to 1} x_2(t) = \lim\limits_{t\to 1} x_3(t) = \lim\limits_{t\to 1} x_5(t) = \infty$, avem $\lim\limits_{t\to 1} \|\alpha(t)\| = \infty$, deci curba posedă o ramură infinită pentru $t \to 1$.

$$\lim_{t\to 1} \frac{\vec{\alpha}(t)}{\|\vec{\alpha}(t)\|} = \left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 0,\ \frac{1}{2}\right) = \vec{v},$$

direcția asimptotică la această ramură. Asimptotă nu există.

3. Fie curba $\alpha: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}^5$, $\alpha(t) = \left(t^2,\ 2t,\ 1-2t,\ 2+t, \frac{\sqrt{5}}{2} t^2\right)$.

1) Să se arate că α este curbă simplă, regulată ce trece prin punctele $A(0, 0, 1, 2, 0)$ și $B\left(1, 2, -1, 3, \frac{\sqrt{5}}{2}\right)$.

2) Să se determine tangenta la curbă în punctul A, viteza de-a lungul curbei, lungimea arcului de curbă $\overset{\frown}{AB}$.

4. Fie curba $\alpha:[0, \pi] \to \boldsymbol{R}^4$, $\alpha(t) = (\sin t,\ \cos^2 t,\ 5 \sin t,\ 1 - 3\cos^2 t)$.

1) Să se arate că α este închisă, iar prelungirea $\alpha: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}^5$ este periodică.

2) Să se determine punctele singulare ale curbei și tangentele în aceste puncte.

3) Să se găsească viteza și accelerația pentru $t_0 = \frac{\pi}{6}$.

Soluție. 1) $\alpha(0) = (0, 1, 0, -2) = \alpha(\pi)$, deci curba este închisă. Deoarece $\alpha(t) = \alpha(t + 2\pi)$, prelungirea este periodică, de perioadă 2π.

2) Punctele singulare ale curbei corespund valorilor parametrului t pentru care $\vec{\alpha}'(t) = \vec{0}$.

$$\vec{\alpha}'(t) = (\cos t,\ -\sin 2t,\ 5\cos t,\ 3\sin 2t);$$

$$\vec{\alpha}'(t) = \vec{0} \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}.$$

Punctul $\alpha\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = (1, 0, 5, 1)$ este punct singular.

Determinăm $\vec{\alpha}''(t) = (-\sin t, \ -2\cos 2t, \ -5\sin t, \ 6\cos 2t)$. Deoarece $\vec{\alpha}''\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = (-1, 2, -5, -6) \neq \vec{0}$, acesta este vectorul director al tangentei la curbă în punctul singular.

Tangenta are ecuațiile

$$\frac{x_1 - 1}{-1} = \frac{x_2}{2} = \frac{x_3 - 5}{-5} = \frac{x_4 - 1}{-6}.$$

3) $v(t) = \|\vec{\alpha}(t)\|$; $v\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \left\|\vec{\alpha}'\left(\dfrac{\pi}{6}\right)\right\| = \dfrac{1}{2}\sqrt{108}.$

$a(t) = \|\vec{\alpha}''(t)\|$; $a\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \left\|\vec{\alpha}''\left(\dfrac{\pi}{6}\right)\right\| = \dfrac{1}{2}\sqrt{66}.$

5. Fie curbele

$$\alpha_1 \colon [0, \pi] \to \mathbf{R}^4, \ \alpha_1(t) = (\cos t, \ \sin^3 t, \ 2 + \sin t, \ 1 - \cos t).$$

$$\alpha_2 \colon [0, \pi] \to \mathbf{R}^4, \ \alpha_2(t) = \left(\frac{\pi}{2} - t, \ \left(t - \frac{\pi}{2}\right)^3 + 1, \ \left(t - \frac{\pi}{2}\right)^2 + 3, \ t - \frac{\pi}{2} + 1\right).$$

Să se arate că $\alpha_1([0, \pi])$ și $\alpha_2([0, \pi])$ au un punct regulat comun în care contactul este de ordinul unu.

Soluție. Punctul comun $M_0(0, 1, 3, 1)$ corespunde la $t = \dfrac{\pi}{2}$. Se găsesc

$$\vec{\alpha}_1'(t) = (-\sin t, \ 3\sin^2 t\cos t, \ \cos t, \sin t) \Rightarrow \vec{\alpha}_1'\left(\frac{\pi}{2}\right) = (-1, 0, 0, 1),$$

$$\vec{\alpha}_2'(t) = \left(-1, \ 3\left(t - \frac{\pi}{2}\right)^2, \ 2\left(t - \frac{\pi}{2}\right), \ 1\right) \Rightarrow \vec{\alpha}_2'\left(\frac{\pi}{2}\right) = (-1, 0, 0, 1),$$

$$\vec{\alpha}_1''(t) = (\cos t, \ 6\sin t\cos^2 t - 3\sin^3 t, \ -\sin t, \ \cos t) \Rightarrow \vec{\alpha}_1''\left(\frac{\pi}{2}\right) = (0, -3, -1, 0),$$

$$\vec{\alpha}_2''(t) = (0, 6, (t - \pi/2), 2, 0) \Rightarrow \vec{\alpha}_2''(\pi/2) = (0, 0, 2, 0).$$

Deoarece $\alpha_1\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \alpha_2\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = (0, 1, 3, 1)$, $\vec{\alpha}_1'(\pi/2) = \vec{\alpha}_2'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = (-1, 0, 0, 1)$, și $\vec{\alpha}_1'' = (\pi/2) = (0, -3, -1, 0) \neq \vec{\alpha}_2''(\pi/2) = (0, 0, 2, 0)$, contactul este de ordinul unu.

6. Să se arate că dacă $\alpha \colon I \to \boldsymbol{R}^n$ este o curbă cu viteză constantă, atunci $\vec{\alpha}''(t) \perp \vec{\alpha}'(t)$, $\forall t \in I$.

Soluție. Fie $P = \alpha(t)$, $t \in I$, un punct arbitrar pe curba α. Vectorul viteză în P este $\vec{\alpha}'(t)$. Dacă $\|\vec{\alpha}'(t)\| = \text{const}$, rezultă $(\vec{\alpha}'(t))^2 = \text{const}$. Prin derivare $(\vec{\alpha}'(t), \vec{\alpha}''(t)) = 0$ adică $\vec{\alpha}'(t) \perp \vec{\alpha}''(t)$.

ii. Curbe în plan

Raportăm planul la reperul natural și considerăm curba $\alpha: I \to \boldsymbol{R}^2$, $\alpha(t) = (x(t),\ y(t))$.

ii.1. Dacă $P = (x(t),\ y(t))$ este un punct regulat, atunci tangenta și normala în P au respectiv ecuațiile

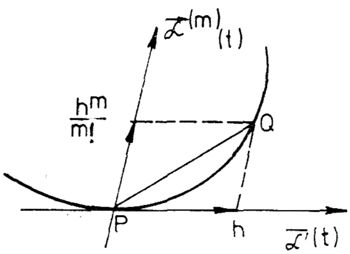
$$\frac{x - x(t)}{x'(t)} = \frac{y - y(t)}{y'(t)}, \quad x'(t)\,(x - x(t)) + y'(t)\,(y - y(t)) = 0.$$

Presupunem $\vec{\alpha}^{(k)}(t) = \lambda_k \vec{\alpha}'(t)$, $2 \leqslant k < m$, și că $\vec{\alpha}^{(m)}(t)$ nu este coliniar cu $\vec{\alpha}'(t)$. Atunci, în vecinătatea punctului $\alpha(t) = P$, curba are imaginea din figura 3.6.

ii.2. Dacă $P = (x(t),\ y(t))$ este un punct singular de ordinul n, atunci tangenta și normala în P au respectiv ecuațiile

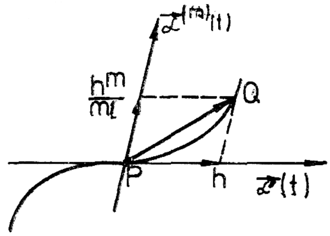
$$\frac{x - x(t)}{x^{(n)}(t)} = \frac{y - y(t)}{y^{(n)}(t)}, \quad x^{(n)}(t)\,(x - x(t)) + y^{(n)}(t)\,(y - y(t)) = 0.$$

În plus, dacă $\vec{\alpha}^{(k)}(t) = \lambda_k \vec{\alpha}^{(n)}(t)$, $n + 1 \leqslant k \leqslant m - 1$, și dacă $\vec{\alpha}^{(n)}(t)$, $\vec{\alpha}^{(m)}(t)$ nu sînt coliniari, atunci, în vecinătatea punctului singular $\alpha(t) = P$, curba arată fie ca în figura 3.6 (pentru n = impar, m = par), fie ca în figura 3.7 (pentru n = impar, m = impar), fie ca în figurile 3.8 și 3.9.



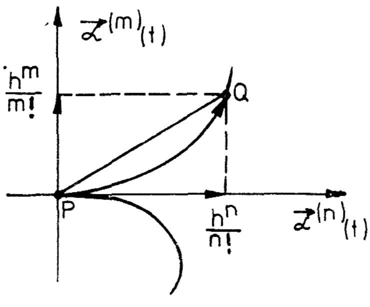
m = par

Fig. 3.6



m=par, P=punct inflexiune

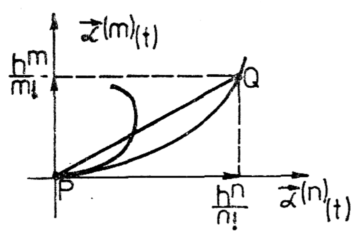
Fig. 3.7



n = par, m = impar

P = punct întoarcere speța a întîia

Fig. 3.8



n = par, m = impar

P = punct întoarcere speța a doua

Fig. 3.9

ii.3. Presupunem că α este o curbă regulată. Funcția $k: \alpha(I) \to \boldsymbol{R}$ definită prin

$$k \circ \alpha = \frac{x'y'' - x''y'}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}} : I \to \boldsymbol{R}$$

se numește *curbura lui* α, iar $\frac{1}{|k|}$ (pentru $k \neq 0$) se numește *rază de curbură*.

Semnul lui k precizează alura lui $\alpha(I)$. Mai mult, funcția de curbură determină o curbă din plan pînă la o izometrie.

ii.4. Graficul unei funcții diferențiabile de tipul $f: I \to \boldsymbol{R}$ este o curbă plană simplă și regulată. În acest caz $y = f(x)$ se numește *ecuația carteziană explicită a curbei*.

ii.5. *Curbe de nivel.* Curbele plane mai pot fi introduse și pornind de la o funcție diferențiabilă de tipul $f: \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$. Mulțimea

$$C = f^{-1}(c) = \{(x, y) \mid (x, y) \in \boldsymbol{R}^2, \ \ f(x, y) = c, \ c = \text{fixat}\}$$

se numește *mulțime de nivel constant* c sau *mulțime de ecuația carteziană implicită* $f(x, y) = c$. Pe scurt se scrie C: $f(x, y) = c$.

Dacă funcția f este regulată în punctele lui C, atunci C este o reuniune de arce simple și regulate în sensul i.2 și i.5. În această ipoteză, tangenta și normala în (x_0, y_0) au respectiv ecuațiile

$$(x - x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0,$$

$$(x - x_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) - (y - y_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$$

și ∇f este un cîmp normal nenul pe C. De asemenea există o parametrizare globală a lui C dacă și numai dacă C este conexă.

Fie $(x_0, y_0) \in C$ un punct critic al lui f în care hessiana lui f nu este identic nulă. Dacă $\det d^2 f(x_0, y_0) > 0$, atunci (x_0, y_0) este un *punct izolat* al curbei C; dacă $\det d^2 f(x_0, y_0) < 0$, atunci (x_0, y_0) este un *punct dublu* pentru C; dacă $\det d^2 f(x_0, y_0) = 0$, atunci (x_0, y_0) este un *punct de întoarcere* pentru C. Într-un punct dublu sau de întoarcere, direcțiile (l, m) ale tangentelor la C sînt date de

$$l^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) + 2lm\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) + m^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) = 0.$$

Dacă f este un polinom de gradul n, atunci C se numește *curbă algebrică de ordinul* n.

ii.6. *Trasarea curbelor plane.*

Fie $\alpha = (x, y): I \to \boldsymbol{R}^2$, $x = x(t)$, $y = y(t)$ o curbă plană.

Pentru a desena imaginea $\alpha(I) \subset \boldsymbol{R}^2$ în raport cu axele de coordonate este necesar să se urmărească problemele următoare.

1) Stabilirea domeniului de definiție I, precizarea punctelor de acumulare ce nu aparțin lui I și calculul limitelor lui $t \to x(t)$, $t \to y(t)$ în aceste puncte. Precizarea punctelor critice (dacă există !).

2) Intersecții cu axele.

3) Se cercetează dacă α este o curbă periodică, adică $\exists T > 0$, $\alpha(t+T) = \alpha(t)$ $\forall t$. Dacă α este periodică, de perioadă T, atunci este suficient să considerăm restricția $\alpha:[0, T] \to \boldsymbol{R}^2$.

Din faptul că α este o curbă periodică rezultă că $t \to x(t)$, $t \to y(t)$ sînt periodice avînd eventual alte perioade decît α. Dacă $t \to x(t)$ este periodică și are perioada T_1, $t \to y(t)$ este periodică și are perioada T_2, iar $\dfrac{T_1}{T_2} = \dfrac{p}{q} \in \boldsymbol{Q}$, atunci α este periodică și are perioada $T = qT_1 = pT_2$.

4) Se cercetează simetriile lui $\alpha(I)$. Dacă $\forall t \in I$, $\exists t' \in I$ astfel încît (1) $x(t') = x(t)$, $y(t') = -y(t)$, (2) $x(t') = -x(t)$, $y(t') = y(t)$, (3) $x(t') = -x(t)$, $y(t') = -y(t)$, (4) $x(t') = y(t)$, $y(t') = x(t)$ etc., atunci curba este respectiv simetrică față de (1) axa Ox, (2) axa Oy, (3) origine, (4) prima bisectoare etc. Se observă că sistemele (1), (2) și (3) conțin ca un caz particular studiul parității și imparității funcțiilor $t \to x(t)$, $t \to y(t)$.

Dacă $\exists r \in \boldsymbol{R}$ astfel încît, $\forall t \in I$, punctul $\alpha(r - t)$ se deduce din $\alpha(t)$ printr-o simetrie (în raport cu un punct sau o dreaptă), atunci rezultă $t' = r - t$ ceea ce este echivalent cu $\dfrac{t + t'}{2} = \dfrac{r}{2}$. Astfel t și t' sînt simetrice în $\boldsymbol{R}$ față de $\dfrac{r}{2}$. În acest caz trasăm porțiunea din $\alpha(I)$ corespunzătoare lui $I \cap [r/2, \infty)$, iar restul se completează prin simetrie.

Dacă $\alpha\left(\dfrac{1}{t}\right)$ se deduce din $\alpha(t)$ printr-o simetrie, atunci rezultă $t' = \dfrac{1}{t}$ sau $tt' = 1$. În acest caz trasăm porțiunea din $\alpha(I)$ corespunzătoare lui $I \cap ([-1, 0) \cup (0, 1])$, iar restul se completează prin simetrie.

5) Stabilirea punctelor regulate și a semnului curburii în aceste puncte. Dintre punctele regulate trebuiesc precizate punctele de inflexiune și punctele în care $\vec{\alpha}^{(n)}$, $n = 2, 3, \ldots$ sînt coliniari cu $\vec{\alpha}'$.

Stabilirea punctelor singulare și a tangentelor în aceste puncte (cînd există !). Dintre acestea trebuiesc precizate punctele de inflexiune, punctele de întoarcere, punctele singulare de ordinul n în care $\vec{\alpha}^{(m)}$, $m = n + 1, n + 2, \ldots$ sînt coliniari cu $\vec{\alpha}^{(n)} \neq \vec{0}$ și punctele singulare în care $\vec{\alpha}^{(k)} = \vec{0}$, $k = 1, 2, \ldots$.

6) Determinarea punctelor multiple și a tangentelor în aceste puncte. Dacă sistemul $t_1 \neq t_2$, $x(t_1) = x(t_2)$, $y(t_1) = y(t_2)$ este compatibil (determinat sau nedeterminat), atunci soluțiile sale dau punctele multiple. Dacă sistemul este incompatibil, atunci curba are numai puncte simple.

7) Alcătuirea tabelului de variație pentru funcțiile $t \to x(t)$, $t \to y(t)$.

8) Stabilirea ramurilor infinite și a asimptotelor (dacă există !). Putem întîlni situațiile:

1°. $\lim\limits_{t \to t_0} x(t) = \pm\infty$, $\lim\limits_{t \to t_0} y(t) = b$. În acest caz asimptota are ecuația $y = b$. Pentru a decide poziția ramurii față de asimptotă, din tabel, se citește semnul lui $y(t) - b$ în vecinătatea lui t_0.

2°. $\lim\limits_{t \to t_0} x(t) = a$, $\lim\limits_{t \to t_0} y(t) = \pm\infty$. În acest caz asimptota are ecuația $x = a$.

3°. $\lim\limits_{t \to t_0} x(t) = \pm\infty$, $\lim\limits_{t \to t_0} y(t) = \pm\infty$.

Dacă $\lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{y(t)}{x(t)} = 0$, atunci $(1, 0)$ este direcția asimptotică. Nu avem asimptotă (ramură parabolică).

Dacă $\lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{x(t)}{y(t)} = 0$, atunci $(0, 1)$ este direcție asimptotică. Nu avem asimptotă (ramură parabolică).

Dacă $\lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{y(t)}{x(t)} = m$, atunci $(1, m)$ este direcție asimptotică. Dacă $\lim\limits_{t \to t_0}(y(t) - mx(t)) = n$, atunci avem asimptota $y = mx + n$. Dacă $\lim\limits_{t \to t_0} y(t) - mx(t) = \pm\infty$, atunci nu avem asimptotă (ramură parabolică).

9) Trasarea curbei.

Exerciții și probleme

7. Fie curba $\alpha = (x, y): \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}^2$, $x(t) = \dfrac{a}{3}(2 \cos t + \cos 2t)$, $y(t) = \dfrac{a}{3}(2 \sin t - \sin 2t)$.

1) Să se arate că este α periodică.
2) Să se arate că $\alpha([0, 2\pi])$ este închisă, simplă, dar nu este regulată. Curba α se numește *hipocicloida lui Steiner*, (fig. 3.10).

8. Fie $C: f(x, y) = 0$ o curbă plană orientată și $\vec{v}$ un vector nenul tangent la C în $P \in C$. Să se arate că baza $\{\vec{v}\}$ a lui C_P este coerentă cu orientarea lui C, dacă și numai dacă direcția tangentă pozitivă în P este $\dfrac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$.

Soluție. Fie θ unghiul dintre Ox și direcția orientată $\vec{N}(P)$, unde $\vec{N}(P)$ este unitar. Atunci $\vec{N}(P) = (\cos\theta, \sin\theta)$,

$$\vec{v}(P) = \|\vec{v}\|\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right), -\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right) = \|\vec{v}\|(\sin\theta, -\cos\theta).$$

Dacă direcția tangentă pozitivă în P este $\dfrac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$, $\dfrac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = (\sin\theta, -\cos\theta)$, atunci $\vec{N}(P)$ se obține din aceasta printr-o rotație de unghi $\dfrac{\pi}{2}$ în sens direct trigonometric (fig. 3.11).

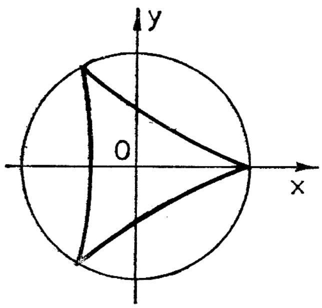


Fig. 3.10

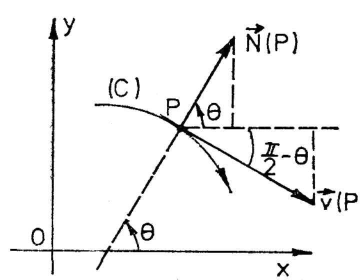


Fig. 3.11

9. În fiecare dintre cazurile următoare, să se determine o parametrizare a curbei $C: f(x, y) = 0$.

1) $f(x, y) = x^4 + y^4 + 8x^2y - 6y^3$,

2) $f(x, y) = (y - 1)^3 + 27(x - 2)^2$,

3) $f(x, y) = x^4 - ax^3 + a^2y^2$.

Soluție. 1) Intersectăm curba (fig. 3.12) cu un fascicul de drepte cu vîrful în origine. Pentru $x = 0$ rezultă $y = 0$ sau $y = 6$. Pentru $y = tx$, $t \in \boldsymbol{R}$, obți-

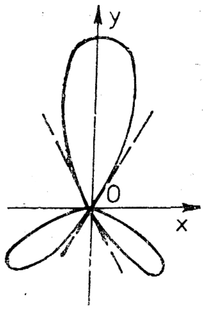


Fig. 3.12

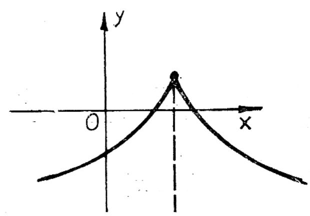


Fig. 3.13

nem $x^4(1 + t^4) = 6t^3x^3 - 8tx^3$. Mai întîi, $x^3 = 0$ conduce la punctul triplu (0, 0). Apoi găsim

$$x = \frac{2t(3t^2 - 4)}{1 + t^4}, \quad y = \frac{2t^2(3t^2 - 4)}{1 + t^4}, \quad t \in \boldsymbol{R}.$$

2) Intersectăm curba (fig. 3.13) cu un fascicul de drepte cu vîrful în (2.1). Pentru $x = 2$ rezultă $y = 1$. Pentru $y - 1 = t(x - 2)$, $t \in \boldsymbol{R}$, găsim $(x - 2)^2 (t^3(x - 2) + 27) = 0$. Dacă $x = 2$, atunci $y = 1$; punctul (2, 1) se regăsește și pentru $t = 0$. Pentru $t \neq 0$ și $t^3(x - 2) + 27 = 0$ găsim $x = 2 - 27t^{-3}$, $y = 1 - 27t^{-2}$.

3) Intersectăm curba (fig. 3.14) cu fasciculul de parabole de ecuație $\alpha y = \beta x^2$, $\alpha, \beta \in \boldsymbol{R}$, $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$. Pentru $x^2 = 0$ găsim $y^2 = 0$, deci punctul dublu (0, 0). Pentru $y = tx^2$, $t \in \boldsymbol{R}$, obținem $x^3(x + a^2t^2x - a) = 0$. Cazul $x^3 = 0$ corespunde punctului de întoarcere (0, 0). Apoi, pentru $t \in \boldsymbol{R}$, găsim

$$x = \frac{a}{1 + a^2t^2}, \quad y = \frac{a^2t}{(1 + a^2t^2)^2}.$$

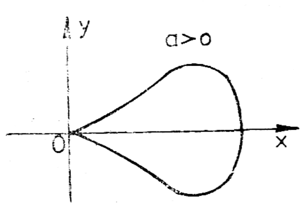


Fig. 3.14

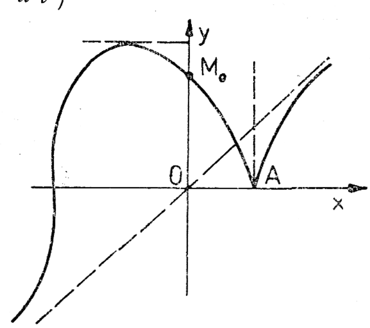


Fig. 3.15

10. Se dă curba $\alpha = (x, y): \boldsymbol{R} - \{1\} \to \boldsymbol{R}^2$, $x(t) = \dfrac{t^3 + 2}{t^3 - 1}$, $y(t) = \dfrac{3t}{t^3 - 1}$ (fig. 3.15).

1) Să se determine punctul de intersecție al curbei cu axa Oy, tangenta și normala la curbă în acest punct.

2) Să se determine asimptotele curbei.

Soluție. 1) Curba se intersectează cu axa Oy în punctele pentru care $x = 0$, adică $t^3 + 2 = 0$. Se obține $t_0 = \sqrt[3]{-2}$ căruia îi corespunde punctul $(0, \sqrt[3]{2})$.

Vectorul director al tangentei la curbă are coordonatele

$$x'(t) = \frac{-9t^2}{(t^3-1)^2}, \quad y'(t) = \frac{-6t^3-3}{(t^3-1)^2}.$$

Pentru $t_0 = \sqrt[3]{-2}$, se obțin $x'(t_0) = -\sqrt[3]{4}$, $y'(t)_0 = 1$. Se găsește tangenta de ecuație $x + \sqrt[3]{4}, y - 2 = 0$ și normala de ecuație $x\sqrt[3]{4} - y + \sqrt[3]{2} = 0$.

2) Calculăm $\lim\limits_{t \to \pm\infty} x(t) = \lim\limits_{t \to \pm\infty} \dfrac{t^3+2}{t^3-1} = 1$,

$$\lim_{t \to \pm\infty} y(t) = \lim_{t \to \pm\infty} \frac{3t}{t^3-1} = 0.$$

Am obținut astfel punctul asimptotic al curbei $A(1, 0)$.

Deoarece, $\lim\limits_{t \to 1} |x(t)| = \infty$, $\lim\limits_{t \to 1} |y(t)| = \infty$, pentru $t \nearrow 1$, $t \searrow 1$, curba are ramuri infinite.

Limita $\lim\limits_{t \to 1} \dfrac{y(t)}{x(t)} = \lim\limits_{t \to 1} \dfrac{3t}{t^3+2} = 1$, arată că direcția asimptotică este $(1, 1)$.

Deoarece $\lim\limits_{t \to 1}[y(t) - x(t)] = \lim\limits_{t \to 1}\left(\dfrac{3t}{t^3-1} - \dfrac{t^3+2}{t^3-1}\right) = 0$, rezultă că ramura infinită a curbei, pentru $t \to 1$, are asimptota $y = x$.

11. 1) Să se arate că $x = \dfrac{2+t^2}{1+t^2}$, $y = \dfrac{t^3}{1+t^2}$, $t \in \mathbf{R}$, este o curbă simplă.

2) Să se determine punctele singulare ale curbei și tangentele la curbă în aceste puncte.

3) Să se determine asimptotele curbei (fig. 3.16).

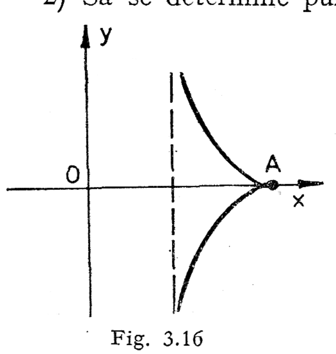


Fig. 3.16

12. Fie curba $x = 4t - \sin 4t$, $y = 8 \sin^4 t$, $t \in \boldsymbol{R}$ și P un punct al arcului OA obținut pentru $0 \leqslant t \leqslant \dfrac{\pi}{2}$. Să se calculeze lungimea arcului $s = \widehat{OP}$. Tangenta în punctul P la curbă, taie axa Ox în punctul T. Să se verifice că $s = k \cdot \mathbf{d}(P, T)$ și să se determine constanta k.

Soluție. $x' = 4(1 - \cos 4t) = 8 \sin^2 2t = 32 \sin^2 t \cos^2 t,$

$y' = 32 \sin^3 t \cos t.$

$$s = \int_0^t \sqrt{x'^2 + y'^2}\, dt = 32 \int_0^t \sin^2 t \cos t\, dt = \frac{32}{3} \sin^3 t.$$

$$\mathbf{d}(P, T) = \frac{y}{y'} \sqrt{x'^2 + y'^2} = 8 \sin^3 t;\ s = \frac{4}{3}\, \mathbf{d}(P, T).$$

13. Să se calculeze abscisa curbilinie și lungimea primei arcade pentru cicloida $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $t \in \mathbf{R}$ (fig. 3.17).

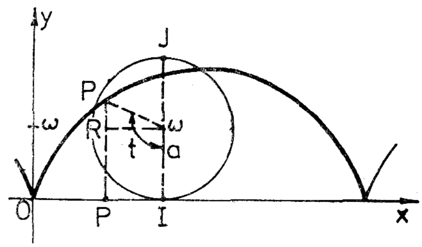


Fig. 3.17

Soluție. $x' = a(1 - \cos t) = 2a \sin^2 \dfrac{t}{2}$, $y' = a \sin t = 2a \sin \dfrac{t}{2} \cos \dfrac{t}{2}$. $ds = \sqrt{x'^2 + y'^2}\, dt = 2a \sin \dfrac{t}{2}\, dt.$

Pentru arcada $t \in [0, 2\pi]$, se obține

$$s = \int_0^t 2a \sin \frac{t}{2}\, dt = -4a \cos \frac{t}{2}\Big|_0^t = 4a\left(1 - \cos \frac{t}{2}\right).$$

Lungimea primei arcade este $l = 8a$.

14. Fie C o curbă plană orientată, P un punct al său și $\alpha: I \to C$ o parametrizare locală de viteză unu a lui C cu $\alpha(0) = P$. Presupunem $k(P) \neq 0$. Pentru $Q \in \mathbf{R}^2$ și $r > 0$ definim $\mathrm{f}: I \to \mathbf{R}$ prin $\mathrm{f}(t) = \|\vec{\alpha}(t) - \vec{r}_Q\|^2 - r^2$, unde $\vec{r}_Q$ este vectorul de poziție al punctului Q.

Să se arate că Q este centrul de curbură și r este raza de curbură a lui C în $P \Leftrightarrow \mathrm{f}(0) = \mathrm{f}'(0) = \mathrm{f}''(0) = 0$.

15. Fie C o curbă plană orientată, P un punct al său și $\vec{N}(P)$ versorul normal de orientare în P. Să se arate că dacă $\alpha: I \to C$ este o parametrizare locală de viteză unu a lui C cu $\alpha(t_0) = P$ și $h(t) = (\vec{\alpha}(t) - \vec{\alpha}(t_0), \vec{N}(t_0))$ (fig. 3.18), atunci $h(t_0) = h'(t_0) = 0$ și $h''(t_0) = k(P)$.

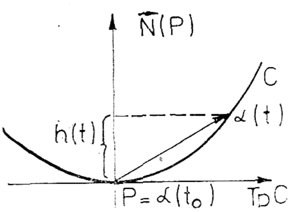


Fig. 3.18

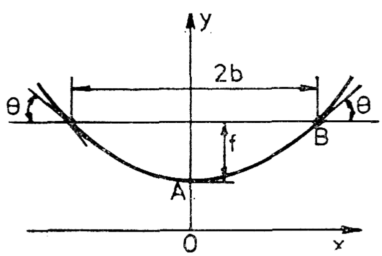


Fig. 3.19

16. Un cablu omogen de lungime $2l$, avînd greutatea pe unitatea de lungime p, este suspendat cu cele două capete pe aceeași orizontală (fig. 3.19). Unghiul făcut de tangenta la cablu cu orizontala în punctele de suspensie este θ.

1) Să se determine punctul de pe cablu în care curbura este maximă.

2) Să se calculeze tensiunile maximă T, minimă T_0 și săgeata f a cablului.

Soluție. 1) Cablul suspendat ia forma lănțișorului. Ecuația carteziană a curbei este $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$, $a > 0$. Avem $y' = \operatorname{sh} \frac{x}{a}$, $y'' = \frac{1}{a} \operatorname{ch} \frac{x}{a}$, $k(x) = \frac{1}{a \operatorname{ch}^2 \frac{x}{a}}$ și raza de curbură, $r(x) = a \operatorname{ch}^2 \frac{x}{a}$. Punem condiția ca $x \to r(x)$ să aibă un extrem, adică $\frac{dr}{dx} = 0$. Rezultă $\operatorname{sh} \frac{2x}{a} = 0$, $x = 0$. Deoarece $\left.\frac{d^2r}{dx^2}\right|_{x=0} = \frac{2}{a} \operatorname{ch} \left.\frac{2x}{a}\right|_{x=0} = \frac{2}{a} > 0$, punctul $x = 0$ este punctul de minim pentru raza de curbură, deci punctul de maxim pentru curbura lănțișorului. Astfel, vîrful lănțișorului (punctul de pe cablul suspendat în care curbura este maximă) este punctul $(0, a)$.

2) Folosind ecuația lănțișorului se obține panta tangentei la fir în punctul B, $\left(\frac{dy}{dx}\right)_B = \operatorname{tg} \theta$, deci $\operatorname{sh} \frac{b}{a} = \operatorname{tg} \theta$.

Expresia lungimii de fir AB este $l = a \operatorname{sh} \frac{b}{a} = a \operatorname{tg} \theta$, de unde rezultă $a = l \operatorname{ctg} \theta$.

Tensiunea în punctul A, $T_0 = pa = pl \operatorname{ctg} \theta$. Proiecția tensiunii pe orizontală fiind constantă, rezultă

$$T_{\max} = T_B = \frac{T_0}{\cos \theta} = \frac{pl}{\sin \theta}.$$

Se mai poate scrie

$$T_B = py_B = p(a + f) \text{ și } f = \frac{T_B - pa}{p} = \frac{l(1 - \cos \theta)}{\sin \theta}.$$

17. Fie $f:[0, 1] \to [0, 1]$ o funcție de clasă C^∞ pentru care $f(0) = 0$ și $f(1) = 1$ și fie $G(f)$ graficul său. Se poate ca lungimea arcului lui $G(f)$ să depășească lungimea arcului lui $G(f \circ f)$?

18. Fie $\alpha : [0, a] \to \boldsymbol{R}^2$ o curbă simplă, închisă, cu viteza unu, a cărei curbură k nu se anulează în nici un punct, Fie $r = \frac{1}{k}$ raza de curbură și $\mathcal{A}$ aria domeniului plan mărginit de $\alpha([0, a])$. Să se arate că

$$\mathcal{A} \leqslant \frac{1}{2} \int_0^a r(s)\, ds + \frac{a}{8} \int_0^a \| \vec{r}'(s) \|\, ds.$$

Pentru care curbe avem egalitate?

19. Să se construiască curbele de nivel $f^{-1}(-1)$, $f^{-1}(0)$, $f^{-1}(1)$, pentru $f(x, y) = x^2 - y^2$. În fiecare caz să se cerceteze în care puncte spațiul tangent va fi $[\nabla f(P)]^\perp$.

20. Să se găsească o parametrizare globală pentru fiecare dintre următoarele curbe, orientate prin $\frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}$, unde f este funcția definită de membrul stîng al fiecărei ecuații.

1) $ax + by = c,\ b \neq 0.$

2) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,\ a \neq 0,\ b \neq 0.$

3) $y - ax^2 = c,\ a \neq 0.$

4) $x^2 - y^2 = 1,\ x > 0.$

21. Fie curba $C = f^{-1}(0)$ unde $f(x, y) = y^2x + ay^2 + x^3 - ax^2$ (fig. 3.20). Să se arate că originea este punct dublu pentru curbă. Să se determine tangentele la curbă în acest punct.

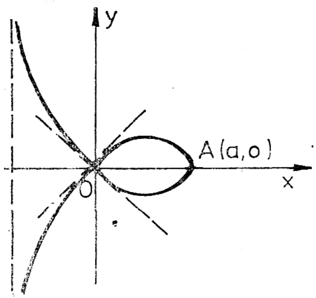


Fig. 3.20

Soluție. Se determină punctele critice ale lui f din C care sînt date de soluțiile sistemului

$$\begin{cases} x^3 + xy^2 + ay^2 + ax^2 = 0, \\ 3x^2 + y^2 - 2ax = 0, \\ 2xy + 2ay = 0. \end{cases}$$

Se găsește (0, 0) singurul punct critic al lui C. Avem

$$d^2f(x, y) = (6x - 2a)\,dx^2 + 4y\,dx\,dy + (2x + 2a)\,dy^2,$$

$$d^2f(0, 0) = (-2a)\,dx^2 + 2a\,dy^2,\ \det d^2f(0, 0) = -4a^2 < 0,$$

deci (0, 0) este punct dublu pentru curbă.

Tangentele la curbă în acest punct au parametrii directori (l, m) dați de ecuația

$$l^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) + 2lm\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) + m^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0) = 0$$

sau

$$-2a + \frac{m^2}{l^2}2a = 0,\ \text{adică}\ \frac{m^2}{l^2} - 1 = 0.$$

Pantele tangentelor la curbă sînt ± 1, deci tangentele la curbă în origine sînt bisectoarele axelor, $x = y,\ x = -y$.

22. Să se construiască curba $x = t^3(3t - 2),\ y = t(t - 1),\ t \in \boldsymbol{R}$.

Soluție. $\lim\limits_{t \to \pm\infty} x(t) = \infty$; $\lim\limits_{t \to \pm\infty} y(t) = \infty$, Din $x = 0 \Rightarrow t_1 = 0,\ t_2 = 2/3$. Deci curba taie axa Oy în punctele (0, 0) și (0, $-2/9$).

Din $y = 0 \Rightarrow t_1 = 0,\ t_2 = 1$. Deci curba taie axa Ox în punctele (0, 0) și (1, 0). Curba nu are simetrii.

Puncte regulate. Puncte singulare.

Vectorul viteză, $\vec{\alpha}'(t)$ re coordonatele $x'(t) = 6t^2(2t - 1)$ și $y'(t) = 2t - 1$. Din $x'(t) = 0,\ y'(t) = 0 \Rightarrow t = 1/2$, punct singular. Deoarece $\vec{\alpha}''(1/2) = (3, 2)$

și $\vec{\alpha}'''(1/2) = (24, 0)$ nu sînt coliniari, deducem că punctul $A(-1/16, -1/4)$ este punct de întoarcere de speța întîi. Tangenta în acest punct are ecuația $\frac{x + 1/16}{3} = \frac{y + 1/4}{2}$. Printre punctele regulate ($t \neq 1/2$) căutăm punctele de inflexiune. Deoarece $x'(0) = x''(0) = 0$ rezultă că $\vec{\alpha}''(0)$ este coliniar cu $\vec{\alpha}'(0)$. Deci originea este punct de inflexiune. Alte puncte de inflexiune nu mai există, deoarece ecuația $\vec{\alpha}''(t) = \lambda\vec{\alpha}'(t)$ nu are alte soluții în afară de $t = 0$.

Puncte multiple nu există, deoarece sistemul $t_1^3(3t_1 - 2) = t_2^3(3t_2 - 2)$, $t_1(t_1 - 1) = t_2(t_2 - 1)$, $t_1 \neq t_2$ este incompatibil. Deci α este o curbă simplă.

Ramuri infinite. Asimptote. Pentru $t \to \pm\infty$ se obțin două ramuri infinite. Deoarece $\lim\limits_{t\to\pm\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = 0$, ambele ramuri admit direcția asimptotică $(1, 0)$.

Nu există asimptote.

Tabelul de variație pentru x și y (fig. 3.21)

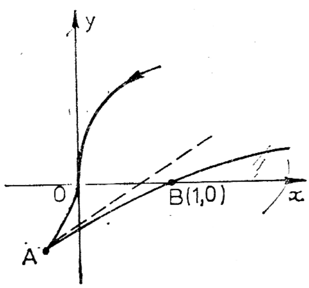


Fig. 3.21

t	$-\infty$		0		$1/2$		1		∞
x'		$-$	0	$-$	0		$+$		
x	∞	$\searrow$	0	$\searrow$	$-1/16$	$\nearrow$	1	$\nearrow$	∞
y'			$-$		0		$+$		
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-1/4$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	∞

23. Curba $x = \sin\frac{t}{2}$, $y = \cos t$, $t \in [0, 4\pi]$, se numește *curba Lissajous.*

1) Să se construiască curba.

2) Să se determine ecuația carteziană a ei.

Soluție. 1) *Intersecții cu axele. Simetrii.*

Fie $\vec{\alpha} = \vec{\alpha}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$ ecuația vectorială a curbei. Deoarece $\vec{\alpha}(0) = \vec{\alpha}(4\pi) = (0\ 1)$, deducem că α este o curbă închisă. Din $x = 0$ rezultă $t \in \{0, 2\pi, 4\pi\}$, deci curba taie axa Oy în punctul triplu $(0, 1)$. Din $y = 0$ rezultă $t \in \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}\right\}$ și astfel curba taie axa Ox în punctele duble $(-\sqrt{2}/2, 0)$ și $(\sqrt{2}/2, 0)$.

Deoarece $\sin\frac{(t + 2\pi)}{2} = -\sin\frac{t}{2}$, $\cos(t + 2\pi) = \cos t$, rezultă că α este simetrică în raport cu axa Oy. Este suficient să construim imaginea pentru $t \in [0, 2\pi]$, iar restul îl completăm prin simetrie.

Puncte regulate. Puncte singulare.

$$\vec{\alpha}'(t) = 1/2\vec{i}\cos\frac{t}{2} - \vec{j}\sin t;\ \vec{\alpha}'(t) = \vec{0} \Rightarrow t_1 = \pi,\ t_2 = 3\pi.$$

Se obțin punctele singulare $(-1, -1)$ și $(1, -1)$.

Deoarece $\vec{\alpha}''(t) = -\dfrac{1}{4}\vec{i}\sin\dfrac{t}{2} - \vec{j}\cos t$, $\vec{\alpha}'''(t) = -\dfrac{1}{8}\vec{i}\cos\dfrac{t}{2} + \vec{j}\sin\dfrac{t}{2}$, $\vec{\alpha}^{IV}(t) = \dfrac{1}{16}\vec{i}\sin\dfrac{t}{2} + \vec{j}\cos t$, găsim

$$\vec{\alpha}''(\pi) = -\frac{1}{4}\vec{i} + \vec{j},\quad \vec{\alpha}''(3\pi) = \frac{1}{4}\vec{i} + \vec{j}$$

$$\vec{\alpha}'''(\pi) = \vec{0},\qquad \vec{\alpha}'''(3\pi) = \vec{0}$$

$$\vec{\alpha}^{IV}(\pi) = \frac{1}{16}\vec{i} - \vec{j},\qquad \vec{\alpha}^{IV}(3\pi) = -\frac{1}{16}\vec{i} - \vec{j}.$$

Rezultă că punctele $t = \pi$ și $t = 3\pi$ sînt puncte singulare de întoarcere de speța a doua. Tangentele în aceste puncte au ecuațiile $y = -4x + 3$, $y = 4x + 3$.

Nu există puncte de inflexiune.

Puncte multiple. Din sistemul $\sin\dfrac{t_1}{2} = \sin\dfrac{t_2}{2}$, $\cos t_1 = \cos t_2$, $t_1 \neq t_2$, deducem $t_1 = 2\pi - t_2$, $\pi < t_2 \leqslant 2\pi$; $t_1' = 6\pi - t_2'$, $3\pi < t_2' \leqslant 4\pi$. De aici rezultă că $(-1, -1)$, $(1, -1)$ sînt puncte simple; $t \in (0, \pi) \cup (\pi, 2\pi) \cup (2\pi, 3\pi) \cup (3\pi, 4\pi)$ sînt puncte duble; $(0, 1)$ este punct triplu. Deoarece curba este simetrică față de Oy și deoarece punctele corespunzătoare lui $t \in (\pi, 2\pi]$ se suprapun peste punctele $t \in [0, \pi)$ {punctele $t \in (3\pi, 4\pi]$ se suprapun peste punctele $t \in [2\pi, 3\pi)$} pentru desenarea curbei este suficient să trasăm porțiunea $t \in [0, \pi]$, iar restul să completăm prin dublare și simetrie.

Tabelul de variație (fig. 3.22)

t	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π		$\frac{5\pi}{2}$		3π		$\frac{7\pi}{2}$		4π
$\sin\frac{t}{2}$	0	↗	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	↗	1	↘	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	↘	0	↘	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	↘	-1	↗	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	↗	0
$\cos t$	1	↘	0	↘	-1	↗	0	↗	1	↘	0	↘	-1	↗	0	↗	1

2) Se observă că:

$t \in [\pi, 3\pi] \Rightarrow y = 1 - 2x^2$, $x \in [-1, 1]$, arc de parabolă;

$t \in [0, \pi) \cup (3\pi, 4\pi) \Rightarrow y = 1 - 2x^2$,

$x \in (-1, 1)$ arc de parabolă;

$t = 4\pi \Rightarrow x = 1$, $y = 1$, un punct.

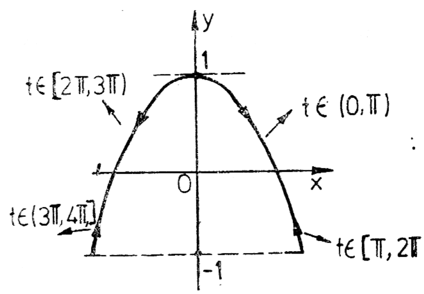


Fig. 3.22

193

Precizare. Extensia lui α la $\boldsymbol{R}$ este o curbă periodică de perioadă $T = 4\pi$. Toate punctele acestei curbe sînt multiple. În particular punctele $(-1, -1)$ și $(1, -1)$ sînt și puncte multiple și puncte singulare de întoarcere de speța a doua.

24. Să se determine înfășurătoarea următoarelor familii de curbe:

1) $(x-a)^2 + y^2 - \dfrac{a^2}{2} = 0$;

2) $\dfrac{x}{\alpha} + \dfrac{y}{\beta} - 1 = 0$, cînd $\alpha^m + \beta^m - a^m = 0$ $(a = \text{const})$;

3) $\left(\dfrac{x}{\alpha}\right)^n + \left(\dfrac{y}{\beta}\right)^n - 1 = 0$, cînd $\left(\dfrac{\alpha}{a}\right)^m + \left(\dfrac{\beta}{b}\right)^m - 1 = 0$, a, b constante.

R: 1) $y = \pm x$; 2) $x^{\frac{m}{m+1}} + y^{\frac{m}{m+1}} = a^{\frac{m}{m+1}}$; 3) $\left(\dfrac{x}{a}\right)^{\frac{mn}{m+n}} + \left(\dfrac{y}{b}\right)^{\frac{mn}{m+n}} = 1$.

25. Să se determine evolutele pentru curbele:

1) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0$.

2) $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$.

R: 1) astroidă alungită (fig. 3.23); 2) cicloidă.

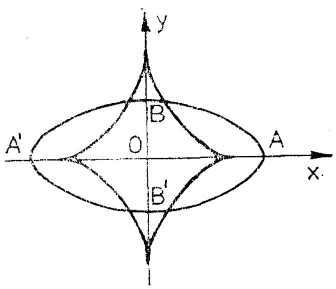


Fig. 3.23

26. Se consideră curbele $\alpha_1: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}^2$, $\alpha_1(t) = \left(\dfrac{t}{t^2+1}, e^t\right)$ și $\alpha_2: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}^2$, $\alpha_2(t) = \left(\sin t, \dfrac{1}{2}t^2 + t + 1\right)$.

1) Să se arate că $M(0, 1)$ este un punct regulat comun celor două curbe.

2) Să se arate că în acest punct curbele au un contact de ordinul doi.

Soluție. 1) $M_0(0, 1)$ se află pe ambele curbe și $M_0 = \alpha_1(0) = \alpha_2(0)$.

Fie $\vec{\alpha}_1(t) = \dfrac{t}{t^2+1}\vec{i} + e^t\vec{j}$. Rezultă

$\vec{\alpha}'(t) = \dfrac{1-t^2}{(t^2+1)^2}\vec{i} + e^t\vec{j}$, $\|\vec{\alpha}_1'(0)\| = \sqrt{2} \neq 0$ și deci M_0 este punct regulat pentru α_1.

Fie $\vec{\alpha}_2(t) = \sin t\vec{i} + \left(\dfrac{1}{2}t^2 + t + 1\right)\vec{j}$. Găsim

$\vec{\alpha}_2'(t) = \cos t\vec{i} + (t+1)\vec{j}$, $\|\vec{\alpha}_2'(0)\| = \sqrt{2} \neq 0$, deci M_0 este punct regulat pentru α_2.

2) Trebuie arătat că

$$\lim_{t\to 0}\frac{\vec{\alpha}_2(t)-\vec{\alpha}_1(t)}{(t-t_0)^i}=\begin{cases}\vec{0}, & \text{pentru } i=0,1,2\\ \neq\vec{0}, & \text{pentru } i=3.\end{cases}$$

$$\vec{\alpha}_2(t)-\vec{\alpha}_1(t)=\left(\sin t-\frac{t}{t^2+1}\right)\vec{i}+\left(\frac{1}{2}t^2+t+1-e^t\right)\vec{j},$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{\vec{\alpha}_2(t)-\vec{\alpha}_1(t)}{t^0}=\lim_{t\to 0}\left[\left(\sin t-\frac{t}{t^2+1}\right)\vec{i}+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1}{2}t^2+t+1-e^t\right)\vec{j}\right]=\vec{0},$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{\vec{\alpha}_2(t)-\vec{\alpha}_1(t)}{t}=\lim_{t\to 0}\left[\left(\frac{\sin t}{t}-\frac{1}{t^2+1}\right)\vec{i}+\left(\frac{1}{2}t+1+\frac{1-e^t}{t}\right)\vec{j}\right]=\vec{0},$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{\vec{\alpha}_2(t)-\vec{\alpha}_1(t)}{t^2}=\lim_{t\to 0}\left[\left(\frac{\sin t}{t^2}-\frac{1}{t(t^2+1)}\right)\vec{i}+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}-\frac{e^t}{t^2}\right)\vec{j}\right]=\vec{0},\ \lim_{t\to 0}\frac{\vec{\alpha}_2(t)-\vec{\alpha}_1(t)}{t^3}\neq\vec{0},$$

deci M_0 (0, 1) este punct de contact de ordinul doi.

iii. Curbe plane în coordonate polare

iii.1. Presupunem că planul xOy a fost raportat la un reper polar și că punctului (x, y) îi corespunde punctul (ρ, θ). În această ipoteză, o curbă plană mai poate fi dată și prin *ecuația polară* $\rho = f(\theta)$.

iii.2. Fie (ρ, θ) un punct al unei curbe date, diferit de pol. Unghiul V dintre tangenta în acest punct și raza vectoare corespunzătoare este dat de $\operatorname{tg} V=\frac{\rho}{\rho'}$. Dacă considerăm un reper cartezian adecvat: OX este pe raza vectoare corespunzătoare punctului (ρ, θ), iar OY este perpendiculară pe OX astfel încît XOY să fie un reper orientat pozitiv, atunci tangenta și normala în (ρ, θ) au respectiv ecuațiile (fig. 3.24).

$$Y=\frac{\rho}{\rho'}(X-\rho)\ \text{ și }\ \frac{\rho}{\rho'}Y+X-\rho=0.$$

Mărimile algebrice $\overline{OT}=\frac{\rho^2}{\rho'}$ și $\overline{ON}=\rho'$ se numesc *subtangentă polară și respectiv subnormală polară* (fig. 3.24).

Dacă curba considerată trece prin pol, atunci tangenta în pol face cu Ox unghiul θ_1 care anulează pe $\rho = f(\theta)$.

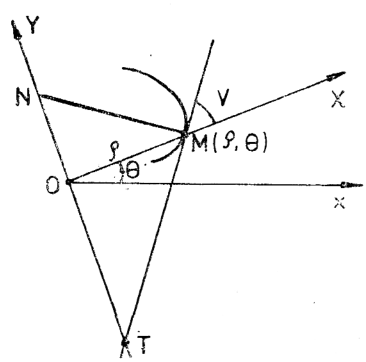


Fig. 3.24

iii.3. Punctele multiple ale unei curbe dată prin $\rho = f(\theta)$ se găsesc rezolvînd ecuațiile

$$f(\theta_1) = f(\theta_2 + 2k\pi),\ f(\theta_1) = -f(\theta_2 + \pi + 2k\pi),\ k \in \mathbf{Z}$$

iii.4. Forma curbei se stabilește cu ajutorul semnului curburii

$$k = \frac{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}{(\rho^2 + \rho'^2)^{3/2}}.$$

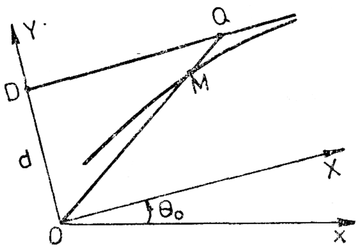


Fig. 3.25

Pentru $k > 0$ corespund puncte în vecinătatea cărora curba se încovoaie în sens opus polului, pentru $k < 0$ corespund puncte în vecinătatea cărora curba se încovoaie către pol, iar pentru $k = 0$ obținem de obicei puncte de inflexiune.

iii.5. Valorile lui θ pentru care limita lui $\rho = f(\theta)$ este infinită dau direcțiile asimptotice. Fie θ_0 o direcție asimptotică. Notăm $d = \lim\limits_{\theta \to \theta_0} \rho \sin(\theta - \theta_0)$. Dacă d este finit, atunci curba admite o asimptotă a cărei ordonată la origine este d (fig. 3.25). Dacă $d = \infty$, atunci curba are o ramură parabolică.

Exerciții și probleme

27. Fie curbele plane date prin următoarele ecuații polare

1) $\rho = a \sin\theta \sin 2\theta,\ \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$,

2) $\rho = a \cos\frac{3\theta}{4},\quad \theta \in [-2\pi, 2\pi]$.

Să se cerceteze dacă sînt închise, simple, regulate.

R: 1) $\rho\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \rho\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, deci curba este închisă.

Nu este simplă, deoarece $\rho\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \rho\left(\frac{\pi}{2}\right) = \rho(0) = 0$, deci polul este punct triplu pentru curbă.

$\rho'(0) = 0$, deci curba nu este regulată. Polul 0 este și punct singular.

2) Curba e închisă, nu e simplă, nu e regulată.

28. Curba $\rho = f(\theta) \pm a,\ a > 0$, se numește *concoida* curbei $\rho = f(\theta)$. Să se determine

1) Concoida cercului *(melcul lui Pascal)*.

2) Concoida unei drepte *(concoida lui Nicomede)*.

Soluție. 1) Considerăm ecuația în coordonate polare a cercului de rază a, ce trece prin pol și are ca diametru prelungirea axei polare (fig. 3.26). Un punct M al acestui cerc are coordonatele polare $OM = \rho$ și $\sphericalangle\ \theta = \sphericalangle xOM$. În ΔMON avem $OM = ON \cos\theta_1 = 2a\cos\theta_1 = 2a\cos(180° - \theta)$, $OM = -2a\cos\theta$.

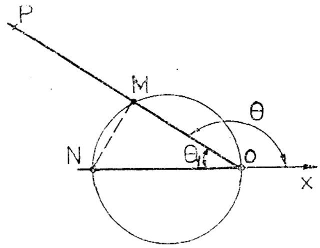


Fig. 3.26

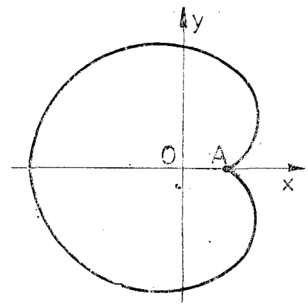


Fig. 3.27

Adăugăm razei vectoare mărimea constantă $k = 2a$ și obținem o concoidă, de ecuație $\rho = 2a - 2a \cos \theta$, sau $\rho = 2a(1 - \cos \theta)$ care este o cardioidă (vezi fig. 3.27) descrisă de punctul P.

2) Considerăm o dreaptă perpendiculară pe axa polară la distanța d de pol. Avem $OM = \rho = \dfrac{d}{\cos \theta}$.

Concoida va avea ecuația $\rho = \dfrac{d}{\cos \theta} + a$.

Dacă se schimbă a în $-a$ se obține ecuația $\rho = \dfrac{a}{\cos \theta} - a$, care reprezintă aceeași curbă, căci se poate deduce din prima schimbînd pe θ în $\pi + \theta$ și pe ρ în $-\rho$.

Deci, ecuația $\rho = \dfrac{d}{\cos \theta} + a$ reprezintă curba compusă din două arce distincte obținute respectiv prin mărirea și micșorarea razei vectoare a unui punct curent M de pe dreapta considerată inițial cu aceeași lungime a.

Considerăm ecuația $\rho = \dfrac{d}{\cos \theta} - a$, unde a și d sînt pozitivi. Schimbînd pe θ în $-\theta$, ρ nu se schimbă, deci curba este simetrică față de axa Ox. E suficient să considerăm $\theta \in [0, \pi] - \left\{ \dfrac{\pi}{2} \right\}$.

Deoarece $\lim\limits_{\theta \to \frac{\pi}{2}} \rho(\theta) = \infty$, $\lim\limits_{\theta \to \frac{\pi}{2}} \rho(\theta) \sin \left(\theta - \dfrac{\pi}{2} \right) = \lim\limits_{\theta \to \frac{\pi}{\theta}} \left(\dfrac{d}{\cos \theta} - a \right) (-\cos \theta) =$

$= \lim\limits_{\theta \to \frac{\pi}{2}} (-d + a \cos \theta) = -d$, rezultă că asimptota curbei este chiar dreapta inițială.

Poziția curbei față de asimptotă este dată de diferența $\rho \sin \left(\theta - \dfrac{\pi}{2} \right) -$ $- (-d) = a \cos \theta$, pozitivă pentru $\theta < \dfrac{\pi}{2}$ și, negativă pentru $\theta > \dfrac{\pi}{2}$.

Vom considera trei cazuri.

Cazul I: $d > a$ (fig. 3.28)

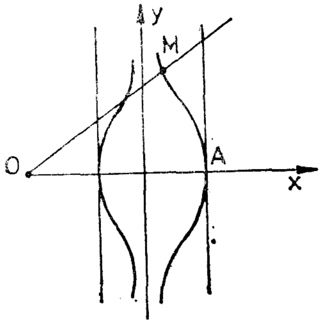


Fig. 3.28

θ	0		$\frac{\pi}{2} - 0$	$\frac{\pi}{2} + 0$		π
ρ'	0	$+$	$+$	$+$	$+$	0
ρ	$d - a$	$\nearrow$	$+\infty$	$-\infty$	$\nearrow$	$-(d + a)$

Cazul II: $d < a$ (fig. 3.29). O este punct dublu pentru curbă.

θ	0		α		$\frac{\pi}{2} - 0$	$\frac{\pi}{2} + 0$		π
ρ'	0	$+$		$+$		$+$	$+$	0
ρ	$-(a - d)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$	$-\infty$	$\nearrow$	$-(d + a)$

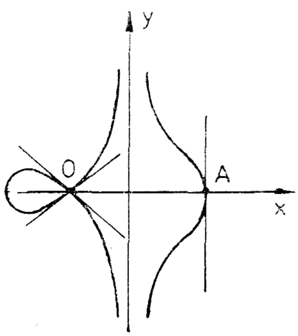


Fig. 3.29

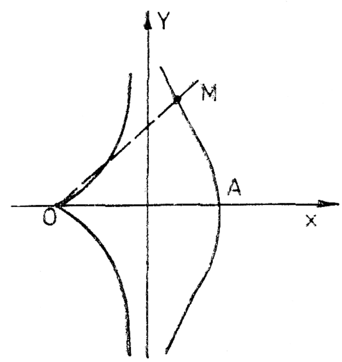


Fig. 3.30

Cazul III: $d = a$ (fig. 3.30). O este punct de întoarcere de prima speță.

θ	0		$\frac{\pi}{2} - 0$	$\frac{\pi}{2} + 0$		π
ρ'	0	$+$	$+$	$+$	$+$	0
ρ	0	$\nearrow$	$+\infty$	$-\infty$	$\nearrow$	$-2a$

29. Un punct M execută o mişcare plană astfel încît viteza lui areolară în raport cu un punct O este proporţională cu raza vectoare, $\Omega = k_1\rho$. Ştiind că în momentul iniţial $\rho = \rho_0$ avem $v_{\rho_0} = k_2$, să se studieze mişcarea punctului.

30. Să se determine elementul de arc, cosinusul şi sinusul unghiului θ_0 format de raza vectoare şi tangentă, pentru fiecare din următoarele curbe:

1) $\rho = a\theta$ *(spirala lui Arhimede)*; 2) $\rho = \dfrac{a}{\theta}$ *(spirala hiperbolică)* 3) $\rho^2 = a\cos 2\theta$ *(lemniscata)*.

R: 1) $ds = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\, d\theta = a\sqrt{1+\theta^2}\, d\theta$; $\cos\theta_0 = \dfrac{d\rho}{ds} = \dfrac{1}{\sqrt{1+\theta^2}}$, $\sin\theta_0 = \rho\dfrac{d\theta}{ds} = \dfrac{\theta}{\sqrt{1+\theta^2}}$.

2) $ds = \dfrac{a}{\theta^2}\sqrt{1+\theta^2}\, d\theta$; $\cos\theta_0 = -\dfrac{1}{\sqrt{1+\theta^2}}$, $\sin\theta_0 = \dfrac{\theta}{\sqrt{1+\theta^2}}$.

3) $ds = \dfrac{a^2}{\rho}\, d\theta$; $\cos\theta_0 = -\sin 2\theta$, $\sin\theta_0 = \cos 2\theta$.

31. Să se construiască curba $\rho = \dfrac{a}{\cos^3\dfrac{\theta}{3}}$, $\theta \neq (2k+1)\dfrac{3\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$.

Curba este reprezentată în figura 3.31.

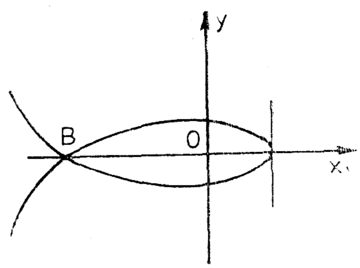


Fig. 3.31

32. Să se determine asimptotele curbelor:

1) $\rho = \dfrac{a\cos 2\theta}{\cos\theta}$; 2) $\rho = a(\sec 2\theta + \operatorname{tg} 2\theta)$;

3) $\rho = \dfrac{a}{\cos 2\theta}$.

Soluţie. 1) Domeniul de definiţie, $\boldsymbol{R} - \left\{\dfrac{n\pi}{2}\right\}$, n = impar.

$\theta_0 = \dfrac{\pi}{2}$ dă o direcţie asimptotică a curbei.

Considerăm $d = \lim\limits_{\theta\to\theta_0} \rho\sin(\theta - \theta_0) = \lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{a\cos 2\theta}{\cos\theta}\sin\left(\theta - \dfrac{\pi}{2}\right) = a$. Atunci asimptota curbei este dreapta de ecuaţie

$$\rho = \frac{d}{\sin(\theta - \theta_0)} \quad \text{sau} \quad \rho = \frac{a}{\sin\left(\theta - \dfrac{\pi}{2}\right)} = -\frac{a}{\cos\theta}.$$

2) Ecuaţia curbei se mai poate scrie

$\rho = a\dfrac{1 + \operatorname{tg}\theta}{1 - \operatorname{tg}\theta}$. Domeniul de definiţie, $\boldsymbol{R} - \left\{k\pi + \dfrac{\pi}{4},\ k\pi + \dfrac{5\pi}{4}\right\}$, $k \in \mathbf{Z}$.

Curba admite două direcții asimptotice și anume $\theta_0 = \frac{\pi}{4}$ și $\theta_1 = \frac{5\pi}{4}$. Calculăm $d_0 = \lim\limits_{\theta \to \frac{\pi}{4}} \rho \sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = \lim\limits_{\theta \to \frac{\pi}{4}} a \frac{1 + \operatorname{tg} \theta}{1 - \operatorname{tg} \theta} \sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) =$

$$= a \lim_{\theta \to \frac{\pi}{4}} \frac{\cos \theta + \sin \theta}{\cos \theta - \sin \theta} \sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = a\sqrt{2} \lim_{\theta \to \frac{\pi}{4}} \frac{\sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)}{\cos \theta - \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)} =$$

$$= a\sqrt{2} \lim_{\theta \to \frac{\pi}{4}} \frac{\sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)}{-2 \sin \frac{\pi}{4} \sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)} = -a.$$

Analog, $d_1 = \lim\limits_{\theta \to \frac{5\pi}{4}} \rho \sin\left(\theta - \frac{5\pi}{4}\right) = -a.$

Cele două asimptote ale curbei au respectiv ecuațiile:

$$\rho = \frac{a}{\sin\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right)} \text{ și } \rho = \frac{a}{\sin\left(\frac{5\pi}{4} - \theta\right)}$$ și se află la distanța a de pol.

3) Domeniul de definiție, $\boldsymbol{R} - \left\{k\pi + \frac{\pi}{4},\ k\pi + \frac{3\pi}{4}\right\},\ k \in \mathbf{Z}.$

Direcții asimptotice, $\theta_0 = \frac{\pi}{4}$ și $\theta_1 = \frac{3\pi}{4}$, $d_0 = -\frac{a}{2}$, $d_1 = -\frac{a}{2}$.

Cele două asimptote, $\rho = \dfrac{a/2}{\sin\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right)}$ și $\rho = \dfrac{a/2}{\sin\left(\frac{3\pi}{4} - \theta\right)}$.

33. 1) Să se stabilească coordonatele centrului cercului osculator într-un punct arbitrar al unei curbe plane dată în coordonate polare.

2) Să se determine desfășurata spiralei logaritmice, $\rho = e^{k\theta}$.

iv. Curbe în $\boldsymbol{R}^3$

Raportăm spațiul tridimensional la reperul natural și considerăm curba

$$\alpha = (x, y, z): I \to \boldsymbol{R}^3,\ x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t).$$

iv.1. Dacă $\forall t \in I$, $\exists a, b, c, d$ astfel încît $ax(t) + by(t) + cz(t) + d = 0$, atunci α se numește *curbă plană*. În caz contrar se numește *curbă strîmbă*.

iv.2. Fie $P = (x(t), y(t), z(t))$ un punct regulat al lui α. Tangenta și planul normal în acest punct au respectiv ecuațiile

$$\frac{x - x(t)}{x'(t)} = \frac{y - y(t)}{y'(t)} = \frac{z - z(t)}{z'(t)},$$

$$x'(t)(x - x(t)) + y'(t)(y - y(t)) + z'(t)(z - z(t)) = 0.$$

iv.3. Dacă $P = (x(t), y(t), z(t))$ este un punct singular de ordinul n, atunci tangenta și planul normal în P au respectiv ecuațiile

$$\frac{x - x(t)}{x^{(n)}(t)} = \frac{y - y(t)}{y^{(n)}(t)} = \frac{z - z(t)}{z^{(n)}(t)},$$

$$x^{(n)}(t)\,(x - x(t)) + y^{(n)}(t)\,(y - y(t)) + z^{(n)}(t)\,(z - z(t)) = 0.$$

iv.4. Pentru studiul unei curbe regulate din spațiu se folosesc *elementele lui Frenet*:

1) *cîmpul tangent*, $\vec{T} = \dfrac{\vec{\alpha}'}{\|\vec{\alpha}'\|}$,

2) *cîmpul normal principal*, $\vec{N} = \vec{B} \times \vec{T}$,

3) *cîmpul binormal*, $\vec{B} = \dfrac{\vec{\alpha}' \times \vec{\alpha}''}{\|\vec{\alpha}' \times \vec{\alpha}''\|}$ (ipoteză: $k > 0$),

4) curbura, $k = \dfrac{\|\vec{\alpha}' \times \vec{\alpha}''\|}{\|\vec{\alpha}'\|^3}$,

5) *torsiune*, $\tau = \dfrac{(\vec{\alpha}' \times \vec{\alpha}'', \vec{\alpha}''')}{\|\vec{\alpha}' \times \vec{\alpha}''\|^2}$.

Acestea intervin în primul rînd în relațiile

$$\frac{d\vec{T}}{dt} = kv\vec{N}, \quad \frac{d\vec{N}}{dt} = -kv\vec{T} + \tau v\vec{B}, \quad \frac{d\vec{B}}{dt} = -\tau v\vec{N},$$

care se numesc *formulele lui Frenet*.

iv.5. Muchiile și fețele triedrului lui Frenet au următoarele denumiri: *tangenta, normala principală, binormala, plan osculator, plan normal* și *plan rectificant*.

iv.6. Funcția de curbură $k > 0$ și funcția de torsiune τ determină o curbă din spațiu abstracție făcînd de o izometrie;

$k = 0 \Leftrightarrow \alpha$ este o porțiune dintr-o dreaptă; $\tau = 0 \Leftrightarrow \alpha$ este un arc de curbă plană; $k = \text{const.} > 0$, $\tau = 0 \Leftrightarrow \alpha$ este un arc de cerc; $k = \text{const} > 0$, $\tau = \text{const} \neq 0 \Leftrightarrow \alpha$ este un arc dintr-o elice circulară; $\dfrac{\tau}{k} = \text{const} \Leftrightarrow \alpha$ este un arc dintr-o elice cilindrică etc.

iv.7. Curbele din $\boldsymbol{R}^3$ mai pot fi introduse și pornind de la funcții diferențiabile de tipul $\mathrm{F} = (\mathrm{f}, \mathrm{g}) : \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^2$. Mulțimea $C = \mathrm{F}^{-1}(a, b) = \{(x, y, z) \mid (x, y, z) \in \boldsymbol{R}^3, \mathrm{f}(x, y, z) = a, \mathrm{g}(x, y, z) = b\}$, se numește *mulțime* *de ecuații carteziene* implicite $f(x, y, z) = a$, $g(x, y, z) = b$. Dacă C este nevidă, iar $\mathcal{F}$ este regulată în punctele lui C, atunci C este o *curbă* și anume intersecția a două suprafețe (vezi § 3).

Dacă $P(x_0, y_0, z_0)$ este un punct regulat al curbei C, atunci tangenta și planul normal în acest punct au respectiv ecuațiile

$$\frac{x - x_0}{\dfrac{D(f, g)}{D(y_0, z_0)}} = \frac{y - y_0}{\dfrac{D(f, g)}{D(z_0, x_0)}} = \frac{z - z_0}{\dfrac{D(f, g)}{D(x_0, y_0)}},$$

$$(x - x_0)\frac{D(f, g)}{D(y_0, z_0)} + (y - y_0)\frac{D(f, g)}{D(z_0, x_0)} + (z - z_0)\frac{D(f, g)}{D(x_0, y_0)} = 0.$$

Exerciții și probleme

34. Fie $\alpha: [\pi, 2\pi] \to \boldsymbol{R}^3$, $\alpha(t) = \left(a \sin^2 t, \dfrac{b}{2} \sin 2t, c \cos t\right)$ și $\beta: [-1, 1] \to \boldsymbol{R}^3$, $\beta(u) = (a(1 - u^2), bu\sqrt{1 - u^2}, cu)$. Să se arate că α și β au aceeași imagine.

Indicație. Fie $h: [\pi, 2\pi] \to [-1, 1]$, dată prin $u = \cos t$. Rezultă $t = h^{-1}(u) = \pi + \arccos u$, $\beta = \alpha \circ h^{-1}: [-1, 1] \to \boldsymbol{R}^3$, adică β este o reparametrizare a lui α prin h. Cele două parametrizări reprezintă curba $C = \left\{(x, y, z) \in \boldsymbol{R}^3 \mid x + a\dfrac{z^2}{c^2} = 0, \dfrac{z^4}{c^4} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 0\right\}$.

35. Fie curba $x = 1 + t^3$, $y = t^2 + t^3$, $z = 5t^3 + 2t^2 + 2$, $t \in \boldsymbol{R}$.

1) Să se arate că este o curbă simplă, plană și să se găsească planul curbei.

2) Să se determine punctul singular al curbei, tangenta și planul normal în acest punct.

R: 1) $\tau = 0$, $3x + 2y - z - 1 = 0$; 2) Punct singular $(1, 0, 2)$. Tangenta: $\dfrac{x - 1}{0} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z - 2}{4}$. Planul normal: $y + 2z - 4 = 0$.

36. Fie curba $x = a \cos^2 t$, $y = a\sqrt{2} \sin t \cos t$, $z = a \sin^2 t$, $t \in \boldsymbol{R}$.

Să se arate că se află pe un con (fig. 3.32). Să se găsească ecuațiile carteziene ale curbei. Să se determine planul ei osculator în punctul $\left(\dfrac{a}{2}, \dfrac{a\sqrt{2}}{2}, \dfrac{a}{2}\right)$.

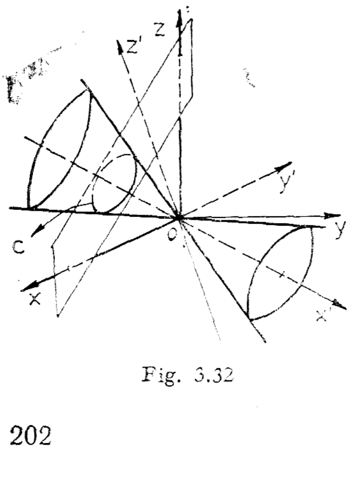


Fig. 3.32

37. Fie curba $C: x^2 + y^2 + z^2 - 16 = 0$, $y + z - 4 = 0$.

Să se determine proiecția curbei C pe planul xOy. Să se obțină o reprezentare parametrică pentru curbă. Să se determine elementele lui Frenet $\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}, k, \tau$ pentru curba C în punctul $(0, 4, 0)$.

Soluție. Curba C este un cerc în spațiu, care se obține intersectînd sfera cu centrul în origine și raza 4, cu un plan paralel cu axa Ox (fig. 3.33). Proiecția curbei pe planul xOy este o elipsă și ecuațiile sale se obțin eliminînd pe z între ecuațiile sferei și planului și adăugînd ecuația $z = 0$, anume $x^2 + 2(y - 2)^2 - 8 = 0$, $z = 0$ sau $\frac{x^2}{8} + \frac{(y-2)^2}{4} - 1 = 0$, $z = 0$. Elipsa are centrul $\omega(0, 2, 0)$ și semiaxele $2\sqrt{2}$ și 2. Ecuațiile parametrice ale ei sînt $x = 2\sqrt{2}\cos t$, $y = 2 + 2\sin t$, $z = 0$, $t \in [0, 2\pi)$. Înlocuind expresia lui y în ecuația planului $y + z - 4 = 0$ obținem $z = 2(1 - \sin t)$.

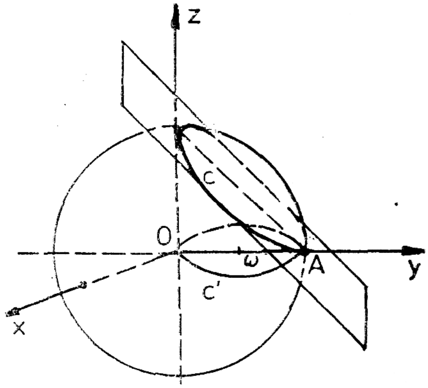


Fig. 3.33

Ecuațiile parametrice ale cercului C sînt $x = 2\sqrt{2}\cos t$, $y = 2(1 + \sin t)$, $z = 2(1 - \sin t)$, $t \in [0, 2\pi)$.

Punctul $(0, 4, 0)$ corespunde valorii parametrului $t_0 = \frac{\pi}{2}$.

Rezultă

$$\vec{\alpha}(t) = (2\sqrt{2}\cos t,\ 2 + 2\sin t,\ 2 - 2\sin t),$$

$$\vec{\alpha}'\left(\frac{\pi}{2}\right) = (-2\sqrt{2}, 0, 0),\ \vec{\alpha}''\left(\frac{\pi}{2}\right) = (0, -2, 2),\ \vec{\alpha}'''\left(\frac{\pi}{2}\right) = (2\sqrt{2}, 0, 0).$$

Folosind formulele care dau elementele lui Frenet atașate curbei într-un punct, obținem

$$\vec{T}(t_0) = \frac{1}{2\sqrt{2}}(-2\sqrt{2}, 0, 0) = -\vec{i},$$

$$\vec{B}(t_0) = \frac{(0, 4\sqrt{2}, 4\sqrt{2})}{8} = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{k},$$

$$\vec{N}(t_0) = (0, -1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{k},$$

$$k(t_0) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ ;\ \tau(t_0) = 0.$$

38. Se consideră curba $x = e^t \cos t$, $y = e^t \sin t$, $z = e^t$, $t \in \boldsymbol{R}$. Să se arate că $\alpha(\boldsymbol{R})$ e situată pe un con. Să se determine lungimea arcului curbei cuprins între punctele $(1, 0, 1)$ și $(0, e^{\frac{\pi}{2}}, e^{\frac{\pi}{2}})$.

Soluție. Eliminînd parametrul t între ecuațiile curbei, se obține ecuația $x^2 + y^2 = z^2$, care reprezintă un con cu vîrful în origine.

Punctele date corespund respectiv valorilor parametrului $t_1 = 0$ și $t_2 = \frac{\pi}{2}$.

$$l = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\, dt = \sqrt{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^t\, dt = \sqrt{3}(e^{\frac{\pi}{2}} - 1).$$

39. Să se determine abscisa curbilinie a curbei

1) $x = \cos t,\ y = \sin t,\ z = t^2/2,\ t \in \boldsymbol{R}$,

2) $x = a \operatorname{ch} t,\ y = a \operatorname{sh} t,\ z = at,\ t \in \boldsymbol{R}$,

3) $x = t \cos t,\ y = t \sin t,\ z = t^2/2,\ t \in \boldsymbol{R}$,

luînd ca origine punctul în care curba intersectează planul xOy.

Să se găsească elementele lui Frenet $\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}, k, \tau$ în punctul unde curba intersectează planul xOy.

R: 1) $s = \frac{1}{2}[t\sqrt{1+t^2} + \ln(t + \sqrt{1+t^2})]$; $\vec{T} = \vec{j}$, $\vec{N} = \frac{-1}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{k}$,

$\vec{B} = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{k}$; $k = \sqrt{2}$, $\tau = 0$.

2) $s = a\sqrt{2} \operatorname{sh} t$; $\vec{T} = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{k}$, $\vec{B} = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j} - \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{k}$, $\vec{N} = \vec{i}$; $k = \tau = \frac{1}{2a}$.

3) $s = (1/2\sqrt{2})\,[t\sqrt{2(1+2t^2)} + \ln(t\sqrt{2} + \sqrt{1+2t^2})]$; $\vec{T} = \vec{i}$, $\vec{B} = \frac{-1}{\sqrt{5}}\vec{j} +$

$+\frac{2}{\sqrt{5}}\vec{k}$, $\vec{N} = \frac{2}{\sqrt{5}}\vec{j} + \frac{1}{\sqrt{5}}\vec{k}$; $k = \sqrt{5}$; $\tau = 0$.

40. Fie curba $\alpha: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}^3$, $\alpha(t) = (2t - 1, t^3, 1 - t^2)$.

1) Să se determine curbura și torsiunea curbei în punctul $(-1, 0, 1)$, ecuațiile muchiilor și fețelor triedrului lui Frenet atașat curbei în acest punct.

2) Să se determine punctele curbei în care planul osculator este perpendicular pe planul $7x - 12y + 5z - 6 = 0$.

R: 1) $k = 1/2$, $\tau = \frac{3}{2}$; tangenta: $y = 0$, $z - 1 = 0$;

binormala: $x + 1 = 0$, $z - 1 = 0$; normala principală: $y = 0$, $x + 1 = 0$;

planul normal: $x + 1 = 0$; planul osculator: $y = 0$; planul rectificant: $z - 1 = 0$.

2) Pentru $t_1 = -2$ se obține punctul $(-5, -8, -3)$, iar pentru $t_2 = 4/7$ se obține punctul $(1/7, 64/343, 33/49)$.

41. Se numește curbă Țițeica, curba pentru care $\frac{1}{\tau} d^2 = \text{const.}$, unde τ este torsiunea în punctul curent, iar d este distanța de la un punct fix la planul osculator al curbei.

Să se arate că $C: xyz = 1,\ y^2 = x$ este o curbă Țițeica.

R: Luînd punctul fix $(0, 0, 0)$, avem $\frac{1}{\tau} d^2 = \frac{10}{3}$.

42. Fie I un interval, fie $\vec{\alpha}(t)$ vectorul de poziție al unui punct în mișcare și $\vec{\alpha}'(t)$ vectorul viteză. Să se determine:

1) Condiția ca cei doi vectori să fie perpendiculari,

2) Condiția ca cei doi vectori să fie coliniari.

Soluție. 1) Se știe că $\vec{\alpha}(t) = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j} + z(t)\,\vec{k}$ și $\vec{\alpha}'(t) = x'(t)\,\vec{i} + y'(t)\,\vec{j} + z'(t)\,\vec{k}$.

Condiția de perpendicularitate a celor doi vectori,

$$(\vec{\alpha}, \vec{\alpha}') = 0, \text{ implică } 1/2\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{\alpha}, \vec{\alpha}) = 0, \text{ adică } 1/2\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x^2 + y^2 + z^2) = 0,$$

$$\text{deci } x^2 + y^2 + z^2 = k.$$

În acest caz, punctul se mișcă pe o sferă.

2) Coliniaritatea celor doi vectori, $\vec{\alpha}' = \lambda\vec{\alpha}$ conduce la $\frac{x'}{x} = \frac{y'}{y} = \frac{z'}{z} = \lambda(t)$. Integrînd, se obține $\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma} = e^{\int\lambda(t)\,\mathrm{d}t}$, deci punctul se mișcă pe o dreaptă.

43. Să se arate că torsiunea și curbura unei curbe în spațiu sînt invariante față de o rototranslație.

Soluție. Fie $\vec{\alpha} = \vec{\alpha}(t)$ ecuația vectorială a curbei în reperul cartezian $Oxyz$ și $\vec{\alpha}_1 = \vec{\alpha}_1(t)$, ecuația ei în reperul $O_1x_1y_1z_1$. Deoarece $\vec{\alpha} = \overrightarrow{OO_1} + \vec{\alpha}_1$ și $\overrightarrow{OO_1}$ este un vector constant care definește translația din O în O_1, $\frac{\mathrm{d}^k\vec{\alpha}}{\mathrm{d}t^k} = \frac{\mathrm{d}^k\vec{\alpha}_1}{\mathrm{d}t^k}$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ În expresia curburii și torsiunii intră derivatele lui $\vec{\alpha}$ pînă la ordinul trei inclusiv, deci curbura și torsiunea rămîn invariante față de o rototranslație.

44. Să se determine funcția $t \to \mathrm{f}(t)$ astfel încît curba

1) $x = t^2$, $y = -\ln t$, $z = \mathrm{f}(t)$, $t > 0$;

2) $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = f(t)$, $t \in \boldsymbol{R}$, să fie plană. Să se determine curbura curbei în punctul în care aceasta taie planul xOz.

Indicație. Se pune condiția $\tau = 0$.

1) $\mathrm{f}(t) = C_1t^2 + C_2\ln t + C_3$. Pentru $y = 0$ se obține $t = 1$.

$$k(1) = \frac{4(C_1^2 + C_2^2 + 1)^{1/2}}{(5 + 4C_1^2 + C_2^2 + 4C_1C_2)^{3/2}}.$$

2) $\mathrm{f}(t) = C_1\cos t + C_2\sin t + C_3$. Pentru $y = 0$ se obține $t = 0$.

$$k(0) = \frac{a(C_1^2 + C_2^2 + a^2)^{1/2}}{(a^2 + C_2^2)^{3/2}}.$$

45. Fie curbele $x = z = \frac{\cos t}{\sqrt{1 + \cos^2 t}}$, $y = \frac{\sin t}{\sqrt{1 + \cos^2 t}}$, $t \in \boldsymbol{R}$, și $x = \sqrt{-\cos 2\theta}$, $y = z = \cos\theta$, $\theta \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$.

Să se arate că:

1) sînt situate pe aceeași sferă; să se determine ecuațiile carteziene,

2) se întîlnesc în două puncte.

R: 1) Ambele sînt situate pe sfera cu centrul în origine şi raza egală cu unitatea.

$$C_1 = \{(x, y, z) \mid (x, y, z) \in \boldsymbol{R}^3,\ x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ x - z = 0\},$$

$$C_2 = \{(x, y, z) \mid (x, y, z) \in \boldsymbol{R}^3,\ x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ y - z = 0\},$$

2) $x = y = z = \pm \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

46. O curbă C cu proprietatea că pe normala principală în punctul M se găseşte un punct M_1, care descrie o curbă C_1, a cărui normală principală este tot dreapta MM_1 se numeşte curbă *Bertrand*.

Să se arate că:

1) distanţa MM_1 este constantă,

2) tangentele în M şi M_1 la cele două arce fac un unghi const.,

3) dacă între curba şi torsiunea unei curbe există o relaţie de forma $ak + b\tau + c = 0$, a, b, c constante, $c \neq 0$, curba este *Bertrand*.

47. Se consideră curba $C = \{(x, y, z) \mid (x, y, z) \in \boldsymbol{R}^3,\ \mathrm{f}(x, y, z) = x^2 + y^2 = r^2,\ \mathrm{g}\,(x, y, z) = y^2 + z^2 = r^2\}$ şi pe ea punctul $\left(\dfrac{r\sqrt{2}}{2}, \dfrac{r\sqrt{2}}{2}, \dfrac{r\sqrt{2}}{2}\right)$.

Să se determine tangenta, planul normal şi planul osculator al curbei, curbura şi torsiunea curbei în acest punct.

Indicaţie. Curba este intersecţia a doi cilindri. Punctul dat este un punct regulat al curbei, deoarece în acest punct, rangul matricei

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial \mathrm{f}}{\partial x} & \dfrac{\partial \mathrm{f}}{\partial y} & \dfrac{\partial \mathrm{f}}{\partial z} \\ \dfrac{\partial \mathrm{g}}{\partial x} & \dfrac{\partial \mathrm{g}}{\partial y} & \dfrac{\partial \mathrm{g}}{\partial z} \end{bmatrix} \text{ este doi.}$$

Tangenta, $x - \dfrac{r\sqrt{2}}{2} = -\left(y - \dfrac{r\sqrt{2}}{2}\right) = z - \dfrac{r\sqrt{2}}{2}$.

Planul normal, $x - y + z - \dfrac{r\sqrt{2}}{2} = 0$.

Considerăm pe y şi z ca funcţii implicite de x, definite prin ecuaţiile $x^2 + y^2 = r^2$, $y^2 + z^2 = r^2$.

În punctul dat, $x' = 1$, $y' = -1$, $z' = 1$, $x'' = 0$, $y'' = -\dfrac{4}{r\sqrt{2}}$, $z'' = 0$.

Planul osculator este $x - z = 0$.

$k = \dfrac{4}{3\sqrt{3}\,a}$, $\tau = 0$. În vecinătatea punctului dat curba se comportă ca o curbă plană.

48. Fie $C = \mathrm{f}^{-1}(c) \cap \mathrm{g}^{-1}(d)$ o curbă în $\boldsymbol{R}^3$ şi $\vec{X} = \nabla \mathrm{f} \times \nabla \mathrm{g}$. Să se verifice că restricţia lui $\vec{X}$ la C este un cîmp vectorial tangent la C. În ce condiţii există o parametrizare globală $\alpha\colon I \to C$?

3.1. Fie $\boldsymbol{D}$ o mulțime deschisă din $\boldsymbol{R}^2$. O funcție diferențiabilă regulată și injectivă $\mathrm{r}: \boldsymbol{D} \to \boldsymbol{R}^3$ se numește *hartă (de coordonate)*. Dacă $\mathrm{r}^{-1}: \mathrm{r}(\boldsymbol{D}) \to \boldsymbol{D}$ este continuă, atunci harta se numește *proprie*.

O hartă mai poate fi dată și prin funcția $\vec{r} = \mathcal{J}_0 \circ \mathrm{r}: \boldsymbol{D} \to T_0\boldsymbol{R}^3$, $\mathcal{J}_0$ este izomorfismul canonic dintre $\boldsymbol{R}^3$ și $T_0\boldsymbol{R}^3$.

3.2. O submulțime M a lui $\boldsymbol{R}^3$ se numește *suprafață* dacă pentru fiecare punct $P \in M$ există o hartă proprie în M a cărei imagine să conțină o vecinătate a lui P din M.

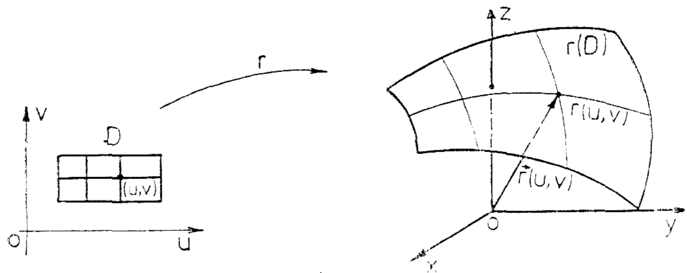


Fig. 3.34

Imaginea $\mathrm{r}(\boldsymbol{D})$ a unei hărți proprii se numește *suprafață simplă* (fig. 3.34). De asemenea suprafețele date prin ecuația carteziană explicită $z = \mathrm{f}(x, y)$, unde $(x, y) \to \mathrm{f}(x, y)$ este o funcție diferențiabilă, sînt simple deoarece pot fi reprezentate printr-o *hartă Monge*

$$\mathrm{r}: \boldsymbol{D} \to \boldsymbol{R}^3, \ \mathrm{r}(u, v) = (u, v, \mathrm{f}(u, v)),$$

care este o hartă proprie.

3.3 Suprafețele mai pot fi introduse și pornind de la funcții diferențiabile de tipul $\mathrm{f}: \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}$. În acest sens mulțimea

$$M = \mathrm{f}^{-1}(c) = \{(x, y, z) \mid (x, y, z) \in \boldsymbol{R}^3, \ \mathrm{f}(x, y, z) = c, \ c = \text{fixat}\}$$

se numește *mulțimea de nivel constant* c sau *mulțimea de ecuație carteziană implicită* $\mathrm{f}(x, y, z) = c$. Pe scurt se scrie $M: \mathrm{f}(x, y, z) = c$.

Dacă f este un polinom de gradul n, atunci M se numește *mulțime algebrică de ordinul* n.

Dacă M este nevidă și dacă funcția f este regulată în punctele lui M, atunci M este o suprafață în sensul definiției 3.2.

3.4. O funcție diferențiabilă și regulată $\mathrm{r}: \boldsymbol{D} \to \boldsymbol{R}^3$ a cărei imagine se află într-o suprafață M se numește *parametrizare* a regiunii $\mathrm{r}(\boldsymbol{D})$ din M.

Fie parametrizarea $\mathrm{r}(u, v) = (x(u, v), \ y(u, v), \ z(u, v))$, $(u, v) \in \boldsymbol{D}$, sau echivalent, $\vec{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, $(u, v) \in \boldsymbol{D}$. Variabilele u și v se numesc *parametrii*. Vectorii $\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial u} = \left(\dfrac{\partial x}{\partial u}, \dfrac{\partial y}{\partial u}, \dfrac{\partial z}{\partial u}\right)$, $\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \left(\dfrac{\partial x}{\partial v}, \dfrac{\partial y}{\partial v}, \dfrac{\partial z}{\partial v}\right)$, avînd prin convenție originea în punctul $\mathrm{r}(u, v)$, se notează cu $\vec{r}_u$, $\vec{r}_v$ și se numesc *vitezele parțiale ale aplicației* r.

Regularitatea lui r este echivalentă cu $\vec{r}_u \times \vec{r}_v \neq \vec{0}$.

3.5. Suprafața M se numește

1) *riglată*, dacă poate fi generată prin mișcarea unei drepte care se sprijină pe o curbă (suprafețe cilindrice, conice, conoide etc.).

2) *de rotație*, dacă poate fi generată prin rotația unei curbe în jurul unei drepte fixe.

3.6. Fie M o suprafață și $f: M \to \boldsymbol{R}$ o funcție reală. Dacă $r: \boldsymbol{D} \to M$ este o hartă, atunci $f \circ r: \boldsymbol{D} \to \boldsymbol{R}$ se numește *expresia lui* f *în coordonate*. Dacă $f \circ r$ este diferențiabilă în sens obișnuit, oricare ar fi r, atunci f se numește *diferențiabilă*.

Fie $F: \boldsymbol{R}^n \to M$, unde M este o suprafață. O hartă r în M dă o *expresie în coordonate* $r^{-1} \circ F$ pentru F. Dacă $r^{-1} \circ F$ este diferențiabilă în sens obișnuit, oricare ar fi r, atunci F se numește *diferențiabilă*. O funcție diferențiabilă de tipul $\alpha: \boldsymbol{R} \to M$ se numește *curbă* în M.

Fie M și N două suprafețe, r_1 o hartă în M și r_2 o hartă în N. O funcție $F: M \to N$ se numește *diferențiabilă* dacă funcția compusă $r_2^{-1} \circ F \circ r_1$ este diferențiabilă în sens obișnuit, oricare ar fi r_1 și r_2.

3.7. Fie M o suprafață și P un punct oarecare din ea. Un vector tangent la $\boldsymbol{R}^3$ în P se numește *tangent la M în P* dacă este vectorul viteză al unei curbe oarecare din M ce trece prin P.

Mulțimea tuturor vectorilor tangenți la M în punctul P se numește *planul tangent* al lui M în P și se notează cu T_PM. Direcția normală la T_PM este dată de $Z(u_0, v_0) = \vec{r}_{u_0} \times \vec{r}_{v_0}$ sau de $(\nabla f)(P)$, după cum este dată suprafața. Imaginea lui T_PM în $\boldsymbol{R}^3$ are ecuația

$$(\vec{r} - \vec{r}(u_0, v_0), \vec{r}_{u_0} \times \vec{r}_{v_0}) = 0, \text{ unde } \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},$$

sau

$$(x - x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) + (y - y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) + (z - z_0)\frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = 0.$$

Dreapta ce trece prin P și este perpendiculară pe planul tangent se numește *normala suprafeței*.

3.8. Un cîmp vectorial euclidian $\vec{Y}$ definit pe suprafața M se numește *cîmp vectorial tangent* la M dacă vectorul $\vec{Y}(P)$ este tangent la M pentru fiecare punct $P \in M$.

Un cîmp vectorial euclidian $\vec{Z}$ definit pe suprafața M se numește *cîmp normal* pe M dacă fiecare vector $\vec{Z}(P)$, $\forall P \in M$, este normal la M.

3.9. O suprafață M se numește *conexă* dacă, $\forall P, Q \in M$, există un segment de curbă $\alpha: [a, b] \to M$, cel puțin continuă, astfel încît $\alpha(a) = P$ și $\alpha(b) = Q$, adică imaginea $\alpha([a, b]) \subset M$ unește punctele P și Q.

Fie M și N două suprafețe. Dacă M este conexă, iar $F: M \to N$ este o aplicație surjectivă și diferențiabilă, atunci N este conexă. În particular, dacă $\boldsymbol{D}$ este o mulțime deschisă și conexă din plan, iar $r: \boldsymbol{D} \to \boldsymbol{M}$ este o parametrizare, atunci $r(\boldsymbol{D}) \subset M$ este conexă.

3.10. O suprafață M se numește *simplu conexă* dacă orice curbă închisă de pe M poate fi deformată prin continuitate (fără a ieși din M) astfel încît să se reducă la un punct.

3.11. O suprafață M se numește *compactă* dacă poate fi acoperită prin imaginile unui număr finit de funcții diferențiale de tipul $r : \boldsymbol{D}_0 \to \mathbf{M}$, unde $\boldsymbol{D}_0$ este un dreptunghi închis. Fiind o submulțime a lui $\boldsymbol{R}^3$, o suprafață este compactă dacă și numai dacă este închisă și mărginită.

O suprafață de nivel M: $f(x, y, z) = c$ este închisă deoarece $M = f^{-1}(c)$, mulțimea $\{c\}$ este închisă în $\boldsymbol{R}$, iar f este o funcție continuă. Astfel o suprafață de nivel este compactă dacă și numai dacă este mărginită în $\boldsymbol{R}^3$.

3.12. O suprafață M se numește *orientabilă* dacă posedă un cîmp vectorial normal care nu se anulează în nici un punct al lui M.

Se știe că:

— suprafețele simple sînt orientabile,

— orice suprafață de nivel $\mathbf{M} = f^{-1}(c)$ (nu posedă puncte critice ale lui f !) este orientabilă,

— orice suprafață conexă și simplu conexă este orientabilă,

— orice suprafață conexă și compactă este orientabilă,

— orice punct al unei suprafețe neorientabile este cuprins într-o regiune conexă și orientabilă; etc.

Un *cîmp vectorial normal unitar* pe suprafața orientabilă M se numește *orientare* pe M. Orice suprafață conexă și orientabilă admite exact două orientări. O suprafață orientabilă împreună cu o alegere a unei orientări se numește *suprafață orientată.*

3.13. Fie M o suprafață (sau o porțiune de suprafață) conexă și $\vec{v}$ un vector tangent la M în P. Dacă $\vec{U}$ înseamnă *cîmpul normal unitar* într-o vecinătate a lui P, atunci funcția liniară S_P: $T_PM \to T_PM$ definită prin

$$S_P(\vec{v}) = - D_{\vec{v}}\vec{U}$$

se numește *aplicația lui Weingarten* a lui M în punctul P.

Aplicația lui Weingarten este un *operator simetric,* adică $(S_P(\vec{v}), \vec{w}) = (\vec{v}, S_P(\vec{w}))$, $\forall \vec{v}, \vec{w} \in T_PM$.

3.14. Fie $\vec{u}$ un versor tangent la M în P. Numărul

$$k_n(\vec{u}) = (S_P(\vec{u}), \vec{u})$$

se numește *curbura normală* a lui M în direcția $\vec{u}$.

Funcția $\vec{u} \to k_n(\vec{u})$, $||\vec{u}|| = 1$, este o formă pătratică. Valorile $k_1 = \max\limits_{\vec{u}} k_n(\vec{u})$, $k_2 = \min\limits_{\vec{u}} k_n(\vec{u})$ se numesc *curburi principale,* iar direcțiile pe care se găsesc aceste valori extreme se numesc *direcții principale.* Evident, curburile principale sînt valorile proprii ale lui S_P, iar direcțiile principale sînt versorii proprii ai lui S_P.

Punctele lui M în care $k_1 = k_2$ se numesc *puncte ombilicale.*

Cuadrica $2z = k_1(P)\, x^2 + k_2(P)\, y^2$ se numește *aproximarea pătratică* a lui M în vecinătatea punctului P.

3.15. Funcția $\mathrm{K} = \det S$: $M \to \mathbf{R}$ se numește *curbura lui Gauss* a lui M, iar funcția $\mathrm{H} = 1/2$ urma S: $M \to \mathbf{R}$ se numește *curbura medie* a lui M.

Avem $\mathrm{K} = k_1k_2$, $\mathrm{H} = \dfrac{k_1 + k_2}{2}$ sau $k_{1,2} = \mathrm{H} \pm \sqrt{\mathrm{H}^2 - \mathrm{K}}$.

O suprafață pentru care $K = \text{const.}$ se numește *suprafață cu curbură constantă*. În particular suprafețele pentru care $K = 0$ se mai numesc și local euclidiene.

O suprafață pentru care $H = 0$ se numește *suprafață minimală*.

3.16. Dacă M este dată printr-o hartă $r: \boldsymbol{D} \to \boldsymbol{R}^3$, $r(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, atunci avem următoarele formule de calcul:

1) *prima formă fundamentală (metrica)*

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2,\ E = (\vec{r}_u, \vec{r}_u),\ F = (\vec{r}_u, \vec{r}_v),\ G = (\vec{r}_v, \vec{r}_v)$$

2) *a doua formă fundamentală*

$$d\varphi^2 = l\,du^2 + 2m\,du\,dv + n\,dv^2$$

$$l = (\vec{U}, \vec{r}_{uu}),\ m = (\vec{U}, \vec{r}_{uv}),\ n = (\vec{U}, \vec{r}_{vv}),\ \vec{U} = \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|};$$

3) *curbura lui Gauss* $K(r) = \dfrac{ln - m^2}{EG - F^2}$;

4) *curbura medie* $H(r) = \dfrac{Gl - 2Fm + En}{2(EG - F^2)}$.

3.17. *Curbe speciale pe o suprafață.*

1) O curbă regulată α de pe suprafața M se numește *curbă principală* sau *linie de curbură* dacă viteza sa $\vec{\alpha}'$ determină în fiecare punct al curbei o direcție principală.

Fie α o curbă regulată din M și $\vec{U}$ restricția cîmpului normal unitar la α. Curba α este principală dacă și numai dacă $\vec{\alpha}'$ și $\vec{U}'$ sînt coliniari în fiecare punct.

2) Direcțiile tangente la M pe care curbura normală este zero se numesc *direcții asimptotice*. O curbă regulată α din M se numește *curbă asimptotică* dacă viteza sa $\vec{\alpha}'$ dă în fiecare punct o direcție asimptotică.

Fie α o curbă regulată din M și $\vec{U}$ restricția cîmpului normal unitar la α. Curba α este asimptotică dacă și numai dacă $\vec{\alpha}'$ și $\vec{U}'$ sînt ortogonali sau dacă și numai dacă $\vec{\alpha}''$ este tangentă la M.

3) O curbă α din M se numește *geodezică* a lui M dacă accelerația sa $\vec{\alpha}''$ este normală la M.

3.18. Fie σ o porțiune dintr-o suprafață M reprezentată de imaginea funcției $r: \boldsymbol{D}_0 \to \mathbf{M}$, adică $\sigma = r(\boldsymbol{D}_0)$, unde $\boldsymbol{D}_0$ este un dreptunghi închis, iar $r: \text{int. } \boldsymbol{D}_0 \to M$ este o hartă. Aria lui σ este dată de

$$A = \iint_\sigma d\sigma = \iint_{\boldsymbol{D}_0} \sqrt{EG - F^2}\,du\,dv.$$

Exerciții și probleme

1. Fie $\boldsymbol{D}: -\pi < u < \pi,\ 0 < v < 1$ și $r: \boldsymbol{D} \to \boldsymbol{R}^3$, funcția definită prin $r(u, v) = (\sin u, \sin 2u, v)$.

Să se arate că r este o hartă, dar $M = r(\boldsymbol{D})$ nu este o suprafață în sensul definiției 3.2.

Soluție. r este diferențiabilă, deoarece funcțiile sale coordonate sînt diferențiabile. Matricea Jacobian,

$$\mathrm{J}(\mathrm{r}) = \begin{bmatrix} \cos u & 0 \\ 2\cos 2u & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ are rangul doi pentru orice}$$

$(u, v) \in \boldsymbol{D}$, deci r este regulată.

Din $\mathrm{r}(u_1, v_1) = \mathrm{r}(u_2, v_2)$ avem

$(\sin u_1, \sin 2u_1, v_1) = (\sin u_2, \sin 2u_2, v_2)$, adică $u_1 = u_2$, $v_1 = v_2$, deci $(u_1, v_1) = (u_2, v_2)$. Rezultă că r este injectivă.

Deoarece r este diferențiabilă, regulată, injectivă, ea este o hartă.

Pentru ca $\mathrm{r}(\boldsymbol{D})$ să fie suprafață este necesar ca harta r să fie proprie, adică $\mathrm{r}^{-1}: \mathrm{r}(\boldsymbol{D}) \to \boldsymbol{D}$ să fie continuă.

Fie $M = \mathrm{r}(\boldsymbol{D})$. Domeniul plan $\boldsymbol{D}$ se poate scrie,

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{D}_1 \cup \boldsymbol{D}_2 \cup \boldsymbol{D}_3, \text{ unde } \boldsymbol{D}_1 = \left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right) \times (0, 1),$$

$$\boldsymbol{D}_2 = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \times (0, 1),\ \boldsymbol{D}_3 = \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \times (0, 1) \text{ și } M = M_1 \cup M_2 \cup M_3,$$

unde $M_i = \mathrm{r}(\boldsymbol{D}_i)$, $i = 1, 2, 3$.

Aplicația r este inversabilă și,

$$\mathrm{r}^{-1}(x, y, z) = \begin{cases} (-\pi - \arcsin x, z), & (x, y, z) \in M_1 \\ (\arcsin x, z), & (x, y, z) \in M_2 \\ (\pi - \arcsin x, z) & (x, y, z) \in M_3. \end{cases}$$

Deoarece prima funcție coordonată nu este continuă, funcția r^{-1} nu este continuă și deci $\mathrm{r}(\boldsymbol{D})$ nu este o suprafață (fig. 3.35).

2. Fie $\mathrm{r}: (0, \infty) \times \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}^3$, $\mathrm{r}(u, v) = (u, u\cos v, u \sin v)$.

Să se arate că r este regulată. Să se găsească o funcție $\mathrm{f}: \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}$ astfel încît imaginea $\mathrm{r}((0, \infty) \times \boldsymbol{R})$ să fie suprafața $M: \mathrm{f}(x, y, z) = 0,\ x > 0$.

Indicație.

$$\mathrm{J}(\mathrm{r}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \cos v & -u\sin v \\ \sin v & u\cos v \end{bmatrix};\ \text{rang } \mathrm{J}(\mathrm{r}) = 2.$$

$\mathrm{f}(x, y, z) = x^2 - y^2 - z^2 \cdot M$ este un semicon.

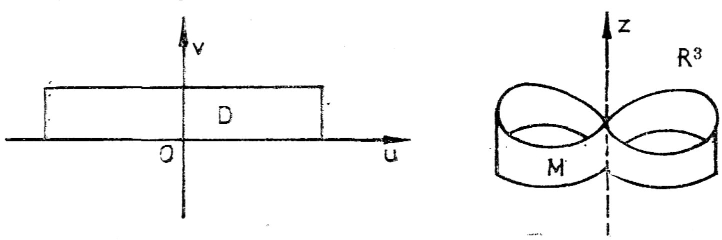


Fig. 3.35

3. Fie funcția r: $\boldsymbol{D} \to \boldsymbol{R}^3$, dată prin $r(u, v) = (\cos 2\pi u, \sin 2\pi u, v)$. Să se arate că r este o hartă proprie și că $r(\boldsymbol{D})$ este suprafața M: $x^2 + y^2 = 1$, $-1 < x < 1$, $y > 0$, $z \in \boldsymbol{R}$.

4. Să se arate că cilindrul $x^2 + y^2 = 1$ în $\boldsymbol{R}^3$, poate fi reprezentat ca o mulțime de nivel atașată la oricare dintre funcțiile

1) $f(x, y, z) = x^2 + y^2$.

2) $f(x, y, z) = -x^2 - y^2$

3) $f(x, y, z) = 2x^2 + 2y^2 + \sin(x^2 + y^2)$.

5. Fie sfera $M: x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ și harta în sferă

$$r(u, v) = (a \cos u \sin v,\ a \sin u \sin v,\ a \cos v),$$

$(u, v) \in (0, 2\pi) \times (0, \pi)$. Să se găsească expresiile în coordonate pentru următoarele funcții definite pe M:

1) $f(x, y, z) = x^2 + z^2$; 2) $f(x, y, z) = (y - z)^2 + x^2$.

R: 1) $f(r(u, v)) = a^2(\cos^2 u \sin^2 v + \cos^2 v)$;

2) $f(r(u, v)) = a^2(1 - 2 \sin u \sin v \cos v)$.

6. Fie $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ o funcție diferențiabilă care nu se reduce la o constantă. Să se determine f astfel încît toate planele tangente la suprafața $M: z = f(y/x)$, $x \neq 0$, să fie paralele cu cîmpul vectorial $\vec{X} = y\vec{i} - x\vec{j}$.

Soluție. Cîmpul vectorial normal la M are expresia $\vec{Z} = (f - uf')\vec{i} + f'\vec{j}$ unde $u = y/x$. Ipoteza $(\vec{Z}, \vec{X}) = 0$ este echivalentă cu ecuația diferențială $y(f - uf') = f'x$, adică $uf = f'(u + 1)$. Rezultă

$$f(u) = C\sqrt{1 + u^2} \text{ și deci } f(y/x) = C\sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}}.$$

7. Fie suprafața $M: z^2 = a^2 \operatorname{arc\,tg} \dfrac{y}{x} + f(x, y)$, unde f este o funcție diferențiabilă. Fie P un punct arbitrar al lui M, fie A proiecția lui P pe planul xOy, iar B punctul în care normala la M în P înțeapă planul xOy. Să se determine f astfel încît aria triunghiului OAB să fie constanta $\dfrac{a^2}{4}$, oricare ar fi $P \in M$.

Soluție. Fie $P(x, y, z)$. Rezultă $A(x, y, 0)$. Normala la M în P are ecuațiile

$$\frac{X - x}{\dfrac{\partial f}{\partial x} - \dfrac{a^2 y}{x^2 + y^2}} = \frac{Y - y}{\dfrac{\partial f}{\partial y} + \dfrac{a^2 x}{x^2 + y^2}} = \frac{Z - z}{-2z}.$$

Aceasta intersectează planul $Z = 0$ în punctul B de coordonate

$$X = x + 1/2\left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{a^2 y}{x^2 + y^2}\right),\quad Y = y + 1/2\left(\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{a^2 x}{x^2 + y^2}\right),\quad Z = 0.$$

Aria triunghiului OAB este valoarea absolută a expresiei

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x & y & 1 \\ x + 1/2\left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{a^2 y}{x^2+y^2}\right) & y + 1/2\left(\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{a^2 x}{x^2+y^2}\right) & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 1/2\left[1/2\left(x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x}\right) + \frac{a^2}{2}\right].$$

Dacă $1/2\left(x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x}\right) + \frac{a^2}{2} = \frac{a^2}{2}$ rezultă $x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x} = 0$. Ținînd seama de integralele prime ale sistemului $\frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x} = \frac{df}{0}$ rezultă $f(x, y) = f(x^2 + y^2)$.

Dacă $1/2\left(x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x}\right) + \frac{a^2}{2} = -\frac{a^2}{2}$ rezultă $x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x} + 2a^2 = 0$. Asociem sistemul simetric $\frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x} = \frac{df}{-2a^2}$. O integrală primă este $x^2+y^2 = C_1$ și deci $\frac{dy}{\sqrt{C_1^2 - y^2}} = \frac{df}{-2a^2}$. Rezultă $f(x, y) = -2a^2 \arcsin\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \varphi(x^2 + y^2)$, pentru $x \neq 0$, $y \neq 0$.

8. Se consideră funcția $r: \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^3$, $r(u, v) = (1 + uv,\ u + u^2 v,\ u^2 + u^3 v)$.

1) Să se arate că $r(\boldsymbol{R}^2)$ este o „suprafață" conică.

2) Să se găsească ecuația carteziană a lui $r(\boldsymbol{R}^2)$.

Soluție. 1) Ecuația vectorială a „suprafeței" este $\vec{r} = (1 + uv)\vec{i} + (u + u^2 v)\vec{j} + (u^2 + u^3 v)\vec{k}$. Ea se poate scrie în forma $\vec{r} = (1 + uv)(\vec{i} + u\vec{j} + u^2\vec{k})$. De aceea $r(\boldsymbol{R})^2$ este o „suprafață" conică.

2) Eliminînd parametrii u și v între cele trei ecuații date, se obține ecuația carteziană $y^2 = xz$.

9. Se consideră harta r definită prin $x = a(u + 1/v)$, $y = b(u - 1/v)$, $z = 2\frac{u}{v}$, $u \in \boldsymbol{R}$, $v \in \boldsymbol{R} - \{0\}$.

1) Să se arate că imaginea $r(\boldsymbol{R} \times (\boldsymbol{R} - \{0\}))$ este o suprafață dublu riglată.

2) Să se precizeze curbele coordonate ale suprafeței și ecuația carteziană implicită a suprafeței.

R: 1) $r(u, v) = \left(\frac{a}{v}, \frac{-b}{v}, 0\right) + u\left(a, b, \frac{2}{v}\right) = (au, bu, 0) + \frac{1}{v}(a, -b, 2u)$.

2) Curbele coordonate sînt drepte. Ecuația carteziană este $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$.

10. Fie suprafața descrisă de extremitatea vectorului $\vec{r} = (u^2 + v + 1)\vec{i} + (u^2 - v + 1)\vec{j} + (uv + 2)\vec{k}$, $(u, v) \in \boldsymbol{R}^2 - \{(0, 0)\}$ și punctul $M_0(u_0 = 1, v_0 = -1)$ de pe ea.

Să se determine: 1) Tangentele și planele normale în M_0, la curbele coordonate ce trec prin acest punct.

2) Unghiul curbelor coordonate ce trec prin M_0.

R: Pentru curba $u_0 = 1$, tangenta $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-3}{-1} = \dfrac{z-1}{1}$, planul normal, $x - y + z + 1 = 0$.

Pentru curba $v_0 = -1$, tangenta $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-3}{2} = \dfrac{z-1}{-1}$, planul normal, $2y + 2x - z - 7 = 0$.

2) $\cos\theta = \dfrac{-1}{3\sqrt{3}}$.

11. Fie imersia r definită prin $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = bv$, $(u, v) \in \boldsymbol{R}^2$ și trei curbe trasate pe $r(\boldsymbol{R}^2)$ reprezentate prin ecuațiile C_1: $v = 1$, C_2: $u = 1/2\, av^2$, C_3: $u = -1/2\, av^2$.

Să se determine lungimile laturilor și unghiurile triunghiului curbiliniu $M_1M_2M_3$, unde $M_1 = C_2 \cap C_3$, $M_2 = C_3 \cap C_1$, $M_3 = C_1 \cap C_2$.

R: $l(\overparen{M_1M_2}) = (7/6)\, a$, $l(\overparen{M_2M_3}) = a$, $l(\overparen{M_3M_1}) = (7/6)\, a$;

$$\theta_1 = 0,\ \theta_2 = \arccos(-2/3),\ \theta_3 = \arccos(2/3).$$

12. Fie imersia r definită prin $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = a\ln(u + \sqrt{u^2 - a^2})$, $a > 0$, $u \in [a, \infty)$, $v \in \boldsymbol{R}$. Să se determine curbele de pe suprafața $r([a, \infty) \times \boldsymbol{R})$ care intersectează curbele $v = v_0$ sub un unghi constant.

Indicație. Fie curbele

$$\vec{\alpha}(t) = (u(t)\cos v(t),\ u(t)\sin v(t),\ a\ln(u(t) + \sqrt{u^2(t) - a^2}))$$

$$\vec{\beta}(t) = (u(t)\cos v_0,\ u(t)\sin v_0,\ a\ln(u(t) + \sqrt{u^2(t) - a^2})).$$

Unghiul dintre ele este dat de relația

$$\cos\theta = \frac{(\vec{\alpha}'(t), \vec{\beta}'(t))}{\|\vec{\alpha}'(t)\|\,\|\vec{\beta}'(t)\|}.$$

$$\vec{\alpha}'(t) = \left(u'\cos v - uv'\sin v,\ u'\sin v + uv'\cos v,\ \frac{au'}{\sqrt{u^2 - a^2}}\right)$$

$$\vec{\beta}'(t) = \left(u'\cos v_0,\ u'\sin v_0,\ \frac{au'}{\sqrt{u^2 - a^2}}\right).$$

Se găsește $\cos\theta = \dfrac{u'}{\sqrt{u'^2 + (u^2 - a^2)v'^2}}$. Putem scrie $\dfrac{1}{\cos^2\theta} = 1 + (u^2 - a^2)\dfrac{v'^2}{u'^2}$, sau $\left(\dfrac{v'}{u'}\right)^2 = \dfrac{\operatorname{tg}^2\theta}{u^2 - a^2}$, adică $\dfrac{v'}{u'} = \pm\dfrac{\operatorname{tg}\theta}{\sqrt{u^2 - a^2}}$. Pentru θ constant, găsim soluția generală $v = \pm\operatorname{tg}\theta \ln c(u + \sqrt{u^2 - a^2})$, c = constant.

13. 1) Să se determine ecuația suprafeței conice cu vîrful $V(0, 1, 3)$ și curba directoare C: $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 3 = 0$, $z = 0$.

2) Să se determine ecuațiile parametrice ale curbei obținută intersectînd conul cu planul $z = 2$, ecuațiile tangentei și planului normal al curbei în punctul $A\left(\frac{1+\sqrt{7}}{3}, \frac{5}{3}, 2\right)$.

Soluție. 1) Generatoarea suprafeței conice face parte din familia de drepte $y - 1 = \lambda x$, $z - 3 = \mu x$. Punem condiția ca aceste drepte să se sprijine pe C, adică sistemul $y - 1 = \lambda x$, $z - 3 = \mu x$, $z = 0$, $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 3 = 0$ să fie compatibil. Eliminînd pe x, y, z găsim condiția de compatibilitate $9\lambda^2 - 2\mu^2 + 12\lambda\mu + 6\mu + 9 = 0$.

Înlocuind pe λ și μ găsim ecuația carteziană implicită a suprafeței conice, $9x^2 + 9y^2 - 2z^2 + 6xz + 12yz - 18x - 54y + 27 = 0$.

2) Intersecția conului cu planul $z = 2$ are ecuațiile carteziene: $9x^2 + 9y^2 - 2z^2 + 6xz + 12yz - 18x - 54y + 27 = 0$, $z = 2$.

Proiecția acestei curbe pe planul xOy este cercul $\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{3}\right)^2 = \frac{7}{9}$. Ecuațiile parametrice ale acestui cerc sînt

$$x = \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{7}}{3}\cos t, \quad y = \frac{5}{3} + \frac{\sqrt{7}}{3}\sin t, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Deci C: $x = \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{7}}{3}\cos t$, $y = \frac{5}{3} + \frac{\sqrt{7}}{3}\sin t$, $z = 2$.

Punctul A se obține pentru $t_0 = 0$. Tangenta la curbă în punctul A are ecuațiile $x = \frac{1+\sqrt{7}}{3}$, $z = 2$. Planul normal are ecuația $y = 5/3$.

14. Să se arate că suprafața M: $xy + yz + zx = 0$ este un con de rotație și să i se determine axa de rotație.

Soluție. $xy + zy + zx = \dfrac{(x + y + z)^2 - (x^2 + y^2 + z^2)}{2}$.

Deoarece ecuația suprafeței este de forma $F(x + y + z, x^2 + y^2 + z^2) = 0$, suprafața este de rotație.

Axa este o dreaptă perpendiculară pe planul de ecuație $x + y + z = 0$, deci are parametrii directori $(1, 1, 1)$. Suprafața M este con, deoarece pentru $z \neq 0$, ecuația ei poate fi scrisă sub forma

$$0 = \frac{x}{z} \cdot \frac{y}{z} + \frac{x}{z} + \frac{y}{z} = \psi\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right).$$

Vîrful se confundă cu originea. Axa de rotație trece prin vîrful conului. Ea are ecuațiile $x = y = z$.

15. Suprafața generată prin rotirea unui cerc în jurul unei axe conținută în planul cercului și exterioară lui, se numește *tor*.

Să se determine ecuația carteziană implicită a torului generat prin rotirea în jurul axei Oz a cercului din planul xOz, avînd centrul în $(3, 0, 0)$ și raza 1.

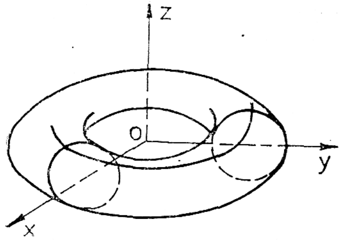


Fig. 3.36

Soluție. Ecuațiile cercului sînt $C: (x-3)^2 + z^2 = 1,\ y = 0$. Cercul generator al suprafeței are ecuațiile $x^2 + y^2 + z^2 = \lambda^2,\ z = \mu$, cu condiția ca sistemul $(x-3)^2 + z^2 = 1,\ y = 0,\ z = \mu,\ x^2 + y^2 + z^2 = \lambda^2$ să fie compatibil. Condiția de compatibilitate a acestui sistem este $(\sqrt{\lambda^2 - \mu^2} - 3)^2 + \mu^2 = 1$.

Eliminînd parametrii λ și μ obținem ecuația torului $(\sqrt{x^2 + y^2} - 3)^2 + z^2 = 1$ sau $(x^2 + y^2 + z^2 + 8)^2 = 36(x^2 + y^2)$, (fig. 3.36)

16. Fie M o suprafață orientată și fie $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ o bază pentru planul tangent T_pM. Să se arate că orientarea bazei $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ este coerentă cu orientarea $\vec{U}$ a lui M dacă și numai dacă este îndeplinită una dintre următoarele condiții:

1) $(\vec{U}(P), (\vec{u} \times \vec{v})) > 0$

2) $\dfrac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \boldsymbol{R}_\theta \left(\dfrac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} \right)$ pentru $0 < \theta < \pi$, unde $\boldsymbol{R}_\theta$ este rotația pozitivă de unghi θ în T_pM.

17. Să se construiască mulțimile de nivel $M = f^{-1}(c)$, pentru $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ și $c_1 = -1,\ c_2 = 0,\ c_3 = 1$.

Pentru fiecare din ele, să se cerceteze în care puncte spațiul tangent va fi $[\nabla f(P)]^{\perp}$.

Soluție. Se știe că mulțimea $M = f^{-1}(c)$ este o suprafață reprezentată prin ecuația carteziană implicită $f(x, y, z) = c$, dacă M nu este mulțimea vidă și dacă f este regulată în punctele lui M.

Pentru $c_1 = -1$, M_1: $x^2 + y^2 - z^2 = -1$, este un hiperboloid cu două pînze, avînd pe Oz ca axă transversă. Intersecțiile cu planele $x = 0$ și $y = 0$ sînt hiperbole echilatere cu Oz ca axă transversă.

Pentru $c_2 = 0$, M_2: $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, este un con cu vîrful în origine.

Pentru $c_3 = 1$, M_3: $x^2 + y^2 - z^2 = 1$, este un hiperboloid cu o pînză, avînd pe Oz ca axă netransversă.

Intersecția cu planele $x = 0$ și $y = 0$ sînt hiperbole echilatere, cu Oz ca axă netransversă (fig. 3.37). Fie $P(x, y, z)$, un punct al lui $\boldsymbol{R}^3$; $\nabla f(P) = (2x, 2y, -2z)$, $\nabla f(P) = \vec{0} \Rightarrow P \equiv O\ (0, 0, 0)$.

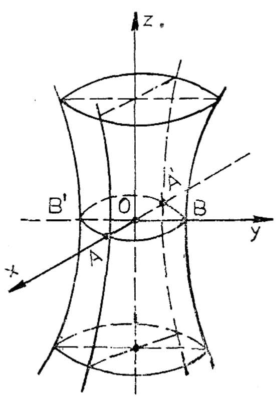


Fig. 3.37

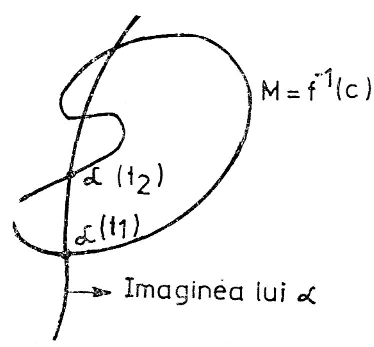


Fig. 3.38

Deoarece $0 \notin M_1$ și $0 \notin M_3$, rezultă că mulțimile caracterizate prin $f(x, y, z) = c_1$ și respectiv $f(x, y, z) = c_3$, sînt regulate în toate punctele lor, deci pentru ele, spațiul vectorial tangent este $[\nabla f(P)]^{\perp}$.

Pentru conul $f(x, y, z) = c_2$, originea este singurul punct neregulat, deci pentru această suprafață, spațiul vectorial tangent este $[\nabla f(P)]^{\perp}$, pentru orice $P \neq 0$.

18. Fie $M = f^{-1}(c)$, unde $f: \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}$ este o funcție regulată. Presupunem că $\alpha: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}^3$ este o curbă care traversează pe M dar care nu este tangentă la M(adică $(\nabla f(\alpha'(t)), \vec{\alpha}'(t)) \neq 0$ pentru orice t, cu $\alpha(t) \in M$, (fig. 3.38).

1) Fie $\alpha(t_1)$ și $\alpha(t_2)$, $t_1 < t_2$, două puncte consecutive de intersecție ale curbei α cu M. Să se arate că dacă $\alpha(t) \notin M$ pentru $t_1 < t < t_2$, atunci $(\nabla f(\alpha(t_1)), \vec{\alpha}'(t_1)) > 0$, dacă și numai dacă $(\nabla f(\alpha(t_2)), \vec{\alpha}'(t_2)) < 0$.

2) Dacă M este compactă și $\lim\limits_{t \to -\infty} ||\vec{\alpha}(t)|| = \lim\limits_{t \to \infty} ||\vec{\alpha}(t)|| = \infty$, atunci α intersectează suprafața M într-un număr par de puncte.

19. *(Modelul riglat al benzii Möbius)* (fig. 3.39). Fie $I = \left\{ v \mid v \in \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4} \right) \right\}$, $r: \boldsymbol{R} \times I \to \boldsymbol{R}^3$, $r(u, v) = \left(\left(1 + v \cos\frac{u}{2}\right) \cos u, \left(1 + v \cos\frac{u}{2}\right) \sin u, v \sin\frac{u}{2} \right)$. Să se arate că: 1) $u \to r(u, v)$ sînt curbe periodice cu perioada 2π pentru $v = 0$ și 4π pentru $v \neq 0$; 2) $v \to r(u, v)$ sînt segmente de dreaptă cu mijlocul pe cercul unitate din planul xOy și care fac unghiul $\frac{u}{2}$ cu planul xOy. Să se verifice că r este o imersie, dar suprafața $r(\boldsymbol{R} \times I)$ nu este global orientabilă.

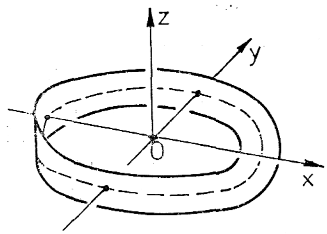


Fig. 3.39

Soluție. Pentru $v = 0$ găsim $\alpha(u) = r(u, 0) = (\cos u, \sin u, 0)$ și evident $\alpha(u) = \alpha(u + 2\pi)$, $\forall u \in \boldsymbol{R}$. Pentru $v \neq 0$ se constată că $\alpha(u) = r(u, v) = \alpha(u + 4\pi) = r(u + 4\pi, v)$, $\forall u \in \boldsymbol{R}$.

Fixînd pe u obținem ecuațiile unui segment de dreaptă, $x = \cos u + v \cos u \cos\frac{u}{2}$, $y = \sin u + v \sin u \cos\frac{u}{2}$, $z = v \sin\frac{u}{2}$, $v \in \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4} \right)$. Mijlocul acestui segment are coordonatele $(\cos u, \sin u, 0)$. Unghiul θ dintre segment și planul xOy este dat de

$$\sin\theta = \left(\cos u \cos\frac{u}{2} \vec{i} + \sin u \cos\frac{u}{2} \vec{j} + \sin\frac{u}{2} \vec{k}, \vec{k} \right) = \sin\frac{u}{2}, \text{ adică } \theta = \frac{u}{2}.$$

Fie $\vec{Z}$ cîmpul vectorial local normal la $r(\boldsymbol{R} \times I)$, adică $\vec{Z} = \vec{r}_u \times \vec{r}_v$. Deoarece $E = ||\vec{r}_u||^2 = \frac{v^2}{4} + \left(1 + v \cos\frac{u}{2}\right)^2$, $F = (\vec{r}_u, \vec{r}_v) = 0$, $G = ||\vec{r}_v||^2 = 1$

rezultă $\|\vec{Z}\| = EG - F^2 > 0$, adică r este o imersie. Pe de altă parte se observă că $\alpha(0, 0) = \alpha(2\pi, 0) = (1, 0,0) = \text{r}(0, 0) = \text{r}(2\pi, 0)$, dar

$$\vec{r}_u(0, 0) = \vec{j},\ \vec{r}_v(0, 0) = \vec{i},\ \vec{Z}(0, 0) = -\vec{k},$$

$$\vec{r}_u(2\pi, 0) = \vec{j},\ \vec{r}_v(2\pi, 0) = -\vec{i},\ \vec{Z}(2\pi, 0) = \vec{k},$$

adică $\vec{Z}$ nu este un cîmp vectorial normal global bine definit pe $\text{r}(\boldsymbol{R}\times I)$.

Banda lui Möbius nu este global orientabilă deoarece orice cîmp vectorial normal (diferențiabil) definit pe ea trebuie să se anuleze într-un punct și să-și schimbe sensul la trecerea prin acest punct (consecință a „răsucirii"). Fiind conexă, această suprafață are în mod necesar o singură față.

20. Să se arate că hiperboloidul cu o pînză, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=0$ este o suprafață conexă, iar hiperboloidul cu două pînze, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}+1=0$, nu este conex.

Indicație. Hiperboloidul cu o pînză este mulțimea valorilor funcției diferențiabile $x = a \operatorname{ch} u \cos v$, $y = b \operatorname{ch} u \sin v$, $z = c \operatorname{sh} u$, definită pe mulțimea conexă $\boldsymbol{R}^2$. Fiecare din pînzele hiperboloidului cu două pînze este suprafață conexă. Deoarece cele două pînze sînt mulțimi deschise și disjuncte, rezultă că hiperboloidul cu două pînze nu este conex.

21. Fie $\boldsymbol{D} \subset \boldsymbol{R}^2$ o mulțime deschisă și conexă, iar $\text{r}: \boldsymbol{D} \to \boldsymbol{R}^3$ o parametrizare. Să se arate că dacă normala la suprafața $\text{r}(\boldsymbol{D})$ are direcția fixă, atunci suprafața este o parte a unui plan.

Să se verifice acest rezultat pentru

1) $\text{r}: \boldsymbol{R}^2 - \{(0, 0)\} \to \boldsymbol{R}^3$, $\text{r}(u, v) = (u^2 + v^2, uv, (u + v)^2)$.

2) $\text{r}: \boldsymbol{R}^2 - \{(u, v)\,|\,u > 0,\ v > 0,\ u - v > 0,\ u - 3v < 0\} \to \boldsymbol{R}^3$,

$$\text{r}(u, v) = \left((u-v)^2,\ u^2 - 3v^2,\ \frac{v}{2}(u - 2v)\right).$$

Indicație. $\vec{U} = \text{const.} \Rightarrow d\vec{U} = \vec{0}$. 1) $\vec{U} = \frac{1}{\sqrt{6}}(\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k})$,

2) $\vec{U} = \frac{1}{3\sqrt{2}}(\vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k})$.

22. Se consideră suprafața M: $xyz - 1 = 0$.

1) Să se arate că este o suprafață Țițeica.

2) Să se determine ecuațiile carteziene ale curbelor coordonate ce trec prin punctul $P(u_0 = 1,\ v_0 = 2)$ și unghiul acestor curbe.

3) Să se arate că planul tangent la suprafață într-un punct arbitrar al acesteia formează cu planele de coordonate un tetraedru de volum constant.

4) Să se arate că M nu este conexă.

Soluție. 1) O suprafață pentru care $K/d^4 = \text{const.}$, unde K este curbura lui Gauss pe suprafață, iar d este distanța de la un punct fix la planul tangent într-un punct oarecare al suprafeței, se numește *suprafață Țițeica.*

Reprezentăm suprafața M prin ecuația vectorială $\vec{r} = u\vec{i} + v\vec{j} + (1/uv)\vec{k}$. Avem $\vec{r}_u = \vec{i} - (1/u^2v)\vec{k}$, $\vec{r}_v = \vec{j} - (1/uv^2)\vec{k}$, $\vec{r}_{uu} = (2/u^3v)\vec{k}$, $\vec{r}_{uv} = (1/u^2v^2)\vec{k}$, $\vec{r}_{vv} = (2/uv^3)\vec{k}$, $\vec{r}_u \times \vec{r}_v = (1/u^2v)\vec{i} + (1/uv^2)\vec{j} + \vec{k}$,

$$\vec{U} = \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|} = \frac{v\vec{i} + u\vec{j} + u^2v^2\vec{k}}{u^2v^2(1 + 1/u^2v^4 + 1/u^4v^2)^{1/2}},$$

$$l = (\vec{U}, \vec{r}_{uu}) = \frac{2}{u^3v(1 + 1/u^2v^4 + 1/u^4v^2)^{1/2}}, \quad m = (\vec{U}, \vec{r}_{uv}) =$$

$$= \frac{1}{u^2v^2(1 + 1/u^2v^4 + 1/u^4v^2)^{1/2}}, \quad n = (\vec{U}, \vec{r}_{vv}) =$$

$$= \frac{2}{uv^3(1 + 1/u^2v^4 + 1/u^4v^2)^{1/2}}, \quad E = 1 + 1/u^4v^2,$$

$$F = 1/u^3v^3, \quad G = 1 + 1/u^2v^4, \quad K = \frac{3}{u^4v^2(1 + 1/u^4v^2 + 1/u^2v^4)^2}.$$

Considerăm pe O (0, 0, 0) drept punct fix. Distanța de la origine la planul tangent într-un punct arbitrar al suprafeței este dată de,

$$d = |(\vec{r}, \vec{U})| = \frac{|(\vec{r}, \vec{r}_u \times \vec{r}_v)|}{\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|} = \frac{3}{|uv|\,(1 + 1/u^4v^2 + 1/u^2v^4)^{1/2}};$$

Găsim $K/d^4 = 1/27$, deci suprafața este Țițeica.

2) Curbele $u = u_0$ au ecuațiile parametrice $x = u_0$, $y = v$, $z = 1/u_0v$. Eliminînd parametrul v între aceste ecuații, găsim ecuațiile carteziene: $x = u_0$, $yz = 1/u_0$, care reprezintă hiperbole echilatere. Curbele $v = v_0$ au ecuațiile parametrice $x = u$, $y = v_0$, $z = 1/uv_0$ și ecuațiile carteziene $y = v_0$, $xz = 1/v_0$, deci sînt tot hiperbole echilatere. Unghiul curbelor coordonate care trec prin P este $\theta = \arccos 1/\sqrt{85}$.

3) Ecuația planului tangent la suprafață în punctul (x_0, y_0, z_0) este $xy_0 \cdot z_0 + yx_0z_0 + zx_0y_0 - 3 = 0$.

Volumul tetraedrului cu vîrfurile în O, $A(3/y_0z_0, 0, 0)$, $B(0, 3/x_0z_0, 0)$, $C(0, 0, 3/x_0y_0)$ este 9/2.

(4) Mulțimea $\boldsymbol{D}: xy \neq 0$ este deschisă în $\boldsymbol{R}^2$. Considerăm aplicația $r(x, y, z) = \left(x, y, \dfrac{1}{xy}\right): \boldsymbol{D} \to \boldsymbol{R}^3$.

Se verifică ușor că r este o hartă în M astfel ca $r(\boldsymbol{D}) = M$. Pe de altă parte se observă că $\boldsymbol{D}$ este reuniunea unor mulțimi deschise și disjuncte. Imaginile prin r ale acestor mulțimi vor fi disjuncte și deci M nu este conexă (reuniune de mulțimi disjuncte).

23. Fie paraboloidul hiperbolic $M: z = xy$.

1) Să se orienteze suprafața.

2) Să se calculeze curburile normale ale lui M în direcțiile axelor de coordonate Ox, Oy și în direcțiile bisectoarelor planului xOy.

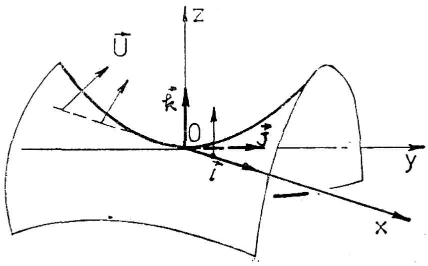


Fig. 3.40

3) Să se determine curburile principale și să se exprime aceste curburi cu ajutorul coordonatelor cilindrice.

Soluție. 1) Suprafața M este simplă (este dată prin ecuația carteziană explicită) și deci orientabilă. Alegem cîmpul normal unitar $\vec{U} = \dfrac{-y\vec{i} - x\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}$, adică fața superioară este cea pozitivă, iar fața inferioară este fața negativă (fig. 3.40).

2) Punctul $O(0, 0, 0)$ aparține suprafeței M și axele de coordonate Ox și Oy aparțin în întregime suprafeței. Versorii $\vec{i}$ și $\vec{j}$ sînt tangenți la M în O. Avem

$$S_O(\vec{i}) = -\mathrm{D}_{\vec{i}}\vec{U}(O) = -\left[D_{\vec{i}}\left(\frac{-y}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}\right)\vec{i} + \right.$$

$$\left. + \mathrm{D}_{\vec{i}}\left(\frac{-x}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}\right)\vec{j} + \mathrm{D}_{\vec{i}}\left(\frac{1}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}\right)\vec{k}\right] = \left(\frac{xy}{(1 + x^2 + y^2)^{2/3}}\vec{i} + \right.$$

$$\left. + \frac{1 + y^2}{(1 + x^2 + y^2)^{3/2}}\vec{j} + \frac{x}{(1 + x^2 + y^2)^{3/2}}\vec{k}\right)_O,$$

deci $S(\vec{i}) = \vec{j}$. Analog, $S(\vec{j}) = -\mathrm{D}_{\vec{j}}\vec{U} = \vec{i}$.

Rezultă $k_n(\vec{i}) = (S(\vec{i}), \vec{i}) = 0$, $k_n(\vec{j}) = (S(\vec{j}), \vec{j}) = 0$

Deducem $S(a\vec{i} + b\vec{j}) = b\vec{i} + a\vec{j}$, $\forall a, b$ constante.

Fie $\vec{u} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} + \vec{j})$ versorul director al primei bisectoare a planului xOy, care este tangent în O la M. Avem $k_n(\vec{u}) = (S(\vec{u}), \vec{u}) = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} + \vec{j}),\right.$ $\left.\dfrac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} + \vec{j})\right) = 1 > 0$.

Aceasta înseamnă că în direcția lui $\vec{u}$ suprafața M se încovoaie în sensul lui $\vec{U}$.

Fie $\vec{v} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} - \vec{j})$ versorul director al bisectoarei a doua a planului xOy care este tangent în O la M. Avem $k_n(\vec{v}) = (S(\vec{v}), \vec{v}) = -1 < 0$, adică în direcția lui $\vec{v}$ suprafața se încovoaie în sens opus sensului lui $\vec{U}$.

3) Suprafața M se poate reprezenta prin ecuația vectorială $\vec{r}(u, v) = u\vec{i} + v\vec{j} + uv\vec{k}$. Găsim $\vec{r}_u = (1, 0, v)$, $\vec{r}_v = (0, 1, u)$, $E = 1 + v^2$, $F = uv$, $G = 1 + u^2$, $\vec{U} = \dfrac{(-v, -u, 1)}{\sqrt{1 + u^2 + v^2}}$, $\vec{r}_{uu} = (0, 0, 0)$, $\vec{r}_{uv} = (0, 0, 1)$, $\vec{r}_{vv} = (0, 0, 0)$, $l = n = 0$, $m = \dfrac{1}{\sqrt{1 + u^2 + v^2}}$. Deci $\mathrm{K} = \dfrac{-1}{(1 + u^2 + v^2)^2}$, $\mathrm{H} = \dfrac{-uv}{(1 + u^2 + v^2)^{3/2}}$.

Raportînd spațiul la coordonatele cilindrice (ρ, θ, z) și ținînd seama că $x = \rho \cos\theta$, $y = \rho \sin\theta$, $z = z$ și $z = xy$, deducem

$$K = -\frac{1}{(1+\rho^2)^2}, \quad H = \frac{-z}{(1+\rho^2)^{3/2}}, \quad k_{1,2} = H \pm \sqrt{H^2 - K},$$

$$k_{1,2} = \frac{-z \pm \sqrt{1+\rho^2+z^2}}{(1+\rho^2)^{3/2}}.$$

24. Suprafața generată prin mișcarea unei drepte ce se sprijină pe o elice circulară, întîlnește axa Oz și este paralelă cu planul xOy se numește *elicoid cu plan director* sau *suprafață șurub*.

1) Să se găsească ecuația carteziană implicită a suprafeței.

2) Să se determine prima și a doua formă fundamentală pe suprafață.

3) Să se determine curbura lui Gauss și curbura medie.

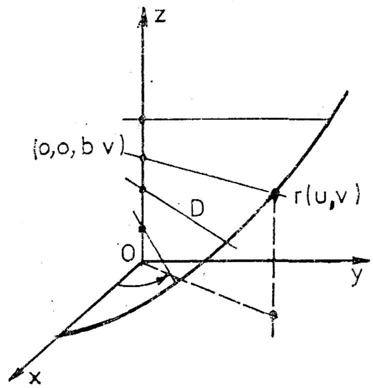


Fig. 3.41

Soluție. Suprafața este un conoid. Planul director este $z = 0$ și axa fixă, $x = 0$, $y = 0$. Ecuațiile generatoarei sînt D: $z = \lambda$, $y = \mu x$. Punem condiția ca această dreaptă să se sprijine pe elicea circulară de ecuații: $x = a\cos v$, $y = a \sin v$, $z = bv$, adică sistemul $z = \lambda$, $y = \mu x$, $x = a\cos v$, $y = a \sin v$, $z = bv$, să fie compatibil. Eliminînd pe x, y, z, v obținem condiția de compatibilitate, $\mu = \operatorname{tg}\frac{\lambda}{b}$. Eliminînd parametrii λ și μ între această relație și ecuațiile lui D, găsim ecuația carteziană $y - x\operatorname{tg}\frac{z}{b} = 0$.

2) Avem $z/b = v$ și notăm $\frac{y}{\sin v} = \frac{x}{\cos v} = u$. Astfel, suprafața șurub (fig. 3.41) apare ca imaginea imersiei r: $x = u\cos v$, $y = u \sin v$, $z = bv$, $b \neq 0$.

Reprezentăm suprafața prin ecuația vectorială $\vec{r} = u\cos v\vec{i} + u \sin v\vec{j} + bv\vec{k}$. Vitezele parțiale sînt $\vec{r}_u = \cos v\vec{i} + \sin v\vec{j}$, $\vec{r}_v = -u\sin v\vec{i} + u\cos v\vec{j} + b\vec{k}$, iar coeficienții primei forme fundamentale, $E = 1$, $F = 0$, $G = u^2 + b^2$. Deoarece $\vec{r}_u \times \vec{r}_v = (b\sin v, -b\cos v, u)$, $\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\| = \sqrt{EG - F^2} = \sqrt{b^2+u^2}$, $\vec{U} = \frac{\vec{r}_u\times\vec{r}_v}{\|\vec{r}_u\times\vec{r}_v\|} = \frac{(b\sin v, -b\cos v, u)}{\sqrt{b^2+u^2}}$.

Găsim de asemenea $\vec{r}_{uu} = \vec{0}$, $\vec{r}_{uv} = (-\sin v, \cos v, 0)$, $\vec{r}_{vv} = (-u\cos v, -u\sin v, 0)$, $l = 0$, $m = -\frac{b}{\sqrt{b^2+u^2}}$, $n = 0$.

Prima formă fundamentală, $ds^2 = du^2 + (u^2+b^2)\,dv^2$. A doua formă fundamentală, $d\varphi^2 = \frac{-2b}{\sqrt{b^2+u^2}}\,du\,dv$.

3) Curbura lui Gauss $K(r) = \frac{ln - m^2}{EG - F^2} = \frac{-b^2}{(b^2+u^2)^2}$.

Curbura medie, $H(r) = \dfrac{Gl - 2Fm + En}{2(EG - F^2)} = 0$.

Deci elicoidul este o suprafață minimală pentru care $-\dfrac{1}{b^2} \leqslant K < 0$.

25. Se consideră imersia r definită prin $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = bv$, $b \neq 0$, $(u, v) \in \boldsymbol{R}^2$.

1) Să se arate că r $(\boldsymbol{R}^2)$ este o suprafață riglată.

2) Să se găsească curbura normală și curburile principale.

Soluție. 1) Ecuația vectorială a suprafeței este $\vec{r} = u\cos v\vec{i} + u\sin v\vec{j} + bv\vec{k}$. Ea se poate scrie în forma $\vec{r} = u(\cos v\vec{i} + \sin v\vec{j}) + bv\vec{k}$, adică suprafața este riglată. Dacă v este fix, atunci extremitatea lui $\vec{r}$ descrie generatoarea suprafeței. Dacă u este fix, atunci extremitatea lui $\vec{r}$ descrie o elice pe suprafață.

2) $\vec{r} = u\cos v\vec{i} + u\sin v\vec{j} + bv\vec{k}$. Vectorii viteze parțiale sînt $\vec{r}_u = \cos v\vec{i} + \sin v\vec{j}$, $\vec{r}_v = -u\sin v\,\vec{i} + u\cos v\,\vec{j} + b\vec{k}$. Deoarece $(\vec{r}_u, \vec{r}_v) = 0$, adică $\vec{r}_u \perp \vec{r}_v$, putem alege drept bază ortonormată a planului tangent în punctul curent al suprafeței baza formată din vectorii $\vec{e}_1 = \dfrac{1}{\|\vec{r}_u\|}\vec{r}_u = \cos v\vec{i} + \sin v\vec{j}$, $\vec{e}_2 = \dfrac{1}{\|\vec{r}_v\|}\vec{r}_v = \dfrac{-u\sin v\vec{i} + u\cos v\vec{j} + b\vec{k}}{\sqrt{b^2 + u^2}}$. Orientăm suprafața alegînd $\vec{U} = \dfrac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|} = \dfrac{b\sin v}{\sqrt{b^2 + u^2}}\vec{i} - \dfrac{b\cos v}{\sqrt{b^2 + u^2}}\vec{j} + \dfrac{u}{\sqrt{b^2 + u^2}}\vec{k}$.

Avem $S(\vec{e}_1) = -\dfrac{d}{du}\vec{U} = \dfrac{bu\sin v}{(b^2 + u^2)^{3/2}}\vec{i} - \dfrac{bu\cos v}{(b^2 + u^2)^{3/2}}\vec{j} - \dfrac{b^2}{(b^2 + u^2)^{3/2}}\vec{k}$,

$$S(\vec{e}_2) = -\frac{1}{\|\vec{r}_v\|}\cdot\frac{d}{dv}\vec{U} = \frac{-b\cos v}{b^2 + u^2}\vec{i} - \frac{b\sin v}{b^2 + u^2}\vec{j}.$$

Găsim $S_{11} = (S(\vec{e}_1), \vec{e}_1) = 0$, $S_{22} = (S(\vec{e}_2), \vec{e}_2) = 0$, $S_{12} = (S(\vec{e}_1), \vec{e}_2) = (\vec{e}_1, S(\vec{e}_2)) = \dfrac{-b}{b^2 + u^2}$.

Fie $\vec{e} = \cos\theta\,\vec{e}_1 + \sin\theta\,\vec{e}_2$. Obținem $f(\theta) = k_n(\vec{e}(\theta)) = -\dfrac{b\sin 2\theta}{b^2 + u^2}$ și deci

$$-\frac{b}{b^2 + u^2} \leqslant k_n(\vec{e}(\theta)) \leqslant \frac{b}{b^2 + u^2}, \text{ adică}$$

$$k_1 = k_n\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{e}_1 - \vec{e}_2)\right) = \frac{b}{u^2 + b^2},$$

$$k_2 = k_n\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{e}_1 + \vec{e}_2)\right) = -\frac{b}{u^2 + b^2}.$$

26. Se consideră suprafețele $\Sigma_i (i = 1, 2, 3)$, date prin

$$r_1(u, v) = (u + v, u^2 + v^2, u^3 + v^3),\ (u, v) \in \boldsymbol{R}^2;$$

$$r_2(u, v) = (u^2, uv, au + v^2),\ (u, v) \in \boldsymbol{R}^2;$$

$$r_3(u, v) = \left(\frac{1 + u^2}{u}, \frac{1 + v^2}{v}, \frac{u^2 + v^2}{uv}\right),\ (u, v) \in (\boldsymbol{R} - \{0\})^2$$

Pentru fiecare din ele să se determine

1) Ecuația planului tangent și ecuațiile normalei în punctul $P(u_0 = 1, v_0 = 2)$.

2) Ecuația carteziană implicită.
3) Curbura lui Gauss și curbura medie în P,

Soluție. 1) Pentru Σ_1, avem $x_0 = 3$, $y_0 = 5$, $z_0 = 9$.

$x_{u_0} = 1$, $y_{u_0} = 2$, $z_{u_0} = 3$; $x_{v_0} = 1$, $y_{v_0} = 4$, $z_{v_0} = 12$.

Ecuația planului tangent este

$$\begin{vmatrix} x-3 & y-5 & z-9 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 12 \end{vmatrix} = 0, \text{ sau } 12x - 9y + 2z - 9 = 0.$$

Direcția normalei $(12, -9, 2)$. Ecuațiile normalei: $\frac{x-3}{12} = \frac{y-5}{-9} = \frac{z-9}{2}$.

Pentru Σ_2, găsim $x_0 = 1$, $y_0 = 2$, $z_0 = a + 4$; $x_{u_0} = 2$, $y_{u_0} = 2$, $z_{u_0} = a$; $x_{v_0} = 0$, $y_{v_0} = 1$, $z_{v_0} = 4$. Ecuația planului tangent este $(8 - a)x - 8y + 2z - a = 0$. Direcția normalei, $(8 - a, -8, 2)$. Ecuațiile normalei: $\frac{x-1}{8-a} = \frac{y-2}{-8} = \frac{z-a-4}{2}$.

Pentru Σ_3, obținem $x_0 = 2$, $y_0 = z_0 = 5/2$; $x_{u_0} = 0$, $y_{u_0} = 0$, $z_{u_0} = -3/2$; $x_{v_0} = 0$, $y_{v_0} = z_{v_0} = 3/4$.

Planul tangent: $x - 2 = 0$. Normala: $2y - 5 = 0$, $2z - 5 = 0$.

2) Pentru a obține ecuația carteziană implicită a suprafeței, trebuie să eliminăm parametrii u și v între cele trei ecuații parametrice.

Pentru Σ_1: $x^3 = u^3 + v^3 + 3uv(u + v)$, $x^2 - y = (u + v)^2 - (u^2 + v^2) = 2uv$, $uv = (x^2 - y)/2$. Înlocuind în prima relație obținem $x^3 - 3xy + 2z = 0$.

Pentru Σ_2 găsim $(xz - y^2)^2 - a^2x^3 = 0$; analog Σ_3: $xyz - x^2 - y^2 - z^2 + 4 = 0$.

3) Pentru Σ_1, $K(P) = \frac{-6^2}{229^2}$, $H(P) = \frac{-3 \cdot 147}{229^{3/2}}$.

Pentru Σ_2, $K(P) = \frac{-8a}{(a^2 - 16a + 132)^2}$, $H(P) = \frac{2a^2 + 15a + 168}{(a^2 - 16a + 132)^{3/2}}$.

Pentru Σ_3, $K(P) = 0$, deci în vecinătatea lui P, suprafața se comportă ca un plan; $H(P) = -\frac{4^2}{3^2}$.

27. Se consideră paraboloidul M: $2z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$.

Să se arate că dacă θ este unghiul pe care-l face normala într-un punct al lui M cu axa Oz, atunci $\frac{K}{\cos^4 \theta} = \text{const.}$

R: $\frac{K}{\cos^4 \theta} = \frac{1}{a^2b^2}$.

28. Să se arate că imaginea imersiei *(suprafața lui Enneper)* $r: \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^3$, $r(u, v) = \left(u - \frac{u^3}{3} + uv^2,\ v - \frac{v^3}{3} + u^2v,\ u^2 - v^2\right)$, este o suprafață minimală.

29. Fie $M = f^{-1}(1)$, unde $f(x, y, z) = -x^2 + y^2 + z^2$. Să se orienteze suprafața M. Să se determine curbura normală a suprafeței în punctul $P(0, 0, 1)$, în direcția $\vec{v}$, unde $\vec{v}$ este un vector unitar, $\vec{v} \in T_PM$. Cazuri particulare: 1) $\vec{v} = \vec{i} = (1, 0, 0)$; 2) $\vec{v} = \vec{j} = (0, 1, 0)$; 3) $\vec{v} = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$.

Soluție. Suprafața M este hiperboloidul cu o pînză, de ecuație carteziană implicită $-x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Deoarece $\nabla f = (-2x, 2y, 2z) \neq \vec{0}$ pe M, suprafața este orientabilă. O orientăm prin cîmpul normal unitar $\vec{U} = \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|} = \left(\frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)$.

Pentru $P = (0, 0, 1)$, orice vector unitar $\vec{v} \in T_P M$ este de forma $(v_1, v_2, 0)$, unde $v_1^2 + v_2^2 = 1$.

$S_P(\vec{v}) = -D_{\vec{v}}\vec{U}(P) = (v_1, -v_2, 0)$ și $k_n(\vec{v}) = v_1^2 - v_2^2$.

Cazuri particulare: 1) $k_n(\vec{i}) = 1$; 2) $k_n(\vec{j}) = -1$; 3) $k_n(\vec{v}) = 0$.

Observație: $k_1(\vec{i}) = 1$ și $k_2(\vec{j}) = -1$ sînt curburile principale ale lui M în P, deci $\vec{i}$ și $\vec{j}$ sînt direcțiile principale ale lui M în P. Într-adevăr, considerînd $S_P : T_P M \to T_P M$, curburile principale ale lui M în P sînt valorile proprii ale acestei aplicații liniare. Matricea aplicației lui Weingarten este $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ și din ecuația caracteristică:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \text{ rezultă } \lambda = \pm 1.$$

30. Fie $\alpha(u) = (x(u), y(u))$, unde $x(u) = \int_0^u \sqrt{1 - e^{-2t}}\, dt$, $y(u) = e^{-u}$, $u > 0$ și fie M suprafața de rotație obținută prin rotirea lui α în jurul axei Ox. Să se arate că:

1) α are viteză unu;

2) α are proprietatea ca pentru orice $u > 0$ segmentul dintre $\alpha(u)$ și axa Ox al tangentei la α în $\alpha(u)$ are lungimea constantă 1;

3) M are curbura lui Gauss $K = -1$.

Soluție. 1) Fie $\vec{\alpha}(u) = x(u)\vec{i} + y(u)\vec{j}$ și vectorul viteză de-a lungul curbei α, $\vec{\alpha}'(u) = \sqrt{1 - e^{-2u}}\,\vec{i} - e^{-u}\vec{j}$, $(\vec{\alpha}'(u))^2 = 1 \Rightarrow \|\vec{\alpha}'(u)\| = 1$.

2) Tangenta la curba α în punctul $\alpha(u)$ are ecuația $\frac{x - \int_0^u \sqrt{1 - e^{-2t}}\, dt}{\sqrt{1 - e^{-2u}}} = \frac{y - e^{-u}}{-e^{-u}}$. Punctul de intersecție al tangentei cu axa Ox are coordonatele $\left(\int_0^u \sqrt{1 - e^{-2t}}\, dt + \sqrt{1 - e^{-2u}},\ 0\right)$. Prin calcul direct se verifică că distanța dintre cele două puncte este 1.

3) Fie $r(u, v) = \left(\int_0^u \sqrt{1 - e^{-2t}}\, dt,\ e^{-u} \cos v,\ e^{-u} \sin v\right)$ parametrizarea lui M.

$$\vec{r}_u = (\sqrt{1 - e^{-2u}},\ -e^{-u} \cos v,\ -e^{-u} \sin v)$$

$$\vec{r}_v = (\ 0\ ,\ -e^{-u} \sin v,\ -e^{-u} \cos v)$$

$$\vec{r}_{uu} = \left(\frac{e^{-2u}}{\sqrt{1 - e^{-2u}}},\ e^{-u} \cos v,\ e^{-u} \sin v\right)$$

$\vec{r}_{uv} = (\ 0\ ,\ e^{-u}\sin v,\ -e^{-u}\cos v)$

$\vec{r}_{vv} = (\ 0\ ,\ -e^{-u}\cos v,\ -e^{-u}\sin v)$

$E = 1,\ F = 0,\ G = e^{-2u}.$

$$l = -\frac{e^{-u}}{\sqrt{1-e^{-2u}}},\ m = 0,\ n = e^{-u}\sqrt{1-e^{-2u}}$$

$$K(r) = \frac{ln - m^2}{EG - F^2} = -1.$$

Suprafața obținută mai sus se numește *pseudosferă* (fig. 3.42).

31. Fie suprafața $M = f^{-1}(1)$, unde $f(x, y, z) = x^2 + y^2$.

Să se arate că pentru orice $a, b, c, d \in \boldsymbol{R}$, curba $t \to \alpha(t) = (\cos(at + b), \sin(at+b), ct+d)$ este o geodezică pe M. Să se construiască geodezicele α pentru: 1) $a = 0$; 2) $c = 0$; 3) $a \neq 0,\ c \neq 0$.

Soluție. Cîmpul normal la suprafața M: $f(x, y, z) = 1$, $\vec{Z} = \nabla f = (2x, 2y, 0)$. În punctul $\alpha(t) \in M$, $\vec{Z}(\alpha(t)) = (2\cos(at + b),\ 2\sin(at + b),\ 0)$. Rezultă $\vec{\alpha}'(t) = (-a\sin(at + b),\ a\cos(at + b),\ c)$

$$\vec{\alpha}''(t) = (-a^2\cos(at + b),\ -a^2\sin(at + b),\ 0) = -a^2\vec{U}(\alpha(t)).$$

Deci $\vec{\alpha}''(t)$ are aceeași direcție cu normala la suprafață în $\alpha(t)$, adică α este geodezica pe M.

Geodezicele sînt: 1) $\alpha(t) = (\cos b,\ \sin b,\ ct + d)$, care reprezintă o generatoare a cilindrului;

2) $\alpha(t) = (\cos(at + b),\ \sin(at + b),\ d)$, care reprezintă cercul obținut la intersecția cilindrului cu planul $z = d$;

3) $\alpha(t) = (\cos(at+b),\ \sin(at+b),\ ct+d)$, care este o elice cilindrică (fig. 3.43).

32. Fie M o suprafață și $\alpha: I \to M$ o geodezică pe M. Să se arate că de-a lungul geodezicei viteza este constantă.

Soluție. Curba $\alpha: I \to M$ este geodezică pe M. dacă accelerația de-a lungul lui α este normală la M, adică $\vec{\alpha}''(t) \in T^{\perp}_{\alpha(t)}M$, pentru orice $t \in I$.

Ținînd seama de faptul că $\vec{\alpha}'(t) \in T_{\alpha(t)}M$ pentru orice $t \in I$, avem, $\frac{d}{dt}\|\vec{\alpha}'(t)\|^2 = \frac{d}{dt}(\vec{\alpha}'(t), \vec{\alpha}'(t)) = 2(\vec{\alpha}(t), \vec{\alpha}''(t)) = 0$, de unde rezultă $\|\vec{\alpha}'(t)\| =$ = const. pentru orice $t \in I$.

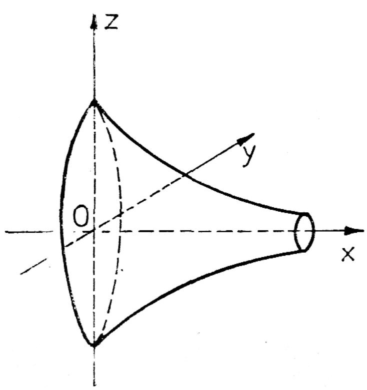


Fig. 3.42.

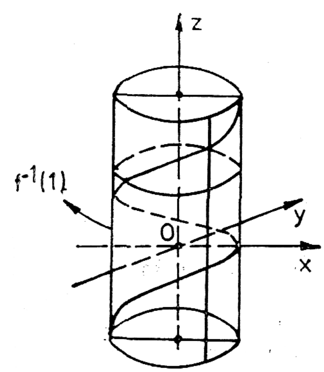


Fig. 3.43.

33. Fie $a > b > 0$ și funcția $\mathrm{r}: \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^3$ definită prin $\mathrm{r}(u, v) = ((a + b\cos v)\cos u,\ (a + b\cos v)\sin u,\ b\sin v)$.

1) Să se arate că r este o parametrizare a torului, dublu periodică.

2) Să se arate că torul este o suprafață conexă și compactă.

3) Să se determine curburile principale, direcțiile principale, și curbura lui Gauss.

Soluție. Aplicația este diferențiabilă.

Fie $\vec{r} = (a + b\cos v)\cos u\,\vec{i} + (a + b\cos v)\sin u\,\vec{j} + b\sin v\,\vec{k}$ și $\vec{r}_u = -(a+b\cos v)\sin u\,\vec{i} + (a+b\cos v)\cos u\,\vec{j} + 0\vec{k}$, $\vec{r}_v = -b\sin v\cos u\,\vec{i} - b\sin v\sin u\,j + b\cos v\,\vec{k}$, $\vec{r}_u \times \vec{r}_v \neq \vec{0}$, deci r este o parametrizare. r este parametrizarea suprafeței de rotație care se obține rotind cercul $\alpha(v) = (a+b\cos v, 0, b\sin v)$ în jurul axei Oz (fig. 3.36), adică r este parametrizarea unui tor.

Ecuația carteziană a torului este $(\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2 + z^2 = b^2$. Funcția r este dublu periodică în sensul că $\mathrm{r}(u + 2k\pi, v) = \mathrm{r}(u, v + 2k\pi) = \mathrm{r}(u, v)$, $(u, v) \in \boldsymbol{R}^2$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Deci, fiecare punct al imaginii lui r corespunde la un punct unic $(u, v) \in \boldsymbol{R}^2$ cu $0 < u < 2\pi$ și $0 < v < 2\pi$.

2) Deoarece aplicația r este definită pe mulțimea conexă $\boldsymbol{R}^2$, imaginea acestei aplicații $\mathrm{r}(\boldsymbol{R}^2)$ este o suprafață conexă în $\boldsymbol{R}^3$.

Torul este o suprafață mărginită și închisă, deci este compactă. Ea este și orientabilă.

3) Fie $\vec{v}_1 = \vec{r}_u = (a + b\cos v)\,(-\sin u, \cos u, 0)$,
$\vec{v}_2 = \vec{r}_v = b(-\sin v\cos u, -\sin v\sin u, \cos v)$.

Orientăm suprafața prin $\vec{U}\dfrac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|}$, $\vec{U} = (\cos u, \cos v, \sin u\cos v, \sin v)$.

Considerăm $S(\vec{v}_1) = -D_{\vec{v}_1}\vec{U} = -\dfrac{\partial \vec{U}}{\partial u} = (-\sin u\cos v,\ \cos u\cos v,\ 0) = -\dfrac{\cos v}{a + b\cos v}\vec{v}_1$ și $S(\vec{v}_2) = -D_{\vec{v}_2}\vec{U} = -\dfrac{\partial \vec{U}}{\partial v} = -(\cos u\sin v, \sin u\sin v, -\cos v) = -\dfrac{1}{b}\vec{v}_2$.

Din calcul rezultă că $\vec{r}_u = \vec{v}_1$ și $\vec{r}_v = \vec{v}_2$ sînt vectorii proprii ai aplicației Weingarten S_P, adică sînt direcțiile principale în punctul P al suprafeței. Curburile principale sînt $k_1 = -\dfrac{\cos v}{a + b\cos v}$, și $k_2 = -\dfrac{1}{b}$. Curbura lui Gauss, $\mathrm{K} = k_1, k_2 = \dfrac{\cos v}{b(a + b\cos v)}$.

Observație. $\mathrm{K} > 0$ pe regiunea „exterioară“, $\left(-\dfrac{\pi}{2} < v < \dfrac{\pi}{2}\right)$, $\mathrm{K} < 0$ pe regiunea „interioară“, $\left(\dfrac{\pi}{2} < v < \dfrac{3\pi}{2}\right)$ și $\mathrm{K} = 0$ pe partea superioară $\left(v = \dfrac{\pi}{2}\right)$ și pe partea inferioară, $\left(v = -\dfrac{\pi}{2}\right)$.

34. Fie mulțimea de nivel, $M = \mathrm{f}^{-1}(1)$, unde $\mathrm{f}(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ și curba $\alpha: I \to M$. Să se arate că pentru orice pereche de vectori unitari, ortogonali, $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ din $\boldsymbol{R}^3$, curba α este o geodezică pe M, dacă și numai dacă $\vec{\alpha}(t)\cos(at)\,\vec{e}_1 + \sin(at)\,\vec{e}_2$.

35. Să se determine liniile de curbură și liniile asimptotice ale paraboloidului hiperbolic $M: z = xy$.

Soluție. Suprafața poate fi reprezentată prin harta Monge, $x = u$, $y = v$, $z = uv$, $(u, v) \in \boldsymbol{R}^2$.

Avem $E = 1 + v^2$, $F = uv$, $G = 1 + u^2$, $l = n = 0$, $m = 1$.

Ecuația diferențială a liniilor de curbură

$$\begin{vmatrix} v'^2 & -u'v' & u'^2 \\ E & F & G \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0,$$

devine în acest caz $u'\sqrt{1+v^2} = \pm v'\sqrt{1+u^2}$. Aceasta este o ecuație diferențială de ordinul întîi cu variabile separabile. Soluția generală, $u + \sqrt{1+u^2} = \pm c(v + \sqrt{1+v^2})$. Trecînd la coordonate carteziene găsim $x + \sqrt{1+x^2} = \pm c(\sqrt{1+y^2} + y)$, $z = xy$.

Ecuația diferențială a liniilor asimptotice, $lu'^2 + 2mu'v' + nv'^2 = 0$, devine $u'v' = 0$, adică $u = c_1$, $v = c_2$. Deci liniile asimptotice sînt $x = c_1$, $z = c_1 y$ și $y = c_2$, $z = c_2 x$.

36. Să se determine liniile asimptotice ale suprafețelor următoare:

1) $x = \cos \ln u$, $\quad y = v \sin \ln u$, $z = u$, $u > 0$, $v \in \boldsymbol{R}$,

2) $x = u$, $y = uv$, $z = v + \ln u$, $u > 0$, $v \in \boldsymbol{R}$,

3) $x = v$, $y = u$, $\quad z = u^2 v$, $\qquad (u, v) \in \boldsymbol{R}^2$.

R: 1) $u = c_1$, $u = c_2 v^2$; 2) $u = c_1$, $u = c_2 e^{2v}$; 3) $u = c_1$, $uv^2 = c_2$.

37. Fie M imaginea aplicației r definită prin $x = u + v^2$, $y = -2u^2 + v$, $z = \dfrac{u-1}{v+1}$, $(u, v) \in \boldsymbol{R} \times (\boldsymbol{R} - \{-1\})$ și pe ea curba C: $u = v$, trecînd prin punctul $P_0(u_0 = 1,\ v_0 = 1)$.

Să se determine:

1) planul tangent la M și tangenta la C în P_0,

2) normala la M și planul normal la C în P_0,

3) direcțiile asimptotice ale lui M în P_0.

R: 1) $P_0(2, -1, 0)$, planul tangent $x - 2y - 18z - 4 = 0$. Ecuațiile curbei C sînt: $x = u^2 + u$, $y = -2u^2 + u$, $z = \dfrac{u-1}{u+1}$. Tangenta în P_0, $\dfrac{x-2}{6} = \dfrac{y+1}{-6} = \dfrac{z}{1}$.

2) Normala la suprafață, $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y+1}{-2} = \dfrac{z}{-18}$.

Planul normal la curba C, $6x - 6y + z - 18 = 0$.

3) Direcțiile asimptotice în P_0 sînt date de ecuația $8u'^2 + 9u'v' + 2v'^2 = 0$ și sînt ambele reale.

38. Se consideră imersia definită prin $x = \cos u \cos v$, $y = \cos u \sin v$, $z = \sin u - \ln \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{u}{2}\right)$, $u \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, $v \in \boldsymbol{R}$.

1) Să se determine liniile de curbură și liniile asimptotice ale suprafeței $\mathrm{r}\left(\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right) \times \boldsymbol{R}\right)$.

2) Să se găsească curbura lui Gauss.

R: 1) $E = \operatorname{tg}^2 u$, $F = 0$, $G = \cos^2 u$, $l = \operatorname{tg} u$, $m = 0$, $n = -\sin u \cos u$. Curbele $u = \text{const.}$ și $v = \text{const.}$ sînt linii de curbură. Ecuația diferențială a liniilor asimptotice, $\operatorname{tg} u \, du^2 - \sin u \cos u \, dv^2 = 0$ are soluția generală $v = \pm \ln c \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{u}{2}\right)$.

2) $\mathrm{K} = \dfrac{\ln - m^2}{EG - F^2} = -1.$

39. Fie $\alpha: I \to \boldsymbol{R}^2$, $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, $y(t) > 0$, $\forall t \in I$, o curbă cu viteză constantă și M suprafața obținută prin rotirea lui $\alpha(I)$ în jurul axei Ox. Curbele $\alpha_\theta: I \to M$, $\alpha_\theta(t) = (x(t), y(t) \cos \theta, y(t) \sin \theta)$, $\theta \in \boldsymbol{R}$, se numesc *meridiane*, iar cercurile $\beta_t: \boldsymbol{R} \to M$, $\beta_t(\theta) = (x(t), y(t) \cos \theta, y(t) \sin \theta)$, $t \in I$, se numesc paraleli (fig. 3.44).

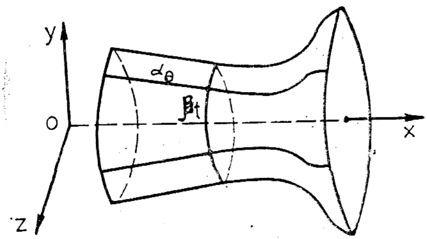


Fig. 3.44.

1) Să se verifice că meridianele și paralelii sînt curbe ortogonale.

2) Să se arate că fiecare meridian α_θ este o geodezică a lui M.

3) Să se arate că un paralel β_t este o geodezică a lui M dacă și numai dacă panta tangentei la $\alpha(I)$ în $\alpha(t)$ este nulă.

Soluție. 1) Se observă că

$$\frac{d\alpha_\theta}{dt}(t) = \left(\frac{dx}{dt}(t), \frac{dy}{dt}(t) \cos \theta, \frac{dy}{dt}(t) \sin \theta\right),$$

$$\frac{d\beta_t}{d\theta}(\theta) = (0, -y(t) \sin \theta, y(t) \cos \theta) \quad \text{și deci}$$

$$\left(\frac{d\alpha_\theta}{dt}(t), \frac{d\beta_t}{d\theta}(\theta)\right) = 0.$$

2) Cîmpurile vectoriale tangente la M, $\dfrac{d\alpha_\theta}{dt}$, $\dfrac{d\beta_t}{d\theta}$ sînt independente. De aceea ele generează în fiecare punct planul tangent la suprafață.

Deoarece

$$\frac{d^2\alpha_\theta}{dt^2}(t) = \left(\frac{d^2x}{dt^2}(t), \frac{d^2y}{dt^2}(t) \cos \theta, \frac{d^2y}{dt^2}(t) \sin \theta\right),$$

găsim

$$\left(\frac{d^2\alpha_\theta}{dt^2}(t), \frac{d\alpha_\theta}{dt}(t)\right) = \frac{dx}{dt}(t) \frac{d^2x}{dt^2}(t) + \frac{dy}{dt}(t) \frac{d^2y}{dt^2}(t) =$$

$$= 1/2 \frac{d}{dt}\left[\left(\frac{dx}{dt}(t)\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}(t)\right)^2\right] = 0,$$

$$\left(\frac{d^2\alpha_\theta}{dt^2}(t), \frac{d\beta_t}{d\theta}(\theta)\right) = 0,$$

adică accelerația lui α_θ este normală la M.

3) Accelerația lui β_t este $\frac{d^2\beta_t}{d\theta^2}(\theta) = (0, -y(t)\cos\theta, \ -y(t)\sin\theta)$. Condițiile $\left(\frac{d^2\beta_t}{d\theta^2}(\theta), \frac{d\alpha_\theta}{dt}(t)\right) = 0$, $\left(\frac{d^2\beta_t}{d\theta^2}(\theta), \frac{d\beta_t}{d\theta}(\theta)\right) = 0$ sînt echivalente cu $y'(t) = 0$.

40. Fie M o suprafață conexă închisă. Să se arate că:

1) dacă $\mathrm{H} = \mathrm{const}$ și $\mathrm{K} = 0$, atunci M este un plan sau un cilindru circular drept,

2) dacă $\mathrm{H} = \mathrm{const}$, $\mathrm{K} = \mathrm{const}$ și M nu are puncte ombilicale, atunci M este un cilindru circular drept,

3) prima formă fundamentală coincide cu a doua formă fundamentală dacă și numai dacă M este o sferă de rază unu.

41. Să se găsească o suprafață cu curbura constantă pozitivă care nu este o submulțime deschisă dintr-o sferă.

42. Fie $\boldsymbol{D} \subset \boldsymbol{C}$ o mulțime deschisă, fie f, g, h: $\boldsymbol{D} \to \boldsymbol{C}$ trei funcții monogene și $\mathrm{F} = (\mathrm{f}, \mathrm{g}, \mathrm{h})\colon \boldsymbol{D} \to \boldsymbol{C}^3$. Notăm $X = \mathfrak{Re}\,\mathrm{F}$, $Y = \mathfrak{Im}\,\mathrm{F}$, $w = u + \mathrm{i}v \in \mathbf{D}$.

Să se arate că:

1) dacă $(\mathrm{F}', \mathrm{F}') = 0$ și $\left(\frac{\partial X}{\partial u}, \frac{\partial X}{\partial u}\right) > 0$ pe $\boldsymbol{D}$, atunci fiecare dintre funcțiile $X\colon \boldsymbol{D} \to \boldsymbol{R}^3$, $Y\colon \boldsymbol{D} \to \boldsymbol{R}^3$ sînt imersii ale căror imagini sînt suprafețe minimale;

2) dacă M este o suprafață minimală din $\boldsymbol{R}^3$ și P este un punct al său, atunci există o mulțime deschisă $\boldsymbol{D}$ în $\boldsymbol{C}$ și funcțiile monogene f, g, h: $\boldsymbol{D} \to \boldsymbol{C}$ astfel încît $X(\boldsymbol{D})$ este o vecinătate a lui P în M.

43. Fie suprafața $M\colon (x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2(x^2 + y^2)$.

1) Să se arate că $\mathrm{r}\colon \boldsymbol{D} \to \boldsymbol{R}^3$, $\boldsymbol{D} = (0, 2\pi) \times (0, \pi)$, $\mathrm{r}(u, v) = (a\cos u\cos^2 v,$ $a\sin u \sin^2 v,\ a\sin v\cos v)$, este o hartă și că $\mathrm{r}(\boldsymbol{D}) = M$.

2) Să se calculeze aria suprafeței M.

Indicație. 2) $\vec{r}(u, v) = a\cos u\cos^2 v\,\vec{i} + a\sin u\sin^2 v\,\vec{j} + a\sin v\cos v\,\vec{k}$. Se calculează $E = a^2\cos^2 v$, $F = 0$, $G = a^2$.

$$A = \iint_{\mathrm{D}} \sqrt{EG - F^2}\,du\,dv = \iint_{\mathrm{D}} a^2\cos^2 v\,du\,dv = a^2\int_0^{2\pi} du\int_0^{\pi}\cos v\,dv = \pi^2 a^2.$$

44. Să se calculeze aria suprafeței

$$\vec{r}(u, v) = a\sqrt{\cos 2u}\cos u\cos^2 v\,\vec{i} + a\sqrt{\cos 2u}\sin u\cos^2 v\,\vec{j} +$$
$$+ a\sqrt{\cos 2u}\sin v\cos v\,\vec{k},\ (u, v) \in (0, 2\pi) \times (0, \pi).$$

R: $d\sigma = a^2\cos^2 v\,du\,dv$; $A = \frac{\pi^2 a^2}{2}$.

§ 4. SUBVARIETĂȚI ALE LUI $\boldsymbol{R}^n$

Fie $\boldsymbol{R}^n$ spațiul euclidian canonic cu n dimensiuni.

4.1. Fie $m \leqslant n$ două numere naturale. Incluziunea canonică $\boldsymbol{R}^m \subset \boldsymbol{R}^n$ este $(x_1, \ldots, x_m) \to (x_1, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0)$. Uneori se scrie $\boldsymbol{R}^n = \boldsymbol{R}^m \times \boldsymbol{R}^{n-m}$.

O submulțime M a lui $\boldsymbol{R}^n$ se numește *subvarietate de dimensiune m* dacă satisface una dintre următoarele condiții (echivalente):

1) pentru $\forall x \in M$ există o mulțime deschisă $\boldsymbol{D}$ din $\boldsymbol{R}^n$ care conține pe x și un difeomorfism $f: \boldsymbol{D} \to f(\boldsymbol{D}) \subset \boldsymbol{R}^n$ astfel încît $f(\boldsymbol{D} \cap M) = f(\boldsymbol{D}) \cap \boldsymbol{R}^m$;

2) pentru $\forall x \in M$ există o mulțime deschisă $\boldsymbol{D}$ din $\boldsymbol{R}^n$ care conține pe x și $n-m$ funcții diferențiabile $f_i: \boldsymbol{D} \to \boldsymbol{R}$, $i = 1, 2, \ldots, n-m$, astfel încît vectorii grad $f_i(x)$ să fie liniar independenți și

$$M \cap \boldsymbol{D} = \{x \mid x \in \boldsymbol{D},\ f_1(x) = 0, \ldots, f_{n-m}(x) = 0\};$$

3) pentru orice $x \in M$ există o mulțime deschisă $\boldsymbol{D}$ din $\boldsymbol{R}^n$ care conține pe x și o submersie $f: \boldsymbol{D} \to \boldsymbol{R}^{n-m}$ astfel încît $M \cap \boldsymbol{D} = \{x \mid x \in \boldsymbol{D},\ f(x) = 0\}$;

4) pentru orice $x \in M$ există o mulțime deschisă $\boldsymbol{D}$ din $\boldsymbol{R}^n$ care conține pe $x = (x_1, \ldots, x_n)$, o mulțime deschisă $\boldsymbol{E}$ din $\boldsymbol{R}^m$ care conține pe $(x_1, \ldots, x_m)$ și $n-m$ funcții diferențiabile $h_i: \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{R}$, $i = 1, 2, \ldots, n-m$, astfel încît, abstracție făcînd eventual de o permutare a coordonatelor, $M \cap \boldsymbol{D}$ să fie graficul aplicației $(h_1, \ldots, h_{n-m}): \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{R}^{n-m}$;

5) pentru orice $x \in M$ există o mulțime deschisă $\boldsymbol{D}$ din $\boldsymbol{R}^n$ care conține pe x, o mulțime deschisă $\boldsymbol{E}$ din $\boldsymbol{R}^m$ și o imersie injectivă $g: \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{R}^n$ cu imaginea $M \cap \boldsymbol{D}$ și cu inversa $g^{-1}: M \cap \boldsymbol{D} \to \boldsymbol{E}$ continuă.

Dacă în fiecare dintre aceste definiții utilizăm funcții de clasă C^p, atunci M se numește *subvarietate de clasă* C^p.

Numărul natural $n-m$ se numește *codimensiunea* lui M.

4.2. Subvarietățile de dimensiune zero sînt mulțimile de puncte izolate din $\boldsymbol{R}^n$. Subvarietățile de dimensiune unu se numesc *curbe*, iar subvarietățile de dimensiune doi se numesc *suprafețe*.

Subvarietățile de codimensiune zero sînt mulțimile deschise din $\boldsymbol{R}^n$. Subvarietățile de codimensiune unu se numesc *hipersuprafețe*.

4.3. Fie M o subvarietate a lui $\boldsymbol{R}^n$ de dimensiune m. O funcție diferențiabilă $h: \boldsymbol{D} \to \boldsymbol{R}^n$ cu proprietățile:

1) $\boldsymbol{D}$ este o mulțime deschisă din $\boldsymbol{R}^m$,

2) $h(\boldsymbol{D}) \subset M$,

3) h este o imersie injectivă,

se numește *hartă* în M.

Dacă h este numai imersie, atunci h se numește *parametrizare* a regiunii $h(\boldsymbol{D})$ din M. Conform lui 4.1.5 orice punct $x \in M$ admite hărți $h: \boldsymbol{D} \to M$ astfel încît $x \in h(\boldsymbol{D})$.

4.4. Fie M o subvarietate a lui $\boldsymbol{R}^n$. Un vector v din $\boldsymbol{R}^n$ se zice *tangent* în x la M dacă există o curbă din M (o aplicație diferențiabilă $\alpha: I \to M$, I = interval deschis din $\boldsymbol{R}$) pentru care $\alpha(t_0) = x$, $\alpha'(t_0) = v$, $t_0 \in I$.

Mulțimea vectorilor din $\boldsymbol{R}^n$ tangenți la M în x este un subspațiu vectorial al lui $\boldsymbol{R}^n$ de dimensiune m, numit *spațiul tangent* la M în x și notat cu T_xM.

Mulțimea $TM = \bigcup_{x \in M} T_xM$ se numește *fibrarea tangentă* a lui M. Aceasta este o subvarietate a lui $\boldsymbol{R}^{2n}$ de dimensiune $2m$.

4.5. Fie M o subvarietate a lui $\boldsymbol{R}^n$ și $\alpha: I \to M$ o curbă din M. Restricția $\alpha: [a, b] \to M$, $[a, b] \subset I$, se numește *segment de curbă* în M.

O subvarietate M de clasă C^p, $p \geqslant 1$, se numește *conexă* dacă pentru orice $x, y \in M$ există un segment de curbă în M care unește pe x cu y.

4.6. O submulțime M a lui $\boldsymbol{R}^n$ se numește subvarietate *de dimensiune m cu frontieră*, dacă pentru orice $x \in M$ există o mulțime deschisă $\boldsymbol{D}$ din $\boldsymbol{R}^n$ care conține pe x și un difeomorfism $f: \boldsymbol{D} \to f(\boldsymbol{D}) \subset \boldsymbol{R}^n$ astfel încît

$$f(\boldsymbol{D} \cap M) = f(\boldsymbol{D}) \cap (H^m \times \{c\}),$$

unde $H^m = \{(x_1, ..., x_m) \in \boldsymbol{R}^m,\ x_m \geq a\}$ și $c \in \boldsymbol{R}^{n-m}$.

Mulțimea $\partial M = \{x \mid x \in M,\ f(x) \in \boldsymbol{R}^{m-1} \times \{a\} \times \{c\}\}$; numită *frontiera* lui M, este o subvarietate de dimensiune $m-1$. Mulțimea $M - \partial M$, numită *interiorul* lui M, este o subvarietate de dimensiune m.

Spațiul tangent $T_x M$ se definește ca și pentru o varietate fără frontieră.

4.7. *Hipersuprafețe cu frontieră.* Fie $\widetilde{M}$ o hipersuprafață în $\boldsymbol{R}^n$. O *hipersuprafață cu frontieră* în $\boldsymbol{R}^n$ poate fi definită astfel

$M = \{x \in \widetilde{M} \mid g_1(x) \leq c_1, ..., g_k(x) \leq c_k\}$, unde $g_1, ..., g_k: \widetilde{M} \to \boldsymbol{R}$ sînt funcții diferențiabile cu proprietățile $g_i^{-1}(c_i) \cap g_j^{-1}(c_j) = \emptyset$, pentru orice $i \neq j$ și grad $g_i(x) \neq 0$ pentru orice $x \in g_i^{-1}(c_i)$. Frontiera lui M este $\partial M = \bigcup_{i=1}^{k} g_i^{-1}(c_i) \cap M$.

Dacă hipersuprafața $\widetilde{M}$ este caracterizată prin ecuația $f(x) = 0$ (grad $f(x) \neq 0$, pentru orice $\forall x \in \widetilde{M}$), atunci $M = f^{-1}(c) \cap \bigcap_{i=1}^{k} g_i^{-1}(-\infty, c_i]$ și $T_x M = \{v \in T_x \boldsymbol{R}^n \mid (v, \nabla f(x)) = 0\}$. Un vector $v \in T_x M$, $x \in \partial M \subset M$ (adică $x \in g_i^{-1}(c_i)$ pentru anumiți i) se numește:

1) *orientat către exterior* dacă $(v, \nabla g_i(x)) > 0$,

2) *orientat către interior* dacă $(v, \nabla g_i(x)) < 0$,

3) *tangent la frontieră* dacă $(v, \nabla g_i(x)) = 0$,

4) *normal la frontieră* dacă $(v, w) = 0$, pentru orice $w \in T_x M \cap T_x \partial M$.

4.8. Fie M o hipersuprafață a lui $\mathbf{R}^n$ cu sau fără frontieră. Un cîmp vectorial normal unitar U pe M se numește *orientare* a lui M.

Noțiunea generală de orientare va fi dată în § 6.

Exerciții și probleme

1. Mulțimea matricelor pătratice reale de ordinul n, cu determinantul 1, este un grup în raport cu înmulțirea, numit *grupul liniar special* $SL(n, \mathbf{R})$. Identificăm pe $\mathfrak{M}_{n \times n}(\boldsymbol{R})$ cu $\boldsymbol{R}^{n^2}$.

1) Să se arate că $SL(2, \boldsymbol{R})$ este o hipersuprafață a lui $\boldsymbol{R}^4$. Să se determine $T_{x_0} SL(2, \boldsymbol{R})$, unde

$$x_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2) Să se arate că $SL(3, \boldsymbol{R})$ este o hipersuprafață a lui $\boldsymbol{R}^9$. Să se determine $T_{x_0} SL(3, \boldsymbol{R})$, unde

$$x_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

3) Să se arate că $SL(n, \boldsymbol{R})$ este o hipersuprafață a lui $\boldsymbol{R}^{n^2}$. Să se determine $T_{x_0} SL(n, \boldsymbol{R})$ pentru $x_0 = \mathbf{I}$ (matricea unitate de ordinul n).

Soluție. 1) Fie $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \boldsymbol{R}^4$ și

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\boldsymbol{R})$$

matricea asociată. Mulțimea $SL(2, \boldsymbol{R})$ devine o submulțime din $\boldsymbol{R}^4$ caracterizată prin

$$SL(2, \boldsymbol{R}): x_1x_4 - x_2x_3 = 1.$$

Astfel $SL(2, \boldsymbol{R})$ este mulțimea zerourilor funcției diferențiabile definită prin $\mathrm{f}(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_4 - x_2x_3 - 1$. Deoarece $\operatorname{grad} \mathrm{f}(x) = (x_4, -x_3, -x_2, x_1)$ este nenul pe $SL(2, \boldsymbol{R})$, rezultă că $SL(2, \boldsymbol{R})$ este o subvarietate de dimensiune $4 - 1 = 3$ a lui $\boldsymbol{R}^4$.

Fie

$$t \to \alpha(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_3(t) & x_4(t) \end{bmatrix}$$

o curbă în $SL(2, \boldsymbol{R})$ care are proprietatea

$$\alpha(t_0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Vectorul viteză în t_0 este

$$\alpha'(t_0) = \begin{bmatrix} x_1'(t) & x_2'(t) \\ x_3'(t) & x_4'(t) \end{bmatrix}.$$

Condiția $(\operatorname{grad} \mathrm{f}(x_0), \alpha'(t_0)) = 0$ implică $x_1'(t_0) + x_4'(t_0) = 0$, adică

$$T_{x_0}SL(2, \boldsymbol{R}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},\ a + d = 0 \right\}.$$

2) —3) Analog.

2.1) Să se arate că grupul ortogonal $O(n, \boldsymbol{R})$ este o subvarietate de dimensiune $\dfrac{n(n-1)}{2}$ a lui $\boldsymbol{R}^{n^2}$.

2) Să se expliciteze $T_{x_0}O(n, \boldsymbol{R})$ pentru $x_0 = \mathbf{I}$ (matricea unitate).

Soluție. 1) Grupul ortogonal $O(n, \boldsymbol{R})$ este mulțimea matricelor pătratice reale $\mathbf{A} = [x_{ij}]$ de ordinul n pentru care ${}^t\mathbf{A}\mathbf{A} = \mathbf{I}$.

Privind pe $\mathbf{A}$ ca un element $x = (x_{11}, \ldots, x_{1n}, x_{21}, \ldots, x_{2n}, \ldots, x_{n1}, \ldots, x_{nn})$ din $\boldsymbol{R}^{n^2}$ mulțimea $O(n, \boldsymbol{R})$ devine o submulțime din $\boldsymbol{R}^{n^2}$ definită prin

$$O(n, \boldsymbol{R}): \sum_k x_{ki} \cdot x_{kj} = \delta_{ij}.$$

Astfel $O(n, \boldsymbol{R})$ este mulțimea zerourilor a $\dfrac{n(n+1)}{2}$ funcții diferențiabile $x \to \mathrm{f}_{ij}(x) = \sum_k x_{ki} \cdot x_{kj} - \delta_{ij},\ i \leqslant j$. Deoarece $\operatorname{grad} \mathrm{f}_{ij}(x)$, $i \leqslant j$, sînt independenți pe $O(n, \boldsymbol{R})$, rezultă că $O(n, \boldsymbol{R})$ este o subvarietate de dimensiune $n^2 - \dfrac{n(n+1)}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$ a lui $\boldsymbol{R}^{n^2}$.

2) Spațiul tangent la $O(n, \boldsymbol{R})$ într-un punct x este caracterizat prin $\sum_k x_{ki}\, dx_{kj} + \sum_k (dx_{ki})\, x_{kj} = 0$. Înlocuind pe x_{ij} cu δ_{ij} găsim $dx_{ij} + dx_{ji} = 0$. Astfel $T_{x_0}O(n, \boldsymbol{R})$ este mulțimea tuturor matricelor antisimetrice.

3. Definim $f: \boldsymbol{D} \to \boldsymbol{R}^4$, unde $\boldsymbol{D} = \{(u, v, w) \mid u \in \boldsymbol{R},\ 0 < v < \pi,\ 0 < w < \pi\}$, prin $f(u, v, w) = (\sin u \sin v \sin w, \cos u \sin v \sin w, \cos v \sin w, \cos w)$.

1) Să se verifice că f(D) este o varietate cu trei dimensiuni în $\boldsymbol{R}^4$.

2) Să se arate că $f(\boldsymbol{D})$ este conținută în sfera cu trei dimensluni din $\boldsymbol{R}^4$.

4. Fie M o hipersuprafață a lui $\boldsymbol{R}^n$ și $h: M \to \boldsymbol{R}$ o funcție diferențiabilă. Să se arate că h crește cel mai repede de-a lungul liniilor cîmpului vectorial grad h.

Indicație. Fie $\alpha: [a, b] \to M$ o curbă integrală a lui grad h și $\beta: [a, b] \to M$ o altă curbă astfel încît $\beta(a) = \alpha(a)$ și $\| \beta'(t) \| = \| \alpha'(t) \|$, pentru orice $\forall t \in [a, b]$. Rezultă $h(\alpha(b)) \geqslant h(\beta(b))$ cu egalitate dacă și numai dacă $\beta = \alpha$.

5. *(Fibrarea tangentă)* Fie M o hipersuprafară a lui $\boldsymbol{R}^n$ orientată prin U. Să se arate că

$$TM = \{(x, v) \mid x \in M,\ (v, U) = 0\}$$

este o subvarietate de dimensiune $2n - 2$ în $\boldsymbol{R}^{2n}$.

6. *(Fibrarea sferică)* Fie M o hipersuprafață a lui $\boldsymbol{R}^n$ — orientată prin U. Să se arate că

$$T^1M = \{x, v) \mid x \in M,\ (v, U) = 0,\ (v, v) = 1\}$$

este o varietate cu $2n - 3$ dimensiuni în $\boldsymbol{R}^{2n}$.

7. Să se verifice că semisfera

$$S = \{x_1, x_2, x_3) \mid (x_1, x_2, x_3) \in \boldsymbol{R}^3,\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1,\ x_3 \geqslant 0\}$$

este o suprafață cu frontieră în $\boldsymbol{R}^3$.

Fie $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ un punct de pe frontieră. Să se scrie ecuația planului tangent la S în acest punct și apoi să se expliciteze un vector tangent la S orientat către exterior, unul orientat către interior, unul tangent și unul normal la frontieră.

Soluție. Să considerăm funcția diferențiabilă definită prin $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1$ al cărui gradient $(2x_1, 2x_2, 2x_3,)$ nu se anulează în nici un punct din S. Apoi $g(x_1, x_2, x_3) = -x_3$ este o funcție diferențiabilă astfel încît

$$S = f^{-1}(0) \cap g^{-1}((-\infty, 0]).$$

Frontiera lui S este ecuatorul $\partial S = \{(x_1, x_2, x_3) \in S,\ x_3 = 0\}$.

Ecuația planului tangent la S în $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ este $x_1 + x_2 - \sqrt{2} = 0$.

Un vector $\vec{v}(v_1, v_2, v_3)$ se va afla în acest plan dacă și numai dacă $v_1 + v_2 = 0$ (ortogonal vectorului normal al planului).

Se observă că $\operatorname{grad} g(x_1, x_2, x_3) = -k$. De aceea $(v_1, -v_1, v_3)$, $v_3 < 0$, este un vector tangent la S orientat către exterior; $(v_1, -v_1, v_3)$, $v_3 > 0$, este un vector tangent la S orientat către interior; $(v_1, -v_1, 0)$ este un vector tangent la S și tangent la ∂S; $(0, 0, v_3)$, $v_3 \neq 0$, este un vector tangent la S și normal la ∂S (fig. 3.45).

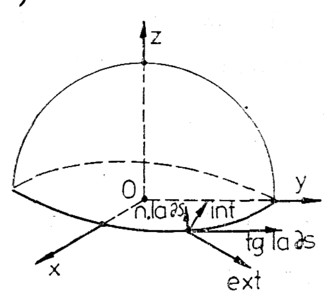


Fig. 3.45

8. Fie $f: \boldsymbol{D} \to \boldsymbol{R}^n$ astfel încît $f(\boldsymbol{D})$ să fie o hipersuprafață fără frontieră în $\boldsymbol{R}^n$. Fie $x = (x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \boldsymbol{R}^{n+1}$ cu $x_{n+1} \neq 0$. Definim $\varphi: \boldsymbol{D} \times [0, 1] \to \boldsymbol{R}^{n+1}$, prin $\varphi(t_1, \ldots, t_{n+1}) = (1 - t_{n+1})\, x + t_{n+1}(f(t_1, \ldots, t_n), 0)$. Să se arate că $\varphi(\boldsymbol{D} \times [0, 1])$ este o hipersuprafață cu frontieră în $\boldsymbol{R}^{n+1}$ (*conul peste* $f(\boldsymbol{D})$ *cu vîrful în* x).

9. Fie $M = f^{-1}(c)$ o hipersuprafață fără frontieră a lui $\boldsymbol{R}^n$. Să se verifice că *cilindrul peste* **M**,

$$M \times I = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \mid (x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \boldsymbol{R}^{n+1}, \quad f(x_1, \ldots, x_n) = c, \quad 0 \leqslant x_{n+1} \leqslant 1\},$$

este o hipersuprafață cu frontieră în $\boldsymbol{R}^{n+1}$.

10. Fie M o hipersuprafață în $\boldsymbol{R}^n$ cu sau fără frontieră.

1) Fie $\boldsymbol{D} = \{x_1, x_2) \in \boldsymbol{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 \leqslant 1\}$ și o aplicație diferențiabilă $\varphi: \boldsymbol{D} \to M$. Mulțimea $\varphi(\boldsymbol{D})$ se numește *disc* în M. Să se expliciteze frontiera discului.

2) Fie $\boldsymbol{R}^2_- = \{(x_1, x_2) \mid (x_1, x_2) \in \boldsymbol{R}^2, \ x_2 \leqslant 0\}$ și o aplicație diferențiabilă $\varphi: \boldsymbol{D} \cap \boldsymbol{R}^2_- \to M$. Mulțimea $\varphi(\boldsymbol{D} \cap \boldsymbol{R}^2_-)$ se numește *semidisc* în M. Să se expliciteze frontiera semidiscului.

3) Fie $\Delta = \{x_1, x_2) \mid (x_1, x_2) \in \boldsymbol{R}^2, \ x_1 \geqslant 0, \ x_2 \geqslant 0, \ x_1 + x_2 \leqslant 1\}$ și o aplicație diferențiabilă $\varphi: \Delta \to M$. Mulțimea $\varphi(\Delta)$ se numește *triunghi* în M. Să se expliciteze frontiera triunghiului.

R. 1) $\partial\varphi = \varphi \circ \alpha$ unde $\alpha: [0, 2\pi] \to \boldsymbol{D}$, $\alpha(t) = (\cos t, \sin t)$.

2) $\partial\varphi = \varphi \circ \alpha$ unde $\alpha: [0, 2 + \pi] \to \boldsymbol{D} \cap \boldsymbol{R}^2_-$,

$$\alpha(t) = \begin{cases} (1 - t, 0) & \text{pentru } t \in [0, 2] \\ (\cos(t - 2 + \pi), \ \sin(t - 2 + \pi)) & \text{pentru } t \in [2, 2 + \pi]. \end{cases}$$

3) $\partial\varphi = \varphi \circ \alpha$ unde $\alpha: [0, 3] \to \Delta$,

$$\alpha(t) = \begin{cases} (t, 0) & \text{pentru } t \in [0, 1] \\ (2 - t, \ t - 1) & \text{pentru } t \in [1, 2]. \\ (0, 3 - t) & \text{pentru } t \in [2, 3] \end{cases}$$

11. Fie hipersuprafețele Țițeica Σ_{n-1} definite în $\boldsymbol{R}^n$, $n = 2, 4, 8$, prin ecuații de forma $x_1 x_2 \ldots x_n = 1$.

Să se arate că aceste varietăți sînt paralelizabile.

Soluție. O varietate geometrică de dimensiune m se numește *paralelizabilă*, dacă posedă m cîmpuri vectoriale (diferențiabile) tangente independente.

Pentru o hipersuprafață a lui $\boldsymbol{R}^n$ care se poate reprezenta printr-o ecuație implicită $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$, avem cîmpul vectorial normal $Z = \nabla f$ și orice cîmp vectorial tangent T este caracterizat prin ecuația $(T, Z) = 0$.

Fie $\Sigma_1: x_1 x_2 = 1$.

Aceasta este o hiperbolă echilateră, o varietate Țițeica cu o singură dimensiune. (Se poate demonstra că este satisfăcută condiția $\dfrac{k}{d^3} = \dfrac{1}{4} = \text{const.}$, unde k este curbura curbei, iar d este distanța de la origine la tangenta într-un punct curent de pe curbă).

Construim cîmpul vectorial normal la Σ_1, $Z = x_2 i + x_1 j$. Cîmpul vectorial tangent $T(-x_1, x_2)$ se obține din Z printr-o rotație de unghi $\dfrac{\pi}{2}$. Cîmpul T nu se anulează în nici un punct de pe curba $x_1 x_2 = 1$, deci este independent.

Considerăm acum hipersuprafața Țițeica Σ_3: $x_1 x_2 x_3 x_4 = 1$.

Cîmpul vectorial normal este definit în toate punctele hipersuprafeței prin $Z = \left(\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \frac{1}{x_3}, \frac{1}{x_4}\right)$. Putem construi trei cîmpuri vectoriale tangente, $(T_i, Z) = 0$, $i = 1, 2, 3$ și anume: (*) $T_1 = \left(\frac{-1}{x_2}, \frac{1}{x_1}, \frac{-1}{x_4}, \frac{1}{x_3}\right)$, $T_2 = \left(\frac{-1}{x_3}, \frac{1}{x_4}, \frac{1}{x_1}, \frac{-1}{x_2}\right)$, $T_3 = \left(\frac{-1}{x_4}, \frac{-1}{x_3}, \frac{1}{x_2}, \frac{1}{x_1}\right)$. Se verifică prin calcul direct că cele trei cîmpuri sînt reciproc ortogonale, adică $(T_i, T_j) = 0$, oricare ar fi $i \neq j$; $i, j = 1, 2, 3$. Deoarece sînt diferite de zero peste tot și reciproc ortogonale, ele sînt liniar independente.

Fie Σ_7: $x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_7x_8 = 1$. În acest caz, $Z = \left(\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \frac{1}{x_3}, \frac{1}{x_4}, \frac{1}{x_5}, \frac{1}{x_6}, \frac{1}{x_7}, \frac{1}{x_8}\right)$. Un cîmp vectorial tangent se poate obține împărțind variabilele lui $\boldsymbol{R}^8$ în perechi, adică x_1, x_2; x_3, x_4; ...; x_7, x_8 și schimbînd rolul variabilelor unei perechi și semnul unei variabile. Putem lua

$$T_1 = \left(\frac{-1}{x_2}, \frac{1}{x_1}, \frac{-1}{x_4}, \frac{1}{x_3}, \frac{-1}{x_6}, \frac{1}{x_5}, \frac{1}{x_8}, \frac{-1}{x_7}\right).$$

Împărțim variabilele lui $\boldsymbol{R}^8$ în grupe de cîte patru și după modelul (*) obținem două cîmpuri vectoriale tangente,

$$T_2 = \left(\frac{-1}{x_3}, \frac{1}{x_4}, \frac{1}{x_1}, \frac{-1}{x_2}, \frac{-1}{x_7}, \frac{-1}{x_8}, \frac{1}{x_5}, \frac{1}{x_6}\right),$$

$$T_3 = \left(\frac{-1}{x_4}, \frac{-1}{x_3}, \frac{1}{x_2}, \frac{1}{x_1}, \frac{-1}{x_8}, \frac{1}{x_7}, \frac{-1}{x_6}, \frac{1}{x_5}\right).$$

Alte patru cîmpuri vectoriale tangente se obțin schimbînd rolul celor patru variabile x_1, x_2, x_3, x_4 cu celelalte, x_5, x_6, x_7, x_8.

$$T_4 = \left(\frac{-1}{x_5}, \frac{1}{x_6}, \frac{1}{x_7}, \frac{1}{x_8}, \frac{1}{x_1}, \frac{-1}{x_2}, \frac{-1}{x_3}, \frac{-1}{x_4}\right),$$

$$T_5 = \left(\frac{-1}{x_6}, \frac{-1}{x_5}, \frac{1}{x_8}, \frac{1}{x_7}, \frac{1}{x_2}, \frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_4}, \frac{-1}{x_3}\right),$$

$$T_6 = \left(\frac{-1}{x_7}, \frac{-1}{x_8}, \frac{-1}{x_5}, \frac{1}{x_6}, \frac{1}{x_3}, \frac{-1}{x_4}, \frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}\right),$$

$$T_7 = \left(\frac{-1}{x_8}, \frac{1}{x_7}, \frac{-1}{x_6}, \frac{-1}{x_5}, \frac{1}{x_4}, \frac{1}{x_3}, \frac{-1}{x_2}, \frac{1}{x_1}\right).$$

Prin calcul se verifică $(T_i, Z) = 0$, $(T_i, T_j) = 0$, $i \neq j$, $i, j = 1, 2, ..., 7$, deci Σ_7 este paralelizabilă.

12. Fie $f: \boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^m \to \boldsymbol{R}$ o funcție diferențiabilă. Numim pe $\boldsymbol{R}^n$ *spațiul stărilor* și pe $\boldsymbol{R}^m$ *spațiul de control*. Mulțimea $M \subset \boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^m$ a tuturor punctelor critice ale *potențialelor* $x \to f_c(x)$, $x \in \boldsymbol{R}^n$, $c \in \boldsymbol{R}^m$ se numește *varietatea catastrofă*. Restricția proiecției naturale $\pi: \boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^m \to \boldsymbol{R}^m$ la M se notează cu χ și se numește aplicația *catastrofă*. Submulțimea $S \subset M$ formată din punctele singulare ($\equiv$ critice) ale aplicației catastrofă $\chi: M \to \boldsymbol{R}^m$ sau, echivalent, formată din punctele critice degenerate ale potențialelor $x \to f_c(x)$, se numește *mulțimea singularităților*. Imaginea $B = \chi(S) \subset \boldsymbol{R}^m$ se numește *mulțimea bifurcație*.

Cele șapte catastrofe elementare. Pentru fiecare dintre următoarele funcții să se expliciteze M, χ, S și B. Să se arate că graficele funcțiilor date cît și varietățile catastrofă asociate sînt subvarietăți riglate.

1) *faldul*

$$f(x, a) = \frac{1}{3} x^3 + ax,$$

2) *întoarcerea*

$$f(x, a, b) = \frac{1}{4} x^4 + \frac{1}{2} ax^2 + bx,$$

3) *rîndunica*

$$f(x, a, b, c) = \frac{1}{5} x^5 + \frac{1}{3} ax^3 + \frac{1}{2} bx^2 + cx,$$

4) *fluturele*

$$f(x, a, b, c, d) = \frac{1}{6} x^6 + \frac{1}{4} ax^4 + \frac{1}{3} bx^3 + \frac{1}{2} cx^2 + dx,$$

5) *ombilicul eliptic*

$$f(x, y, a, b, c) = x^3 - 3xy^2 + a(x^2 + y^2) + bx + cy,$$

6) *ombilicul hiperbolic*

$$f(x, y, a, b, c) = x^3 + y^3 + axy + bx + cy,$$

7) *ombilicul parabolic*

$$f(x, y, a, b, c, d) = x^2y + y^4 + ax^2 + by^2 + cx + dy.$$

Soluție. 2) Considerăm funcția $f: \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$ de valori $f(x, a, b) = \frac{1}{4} x^4 + \frac{1}{2} ax^2 + bx$.

Graficul lui f este o hipersuprafață riglată în $\boldsymbol{R}^4$ fiind imaginea hărții, $x = u,\ a = v,\ b = w,\ z = \frac{1}{4} u^4 + \frac{1}{2} vu^2 + wu,\ (u, v, w) \in \boldsymbol{R}^3$.

Potențialul este funcția parțială $x \to f_{ab}(x) = \frac{1}{4} x^4 + \frac{1}{2} ax + bx$.

Deoarece $\frac{d}{dx} f_{ab}(x) = x^3 + ax + b$, punctele critice ale lui f sînt soluțiile ecuației $x^3 + ax + b = 0$. Se știe însă că natura rădăcinilor unei asemenea ecuații este determinată de semnul discriminantului $D = 4a^3 + 27b^2$: dacă $D < 0$ adică (a, b) aparține regiunii I din figura 3.46, atunci există trei rădăcini reale; pentru $D = 0$ dar $a \neq 0$ sau $b \neq 0$, adică pentru $(a, b) \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, ecuația în x are trei rădăcini reale, una fiind dublă (corespunzător lui Γ_1, cea dublă este cea mai mică; corespunzător lui Γ_2, cea dublă este cea mai mare); dacă $D = 0$ și $a = b = 0$, atunci $x = 0$ este o rădăcină reală triplă; pentru $D > 0$, adică pentru

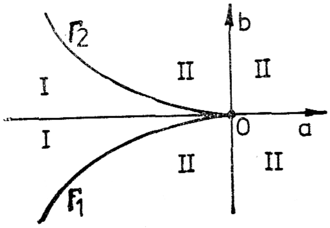


Fig. 3.46

(a, b) aparținînd regiunii II din figura 3.46 ecuația în x are o rădăcină reală și două rădăcini complex conjugate. Ținînd seama de $\frac{d^2}{dx^2} f_{ab} = 3x^2 + a$ constatăm că punctele critice sînt nedegenerate cu excepția cazului $a = b = 0$ în care $x = 0$ este un punct critic degenerat.

De asemenea, dacă ținem seama de semnele derivatelor de ordinul unu și doi, respectiv, ajungem la următoarea concluzie: pentru (a, b) deci regiunea I, figura 3.46, funcția f_{ab} are un maxim local printre două minime globale; pentru $(a, b) \in \Gamma_1$, funcția f_{ab} are un punct de inflexiune la stînga unui punct de minim global; pentru $(a, b) \in \Gamma_2$ funcția f_{ab} are un punct de inflexiune la dreapta unui punct de minim global; dacă $a = b = 0$, atunci $x = 0$ este un punct de minim global pentru f_{00}; dacă (a, b) aparține regiunii II din figura 3.46, atunci f_{ab} are un minim global. Graficele corespunzătoare pentru $x \to f_{ab}(x)$ sînt schițate în figura 3.47.

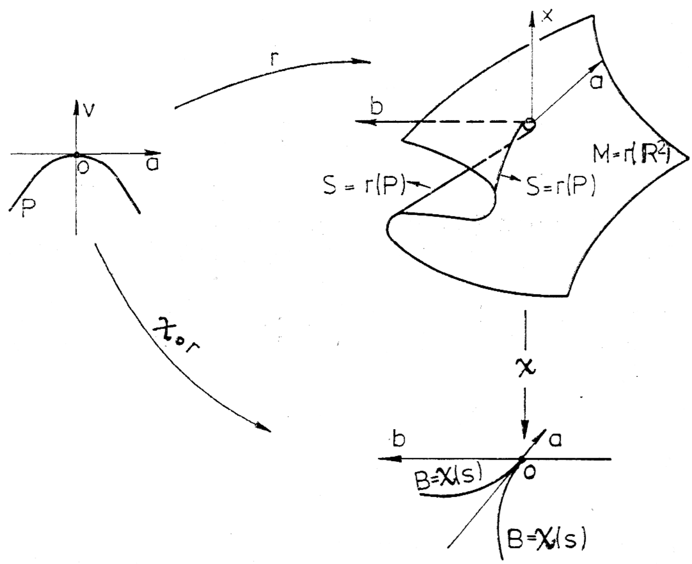


Fig. 3.47

Varietatea catastrofă are ecuația $\frac{d}{dx} f_{ab}(x) = 0$, adică M: $x^3 + ax + b = 0$. Ea nu este altceva decît imaginea hărții r: $x = u$, $a = v$, $b = -u^3 - vu$, $(u, v) \in \boldsymbol{R}^2$. Astfel M este o suprafață riglată în $\boldsymbol{R}^3$ (fig. 3.48).

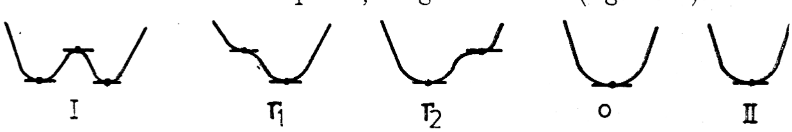


Fig. 3.48

Expresia în coordonate a aplicației catastrofă este $\chi \circ r\,(u, v) = (v, -u^3 - vu)$. Ei i se atașază matricea Jacobian

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3u^2 - v & -u \end{bmatrix}.$$

Deoarece determinantul acestei matrice este $3u^2 + v$, rezultă că punctele parabolei $P: 3u^2 + v = 0$ din planul uOv sînt punctele singulare ale lui $\chi \circ r$. Astfel, mulțimea singularităților S este caracterizată prin $x = u$, $a = v$, $b = -u^3 - vu$, $3u^2 + v = 0$, adică S este o cubică răsucită (curbă fald) de ecuații parametrice $x = u$, $a = -3u^2$, $b = 2u^3$. Corespunzător, mulțimea bifurcație B are parametrizarea $\chi(u, -3u^2, 2u^3) = (-3u^2, 2u^3)$. Cu alte cuvinte, B este parabola semicubică de ecuație carteziană implicită $4a^3 + 27b^2 = 0$ (fig. 3.46 și 3.48). Pentru această curbă originea este un punct de întoarcere (punct singular) de speța întîi.

Analog se rezolvă 1), 3), 4), 5), 6), 7).

§ 5. ALGEBRĂ ȘI ANALIZĂ TENSORIALĂ

5.1. Fie $\mathbf{V}$ un spațiu vectorial real de dimensiune n și $\mathbf{V}^*$ dualul său. Un tensor de tipul (p, q) pe $\mathbf{V}$, unde $p, q \in \boldsymbol{N}$, este o funcție

$$T: \underbrace{\mathbf{V}^* \times \ldots \times \mathbf{V}^*}_{p \text{ factori}} \times \underbrace{\mathbf{V} \times \ldots \times \mathbf{V}}_{q \text{ factori}} \to \boldsymbol{R},$$

$$(\omega^1, \ldots, \omega^p, v_1, \ldots, v_q) \to T(\omega^1, \ldots, \omega^p, v_1, \ldots, v_q),$$

liniară în fiecare argument (multiliniară). Numărul p se numește *ordin de contravarianță*, q se numește *ordin de covarianță*, iar $p + q$ se numește *ordinul tensorului*.

Mulțimea tuturor tensorilor de tipul (p, q) pe $\mathbf{V}$ se notează cu $\mathcal{T}^p_q(V)$ și este un spațiu vectorial real de dimensiune n^{p+q}. Evident, $\mathcal{T}^0_0(V) = \boldsymbol{R}$, $\mathcal{T}^1_0(\mathbf{V}) = \mathbf{V}$, $\mathcal{T}^0_1(\mathbf{V}) = \mathbf{V}^*$.

5.2. Fie $\mathcal{T}^p_q(\mathbf{V})$, $\mathcal{T}^r_s(\mathbf{V})$ și $\mathcal{T}^{p+r}_{q+s}(\mathbf{V})$. Funcția

$$\otimes : \mathcal{T}^p_q(\mathbf{V}) \times \mathcal{T}^r_s(\mathbf{V}) \to \mathcal{T}^{p+r}_{q+s}(\mathbf{V})$$

definită prin

$S \otimes T(\omega^1, \ldots, \omega^{p+r}, v_1, \ldots, v_{q+s}) = S(\omega^1, \ldots, \omega^p, v_1, \ldots, v_q)\, T(\omega^{p+1}, \ldots, \omega^{p+r}, v_{q+1}, \ldots, v_{q+s})$ este o aplicație biliniară și asociativă numită *produs tensorial*. Această definiție se extinde la un număr finit de factori.

5.3. Fie $\{e_1, \ldots, e_n\}$ o bază a lui $\mathbf{V}$ și $\{e^1, \ldots, e^n\}$ baza duală în $\mathbf{V}^*$. Mulțimea $\{e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \ldots \otimes e^{j_q},\ i_1, \ldots, i_p, j_1, \ldots, j_q = 1, \ldots, n\}$ este o bază a lui $\mathcal{T}^p_q(\mathbf{V})$ numită *baza produs* și deci oricare ar fi $T \in \mathcal{T}^p_q(\mathbf{V})$ putem scrie

$T = T^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \ldots \otimes e^{j_q}$ (convenția Einstein de însumare), unde

$$T^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} = T(e^{i_1}, \ldots, e^{i_p}, e_{j_1}, \ldots, e_{j_q})$$

sînt *coordonatele tensorului* T.

Fie $\{e_1, \ldots, e_n\}$ și $\{e_{1'}, \ldots, e_{n'}\}$ două baze în $\mathbf{V}$ și $\{e^1, \ldots, e^n\}$ respectiv $\{e^{1'}, \ldots e^{n'}\}$ bazele duale corespunzătoare din $\mathbf{V}^*$. Schimbarea bazelor este descrisă de relațiile

$$e_{i'} = A^i_{i'} e_i, \quad e^{i'} = A^{i'}_i e^i,$$

unde

$$A^{i'}_i A^i_{j'} = \delta^{i'}_{j'}, \quad A^i_{i'} A^{i'}_j = \delta^i_j.$$

Corespunzător,

$$e_{i'_1} \otimes \ldots \otimes e_{i'_p} \otimes e^{j'_1} \otimes \ldots \otimes e^{j'_q} = A^{i_1}_{i'_1} \ldots A^{i_p}_{i'_p} A^{j'_1}_{j_1} \ldots A^{j'_q}_{j_q} e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \ldots \otimes e^{j_q}$$

și

$$T^{i'_1 \ldots i'_p}_{j'_1 \ldots j'_q} = A^{i'_1}_{i_1} \ldots A^{i'_p}_{i_p} A^{j_1}_{j'_1} \ldots A^{j_q}_{j'_q} T^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}.$$

5.4. Fie $\omega: \mathbf{V} \times \ldots \times \mathbf{V} \to \boldsymbol{R}$, $(v_1, \ldots, v_q) \to \omega(v_1, \ldots, v_q)$, un tensor de tipul $(0, q)$. Acesta se numește

1) *simetric* dacă valoarea sa rămîne aceeași pentru toate permutările posibile ale argumentelor,

2) *antisimetric* dacă valoarea sa după orice permutare a argumentelor este produsul dintre valoarea înainte de permutare și semnul permutării.

5.5. Fie $p > 0$, $q > 0$, $s = 1, \ldots, p$, $t = 1, \ldots, q$. Aplicația $\mathrm{tr}^i_j: T^p_q(\mathbf{V}) \to T^{p-1}_{q-1}(\mathbf{V})$, definită prin

$$(\mathrm{tr}^i_j T)(\omega^1, \ldots, \omega^{p-1}, V_1, \ldots, V_{q-1}) = \sum_{k=1}^{n} T(\omega^1, \ldots, \omega^{s-1}, e^k, \omega^s, \ldots, \omega^{p-1}, v_1, \ldots, v_{t-1},$$

e_k, $v_t, \ldots, v_{q-1})$ unde $\{e_1, \ldots, e_n\}$ este baza lui $\mathbf{V}$, iar $\{e^1, \ldots, e^n\}$ este baza duală din $\mathbf{V}^*$, se numește *contracție*. Pe coordonate,

$$(\mathrm{tr}^i_j T)^{i_1 \ldots i_{p-1}}_{j_1 \ldots j_{q-1}} = \sum_{k=1}^{n} T^{i_1 \ldots i_{s-1} k i_s \ldots i_{p-1}}_{j_1 \ldots j_{t-1} k j_t \ldots j_{q-1}}.$$

5.6. Presupunem că $\mathbf{V}$ este un spațiu euclidian; *produsul scalar sau metrica riemaniană* (,) pe $\mathbf{V}$ nu este altceva decît un tensor covariant de ordinul doi (formă biliniară), simetric și pozitiv definit. Metrica induce o aplicație liniară nesingulară $G: \mathbf{V} \to \mathbf{V}^*$, $G(u)(v) = (u, v)$, pentru orice $v \in \mathbf{V}$. Fie $\overline{G}^1$ inversa lui G; dacă $\omega \in \mathbf{V}^*$, atunci $(\overline{G}^1\omega, v) = \omega(v)$.

Fie $s = 1, \ldots, p$; $t = 1, \ldots, q$ și $T \in \mathcal{T}^p_q(\mathbf{V})$. Definim $\mathcal{G}_{s,t}: \mathcal{T}^p_q(\mathbf{V}) \to T^{p-1}_{q-1}(\mathbf{V})$, $(\mathcal{G}_{s,t}T)(\omega^1, \ldots, \omega^{p-1}, v_1, \ldots, v_{q+1}) = T(\omega^1, \ldots, \omega^{s-1}, G(v_t), \omega^s, \ldots, \omega^{p-1}, v_1, \ldots, \hat{v}_t, \ldots, \ldots, v_{q+1})$, unde semnul „^" înseamnă că argumentul respectiv lipsește. Pe coordonate,

$$(\mathcal{G}_{s,t}T)^{i_1 \ldots i_{p-1}}_{j_1 \ldots j_{t-1} s j_{t+1} \ldots j_{q+1}} = G_{st} T^{i_1 \ldots i_{s-1} t i_s \ldots i_{p-1}}_{j_1 \ldots j_{t-1} j_{t+1} \ldots j_{q+1}}.$$

Această operație se numește *„coborîrea" indicilor*. Analog, utilizînd pe G^{-1}, se definește *„ridicarea" indicilor*.

5.7. Fie $\boldsymbol{D}$ o mulțime deschisă și conexă din $\boldsymbol{R}^n$ și $\mathcal{F}(\boldsymbol{D})$ algebra reală a funcțiilor reale diferențiabile, definite pe $\boldsymbol{D}$. Un vector X_x tangent la $\boldsymbol{D}$ în punctul $x = (x^1, \ldots, x^n)$ poate fi privit ca o funcție $X_x: \mathcal{F}(\boldsymbol{D}) \to \boldsymbol{R}$ cu proprietățile

$$X_x(\mathrm{f} + \mathrm{g}) = X_x(\mathrm{f}) + X_x(\mathrm{g}),\ X_x(a\mathrm{f}) = aX_x(\mathrm{f}), \quad a \in \boldsymbol{R},$$

$$X_x(\mathrm{fg}) = (X_x(\mathrm{f}))\,\mathrm{g}(x) + \mathrm{f}(x)\,X_x(\mathrm{g}).$$

În acest context baza canonică a spațiului tangent $T_x\boldsymbol{D}$ este

$$\left\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right\}.$$

Un cîmp vectorial $\mathbf{X}$ pe $\boldsymbol{D}$ este o funcție $\mathbf{X}: \boldsymbol{D} \to \bigcup_{x \in \boldsymbol{D}} T_x\boldsymbol{D}$, $\mathbf{X}(x) \in T_x\boldsymbol{D}$.

Deci

$$\mathbf{X}(x) = \mathbf{X}^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Cîmpul $\mathbf{X}$ se numește *diferențiabil* dacă funcțiile coordonate $x \to \mathbf{X}^i(x)$ sînt diferențiabile. Adunarea dintre două cîmpuri vectoriale și produsul dintre o funcție reală și un cîmp vectorial se definesc punctual.

Alternativ, cîmpul vectorial $\mathbf{X}$ poate fi privit ca fiind aplicația $\mathbf{X}: \mathfrak{F}(\boldsymbol{D}) \to \mathfrak{F}(\boldsymbol{D})$ cu proprietățile

$$\mathbf{X}(f + g) = \mathbf{X}(f) + \mathbf{X}(g), \quad \mathbf{X}(af) = a\mathbf{X}(f), \qquad a \in \boldsymbol{R},$$
$$\mathbf{X}(fg) = (\mathbf{X}(f))\, g + f(\mathbf{X}(g)\,.$$

Fie $\mathbf{X}$ și $\mathbf{Y}$ două cîmpuri vectoriale diferențiabile pe $\boldsymbol{D}$. Cîmpul vectorial $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]$ definit prin $f \to [\mathbf{X}, \mathbf{Y}]\ (f) = \mathbf{X}(\mathbf{Y}\ (f)) - \mathbf{Y}(\mathbf{X}(f))$ se numește *croșetul* cîmpurilor $\mathbf{X}$ și $\mathbf{Y}$. Deoarece pentru orice trei cîmpuri vectoriale diferențiabile $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}$ avem $\Sigma[\mathbf{X}, [\mathbf{Y}, \mathbf{Z}]] = 0$, mulțimea $\mathfrak{X}(\boldsymbol{D})$ a tuturor cîmpurilor vectoriale diferențiabile pe $\boldsymbol{D}$ este o algebră Lie peste cîmpul $\boldsymbol{R}$.

5.8. Fie $\mathfrak{F}(\boldsymbol{D})$ algebra funcțiilor reale diferențiabile pe $\boldsymbol{D}$ și $\mathfrak{X}(\boldsymbol{D})$ algebra Lie a cîmpurilor vectoriale diferențiabile pe $\boldsymbol{D}$. O funcție $\omega: \mathfrak{X}(\boldsymbol{D}) \to \mathfrak{F}(\boldsymbol{D})$, $\mathfrak{F}(\boldsymbol{D})$ — liniară, $\omega(\mathbf{X}) =$ diferențiabilă oricare ar fi $\mathbf{X}$, se numește *1-formă diferențială* pe $\boldsymbol{D}$. Adunarea a două 1-forme diferențiale și produsul dintre o funcție reală și o 1-formă diferențială se definesc punctual.

Fie $T_x^*\boldsymbol{D}$ dualul spațiului tangent $T_x\boldsymbol{D}$. Baza canonică în $T_x^*\boldsymbol{D}$ este $\{dx^1, \ldots, dx^n\}$, fiind duală bazei $\left\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right\}$ din $T_x\boldsymbol{D}$. De aceea expresia locală a unei 1-forme diferențiale ω este $\omega(x) = \omega_i(x)\, dx^i$.

Mulțimea tuturor 1-formelor diferențiale pe $\boldsymbol{D}$ va fi notată cu $\mathfrak{X}^*(\boldsymbol{D})$.

5.9. Fie $\mathcal{T}_q^p(T_x\boldsymbol{D})$ mulțimea tuturor tensorilor de tipul (p, q) pe spațiul tangent $T_x\boldsymbol{D}$. O funcție

$$T: \boldsymbol{D} \to \bigcup_{x \in \boldsymbol{D}} \mathcal{T}_q^p(T_x\boldsymbol{D}), \quad T(x) \in \mathcal{T}_q^p(T_x\boldsymbol{D}),$$

se numește *cîmp tensorial de tipul* (p, q) pe $\boldsymbol{D}$.

Fie $\mathcal{T}_q^p(\boldsymbol{D})$ mulțimea tuturor cîmpurilor tensoriale pe $\boldsymbol{D}$ de tipul (p, q). Adunarea a două elemente din această mulțime ca și produsul dintre o funcție reală și un cîmp tensorial se definesc punctual.

Deoarece baza canonică în $\mathcal{T}_q^p(T_x\boldsymbol{D})$ este

$$\left\{\frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \ldots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_p}} \otimes dx^{j_1} \otimes \ldots \otimes dx^{j_q}\right\},$$

expresia în coordonate a lui T este

$$T(x) = T_{j_1 \ldots j_q}^{i_1 \ldots i_p}(x) \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \ldots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_p}} \otimes dx^{j_1} \otimes \ldots \otimes dx^{j_q}.$$

Cîmpul T se numește *diferențiabil* dacă funcțiile coordonate sînt diferențiabile.

Echivalent, un cîmp tensorial de tipul (p, q) este o funcție

$$T: \underbrace{\mathfrak{X}^*(\boldsymbol{D}) \times \ldots \times \mathfrak{X}^*(\boldsymbol{D})}_{p \text{ factori}} \times \underbrace{\mathfrak{X}(\boldsymbol{D}) \times \ldots \times \mathfrak{X}(\boldsymbol{D})}_{q \text{ factori}} \to \mathfrak{F}(\boldsymbol{D}),$$

$(\omega^1, \ldots, \omega^p, X_1, \ldots, X_q) \to T(\omega^1, \ldots, \omega^p, X_1, \ldots, X_q)$, $\mathfrak{F}(\boldsymbol{D})$ — liniară în fiecare argument.

Definițiile cîmpurilor tensoriale simetrice respectiv antisimetrice ca și definițiile produsului tensorial și contracției pentru cîmpuri tensoriale sînt evidente.

5.10. Fie x un punct din $\boldsymbol{D}$ caracterizat pe de o parte prin coordonatele $(x^1, \ldots, x^n) = (x^i)$, iar pe de altă parte prin coordonatele $(x^{1'}, \ldots, x^{n'}) = (x^{i'})$, schimbarea de coordonate fiind $x^{i'} = x^{i'}(x^i)$ cu inversa $x^i = x^i(x^{i'})$. Baza $\left\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right\}_x$ se schimbă în $\left\{\frac{\partial}{\partial x^{1'}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^{n'}}\right\}_x$ cu legătura $\left.\frac{\partial'}{\partial x^i}\right|_x = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}(x^i)\left.\frac{\partial}{\partial x^{i'}}\right|_x$; corespunzător baza duală $\{\mathrm{d}x^1, \ldots, \mathrm{d}x^n\}_x$ se schimbă în $\{\mathrm{d}x^{1'}, \ldots, \mathrm{d}x^{n'}\}_x$, $\mathrm{d}x^i|_x = \frac{\partial x^i}{\mathrm{d}x^{i'}}(x^{i'})\,\mathrm{d}x^{i'}|_x$. Evident,

$$\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial x^{j'}} = \delta^{i'}_{j'}, \quad \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j} = \delta^i_j.$$

Corespunzător,

$$\frac{\partial}{\partial x^{i'_1}} \otimes \ldots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i'_p}} \otimes \mathrm{d}x^{j'_1} \otimes \ldots \otimes \mathrm{d}x^{j'_q} = \frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{i'_1}} \ldots \frac{\partial x^{i_p}}{\partial x^{i'_p}}\frac{\partial x^{j'_1}}{\partial x^{j_1}} \ldots \frac{\partial x^{j'_q}}{\partial x^{j_q}} \times$$

$$\times \frac{\partial}{\partial x^{i'}} \otimes \ldots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_p}} \otimes \mathrm{d}x^{j_1} \otimes \ldots \otimes \mathrm{d}x^{j_q}.$$

și

$$T^{i'_1 \ldots i'_p}_{j'_1 \ldots j'_q} = \frac{\partial x^{i'_1}}{\partial x^{i_1}} \ldots \frac{\partial x^{i'_p}}{\partial x^{i_p}}\frac{\partial x^{j_1}}{\partial x^{j'_1}} \ldots \frac{\partial x^{j_q}}{\partial x^{j'_q}} T^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}.$$

5.11. O funcție $D: \mathfrak{X}(\boldsymbol{D}) \times \mathfrak{X}(\boldsymbol{D}) \to \mathfrak{X}(\boldsymbol{D})$, $(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \to D_{\mathbf{X}}\mathbf{Y}$, cu proprietățile

$D_{\mathbf{X}}(\mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2) = D_{\mathbf{X}}\mathbf{Y}_1 + D_{\mathbf{X}}\mathbf{Y}_2$, $D_{\mathbf{X}_1+\mathbf{X}_2}\mathbf{Y} = D_{\mathbf{X}_1}\mathbf{Y} + D_{\mathbf{X}_2}\mathbf{Y}$,

$D_{\mathbf{X}}(\mathrm{f}\mathbf{Y}) = \mathrm{f}D_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} + \mathbf{X}(\mathrm{f})\mathbf{Y}$, $D_{\mathrm{f}\mathbf{X}}\mathbf{Y} = \mathrm{f}D_{\mathbf{X}}\mathbf{Y}$, oricare ar fi $\mathrm{f} \in \mathscr{F}(\boldsymbol{D})$, se numește *conexiune liniară* sau *derivare covariantă* pe $\boldsymbol{D}$.

Fie D o conexiune liniară pe $\boldsymbol{D}$. Funcțiile $\Gamma^h_{ij}: \boldsymbol{D} \to \boldsymbol{R}$, $i, j, k = 1, .., n$, definite prin

$$D_{\frac{\delta}{\delta x^1}}\frac{\partial}{\partial x^j} = \Gamma^h_{ij}\frac{\partial}{\partial x^h},$$

se numesc *componentele conexiunii* D. Conexiunea D se numește *simetrică* dacă $\Gamma^h_{ij} = \Gamma^h_{ji}$.

Curbele definite local prin sistemul

$$\frac{\mathrm{d}^2x^i}{\mathrm{d}t^2} + \Gamma^i_{jk}\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}t} = 0, \quad i, j, k = 1, \ldots, n$$

se numesc *geodezicele* conexiunii D.

5.12. Fie D o conexiune pe $\boldsymbol{D}$ și $X \in \mathfrak{X}(\boldsymbol{D})$. Conexiunea D induce *derivarea covariantă în raport cu* X, notată D_X, care aplică pe $\mathscr{T}^p_q(\boldsymbol{D})$ în el însuși. Operatorul D_X se definește prin

$D_X\mathrm{f} = X(\mathrm{f})$, $\quad \mathrm{f} \in \mathscr{F}(\boldsymbol{D})$,

$D_X\mathbf{Y}$ este dat de conexiunea pe $\boldsymbol{D}$,

$(D_X\omega)(\mathbf{Y}) = X(\omega(\mathbf{Y})) - \omega(D_X\mathbf{Y})$, $\quad \omega \in \mathscr{T}^0_1(\boldsymbol{D})$,

$(D_X T(\omega^1, \ldots, \omega^p, Y_1, \ldots, Y_q) = X(T(\omega^1, \ldots, \omega^p, Y_1, \ldots, Y_q)) - T(D_X\omega^1, \omega^2, .., \omega^p, Y_1, \ldots, Y_q) - \ldots - T(\omega^1, \ldots, \omega^p, Y_1, \ldots, D_X Y_q)$, $\quad T \in \mathscr{T}^p_q(\boldsymbol{D})$.

Se verifică relația $D_X(S \otimes T) = D_X S \otimes T + S \otimes D_X T$, oricare ar fi S, T. Operatorul D_X induce un *operator general de derivare covariantă* care aplică pe $\mathcal{T}_q^p(\boldsymbol{D})$ în $\mathcal{T}_{q+1}^p(\boldsymbol{D})$.

5.13. Un cîmp tensorial g de tipul (0,2) pe **D** cu proprietatea că $g(x)$ este o metrică riemaniană pe $T_x\boldsymbol{D}$ se numește *cîmp tensorial metric*. Cîmpul tensorial metric induce operațiile de „ridicare" și „coborîre" a indicilor pe cîmpurile tensoriale (vezi 5.6).

5.14. În paragrafele 5.7—5.13 mulțimea $\boldsymbol{D}$ poate fi înlocuită cu orice subvarietate de dimensiune $m \geqslant 1$ cu sau fără frontieră, a lui $\boldsymbol{R}^n$.

Exerciții și probleme

1. Să se verifice că $(\xi,): \mathcal{T}_q^p(\mathbf{V}) \times \mathcal{T}_q^p(\mathbf{V}) \to \boldsymbol{R}$, $(S, T) = S_{j_1 \ldots j_q}^{i_1 \ldots i_p} T_{i_1 \ldots i_p}^{j_1 \ldots j_q}$ este un produs scalar pe $\mathcal{T}_q^p(\mathbf{V})$.

2. Fie **V** un spațiu euclidian cu metrica $g = [g_{ij}]$, $g^{-1} = [g^{ij}]$. Să se verifice că următoarele funcții sînt produse scalare

1) funcția definită prin $S \cdot T = g^{i_1 j_1} \ldots g^{i_q j_q} S_{i_1 \ldots i_q} T_{j_1 \ldots j_q}$, $S, T \in \mathcal{T}_q(\mathbf{V})$,

2) funcția definită prin $A \cdot B = g_{i_1 j_1} \ldots g_{i_p j_p} A^{i_1 \ldots i_p} B^{i_1 \ldots i_p}$, $A, B \in \mathcal{T}^p(\mathbf{V})$.

3. Fie **V** un spațiu euclidian real cu trei dimensiuni și $\mathcal{T}: \mathbf{V} \to \mathbf{V}$. Să se verifice relația $(\mathcal{T}(u), \mathcal{T}(v) \times \mathcal{T}(w)) = (\det)(u, v \times w)$. În ipoteza că $\mathcal{T}$ este nedegenerat, să se arate că $\mathcal{T}(v) \times \mathcal{T}(w) = (\det \mathcal{T})\, {}^t(\mathcal{T}^{-1})\, v \times w$.

4. 1) Să se verifice că mulțimea tensorilor simetrici, covarianți, de ordinul r, este un subspațiu al lui $\mathcal{T}_r(\mathbf{V})$.

2) Fie $S_r: \mathcal{T}_r(\mathbf{V}) \to \mathcal{T}_r(\mathbf{V})$, $S_r(A)(v_1, \ldots, v_r) = \dfrac{1}{r!} \sum\limits_{\sigma} A(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(r)})$, $v_1, \ldots, v_r \in \mathbf{V}$. Să se arate că S_r este o proiecție a lui $\mathcal{T}_r(\mathbf{V})$ în subspațiul tensorilor simetrici de ordinul r. Să se găsească Ker S_r.

5. Utilizînd izomorfismul canonic dintre $\mathcal{L}(\mathbf{V}, \mathbf{V})$ și $\mathcal{T}_1^1(\mathbf{V})$ să se arate că endomorfismul $\mathcal{T}: \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ și dualul său $\mathcal{T}^*: \mathbf{V}^* \to \mathbf{V}^*$ corespund aceluiași tensor $T \in \mathcal{T}_1^1(\mathbf{V})$.

6. Fie $T \in \mathcal{T}_2(\mathbf{V})$ și $[T_{ij}]$ matricea coordonatelor sale. Să se verifice că la o schimbare a bazei avem

$$\det[T_{i'j'}] = (\det[A_{i'}^i])^2 \det[T_{ij}].$$

7. Fie tensorii $\{A_{i_1 \ldots i_p klm}\}$, $\{C_{i_1 \ldots i_p}\}$. Să se verifice că numerele $B(k, l, m)$ care satisfac relația

$$\sum_{k, l, m} A_{i_1 \ldots i_p klm} B(k, l, m) = C_{i_1 \ldots i_p}$$

sînt coordonatele unui tensor din $\mathcal{T}^3(\mathbf{V})$.

8. Pentru fiecare $A \in \mathcal{T}_{p+q}(\mathbf{V})$ definim $T_{pq}A \in \mathcal{T}_{p+q}(\mathbf{V})$ prin $T_{pq}A(u_1, \ldots, u_q, v_1, \ldots, v_p) = A(v_1, \ldots, v_p, u_1, \ldots, u_q)$, $v_i, u_j \in \mathbf{V}$.

Să se arate că $\mathcal{T}_{pq}: \mathcal{T}_{p+q}(\mathbf{V}) \to \mathcal{T}_{p+q}(\mathbf{V})$ este un *automorfism (transpunerea generalizată)*. Ce legături sînt între coordonatele lui A și coordonatele lui $T_{pq}A$?

9. Fie x și x' cele două hărți din atlasul stereografic al sferei S^2 și $a, b \in \boldsymbol{R}$. Să se arate că expresiile locale

$$(ax^1 - bx^2)\frac{\partial}{\partial x^1} + (bx^1 + ax^2)\frac{\partial}{\partial x^2}$$

$$(-ax^{1'} - bx^{2'})\frac{\partial}{\partial x^{1'}} + (bx^{1'} - ax^{2'})\frac{\partial}{\partial x^{2'}}$$

definesc un cîmp vectorial pe S^2.

Soluție. Fie $N = (0, 0, 1)$ polul nord, fie $S = (0, 0, -1)$ polul sud și $\xi^3 = 0$ planul ecuator identificat cu $\boldsymbol{R}^2$ (fig. 3.49). Fiecărui $M \in S^2 - \{N\}$ i se atașază $P \in \boldsymbol{R}^2$, unde $P = MN \cap \boldsymbol{R}^2$, stabilindu-se o corespondență biunivocă între $S^2 - \{N\}$ și $\boldsymbol{R}^2$. Explicit, dacă $M(\xi^1, \xi^2, \xi^3)$ atunci

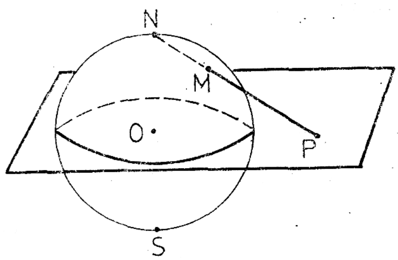


Fig. 3.49.

$$NM: \frac{x^1}{\xi^1} = \frac{x^2}{\xi^2} = \frac{x^3 - 1}{\xi^3 - 1} = t; \quad \boldsymbol{R}^2: \xi^3 = 0$$

și considerînd pe (x^1, x^2) drept coordonate în plan găsim $x: S - \{N\} \to \boldsymbol{R}^2$,

$$x^1 = \frac{\xi^1}{1 - \xi^3}, \quad x^2 = \frac{\xi^2}{1 - \xi^3}$$

cu inversa $x^{-1}: \boldsymbol{R}^2 \to S^2 - \{N\}$,

$$\xi^1 = \frac{2x^1}{(x^1)^2 + (x^2)^2 + 1}, \quad \xi^2 = -\frac{2x^2}{(x^1)^2 + (x^2)^2 + 1},$$

$$\xi^3 = \frac{(x^1)^2 + (x^2)^2 - 1}{(x^1)^2 + (x^2)^2 + 1}.$$

Analog procedăm pentru $S^2 - \{S\}$. Găsim $x': S^2 - \{S\} \to \boldsymbol{R}^2$,

$$x^{1'} = \frac{\xi^1}{1 + \xi^3}, \quad x^{2'} = \frac{\xi^2}{1 + \xi^3}$$

cu inversa $(x')^{-1}: \boldsymbol{R}^2 \to S^2 - \{S\}$,

$$\xi^1 = \frac{2x^{1'}}{1 + (x^{1'})^2 + (x^{2'})^2}, \quad \xi^2 = \frac{2x^{2'}}{1 + (x^{1'})^2 + (x^{2'})^2},$$

$$\xi^3 = \frac{1 - (x^{1'})^2 + (x^{2'})^2}{1 + (x^{1'})^2 + (x^{2'})^2}.$$

Astfel schimbările de coordonate sînt date prin

$$x' \circ x^{-1} \begin{cases} x^{1'} = \dfrac{x^1}{(x^1)^2 + (x^2)^2} \\ x^{2'} = \dfrac{x^2}{(x^1)^2 + (x^2)^2} \end{cases}, \quad x \circ (x')^{-1} \begin{cases} x^1 = \dfrac{x^{1'}}{(x^{1'})^2 + (x^{2'})^2} \\ x^2 = \dfrac{x^{2'}}{(x^{1'})^2 + (x^{2'})^2} \end{cases}.$$

Evident acestea sînt C^∞ pe $\boldsymbol{R}^2 - \{0\}$.

Rezultă

$$\frac{\partial x^1}{\partial x^{1'}} = \frac{(x^{2'})^2 - (x^{1'})^2}{((x^{1'})^2 + (x^{2'})^2)^2} = -\frac{\partial x^2}{\partial x^{2'}},$$

$$\frac{\partial x^1}{\partial x^{2'}} = \frac{-2x^{1'}x^{2'}}{((x^{1'})^2 + (x^{2'})^2)^2} = \frac{\partial x^2}{\partial x^{1'}}.$$

Fie $X^1 = ax^1 - bx^2$, $X^2 = bx^1 + ax^2$ și $X^{1'} = -ax^{1'} - bx^{2'}$, $X^{2'} = bx^{1'} - ax^{2'}$. Relațiile

$$X^1 = \frac{\partial x^1}{\partial x^{1'}} X^{1'} + \frac{\partial x^1}{\partial x^{2'}} X^{2'}, \quad X^2 = \frac{\partial x^2}{\partial x^{1'}} X^{1'} + \frac{\partial x^2}{\partial x^{2'}} X^{2'}$$

sînt identic verificate.

10. Pe $\boldsymbol{R}^3$ se consideră cîmpul vectorial

$$(x, y, z) \to \vec{V}(x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

Să se determine funcțiile coordonate covariante respectiv contravariante ale lui V în coordonate sferice (locale).

Soluție. În sistemul cartezian ortonormat coordonatele covariante se confundă cu cele contravariante. Deci

$$v_1 = v^1 = x, \quad v_2 = v^2 = y, \quad v_3 = v^3 = z.$$

Facem transformarea de coordonate

$$x = r \sin \varphi \cos \theta, \quad y = r \sin \varphi \sin \theta, \quad z = r \cos \varphi.$$

Notînd $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$ și respectiv $x^{1'} = r$, $x^{2'} = \varphi$, $x^{3'} = \theta$, din relațiile

$$v_{i'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} v_i$$

găsim

$$v_{1'} = (\sin \varphi \cos \theta)(r \sin \varphi \cos \theta) + (\sin \varphi \sin \theta)(r \sin \varphi \sin \theta) + \cos \varphi \times (r \cos \varphi) = r,$$

$$v_{2'} = (r \cos \varphi \cos \theta)(r \sin \varphi \cos \theta) + (r \cos \varphi \sin \theta)(r \sin \varphi \sin \theta) - (r \sin \varphi) \times (r \cos \varphi) = 0,$$

$$v_{3'} = (-r \sin \varphi \sin \theta)(r \sin \varphi \cos \theta) + (r \sin \varphi \cos \theta)(r \sin \varphi \sin \theta) + 0 = 0.$$

Analog, ținînd seama de

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \varphi = \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \theta = \operatorname{arctg} \frac{y}{x},$$

$$x, y, z > 0,$$

$$v^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} v^i,$$

rezultă

$$v^{1'} = r, \; v^{2'} = 0, \; v^{3'} = 0.$$

11. Pe $\boldsymbol{R}^3$ se dau cîmpurile vectoriale definite respectiv prin

$$\vec{V}(x, y, z) = x^2\vec{i} + xy\vec{j} - yz\vec{k},$$

$$\vec{V}(x, y, z) = r^2(\vec{a}\times\vec{r})\times\vec{r} + (\vec{a}, \vec{r})\,\vec{r},\ \vec{a} = \text{vector constant},$$

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},\ r = \|\,\vec{r}\,\|,$$

$$\vec{V}(x, y, z) = (\vec{a}\times\vec{r})\,\varphi(r) + \vec{r}\psi(r).$$

1) Să se determine funcțiile coordonate covariante respectiv contravariante în coordonate cilindrice și sferice.

2) Să se calculeze rot $\vec{V}$. Apoi să se găsească funcțiile coordonate covariante respectiv contravariante ale lui rot $\vec{V}$ în coordonate cilindrice și sferice.

12. Fie $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ și $f, g \in \mathfrak{F}(M)$. Să se verifice relațiile

$$[fX, gY] = fg[X, Y] + f(X(g))\,Y - g(Y(f))\,X,$$

$$[X, Y]\,(x) = (X_x(Y^i) - Y_x(X^i))\frac{\partial}{\partial x^i}\cdot$$

13. 1) Să se determine liniile de cîmp pentru

$$X(x^1, x^2, x^3) = x^2\frac{\partial}{\partial x^1} + x^3\frac{\partial}{\partial x^2} + x^1\frac{\partial}{\partial x^3}\cdot$$

2) Fie cîmpul vectorial definit pe $\boldsymbol{R}^3$ prin

$$\sum_h\left(a_{1h}x^h\frac{\partial}{\partial x^1} + a_{2h}x^h\frac{\partial}{\partial x^2} + a_{3h}x^h\frac{\partial}{\partial x^3}\right)\cdot$$

Utilizînd notațiile matriceale, să se arate că linia de cîmp care pleacă din punctul $z\in\boldsymbol{R}^3$ este $t\to\alpha(t) = e^{tA}\,z$, unde $A = [a_{ij}]$.

14. Fie $f, g, h \in \mathfrak{F}(\boldsymbol{R}^3)$ cu $g \neq 0$ și $\vec{V} = f\vec{i} + g\vec{j} + h\vec{k}$, $\vec{X} = -g\vec{i} + f\vec{j}$, $\vec{Y} = -h\vec{j} + g\vec{k}$. Notăm $Q_p = \{\vec{Z}\,|\,\vec{Z}\in T_p\boldsymbol{R}^3,\ (\vec{Z}, \vec{V}(p)) = 0\}$.

Să se arate că Q_p este un spațiu vectorial bidimensional, iar $\{\vec{X}(p), \vec{Y}(p)\}$ este o bază a sa. Să se verifice că $[\vec{X}, \vec{Y}]\,(p)\in Q_p \Leftrightarrow (\vec{V}(p), \text{rot}\,\vec{V}(p)) = 0$. Să se probeze că dacă $M = \varphi^{-1}(c)$ este o suprafață de nivel pentru care $T_pM = Q_p$, atunci $(\vec{V}(p), \text{rot}\,\vec{V}(p)) = 0$.

15. Utilizînd schimbările de coordonate, să se arate că

1) orice cîmp tensorial antisimetric de tipul (0, 2) pe o subvarietate de dimensiune trei este echivalent cu un cîmp pseudo-vectorial contravariant;

2) orice cîmp tensorial antisimetric de tipul (2, 0) pe o subvarietate de dimensiune trei este echivalent cu un cîmp pseudo-vectorial covariant.

Soluție. 1) Dacă $T_{ij} = -T_{ji}$ sînt coodonatele locale ale cîmpului tensorial antisimetric T, atunci la o schimbare de coordonate găsim

$$T_{i'j'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}T_{ij}.$$

Notînd $X^1 = T_{23}$, $X^2 = T_{31}$, $X^3 = T_{12}$, putem reprezenta cîmpul tensorial antisimetric T prin tripletul (X^1, X^2, X^3). Să vedem cum se schimbă funcțiile X^i la o schimbare de coordonate. Vom avea

$$X^{1'} = T_{2'3'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{2'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{3'}} T_{ij} = \left(\frac{\partial x^2}{\partial x^{2'}} \frac{\partial x^3}{\partial x^{3'}} - \frac{\partial x^3}{\partial x^{2'}} \frac{\partial x^2}{\partial x^{3'}}\right) T_{23} +$$

$$+ \left(\frac{\partial x^3}{\partial x^{2'}} \frac{\partial x^1}{\partial x^{3'}} - \frac{\partial x^1}{\partial x^{2'}} \frac{\partial x^3}{\partial x^{3'}}\right) T_{31} + \left(\frac{\partial x^1}{\partial x^{2'}} \frac{\partial x^2}{\partial x^{3'}} - \frac{\partial x^2}{\partial x^{2'}} \frac{\partial x^1}{\partial x^{3'}}\right) T_{12} =$$

$$= (\ldots) X^1 + (\ldots) X^2 + (\ldots) X^3.$$

Ținînd seama că $\dfrac{D(x^1, x^2, x^3)}{D(x^{1'}, x^{2'}, x^{3'})} = \Delta \neq 0$, formulele fundamentale

$$\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j} = \delta^i_j,$$

explicit,

$$\frac{\partial x^1}{\partial x^{1'}} \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^1} + \frac{\partial x^1}{\partial x^{2'}} \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^1} + \frac{\partial x^1}{\partial x^{3'}} \frac{\partial x^{3'}}{\partial x^1} = 1$$

$$\frac{\partial x^2}{\partial x^{1'}} \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^1} + \frac{\partial x^2}{\partial x^{2'}} \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^1} + \frac{\partial x^2}{\partial x^{3'}} \frac{\partial x^{3'}}{\partial x^1} = 0$$

$$\frac{\partial x^3}{\partial x^{1'}} \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^1} + \frac{\partial x^3}{\partial x^{2'}} \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^1} + \frac{\partial x^3}{\partial x^{3'}} \frac{\partial x^{3'}}{\partial x^1} = 0$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

implică

$$\frac{\partial x^{1'}}{\partial x^1} = \frac{1}{\Delta}\left(\frac{\partial x^2}{\partial x^{2'}} \frac{\partial x^3}{\partial x^{3'}} - \frac{\partial x^3}{\partial x^{2'}} \frac{\partial x^2}{\partial x^{3'}}\right), \text{ etc.}$$

Deci $X^{1'} = \Delta \dfrac{\partial x^{1'}}{\partial x^i} X^i$ și analog $X^{2'} = \Delta \dfrac{\partial x^{2'}}{\partial x^i} X^i$, $X^{3'} = \Delta \dfrac{\partial x^{3'}}{\partial x^i} X^i$.

2) Analog.

16. Fie D^+ o conexiune liniară cu tensorul de torsiune T nenul și cu componentele locale Γ^i_{jh}.

1) Să se arate că

$$D^-_X Y = D^+_X Y - T(X, Y)$$

este o conexiune liniară cu tensorul de torsiune $-T$.

2) Să se arate că

$$D_X Y = \frac{1}{2}(D^+_X Y + D^-_X Y)$$

este o conexiune liniară simetrică cu componentele $\dfrac{1}{2}(\Gamma^i_{jh} + \Gamma^i_{hj})$.

17. Fie M o subvarietate, fie $X \in \mathfrak{X}(M)$ și $\{e_1, \ldots, e_n\}$ o bază în $T_x M$ cu duala $\{e^1, \ldots, e^n\}$. Să se demonstreze că

$$(\operatorname{div} X)(x) = \sum_{i=1}^{n} e^i(D_{e_i} X).$$

18. Fie D o conexiune pe subvarietate M. Fie $t \to \alpha(t)$ o curbă integrală a lui $X \in \mathfrak{X}(M)$, fie $t \to \{e_1(t), \ldots, e_n(t)\}$ o bază formată din vectori paraleli de-a lungul lui α și $t \to Y(t) = \sum_i y_i(t)\, e_i(t)$ un cîmp vectorial de clasă C^∞ pe α. Să se arate că

$$(D_X Y)(t) = \sum_i \frac{\mathrm{d} y_i}{\mathrm{d} t}(t)\, e_i(t).$$

19. Știind că

$$x \to \Gamma^i_{jk}(x) = \begin{cases} 1 \text{ pentru } i = j = 1,\ k = 2 \text{ sau } i = k = 1,\ j = 2 \\ 0 \text{ în rest} \end{cases}$$

sînt componentele unei conexiuni pe $\boldsymbol{R}^2$, să se găsească geodezicele.

20. Fie M o subvarietate și D o conexiune pe M.

1) *(Cîmpul tensorial de torsiune)* Să se arate că

$T: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$, $T(X, Y) = D_X Y - D_Y X - [X, Y]$ este un cîmp tensorial $T \in \mathcal{T}^1_2(M)$.

2) *(Cîmpul tensorial de curbură)* Să se arate că

$R: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$, $R(X, Y)\, Z = D_X(D_Y Z) - D_Y(D_X Z) - D_{[X, Y]} Z$ este un cîmp tensorial $R \in \mathcal{T}^1_3(M)$.

3) Să se verifice relația $T(X, Y) = -T(Y, X)$. Apoi, în ipoteza $T = 0$, să se arate că $R(X, Y)\, Z + R(Y, Z)\, X + R(Z, X)\, Y = 0$ *(identitatea* lui *Bianchi)*.

4) Fie Γ^h_{ij} componentele conexiunii D. Să se verifice că coordonatele locale ale lui T și R sînt respectiv

$$T^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} - \Gamma^i_{kj},$$

$$R^h_{ijk} = \frac{\partial \Gamma^h_{ki}}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma^h_{ji}}{\partial x^k} + \Gamma^r_{ki} \Gamma^h_{jr} - \Gamma^r_{ji} \Gamma^h_{kr}.$$

21. *(Conexiunea riemanniană)*. Fie M o subvarietate înzestrată cu metrica g. Să se arate că pe M există o conexiune D cu proprietățile

(i) $T(X, Y) = 0$,

(ii) $D_X \mathrm{g}(Y, Z) = \mathrm{g}(D_X Y, Z) + \mathrm{g}(Y, D_X Z)$, oricare ar fi $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$.

Să se expliciteze componentele locale ale lui D.

Soluție. Deoarece $T(X, Y) = D_X Y - D_Y Y - [X, Y] = 0$, rezultă

(iii) $\mathrm{g}(D_X Y, Z) - \mathrm{g}(D_Y X, Z) = \mathrm{g}([X, Y]), Z)$.

Dar condițiile (ii) și (iii) sînt echivalente cu

$$\text{(iv)}\ 2\mathrm{g}(D_X Y, Z) = X(\mathrm{g}(Y, Z)) + Y(\mathrm{g}(X, Z)) - Z(\mathrm{g}(X, Y)) + \\ + \mathrm{g}([Z, X], Y) + \mathrm{g}([Z, Y], X) + \mathrm{g}([X, Y], Z).$$

Această relație implică unicitatea lui D.

Pe de altă parte relația (iv) definește o coenxiune care verifică pe (i) și (ii), deoarece g este nedegenerată.

Punînd $X = \frac{\partial}{\partial x^i}$, $Y = \frac{\partial}{\partial x^j}$, $Z = \frac{\partial}{\partial x^k}$ relația (iv) implică

$$2\Gamma^r_{ij} g_{rk} = \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}$$

și deci

$$\Gamma^h_{ij} = \frac{1}{2} g^{hk} \left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right).$$

(simbolurile lui Christoffel).

§ 6. FORME DIFERENȚIALE ȘI FORMULE INTEGRALE

6.1. Fie **V** un spațiu vectorial real de dimensiune n. O *q — formă sau formă (alternată) de ordinul q* pe **V** este o funcție

$$\omega : \underbrace{\mathbf{V} \times \ldots \times \mathbf{V}}_{q \text{ factori}} \to \boldsymbol{R}, \quad (v_1, \ldots, v_q) \to \omega(v_1, \ldots, v_q),$$

care satisface următoarele condiții:

1) *multiliniară:* pentru fiecare $i \in \{1, \ldots, q\}$ și $v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_q \in \mathbf{V}$, funcția $v \to \omega(v_1, \ldots, v_{i-1}, v, v_{i+1}, \ldots, v_q)$ este liniară,

2) *antisimetrică:* pentru fiecare $v_1, \ldots, v_q \in \mathbf{V}$ și pentru fiecare permutare σ a mulțimii $\{1, \ldots, q\}$ se satisface $\omega(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(q)}) = (\text{sign}\, \sigma)\, \omega(v_1, \ldots, v_q)$.

Cu alte cuvinte, o q-formă pe **V** nu este altceva decît un tensor antisimetric de tipul $(0, q)$ pe **V**.

Mulțimea tuturor q-formelor pe **V** se notează cu $\mathcal{F}_q(\mathbf{V})$ și este un spațiu vectorial real de dimensiune

$$\dim \mathcal{F}_q(\mathbf{V}) = \begin{cases} \dfrac{n!}{q!\,(n-q)!} & \text{dacă } 0 \leqslant q \leqslant n \\ 0 & \text{dacă } q > n \end{cases}$$

Evident, $\mathcal{F}_0(\mathbf{V}) = \boldsymbol{R}$, $\mathcal{F}_1(\mathbf{V}) = \mathbf{V}^*$.

6.2. Fie $\mathcal{F}_p(\mathbf{V})$, $\mathcal{F}_q(\mathbf{V})$ și $\mathcal{F}_{p+q}(\mathbf{V})$. Funcția

$$\wedge : \mathcal{F}_p(\mathbf{V}) \times \mathcal{F}_q(\mathbf{V}) \to \mathcal{F}_{p+q}(\mathbf{V})$$

definită prin

$$(\omega^1 \wedge \omega^2)(v_1, \ldots, v_{p+q}) = \frac{1}{(p+q)!} \Sigma\, (\text{sign}\, \sigma)\, \omega^1(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(p)}) \cdot \omega^2(v_{\sigma(p+1)}, \ldots,$$

$\ldots, v_{\sigma(p+q)})$ suma fiind luată după toate permutările σ ale lui $\{1, \ldots, p+q\}$, se numește *produs exterior* (este o operație biliniară, asociativă). Această definiție se extinde la un număr finit de factori.

Evident, $\omega^1 \wedge \omega^2 = (-1)^{pq} \omega^2 \wedge \omega^1$.

6.3. Fie $\{e_1, \ldots, e_n\}$ o bază a lui **V** și $\{e^1, \ldots, e^n\}$ baza duală în $\mathbf{V}^*$. Mulțimea $\{e^{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{i_q},\ i_1 < i_2 < \ldots < i_q\}$ este o bază a lui $\mathcal{F}_q(\mathbf{V})$ și deci oricare ar fi $\omega \in \mathcal{F}_q(\mathbf{V})$ putem scrie

$\omega = \omega_{i_1 \ldots i_q} e^{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{i_q}$ (convenția Einstein de însumare), unde

$\omega_{i_1 \ldots i_q} = q!\, \omega(e_{i_1}, \ldots, e_{i_q})$, $i_1 < \ldots < i_q$ sînt coordonatele stricte ale *q-formei.*

6.4. Fie $\boldsymbol{D}$ o mulțime deschisă din $\boldsymbol{R}^n$, fie $T_x\boldsymbol{D}$ spațiul tangent la $\boldsymbol{D}$ în punctul x și $\mathcal{F}_q(T_x\boldsymbol{D})$ mulțimea tuturor q-formelor pe $T_x\boldsymbol{D}$. O funcție

$$\omega : \boldsymbol{D} \to \bigcup_{x\in \boldsymbol{D}} \mathcal{F}_q(T_x\boldsymbol{D}), \quad \omega(x) \in \mathcal{F}_q(T_x\mathbf{D}),$$

se numește *q-formă diferențială sau formă diferențială de ordinul q* pe $\boldsymbol{D}$. Cu alte cuvinte o q-formă diferențială este un cîmp tensorial antisimetric de tipul $(0, q)$ pe $\boldsymbol{D}$.

Fie $\mathcal{F}_q$ (D) mulțimea tuturor q-formelor diferențiale pe $\boldsymbol{D}$. Adunarea a două elemente din această mulțime ca și produsul dintre o funcție reală și o q-formă se definesc punctual.

Fie $T_x^*\boldsymbol{D}$ dualul spațiului tangent. Baza canonică în $T_x\boldsymbol{D}$ este $\left\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right\}$, iar duala sa, bază în $T_x^*\boldsymbol{D}$ este $\{dx^1, \dots, dx^n\}$. Baza indusă în $\mathcal{F}_q(\boldsymbol{D})$ este $\{dx^{i_1}\wedge \dots \wedge dx^{i_q},\ i_1 < i_2 < \dots < i_q\}$. De aceea expresia în coordonate a lui ω este

$$\omega(x) = \omega_{i_1\dots i_q}(x)\, dx^{i_1}\wedge \dots \wedge dx^{i_q}.$$

În continuare vom face ipoteza că funcțiile $x \to \omega_{i_1\dots i_q}(x)$ sînt de clasă C^∞ pe $\boldsymbol{D}$.

Fie $\mathcal{F}(\boldsymbol{D})$ algebra funcțiilor reale și $\mathfrak{X}(\boldsymbol{D})$ algebra Lie a cîmpurilor vectoriale. O q-formă diferențială pe **D** poate fi privită ca fiind funcția

$$\omega : \mathfrak{X}(\boldsymbol{D}) \times \dots \times \mathfrak{X}(\boldsymbol{D}) \to \mathcal{F}(\boldsymbol{D}),\ (X_1, \dots, X_q) \to \omega(X_1, \dots, X_q)$$

$\mathcal{F}(\boldsymbol{D})$-liniară în fiecare argument și cu proprietatea $\omega(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(q)}) = (\text{sign}\,\sigma)\,\omega(X_1, \dots, X_q)$, unde σ este o permutare a mulțimii $\{1, \dots, q\}$.

Definiția produsului exterior pentru q-forme diferențiale este evidentă.

6.5. Fie $X \in \mathfrak{X}(\boldsymbol{D})$ și $\omega \in \mathcal{F}_q(\boldsymbol{D})$. Prin *contracția* dintre X și ω înțelegem $(q-1)$-formă diferențială $X \lrcorner\, \omega$ definită prin

$$(X \lrcorner\, \omega)(X_1, \dots, X_{q-1}) = \omega(X, X_1, \dots, X_{q-1}),\ X_1, \dots, X_{q-1} \in \mathfrak{X}(\boldsymbol{D}).$$

6.6. Fie $\mathcal{F}_q(\boldsymbol{D})$ și $\mathcal{F}_{q+1}(\boldsymbol{D})$. Funcția $\boldsymbol{R}$-liniară $\mathbf{d}: \mathcal{F}_q(\boldsymbol{D}) \to \mathcal{F}_{q+1}(\boldsymbol{D})$ cu proprietățile

$$\mathbf{d}^2 = 0$$

$$\mathbf{d}(\omega^1 \wedge \omega^2) = \mathbf{d}\omega^1 \wedge \omega^2 + (-1)^q \omega^1 \wedge \mathbf{d}\omega^2,$$

$$X(\mathbf{d}\omega) = \mathbf{d}(X(\omega)),\ X \in \mathfrak{X}(\boldsymbol{D}),$$

$$X(\omega) = X \lrcorner\, \mathbf{d}\omega + \mathbf{d}(X \lrcorner\, \omega)$$

se numește *diferențială exterioară*.

Utilizînd derivata covariantă și croșetul putem scrie,

$$\mathbf{d}\omega(X_1, \dots, X_{q+1}) = \sum_{1\leqslant i \leqslant q+1} (-1)^{i-1} D_{X_i}\omega(X_1, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_{q+1}) +$$

$$+ \sum_{1\leqslant i \leqslant j \leqslant q+1} (-1)^{i+j}\omega([X_i, X_j], X_1, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_{j-1}, X_{j+1}, \dots, X_{q+1}).$$

Pe $\mathcal{F}(\boldsymbol{D}) = \mathcal{F}_0(\boldsymbol{D})$ diferențiala exterioară se reduce la diferențiala obișnuită. Mai mult,

$$\mathbf{d}\omega(x) = \mathbf{d}\omega_{i_1\dots i_q}(x) \wedge \mathbf{d}x^{i_1} \wedge \dots \wedge \mathbf{d}x^{i_q}.$$

O q — formă diferențială ω cu proprietatea $d\omega = 0$ se numește *formă închisă*. O $(q+1)$—formă diferențială η cu proprietatea că există o q — formă ω astfel încît $\eta = d\omega$ se numește *formă exactă*.

6.6. În paragrafele 6.4 și 6.5 mulțimea $\boldsymbol{D}$ poate fi înlocuită cu orice subvarietate de dimensiune $m \geqslant 1$, cu sau fără frontieră, a lui $\boldsymbol{R}^n$.

6.7. Fie M o subvarietate a lui $\boldsymbol{R}^n$, de dimensiune m, cu sau fără frontieră. O *formă volum* pe M este o m -formă diferențială ω pe M cu proprietatea $\omega(v_1, \ldots, v_m) = \pm 1$ ori de cîte ori $\{v_1, \ldots, v_m\}$ este o bază ortonormată a lui T_xM. O alegere a unei forme volum ω pe M se numește *orientare* a lui M; despre M se zice că este *orientată*.

Fie M o subvarietate de dimensiune $m \geqslant 2$, cu frontieră. O orientare pe M induce o orientare pe ∂M.

6.8. Fie M o hipersuprafață a lui $\boldsymbol{R}^n$—cu sau fără frontieră. Un cîmp vectorial normal unitar U pe M se numește *orientare* a lui M. O orientare a lui M determină și este determinată de o alegere a unei forme volum pe M, adică o $(n-1)$ — formă diferențială ω pe M cu $\omega(v_1, \ldots, v_{n-1}) = \pm 1$, ori de cîte ori $\{v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ este o bază ortonormată pentru T_xM, anume

$$\omega(v_1, \ldots, v_{n-1}) = \det \begin{bmatrix} v_1 \\ \ldots \\ v_{n-1} \\ U \end{bmatrix}.$$

Fie M o hipersuprafață cu frontieră a lui $\boldsymbol{R}^n$. O orientare ω pe M induce o orientare $\omega_{\partial M} = V \lrcorner \omega$ pe varietatea cu $n-2$ dimensiuni ∂M, unde V este cîmpul vectorial pe M definit prin $x \to V(x) =$ versorul din T_xM orientat către exterior care este normal la frontieră.

6.9. Fie $\boldsymbol{D}$ o mulțime deschisă din $\boldsymbol{R}^3$, fie $\alpha\colon [a, b] \to \boldsymbol{D}$ o curbă orientată și ω o 1 -formă diferențială (de clasă C^∞) pe $\boldsymbol{D}$. Numărul real

$$\int_\alpha \omega = \int_a^b \omega(\alpha'(t))\, dt$$

se numește *integrală curbilinie de al doilea tip (circulație)*.

6.10. Fie M o suprafață din $\boldsymbol{R}^3$ și ω o 2 -formă diferențială (de clasă C^∞) pe M. Fie S_0 un dreptunghi plan deschis cu închiderea S și σ imaginea funcției diferențiabile $\mathrm{r}\colon S \to M$, unde $\mathrm{r}\colon S_0 \to M$ este o hartă. Numărul real

$$\int_\sigma \omega = \iint_S \omega(r_u, r_v)\, du\, dv$$

se numește *integrală de suprafață de al doilea tip (flux)*.

6.11. Fie $\mathbf{V}$ o subvarietate orientată din $\boldsymbol{R}^3$ de dimensiune trei, compactă ($\Rightarrow$ cu frontieră) și $(x, y, z) \to \omega(x, y, z) = \mathrm{f}\,(x, y, z)\, dx \wedge dy \wedge dz$ o 3 -formă diferențială (de clasă C^∞) pe $\mathbf{V}$. Notăm

$$\int_{\mathbf{V}} \omega = \iiint_{\mathbf{V}} \mathrm{f}\,(x, y, z)\, dx\, dy\, dz.$$

6.12. *(Formula Green).* Dacă A este regiunea plană mărginită de curba închisă orientată C, iar ω este o 1-formă diferențială (de clasă C^∞) pe o mulțime deschisă ce conține pe $A \cup C$, atunci

$$\int_C \omega = \int_A \mathrm{d}\omega.$$

(Formula Stokes). (i) Fie σ o suprafață orientată din $\boldsymbol{R}^3$, cu frontieră și $\partial\sigma$ frontiera sa cu orientarea indusă. Dacă ω este o 1-formă diferențială (de clasă C^∞) pe σ, atunci

$$\int_\sigma \mathrm{d}\omega = \oint_{\partial\sigma} \omega$$

(ii) Fie σ o suprafață orientată în $\boldsymbol{R}^3$, compactă și fără frontieră. Dacă ω este o 1-formă diferențială (de clasă C^∞) pe σ, atunci

$$\int_\sigma \mathrm{d}\omega = 0.$$

6.13. *(Formula Gauss — Ostrogradski).* Fie $\mathbf{V}$ o subvarietate orientată din $\boldsymbol{R}^3$, de dimensiune trei, cu frontieră și $\partial\mathbf{V}$ frontiera sa cu orientarea indusă. Dacă ω este o 2-formă diferențială (de clasă C^∞) pe $\mathbf{V}$, atunci

$$\int_{\mathbf{V}} \mathrm{d}\omega = \oint_{\partial\mathbf{V}} \omega.$$

6.14. Noțiunile din paragrafele 6.9—6.13 se pot extinde la subvarietăți de dimensiune m din $\boldsymbol{R}^n$.

6.15. În $\boldsymbol{R}^3$, 1-formele și 2-formele pot fi convertite în cîmpuri vectoriale prin corespondențele

$$\Sigma\, \mathrm{f}_i\, \mathrm{d}x_i \overset{(1)}{\longleftrightarrow} \Sigma\, \mathrm{f}_i U_i \overset{(2)}{\longleftrightarrow} f_1\, \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 + \mathrm{f}_2\, \mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_1 + \mathrm{f}_3\, \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2,$$

$$\mathrm{df} \overset{(1)}{\longleftrightarrow} \mathrm{grad\ f},$$

$$\omega \overset{(1)}{\longleftrightarrow} \mathbf{V} \Rightarrow \mathrm{d}\omega \overset{(2)}{\longleftrightarrow} \mathrm{rot}\ \mathbf{V},$$

$$\eta \overset{(2)}{\longleftrightarrow} \mathbf{V} \Rightarrow \mathrm{d}\eta = (\mathrm{div}\,\mathbf{V})\, \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3.$$

Exerciții și probleme

1. Să se arate că

$$\omega^1 \wedge \ldots \wedge \omega^q = \delta^{1 \ldots q}_{i_1 \ldots i_q}\, \omega^{i_1} \wedge \ldots \wedge \omega^{i_q},$$

unde $\delta^{1 \ldots q}_{i_1 \ldots i_q}$ este simbolul Kronecker generalizat.

2. Să se verifice relația

$$\omega^1 \wedge \ldots \wedge \omega^q(v_1, \ldots, v_q) = \begin{vmatrix} \omega^1(v_1) \ldots \omega^1(v_q) \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ \omega^q(v_1) \ldots \omega^q(v_q) \end{vmatrix}.$$

3. Fie $\{e_1, ..., e_n\}$ și $\{e^1, ..., e^n\}$ două baze duale. Să se verifice relația

$$e^{i_1} \wedge ... \wedge e^{i_q}(e_{j_1}, ..., e_{j_q}) = \delta^{i_1 ... i_q}_{j_1 ... j_q}.$$

4. Fie $\mathbf{V}$ un spațiu euclidian cu metrica $g = [g_{ij}]$, $g^{-1} = [g^{ij}]$.

1) Să se verifice că $* : \mathscr{F}_q(\mathbf{V}) \times \mathscr{F}_q(\mathbf{V}) \to \boldsymbol{R}$, $\omega * \eta = \sum\limits_{i_1 < ... < i_q} \omega_{i_1 ... i_q} \eta_{i_1 ... i_q}$ este un produs scalar pe $\mathscr{F}_q(\mathbf{V})$. Să se arate că dacă privim pe $\mathscr{F}_q(\mathbf{V})$ ca un subspațiu al lui $\mathscr{T}_q(\mathbf{V})$, atunci

$$\omega * \eta = \frac{1}{q!} \omega \cdot \eta.$$

2) Să se arate că

$$\omega * \eta = \sum_{\substack{i_1 < ... < i_q \\ j_1 < ... < j_q}} \begin{vmatrix} g^{i_1 j_1} & ... & g^{i_1 j_q} \\ ... & ... & ... \\ g^{i_q j_1} & ... & g^{i_q j_q} \end{vmatrix} \omega_{i_1 ... i_q} \eta_{j_1 ... j_q}.$$

3) Să se verifice identitatea

$$(\omega^1 \wedge ... \wedge \omega^q) * (\eta^1 \wedge ... \wedge \eta^q) = \begin{vmatrix} \omega^1 \cdot \eta^1 & ... & \omega^1 \cdot \eta^q \\ ... & ... & ... \\ \omega^q \cdot \eta^1 & ... & \omega^q \cdot \eta^q \end{vmatrix},$$

unde $\omega^1, ..., \omega^q$ și $\eta^1, ..., \eta^q$ sînt 1-forme.

5. Fie $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ două cîmpuri vectoriale din $\boldsymbol{R}^3$ și $\omega_{\mathbf{X}}$, $\omega_{\mathbf{Y}}$ 1-formele diferențiale duale. Să se verifice că

$(\omega_{\mathbf{X}} \wedge \omega_{\mathbf{Y}})(v, w) = ((\mathbf{X} \times \mathbf{Y})(x), (v \times w))$, pentru orice $x \in \boldsymbol{R}^3$, oricare ar fi $v, w \in T_x\boldsymbol{R}^3$.

Indicație. Ținînd seama de multiliniaritate, este suficient să dovedim relația pentru $v, w \in \{i, j, k\}$.

6. Fie $\mathbf{X}$ un cîmp vectorial pe o subvarietate m-dimensională M și fie $\omega_{\mathbf{X}}$ 1-forma duală lui $\mathbf{X}$.

1) Să se arate că

$$d\omega_{\mathbf{X}}(v, w) = (D_v\mathbf{X}, w) - (D_w\mathbf{X}, v), \text{ oricare ar fi } v, w \in T_xM,$$

unde D este conexiunea riemanniană.

2) Presupunem $M = \boldsymbol{R}^3$. Să se verifice relația

$$d\omega_{\mathbf{X}}(v, w) = (\text{rot } \mathbf{X}, v \times w).$$

7. Să se calculeze $d\omega$ pentru fiecare dintre următoarele 1-forme diferențiale

$$\omega = x\,dx + y\,dz + z\,dy, \quad \omega = e^{xy}\,dx + z\,dy + (\ln(xz))\,dz,$$

$$\omega = (\cos x)\,dy + dz, \qquad \omega = \sqrt{xy}\,dy + x\,dz.$$

8. Se dau formele diferențiale

$$\omega = x^2y\,dy - xy^2\,dx, \qquad \omega = f(x, y)\,dx,\ \eta = e^{xy}\,dx \wedge dz.$$

Să se calculeze diferențialele exterioare.

9. Să se verifice că următoarele 1-forme ω sînt închise și pentru fiecare caz să se expliciteze o soluție f a ecuației $\mathrm{d}f = \omega$.

$$\omega = \frac{1}{x+y+z}(\mathrm{d}x + \mathrm{d}y + \mathrm{d}z), \; x+y+z > 0,$$

$$\omega = \frac{2}{(x-yz)^2}(-yz\,\mathrm{d}x + zx\,\mathrm{d}y + xy\,\mathrm{d}z), \quad x - yz > 0,$$

$$\omega = e^{\frac{y}{z}}\mathrm{d}x + \left(\frac{e^{\frac{y}{z}}(x+1)}{z} + z e^{yz}\right)\mathrm{d}y + \left[-\frac{e^{\frac{y}{z}}(x+1)}{z} + y e^{xy} + e^{-z}\right]\mathrm{d}z,$$

$z > 0$.

R. $f(x, y, z) = \ln(x+y+z) + C$, $f(x, y, z) = \dfrac{2x}{x-yz} + C$, $f(x, y, z) = e^{\frac{y}{z}}(x+1) + e^{yz} - e^{-z} + C$ (ipotezele asigură faptul că domeniile de definiție sînt deschise, conexe și simplu conexe).

10. Să se verifice că următoarele 2-forme sînt închise

$$\eta = \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}(x\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y), \; x > 0,$$

$y > 0, \; z > 0,$

$$\eta = (1 + 2xyz^2)\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z - y^2z^2\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + xy^2\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y.$$

Pentru fiecare caz, să se expliciteze o soluție ω a ecuației $\mathrm{d}\omega = \eta$.

11. Să se arate că dacă ω_1 și ω_2 sînt închise, atunci și $\omega_1 \wedge \omega_2$ este închisă.

12. Fie 1-forma diferențială $\omega = -\dfrac{y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x + \dfrac{x}{x^2+y^2}\mathrm{d}y$ definită pe $\boldsymbol{R}^2 - \{(0, 0)\}$ și C: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ orientată prin versorul normal unitar cu sensul spre interiorul elipsei.

1) Să se calculeze $\mathrm{d}\omega$ și $\int_C \omega$. Este ω o formă exactă?

2) Să se arate că restricția lui ω la $\boldsymbol{R}^2 - Ox_+$ este exactă, găsindu-se soluția f a ecuației $\mathrm{d}f = \omega$.

Soluție. 1) Fie α: $[0, 2\pi] \to C$, $\alpha(t) = (a\cos t, b \sin t)$ a cărei restricție la $[0, 2\pi)$ este o parametrizare a lui C.
Rezultă

$$\int_C \omega = \int_\alpha \omega = \int_0^{2\pi} \omega(\alpha'(t))\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi}\left[\frac{-y}{x^2+y^2}(\alpha(t))\,\mathrm{d}x(\alpha'(t)) + \right.$$

$$\left. + \frac{x}{x^2+y^2}(\alpha(t))\,\mathrm{d}y(\alpha'(t))\right]\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi}\left[\frac{-b\sin t}{a^2\cos^2 t + b^2 \sin^2 t}(-a\sin t) + \right.$$

$$\left. + \frac{a\cos t}{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t}(b\cos t)\right]\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi}\frac{ab}{a^2\cos^2 t + b^2 \sin^2 t}\,\mathrm{d}t =$$

$$= 4\int_0^{\pi/2}\frac{\frac{b}{a}\sec^2 t}{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 \mathrm{tg}^2\, t}\,\mathrm{d}t = 4\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} = 2\pi.$$

Deși ω este închisă, adică

$$d\omega(x, y) = -d\left(\frac{y}{x^2 + y^2}\right) \wedge dx + d\left(\frac{x}{x^2 + y^2}\right) \wedge dy =$$

$$= -\frac{(x^2 + y^2)\,dy - y\,d(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2} \wedge dx + \frac{(x^2 + y^2)\,dx - x\,d(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2} \wedge dy =$$

$$= \frac{(y^2 - x^2)\,dy + 2xy\,dx}{(x^2 + y^2)^2} \wedge dx + \frac{(y^2 - x^2)\,dx - 2xy\,dy}{(x^2 + y^2)^2} \wedge dy = 0,$$

totuși ea nu este exactă (consecință a faptului că $\int_C \omega = 2\pi$ sau a faptului că domeniul $\boldsymbol{R}^2 - \{0\}$ nu este simplu conex).

2) Mulțimea $\boldsymbol{R}^2 - Ox_+$ este simplu conexă și $d\omega = 0$. De aceea există o funcție diferențiabilă $f: \boldsymbol{R}^2 - Ox_+ \to \boldsymbol{R}$ astfel încît $df = \omega$, adică ω este exactă. Mai precis,

$$f(x, y) = \int_{x_0}^{x} \frac{-y}{x^2 + y^2}\,dx + \int_{y_0}^{y} \frac{x_0}{x_0^2 + y^2}\,dy = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} + C_1, & \text{pentru } x \neq 0 \\ \operatorname{arcctg}\dfrac{x}{y} + C_2, & \text{pentru } y \neq 0. \end{cases}$$

13. Să se calculeze următoarele integrale curbilinii

1) $\int_\alpha y\,dx - x\,dy$ unde $\alpha(t) = (\cos 2t,\ \sin 2t),\ 0 \leqslant t \leqslant \pi$.

2) $\oint_C -y\,dx + x\,dy$ unde elipsa C: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ este orientată prin versorul normal cu sensul către interior.

3) $\int_\alpha x_1\,dx_1 + \ldots + x_n\,dx_n$ unde α: $[0, 1] \to \boldsymbol{R}^n$ unește punctele $\alpha(0) = (0, \ldots, 0)$ și $\alpha(1) = (-1, -1, \ldots, -1)$.

14. Fie $C = f^{-1}(c)$ o curbă plană compactă orientată prin $\frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}$, fie U cîmpul vectorial unitate obținut prin rotirea lui $\frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}$ cu unghiul $-\frac{\pi}{2}$ și ω 1-forma duală atașată lui U. Să se arate că $\int_C \omega = l(C)$.

15. Fie cîmpul vectorial

$$\vec{v} = (\vec{i} \times \vec{j}) \times \vec{r} + \vec{j} \times \vec{r} + (\vec{k}, \vec{r})\,\vec{r},$$

unde $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

1) Să se scrie cîmpul în coordonate sferice și cilindrice.

2) Să se calculeze circulația lui $\vec{v}$ pe curba C: $x^2 + y^2 = 4$, $z = 2$ prin integrală curbilinie și de suprafață.

3) Să se calculeze fluxul lui v prin suprafața închisă $\partial\Omega$ ce mărginește corpul Ω: $x^2 + y^2 \leqslant z^2$, $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R^2$, $z > 0$, prin integrală de suprafață și de volum.

Să se reformuleze și să se rezolve problema în limbajul 1 — formelor, 2 — formelor îi 3 — formelor.

Soluție. 1) În coordonate cilindrice (fig. 3.50) găsim $\vec{r} = \rho\vec{e}_\rho + z\vec{e}_z$, $\vec{k} = \vec{e}_z$ și deci $(\vec{i}\times\vec{j})\times\vec{r} = \vec{k}\times(\rho\vec{e}_\rho + z\vec{e}_z) = \vec{e}_z\times(\rho\vec{e}_\rho + z\vec{e}_z) = \rho\vec{e}_\theta$, $\vec{j}\times\vec{r} = \vec{j}\times\times(\rho\vec{e}_\rho + z\vec{e}_z) = \operatorname{grad} y\times(\rho\vec{e}_\rho + z\vec{e}_z) = \operatorname{grad}(\rho\sin\theta)\times(\rho\vec{e}_\rho + z\vec{e}_z) = \sin\theta\vec{e}_\varphi + {}+\cos\theta\vec{e}_\theta)\times(\rho\vec{e}_\rho + z\vec{e}_z) = -z\sin\theta\vec{e}_\theta - \rho\cos\theta\vec{e}_z + z\cos\theta\vec{e}_\rho$ (pentru calculul lui $\operatorname{grad}(\rho\sin\theta)$ s-au folosit coeficienții Lamè: $H_1 = 1$, $H_2 = \rho$, $H_3 = 1$), $(\vec{k}, \vec{r}) = (\vec{e}_z, \rho\vec{e}_\varphi + z\vec{e}_z) = z$.

În final

$$\vec{v}(\rho, \theta, z) = z(\cos\theta + \rho)\vec{e}_\rho + (\rho - z\sin\theta)\vec{e}_\theta + (z^2 - \rho\cos\theta)\vec{e}_z.$$

În coordonate sferice (fig. 3.51) avem $\vec{r} = r\vec{e}_r$, $\vec{k} = \operatorname{grad} z = \operatorname{grad}(r\cos\varphi) = \cos\varphi\vec{e}_r - \sin\varphi\vec{e}_\varphi$, $\vec{j} = \operatorname{grad} y = \operatorname{grad}(r\sin\varphi\cos\theta) = \sin\varphi\sin\theta\vec{e}_r + {}+\cos\varphi\sin\theta\vec{e}_\varphi + \cos\theta\vec{e}_\theta$ (coeficienții Lamé: $H_1 = 1$, $H_2 = r$, $H_3 = r\sin\varphi$). De aceea, $(\vec{i}\times\vec{j})\times\vec{r} = \vec{k}\times r\vec{e}_r = r(\cos\varphi\vec{e}_r - \sin\varphi\vec{e}_\varphi)\times\vec{e}_r = r\sin\varphi\vec{e}_\theta$, $\vec{j}\times\vec{r} = r(-\cos\varphi\sin\theta\vec{e}_\theta + \cos\theta\vec{e}_\varphi)$, $(\vec{k}, \vec{r}) = r\cos\varphi$ și deci

$$\vec{v}(r, \varphi, \theta) = r^2\cos\varphi\vec{e}_r + r\cos\theta\vec{e}_\varphi + (r\sin\varphi - r\cos\varphi\sin\vec{e}_\rho.$$

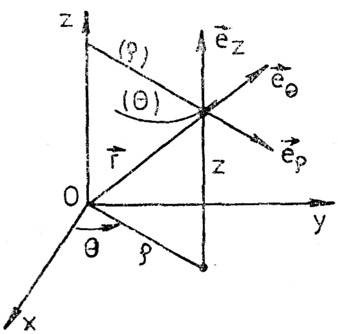


Fig. 3.50.

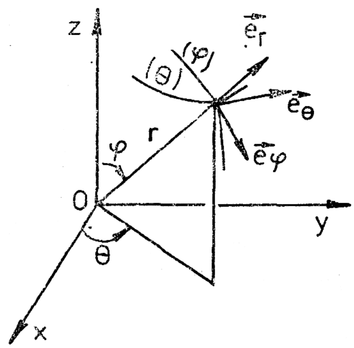


Fig. 3.51.

2) În coordonate cilindrice putem scrie C: $\rho = 2$, $z = 2$. Apoi

$d\vec{r} = d\rho\vec{e}_\rho + \rho\, d\theta\vec{e}_\theta + dz\,\vec{e}_z$ și deci $\Gamma = \oint_C (\vec{v}, d\vec{r}) =$

$$= \oint_C z(\cos\theta + \rho)\,d\rho + (\rho^2 - \rho z\sin\theta)\,d\theta + (z^2 - \rho\cos\theta)\,dz =$$

$$= 4\oint_0^{2\pi} d\theta - 4\int_0^{2\pi}\sin\theta\, d\theta = 8\pi, \text{ deoarece } d\rho = 0,\ dz = 0 \text{ pe } C.$$

Fie discul S: $\rho \leqslant 2$, $z = 2$. Formula Stokes arată că

$\oint_C (\vec{v}, d\vec{r}) = \iint_S (\vec{n}, \operatorname{rot}\vec{v})\,d\sigma$. Aici $\vec{n} = \vec{k}$ și

$$\operatorname{rot}\vec{v} = \frac{1}{H_1H_2H_3}\begin{vmatrix} H_1\vec{e}_1 & H_2\vec{e}_2 & H_3\vec{e}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial\rho} & \dfrac{\partial}{\partial\theta} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ H_1v_1 & H_2v_2 & H_3v_3 \end{vmatrix}.$$

3) Se lucrează mai ușor în coordonate sferice. Se observă că $\partial\Omega = S_1 \cup S_2$ (curba de intersecție dintre con și sferă este o mulțime de arie nulă), unde S_1: $r = R$, $\varphi \in [0, \pi/4]$, $\theta \in [0, 2\pi]$; S_2: $r \in [0, R]$, $\varphi = \pi/4$, $\theta \in [0, 2\pi]$. Deci

$$\Phi = \oiint_{\partial\Omega} (\vec{v}, \vec{n})\,\mathrm{d}\sigma = \iint_{S_1} (\vec{v}, \vec{n})\,\mathrm{d}\sigma + \iint_{S_2} (\vec{v}, \vec{n})\,\mathrm{d}\sigma.$$

Deoarece pe S_1 avem $\mathrm{d}\sigma = r^2 \sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta$, $\vec{n} = \vec{e}_r$, iar pe S_2 avem $\mathrm{d}\tau = r \sin\varphi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$, $\vec{n} = \vec{e}_\varphi$, rezultă

$$\iint_{S_1} (\vec{v}, \vec{n})\,\mathrm{d}\sigma = 2\pi R^4 \int_0^{\pi/4} \sin\varphi\,\mathrm{d}(\sin\varphi), \quad \iint_{S_2} (\vec{v}, \vec{n})\,\mathrm{d}\sigma = \sin^2\frac{\pi}{4} \int_0^R r\,\mathrm{d}r \times$$

$$\times \int_0^{2\pi} \cos\theta\,\mathrm{d}\theta = 0.$$

și deci

$$\Phi = \frac{\pi R^4}{2}.$$

Aplicînd formula Gauss

$$\Phi = \oiint_{\partial\Omega} (\vec{v}, \vec{n})\,\mathrm{d}\sigma = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{v}\,\mathrm{d}\Omega$$

și ținînd seama că $\mathrm{d}\Omega = r^2 \sin\varphi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta$,

$$\operatorname{div} \vec{v} = \frac{1}{H_1 H_2 H_3}\left(\frac{\partial(H_2 H_3 v_r}{\partial r} + \frac{\partial(H_3 H_1 v_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial(H_1 H_2 v_\theta}{\partial\theta}\right) = 4r\cos\varphi,$$

se verifică rezultatul precedent.

Reformularea în limbajul formelor diferențiale are la bază regulile din paragraful 6.15.

CAPITOLUL 4

ECUAȚII DIFERENȚIALE

§ 1. ECUAȚII DIFERENȚIALE DE ORDINUL ÎNTÎI

1.1. *Ecuații cu variabile separabile.*

$a_1(x)\, b_1(y)\, \mathrm{d}x - a_2(x)\, b_2(y)\, \mathrm{d}y = 0$, unde $a_1, a_2 \in C^0(I_1)$, $b_1, b_2 \in C^0(I_2)$ și $a_2(x) \neq 0$ oricare ar fi $x \in I_1$, $b_1(y) \neq 0$ oricare ar fi $y \in I_2$.

Soluția generală este definită de

$$\int_{x_0}^{x} \frac{a_1(x)}{a_2(x)}\, \mathrm{d}x = \int_{y_0}^{y} \frac{b_2(y)}{b_1(y)}\, \mathrm{d}y + c$$

1.2. *Ecuații omogene,*

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \mathrm{f}\left(\frac{y}{x}\right), \quad \text{unde} \quad \mathrm{f} \in C^0(I), \quad x \neq 0.$$

Schimbarea de funcție $y \leftrightarrow t$ definită prin $y = tx$ arată că o ecuație omogenă se reduce la o ecuație cu variabile separabile.

1.3. *Ecuații liniare,*

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y\mathrm{f}(x) + \mathrm{g}(x), \quad \text{unde} \quad \mathrm{f}, \mathrm{g} \in C^0(I).$$

Soluția generală este definită prin

$$y = e^{\int_{x_0}^{x} \mathrm{f}(x)\, \mathrm{d}x} \left(c + \int_{x_0}^{x} \mathrm{g}(x)\, e^{-\int_{x_0}^{x} \mathrm{f}(x)\, \mathrm{d}x}\, \mathrm{d}x\right).$$

1.4. *Ecuații Bernoulli,*

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y^r \mathrm{f}(x) + y\mathrm{g}(x), \quad r \in R - \{0, 1\}, \quad \mathrm{f}, \mathrm{g} \in C^0(I).$$

Mulțimea valorilor lui y este determinată ținînd seama de valorile particulare ale lui r.

Schimbarea de funcție $y \leftrightarrow z$ definită prin $y = z^{\frac{1}{1-r}}$ arată că o ecuație Bernoulli se reduce la o ecuație liniară.

1.5. *Ecuații Riccati,*

$$\frac{dy}{dx} = y^2 f(x) + y g(x) + h(x), \quad \text{unde} \quad f, g, h \in C^0(I).$$

Soluția generală a unei asemenea ecuații nu se poate obține decît în ipoteze suplimentare. De exemplu, dacă se cunoaște o soluție y_1, atunci schimbarea de funcție $y \leftrightarrow z$ definită prin $y = y_1 + 1/z$ arată că ecuația Riccati se reduce la o ecuație liniară.

1.6. *Ecuații exacte.* Fie ecuația

$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$, unde P, Q sînt funcții de clasă C^1 pe $\boldsymbol{D} \subset \boldsymbol{R}^2$.

1) Dacă $\boldsymbol{D}$ este un dreptunghi și dacă $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ pe $\boldsymbol{D}$, atunci funcția $(x, y) \to f(x, y) = \int_{x_0}^{x} P(x, y)\, dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0, y)\, dy$ are proprietatea $df = P\,dx + Q\,dy$ și deci soluția generală a ecuației diferențiale este definită prin

$$\int_{x_0}^{x} P(x, y)\, dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0, y)\, dy = c.$$

Dacă $\boldsymbol{D}$ este o mulțime convexă și dacă $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ pe $\boldsymbol{D}$, atunci funcția $(x, y) \to f(x, y) = \int_0^1 (P(x_0 + t(x - x_0),\ y_0 + t(y - y_0))\,(x - x_0) + Q(x_0 + t(x - x_0),\ y_0 + t(y - y_0))\,(y - y_0))\, dt$ are proprietatea $df = P\,dx + Q\,dy$ și deci soluția generală a ecuației diferențiale este definită prin

$$\int_0^1 (P(x_0 + t(x - x_0),\ y_0 + t(y - y_0))\,(x - x_0) + Q(x_0 + t(x - x_0),$$
$$, y_0 + t(y - y_0)) \cdot (y - y_0))dt = c.$$

Ecuațiile pentru care $\boldsymbol{D}$ este conex și simplu conex, iar $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ oricare ar fi $(x, y) \in \boldsymbol{D}$, se numesc *ecuații diferențiale exacte.*

2) Fie $\boldsymbol{D}$ o mulțime conexă și simplu conexă. Există o funcție nenulă $\mu: \boldsymbol{D} \to \boldsymbol{R}$ de clasă C^1 astfel încît

$$\mu(x, y)\, P(x, y)\, dx + \mu(x, y)\, Q(x, y)\, dy = 0$$

să fie o ecuație diferențială exactă. Funcția μ se numește *factor integrant* și satisfac ecuația

$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x}.$$

1.7. *Ecuația Clairaut,*

$y = xy' + \psi(y')$, unde ψ este o funcție de clasă C^1.

Punînd $y' = p$ și derivînd în raport cu x în ambii membri, rezultă soluția generală $y = cx + \psi(c)$ și soluția singulară $x = -\frac{d\psi}{dp}$, $y = xp + \psi(p)$.

1.8. *Ecuația Lagrange,*

$$y = x\varphi(y') + \psi(y'), \text{ unde } \varphi(y') \neq y' \text{ și } \psi \text{ sînt funcții de clasă } C^1.$$

Notînd $y' = p$, derivînd în raport cu x în ambii membri și privind pe x ca funcție de p, obținem o ecuație liniară cu soluția generală $x = x(p, c)$. Rezultă că soluția generală a unei ecuații Lagrange este definită prin $x = x(p, c)$, $y = x(p, c)\ \varphi(p) + \psi(p)$.

1.9. *Teorema de existență și unicitate a soluției problemei lui Cauchy.* Fie sistemul de ecuații

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, \ldots, y_n), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Găsirea funcțiilor $x \to y_i = y_i(x)$ care să verifice sistemul și condițiile inițiale $y_i(x_0) = y_{i0}$ poartă numele de *problema lui Cauchy.*

Dacă funcțiile reale $(x, y) \to f_i(x, y)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$, sînt de clasă C^0 pe o mulțime deschisă și conexă $\boldsymbol{D}$ din $\boldsymbol{R}^{n+1}$, iar funcțiile parțiale $y \to f_i(x, y)$ sînt de clasă C^1 atunci oricare ar fi $(x_0, y_0) \in \boldsymbol{D}$ există o soluție unică $x \to y(x)$ definită pe o vecinătate a lui x_0 care verifică condițiile $y_i(x_0) = y_{i0}$, $i = 1, \ldots, n$.

1.10. *Metode numerice.*

Fie $y' = f(x, y)$ o ecuație diferențială de ordinul întîi cu condiția inițială $y(x_0) = y_0$. Metoda lui Runge — Kutta de ordinul patru aproximează soluția prin $y_{n+1} = y_n + \Delta y_n$, unde

$$\Delta y_n = \frac{h}{6}[k_0 + 2k_1 + 2k_2 + k_3], \text{ iar } k_0 = f(x_n, y_n),$$

$$k_1 = f\left(x_n + h/2,\ y_n + \frac{k_0}{2}\right), \qquad k_2 = f\left(x_n + h/2,\ y_n + \frac{k_1}{2}\right),$$

$$k_3 = f(x_n + h,\ y_n + k_2), \quad h = \Delta x \text{ este pasul diviziunii.}$$

Metoda lui Euler are la bază formula de recurență

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$$

pentru soluția aproximativă $y_{n+1} \simeq y(x_{n+1})$.

Exerciții și probleme

1. Se dă un corp de formă sferică constituit dintr-o substanță care prin expunere la o sursă de căldură trece din starea solidă în starea gazoasă, viteza de trecere fiind proporțională cu aria expusă. Să se studieze evoluția razei sferei știind că valoarea sa la momentul inițial este R_0.

Soluție. Fie $R(t)$ raza sferei la momentul t, $R(t_0) = R_0$. Aria expusă este $4\pi R^2(t)$, volumul $\dfrac{4\pi R^3(t)}{3}$, iar viteza de descreștere este $-\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{4\pi R^3(t)}{3}\right)$. Așadar, rezultă ecuația diferențială $-\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{4\pi R^3(t)}{3}\right) = k4\pi R^2(t)$, $k > 0$, sau $-R'(t) = k$ cu soluția $R(t) = -k(t - t_0) + R_0$.

Condiția $R(t) > 0$ impune $0 \leqslant t - t_0 < \frac{R_0}{k}$. Această soluție permite să se determine k printr-un experiment în care se măsoară timpul pînă la care o sferă dată trece în întregime în starea gazoasă.

2. Se consideră familiile de curbe plane:

1) $x^2 + y^2 - 2ax - 2by = c$; 2) $y^2 \pm k^2x^2 = c$; $a, b, k =$ fixate, $c \in R$.

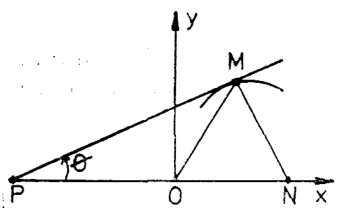
Să se determine ecuația diferențială a fiecărei familii.

Dacă A și B sînt punctele în care normala în punctul $M(x, y)$ la curbă taie axele Ox, respectiv Oy, atunci 1) $\frac{a}{OA} + \frac{b}{OB} = 1$; 2) $MA = kMB$.

R: $(y - b)\,y' = a - x$ respectiv $yy' = \pm k^2x$.

3. Să se arate că forma unei oglinzi, care reflectă paralel cu o direcție dată toate razele ce pleacă dintr-o sursă luminoasă este parabolică.

2) Dacă $M(x, y)$ este un punct de pe oglindă, cercul al cărui diametru este raza vectoare a punctului M, trece prin mijlocul segmentului normală MN.



Eig. 4.1.

Soluție. 1) Alegem sistemul de axe în mod convenabil și anume, originea în punctul în care se află sursa luminoasă și direcția axei absciselor paralelă cu direcția dată prin ipoteză. Fie o rază care cade pe oglindă în punctul $M(x, y)$. Considerăm secțiunea oglinzii prin planul determinat de axa absciselor, punctul M și tangenta în M la curba de secțiune. Aceasta taie axa absciselor în punctul P (fig. 4.1).

Deoarece unghiul de incidență al razei luminoase este egal cu unghiul de reflexie, triunghiul MOP este isoscel. Avem $\operatorname{tg} \theta = y' = \frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}$.

Ecuația obținută este omogenă și se poate scrie $\frac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = dx$, $(x, y) \neq (0, 0)$, sau $d(\sqrt{x^2 + y^2}) = dx$. După integrare obținem ecuația carteziană a curbelor integrale, $y^2 = 2cx + c^2$, care reprezintă o familie de parabole.

2) Cercul de diametru OM are ecuația carteziană $\left(X - \frac{x}{2}\right)^2 + \left(Y - \frac{y}{2}\right)^2 = \frac{x^2 + y^2}{4}$. Normala în punctul M la curbă, $Y - y = -\frac{1}{y'}(X - x)$. Punctul ei de intersecție cu axa absciselor este $N(x + yy', 0)$.

4. Să se determine soluția generală a ecuației diferențiale

1) $\frac{dy}{dx} = \frac{12x + 5y - 9}{-5x - 2y + 3}$; 2) $\frac{dy}{dx} = \frac{x + y - 3}{1 - x + y}$;

3) $\frac{dy}{dx} = \frac{x - 2y + 5}{-2x + y - 4}$ și curba integrală ce trece prin punctul $(1, 2)$.

Să se arate că pentru ecuațiile 1) și 2) curbele integrale sînt conice de gen hiperbolic și să se determine asimptotele lor.

R: 1) $6x^2 + 5xy + y^2 - 9x - 3y = c$; 2) $x^2+2xy - y^2 - 6x + 2y = c$;

3) $(x + y + 1)^2 = c(x - y + 3)$.

Curbele integrale ale ecuațiilor 1) și 2) sînt conice cu $\delta < 0$, deci gen hiperbolic. Pentru 1) asimptotele sînt dreptele $2x + y - 3 = 0$ și $3x + y = 0$. Pentru 2) asimptotele sînt dreptele $(1 + \sqrt{2})x - y - 1 - 2\sqrt{2} = 0$ și $(1 - \sqrt{2})x - y - 1 + 2\sqrt{2} = 0$.

5. 1) Să se determine soluția generală a ecuației diferențiale $y' + \frac{1 - 2x}{x^2} y = 1$.

2) Se consideră tangentele la curbele integrale într-un punct $x_0 \neq 0$. Să se arate că aceste tangente trec printr-un punct fix și să se determine coordonatele lui în funcție de x_0.

3) Să se determine curba integrală care trece prin (1,1).

6. Se consideră o sursă de curent alternativ a cărui tensiune variază după legea $E = E_0 \sin t$. Sursa alimentează un circuit compus dintr-o rezistență R și o inductanță L.

Să se determine intensitatea curentului din circuit dacă regimul de funcționare este staționar.

Soluție. Conform legii lui Kirchoff putem scrie:

$$RI + L\frac{dI}{dt} E_0 \sin t.$$

sau,

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L} I = \frac{E_0}{L} \sin t,$$

o ecuație diferențială liniară neomogenă cu coeficienți constanți. În electrotehnică se preferă soluția particulară $I(t) = A \sin(\omega t - \varphi)$. Pentru a determina pe A și φ calculăm derivata $\frac{dI}{dt} = \omega A \cos(\omega t - \varphi)$; înlocuim în ecuația diferențială, apoi egalăm coeficienții lui $\cos \omega t$, respectiv $\sin \omega t$ și obține sistemul $L\omega \cos \varphi - R \sin \varphi = 0$, $A(L\omega \sin \varphi + R \cos \varphi) - E_0 = 0$.

Găsim $\varphi = \operatorname{arc\,tg} \frac{\omega L}{R}$ și $A = \frac{E_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$.

7. Să se determine soluțiile generale ale ecuațiilor

1) $\frac{dy}{dx} + 3y = e^{2x}$; 2) $\frac{dy}{dx} = y + \sin x$; 3) $\frac{dy}{dx} \cos x = 1 - y \sin x$;

4) $\frac{dy}{dx} - \frac{xy}{x^2 - 1} - x = 0$; 5) $x\frac{dy}{dx} - y = x^2 - 2x + 3$.

R: 1) $y = ce^{-3x} + \frac{1}{5} e^{2x}$; 2) $y = ce^{x} - \frac{1}{2} (\cos x + \sin x)$;

3) $y = c \cos x + \sin x$; 4) $y = c\sqrt{x^2 - 1}$; 5) $y = cx + x^2 - 2x \ln x - 3$.

8. Să se determine soluțiile generale ale ecuațiilor

1) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{2x} + \dfrac{x^2}{2y}$; 2) $\dfrac{dy}{dx} = y^2 - \dfrac{2}{x^2}$,

3) $x\dfrac{dy}{dx} - y^2 \ln x + y = 0$; 4) $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{3y}{x} + x^3y^2 = 0$.

Indicație. 1) Ecuație Bernoulli. Se face schimbarea $z = y^2$. Se găsește ecuația liniară $\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{z}{x} + x^2$, cu soluția generală, $z = c_1x + \dfrac{x^3}{2}$. Soluția generală a ecuației Bernoulli, $y^2 = c_1x + \dfrac{x^3}{3}$.

9. Să se determine soluțiile generale ale următoarelor ecuații

1) $2x^2y' - 4xy - y^2 = 0$; 2) $y' + 2y = 2x\sqrt{y}$

3) $2xy' + y + 2x^3y^3 = 0$; 4) $y' + \dfrac{2}{x}y = \dfrac{\ln x}{x}y^3$;

5) $y' + \dfrac{2}{x}y = -y^2 \ln x$; 6) $y' + y \operatorname{tg} x = y^2$.

R: 1) $y = \dfrac{2x^2}{c - x}$; 2) $y = (ce^{-x} + x - 1)^2$; 3) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x(c + x^2)}}$;

4) $\dfrac{1}{y^2} = cx^4 + \dfrac{\ln x}{2} + \dfrac{1}{8}$; 5) $\dfrac{1}{y} = cx^2 - x\ln x - x$;

6) $y = \dfrac{\cos x}{c - \sin x}$.

10. Să se integreze ecuația diferențială $y' - xy^2 + 2x^2y - x^3 - 1 = 0$.

R: Este o ecuație Riccati. Se găsește soluția $y_0 = x$. Soluția generală a ecuației este $y = x - \dfrac{2}{x^2 + c}$.

11. Să se integreze ecuația diferențială $y' = y^2 - x^4 - 2x^2 + 2x - 1$, știind că admite drept soluție particulară un polinom.

R: Se găsește soluția $y_0 = x^2 + 1$. Soluția generală a ecuației este,

$$y = e^{\frac{2}{3}x^3 - 2x}\left(c - \int_{x_0}^{x} e^{\frac{2}{3}x^2 + 2x}\, dx\right).$$

12. Să se integreze ecuația diferențială $y' + y^2 = \dfrac{y}{x} - \dfrac{1}{x^2}$, știind că admite soluția $y_0 = \dfrac{1}{x}$.

R: $y = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x \ln x + cx}$, $x > 0$.

13. 1) Să se arate că dacă $(x, y) \to P(x, y)$, $(x, y) \to Q(x, y)$ sînt funcții omogene, de același grad de omogenitate m, atunci $(x, y) \to \dfrac{1}{xP(x, y) + yQ(x, y)}$ este un factor integrant al ecuației diferențiale $P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0$ (P, Q diferențiabile și $xP(x, y) + yQ(x, y)$ nenul).

2) Să se aplice rezultatul de mai sus ecuației $(xy - x^2)\,dy - y^2\,dx = 0$.

Soluție. 1) Contextul impune ca domeniul de definiție al funcțiilor P și Q să fie interiorul unui unghi în care $xP(x, y) + yQ(x, y) \neq 0$.

Funcțiile P și Q fiind omogene de grad m, satisfac ecuația Euler, $x\dfrac{\partial P}{\partial x} + y\dfrac{\partial P}{\partial y} = mP$, $x\dfrac{\partial Q}{\partial x} + y\dfrac{\partial Q}{\partial y} = mQ$. Să arătăm că $\dfrac{P\,dx + Q\,dy}{xP + yQ}$ este diferențiala unei funcții, adică $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{Q}{xP + yQ}\right) = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{P}{xP + yQ}\right)$.

Într-adevăr, $P\left(x\dfrac{\partial Q}{\partial x} + y\dfrac{\partial Q}{\partial y}\right) - Q\left(x\dfrac{\partial P}{\partial x} + y\dfrac{\partial P}{\partial y}\right) = 0$ este identic verificată dacă ținem seama de relațiile lui Euler.

2) Ecuația dată se poate scrie $-y^2\,dx + (xy - x^2)\,dy = 0$ cu $P(x, y) = -y^2$, $Q(x, y) = xy - x^2$, omogene, de gradul doi și admite factorul integrant $\mu(x, y) = \dfrac{1}{xP(x, y) + yQ(x, y)} = -\dfrac{1}{x^2y}$.

Înmulțind ecuația diferențială cu acest factor obținem o ecuație exactă $\dfrac{y}{x^2}\,dx + \dfrac{x - y}{xy}\,dy = 0$, cu soluția generală $\ln y - \dfrac{1}{x}y = c$, pe $x>0$, $y>0$.

14. Să se arate că ecuația diferențială de forma $yf(xy)\,dx - xg(xy)\,dy = 0$, cu f și g funcții de produsul xy, de clasă C^1 pe $\mathbf{D} \subset \boldsymbol{R}^2$, admite pe $\mu(x, y) = \dfrac{1}{xy[f(xy) + g(xy)]}$ ca factor integrant.

Aplicație la ecuația $(xy^2 + y)\,dx - 2(x^2y - x)\,dy = 0$.

R: $(3xy - 1)^4 = cx^3y^6$.

15. Să se determine soluția generală a ecuației $(x + y + 1)\,dx + (x - y^2 + 3)\,dy = 0$. Să se precizeze curba integrală care trece prin originea coordonatelor, tangenta și normala la această curbă în origine.

Soluție. Ecuație cu $P(x, y) = x + y + 1$, $Q(x, y) = x - y^2 + 3$. P și Q sînt funcții de clasă C^∞ pe $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{R}^2$.

Deoarece $\mathbf{D}$ este o mulțime convexă și $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x} = 1$ pe $\boldsymbol{D}$ soluția generală a ecuației este definită prin $(x - x_0)\displaystyle\int_0^1 [x_0 + t(x - x_0) + y_0 + t(y - y_0) + 1]\,dt + (y - y_0)\int_0^1 \{x_0 + t(x - x_0) - [y_0 + t(y - y_0)]^2 + 3\}\,dt = c$ (vezi paragraful 1.6). Efectuînd calculele se obține soluția generală dată de $3x^2 + 6xy + 18y - 2y^3 + 6x = c_1$.

Pentru $x = 0$, $y = 0$ se obține $c_1 = 0$, deci curba integrală cerută are ecuația carteziană implicită, $3x^2 + 6xy + 18y - 2y^3 + 6x = 0$. Tangenta la această curbă în origine are ecuația $x + 3y = 0$, iar normala, $y - 3x = 0$.

16. Să se integreze ecuațiile diferențiale:

1) $(2x^3 - 6x^2y + 3xy^2)\,dx + (3x^2y - 2x^3 - y^3)\,dy = 0$

2) $y(e^{xy} - 4x)\,dx + x(e^{xy} - 2x)\,dy = 0$.

R: 1) $\dfrac{x^4}{2} - 2x^3y + \dfrac{3}{2}x^2y^2 - \dfrac{y^4}{4} = c$; 2) $e^{xy} - 2x^2y = c$.

17. Să se integreze următoarele ecuații diferențiale știind că admit un factor integrant care depinde numai de x.

1) $(5x^2 + 12xy - 3y^2)\,dx + (3x^2 - 2xy)\,dy = 0$.

2) $(2x^2y^2 + y^2)\,dx + 2xy\,dy = 0$.

R. 1) $\mu = x^2$. Soluția generală, $x^5 + 3x^4y - x^3y^2 = c$.

2) $\mu = e^{x^2}$. Soluția generală, $xy^2e^{x^2} = c$.

18. Să se integreze ecuațiile:

1) $y'^2 + (x + a)\,y' - y = 0$, $a \in \boldsymbol{R}$; 2) $y = xy' + \dfrac{5}{y'}$;

3) $y = xy' + 3y'^2$; 4) $y'\left(x - \dfrac{1}{y'^2}\right) - y = 0$.

Soluție. 1) Ecuația se poate scrie $y = xy' + y'(a + y')$. Este ecuație Clairaut cu $\psi(y') = y'(a + y')$. ψ este de clasă C^∞ pe $\boldsymbol{R}$.

Notăm $y' = p$. Ecuația devine $y = xp + p(a + p)$. Derivînd în raport cu x în ambii membri obținem $p = p + x\dfrac{dp}{dx} + (a + 2p)\dfrac{dp}{dx}$, sau $\dfrac{dp}{dx}(x + 2p + a) = 0$.

Pentru $\dfrac{dp}{dx} = 0 \Rightarrow p = c$ și obținem soluția generală a ecuației $y = cx + c(a + c)$.

Pentru $2p + x + a = 0$ rezultă $x = -2p - a$ și soluția singulară a ecuației inițiale este reprezentată parametric prin ecuațiile $x = -2p - a$, $y = -p^2$.

19. Să se integreze ecuațiile diferențiale:

1) $y + 2xy' + y'^2 = 0$, 2) $xy'^2 + (y - 3x)\,y' + y = 0$,

3) $yy'^2 - 2xy' + y = 0$, 4) $x + y = \left(\dfrac{y' + 1}{y' - 1}\right)^2$,

5) $y'^2 - 2xy' + y = 0$.

Soluție. 1) Ecuația se poate scrie: $y = -2xy' - y'^2$. Este ecuație Lagrange cu $\varphi(y') = -2y'$ și $\psi(y') = -y'^2$, unde φ și ψ sînt funcții de clasă C^∞ pe $\mathbf{R}$. Notînd $y' = p$, ecuația devine $y = -2xp - p^2$. Derivînd în raport cu x în ambii membri și ținînd seama că $y' = p$, obținem $p = -2p - 2x\frac{dp}{dx} - 2p\frac{dp}{dx}$. Considerînd pe x ca funcție de p și împărțind prin $\frac{dp}{dx}$, $\frac{dp}{dx} \neq 0$, obținem ecuația $3p\frac{dx}{dp} = -2x - 2p$ sau, $\frac{dx}{dp} = -\frac{2}{3p}x - \frac{2}{3}$ care este ecuație liniară. Soluția ei generală este definită de $x = cp^{-\frac{2}{3}} - \frac{2}{5}p$. Soluția generală a ecuației Lagrange este definită prin $x = cp^{-\frac{2}{3}} - \frac{2}{5}p$, $y = -\frac{p^2}{5} - 2cp^{\frac{1}{3}}$.

Împărțind prin $\frac{dp}{dx} \neq 0$, am pierdut soluțiile $p = \text{const.}$, date de ecuația $p - \varphi(p) = 0$, adică $3p = 0$, deci $p = 0$. Ei îi corespunde soluția singulară a ecuației inițiale, $y = 0$.

20. Să se găsească soluția ecuației $y' + ky = e^{-x}$, $0 \leqslant x < \infty$, $y(0) = y_0$, $k \in \boldsymbol{R}$ și să se studieze continuitatea ei în raport cu parametrul k.

R: Pentru $k \neq 1$ se obține $y(x; k) = ce^{-kx} + \frac{e^{-x} - e^{-kx}}{k-1}$, iar pentru $k = 1$, $y(x; 1) = ce^{-x} + xe^{-x}$. Se verifică $\lim_{k \to 1} y(x; k) = y(x; 1)$.

21. Să se determine traiectoriile ortogonale ale familiei de parabole $\Gamma_a : x = ay^2$, $a \in \boldsymbol{R}$.

Soluție. Traiectoriile ortogonale ale familiei Γ_a sînt liniile care taie curbele familiei sub unghiuri drepte. Pantele y_1' și y_2' ale tangentelor la curbele celor două familii trebuie să satisfacă condiția de ortogonalitate $y_2' = -\frac{1}{y_1'}$.

Pentru familia Γ_a găsim $y' = \frac{1}{2ay}$, adică $y' = \frac{y}{2x}$, $x \neq 0$.

Ecuația diferențială a traiectoriilor ortogonale căutate este $y' = -\frac{2x}{y}$ sau $yy' + 2x = 0$.

Soluția generală este definită de $\int_{x_0}^{x} 2x\, dx = -\int_{y_0}^{y} y\, dy + c$, sau $x^2 + \frac{y^2}{2} = c_1$, care reprezintă o familie de elipse (fig. 4.2).

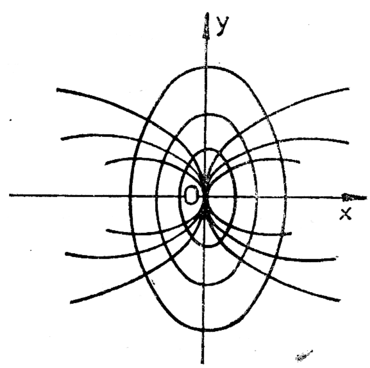


Fig. 4.2

Observație. Punctul $O(0, 0)$ este punct singular pentru familia de parabole inițiale, numit *punct singular de tip centru.*

22. Să se alcătuiască schema logică pentru metoda Runge-Kutta dată în paragraful 1.10.

Soluție (fig. 4.3).

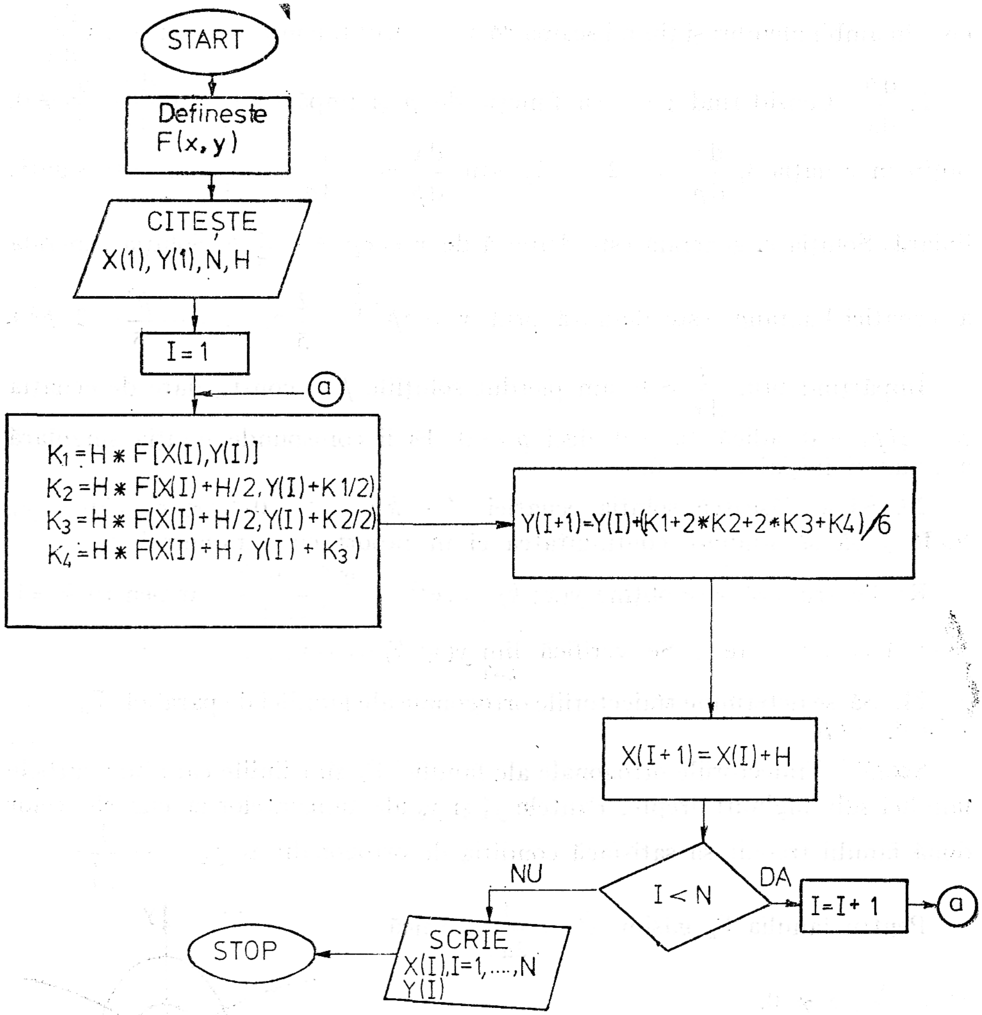


Fig. 4.2.

23. Să se scrie programul FORTRAN pentru rezolvarea problemei Cauchy: $y' = x + y$, $y(0) = 0$ prin metoda Euler.

Soluție. O variantă de program are forma (fig. 13.1).

```
  FUNCTIØN FUNCT(X, Y)
  FUNC = X + Y
  RETURN
  END
1 FØRMAT (4 F10.2)
  (READ (1,1)A, B, H, VI
  N = (B - A)/H
  M = N + 1
2 CALL EULER 2 (A, VI, H, 1, M)
  STØP
  END
  SUBRØUTINE EULER 2 (A, VI, H, K, M)
```

```
 7 FØRMAT (T2, 37 (1H.)/T2, 1H., T4, 'IN PUNCTUL. SØLUŢIA ARE 1 VALOAREA
  '/T2, 37(1H.))
 4 FØRMAT ((T2, 1H., F7. 1,5X, 1H., 6X, F9.3, 7X, 1H./T2, 37 (1H.)))
 6 FØRMAT ('1IN PUNCTUL' F4.1, 'VALØAREA SØLUŢIEI ESTE' F7. 3)
   X = A
   Y = VI
   IF(K.NE.1)GØ TØ 3
   WRITE (3, 7)
   WRITE (3, 4)X, Y
   DØ 2 L = 2, M
   Y = Y + FUNCT (X, Y)*H
   X = X + H
   WRITE (3, 4) X, Y
 2 CØNTINUE
   RETURN
 3 DØ 9 L = 2,M
   Y = Y + FUNC (X, Y)*H
 9 X = X + H
   WRITE (3,6)X, Y
   RETURN
   END
```

ÎN PUNCTUL	SOLUŢIA ARE VALOAREA
0.0	1.000
0.1	1.100
0.2	1.220
0.3	1.362
0.4	1.528
0.5	1.721
0.6	1.943
0.7	2.197
0.8	2.487
0.9	2.816
1.0	3.187

Fig. B.1.

§ 2. ECUAŢII DIFERENŢIALE LINIARE DE ORDIN SUPERIOR

2.1. Fie $\mathfrak{L}: C^n(I) \to C^0(I)$ operatorul diferenţial liniar definit prin

$$\mathfrak{L}(y) = a_0(x)\, y^{(n)} + a_1(x)\, y^{n-1} + \dots + a_n(x)\, y,$$

unde $a_i \in C^0(I)$, $i = 0, 1, \dots, n$, iar $a_0 \neq 0$. O ecuaţie diferenţială de tipul $\mathfrak{L}(y) = 0$ se numeşte *ecuaţie diferenţială ordinară liniară şi omogenă de ordinul* n.

Fie $a_0(x) \neq 0$, $\forall x \in I$. Dimensiunea spaţiului vectorial real al tuturor soluţiilor unei asemenea ecuaţii, $\mathfrak{L}(y) = 0$, adică dimensiunea lui Ker $\mathfrak{L}$, este n. Dacă $x \to y_j(x)$, $j = 1, \dots, n$, este o bază a spaţiului soluţiilor, atunci $x \to y(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j y_j(x)$, unde c_j sînt constante arbitrare, se numeşte *soluţia generală a ecuaţiei*.

2.2. Fie $y_j \in C^n(I)$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Determinantul

$$\mathrm{w}(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \ldots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \ldots & y_n'(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

se numește *wronskian*. Funcțiile $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sînt liniar independente dacă și numai dacă $\mathrm{w} \neq 0$.

Dacă $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sînt soluții ale ecuației $\mathcal{L}(y) = 0$, atunci $\mathrm{w}(x) = \mathrm{w}(x_0)\, e^{-\int_{x_0}^{x} \frac{a_1(x)}{a_0(x)} dx}$. De aceea, dacă w se anulează într-un punct din I, atunci w se anulează peste tot.

2.3. O ecuație diferențială de tipul $\mathcal{L}(y) = \mathrm{f}(x)$, $\mathrm{f} \in C^0(I) - \{0\}$, se numește *ecuație diferențială ordinară liniară și neomogenă.*

Soluția generală a ecuației neomogene $\mathcal{L}(y) = \mathrm{f}(x)$ este suma dintre o soluție particulară a ecuației neomogene și soluția generală a ecuației omogene $\mathcal{L}(y) = 0$.

2.4. *Metoda variației constantelor (Metoda Lagrange).* Dacă $y(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j y_j(x)$ este soluția generală a ecuației omogene $\mathcal{L}(y) = 0$, atunci soluția generală a ecuației $\mathcal{L}(y) = \mathrm{f}(x)$ poate fi găsită sub forma $y(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j(x)\, y_j(x)$, unde funcțiile $x \to c_j'(x)$, de clasă C^{n-1}, se obțin ca soluții ale sistemului de ecuații algebrice

$$\sum_{j=1}^{n} c_j'(x)\, y_j(x) = 0, \quad \sum_{j=1}^{n} c_j'(x)\, y_j'(x) = 0, \ldots, \sum_{j=1}^{n} c_j'(x)\, y_j^{(n-2)}(x) = 0,$$

$$\sum_{j=1}^{n} c_j'(x)\, y_j^{(n-1)} = \frac{f(x)}{a_0(x)}.$$

2.5. Dacă funcțiile f și g sînt analitice într-o vecinătate a punctului x_0, atunci orice soluție a ecuației

$$y'' + y'\mathrm{f}(x) + y\mathrm{g}(x) = 0$$

se poate scrie sub forma

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k.$$

Dacă funcțiile f_1 și f_2 sînt analitice într-o vecinătate a punctului x_0, atunci cel puțin una dintre soluțiile ecuației

$$y'' + y' \frac{\mathrm{f}_1(x)}{x - x_0} + y \frac{\mathrm{f}_2(x)}{(x - x_0)^2} = 0$$

se poate reprezenta în forma

$$y(x) = (x - x_0)^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k.$$

2.6. Fie $D:C^\infty(I) \to C^\infty(I)$ operatorul de derivare și $\mathfrak{L}:C^\infty(I) \to C^\infty(I)$ un *operator diferențial liniar cu coeficienți constanți* (reali) definit prin

$$\mathfrak{L} = a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \ldots + a_{n-1} D + a_n.$$

Mulțimea $\{\mathfrak{L}\}$ este un spațiu vectorial real. De asemenea, orice doi operatori diferențiali liniari cu coeficienți constanți sînt comutabili.

Polinomul

$$L(r) = a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \ldots + a_{n-1} r + a_n$$

se numește *polinomul caracteristic* atașat lui $\mathfrak{L}$. Deoarece descompunerii lui $L(r)$ în factori reali (comutabili) îi corespunde o descompunere a lui $\mathfrak{L}$ ca produs de operatori cu coeficienți constanți (comutabili), să zicem $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_1 \mathfrak{L}_2 \ldots \mathfrak{L}_k$, rezultă $\operatorname{Ker} \mathfrak{L}_i \subseteq \operatorname{Ker} \mathfrak{L}$. Tipurile posibile de factori sînt

$$r - \alpha \to D - \alpha$$

$$(r - \alpha)^m \to (D - \alpha)^m$$

$$r^2 - 2\alpha r + (\alpha^2 + \beta^2) \to D^2 - 2\alpha D + (\alpha^2 + \beta^2)$$

$$(r^2 - 2\alpha r + (\alpha^2 + \beta^2))^m \to (D^2 - 2\alpha D + (\alpha^2 + \beta^2))^m.$$

Fie $\mathfrak{L}(y) = 0$ o ecuație diferențială liniară omogenă cu coeficienți constanți și $L(r) = 0$ ecuația caracteristică asociată.

(1) La o soluție α, reală, simplă, a ecuației caracteristice, îi corespunde o singură soluție liniar independentă $e^{\alpha x}$ a ecuației $\mathfrak{L}(y) = 0$.

(2) La o soluție α, reală, multiplă de ordinul m, a ecuației caracteristice îi corespund m soluții liniar independente

$$e^{\alpha x},\ x e^{\alpha x},\ \ldots,\ x^{m-1} e^{\alpha x}$$

ale ecuației $\mathfrak{L}(y) = 0$.

(3) La o pereche de rădăcini complexe conjugate simple $\alpha + i\beta$, $\alpha - i\beta$ ale ecuației caracteristice îi corespunde o pereche de soluții liniar independente $e^{\alpha x} \cos \beta x$, $e^{\alpha x} \sin \beta x$ ale ecuației $\mathfrak{L}(y) = 0$.

(4) La o pereche de rădăcini complexe conjugate $\alpha + i\beta$, $\alpha - i\beta$, multiple de ordinul m, îi corespund $2m$ soluții liniar independente

$$e^{\alpha x} \cos \beta x,\quad x e^{\alpha x} \cos \beta x,\ \ldots,\ x^{m-1} e^{\alpha x} \cos \beta x$$

$$e^{\alpha x} \sin \beta x,\ x e^{\alpha x} \sin \beta x,\ \ldots,\ x^{m-1} e^{\alpha x} \cos \beta x$$

ale ecuației $\mathfrak{L}(y) = 0$.

2.7. *Metoda coeficienților nedeterminați* pentru găsirea unei soluții particulare y_p a unei ecuații liniare neomogene cu coeficienți constanți $\mathfrak{L}(y) = f(x)$, unde f este un cvasipolinom, constă în căutarea unor soluții determinate de expresii de tipul $f(x)$. Această tehnică se poate rezuma prin tabelele următoare.

$f(x)$	a	x^n	$e^{\alpha x}$	$x^n e^{\alpha x}$	$e^{\alpha x}\cos\beta x$, $e^{\alpha x}\sin\beta x$	$x^n e^{\alpha x}\cos\beta x$, $x^n e^{\alpha x}\sin\beta x$
$L(r)$	$L(0)\neq 0$	$L(0)\neq 0$	$L(\alpha)\neq 0$	$L(\alpha)\neq 0$	$L(\alpha+i\beta)\neq 0$	$L(\alpha+i\beta)\neq 0$
y_p	A	$\sum\limits_{i=0}^{n} A_i x^{n-i}$	$Ae^{\alpha x}$	$e^{\alpha x}\sum\limits_{i=0}^{n} A_i x^{n-i}$	$e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x)$	$e^{\alpha x}\sum\limits_{i=0}^{n}(A_i\cos\beta x + B_i\sin\beta x)\cdot x^{n-i}$

$f(x)$	a	x^n	$e^{\alpha x}$	$x^n e^{\alpha x}$	$e^{\alpha x}\cos\beta x$, $e^{\alpha x}\sin\beta x$	$x^n e^{\alpha x}\cos\beta x$, $x^n e^{\alpha x}\sin\beta x$
	Numerele					
$L(r)$	0	0	α	α	$\alpha+i\beta$	$\alpha+i\beta$
	sînt respectiv rădăcini multiple de ordinul m ale lui $L(r)$					
y_p	$A\cdot x^m$	$x^m\sum\limits_{i=0}^{n} A_i x^{n-i}$	$Ax^m e^{\alpha x}$	$e^{\alpha x}x^m\sum\limits_{i=0}^{n} A_i x^{n-i}$	$e^{\alpha x}x^m(A\cos\beta x + \beta\sin\beta x)$	$e^{\alpha x}x^m\sum\limits_{i=0}^{n}(A_i\cos\beta x + B_i\sin\beta x)x^{n-i}$

2.8. O ecuație diferențială de forma

$$a_0x^ny^{(n)} + a_1x^{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}xy' + a_ny = 0,$$

unde $a_i\in\boldsymbol{R}$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, iar $a_0\neq 0$, se numește *ecuație Euler*. Prin substituția $x = e^t (x>0)$ ecuația Euler se transformă într-o ecuație liniară omogenă cu coeficienți constanți.

Exerciții și probleme

1. Să se găsească soluția generală a ecuației diferențiale $\mathfrak{L}(y) = 0$, unde $\mathfrak{L}$ este operatorul diferențial liniar cu coeficienți constanți (reali) definit respectiv prin

1) $\mathfrak{L} = D^6 + D^5 - 7D^4 - D^3 + 2D^2 - 92D - 120$,

2) $\mathfrak{L} = D^3 - 8$,

3) $\mathfrak{L} = D^3 - 6D^2 + 12D - 8$,

4) $\mathfrak{L} = D^5 - 18D^4 + 130D^3 - 468D^2 + 833D - 578$.

Soluție. 1) Polinomul caracteristic atașat operatorului diferențial liniar $\mathfrak{L}$ este $L(r) = r^6 + r^5 - 7r^4 - r^3 + 2r^2 - 92r - 120$ care poate fi descompus astfel $L(r) = (r-3)(r+2)^3(r^2-2r+5)$. Analog operatorul admite descompunerea $\mathfrak{L} = (D-3)(D+2)^3(D^2-2D+5)$.

Funcția $y_1(x) = e^{3x}$ este în $\text{Ker}(D-3)$: funcțiile $y_2(x) = e^{-2x}$, $y_3(x) = xe^{-2x}$, $y_4(x) = x^2e^{-2x}$ sînt în $\text{Ker}(D+2)^3$, iar funcțiile $y_5(x) = e^x\cos 2x$ și $y_6 = e^x\sin 2x$ sînt în $\text{Ker}(D^2-2D+5)$. Întrucît aceste șase funcții sînt liniar independente, ele formează o bază a sațiului vectorial $\text{Ker}\,\mathfrak{L}$, așa încît soluția generală a ecuației diferențiale $\mathcal{L}(y) = 0$ este acoperirea liniară $y(x) = C_1 e^{3x} + (C_2 + C_3 x + C_4 x^2) e^{-2x} + e^{2x}(C_5 \cos 2x + C_6 \sin 2x)$.

2) $y(x) = c_1 e^{2x} + e^{-x}(c_2 \cos \sqrt{3}x + c_3 \sin \sqrt{3}x)$,

3) $y(x) = e^{2x}(c_1 + c_2 x + c_3 x^2)$,

4) $y(x) = c_1 e^{2x} + e^{4x}[(c_2 + c_3 x) \cos x + (c_4 + c_5 x) \sin x]$.

2. Fie operatorul $\mathcal{A}$, operatorul identic $\mathcal{J}$ și operatorul de derivare D definiți pe C^∞ ($\boldsymbol{R}$) astfel:

$$\mathcal{A}[y(x)] = x \cdot y(x) \text{ pentru orice } x \in \boldsymbol{R},\ \mathcal{J}[y(x)] = y(x).$$

Să se calculeze

$$\mathrm{D}\mathcal{A} - \mathcal{A}\mathrm{D},\ \mathrm{D}^2\mathcal{A} - \mathcal{A}\mathrm{D}^2,\ \mathrm{D}^3\mathcal{A} - \mathcal{A}\mathrm{D}^3, \ldots, \mathrm{D}^n\mathcal{A} - \mathcal{A}\mathrm{D}^n.$$

Să se arate că operatorii obținuți sînt operatori diferențiali liniari cu coeficienți constanți și să se exprime în funcție de D.

Soluție. $\mathrm{D}\mathcal{A} = (\mathrm{D}\mathcal{A})[y(x)] = \mathrm{D}(\mathcal{A}[y(x)]) = \mathrm{D}(x \cdot y(x)) = y(x) + xy'(x)$, $\mathcal{A}\mathrm{D} = (\mathcal{A}\mathrm{D})[y(x)] = \mathcal{A}(\mathrm{D}[y(x)]) = \mathcal{A}[y'(x)] = x \cdot y'(x)$. Rezultă $\mathrm{D}\mathcal{A} - \mathcal{A}\mathrm{D} = \mathcal{J}$.

$\mathrm{D}^2\mathcal{A} = \mathrm{D}^2[\mathcal{A}(y)] = \mathrm{D}^2(xy) = \mathrm{D}(y + xy') = 2y' + xy''$; $\mathcal{A}\mathrm{D}^2 = \mathcal{A}[\mathrm{D}^2(y)] = x\mathrm{D}^2(y) = xy''$; Rezultă $\mathrm{D}^2\mathcal{A} - \mathcal{A}\mathrm{D}^2 = 2\mathrm{D}$.

Analog $\mathrm{D}^3\mathcal{A} - \mathcal{A}\mathrm{D}^3 = 3\mathrm{D}^2$.

Calculăm $\mathrm{D}^n\mathcal{A}$ folosind formula lui Leibnitz; $\mathrm{D}^n\mathcal{A} = \mathrm{D}^n[\mathcal{A}(y)] = \mathrm{D}^n(x \cdot y) = C_n^{n-1} \cdot 1 y^{(n-1)} + C_n^n x y^{(n)} = ny^{(n-1)} + xy^{(n)}$, apoi $\mathcal{A}\mathrm{D}^n = \mathcal{A}[\mathrm{D}^n(y)] = \mathcal{A}(y^{(n)}) = xy^{(n)}$. Obținem $\mathrm{D}^n\mathcal{A} - \mathcal{A}\mathrm{D}^n = n\mathrm{D}^{n-1}$.

3. Să se integreze

1) $y^{\mathrm{V}} - 2y^{\mathrm{IV}} + y''' - 2y'' = 0$

2) $y''' - 3y'' + 49y' + 53y = 0$

3) $y^{\mathrm{IV}} - 29y'' + 100 = 0$

4) $y^{\mathrm{IV}} + 29y'' + 100 = 0$

5) $y^{\mathrm{VII}} - 20^{\mathrm{VI}} + 130y^{\mathrm{V}} - 500y^{\mathrm{IV}} + 625y''' = 0$.

6) $y''' + \lambda y' = 0$, pentru $\lambda = 0$, $\lambda = -a^2$, $\lambda = a^2$, $a \in \boldsymbol{R}$.

Soluție. 1) Ecuația caracteristică $r^5 - 2r^4 + r^3 - 2r^2 = 0$ admite rădăcina reală dublă $r_1 = r_2 = 0$, rădăcina reală simplă $r_3 = 2$ și rădăcinile complex conjugate $r_4 = \mathrm{i}$, $r_5 = \mathrm{i}$.

Soluția generală a ecuației este

$$y(x) = c_1 + c_2 x + c_3 e^{2x} + c_4 \cos x + c_5 \sin x;$$

2) $y(x) = c_1 e^{-x} + e^{2x}(c_2 \cos 7x + c_3 \sin 7x)$;

3) $y(x) = c_1 e^{-5x} + c_2 e^{5x} + c_3 e^{-2x} + c_4 e^{2x}$;

4) $y(x) = c_1 \cos 5x + c_2 \sin 5x + c_3 \cos 2x + c_4 \sin 2x$.

5) Ecuația caracteristică admite rădăcinile $r_1 = r_2 = r_3 = 0$, $r_3 = r_4 = 5 + 2\mathrm{i}$, $r_5 = r_6 = 5 - 2\mathrm{i}$, prin urmare $y(x) = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + e^{5x}[(c_4 + c_5 x) \cos x + (c_6 + c_7 x) \sin x]$.

$$6)\ y(x) = \begin{cases} c_1 x^2 + c_2 x + c_3 & \text{pentru } \lambda = 0 \\ k_1 + k_2 e^{ax} + k_3 e^{-x} & \text{pentru } \lambda = -a^2 \\ k_1 + k_2 \cos ax + k_3 \sin ax & \text{pentru } \lambda = a^2 \end{cases}$$

4. Fie operatorii diferențiali liniari cu coeficienți constanți $\mathcal{L}_1(y) = y^{IV} + y''$, $\mathcal{L}_2(y) = y''' + y''$.

1) Să se rezolve ecuațiile $\mathcal{L}_1(y) = 0$, $\mathcal{L}_2(y) = 0$.

2) Să se găsească dimensiunea spațiilor $\operatorname{Ker} \mathcal{L}_1 + \operatorname{Ker} \mathcal{L}_2$ și $\operatorname{Ker} \mathcal{L}_1 \cap \operatorname{Ker} \mathcal{L}_2$.

Soluție. 1) Polinomul caracteristic atașat lui $\mathcal{L}_1$ este $L_1(r) = r^4 + r^2$. Rădăcinile ecuației caracteristice sînt $r_1 = r_2 = 0$, $r_3 = \mathrm{i}$, $r_4 = -\mathrm{i}$. Soluția generală a ecuației $\mathcal{L}_1(y) = 0$ este $y(x) = c_1 + c_2 x + c_3 \cos x + c_4 \sin x$. Pentru ecuația $\mathcal{L}_2(y) = 0$, obținem soluția generală $y(x) = k_1 + k_2 x + k_3 e^{-x}$.

2) Spațiile vectoriale $\operatorname{Ker} \mathcal{L}_1$ și $\operatorname{Ker} \mathcal{L}_2$ sînt generate de mulțimile de vectori liniar independenți $\{1, x, \cos x, \sin x\}$, respectiv $\{1, x, e^{-x}\}$. Elementele spațiului $\operatorname{Ker} \mathcal{L}_1 + \operatorname{Ker} \mathcal{L}_2$ sînt elementele acoperirii liniare $c_1 + c_2 x + c_3 \cos x + c_4 \sin x + k_1 + k_2 x + k_3 e^{-x}$. O bază în acest spațiu poate fi considerată mulțimea $\{1, x, \cos x, \sin x, e^{-x}\}$; deci $\dim (\operatorname{Ker} \mathcal{L}_1 + \operatorname{Ker} \mathcal{L}_2) = 5$.

Orice vector din $\operatorname{Ker} \mathcal{L}_1$, este soluția generală a ecuației $\mathcal{L}_1(y) = 0$. Analog pentru $\operatorname{Ker} \mathcal{L}_2$. Spațiul $\operatorname{Ker} \mathcal{L}_1 \cap \operatorname{Ker} \mathcal{L}_2$ va conține acei vectori pentru care $c_1 + c_2 x + c_3 \cos x + c_4 \sin x = k_1 + k_2 x + k_3 e^{-x}$. Din egalitatea de mai sus obținem $c_1 = k$, $c_2 = k$, $c_3 = 0$, $c_4 = 0$, $k_3 = 0$. Deci, $\dim (\operatorname{Ker} \mathcal{L}_1 \cap \operatorname{Ker} \mathcal{L}_2) = 2$. O bază în acest spațiu este $\{1, x\}$.

5. Să se integreze ecuațiile diferențiale $\mathcal{L}_1(y) = 0$, $\mathcal{L}_2(y) = 0$ și să se scrie matricea atașată operatorului liniar

1) $(D^3 - 2D^2) : \operatorname{Ker} \mathcal{L}_2 \to \operatorname{Ker} \mathcal{L}_1$

2) $(D^2 + 3D) : \operatorname{Ker} \mathcal{L}_1 \to \operatorname{Ker} \mathcal{L}_2$

unde $\mathcal{L}_1(y) = y^{IV} - 2y''' + y''$, $\mathcal{L}_2(y) = y^{V} - 2y^{IV} + y'''$.

Soluție. Pentru ecuația diferențială $\mathcal{L}_1(y) = 0$ soluția generală este acoperirea liniară $y(x) = c_1 + c_2 x + c_3 e^x + c_4 x e^x$; mulțimea liniar independentă $\{1, x, e^x, xe^x\}$ a soluțiilor particulare ale ecuației de mai sus constituie o bază în $\operatorname{Ker} \mathcal{L}_1$. Analog, considerăm o bază în $\operatorname{Ker} \mathcal{L}_2$ ca fiind mulțimea soluțiilor particulare ale ecuației $\mathcal{L}_2(y) = 0$, adică $\{1, x, x^2, e^x, xe^x\}$. Atunci,

$$
\begin{aligned}
(D^3 - 2D^2)(1) &= D^3(1) - 2D^2(1) = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot e^x + 0 \cdot xe^x \\
(D^3 - 2D^2)(x) &= D^3(x) - 2D^2(x) = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot e^x + 0 \cdot xe^x \\
(D^3 - 2D^2)(x^2) &= D^3(x^2) - 2D^2(x^2) = (-4) \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot e^x + 0 \cdot xe^x \\
(D^3 - 2D^2)(e^x) &= D^3(e^x) - 2D^2(e^x) = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + (-1)e^x + 0 \cdot xe^x \\
(D^3 - 2D^2)(xe^x) &= D^3(xe^x) - 2D^2(xe^x) = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + (-1)e^x + (-1)\, xe^x.
\end{aligned}
$$

Matricea atașată acestui operator liniar este

$$
\begin{bmatrix}
0 & 0 & -4 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1
\end{bmatrix}
$$

Analog calculăm imaginile vectorilor din baza aleasă în $\operatorname{Ker} \mathcal{L}_1$ prin operatorul diferențial liniar $(D^2 + 3D)$. Matricea atașată este

$$
\begin{bmatrix}
0 & 3 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 4 & 5 \\
0 & 0 & 0 & 4
\end{bmatrix}.
$$

6. Să se integreze următoarele ecuații folosind metoda variației constantelor

1) $y'' + y = 2 \sec^3 x$

2) $y'' + 4y = \sec 2x$

3) $y'' + 4y = 2 \operatorname{tg} x$

4) $y''' - 9y' = \cos x$

Soluție. 1) Ecuația omogenă admite soluția $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$. Soluția generală a ecuației date este de forma $y = c_1(x) \cos x + c_2(x) \sin x$, unde funcțiile necunoscute $c_1(x)$ și $c_2(x)$ se obțin din sistemul $c_1'(x) \cos x + c_2'(x) \sin x = 0$, $-c_1'(x) \sin x + c_2'(x) \cos x = 2 \sec^3 x$. Găsim $c_1(x) = -2\int \sin x \cos^{-3} x\, dx + k_1$, $c_1(x) = -\cos^{-2} x + k_1$; $c_2(x) = 2\int \frac{dx}{\cos^2 x} = 2 \operatorname{tg} x + k_2$. Soluția generală este

$$y(x) = (-\cos^{-2} x + k_1) \cos x + (2 \operatorname{tg} x + k_2) \sin x$$

sau

$$y(x) = k_1 \cos x + k_2 \sin x - \frac{\cos 2x}{\cos x}, \quad x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

7. Să se găsească soluțiile generale ale următoarelor ecuații folosind metoda coeficienților nedeterminați

1) $y'' + 2y' - 3y = 3e^{-3x}$,

2) $y'' - 2y' + 5y = 2xe^x + e^x \sin 2x$,

3) $y''' - 9y' = \cos x$,

4) $y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 4xe^{2x}$,

5) $y''' - y'' - y' + y = 3e^x + 5x \sin x$.

Soluție. 1) Ecuației omogene $y'' + 2y' - 3y = 0$ i se atașează ecuația caracteristică $r^2 + 2r - 3 = 0$ ale cărei rădăcini sînt $r_1 = 1$, $r_2 = -3$. Soluția generală a ecuației omogene este $y_0(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-3x}$. Avînd în vedere expresia $f(x)$, soluția particulară ar trebui să fie de forma Ae^{-3x}; întrucît $r = -3$ este rădăcină simplă a ecuației caracteristice vom lua $y_p = Axe^{-3x}$. Derivăm și înlocuim în ecuația neomogenă inițial dată. Obținem $-4Ae^{-3x} = 3e^{-3x}$, de unde $A = -\frac{3}{4}$. Prin urmare soluția generală căutată este definită prin $y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-3x} - \frac{3}{4} xe^{-3x}$.

2) Soluția generală a ecuației omogene este $y_0(x) = e^x(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x)$. Pentru a determina o soluție particulară a ecuației propuse, considerăm ecuațiile

$$u'' - 2u' + 5u = 2xe^x \quad \text{și} \quad v'' - 2v' + 5v = e^x \sin 2x.$$

Pentru prima ecuație, soluția particulară este de forma $u_p = (Ax + B)e^x$. Rezultă $A = \frac{1}{2}$, $B = 0$. Pentru a doua ecuație soluția particulară este de forma $v_p = xe^x \cdot (C \cos 2x + D \sin 2x)$, deoarece $\operatorname{Re}(1 \pm 2i) = 1$. Se obține

$C = -\frac{1}{4}$, $D = 0$. Prin urmare, soluția generală a ecuației date este definită prin $y(x) = e^x(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x) + \frac{1}{2} xe^x = \frac{1}{4} xe^x \cos 2x$.

3) $y_0(x) = c_1 + c_2e^{3x} + C_3e^{-3x}$; soluția particulară se ia de forma $y_p(x) = A \cos x + B \sin x$, se obține $A = 0$, $B = -\frac{1}{10}$. Soluția generală este $y(x) = c_1 + c_2e^{3x} + c_3e^{-3x} - \frac{1}{10} \sin x$.

4) $y_0(x) = c_1e^{2x} + c_2xe^{2x} + c_3x^2e^{2x}$; $y_p = x^3(Ax + B)\, e^{2x}$, deoarece $r = 2$ este rădăcină triplă a ecuației caracteristice. Soluția generală este $y = c_1e^{2x} + c_2xe^{2x} + c_3x^2e^{2x} + \frac{1}{6} x^4e^{2x}$.

5) $u_p = Ax^2e^x$ deoarece $r = 1$ este rădăcină dublă a ecuației caracteristice; se găsește $A = \frac{3}{4}$; $v_p = (Bx + C) \cos x + (Dx + E) \cdot \sin x$, se găsește $B = D = \frac{5}{7}$, $C = \frac{10}{7}$, $E = -\frac{5}{7}$. Prin urmare $y(x) = c_1e^{-x} + c_2e^x + c_3xe^x + \frac{3}{4} x^2e^x + \frac{5}{7} [(x + 2) \cos x + (x - 1) \sin x]$.

8. Fie ecuația diferențială $y''' + 3y'' + 2y' = 4e^{-2x}$, $x \in [0, +\infty)$.

1) Să se găsească soluția generală.

2) Să se determine curba integrală care trece prin punctul $M_0(1, 1)$, are tangenta în M_0 paralelă cu axa absciselor și admite asimptota $y = -3$.

Soluție. 1) Ecuația diferențială omogenă $y''' + 3y'' + 2y' = 0$ admite soluția generală $y(x) = c_1 + c_2e^{-2x} + c_3e^{-x}$. Ținînd seama de expresia $f(x) = 4e^{-2x}$ și de faptul că $r = -2$ este rădăcină simplă a ecuației caracteristice, căutăm o soluție particulară a ecuației neomogene de forma $y_1(x) = Axe^{-2x}$. Soluția generală a ecuației neomogene inițial date este de forma

$$y(x) = c_1 + c_2e^{-2x} + c_3e^{-x} + 2xe^{-2x}.$$

2) Datele problemei se scriu concis $y(1) = 1$, $y'(1) = 0$, $\lim\limits_{x \to \infty} y(x) = -3$. Acestea conduc la sistemul liniar $c_1 + (c_2 + 2)\, e^{-2} + c_3e^{-1} = 1$, $-2c_2e^{-2} - c_3e^{-1} = 2e^{-2}$; $c_1 = -3$. Găsim $c_2 = -4e^2$, $c_3 = \frac{2}{e} (4e^2 - 1)$.

Prin urmare ecuația curbei cerute este $y(x) = -3 - 4e^{2-2x} + 2(4e^2 - 1)e^{-1-x} + 2xe^{-2x}$.

9. Să se integreze ecuația diferențială $y'' - 3y' - 10y = f(x)$, unde

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } x \in (-1, 0] \\ \sin x & \text{dacă } x \in (0, 1) \end{cases}$$

Soluție. Pentru $x \in (-1, 0)$ se obține ecuația diferențială omogenă $y'' - 3y' - 10y = 0$ cu soluția generală $y(x) = c_1e^{-2x} + c_2e^{5x}$.

Pentru $x \in (0, 1)$ se obține ecuația diferențială neomogenă $y'' - 3y' - 10y = \sin x$, cu soluția generală $y(x) = k_1 e^{-2x} + k_2 e^{5x} + \frac{3}{130}\cos x - \frac{11}{130}\sin x$.

Deci soluția ecuației diferențiale propuse trebuie să aibă forma

$$y(x) = \begin{cases} c_1 e^{-2x} + c_2 e^{5x}, & x \in (-1, 0] \\ k_1 e^{-2x} + k_2 e^{5x} + \frac{3}{130}\cos x - \frac{11}{130}\sin x, & x \in (0, 1). \end{cases}$$

Se impune condiția de continuitate a lui $y(x)$ în $x = 0$, și condițiile de existență a derivatelor $y'(0)$, $y''(0)$. Obținem sistemul liniar $c_1 + c_2 - k_1 - k_2 = \frac{3}{130}$, $-2c_1 + 5c_2 + 2k_1 - 5k_2 = -\frac{11}{130}$, $4c_1 + 25c_2 - 4k_1 - 25k_2 = -\frac{3}{130}$ care este compatibil dublu nedeterminat, prin urmare ecuația diferențială dată inițial admite soluții pentru $x \in (-1, 1)$; $c_1 = \frac{1}{35} + k_1$, $c_2 = -\frac{1}{182} + k_2$.

10. Să se determine soluțiile ecuațiilor

1) $xy'' + 2y' - xy = 0$,

2) $xy'' + (3 + x^3)\, y' + 3x^2 y = 0$,

3) $y'' + xy' + y = 0$,

4) $y'' - xy' - 2y = 0$,

cu ajutorul seriilor de puteri.

Soluție. 1) Se observă că $x = 0$ este un punct singular. De aceea căutăm soluții de tipul $y = x^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{\alpha+n}$. Prin derivare deducem

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha + n)\, a_n x^{\alpha+n-1}, \qquad y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha + n)(\alpha + n - 1)\, a_n x^{\alpha+n-2}$$

și deci

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\alpha + n)(\alpha + n - 1)\, a_n x^{\alpha+n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} 2(\alpha + n)\, a_n x^{\alpha+n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{\alpha+n+1} = 0,$$

adică

$$a_0\alpha(\alpha + 1)\, x^{\alpha-1} + a_1(\alpha + 1)(\alpha + 2)\, x^\alpha +$$
$$+ \sum_{n=0}^{\infty} \left((n + \alpha + 2)(n + \alpha + 1)\, a_{n+2} + 2(n + \alpha + 2)\, a_{n+2} - a_n\right) x^{\alpha+n+1} = 0.$$

Prin identificare găsim

$$a_0\alpha(\alpha + 1) = 0, \; a_1(\alpha + 1)(\alpha + 2) = 0, \; (\alpha + n + 3)(\alpha + n + 2)\, a_{n+2} = a_n.$$

Pentru $\alpha = 0$ rezultă $a_1 = 0$ şi $a_{n+2} = \dfrac{a_n}{(n+2)(n+3)}$. Deci $a_{2p} = \dfrac{a_0}{(2p+1)!}$,

$a_{2p+1} = 0$, adică $y = a_0 \sum\limits_{p=0}^{\infty} \dfrac{x^{2p}}{(2p+1)!} = \begin{cases} a_0 \dfrac{\operatorname{sh} x}{x} & \text{pt. } x \neq 0 \\ 0 & \text{pt. } x = 0 \end{cases}$ este o soluţie a ecuaţiei.

Fie $\alpha = -1$. Găsim $a_{n+2} = \dfrac{a_n}{(n+2)(n+1)}$ şi deci $a_{2p} = \dfrac{a_0}{(2p)!}$, $a_{2p+1} = \dfrac{a_1}{(2p+1)!}$. Astfel

$$y = a_0 x^{-1} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{x^{2p}}{(2p)!} + a_1 x^{-1} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} = a_0 \frac{\operatorname{ch} x}{x} + a_1 \frac{\operatorname{sh} x}{x}, \quad x \neq 0$$

este soluţia generală a ecuaţiei propuse (liniar independenţa soluţiilor particulare este evidentă).

Cazul $\alpha = -2$ conduce tot la soluţia generală.

2) Găsim

$$y_1 = x^{-2} \left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\, 3^m} x^{3m} \right),$$

$$y_2 = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{3m}}{(3m+2)(3m-1) \ldots 11 \cdot 8 \cdot 5}, \quad x \neq 0.$$

3) $a_{n+2} = -\dfrac{1}{n+2} a_n$ pentru $n \geqslant 0$. Seria $y(x) = \sum a_n x^n$ mai poate fi scrisă $y(x) = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x)$, unde

$$y_1(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2.4.6 \ldots (2n)} x^{2n} = e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad y_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1.3.5 \ldots (2n+1)} x^{2n+1}$$

şi

$$a_0 = y(0), \quad a_1 = y'(0).$$

Aceste serii sînt convergente pentru orice $x \in \boldsymbol{R}$, adică raza de convergenţă este infinită.

4) $y = c_0 \left(1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^{2n}}{1.3 \ldots (2n-1)} \right) + c_1 \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^{2n+1}}{2.4 \ldots (2n)}$.

Raza de convergenţă este infinită.

11. Fie operatorul diferenţial liniar

1) $\mathfrak{L}(y) = y'' - \dfrac{x}{1-x^2} y' + \dfrac{9}{1-x^2} y$, $\mathfrak{L}: C^2(I) \to C^0(I)$, $I = (-1, 1)$.

2) $\mathfrak{L}(y) = y'' - \dfrac{7x}{2(x^2-1)} y' - \dfrac{5}{2(x^2-1)} y$, $\mathfrak{L}: C^2(I) \to C^0(I)$

3) $\mathfrak{L}(y) = y^{\mathrm{IV}} + \dfrac{3}{x^2} y'' - \dfrac{7}{x^3} y' + \dfrac{8}{x^4} y$, $\mathfrak{L}: C^4(I) \to C^0(I)$, $I = \boldsymbol{R}_+$.

Să se determine $\operatorname{Ker} \mathfrak{L}$ şi să i se stabilească dimensiunea.

Soluție. Variabila independentă x o înlocuim prin funcția $t \to \varphi(t)$ convenabil aleasă astfel încît să obținem o ecuație diferențială cu coeficienți constanți ușor de integrat.

1) $x = \sin t$, $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Derivatele de ordinul întîi și doi ale funcției y vor fi

$$y' = \frac{dy}{dt} \Big/ \frac{dx}{dt} = \frac{1}{\cos t} \frac{dy}{dt};$$

$$y'' = \frac{1}{\cos t} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\cos t} \frac{dy}{dt} \right) = \frac{1}{\cos^3 t} \left(\frac{d^2y}{dt^2} \cos t + \frac{dy}{dt} \sin t \right).$$

Înlocuim în $\mathfrak{L}(y) = 0$ și obținem ecuația diferențială liniară de ordinul doi $\frac{d^2y}{dt^2} + 9y = 0$ ale cărei soluții particulare sînt $y_1(t) = \cos 3t$, $y_2(t) = \sin 3t$.

Prin schimbarea de variabilă, operatorul diferențial liniar $\mathfrak{L}$ devine operatorul diferențial liniar cu coeficienți constanți $\mathfrak{L}^* = D^2 + 9$; mulțimea tuturor soluțiilor ecuației diferențiale $\mathfrak{L}^*(y) = 0$, adică Ker $\mathfrak{L}^*$ este un spațiu vectorial real. Spațiul vectorial Ker $\mathfrak{L}^*$ este generat de soluțiile particulare $y_1(x) = \cos 3t$, $y_2(t) = \sin 3t$ ale ecuației diferențiale $\mathfrak{L}^*(y) = 0$.

Fie $\mathcal{T}$ transformarea liniară $\mathcal{T}$: Ker $\mathfrak{L}^* \to \boldsymbol{R}^2$ definită prin $\mathcal{T}(y_i) = (y_i(t_0), y_i'(t_0))$, $i=1, 2$, unde t_0 este un punct fixat din $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Deoarece $\mathcal{T}(y_i) = 0$ implică $y_i(t) = 0$ conform teoremei de existență și unicitate a soluțiilor ecuației diferențiale, urmează că $\mathcal{T}$ este injectivă; aceeași teoremă asigură și surjectivitatea lui $\mathcal{T}$. Deci $\mathcal{T}$ este un izomorfism și dim Ker $\mathfrak{L}^* =$ dim $\boldsymbol{R}^2 = 2$.

Perechea formată din soluțiile particulare $y_1(x) = \cos 3 (\arcsin x)$, $y_2(x) = \sin 3 (\arcsin x)$ ale ecuației diferențiale $\mathfrak{L}(y) = 0$ formează o bază a lui Ker $\mathfrak{L}$. Acoperirea liniară $c_1 y(x) + c_2 y(x)$ constituie soluția generală a ecuației diferențiale $\mathfrak{L}(y) = 0$.

2) Efectuăm schimbarea de variabilă $x = \operatorname{ch} t$; $y' = \frac{1}{\operatorname{sh} t} \frac{dy}{dt}$, $y'' = \frac{1}{\operatorname{sh}^2 t} \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{\operatorname{ch} t}{\operatorname{sh}^3 t} \frac{dy}{dt}$; obținem ecuația diferențială $2\frac{d^2y}{dt^2} - 9 \frac{dy}{dt} - 5y = 0$ ale cărei soluții particulare sînt

$$y_1(t) = e^{-\frac{t}{2}}, \quad y(t) = e^{5t}; \quad \text{dim Ker } \mathfrak{L}^* = \text{dim Ker } \mathfrak{L} = 2.$$

3) Efectuăm schimbarea de variabilă $x = e^t$; în acest caz

$$y' = \frac{1}{e^t} \frac{dy}{dt}, \quad y'' = \frac{1}{e^{2t}} \left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right), \quad y''' = \frac{1}{e^{3t}} \left(\frac{d^2y}{dt^3} - 3 \frac{d^2y}{dt^2} + 2 \frac{dy}{dt} \right),$$

$$y^{\text{IV}} = \frac{1}{e^{4t}} \left(\frac{d^4y}{dt^4} - 6 \frac{d^3y}{dt^3} + 11 \frac{d^2y}{dt^2} - 6 \frac{dy}{dt} \right).$$

Ecuația diferențială atașată operatorului diferențial liniar $\mathfrak{L}^*$ este

$$\frac{d^4y}{dt^4} - 6\frac{d^3y}{dt^3} + 14\frac{d^2y}{dt^2} - 16\frac{dy}{dt} + 8y = 0$$

ale cărei soluții particulare sînt $y_1(t) = e^{2t}$, $y_2(t) = te^{2t}$, $y_3(t) = e^t \cos t$, $y_4(t) = e^t \sin t$; $\dim \operatorname{Ker} \mathfrak{L}^* = \dim \operatorname{Ker} \mathfrak{L} = 4$. O bază în $\operatorname{Ker} \mathfrak{L}$ poate fi considerată mulțimea $\{x^2, x^2 \ln|x|, x \cos \ln|x|, x \sin \ln |x|\}$. Acoperirea liniară a elementelor acestei mulțimi este soluția generală a ecuației diferențiale $\mathfrak{L}(y) = 0$.

Observație. Ecuația diferențială dată în enunț se mai poate scrie sub forma $x^4y^{IV} + 3x^2y'' - 7xy' + 8y = 0$ care este o ecuație diferențială tip Euler.

12. Să se determine soluțiile generale ale următoarelor ecuații Euler

1) $x^3y''' + 3x^2y'' + xy' - y = 0$

2) $x^3y''' + xy' - y = 0$

3) $x^2y'' + \alpha xy' + \beta y = 0,\quad \alpha, \beta \in \mathbf{Z}$

4) $x^2y''' + 5xy'' + 4y' = \ln x$

5) $x^2y'' - 6y = 5x^3 + 8x^2$.

Soluție. Ecuațiile Euler se reduc la ecuații liniare cu coeficienți constanți prin substituția $x = e^t$. Deci $y' = \frac{dy}{dt}\Big/\frac{dx}{dt} = \frac{1}{e^t}\frac{dy}{dt}$, $y'' = \frac{1}{e^t}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{e^t}\frac{dy}{dt}\right) = \frac{1}{e^{2t}}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)$. Analog $y''' = \frac{1}{e^{3t}}\left(\frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt}\right)$.

1) Înlocuim aceste derivate în ecuația dată și obținem $\frac{d^3y}{dt^3} - 1 = 0$ a cărei ecuație caracteristică este $r^3 - 1 = 0$, avînd rădăcinile $r_1 = 1$; $r_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $r_3 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Soluția generală este definită prin

$$y(t) = c_1e^t + e^{-\frac{t}{2}}\left(c_2 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + c_3 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right).$$

Înlocuim pe $t = \ln x$ și obținem soluția generală a ecuației inițiale

$$y(x) = c_1x + \frac{1}{\sqrt{x}}\left[c_2\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\ln|x|\right) + c_3\left(\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\ln|x|\right)\right],\quad x \neq 0.$$

13. Fie ecuația diferențială $f(x)y'' + g(x)y' + h(x)y = 0$, cu $f(x) > 0$, $f, g, h \in C^0(I)$. Un punct $x = b$ se numește *conjugatul* lui $x = a$ dacă există o soluție nenulă a ecuației diferențiale care se anulează în ambele puncte.

1) Fie u și v două soluții liniar independente. Să se arate că $x = b$ este conjugat lui $x = a$ dacă și numai dacă

$$\begin{vmatrix} u(a) & v(a) \\ u(b) & v(b) \end{vmatrix} = 0.$$

2) Zerourile soluției $x \to v(a)u(x) - u(a)v(x)$ sînt puncte conjugate lui a.

3) Să se demonstreze că dacă $x = b$ nu este conjugat lui $x = a$, atunci există o curbă integrală unică care unește punctele (a, c) și (b, d).

Soluție. 1) Fie

$$\begin{vmatrix} u(a) & v(a) \\ u(b) & v(b) \end{vmatrix} = 0.$$

Există numerele c_1, c_2, cel puțin unul nenul, astfel încît $c_1u(a) + c_2v(a) = 0$ și $c_1u(b) + c_2v(b) = 0$. Soluția $x \to c_1 \cdot u(x) + c_2v(x)$ se anulează în $x = 0$ și în $x = b$ fără a fi identic nulă.

Presupunem că $x = b$ este conjugat cu $x = a$, adică există o soluție nenulă $x \to c_1u(x) + c_2v(x)$ cu proprietatea

$$c_1u(a) + c_2v(a) = 0, \quad c_1u(b) + c_2v(b) = 0.$$

Deoarece prin ipoteză $c_1^2 + c_2^2 \neq 0$, rezultă

$$\begin{vmatrix} u(a) & v(a) \\ u(b) & v(b) \end{vmatrix} = 0.$$

2) Consecință a lui 1)

3) Este suficient să arătăm că există o pereche unică (c_1, c_2) astfel încît $c_1^2 + c_2^2 \neq 0$ și

$$c_1u(a) + c_2v(a) = c, \quad c_1u(b) + c_2v(b) = d.$$

Evident, acest lucru este echivalent cu ipoteza

$$\begin{vmatrix} u(a) & v(a) \\ u(b) & v(b) \end{vmatrix} \neq 0.$$

14. Peretele plan al unui cuptor de grosime δ (fig. 4.4) are pe fața interioară temperatura t_1, iar pe fața exterioară temperatura t_2 $(t_1 > t_2)$. Să se determine variația temperaturii pe grosimea peretelui, cunoscînd conductivitatea termică a materialului din care este construit peretele $\lambda = \lambda_0 (1 + bt)$, unde λ_0 și b sînt constante reale pozitive.

Soluție. Variația temperaturii pe grosimea peretelui este dată de ecuația

$$\lambda \frac{d^2t}{dx^2} + \frac{d\lambda}{dt}\left(\frac{dt}{dx}\right)^2 = 0.$$

Înlocuim pe λ, respectiv $\frac{d\lambda}{dt}$, obținem

$$(1 + bt)\frac{d^2t}{dx^2} + b\left(\frac{dt}{dx}\right)^2 = 0.$$

Notăm $\frac{dt}{dx} = p$ pentru a reduce ordinul ecuației; $\frac{d^2t}{dx^2} = \frac{dp}{dt}\,\frac{dt}{dx} = p\frac{dp}{dt}$.

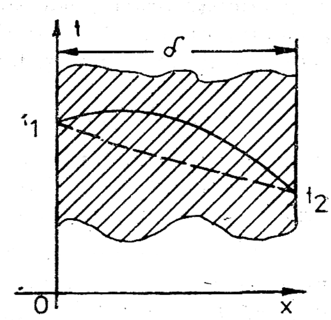


Fig. 4.4.

Rezultă

$$(1 + bt)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}p + bp^2 = 0$$

din care $p = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = 0$ nu prezintă interes tehnic și $(1 + bt)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} + bp = 0$.

Deci $p(1 + bt) = c$ sau $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}(1 + bt) = c$; printr-o nouă integrare obținem soluția generală

$$b\frac{t^2}{2} + t = cx + k.$$

Constantele se pot determina din condițiile la limită $t(0) = t_1$ și $t(\delta) = t_2$. Obținem $k = b\frac{t_1^2}{2} + t_1$ și $c = \frac{t_2 - t_1}{2\delta}(t_1 + t_2 + 2)$.

Variația temperaturii pe grosimea peretelui este

$$x \to t(x) = -\frac{1}{b} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{b} + t_1\right)^2 - \left[\left(\frac{1}{b} + t_1\right)^2 - \left(\frac{1}{b} + t_2\right)^2\right]\frac{x}{\delta}}.$$

§ 3. SISTEME DIFERENȚIALE LINIARE DE ORDINUL ÎNTÎI

3.1. Un sistem diferențial de forma

$$(1) \quad \frac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}t} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)\, y_j, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

unde $a_{ij} \in C^0(I)$ se numește *sistem liniar omogen*.

3.2. Notînd $Y = {}^t[y_1, \ldots, y_n]$, $\mathbf{A} = [a_{ij}]$, sistemul omogen este echivalent cu ecuația matriceală

$$(1') \quad \frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t} = \mathbf{A}Y.$$

3.3. Spațiul vectorial $\mathbf{V}$ al tuturor soluțiilor lui (1′) are dimensiunea n. Într-adevăr, oricărei soluții $Y \in \mathbf{V}$ îi putem atașa vectorul $\mathbf{Y}(0) \in \boldsymbol{R}^n$. Obținem aplicația liniară $\mathcal{T} : \mathbf{V} \to \boldsymbol{R}^n$, care se dovedește a fi un izomorfism (în baza teoremei de existență și unicitate a soluției).

Dacă $t \to Y_j(t), j = 1, \ldots, n$, este o bază a lui $\mathbf{V}$, atunci $t \to Y(t) = \sum_{j=1}^{n} c_j Y_j(t)$, unde c_j sînt constante arbitrare, se numește *soluția generală* a ecuației (1′) sau a sistemului (1). Notînd $C = {}^t[c_1, \ldots, c_n]$, $W = [Y_1, \ldots, Y_n]$, soluția generală se scrie $Y(t) = W(t)\, C$.

3.4. Fie funcțiile (vectori coloană) $Y_1, \ldots, Y_n$ pe care le presupunem cel puțin continui. Determinantul $\mathrm{w}(t) = \det [Y_1(t), \ldots, Y_n(t)]$ se numește *determinant fundamental*. Funcțiile $Y_1, \ldots, Y_n$ sînt liniar independente dacă și numai dacă $w \neq 0$.

Dacă $Y_1, ..., Y_n$ sînt soluții ale ecuației (1'), atunci

$$\mathrm{w}(t) = \mathrm{w}(t_0)\, e^{\int_{t_0}^{t} (\mathrm{tr}\, \mathbf{A})\, dt}$$

De aceea dacă w se anulează într-un punct t_0, atunci el se anulează peste tot.

3.5. Un sistem diferențial de tipul

$$(2) \quad \frac{dy_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t) y_j + f_i(t), \quad i = 1, ..., n,$$

unde $a_{ij}, f_i \in C^0(I)$, se numește *sistem liniar neomogen*.

Punînd $F = {}^t[f_1, ..., f_n]$ și utilizînd notațiile matriceale de mai înainte sistemul neomogen este echivalent cu ecuația matriceală

$$(2') \quad \frac{dY}{dt} = \mathbf{A}Y + F.$$

Soluția generală a ecuației (2') este suma dintre o soluție particulară a ecuației neomogene și soluția generală a ecuației omogene.

3.6. *(Metoda variației constantelor.)* Dacă $Y(t) = W(t)C$ este soluția generală a ecuației omogene (1'), atunci soluția generală a ecuației neomogene (2') poate fi găsită sub forma $Y(t) = W(t)\, C(t)$, unde $\dfrac{dC}{dt} = W^{-1}F$.

3.7. Fie $y_j' = a_{j1}y_1 + ... + a_{jn}y_n$, $j = 1, 2, ..., n$, un sistem diferențial de ordinul întîi omogen cu coeficienți constanți. Notînd $Y = {}^t[y_1, ..., y_n]$, $\mathbf{A} = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{n\times n}(\boldsymbol{R})$, avem transcrierea matriceală $Y' = \mathbf{AY}$. Soluția care satisface condiția inițială $Y(t_0) = Y_0$ este $Y(t) = e^{A(t-t_0)}Y_0$.

Echivalent,

(a) dacă $\mathbf{A}$ este diagonalizabilă, atunci

$$Y(t) = \mathbf{T}e^{\mathbf{D}(t-t_0)}\mathbf{T}^{-1}Y_0,$$

unde $\mathbf{T}$ este matricea vectorilor proprii, iar $\mathbf{D}$ este matricea diagonală atașată lui $\mathbf{A}$;

(b) dacă $\mathbf{A}$ are valori proprii multiple, și se reduce la forma canonică jordan $\mathbf{J}$, atunci

$$Y(t) = \mathbf{T}e^{\mathbf{J}(t-t_0 t)}\mathbf{T}^{-1}Y_0,$$

unde $\mathbf{T}$ este matricea vectorilor proprii și principali.

Exerciții și probleme

1. Se dă sistemul diferențial liniar omogen $Y' = \mathbf{A}Y$, unde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2\,\mathrm{ctg}\, t & -1 \\ -2 & \mathrm{tg}\, t \end{bmatrix}, \quad Y = {}^t[y_1, y_2].$$

Să se arate că vectorii $Y_1 = {}^t\left[\sin t,\ 2\sin t \ln\left\{\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{t}{2}\right)\right\} + \sin t\right]$, $Y_2 = {}^t\left[\cos t,\ 2\cos t \ln\left\{\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{t}{2}\right)\right\} + \cos t + 2\,\mathrm{tg}\, t\right]$, $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) - \{0\}$, constituie o bază în spațiul soluțiilor sistemului. Să se scrie soluția generală a sistemului.

Soluție. Se verifică imediat că funcțiile $y_{11} = \sin t$, $y_{21} = 2 \sin t \ln\left[\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{t}{2}\right)\right] + \sin t$, componentele lui Y_1, și $y_{12} = \cos t$, $y_{22} = 2 \cos t \ln\left[\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{t}{2}\right)\right] + \cos t + 2 \operatorname{tg} t$, componentele lui Y_2, verifică ecuațiile sistemului. Rămîne de arătat că vectorii Y_1, Y_2 formează o bază în spațiul vectorial al soluțiilor sistemului. Pentru aceasta este necesar și suficient a dovedi că determinantul

$$W(t) = \det[Y_1, Y_2](t) = \det\begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix}(t) =$$

$$= \begin{vmatrix} \sin t & \cos t \\ 2 \sin t \ln\left[\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{t}{2}\right)\right] + \sin t & 2 \cos t \ln\left[\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{t}{2}\right)\right] + \cos t + 2 \operatorname{tg} t \end{vmatrix}$$

este nenul. În adevăr obținem

$$W(t) = 2\frac{\sin^2 t}{\cos t} \neq 0 \quad \text{pentru} \quad t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) - \{0\}.$$

Soluția generală este

$$Y(t) = W(t)C =$$

$$= \begin{bmatrix} \sin t & \cos t \\ 2 \sin t \ln\left[\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{t}{2}\right)\right] + \sin t & 2 \cos t \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{t}{2}\right) + \cos t + 2 \operatorname{tg} t \end{bmatrix} \cdot$$

$$\cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} c_1 \sin t + c_2 \cos t \\ c_1\left\{2 \sin t \ln\left[\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{t}{2}\right)\right] + \sin t\right\} + c_2\left\{2 \cos t \ln\left[\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{t}{2}\right)\right] + \cos t + 2 \operatorname{tg} t\right\} \end{bmatrix}.$$

2. Să se rezolve sistemele

1) $Y' = \mathbf{A}Y, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ -3 & -6 & -6 \end{bmatrix}, \quad Y(0) = Y_0$ și $Y_0 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$

2) $Y' = \mathbf{A}Y, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 7 & 4 & -1 \\ 4 & 7 & -1 \\ -4 & -4 & 4 \end{bmatrix}, \quad Y(0) = Y_0$ și $Y_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

3) $Y' = \mathbf{A}Y, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{bmatrix}, \quad Y(0) = Y_0$ și $Y_0 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

4) $Y' = \mathbf{A}Y$, $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 & 4 \\ -4 & 5 & -2 & 7 \\ -3 & 3 & -2 & 5 \\ -2 & 2 & -2 & 3 \end{bmatrix}$, $Y(0) = Y_0$ și $Y_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

5) $Y' = \mathbf{A}Y$, $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix}$, $Y(0) = Y_0$ și $Y_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Soluție. 1) det $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$ are soluțiile $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = 0$ care sînt valorile proprii ale matricei **A**. Vectorii proprii corespunzători sînt

$$e_1 = {}^t[1, 0, -1], \quad e_2 = {}^t[2, -1, 0], \quad e_3 = {}^t[0, 1, -1].$$

Matricea vectorilor proprii

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

este matricea diagonalizatoare pentru **A**, adică

$$\mathbf{D} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{și} \quad \mathrm{e}^{\mathbf{D}t} = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{-3t} & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Obținem

$$Y(t) = \mathbf{T}\mathrm{e}^{\mathbf{D}t}\mathbf{T}^{-1}Y(0) = \begin{bmatrix} -\mathrm{e}^{-3t} + 2\mathrm{e}^{-2t} & -2\mathrm{e}^{-3t} + 2\mathrm{e}^{-2t} & -2\mathrm{e}^{-3t} + 2\mathrm{e}^{-2t} \\ -\mathrm{e}^{-2t} + 1 & -\mathrm{e}^{-2t} + 2 & -\mathrm{e}^{-2t} + 1 \\ \mathrm{e}^{-3t} - 1 & 2\mathrm{e}^{-3t} - 2 & 2\mathrm{e}^{-3t} - 1 \end{bmatrix} \cdot$$

$$\cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3\mathrm{e}^{-3t} + 2\mathrm{e}^{-2t} \\ -\mathrm{e}^{-2t} + 3 \\ 3\mathrm{e}^{-3t} - 3 \end{bmatrix},$$

adică $y_1(t) = -3\mathrm{e}^{-3t} + 2\mathrm{e}^{-2t}$, $y_2(t) = 3 - \mathrm{e}^{-2t}$, $y_3(t) = 3\mathrm{e}^{-3t} - 3$.

2) det$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$ are soluțiile $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 12$. Deoarece rang $(\mathbf{A} - 3\mathbf{I}) = 1$, rezultă că lui $\lambda = 3$ îi corespund doi vectori proprii liniar independenți. Fie $V = {}^t[x_1, x_2, x_3]$ un vector propriu. Din condiția $(3\mathbf{I} - \mathbf{A})\,\mathbf{V} = 0$ obținem sistemul

$$-4x_1 - 4x_2 + x_3 = 0$$

$$-4x_1 - 4x_2 + x_3 = 0$$

$$4x_1 + 4x_2 - x_3 = 0$$

care se reduce la ecuația $4x_1 + 4x_2 - x_3 = 0$ cu soluția $x_3 = 4x_1 + 4x_2$ sau $x_1 = a$, $x_2 = b$, $x_3 = 4(a + b)$, așa încît $V = {}^t[a, b, 4(a + b)]$ din care, considerînd $a = 1$, $b = -1$ și respectiv $a = 0$, $b = 1$, obținem doi vectori proprii liniar independenți corespunzători lui $\lambda = 3$: $e_1 = {}^t[1, -1, 0]$, $e_2 = {}^t[0, 1, 4]$. Pentru $\lambda = 12$ alegem $e_3 = {}^t[1, 1, 1]$.

Deci

$$\mathbf{T}=\begin{bmatrix}1&0&1\\-1&1&1\\0&4&1\end{bmatrix},\quad \mathbf{D}=\mathbf{T}^{-1}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{T}=\begin{bmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&12\end{bmatrix}$$

și

$$e^{\mathbf{D}t}=\begin{bmatrix}e^{3t}&0&0\\0&e^{3t}&0\\0&0&e^{12t}\end{bmatrix}.$$

Atunci aplicăm tot relația $(3.7)_a$ și obținem soluția

$$Y(t)=\mathbf{T}\cdot e^{\mathbf{D}t}\mathbf{T}^{-1}\cdot Y(0)=\begin{bmatrix}-\frac{1}{9}e^{3t}+\frac{1}{3}e^{12t}\\ \frac{2}{3}e^{3t}+\frac{1}{3}e^{12t}\\ \frac{4}{3}e^{3t}-\frac{1}{3}e^{12t}\end{bmatrix}.$$

3) $P(\lambda)=\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})=0$ are soluțiile $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1$ și deoarece rang $(\mathbf{A}-1\cdot\mathbf{I})=2\neq n-r$ rezultă un vector propriu corespunzător la valoarea proprie triplă $\lambda=1$. Se găsește $e_1={}^t[1, 1, 1]$ vectorul propriu. Trebuie să completăm baza cu așa-numiții vectori principali e_2, e_3 care satisfac egalitățile $\mathbf{A}e_2=1\cdot e_2+e_1$, $\mathbf{A}e_3=1\cdot e_3+e_2$. Dacă punem $e_2={}^t[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$ și $e_3={}^t[\beta_1, \beta_2, \beta_3]$ obținem sistemele:

$$\begin{cases}-\alpha_1+\alpha_2=a\\-\alpha_2+\alpha_3=a\\\alpha_1-3\alpha_2+2\alpha_3=a\end{cases}\quad\text{cu soluția}\quad\begin{cases}\alpha_1=b\\\alpha_2=a+b\\\alpha_3=2a+b\end{cases}$$

și

$$\begin{cases}-\beta_1+\beta_2=b\\-\beta_2+\beta_3=a+b\\\beta_1-3\beta_2+2\beta_3=2a+b\end{cases}\quad\text{cu soluția}\quad\begin{cases}\beta_1=c\\\beta_2=b+c\\\beta_3=a+b+c,\end{cases}$$

unde $a, b, c\in\mathbf{R}$ sînt parametri reali arbitrari. Putem lua $a=1$, $b=0$, $c=0$ astfel încît rezultă

$$e_2={}^t[0, 1, 2],\ e_3={}^t[0, 0, 1].$$

În concluzie

$$\mathbf{T}=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&2&1\end{bmatrix},$$

are forma Jordan corespunzătoare,

$$\mathbf{J}=\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}.$$

Avem

$$Y(t) = \mathbf{T}e^{\mathbf{J}t}\mathbf{T}^{-1}Y(0) = \mathbf{T}\cdot\begin{bmatrix} e^t & te^t & \frac{t^2}{2}e^t \\ 0 & e^t & te^t \\ 0 & 0 & e^t \end{bmatrix} \mathbf{T}^{-1}\cdot Y(0) = 1/2\, e^t\begin{bmatrix} -4+4t-t^2 \\ 2t-t^2 \\ 2-t^2 \end{bmatrix}.$$

4) $P(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = (1-\lambda)^4$ și deci $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_3 = 1$ este valoarea proprie multiplă de ordinul patru. Deoarece rang $(1.\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 3 \neq n - k$ rezultă un singur vector propriu corespunzător $e_1 = {}^t[16, 16, 0, 0]$. Completăm baza în $\mathbf{R}^4$, cu vectorii principali e_2, e_3, e_4 așa încît

$$\mathbf{A}e_2 = 1\cdot e_2 + e_1,\quad \mathbf{A}e_3 = 1\cdot e_3 + e_2,\quad \mathbf{A}e_4 = 1\cdot e_4 + e_3.$$

Obținem

$$e_2 = {}^t[-8, 0, 8, 0],\quad e_3 = {}^t[10, 0, -6, 4],\quad e_4 = {}^t[-13, 0, 5, -6]$$

și deci

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 16 & -8 & 10 & -13 \\ 16 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & -6 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & -6 \end{bmatrix},\quad \mathbf{J} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Y(t) = \mathbf{T}e^{\mathbf{J}t}\cdot\mathbf{T}^{-1}Y(0) = \mathbf{T}\begin{bmatrix} e^t & te^t & \frac{t^2}{2}e^t & \frac{t^3}{6}e^t \\ 0 & e^t & te^t & \frac{t^2}{2}e^t \\ 0 & 0 & e^t & te^t \\ 0 & 0 & 0 & e^t \end{bmatrix}\mathbf{T}^{-1}\cdot Y(0),$$

$$Y(t) = e^t\begin{bmatrix} \frac{-4}{3}t^3-4t^2-3t+1 & \frac{4}{3}t^3+4t^2+3t & \frac{-4}{3}t^3-4t^2-t & \frac{4}{3}t^3+6t^2+4t \\ \frac{-4}{3}t^3-6t^2-4t & \frac{4}{3}t^3+6t^2+4t+1 & \frac{-4}{3}t^3-6t^2-2t & \frac{4}{3}t^3+8t^2+7t \\ -2t^2-3t & 2t^2+3t & -2t^2-3t-3 & 2t^2+5t \\ -2t & 2t & -2t & 2t+1 \end{bmatrix}\cdot$$

$$\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = e^t\begin{bmatrix} 4t^3+18t^2+14t \\ 4t^3+24t^2+23t \\ 6t^2+15t-3 \\ 6t+3 \end{bmatrix}.$$

5) $P(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \lambda^2 - 3\lambda + 5/2 = 0$ are soluțiile

$\lambda_1 = 3/2 + 1/2i$, $\lambda_2 = 3/2 - 1/2$ i ce reprezintă valorile proprii ale matricei $\mathbf{A}$ în $\boldsymbol{C}$.

Fie $x = u - iv$, $\bar{x} = u + iv$ vectorii proprii corespunzători. Obținem

$$x = {}^t[1,\ 1/2 - 1/2i], \quad y = {}^t[1,\ 1/2 + 1/2\,i]$$

și

$$u = {}^t[1,\ 1/2], \ v = {}^t[0,\ 1/2].$$

Rezultă matricea reală

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \text{ și } \mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Apoi, $\mathbf{D} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 3/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$

și $Y(t) = \mathbf{T}e^{\mathbf{D}t}\mathbf{T}^{-1}Y_0$.

Calea urmată în această problemă este mai complicată decît calculul direct al lui $e^{\mathbf{A}t}$.

3. Să se rezolve sistemele diferențiale liniare $Y' = \mathbf{A}Y$ în fiecare din cazurile de mai jos

1) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, $\quad Y(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

2) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}$, $\quad Y(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

3) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$, $\quad Y(0) = \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

4) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$, $\quad Y(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

5) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\quad Y(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

R:

1) $Y(t) = \begin{bmatrix} e^{2t} + 4te^{2t} \\ -2e^{t} + 2e^{2t} + 4te^{2t} \\ -2e^{t} + 4e^{2t} \end{bmatrix}$ $\quad$ 2) $Y(t) = \begin{bmatrix} 3e^{-t} - 3e^{-2t} + e^{-3t} \\ -3e^{-t} + 6e^{-2t} - 3e^{-3t} \\ 3e^{-t} - 12e^{-2t} + 9e^{-3t} \end{bmatrix}$

3) $Y(t) = \begin{bmatrix} e^{5t} + 7e^{-3t} \\ 2e^{5t} - 2e^{-3t} \\ -e^{5t} + e^{-3t} \end{bmatrix}$ 4) $Y(t) = \begin{bmatrix} -1/2e^{t} + e^{2t} + 1/2e^{3t} \\ e^{2t} + e^{3t} \\ e^{3t} \\ e^{4t} \end{bmatrix}$

5) $Y(t) = \begin{bmatrix} 2e^{2t} - 1 \\ 2e^{2t} - t - 2 \\ 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{bmatrix}$.

4. Să se găsească soluțiile generale ale următoarelor sisteme

1) $\begin{cases} x' = 2x + y - z \\ y' = x + 2y - z, \\ z' = 3x - 3y - z \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x' = -7x + y \\ y' = -2x - 5y \end{cases}$, 3) $\begin{cases} x' = 5x - y \\ y' = x + 3y \end{cases}$.

Soluție. Folosim polinoamele de interpolare pentru calculul exponențialei de matrice.

1) Scrisă matriceal soluția sistemului este

$$Y(t) = e^{\mathbf{A}\cdot t}C, \text{ unde } Y(t) = {}^t[x(t), y(t), z(t)], \; C = {}^t[c_1, c_2, c_2].$$

Pentru sistemul (1) găsim

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & -3 & -1 \end{bmatrix}, \quad P(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = (\lambda + 1)(\lambda - 1)(\lambda - 3); \quad \lambda_1 = -1; \; \lambda_2 = 1, \; \lambda_3 = 3.$$

Dacă $f(\lambda) = e^{\lambda t}$, atunci $f(-1) = e^{-t}$, $f(1) = e^{t}$, $f(3) = e^{3t}$.

Folosind polinomul Lagrange, deducem

$$f(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^2\left[\frac{f(-1)}{8} - \frac{f(1)}{4} + \frac{f(3)}{8}\right] + \mathbf{A}\left[\frac{-f(-1)}{2} + \frac{f(1)}{2}\right] +$$

$$+ \mathbf{I}\cdot\left[\frac{3}{8}f(-1) + \frac{3}{4}f(1) - \frac{1}{8}f(3)\right].$$ Înlocuind $f(\mathbf{A}) = e^{\mathbf{A}t}$ și $f(\lambda) = e^{\lambda t}$ obținem

$$e^{\mathbf{A}t} = \left(\frac{e^{-t}}{8} - \frac{e^{t}}{4} + \frac{e^{3t}}{8}\right)\begin{bmatrix} 2 & 7 & -2 \\ 1 & 8 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \left(\frac{e^{t}}{2} - \frac{e^{-t}}{2}\right)\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & -3 & -1 \end{bmatrix} +$$

$$+\left(\frac{3}{8}e^{-t} + \frac{3}{4}e^{t} - \frac{1}{8}e^{3t}\right)\cdot\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{3}{8}e^{-t} + \frac{5}{4}e^{t} + \frac{1}{8}e^{3t} & \frac{3}{8}e^{-t} - \frac{5}{4}e^{t} + \frac{7}{8}e^{3t} & \frac{e^{-t}}{4} - \frac{e^{3t}}{4} \\ -\frac{3}{8}e^{-t} + \frac{1}{4}e^{t} + \frac{e^{3t}}{8} & \frac{3}{8}e^{-t} - \frac{1}{4}e^{t} + \frac{7}{8}e^{3t} & \frac{e^{-t}}{4} - \frac{e^{3t}}{4} \\ \frac{3e^{t}}{2} - \frac{3}{2}e^{-t} & -\frac{3}{2}e^{t} + \frac{3}{2}e^{-t} & e^{-t} \end{bmatrix}.$$

Soluția sistemului este $Y(t) = e^{\mathbf{A}t}.\ C$ sau explicit,

$$\begin{cases} x(t) = e^{-t}\left(-\frac{3}{8}c_1 + \frac{3}{8}c_2 + \frac{c_3}{4}\right) + e^{t}\left(\frac{5}{4}c_1 - \frac{5}{4}c_2\right) + e^{3t}\left(\frac{c_1}{8} + \frac{7}{8}c_2 - \frac{c_3}{4}\right) \\ y(t) = e^{t}\left(\frac{1}{4}c_1 - \frac{c_2}{4}\right) + e^{3t}\left(\frac{c_1}{8} + \frac{7}{8}c_2 - \frac{c_3}{4}\right) + \left(-\frac{3}{8}c_1 + \frac{3}{8}c_2 + \frac{c_3}{4}\right)e^{-t} \\ z(t) = e^{-t}\left(-\frac{3}{2}c_1 + \frac{3}{2}c_2 + c_3\right) + e^{t}\left(\frac{3}{2}c_1 - \frac{3}{2}c_2\right), \end{cases}$$

adică

$$\begin{cases} x = k_1e^t + k_2e^{-t} + k_3e^{3t} \\ y = 1/5k_1e^t + k_2e^{-t} + k_3e^{3t} \\ z = 6/5k_1e^t + 4k_2e^{-t} \end{cases}$$

2) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -7 & 1 \\ -2 & -5 \end{bmatrix}$, $P(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = (\lambda + 6 + i)(\lambda + 6 - i)$;

$\lambda_1 = -6 + i$, $\lambda_2 = -6 - i$. Pentru $f(\mathbf{A})$ folosim

$$(*)\ f(\mathbf{A}) = Z_1f(\lambda_1) + Z_2f(\lambda_2). \quad Z_1, Z_2 \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\boldsymbol{R}),.$$

Particularizăm și fie $f(\lambda) = \lambda + 6 - i = \lambda - \lambda_1$; rezultă $f(\mathbf{A}) = \mathbf{A} + (6 - i)\mathbf{I}$ și $f(\mathbf{A}) = Z_1 \cdot 0 + Z_2(-2i)$, deoarece $f(\lambda_1) = 0$, $f(\lambda_2) = -2i$.

Deci, $\mathbf{A} + (6 - i)\,\mathbf{I} = Z_2(-2i)$ sau $Z_2 = -\frac{1}{2i}[\mathbf{A} + (6 - i)\,\mathbf{I}] = \begin{bmatrix} \frac{1-i}{2} & \frac{i}{2} \\ -i & \frac{1+i}{2} \end{bmatrix}$. Pentru a-l determina pe Z_1 particularizăm pe $f(\lambda)$; fie $f(\lambda) = \lambda - \lambda_2 = \lambda + 6 + i$ și deci $f(\lambda_1) = 2i$, $f(\lambda_2) = 0$.

Procedînd analog, $f(\mathbf{A}) = \mathbf{A} + (6 + i)\mathbf{I} = Z_1 \cdot 2i + Z_2 \cdot 0$, găsim

$$Z_1 = \frac{1}{2i}[\mathbf{A} + (6 + i)\,\mathbf{I}] = \begin{bmatrix} \frac{1+i}{2} & -\frac{i}{2} \\ i & \frac{1-i}{2} \end{bmatrix}.$$

În concluzie

$$f(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} \frac{1+i}{2} & -\frac{i}{2} \\ i & \frac{1-i}{2} \end{bmatrix} f(-6 + i) + \begin{bmatrix} \frac{1+i}{2} & -\frac{i}{2} \\ i & \frac{1-i}{2} \end{bmatrix} f(-6 - i)$$

oricare ar fi funcția f. În particular, luînd $f(\lambda) = e^{\lambda t}$, deducem

$$e^{At} = \begin{bmatrix} \frac{1+i}{2} & -\frac{i}{2} \\ i & \frac{1-i}{2} \end{bmatrix} e^{(-6+i)t} + \begin{bmatrix} \frac{1-i}{2} & \frac{i}{2} \\ -i & \frac{1+i}{2} \end{bmatrix} e^{(-6-i)t} =$$

$$= e^{-6t}\begin{bmatrix} \cos t - \sin t & \sin t \\ -2\sin t & \sin t + \cos t \end{bmatrix}.$$

Din $Y(t) = e^{At} \cdot C$, obținem

$$\begin{cases} x(t) = e^{-6t}[c_1(\cos t - \sin t) + c_2 \sin t] \\ y(t) = e^{-6t}[-2c_1 \sin t + c_2(\sin t + \cos t)] \end{cases}$$

sau

$$x(t) = e^{-6t}(k_1 \cos t + k_2 \sin t),$$

$$y(t) = e^{-6t}[(k_1 + k_2)\cos t + (k_2 - k_1)\sin t]$$

3) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, $P(\lambda) = (\lambda - 4)^2$, $\lambda = 4$ rădăcină dublă. Așadar $f(\mathbf{A}) = Z_1 f(4) + Z_2 f'(4)$. Particularizînd, alegem $f(\lambda) = \lambda - 4$; atunci $f(\mathbf{A}) = \mathbf{A} - 4\mathbf{I}$ și deci $f(\mathbf{A}) = \mathbf{A} - 4\mathbf{I} = Z_1 \cdot 0 + Z_2 \cdot 1$, deoarece $f(4) = 0$, $f'(4) = 1$. Rezultă $Z_2 = \mathbf{A} - 4\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$. Pentru a-l determina pe $\mathbf{Z}_1$ alegem $f(\lambda) = \lambda$ și deci $f(\mathbf{A}) = \mathbf{A} = 4Z_1 + Z_2$, deoarece $f(4) = 4$, $f'(4) = 1$. Rezultă $Z_1 = (1/4)(\mathbf{A} - Z_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. În concluzie

$$f(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot f(4) + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot f'(4).$$

Pentru $f(\lambda) = e^{\lambda t}$, găsim

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} e^{4t} + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} te^{4t} = \begin{bmatrix} 1+t & -t \\ t & 1-t \end{bmatrix} e^{4t}.$$

Soluția generală a sistemului este definită prin

$$Y(t) = e^{4t}\begin{bmatrix} 1+t & -t \\ t & 1-t \end{bmatrix} \cdot C$$

sau

$$x = k_1 e^{4t} + k_2 t e^{4t}$$

$$y = (k_1 - k_2)^{4t} + k_2 t e^{4t}$$

5. Să se rezolve sistemele

1) $\begin{cases} x' = y \\ y' = z, \\ z' = x \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x' + y - z = 0 \\ y' - z = 0 \\ z' + x - z = 0 \end{cases}$, 3) $\begin{cases} x' = y + z \\ y' = z + x \\ z' = x + y \end{cases}$

4) $\begin{cases} x' = 2x + y - z \\ y' = x + 2y - z \\ z' = 3x - 3y - z \end{cases}$, 5) $\begin{cases} x' = 4x \\ y' = x - 2y \\ z' = x - 4y + z \end{cases}$,

6) $\begin{cases} x' = 3x - y + \sin t \\ y' = 3y - 4x + \cos t; \end{cases}$ $x(0) = 1$; $y(0) = -1$;

7) $\begin{cases} x' = 3x + y \\ y' = -4x - y \\ z' = 4x - 8y - 2z \end{cases}$, 8) $\begin{cases} x' = -2x + y - 3z \\ y' = -3x - 2y + z, \\ z' = x - 3y - 2z \end{cases}$

9) $\begin{cases} y' - z' + x = 0 \\ z' - x' + y = 0, \\ x' - y' + z = 0 \end{cases}$ 10) $\begin{cases} x' = -y + t^2 + 6t + 1 \\ y' = x - 3t^2 + 3t + 1 \end{cases}$,

11) $\begin{cases} x' + y' = y + e^t \\ 2x' + y' = -2y + \cos t \end{cases}$, 12) $\begin{cases} x' = x \cos t \\ y' = x\, e^{-\sin t} \end{cases}$,

13) $\begin{cases} x' + 4x + 3y = t \\ y' + 2x + 5y = e^t \end{cases}$, 14) $\begin{cases} y' - z' + x\sqrt{3} = \sin t \\ z' - x' + y\sqrt{3} = \sin t, \\ z' - y' + z\sqrt{3} = \sin t \end{cases}$

15) $\begin{cases} x' = -x - y - 2z \\ y' = z - x - y \\ z' = -2x - y - z \end{cases}$, 16) $\begin{cases} x' = y - x + e^t \\ y' = z - x + \cos t, \\ z' = -x \end{cases}$

17) $\begin{cases} x' = 5x - 2y + 4z \\ y' = 4x - y + 4z, \\ z' = 2x - 3y - z \end{cases}$ 18) $\begin{cases} x' = 7x + 3y + 4z - 8u \\ y' = 6x + 4y + 4z - 8u \\ z' = 6x + 3y + 5z - 8u \\ u' = 7x - 11y + 22z - 10u \end{cases}$,

19) $\begin{cases} 4x' + 9y' + 44x + 49y = t \\ 3x' + 7y' + 34x + 38y = e^t \end{cases}$, 20) $\begin{cases} 2x' + y' = 3t \\ x'' + y' - 2y = e^{2t} \end{cases}$,

21) $\begin{cases} x' + y' + 2x + y = e^{2t} + t \\ x' + y' - x + 3y = e^{-t} - 1. \end{cases}$

R: Sistemul este echivalent cu ecuația $x''' = x$.

Aceasta are soluția $x(t) = c_1 e^t + e^{-\frac{1}{2}t}\left[c_2 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} t + c_3 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t\right]$. Din $y = x'$ deducem $y(t) = c_1 e^t - {}^1/_2 e^{-\frac{1}{2}t}\left[(c_3 + \sqrt{3}\, c_2) . \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t - (\sqrt{3}\ c_3 - c_2) \cos \frac{\sqrt{3}}{2} t\right]$ și din $z = y'$, rezultă $z(t) = c_1 e^t - {}^1/_2 e^{-\frac{1}{2}t}\left[(c_2 + \sqrt{3}\, c_3) \cos \frac{\sqrt{3}}{2} t + + (c_3 - \sqrt{3}\, c_2) \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t\right]$.

2) (I) Prin eliminare obținem ecuația $y''' - y'' + y' - y = 0$ cu soluția $y(t) = c_1 e^t + c_2 \cos t + c_3 \sin t$. Apoi $x(t) = (c_2 + c_3) \cos t + (c_3 - c_2) \cdot \sin t$, $z(t) = c_1 e^t - c_2 \sin t + c_3 \cos t$.

(II) Căutăm soluții de forma $x = a e^{rt}$, $y = b e^{rt}$, $z = c e^{rt}$. Ecuația caracteristică are rădăcinile $r_1 = 1$, $r_2 = i$, $r_3 = -i$.

(III) Forma matriceală a sistemului este $Y' = \mathbf{A}Y$ unde $Y = {}^t[x, y, z]$,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$ Se obține soluția $Y = e^{\mathbf{A}t}C$.

3) Prin adunare deducem

$\dfrac{d(x+y+z)}{dt} = 2(x+y+z)$, de unde $x + y + z = k_1 e^{2t}$. Apoi, $\dfrac{d(y-z)}{dt} = -(y-z)$. Deci $y - z = k_2 e^{-t}$. Analog, din $\dfrac{d(x-y)}{dt} = y - x$, obținem $y - x = k_3 e^t$. Rezultă $x = c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t}$, $y = c_3 e^{-t} + c_2 e^{2t}$, $z = (c_3 - c_1) e^{-t} + c_2 e^{2t}$.

4) Deoarece matricea sistemului are valorile proprii $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 3$ și vectorii proprii $e_1 = {}^t[1, 1, 4]$, $e_2 = {}^t[5, 1, 6]$, $e_3 = {}^t[1, 1, 0]$ soluția sistemului $Y' = \mathbf{A}Y$ este $Y(t) = e^{\mathbf{A}t} C = \mathbf{T} e^{\mathbf{D}t} \mathbf{T}^{-1} C$, unde

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix},$$

iar

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$ este matricea vectorilor proprii.

5) Integrînd prima ecuație, se obține $x = c_1 e^{4t}$. Din a doua ecuație $\dfrac{dy}{dt} + 2y = c_1 e^{4t}$ rezultă $y = \dfrac{c_1}{6} e^{4t} + c_2 e^{-2t}$ iar din a treia, $z = \dfrac{c_1}{9} e^{4t} + \dfrac{4}{3} c_2 e^{-2t} + c_3 e^t$.

6) Considerăm mai întîi sistemul omogen

$$\begin{cases} x' = 3x - y \\ y' = 3y - 4x \end{cases}$$

care are soluția $x = c_1 e^t + c_2 e^{5t}$, $y = 2c_1 e^t - 2c_2 e^{5t}$.
O soluție particulară a sistemului neomogen are forma

$$\begin{cases} x_p = a_1 \sin t + b_1 \cos t \\ y_p = a_2 \sin t + b_2 \cos t \end{cases}$$

Punînd condiția ca aceste funcții să verifice sistemul neomogen obținem $a_1 = 3b_1 - b_2$, $a_2 = 3b_1 - 4b_1 + 1$, $b_1 = -3a_1 + a_2 - 1$, $b_2 = -3a_2 + 4a_1$ cu soluția $a_1 = -\frac{21}{26}$, $b_1 = \frac{1}{26}$, $a_2 = -\frac{36}{26}$, $b_2 = \frac{24}{26}$.

Soluția generală a sistemului inițial este

$$\begin{cases} x = c_1 e^t + c_2 e^{5t} + \frac{1}{26}(-21 \sin t + \cos t) \\ y = 2c_1 e^t - 2c_2 e^{5t} + \frac{1}{13}(-18 \sin t + 12 \cos t) \end{cases}, \quad t \in \boldsymbol{R}.$$

Din condițiile inițiale rezultă $c_1 = 0$, $c_2 = -\frac{25}{26}$, așa încît soluția problemei este definită prin

$$\begin{cases} x = \frac{25}{26} e^{5t} + \frac{1}{26}(-21 \sin t + 12 \cos t) \\ y = -\frac{25}{13} e^{5t} + \frac{1}{13}(-13 \sin t + 12 \cos t) \end{cases}, \quad t \in \boldsymbol{R}.$$

7) $$\begin{cases} x(t) = 3c_2 e^t + 9c_3 t e^t \\ y(t) = 9c_3(1 - 2t) e^t - 6C_2 e^t \\ z(t) = c_1 e^{-2t} + 20c_2 e^t + c_3(60t - 16) e^t \end{cases}, \quad t \in \boldsymbol{R}.$$

8) $$\begin{cases} x(t) = c_1 e^{-4t} + e^{-t}\left[c_2 \sin 2\sqrt{3}\, t - \frac{c_2 + 2c_3}{\sqrt{3}} \cos 2\sqrt{3}\, t\right] \\ y(t) = c_1 e^{-4t} + e^{-t}\left[c_3 \sin 2\sqrt{3}\, t + \frac{2c_2 + 2c_2}{\sqrt{3}} \cos 2\sqrt{3}\, t\right] \\ z(t) = c_1 e^{-4t} + e^{-t}\left[-(c_2 + c_3) \sin 2\sqrt{3}\, t + \frac{c_3 - c_2}{\sqrt{3}} \cos 2\sqrt{3}\, t\right] \end{cases}, \quad t \in \boldsymbol{R}.$$

9) Implicit se presupune că x, y, z sînt funcții de clasă C^∞ pe un interval deschis din $\boldsymbol{R}$. Adunînd ecuațiile avem

(1) $x + y + z = 0$.

Înmulțind prima ecuație cu x', a doua cu y' și a treia cu z' și adunînd, găsim $xx' + yy' + zz' = 0$, adică (2) $x^2 + y^2 + z^2 = 2c_1^2$. Rezolvînd sistemul (1) și (2), rezultă funcțiile continui

$$y = \frac{-x + \sqrt{4c_1^2 - 3x^2}}{2}, \quad z = \frac{-x - \sqrt{4c_1^2 - 3x^2}}{2}, \quad x \leqslant \frac{2|c_1|}{\sqrt{3}}$$

A treia ecuație a sistemului dă $3x' = \sqrt{4c_1^2 - 3x^2}$. Făcînd calculele rezultă soluția generală

$$x = \frac{2c_1}{\sqrt{3}} \sin \frac{t - c_2}{\sqrt{3}}$$

$$y = -\frac{c_1}{\sqrt{3}} \sin \frac{t - c_2}{\sqrt{3}} + c_1 \cos \frac{t - c_2}{\sqrt{3}}, \quad t \in \boldsymbol{R}.$$

$$z = -\frac{c_1}{\sqrt{3}} \sin \frac{t - c_2}{\sqrt{3}} - c_1 \cos \frac{t - c_2}{\sqrt{3}}.$$

10) Sistemul se reduce la ecuația $x'' + x = 3t^2 - t + 5$, a cărei soluție generală este definită prin

$$x = c_1 \cos t = c_2 \sin t + 3t^2 - t - 1, \quad t \in \boldsymbol{R}.$$

Apoi

$$y = c_1 \sin t - c_2 \cos t + t^2 + 2, \quad t \in \boldsymbol{R}.$$

Pentru $t = 0$, deducem $c_1 = 2$, $c_2 = 3$.

11) $$\begin{cases} x(t) = e^t + \dfrac{5}{17} \sin t - \dfrac{3}{17} \cos t + c_2 + 3c_1 e^{4t} \\ y(t) = -\dfrac{2}{3} e^t - \dfrac{1}{17} \sin t + \dfrac{4}{17} \cos t - 4c_1 e^{4t}, \quad t \in \boldsymbol{R}. \end{cases}$$

12) Din a doua ecuație a sistemului, $x = y' e^{\sin t}$ deducem $x' = e^{\sin t} y'' + \cos t\, e^{\sin t} y' = e^{\sin t} y'' + x \cos t$. Deoarece $x' = x \cos t$ rezultă $e^{\sin t} y'' = 0$ sau $y'' = 0$ și deci $y = c_1 t + c_2$, $x = c_1 e^{\sin t}$.

13) $$\begin{cases} x(t) = c_1 e^{-7t} + c_2 e^{-2t} + \dfrac{5}{14} t - \dfrac{1}{8} e^t - \dfrac{31}{196} \\ y(t) = c_1 e^{-7t} - \dfrac{2}{3} c_2 e^{-2t} + \dfrac{9}{98} - \dfrac{1}{17} t + \dfrac{5}{24} e^t, \quad t \in \boldsymbol{R}. \end{cases}$$

14) Funcțiile x, y, z sînt de clasă C^∞. Prin adunarea ecuațiilor rezultă $x + y + z = \sqrt{3} \sin t$. Scăzînd ultimile două ecuații obținem

$$\sqrt{3} x' + z - y = \cos t \ (*)$$

Deci, $\sqrt{3} x'' = y' - z' - \sin t = -\sqrt{3} x$ sau $x'' + x = 0$ cu soluția generală $x = c_1 \cos t = c_2 \sin t$. Din $(*)$ rezultă $y - z = \sqrt{3} x' - \cos t$, iar din $x + y + z = \sqrt{3} \sin t$ obținem $y + z = \sqrt{3} \sin t - x'$.

Atunci,

$$\begin{cases} x = \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}} - \sqrt{3} c_1\right) \sin t + (c_2 - c_3) \cos t \\ y = \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}} - \sqrt{3} c_2\right) \sin t + (c_3 - c_1) \cos t \quad t \in \boldsymbol{R}. \\ z = \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}} - \sqrt{3} c_3\right) \sin t + (c_1 - c_2) \cos t, \ \text{unde } c_1 + c_2 + c_3 = 0. \end{cases}$$

15) Căutăm soluții de forma $x = a\,e^{rt}$, $y = b\,e^{rt}$, $z = c\,e^{rt}$. Din condiția ca aceste funcții să satisfacă ecuațiile sistemului obținem

$$\begin{cases} (r+1)\,a + b + 2c = 0 \\ a \quad + (r+1)\,b - c = 0 \\ 2a \quad + b + (r+1)\,c = 0. \end{cases}$$

Ecuația caracteristică $(r-1)(r+1)(r+3) = 0$ are soluțiile $r = 1$, $r = -1$, $r = -3$. Deoarece $a = -2r - 3$, $b = r + 3$, $c = r^2 + 2r$, rezultă

$$a_1 = -5,\ b_1 = 4,\ c_1 = 3 \quad \text{pentru } r = 1.$$

$$a_2 = -1,\ b_2 = 2,\ c_2 = -1 \quad \text{pentru } r = -1.$$

$$a_3 = 1\ ,\ b_3 = 0,\ c_3 = 1 \quad \text{pentru } r = -3.$$

Deci

$$\begin{cases} x = -5c_1\,e^t - c_2\,e^{-t} + c_3\,e^{-3t} \\ y = \quad 4c_1\,e^t + 2c_2\,e^{-t} \\ z = \quad 3c_1\,e^t - c_2\,e^{-t} + c_3\,e^{-3t}, \qquad t \in \boldsymbol{R}. \end{cases}$$

16) Putem folosi metoda eliminării și obținem ecuația

$$z''' + z'' + z' + z = -e^t - \cos t$$

cu soluția generală

$$z = c_1\,e^{-t} + c_2 \cos t + c_3 \sin t - \frac{1}{4}\,e^t + \frac{t}{4}\,(\cos t - \sin t).$$

Din $x = -z'$ și $y = x + x' - e^t$ se obțin x și y, $\quad t \in \boldsymbol{R}$.

17) $$\begin{cases} x(t) = (c_1 + 2c_2 t + c_3 t^2)\,e^t \\ y(t) = c_1 + 2c_2 t + c_3\left(t^2 - \dfrac{1}{16}\right) e^t, \qquad t \in \boldsymbol{R} \\ z(t) = \dfrac{1}{4}\left(c_2 - 2c_1 - \dfrac{1}{8}\,c_3\right) e^t - \left(c_2 - \dfrac{c_3}{4}\right) t\,e^t - \dfrac{1}{2}\,c_3 t^2\,e^t. \end{cases}$$

18) Matricea sistemului are valorile proprii $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ și $\lambda_3 = \lambda_4 = 2$. Soluția sistemului $Y' = \mathbf{A}Y$ este

$$Y = e^{\mathbf{A}t}C = \mathbf{T}\,e^{Jt}\mathbf{T}^{-1}C.$$

19) $$\begin{cases} x(t) = c_1\,e^{-6t} + c_2\,e^{-t} + \dfrac{19}{3}\,t - \dfrac{56}{9} - \dfrac{29}{7}\,e^t \\ y(t) = 4c_1\,e^{6t} - c_2\,e^{-t} - \dfrac{17}{3}t + \dfrac{55}{9} + \dfrac{24}{7}\,e^t, \qquad t \in \boldsymbol{R}. \end{cases}$$

20) Folosim metoda eliminării. Din prima ecuație rezultă $x'' = -1/2y'' - 3$. Din a doua găsim o ecuație de ordinul doi neomogenă

$$y'' - 2y' + 4y = -2\,e^{2t} - 6.$$

21) Scăzînd ecuațiile sistemului avem $3x - 2y = e^{2t} - e^{-t} + t + 1$ sau $y = \frac{3}{2}x - 1/2\, e^{2t} + 1/2\, e^{t} - 1/2t - 1/2$ și înlocuind în prima obținem o ecuație numai în x cu soluția generală $x(t) = c_1 e^{-7t} + \frac{5}{14} e^{2t} + \frac{3}{7} t - \frac{1}{49}\cdot$ Apoi se determină y.

6. Să se determine soluția generală a sistemelor liniare și neomogene

1) $Y' = \mathbf{A}Y + F$, $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\quad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$, $F = \begin{bmatrix} e^t \\ \cos t \\ 0 \end{bmatrix}$

2) $Y' = \mathbf{A}Y + F$, $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 1 & -6 \end{bmatrix}$, $\quad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$, $F = \begin{bmatrix} e^t \\ e^{-2t} \end{bmatrix}$

3) $Y' = \mathbf{A}Y + F$, $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -18 & 9 \\ -1 & 5 & -2 \\ -3 & 14 & -6 \end{bmatrix}$, $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$, $F = \begin{bmatrix} 4+18t-9t^2 \\ 2t^2-5t \\ 6t^2-12t-3 \end{bmatrix}$

folosind metoda variațiilor constantelor pentru determinarea soluției particulare a sistemelor neomogene.

Soluție. 1) Soluția generală a sistemului omogen $Y' = \mathbf{A}Y$ este

$$y_1^0 = c_1 e^{-t} + c_2 \sin t - c_3 \cos t,\ y_2^0 = c_2 (\sin t + \cos t) + \\ + c_3(\sin t - \cos t),\ y_3^0 = c_1 e^{-t} + c_2 \cos t + c_3 \sin t.$$

Pentru a determina soluția particulară a sistemului $Y' = \mathbf{A}Y + F$ folosim metoda variației constantelor. Anume, căutăm soluțiile

$$y_{1p} = c_1(t) e^{-t} + c_2(t) \sin t - c_3(t) \cos t$$

$$y_{2p} = c_2(t) (\sin t + \cos t) + c_3(t) (\sin t - \cos t)$$

$$y_{3p} = c_1(t) e^{-t} + c_2(t) \cos t + c_3(t) \sin t$$

și determinăm funcțiile c_i: $I \subset \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, $i = 1, 2, 3$ din sistemul

$$c_1'(t) e^{-t} + c_2'(t) \sin t - c_3'(t) \cos t = e^t$$

$$c_2'(t) (\sin t + \cos t) + c_3'(t) (\sin t - \cos t) = \cos t$$

$$c_1'(t) e^{-t} + c_2'(t) \cos t + c_3'(t) \sin t = 0.$$

Se obține

$$c_1'(t) = \frac{e^t}{2}[e^t - \cos t],\ c_2'(t) = \frac{e^t}{2} (\sin t - \cos t) + \frac{\cos t}{2} (\sin t + \cos t)$$

$$c_3'(t) = \frac{\cos t}{2} (\sin t - \cos t) - \frac{e^t}{2} (\sin t + \cos t)$$

și prin integrare avem

$$c_1(t) = \frac{1}{4} e^{2t} - \frac{e^t}{4}(\cos t + \sin t), \quad c_2(t) = -\frac{e^t}{2}\cos t + \frac{1}{4}\sin^2 t +$$
$$+ \frac{t}{4} + \frac{\sin 2t}{8},$$

$$c_3(t) = \frac{\sin^2 t}{4} - \frac{t}{4} - \frac{\sin 2t}{8} - \frac{e^t}{2}\sin t.$$

Așadar soluția particulară este

$$y_{1p} = \frac{e^t}{4} - \frac{\cos t}{4} + \frac{t}{4}(\sin t + \cos t)$$

$$y_{2p} = -\frac{e^t}{2} + \frac{t}{2}\cos t + 1/2 \sin t$$

$$y_{3p} = -\frac{e^t}{4} - \frac{\cos t}{4} + \frac{t}{4}(\cos t - \sin t)$$

așa încît soluția generală a sistemului va fi

$$\begin{cases} y_1 = y_1^0 + y_{1p} = c_1 e^{-t} + c_2 \sin t - c_3 \cos t + \dfrac{e^t}{4} - \dfrac{\cos t}{4} + \\ + \dfrac{t}{4}(\sin t + \cos t). \\ y_2 = y_2^0 + y_{2p} = c_2(\sin t + \cos t) + c_3(\sin t - \cos t) - \dfrac{e^t}{2} + \\ + \dfrac{t}{2}\cos t + 1/2 \sin t \\ y_3 = y_3^0 + y_{3p} = c_1 e^{-t} + c_2 \cos t + c_3 \sin t - \dfrac{e^t}{4} - \dfrac{\cos t}{4} + \\ + \dfrac{t}{4}(\cos t - \sin t), \quad t \in \boldsymbol{R}. \end{cases}$$

2) Procedînd analog avem

$$\begin{cases} y_1 = 2c_1 e^{-4t} + c_2 e^{-7t} + \dfrac{7}{40} e^t + \dfrac{1}{5} e^{-2t} \\ y_2 = c_1 e^{-4t} - c_2 e^{-7t} + (1/40) e^t + (3/10) e^{-2t}, \quad t \in \boldsymbol{R}. \end{cases}$$

3) $$\begin{cases} y_1 = 3c_2 e^t + c_3(2 + 6t) e^t - 1 \\ y_2 = -c_1 e^t - c_2(1 + t) e^t + c_3(2t + t^2) e^t + t \\ y_3 = -2c_1 e^t - c_2(3 + 2t) e^t - c_3(6t + 2t^2) e^t + t^2, \quad t \in \boldsymbol{R}. \end{cases}$$

7. Fie un sistem cu „*n*" grade de libertate care vibrează liber neamortizat. Să se determine ecuațiile de mișcare și modurile proprii de vibrație.

Aplicație: cazul a trei mase.

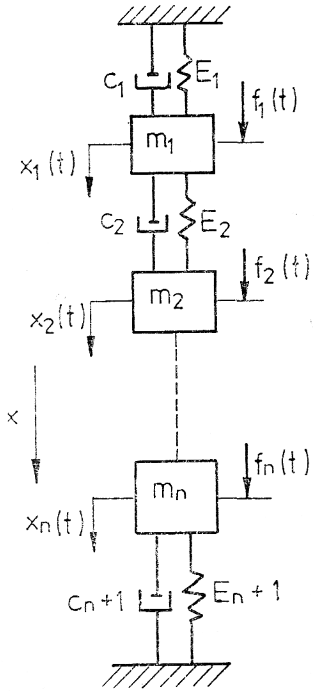
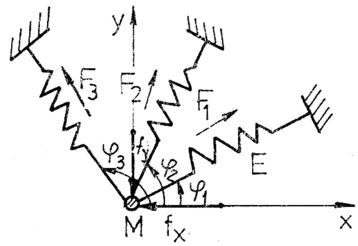


Fig. 4.5.



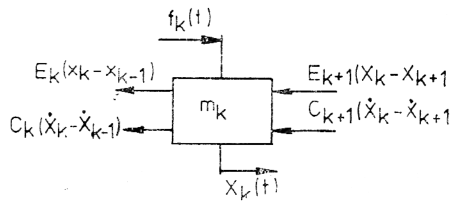


Fig. 4.6.

Soluție. Fie un sistem în care masele $m_1, m_2, \ldots, m_n$ se deplasează doar pe direcția Ox(fig. 4.5). Notăm prin $E_1, \ldots, E_n$ constantele de elasticitate ale arcurilor, iar prin $c_1, \ldots, c_n$ constantele de amortizare ale pistoanelor. Ecuația de echilibru dinamic a masei m_k este (fig. 4.6).

$m_k\ddot{x}_k + E_k(x_k - x_{k-1}) + E_{k+1}(x_k - x_{k+1}) + c_k(\dot{x}_k - \dot{x}_{k-1}) + c_{k+1}(\dot{x}_k - \dot{x}_{k+1}) =$ $= \mathrm{f}_k(t)$, în care variabila independentă este t (timpul). Aceasta se transcrie

$$m_k\ddot{x}_k - c_k x_{k-1} + (c_k + c_{k+1})\,\dot{x}_k - c_{k+1}\dot{x}_{k+1} - E_k x_{k-1} + (E_k + E_{k+1})\,x_k -$$
$$- E_{k+1}x_{k+1} = \mathrm{f}_k(t), \qquad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Introducînd matricele

$$\ddot{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \vdots \\ \ddot{x}_n \end{bmatrix},\ \dot{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix},\ \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},\ \mathrm{f} = \begin{bmatrix} \mathrm{f}_1 \\ \mathrm{f}_2 \\ \vdots \\ \mathrm{f}_n \end{bmatrix},\ \mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \ldots & 0 \\ 0 & m_2 \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & m_n \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_1+c_2 & -c_2 & 0 \ldots 0 & 0 & 0 \\ -c_2 & c_2+c_3 & -c_3 \ldots 0 & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 \ldots c_{n-1} & c_{n-1}+c_n & -c_n \\ 0 & 0 & 0 \ldots & -c_n & c_n+c_{n+1} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{E}=\begin{bmatrix} E_1+E_2 & -E_2 & 0 \dots & 0 & 0 \\ -E_2 & E_2+E_3 & -E_3 \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \dots & E_{n-1}+E_n & -E_n \\ 0 & 0 & 0 \dots & -E_n & E_n+E_{n+1} \end{bmatrix},$$

ecuația matriceală de echilibru dinamic pentru cele n mase este

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}}+\mathbf{C}\dot{\mathbf{X}}+\mathbf{E}\mathbf{X}=\mathbf{f}.$$

În cazul cînd vibrațiile sistemului sînt libere neamortizate, ecuația se reduce la

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}}+\mathbf{E}\dot{\mathbf{X}}=0,$$

deoarece în acest caz $C=0\in\mathcal{M}_{n\times n}(\boldsymbol{R})$, iar $\mathbf{f}=\mathbf{0}\in\mathcal{M}_{n\times 1}(\boldsymbol{R})$.

Pentru ultima ecuație se caută soluții de forma:

$$\mathbf{X}=\mathbf{A}\sin(pt+\theta)\quad \text{cu}\quad \mathbf{A}=\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix},$$

reprezentînd o mișcare armonică sincronă în toate coordonatele.

În acest tip de vibrație, configurația generală a mișcării nu se schimbă cu excepția alungirii care variază peste tot, armonic în timp, astfel încît raportul dintre oricare două alungiri $x_i(t)$ și $x_j(t)$, $i\neq j$, rămîne constant în timpul mișcării.

Prin înlocuire obținem sistemul

$$(\mathbf{E}-p^2\mathbf{M})\cdot\mathbf{A}=0,\quad \text{unde } p^2=\lambda.$$

Pulsațiile proprii sînt soluțiile ecuației algebrice

$$\det(\mathbf{E}-\lambda\mathbf{M})=0$$

care are n soluții (valori proprii, ale lui $\mathbf{E}$) pozitive (considerațiile fizice implică faptul că matricele $\mathbf{M}$ și $\mathbf{E}$ sînt pozitive definite). Fiecărei pulsații λ_k îi corespunde un vector $\mathbf{A}^{(k)}$ cu coordonate reale $\mathbf{A}_j^{(k)}$, care este soluția ecuației matriceale

$$(\mathbf{E}-\lambda_k\mathbf{M})\,\mathbf{A}^{(k)}=0.$$

Vectorii proprii $\mathbf{A}^{(k)}$, denumiți și vectori modali, formează o bază.

Aplicație. Fie un sistem compus din trei mase: $m_1=m$, $m_2=2m$, $m_3=3m$, $E_1=2a$, $E_2=4a$; deplasarea orizontală a maselor se face fără frecare. Ecuațiile de mișcare devin

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1+E_1x_1-E_1x_2=0 \\ m_2\ddot{x}_2-E_1x_1+(E_1+E_2)\,x_2-E_2x_3=0 \\ m_3\ddot{x}_3-E_2x_2+E_2x_3=0 \end{cases}$$

sau

$$(*)\quad\begin{cases} m\ddot{x}_1+2ax_1-2ax_2=0 \\ 2m\ddot{x}_2-2ax_1+6ax_2-4ax_3=0 \\ 3m\ddot{x}_3-4ax_2+4a_3x_3=0. \end{cases}$$

Notînd

$\lambda = \frac{mp^2}{a}$, ecuația pulsațiilor proprii

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 6-2\lambda & -4 \\ 0 & -4 & 4-3\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

sau

$$6\lambda^3 - 38\lambda^2 + 48\lambda = 0, \text{ are soluțiile } \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = \frac{19-\sqrt{73}}{6} \approx 1{,}74,$$

$$\lambda_3 = \frac{19+\sqrt{73}}{6} \approx 4{,}6.$$

Prima valoare $p_0 = 0$, corespunde mișcării de „corp rigid" a ansamblului celor trei mase, deoarece în acest caz, vectorul propriu corespunzător este $A^{(1)} = {}^t[\alpha, \alpha, \alpha]$, adică cele trei mase se deplasează identic, arcurile nu se deformează și pozițiile relative ale elementelor din sistem nu se modifică. Mișcarea corespunzătoare nu poate fi o oscilație, deoarece pentru $x_1 = x_2 = x_3$ rezultă $\ddot{x}_1 = \ddot{x}_2 = \ddot{x}_3 = 0$ care caracterizează mișcarea uniformă. Din acest motiv, din punctul de vedere al vibrațiilor, sistemul are efectiv două grade de libertate și anume cei doi vectori modali corespunzători la λ_2 și λ_3. Vectorii modali normalizați sînt

$$A^{(2)} = {}^t[1\ \ 0{,}13 - 0{,}427] \text{ și } A^{(3)} = {}^t[1\ \ -1{,}3\ \ 0{,}5307].$$

§ 4. LINII DE CÎMP ȘI SISTEME SIMETRICE

4.1. Fie $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ un cîmp vectorial de clasă C^1 pe o mulțime deschisă și conexă $\boldsymbol{D} \subset \boldsymbol{R}^n$. O curbă $\alpha: I \to \boldsymbol{D}$ de clasă C^1 cu proprietatea $\alpha'(t) = \mathbf{X}(\alpha(t))$, oricare ar fi $t \in \mathbf{I}$, se numește *linie de cîmp sau curbă integrală* a cîmpului vectorial $\mathbf{X}$ (fig. 4.7).

Explicit, $\alpha = (x_1, \ldots, x_n)$: $I \to \boldsymbol{D}$, $x_1 = x_1(t), \ldots, x_n = x_n(t)$ și deci

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt}(t) = X_1(x_1(t), \ldots, x_n(t)) \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ \frac{dx_n}{dt}(t) = X_n(x_1(t)), \ldots, x_n(t)). \end{cases}$$

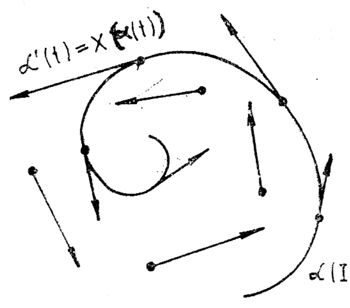


Fig. 4.7.

Fiind dat $\mathbf{X}$, teorema de existență și unicitate asigură existența locală a unei linii de cîmp, adică a unei soluții a sistemului precedent.

Uneori se folosește scrierea

$$\frac{dx_1}{X_1(x_1, \ldots, x_n)} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n(x_1, \ldots, x_n)} \ (= dt),$$

cu convenția că dacă un numitor este funcția zero, atunci numărătorul respectiv trebuie egalat cu zero.

4.2. Fie $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ un cîmp vectorial de clasă C^1 pe $\boldsymbol{D}$. Un sistem diferențial de tipul

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{X_1(x_1, \ldots, x_n)} = \ldots = \frac{\mathrm{d}x_n}{X_n(x_1, \ldots, x_n)}$$

se numește *sistem simetric.*

O funcție $\mathrm{f}\colon \boldsymbol{D} \to \boldsymbol{R}$ de clasă C^1 se numește *integrală primă* a sistemului simetric dacă $D_{\mathbf{X}}\mathrm{f} = 0$. Echivalent, f este constantă de-a lungul oricărei soluții $\alpha\colon I \to \boldsymbol{D}$ a sistemului, adică $\mathrm{f} \circ \alpha = \mathrm{const.}$

Dacă $\mathbf{X}$ este un cîmp de clasă C^1 și $x \in \boldsymbol{D}$ este un punct în care $\mathbf{X}(x) \neq 0$, atunci există o vecinătate U a lui x astfel încît sistemul simetric admite $n-1$ integrale prime $\mathrm{f}_1, \ldots, \mathrm{f}_{n-1}$ funcțional independente pe U și orice altă integrală primă este o funcție de acestea. În aceste condiții *soluția generală* a sistemului poate fi scrisă sub forma

$$\mathrm{f}_1(x_1, \ldots, x_n) = c_1, \ldots, \mathrm{f}_{n-1}(x_1, \ldots, x_n) = c_{n-1}.$$

Dacă se cunosc $n-2$ integrale prime funcțional independente ale sistemului simetric, atunci găsirea soluției generale se reduce la aflarea soluției generale a unei ecuații diferențiale de ordinul întîi.

4.3. Pentru determinarea soluției unor sisteme simetrice particulare se utilizează *metoda combinațiilor integrabile.* În ipoteza că există funcțiile $\lambda_i\colon \boldsymbol{D} \to \boldsymbol{R}$, $i=1, \ldots, n$, de clasă $\mathbf{C}^1$, astfel încît $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \,\mathrm{d}x_i = \mathrm{df}$ și $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_i = 0$, din

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{X_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \,\mathrm{d}x_i}{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_i} = \frac{\mathrm{df}}{0}$$

rezultă $\mathrm{df} = 0$ și deci $\mathrm{f}(x_1, \ldots, x_n) = \mathrm{c}$, adică f este o integrală primă a sistemului simetric. Expresia $\sum_i \lambda_i \,\mathrm{d}x_i = \mathrm{df}$, cu condiția $\sum_i \lambda_i X_i = 0$, se numește *combinație integrabilă.*

4.4. În cazul spațiului cu trei dimensiuni, se utilizează notațiile $\vec{v}(x, y, z) = v_1(x, y, z)\vec{i} + v_2(x, y, z)\vec{j} + v_3(x, y, z)\vec{k}$, $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, $\mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}x\vec{i} + \mathrm{d}y\vec{j} + \mathrm{d}z\vec{k}$. Sistemul simetric

$$\frac{\mathrm{d}x}{v_1(x, y, z)} = \frac{\mathrm{d}y}{v_2(x, y, z)} = \frac{\mathrm{d}z}{v_3(x, y, z)}$$

este echivalent cu ecuația vectorială $\vec{v} \times \mathrm{d}\vec{r} = \vec{0}$.

Exerciții și probleme

1. Se dau cîmpurile vectoriale definite respectiv prin

1) $\vec{v}(x, y, z) = xz\vec{i} + z(2x - y)\vec{j} - x^2\vec{k}$, $\qquad x \neq 0,\ z \neq 0$,

2) $\vec{v}(x, y, z) = x^2(y + z)\vec{i} - y^2(z + x)\vec{j} + z^2(y - x)\vec{k}$, $xyz \neq 0$,

3) $\vec{v}(x, y, z) = y^2z^2\vec{i} + xyz^2\vec{j} + xy^2z\vec{k}, \qquad xyz \neq 0$

4) $\vec{v}(x, y, z) = xz\vec{i} + yz\vec{j} - (x^2 + y^2)\vec{k}, \; x > 0, \; y > 0, \; z > 0,$

5) $\vec{v}(x, y, z) = x(y - z)\vec{i} - y(x - z)\vec{j} + z(x - y)\vec{k}, \; x > 0, \; y > 0, \; z > 0.$

Să se determine liniile de cîmp.

Soluție. 1) Sistemul

$$\frac{dx}{xz} = \frac{dy}{z(2x - y)} = \frac{dz}{-x^2}$$

implică

$$x\,dx + z\,dz = 0, \quad \frac{d(y - x)}{dx} = \frac{x - y}{x}.$$

Deci $x^2 + z^2 = c_1 \; |x(x - y)| = c_2$ pe $x \neq 0, \; z \neq 0$.

2) Din

$$\frac{dx}{x^2(y + z)} = \frac{dy}{-y^2(z + x)} = \frac{dz}{z^2(y - x)}$$

deducem

$$\frac{\frac{dx}{x}}{x(x + z)} = \frac{\frac{dy}{y}}{-y(z + x)} = \frac{\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} + \frac{dz}{z}}{0},$$

$$\frac{\frac{dx}{x^2}}{x + z} = \frac{\frac{dy}{y^2}}{-z - x} = \frac{\frac{-dz}{z^2}}{-y + x} = \frac{\frac{dx}{x^2} + \frac{dy}{y^2} + \frac{dz}{z^2}}{0}.$$

Rezultă $|xyz| = c_1, \; \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{z} = c_2$, pentru $xyz \neq 0$.

3) Sistemul

$$\frac{dx}{y^2z^2} = \frac{dy}{xyz^2} = \frac{dz}{xy^2z}, \qquad xyz \neq 0,$$

conduce la

$$\frac{dy}{z} = \frac{dz}{y}, \quad \frac{dx}{y} = \frac{dy}{x}, \qquad xyz \neq 0,$$

adică $y^2 - z^2 = c_1, \; x^2 - y^2 = c_2, \; xyz \neq 0$.

4) Din

$$\frac{dx}{xz} = \frac{dy}{yz} = \frac{dz}{-(x^2 + y^2)}, \; x > 0, \; y > 0, \; z > 0$$

rezultă

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}, \quad \frac{x\,dx}{x^2z} = \frac{y\,dy}{y^2z} = \frac{z\,dz}{-z(x^2 + y^2)} = \frac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{0}.$$

Deci

$$x = c_1y, \; x^2 + y^2 + z^2 = c_2, \; x, y, z \in (0, \infty).$$

5) Deoarece

$$\frac{\mathrm{d}x}{x(y-z)}=\frac{\mathrm{d}y}{-y(x-z)}=\frac{\mathrm{d}z}{z(x-y)}=\frac{\mathrm{d}x+\mathrm{d}y+\mathrm{d}z}{0},$$

$$\frac{\frac{\mathrm{d}x}{x}}{y-z}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{y}}{-(x-z)}=\frac{\frac{\mathrm{d}z}{z}}{x-y}=\frac{\frac{\mathrm{d}x}{x}+\frac{\mathrm{d}y}{y}+\frac{\mathrm{d}z}{z}}{0},$$

găsim $x+y+z=c_1,\ xyz=c_2,\ x,y,z\in(0,\infty)$.

2. Să se afle liniile de cîmp ale cîmpurilor vectoriale

1) $\vec{V}(\vec{r})=\vec{a}\times\vec{r},\ \vec{a}=\text{const}\neq\vec{0},\ \vec{r}\neq\lambda\vec{a}$

2) $\vec{V}(x,y,z)=\operatorname{grad} f\times\operatorname{grad} g,\ f=\dfrac{1}{r},\ \ g=\|\vec{a}\times\vec{r}\|^2,\ \vec{a}=\text{const}\neq\vec{0}.$

R: 1) $x^2+y^2+z^2=c_1,\ (\vec{a},\vec{r})=c_2$, 2) $x+y+z=c_1,\ x^2+y^2+z^2=c_2$.

3. Să se determine un cîmp vectorial ale cărui linii de cîmp sînt

1) $x^2-yz=c_1,\ y^2-zx=c_2$

2) $x+\arcsin\dfrac{y}{z}=c_1,\ \ y+\arcsin\dfrac{x}{z}=c_2.$

3) $(\vec{a},\vec{r})\ (\vec{b},\vec{r})=c_1,\ r(\vec{a},\vec{r})=c_2$, unde $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k},\ r=\|\vec{r}\|$, iar $\vec{a}$ și $\vec{b}$ sînt vectori constanți.

Indicație. Orice cîmp vectorial de tipul $\vec{v}=\lambda\operatorname{grad}\varphi\times\operatorname{grad}\psi$ are liniile de cîmp $\varphi(x,y,z)=c_1,\ \psi(x,y,z)=c_2$.

4. Mișcarea unei particule în $\boldsymbol{R}^3$ este guvernată de sistemul

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=yz,\ \ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=zx,\ \ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=xy.$$

Să se arate că:

1) dacă două dintre numerele $x(0),\ y(0),\ z(0)$ sînt nule, atunci particula nu se mișcă;

2) dacă $x(0)=y(0)=1,\ z(0)=0$, atunci traiectoria mișcării are ecuațiile parametrice

$$x=\sec t,\ y=\sec t,\ z=\operatorname{tg} t,\ t\neq(2k+1)\frac{\pi}{2},\ \ k\in\boldsymbol{Z};$$

3) dacă $x(0)=y(0)=1,\ z(0)=-1$, atunci traiectoria mișcării are ecuațiile parametrice

$$x=\frac{1}{1+t};\ \ y=\frac{1}{1+t},\ \ z=-\frac{1}{1+t},\ \ t\neq-1;$$

4) dacă cel puțin două dintre valorile $x(0),\ y(0),\ z(0)$ sînt diferite de zero, atunci sau particula se mișcă la infinit într-un timp finit (în viitor) sau vine de la infinit într-un timp finit (în trecut).

Indicații. 1) Dacă două dintre numerele $x(0),\ y(0),\ z(0)$ se anulează, atunci $x'(0)=y'(0)=z'(0)=0$ și teorema de unicitate arată că traiectoria se reduce la un punct.

2) — 3) Utilizînd combinațiile integrabile se determină ecuațiile carteziene implicite ale familiei de traiectorii. Prin condițiile inițiale, se determină constantele și apoi se verifică parametrizările propuse.

4) Din $xx' = yy' = zz' = xyz$ rezultă $x^2 - c_1 = y^2 - c_2 = z^2 - c_3$. Presupunem $c_1 \geqslant c_2 \geqslant c_3 = 0$. Deci $z^2 \leqslant y^2 \leqslant x^2$ și $z^2 = x^2 - c_1 = y^2 - c_2$, $c_1, c_2 \geqslant 0$, $\frac{dz}{dt} = \pm\sqrt{(z^2 + c_1)(z^2 + c_2)}$. Pentru simplitate presupunem $z(0) \geqslant 0$ și $\frac{dz}{dt} = \sqrt{(z^2 + c_1)(z^2 + c_2)}$. Rezultă

$$t(z) = \int_{z(0)}^{z} \frac{du}{\sqrt{(u^2 + c_1)(u^2 + c_2)}} \quad \text{și} \quad \lim_{z\to\infty} t(z) = \int_{z(0)}^{\infty} \frac{du}{\sqrt{(u^2 + c_1)(u^2 + c_2)}} =$$

$=$ finită (deoarece integrala este convergentă).

5. Fie **V** spațiul vectorial real al funcțiilor reale de clasă C^∞ pe mulțimea deschisă și conexă $\boldsymbol{D} \subset \boldsymbol{R}^n$. Fie **X** un cîmp vectorial de clasă C^1 pe $\boldsymbol{D}$ și fie $\mathcal{T}: \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ funcția definită prin $\mathcal{T}(\mathrm{f}) = \mathrm{D_X f}$.

1) Să se arate că $\mathcal{T}$ este o transformare liniară.

2) Să se demonstreze că (i) $\mathrm{f} \in \mathbf{V} - \{0\}$ este un vector propriu al lui $\mathcal{T}$ în raport cu valoarea proprie a dacă și numai dacă $(\mathrm{f} \circ \alpha)(t) = A\mathrm{e}^{at}$, $A = \mathrm{f}(\alpha(0))$, pentru orice linie de cîmp α a lui **X**; (ii) dacă fiecare linie de cîmp maximală a lui **X** este periodică, atunci fiecare valoare proprie a lui $\mathcal{T}$ este zero. Aplicații pentru $n = 2$: (i) $\vec{X} = x_1\vec{i} + x_2\vec{j}$, (ii) $\vec{X} = x_2\vec{i} - x_1\vec{j}$.

Soluție. 1) Consecință a proprietăților derivatei unei funcții în raport cu un cîmp vectorial.

2) Dacă α este o linie de cîmp a lui **X** pe $\boldsymbol{D}$, iar $\mathrm{f}: \boldsymbol{D} \to \boldsymbol{R}$ este o funcție de clasă C^∞, atunci $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathrm{f} \circ \alpha) = (\mathrm{D_X f}) \circ \alpha$.

(i) Fie $\mathrm{D_X f} = a\mathrm{f}$, a fiind un număr real dat. Ținînd seama de observația precedentă, rezultă $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathrm{f} \circ \alpha) = a(\mathrm{f} \circ \alpha)$ și deci $(\mathrm{f} \circ \alpha)(t) = A\,\mathrm{e}^{at}$, $t \in I$, unde $A = \mathrm{f}(\alpha(0))$.

Reciproc, dacă relația $(\mathrm{f} \circ \alpha)(t) = A\,\mathrm{e}^{at}$, pentru orice $t \in I$, are loc pentru o curbă $\alpha: I \to \boldsymbol{D}$, atunci $\mathrm{D_X f} = a\mathrm{f}$ pe $\alpha(I)$. Dacă relația este adevărată pentru fiecare linie de cîmp, atunci $\mathrm{D_X f} = a\mathrm{f}$ pe $\boldsymbol{D}$ și deci a este o valoare proprie a lui $\mathcal{T}$, iar f este un vector propriu.

Aplicație. Liniile de cîmp ale lui $X = x_1 i + x_2 j$, $(x_1, x_2) \in \boldsymbol{R}^2$, sînt definite prin $\alpha(t) = (c_1\mathrm{e}^t, c_2\mathrm{e}^t)$, $t \in \boldsymbol{R}$. Funcția $\mathrm{f} \neq 0$ este un vector propriu al lui $\mathcal{T}$ corespunzător valorii proprii a dacă și numai dacă $\mathrm{f}(c_1\mathrm{e}^t, c_2\mathrm{e}^t) = \mathrm{e}^{at}\mathrm{f}(c_1, c_2)$ pentru orice $(c_1, c_2) \in \boldsymbol{R}^2$, oricare ar fi $t \in \boldsymbol{R}$, sau echivalent $\mathrm{f}(sc_1, sc_2) = s^a\mathrm{f}(c_1, c_2)$, pentru orice $(c_1, c_2) \in \boldsymbol{R}^2$, $\forall s > 0$. Deci f trebuie să fie o funcție omogenă de grad de omogenitate a.

Să arătăm că pe $\boldsymbol{R}^2$ fiecare valoare proprie a lui $\mathcal{T}$ este un număr natural n și funcția proprie corespunzătoare este un polinom omogen de gradul n.

Fie f un vector propriu corespunzător la valoarea proprie a. Deoarece $\mathrm{f} \neq 0$, $\exists x_0 \in \boldsymbol{R}^2$ astfel încît $\mathrm{f}(x_0) \neq 0$. Presupunem $a < 0$; atunci $\lim\limits_{s\to 0} |\mathrm{f}(sx_0)| = \infty$ și deci f nu este continuă în origine; absurd. Rămîne $a \geqslant 0$.

Fie $p > a$ un număr natural. Fiecare derivată parțială de ordinul p a lui f trebuie să fie nulă deoarece ea este o funcție omogenă pe $\boldsymbol{R}^2$ avînd gradul de omogenitate $a - p < 0$. Ținînd seama de acest lucru și de formula Taylor rezultă că f este un polinom, să zicem de gradul n, care se scrie unic în forma $f = f_0 + f_1 + \dots + f_n$, unde f_i este un polinom omogen de gradul i și $f_n \neq 0$. Omogenitatea împreună cu ipoteza $f_n \neq 0$ implică $\lambda = n$ și $f = f_n$ (adică $f_0 = f_1 = \dots = f_{n-1} = 0$.

Observație. În general, o funcție de clasă C^∞ și omogenă pe $\boldsymbol{R}^n$ se reduce la un polinom omogen. Relația lui Euler $\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = af(x)$ face legătura cu aplicațiile precedente.

(ii) Fie a o valoare proprie și f vectorul propriu corespunzător. Deoarece $f \neq 0$, $\exists x_0 \in \boldsymbol{D}$ astfel încît $f(x_0)) \neq 0$. Fie α o linie de cîmp maximală a lui **X** ce pleacă din x_0, periodică cu perioada T. Rezultă $e^{at} = e^{a(t+T)}$, $T > 0$, pentru orice $t \in \boldsymbol{R}$ și deci $a = 0$.

Aplicație. Liniile de cîmp ale lui $\vec{X} = x_2\vec{i} - x_1\vec{j}$, $(x_1, x_2) \in \boldsymbol{R}^2$, sînt definite prin $\alpha(t) = (b \sin(t + c), b \cos(t + c))$, $t \in \boldsymbol{R}$. Evident $\alpha(t) = \alpha(t + 2\pi)$ și deci sînt curbe periodice. Funcția definită prin $(x_1, x_2) \to x_1^2 + x_2^2$ este un exemplu de vector propriu atașat valorii proprii zero.

§ 5. HIPERSUPRAFEȚE DE CÎMP ȘI ECUAȚII LINIARE CU DERIVATE PARȚIALE

5.1. Fie $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ un cîmp vectorial de clasă C^1 pe o mulțime deschisă și conexă $\boldsymbol{D} \subset \boldsymbol{R}^n$. Fie $f: \boldsymbol{D} \to \boldsymbol{R}$ o funcție de clasă C^1 și $M: f(x) = c$ o hipersuprafață de nivel constant c. Dacă **X** este un cîmp vectorial tangent la M (fig. 4.8), adică $(X, \text{grad } f) = 0$ sau $D_{\mathbf{X}} f = 0$, atunci M se numește *hipersuprafață de cîmp* sau hipersuprafață *integrală* a lui **X**. Explicit, hipersuprafețele de cîmp sînt caracterizate prin ecuația diferențială

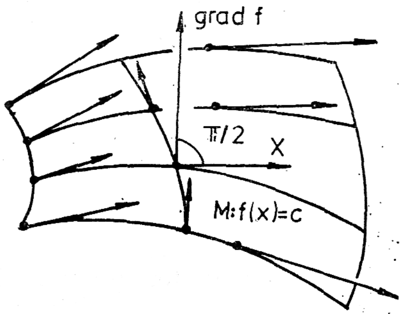


Fig. 4.8.

$$(1) \quad X_1(x) \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) + \dots + X_n(x) \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) = 0,$$

care poartă numele de *ecuație liniară omogenă cu derivate parțiale*.

O hipersuprafață de cîmp mai poate fi privită și ca fiind o hipersuprafață generată de linii de cîmp ale lui **X**. Pe de altă parte, liniile de cîmp ale lui **X** sînt soluții ale sistemului simetric

$$(2) \quad \frac{dx_1}{X_1(x)} = \dots = \frac{dx_n}{X_n(x)},$$

numit *sistem caracteristic*.

5.2. Orice integrală primă a sistemului (2) este o soluție a ecuației (1). Fie $f_1, \dots, f_{n-1}$ cele $n-1$ integrale prime funcțional independente definite de sistemul (2) în vecinătatea unui punct în care $X(x) \neq 0$. O funcție f de clasă C^1 este o soluție a ecuației (1) dacă și numai dacă ea este de tipul $f = \varnothing(f_1, \dots, f_{n-1})$. În consecință, orice soluție a ecuației (1) este o integrală primă a sistemului (2).

Concluzii: pentru găsirea soluției generale a ecuației (1) este suficient să determinăm soluția generală a sistemului (2); pentru găsirea soluției generale a lui (2) este suficient să determinăm $n - 1$ soluții funcțional independente ale ecuației (1).

5.3. Fie $f = \emptyset(f_1, ..., f_{n-1})$ soluția generală a ecuației (1) și $M_c : \theta(f_1(x), ..., f_{n-1}(x)) = c$ familia hipersuprafețelor integrale.

Problema lui Cauchy pentru o ecuație de tipul (1) constă în determinarea hipersuprafeței integrale care să conțină o varietate cu $n - 2$ dimensiuni $\Gamma: g(x_1, ..., x_n) = 0,\ h(x_1, ..., x_n) = 0$.

În anumite condiții problema lui Cauchy admite soluție unică. Pentru cazurile particulare se observă că hipersuprafața căutată poate fi privită ca fiind generată de curbele integrale ale sistemului (2), $f_1(x) = c_1, ..., f_{n-1}(x) = c_{n-1}$, care întîlnesc pe Γ. Ecuațiile $f_1(x) = c_1, ..., f_{n-1}(x) = c_{n-1},\ g(x) = 0,\ h(x) = 0$ formează un sistem algebric de $n+1$ ecuați cu n necunoscute $x_1, ..., x_n$. Eliminînd pe $x_1, ..., x_n$ obținem condiția de compatibilitate $\emptyset(c_1, ..., c_{n-1}) = 0$ și apoi eliminînd parametrii $c_1, ..., c_{n-1}$ găsim hipersuprafața integrală $M : \emptyset(f_1(x), ..., f_{n-1}(x)) = 0$.

5.4. *Ecuațiile liniare neomogene cu derivate parțiale* au forma

$$X_1(x, f)\frac{\partial f}{\partial x_1} + ... + X_n(x, f)\frac{\partial f}{\partial x_n} = F(x, f),$$

unde f este funcția necunoscută. În acest caz f se caută sub formă implicită $\emptyset(x, f) = 0$, ecuația diferențială reducîndu-se la o ecuație de tipul (1) căreia îi corespunde sistemul simetric

$$\frac{dx_1}{X_1(x, f)} = ... = \frac{dx_n}{X_n(x, f)} = \frac{df}{F(x, f)}.$$

Se află soluția generală a acestui sistem, apoi soluția generală $\emptyset$ a ecuației diferențiale corespunzătoare și din $\emptyset(x, f) = 0$ rezultă f.

Exerciții și probleme

1. 1) Să se scrie ecuația carteziană implicită a suprafeței cilindrice pentru care generatoarele sînt paralele cu dreapta $x - y + 3z - 1 = 0,\ x + 2y - z + 2 = 0$, iar curba directoare este elipsa $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{2} = 1,\ z = 2$.

2) Să se scrie ecuația carteziană implicită a suprafeței conice cu vîrful în punctul $V(1, -1, 1)$ și avînd curba directoare $\frac{x^2}{4} - y = 0,\ z = 4$.

3) Să se determine ecuația carteziană implicită a suprafeței obținută prin rotația parabolei $y^2 = 4z,\ x = 0$ în jurul axei Oz.

Soluție. 1) Ecuația cu derivate parțiale a suprafețelor cilindrice din $\boldsymbol{R}^3$ este

$$l\frac{\partial z}{\partial x} + m\frac{\partial z}{\partial y} = n,$$

unde l, m, n sînt parametrii directori ai generatoarei. În cazul nostru ecuația devine

$$-5\frac{\partial z}{\partial x} + 4\frac{\partial z}{\partial y} = 3.$$

Sistemul caracteristic asociat,

$$\frac{dx}{-5}=\frac{dy}{4}=\frac{dz}{3},$$

admite soluția $4x+5y=c_1$, $3x+5z=c_2$. Condiția de compatibilitate a sistemului $4x+5y=c_1$, $3x+5z=c_2$, $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{2}=1$, $z=2$ este $50(c_2-10)^2+$ $+9(3c_1-4c_2+40)^2-450=0$. Eliminînd pe c_1, c_2 găsim $50(3x+5z-10)^2+$ $+9(12x+15y+40)^2-450=0$.

2) Ecuația cu derivate parțiale a suprafeței conice cu vîrful în $V(a, b, c)$ este

$$(x-a)\frac{\partial z}{\partial x}+(y-b)\frac{\partial z}{\partial y}=z-c.$$

În cazul problemei aceasta se transcrie

$$(x-1)\frac{\partial z}{\partial x}+(y+1)\frac{\partial z}{\partial y}=z-1.$$

Integralele prime funcțional independente ale sistemului simetric asociat sînt $(x, y, z)\to\frac{x-1}{z-1}$, $(x, y, z)\to\frac{y+1}{z-1}$. Condiția de compatibilitate a sistemului

$$\frac{x-1}{z-1}=c_1,\ \frac{y+1}{z-1}=c_2,\ \frac{x^2}{4}-y=0,\ z=4.$$

este $(1+3c_1)^2-12c_2+4=0$. Deci $(3x-4)^2-12(y+1)(z-1)+$ $+4(z-1)^2=0$ este ecuația căutată.

3) Dacă axa de rotație are ecuațiile $\frac{x}{l}=\frac{y}{m}=\frac{z}{n}$, atunci ecuația cu derivate parțiale a suprafeței de rotație este

$$(ny-mz)\frac{\partial z}{\partial x}+(lz-nx)\frac{\partial z}{\partial y}=mx-ly.$$

În cazul nostru, $l=0$, $m=0$, $n=1$, găsim

$$y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=0.$$

Sistemul caracteristic asociat

$$\frac{dx}{y}=\frac{dy}{-x}=\frac{dz}{0}$$

admite soluția generală $x^2+y^2=c_1$, $z=c_2$. Rezolvînd problema Cauchy obținem $4z=x^2+y^2$.

2. Fie **V** spațiul vectorial real al funcțiilor reale de clasă C^∞ pe $\boldsymbol{D}\subset\boldsymbol{R}^3$ și fie $\mathcal{T}:\mathbf{V}\to\mathbf{V}$ funcția definită prin

$$\mathcal{T}(f)=\frac{\partial f}{\partial x}-(y+2z)\frac{\partial f}{\partial y}+(3y+4z)\frac{\partial f}{\partial z}.$$

1) Să se arate că $\mathcal{T}$ este o transformare liniară.

2) Să se determine Ker $\mathcal{T}$.

3) Să se rezolve ecuația $\mathcal{T}(f) = f$.

Soluție. 1) $f, g \in V$ și $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$. Atunci

$$\mathcal{T}(\alpha f + \beta g) = \frac{\partial}{\partial x}(\alpha f + \beta g) - (y + 2z)\frac{\partial}{\partial y}(\alpha f + \beta g) + (3y + 4z)\frac{\partial}{\partial z}(\alpha f + \beta g) =$$

$$= \alpha\left[\frac{\partial f}{\partial x} - (y + 2z)\frac{\partial f}{\partial y} + (3y + 4z)\frac{\partial f}{\partial z}\right] + \beta\left[\frac{\partial g}{\partial x} - (y + 2z)\frac{\partial g}{\partial y} + (3y + 4z)\frac{\partial g}{\partial z}\right] =$$

$= \alpha\mathcal{T}(f) + \beta\mathcal{T}(g)$ în baza liniarității operatorului de derivare parțială.

2) Ker $\mathcal{T} = \{f / \mathcal{T}(f) = 0\}$. Determinarea lui Ker $\mathcal{T}$ revine la găsirea soluției generale a ecuației cu derivate parțiale

$$\frac{\partial f}{\partial x} - (y + 2z)\frac{\partial f}{\partial y} + (3y + 4z)\frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

Sistemul caracteristic asociat,

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{-(y + 2z)} = \frac{dz}{3y + 4z},$$

implică

$$dx = \frac{dy + dz}{2(y + z)}, \quad dx = \frac{3dy + 2dz}{3y + 2z}$$

și deci admite soluția generală $e^{-2x}(y + z) = c_1$, $e^{-x}(3y + 2z) = c_2$. Rezultă

$$\text{Ker}\,\mathcal{T} = \{f \mid f(x, y, z) = \emptyset\,(e^{-2x}(y + z),\ e^{-x}(3y + 2z))\}.$$

3) Ecuația $\mathcal{T}(f) = f$ este liniară neomogenă. Sistemul caracteristic asociat

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{-(y + 2z)} = \frac{dz}{3y + 4z} = \frac{df}{f}$$

admite integralele prime $(x, y, z) \to e^{-2x}(y + z)$, $e^{-x}(3y + 2z)$, $e^{-x}f(x, y, z)$. Soluția generală a ecuației este definită prin

$$\emptyset\,(e^{-2x}(y + z),\ e^{-x}(3y + 2z),\ e^{-x}f(x, y, z)) = 0.$$

3. Să se formuleze și să se rezolve probleme de tipul precedent în cazurile

1) $\mathcal{T}(f) = x\dfrac{\partial f}{\partial x} - y\dfrac{\partial f}{\partial y} + (x^2 - y^2)\dfrac{\partial f}{\partial z}$

2) $\mathcal{T}(f) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i - a_i)\frac{\partial f}{\partial x_i}$

3) $\mathcal{T}(f) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i^3}\,\frac{\partial f}{\partial x_i}$.

R: 1) Ker $\mathcal{T} = \{f \mid f(x, y, z) = \emptyset\,(xy,\ x^2 + y^2 - 2z)\}$, $\emptyset\,(xy,\ x^2 + y^2 - 2z,\ e^{-x}f(x, y, z)) = 0$. 2) Ker $\mathcal{T} = \left\{f \mid f(x) = \emptyset\left(\dfrac{x_2 - a_2}{x_1 - a_1}, \ldots, \dfrac{x_n - a_n}{x_1 - a_1}\right)\right\}$, $\emptyset\left(\dfrac{x_2 - a_2}{x_1 - a_1}, \ldots, \dfrac{x_n - a_n}{x_1 - a_1}, \dfrac{f(x)}{x_1 - a_1}\right) = 0$. 3) Ker $\mathcal{T} = \{f \mid f(x) = \emptyset\,(x_2^4 - x_1^4, \ldots, x_n^4 - x_1^4)\}$, $\emptyset\left(x_2^4 - x_1^4, \ldots, x_n^4 - x_1^4,\ f(x)\exp\left(-\dfrac{x_1^4}{4}\right)\right) = 0$.

4. Fie cîmpul vectorial definit prin

$$\vec{V}(x, y, z) = (x - \sqrt{x^2 + y^2 + z^2})\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

Să se determine funcțiile diferențiabile $f: \boldsymbol{R}^3 - \{(0, 0, 0)\} \to \boldsymbol{R}$ cu proprietatea $D_{\vec{v}}f = 0$.

Soluție. Ecuația $D_{\vec{v}}f = (\vec{V}, \text{grad } f) = 0$ se transcrie

$$(x - \sqrt{x^2 + y^2 + z^2})\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

Sistemul caracteristic asociat

$$\frac{dx}{x - \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$$

conduce la

$$\frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}, \quad \frac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = -dx.$$

Rezultă soluția generală $y = c_1 z$, $x + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = c_2$. Deci

$$f(x, y, z) = \Phi\left(\frac{y}{z}, \quad x + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right).$$

5. Problema precedentă pentru cîmpurile vectoriale definite prin

1) $\vec{V}(x, y, z) = (x + y - z)\vec{i} + (x - y + z)\vec{j} + (-x + y + z)\vec{k}$

2) $\vec{V}(x, y, z) = x(y^2 - z^2)\vec{i} - y(x^2 + z^2)\vec{j} + z(x^2 + y^2)\vec{k}$

3) $\vec{V}(x) = x_1\vec{U}_1 + \ldots + x_n\vec{U}_n$.

R: 1) $(x - y)\,d(x - y) = (y - z)\,d(y - z)$, $\dfrac{d(x + z)}{2y} = \dfrac{dy}{(x + z) - y}$.

2) $f(x, y, z) = \emptyset\left(\dfrac{yz}{x}, \; x^2 + y^2 + z^2\right)$. 3) $f(x) = \emptyset\left(\dfrac{x_2}{x_1}, \ldots, \dfrac{x_n}{x_1}\right)$.

6.) Pentru fiecare dintre următoarele cîmpuri vectoriale să se determine suprafața de cîmp ce trece prin curba specificată.

1) $\vec{V}(x, y, z) = xy^2\vec{i} + x^2y\vec{j} + z(x^2 + y^2)\vec{k}$, $(x, y, z) \in \boldsymbol{R}^3 - \{(0, 0, 0)\}$
C: $x^2 + y^2 = 4$, $z = 1$.

2) $\vec{V}(x, y, z) = x(1 - 2y^2)\vec{i} + y(1 + 2x^2)\vec{j} + 2z(x^2 + y^2)\vec{k}$, $\dfrac{xy}{a} > 0$, $\dfrac{z}{b} > 0$,

$C: xy = a$, $z = b$.

3) $\vec{V}(x, y, z) = x(x^2 - y^2)\vec{i} + y(y^2 - x^2)\vec{j} + 2z(x^2 + y^2)\vec{k}$, $(x, y, z) \in \boldsymbol{R}^3 -$
$- \{(0, 0, 0)\}$ C: $x^2 + y^2 + xy = 1$, $z = 2$.

4) $\vec{V}(x, y, z) = 2xz\vec{i} + 2yz\vec{j} - (x^2 + y^2 - z^2)\vec{k}$, $(x, y, z) \in \boldsymbol{R}^3 - \{(0, 0, 0)\}$.
C: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z + 1 = 0$.

5) $\vec{V}(x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j} + 4\dfrac{y^2}{x^2}\vec{k}$, $x \neq 0$, C: $x^3 - y = 2$, $z = 1$.

6) $\vec{V}(x, y, z) = x(x^2 + 3y^2)\vec{i} + 2y^3\vec{j} + 2y^2z\vec{k}$, $y \neq 0$, $z \neq 0$, C: $x^2 + y^2 = 9$, $z = 2$.

7) $\vec{V}(x, y, z) = 2x^4\vec{i} + 5xy\vec{j} + 5xz\vec{k}$, $x, y, z \neq 0$, C: $x = 0$, $2y + z = 1$.

8) $\vec{V}(x, y, z) = (xz - xy - y^2 - z^2)\vec{i} + (x^2 + xy - yz - z^2)\vec{j} + (y^2 - x^2 - xz + yz)\vec{k}$, $y^2 - x^2 - xz + yz \neq 0$, C: $x^2 + y^2 + z^2 - 3x - y - 2z = 0$, $y = x$.

Soluție. 1) Sistemul diferențial al liniilor de cîmp,

$$\frac{dx}{xy^2} = \frac{dy}{x^2y} = \frac{dz}{z(x^2 + y^2)}$$

implică

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{x}, \quad \frac{d(xy)}{xy} = \frac{dz}{z}.$$

Obținem liniile de cîmp $x^2 - y^2 = c_1$, $xy = c_2z$.

Se consideră sistemul algebric $x^2 - y^2 = c_1$, $xy = c_2z$, $x^2 + y^2 = 4$, $z = 1$. Eliminînd pe x, y și z găsim condiția de compatibilitate $c_1^2 + 4c_2 = 16$. Eliminînd pe c_1 și c_2 rezultă

$$(x^2 - y^2)z - 16z + xy = 0.$$

2) $$\frac{dx}{x(1 - 2y^2)} = \frac{dy}{-y(1 + 2x^2)} = \frac{dz}{2z(x^2 + y^2)}$$

conduc la

$$\left(\frac{1}{x} + 2x\right)dx = -\left(\frac{1}{y} - 2y\right)dy, \quad \frac{1}{z}dz = 2(x\,dx - y\,dy)$$

și de aici găsim

$$xy\,e^{x^2 - y^2} = c_1, \quad z\,e^{y^2 - z^2} = c_2.$$

Suprafața de cîmp are ecuația carteziană implicită

$$\left(b + \ln\frac{xyz\,e^{x^2 - z^2}}{ab}\right)\left(b + \ln\frac{z\,e^{y^2 - z^2}}{b}\right) = a^2.$$

3) $\dfrac{dx}{x} = -\dfrac{dy}{y}$, $\dfrac{d(x^2 - y^2)}{x^2 - y^2} = \dfrac{dz}{z}$. Rezultă $xy = c_1$, $x^2 - y^2 = c_2z$.

Ecuația carteziană implicită a suprafeței de cîmp este

$$(1 - xy)^2 = 4\left[x^2y^2 + \frac{(x^2 - y^2)^2}{z^2}\right].$$

4) $\dfrac{dx}{x} = \dfrac{dy}{y}$, $\dfrac{d(x^2 + y^2 + z^2)}{x^2 + y^2 + z^2} = \dfrac{dx}{x}$. Liniile de cîmp au ecuațiile $x = c_1y$, $x^2 + y^2 + z^2 = c_2z$. Suprafața de cîmp are ecuația $3x^2(x^2 + y^2 + z^2)^2 - (x^2 + y^2) = 0$.

5) $y = c_1x^3$, $zx^2 - y^2 = c_2x^2$. Suprafața de cîmp $(y^2 - zx^2 + x^2)^3(y - x^3)^4 = 16x^{18}$.

6) $\dfrac{dx}{x(x^2+3y^2)} = \dfrac{dy}{2y^3} = \dfrac{dz}{2y^2z}$. Obținem liniile de cîmp $z = c_1y$, $y(x^2+y^2) = c_2x^2$. Punem condiția ca sistemul $z = c_1y$, $y(x^2 + y^2) = c_2x^2$, $x^2 + y^2 = 9$, $z = 2$ să fie compatibil. Rezultă relația $18c_1 = (9c_1^2 - 4)\, c_2$. Eliminînd pe c_1 și c_2 obținem ecuația carteziană implicită a suprafeței de cîmp, $(x^2 + y^2)(9z^2 - 4y^2) = 18x^2z$.

7) Liniile de cîmp, $y = c_1z$, $5x^2 - z^4 = c_2$. Suprafața de cîmp, $(5x^2 - z^4)(2y + z)^4 + z^4 = 0$.

8) Linii de cîmp, $x^2 + y^2 + z^2 = c_1$, $x + y + z = c_2$. Suprafața de cîmp, $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 3$.

7. Să se rezolve problema Cauchy

$$-x(x + y)\frac{\partial f}{\partial x} + y(x+y)\frac{\partial f}{\partial y} + (x - y)(2x + 2y + z)\frac{\partial f}{\partial z} = 0;$$

$$y = 1, \quad x + y + z = 3, \quad x \neq 0, \quad x \neq -y, \quad z \in \boldsymbol{R}.$$

Soluție. Ecuația dată este liniară. Scriem sistemul caracteristic asociat

$$\frac{dx}{-x(x + y)} = \frac{dy}{y(x + y)} = \frac{dz}{(x - y)(2x + 2y + z)}$$

și determinăm două integrale prime funcțional independente ale acestuia. Anume $\lambda_1 = y$, $\lambda_2 = x$, $\lambda_3 = 0$ definesc o combinație nulă cu numitorii sistemului, iar ecuația Pfaff corespunzătoare $y\,dx + x\,dy = 0$ este complet integrabilă cu soluția $xy = c_1$ și deci $(x, y, z) \to f_1(x, y, z) = xy$ este o integrală primă. Analog, $\lambda_1 = 2(x + y) + z$, $\lambda_2 = 2(x + y) + z$, $\lambda_3 = (x + y)$ definesc o combinație nulă cu numitorii sistemului, iar ecuația Pfaff corespunzătoare $[2(x + y) + z]\, d(x + y) + (x + y)\, dz = 0$ este complet integrabilă și se mai scrie

$$-\frac{d(x + y)}{x + y} = \frac{dz}{2(x + y) + z}.$$

Soluția ei $(x+y)(x+y+z) = c_2$. Deci $(x, y, z) \to f_2(x, y, z) = (x+y)(x+y+z)$ este a doua integrală primă.

Cum

$$\operatorname{rang}\begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y} & \dfrac{\partial f_1}{\partial z} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y} & \dfrac{\partial f_2}{\partial z} \end{bmatrix} = 2, \text{ oricare ar fi } x \neq 0,\ x \neq -y,\ z \in \boldsymbol{R},$$

rezultă că f_1, f_2 sînt funcțional independente. Eliminînd x, y, z în sistemul $y = 1$, $x + y + z = 3$, $xy = c_1$, $(x + y)(x + y + z) = c_2$, obținem $3(c_1+1) - c_2 = 0$ și deci $3(xy + 1) - (x + y)(x + y + z) = 0$ este soluția problemei Cauchy.

8. Să se determine soluțiile generale ale ecuațiilor de mai jos și acolo unde este indicat să se rezolve problema Cauchy corespunzătoare.

1) $x \frac{\partial f}{\partial x} + yz \frac{\partial f}{\partial z} = 0,\ x > 0,\ z \neq 0,\ f(x, y, 1) = x^y$

2) $x \frac{\partial z}{\partial x} + \left(y + \sqrt{a^2 - z^2}\right) \frac{\partial z}{\partial y} = 0,\ a = \text{const},\ z \in [-a, a],\ x > 0$

3) $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = \sqrt{x^2 + y^2} \sin \alpha,\ \alpha \in [0, 2\pi)$

4) $(z-y)^2 \frac{\partial f}{\partial x} + z \frac{\partial f}{\partial y} + y \frac{\partial f}{\partial z} = 0,\ f(0, y, z) = 2y(y - z)$

5) $(1 + x^2)^2 \frac{\partial f}{\partial x} + 2y \frac{\partial f}{\partial y} = 0,\ f(0, y) = y^2$

6) $(x^3 - 3xy^2) \frac{\partial f}{\partial x} + 2y^3 \frac{\partial f}{\partial y} + 2y^2 z \frac{\partial f}{\partial z} = 0,\ x \neq 0,\ y \neq 0$

7) $y(3x^2 + y^2 + z^2) \frac{\partial z}{\partial x} - 2x(x^2 + z^2) \frac{\partial z}{\partial y} - 2xyz = 0,\ z \neq 0$

8) $xy^2 \frac{\partial z}{\partial x} + x^2 y \frac{\partial z}{\partial y} = z(x^2 + y^2),\ z \neq 0$

9) $x(1 - 2y^2) \frac{\partial z}{\partial x} - y(1 + 2x^2) \frac{\partial z}{\partial y} = 2z(x^2 + y^2),\ x \neq 0,\ y \neq 0$

10) $bxy^2 \frac{\partial f}{\partial x} - ax^2 y \frac{\partial f}{\partial y} + z(by^2 - ax^2) \frac{\partial f}{\partial z} = 0,\ a, b = \text{const},\ xy \neq 0$

11) $2z\left(x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y}\right) + x^2 + y^2 - z^2 = 0,\ x \neq 0$

12) $x(y^2 - z^2) \frac{\partial f}{\partial x} - y(x^2 + z^2) \frac{\partial f}{\partial y} + z(x^2 + y^2) \frac{\partial f}{\partial z} = 0,\ x \neq 0$

13) $x \frac{\partial f}{\partial x} - y \frac{\partial f}{\partial y} + z \frac{\partial f}{\partial z} = f,\ x \neq 0,\ f(1, y, z) = y + z$

14) $y \frac{\partial f}{\partial x} - xz \frac{\partial f}{\partial y} = 0$

15) $\frac{\partial z}{\partial x} + yz = 0$

16) $z \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0,\ z \neq 0$

17) $x \frac{\partial f}{\partial x} - y \frac{\partial f}{\partial y} = 0,\ f(1, y) = y^2$

18) $x\frac{\partial z}{\partial y} = z,\ x \neq 0$

19) $x\frac{\partial z}{\partial x} + 3y\frac{\partial z}{\partial y} = 4\frac{y^2}{x^2},\ x \neq 0$

20) $x(x^2 + 3y^2)\frac{\partial z}{\partial x} + 2y^3\frac{\partial z}{\partial y} - 2y^2 z = 0,\ x \neq 0,\ y \neq 0,\ C\colon x^2 + y^2 = a,$

$z = b$

21) $xz\frac{\partial z}{\partial x} + yz\frac{\partial z}{\partial y} + xy = 0,\ y \neq 0,\ C\colon xy = 9,\ z = 3$

22) $x\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y} = x - y,\ z(a, y) = a^2 + y^2$

23) $y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} - x^2 + y^2 = 0,\ z(x, a) = x^2 - a^2$

24) $y\frac{\partial z}{\partial x} + x\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 + y^2,\ (x, y) \in \mathbf{R}^2 - \{(0, 0)\}, z(a, y) = 1 + 2y + 3y^2$

25) $(y^2 + z^2 - x^2)\frac{\partial z}{\partial x} - 2xy\frac{\partial z}{\partial y} + 2xz = 0,\ z \neq 0,\ C\colon y^2 + z^2 = 2,\ z = 1.$

Soluție. 1) Sistemul caracteristic asociat

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{0} = \frac{dz}{y - z}$$

admite integralele prime $(x, y, z) \to y, \frac{x^y}{z}$. Să dovedim că acestea sînt funcțional independente. Într-adevăr

$$\operatorname{rang}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{y}{z}x^{y-1} & \frac{x^y \ln x}{z} & -\frac{x^y}{z^2} \end{bmatrix} = 2.$$

Soluția generală a ecuației este definită prin $f(x, y, z) = \Phi\left(y, \frac{x^y}{z}\right)$. Dacă $z = 1$, atunci $x = c_1$, $y = c_2$ astfel încît $f(x, y, 1) = x^y = c_1^{c_2}$. Deci $f(x, y, z) = \frac{x^y}{z}$.

2) $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y + \sqrt{a^2 - z^2}} = \frac{dz}{0}$ admite soluția generală $z = c_1$, $y + \sqrt{a^2 - z^2} = c_2 x$. Deci $\Phi\left(z, \frac{y + a^2 - z^2}{x}\right) = 0,$

3) $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dx}{\sqrt{x^2 + y^2}\sin\alpha}$

implică
$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y},\quad 1/2\,\frac{d(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{dz}{\sin\alpha}.$$
Rezultă $x=c_1y$ și $\sqrt{x^2+y^2}=\frac{1}{\sin\alpha}z+c_2$. Deci
$$\Phi\left(\frac{x}{y},\ \sqrt{x^2+y^2}-\frac{z}{\sin\alpha}\right)=0.$$
4) $\frac{dx}{(z-y)^2}=\frac{dy}{z}=\frac{dz}{y}$

este echivalent cu
$$ydy=zdz,\quad (z-y)\,d(y-z)=dx.$$
Prin integrare găsim $y^2-z^2=c_1$, $(y-z)^2+2x=c_2$. Soluția generală a ecuației este definită prin $f(x,y,z)=\Phi(y^2-z^2,(y-z)^2+2x)$. Soluția problemei Cauchy, $f(x,y,z)=2y(y-z)+2x$.

5) $\frac{dx}{(1+x^2)^2}=\frac{dy}{xy}$. Rezultă $\frac{xdx}{(1+x^2)^2}=\frac{dy}{y}$ cu soluția $y^2=(1+x^2)c_1$.

Soluția generală a ecuației este $(x,y)\to f(x,y)=\Phi\left(\frac{y^2}{1+x^2}\right)$, iar soluția problemei Cauchy este definită prin $f(x,y)=\frac{y^2}{1+x^2}$.

6) $\frac{dx}{x^3-3xy^2}=\frac{dy}{2y^3}=\frac{dz}{2y^2z}\to z=c_1y,\ x^2y+y^3=c_2x^2$.

Soluția generală a ecuației,
$$(x,y,z)\to f(x,y,z)=\Phi\left(\frac{z}{y},\ y+\frac{y^3}{x^2}\right).$$
7) $\frac{dx}{y(3x^2+y^2+z^2)}=\frac{dy}{-2x(x^2+z^2)}=\frac{dz}{2xyz}$

este echivalent cu
$$\frac{d(2x^2+y^2)}{2x^2+y^2}=\frac{dz}{z},\quad \frac{d(x^2+y^2+z^2)}{x^2+y^2+z^2}=\frac{dz}{z}$$
și deci admite integralele prime $(x,y,z)\to\frac{2x^2+y^2}{z^2},\ \frac{x^2+y^2+z^2}{z}$.

Soluția generală a euației este definită de ecuația
$$x^2+y^2+z^2=z\varphi\left(\frac{2x^2+y^2}{z^2}\right).$$
8) $\frac{dx}{xy^2}=\frac{dy}{x^2y}=\frac{dz}{z(x^2+y^2)}$.

Din $xdx=ydy$, $\frac{d(xy)}{xy}=\frac{dz}{z}$ rezultă combinațiile integrabile și integralele prime $(x, y, z) \rightarrow x^2 - y^2, \dfrac{xy}{z}$. Soluția generală este definită prin $z = xy\varphi(x^2 - y^2)$, unde φ este o funcție de clasă C^1.

9) $(x, y, z) \rightarrow xy\, e^{x^2-y^2},\ z\, e^{y^2-x^2}$ sînt două integrale prime funcțional independente. Soluția generală a ecuației este $z = \dfrac{1}{xy}\varphi(xy\, e^{x^2-y^2})$.

10) $\dfrac{dx}{bxy^2} = \dfrac{dy}{-ax^2y} = \dfrac{dz}{z(by^2 - ax^2)}$

admite integralele prime $(x, y, z) \rightarrow ax^2 + by^2, \dfrac{z}{xy}$. Soluția generală a ecuației este definită de $f(x, y, z) = \Phi\left(ax^2 + by^2, \dfrac{z}{xy}\right)$.

11) $\dfrac{dx}{2xz} = \dfrac{dy}{2yz} = \dfrac{dz}{x^2 - x^2 - y^2}$.

Găsim liniile de cîmp $y = c_1 x$, $x^2 + y^2 + z^2 = c_2 x$ și soluția generală a ecuației este definită de ecuația $x^2 + y^2 + z^2 = x\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

12) $x dx + y dy + z dz$, $\dfrac{z dy + y dz}{zy} - \dfrac{dx}{x}$ sînt combinații integrabile. Soluia generală a ecuației are expresia

$$f(x, y, z) = \Phi\left(x + y + z, \frac{yz}{x}\right).$$

13) Soluția generală este definită prin $\Phi(xy, yz, yf(x, y, z)) = 0$. Din $x = 1$, $u_1 = xy$, $u_2 = yz$, $u_3 = yf$ rezultă $\widetilde{u}_1 = y$, $\widetilde{u}_2 = yz$, $\widetilde{u}_3 = yf$ și deci $x = 1$, $y = \widetilde{u}_1$, $z = \dfrac{\widetilde{u}_2}{\widetilde{u}_1}$, $f = \dfrac{\widetilde{u}_3}{\widetilde{u}_1}$. Condiția $f(1, y, z) = y + z$ implică $f = \widetilde{u}_1 + \dfrac{\widetilde{u}_2}{\widetilde{u}_1}$. Deci $f(x, y, z) = u_1 + \dfrac{u_2}{u_1} = xy + \dfrac{z}{x}$.

14) $\dfrac{dx}{y} = -\dfrac{dy}{xz} = \dfrac{dz}{0}$. Soluția generală a ecuației, $(x, y, z) \rightarrow \Phi(z, zx^2 + y^2)$.

15) $\dfrac{dx}{1} = \dfrac{dy}{0} = \dfrac{dz}{-yz}$. Soluția generală a ecuației este definită prin $z = e^{-xy}\varphi(y)$.

16) $\dfrac{dx}{z} = \dfrac{dy}{-1} = \dfrac{dz}{0}$. Se obține $\Phi\left(z, \dfrac{x}{z} + y\right) = 0$.

17) $\dfrac{dx}{x} = -\dfrac{dy}{y}$ implică $xy = c_1$. Deci $f(x, y) = \Phi(xy)$. Condiția $f(1, y) = \Phi(y) = y^2$ implică $f(x, y) = x^2y^2$.

18) $\dfrac{dx}{0}=\dfrac{dy}{x}=\dfrac{dz}{z}$. Soluția generală a ecuației este definită prin $z = e^{\frac{y}{x}}\,\varphi(x)$.

19) $\dfrac{dx}{x} = \dfrac{dy}{3y} = \dfrac{dz}{\frac{4y^2}{x^2}}$ implică combinațiile integrabile $\dfrac{dx}{x} - \dfrac{dy}{3y}$, $dz - \dfrac{2y}{x^2}dy + \dfrac{2y^2}{x^3}\,dx$. Soluția generală a ecuației este definită prin $z = \dfrac{y^2}{x^2}\,\varphi\left(\dfrac{y}{x^3}\right)$.

20) $\dfrac{dx}{x(x^2+3y^2)} = \dfrac{dy}{2y^3} = \dfrac{dz}{2y^2z}$. Găsim integralele prime funcțional independente $(x, y, z) \to \dfrac{z}{y}, \dfrac{y}{x^2}\,(x^2+y^2)$. Soluția generală a ecuației este definită de $z = y\varphi\left[\dfrac{y}{x^2}\cdot(x^2+y^2)\right]$.

Condiția de compatibilitate a sistemului $z = c_1 y$, $y(x^2+y^2) = c_2x^2$, $z = b$, $x^2+y^2 = a^2$ este $ba^2c_1 = (a^2c_1^2 - b^2)c_2$. Eliminînd pe c_1, c_2 rezultă suprafața căutată, $(x^2+y^2)\,(a^2z^2 - b^2y^2) = a^2bx^2z$.

21) $\dfrac{dx}{xz}=\dfrac{dy}{yz}=\dfrac{dz}{-xy}$.

Rezultă

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y},\ 2zdz + ydx + xdy = 0$$

și deci

$$(x, y, z) \to \frac{x}{y},\ z^2 + xy$$

sînt integrale prime.

22) Soluția problemei Cauchy, $z = \dfrac{x^2y^2}{a^2} - \dfrac{xy}{a} + x + y + a^2 - a$.

23) $\varnothing(xy, z - 1/2\,(x+y)^2) = 0$ și $z = \dfrac{x^2y^2}{a^2} + 1/2\,(x+y)^2 - 1/2\left(\dfrac{xy}{a} + a\right)^2 - a^2$.

24) Soluția problemei Cauchy, $z = (x^2+y^2)\,\text{arc sin}\,\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \varphi(x^2+y^2)$.

25) Soluția problemei Cauchy este definită prin $2\,(x^2+y^2+z^2) - 9\,(x^2+z^2) = 0$.

9. Să se rezolve problema Cauchy

$$\frac{\partial z}{\partial x} + a\frac{\partial z}{\partial y} + b(z - \varphi(x)) = 0,$$

$z \in C^1$, cu $z(x, 0) = 0$, $\varphi: [0, k] \to \mathbf{R}$ continuă, $a > 0$. Unde este definită soluția problemei?

10. Mișcarea unui punct material atras de un centru fix este caracterizată prin ecuația Newton $m\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2} = \vec{F}$, unde $\vec{F} = -km\frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|^3}$. Să se arate că funcțiile definite prin $\vec{l} = \vec{r} \times \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$ și $\vec{m} = \frac{1}{k}\left(\vec{r} \times \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\right) \times \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} + \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|}$ sînt integrale prime ale ecuației.

Soluție. Găsim

$$\frac{\mathrm{d}\vec{l}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} \times \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} + \vec{r} \times \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2} = -\vec{r} \times \frac{k\vec{r}}{\|\vec{r}\|^3} = \vec{0},$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{m}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{k}\left(\vec{r} \times \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\right) \times \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{\|\vec{r}\|}\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} - \frac{1}{\|\vec{r}\|}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} =$$

$$= -\frac{1}{\|\vec{r}\|^3}\left(\left(\vec{r} \times \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\right) \times \vec{r}\right) + \frac{1}{\|\vec{r}\|}\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} - \frac{1}{\|\vec{r}\|}\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \vec{0}.$$

Integralele prime dau informații complete asupra traiectoriilor. Într-adevăr, avem $(\vec{l}, \vec{r}) = 0$; deci dacă $\vec{l} \neq \vec{0}$ mișcarea se efectuează într-un plan ortogonal pe vectorul $\vec{l}$.

Din $\left\|\vec{r} \times \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\right\|^2 + \left(\vec{r}, \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\right)^2 = \|\vec{r}\|^2 \cdot \left\|\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\right\|^2$ rezultă $\left(\vec{l} \times \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\right)\vec{r} = -\|\vec{l}\|^2$ și deci $(\vec{m}, \vec{r}) = -\frac{\|\vec{l}\|^2}{k} + \|\vec{r}\|$. Deoarece $\frac{1}{\|\vec{m}\|}(\vec{m}, \vec{r})$ este proiecția vectorului $\vec{r}$ pe axa de direcție $\vec{m}$, numărul $\frac{1}{\|\vec{m}\|}(\vec{m}, \vec{r}) + \frac{\|\vec{l}\|^2}{\|\vec{m}\| \cdot k}$ reprezintă distanța de la punctul de pe traictorie la o dreaptă d perpendiculară pe $\vec{m}$ dusă la distanța $\frac{\|\vec{l}\|^2}{\|\vec{m}\| k}$ de O; deoarece $\|\vec{r}\| = OM$, rezultă că M se mișcă pe o conică avînd focarul în O, directoarea d și excentricitatea $\|\vec{m}\|$.

§ 6. HIPERSUPRAFEȚE ORTOGONALE LINIILOR DE CÎMP ȘI ECUAȚII PFAFF

6.1. Fie $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ un cîmp vectorial de clasă C^1 pe o mulțime deschisă și conexă $\boldsymbol{D} \subset \boldsymbol{R}^n$. Fie $\mathrm{f}: \boldsymbol{D} \to \boldsymbol{R}$ o funcție de clasă C^2 și $M: \mathrm{f}(x) = c$ o hipersuprafață de nivel constant c. Dacă $\mathbf{X}$ este coliniar cu grad f, adică $\exists\lambda: \boldsymbol{D} \to \boldsymbol{R}$ de clasă C^1 astfel încît $\mathbf{X} = \lambda$ grad f(fig. 4.9), atunci M se numește *hipersuprafață ortogonală liniilor de cîmp* ale lui $\mathbf{X}$.

Deoarece $(dx_1, ..., dx_n)$ este un vector din planul tangent la M în punctul x rezultă că o hipersuprafață ortogonală liniilor de cîmp ale lui **X** satisface ecuația

$$X_1(x)\, dx_1 + ... + X_n(x)\, dx_n = 0.$$

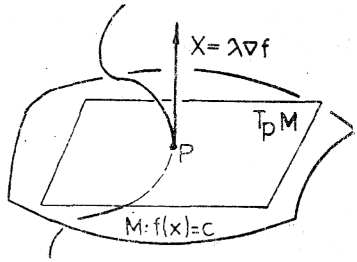


Fig. 4.9

6.2. Cîmpului vectorial $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)$ de clasă C^1 pe $\boldsymbol{D}$ îi atașăm 1-forma diferențială $\omega = X_1(x)\, dx_1 + ... + X_n(x)\, dx_n$. Ecuația $\omega=0$ se numește *ecuație Pfaff*.

(1) Dacă $\boldsymbol{D}$ este un interval n-dimensional și dacă

$$\frac{\partial X_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial X_j}{\partial x_i}(x), \text{ pentru orice } x \in \boldsymbol{D},$$

atunci funcția

$$x \to f(x) = \int_{x_{10}}^{x_1} X_1(x_1, ..., x_n)\, dx_1 + \int_{x_{20}}^{x_2} X_2(x_{10}, x_2, ..., x_n)\, dx_2 + ... +$$

$$+ \int_{x_{n0}}^{x_n} X_n(x_{10}, ..., x_{n-10}, x_n)\, dx_n$$

are proprietatea $df = X_1\, dx_1 + ... + X_n\, dx_n$ și deci soluția generală a ecuației Pfaff este definită prin $f(x) = c$.

Dacă $\boldsymbol{D}$ este o mulțime convexă și dacă $\frac{\partial X_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial X_j}{\partial x_i}(x)$, pentru orice $\forall x \in \boldsymbol{D}$, atunci funcția $x \to g(x) = \int_0^1 (X(x_0 + t(x - x_0)),\ (x - x_0))\, dt$ are proprietatea $dg = X_1\, dx_1 + ... + X_n\, dx_n$ și deci soluția generală a ecuației Pfaff este definită prin $g(x) = c$.

Ecuațiile Pfaff pentru care $\boldsymbol{D}$ este conex și simplu conex, iar $\frac{\partial X_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial X_j}{\partial x_i}(x)$, pentru orice, $x \in \boldsymbol{D}$, adică **X** este un cîmp potențial, se numesc *ecuații diferențiale exacte*.

(2) Fie $\boldsymbol{D}$ o mulțime conexă și simplu conexă. Uneori există o funcție nenulă $\mu: \boldsymbol{D} \to \boldsymbol{R}$ de clasă C^1 astfel încît

$$\mu(x)\, X_1(x)\, dx_1 + ... + \mu(x)\, X_n(x)\, dx_n = 0$$

să fie o ecuație diferențială exactă. Funcția μ se numește *factor integrant* și satisface sistemul cu derivate parțiale

$$\frac{\partial(\mu X_i)}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial(\mu X_j)}{\partial x_i}(x).$$

Ecuațiile diferențiale exacte și ecuațiile Pfaff care admit un factor integrant se numesc *ecuații complet integrabile*. Soluția unor asemenea ecuații depinde de o constantă arbitrară. Cu alte cuvinte cîmpurile vectoriale corespunzătoare unor ecuații complet integrabile admit o familie cu un parametru de hipersuprafețe ortogonale liniilor de cîmp.

O ecuație Pfaff în două variabile este complet integrabilă. În general, ecuația $\omega = 0$ este complet integrabilă dacă și numai dacă $\omega \wedge d\omega = 0$ (bineînțeles, se presupune că mulțimea pe care lucrăm este conexă și simplu conexă).

(3) Presupunem că ecuația Pfaff nu este complet integrabilă, adică **X** nu posedă o familie cu un parametru de hipersuprafețe ortogonale liniilor de cîmp. O asemenea ecuație Pfaff definește o infinitate de curbe integrale al căror ansamblu se numește *hipersuprafață neolonomă.*

6.3. Fie $X_n \neq 0$. Înlocuind pe $x_1, \ldots, x_{n-1}$ cu $u_1, \ldots, u_{n-1}$ și pe x_n cu z ecuația Pfaff se poate transcrie în forma

$$dz = \mathrm{f}_1(u_1, \ldots, u_{n-1}, z)\, du_1 + \ldots + \mathrm{f}_{n-1}(u_1, \ldots, u_{n-1}, z)\, du_{n-1},$$

$$\mathrm{f}_i = \frac{X_i}{X_n},\ i = 1, \ldots, n-1.$$

De aceea o ecuație Pfaff este echivalentă cu sistemul

$$\frac{\partial z}{\partial u_i} = \mathrm{f}_i(u_1, \ldots, u_{n-1}, z),\ i = 1, \ldots, n-1.$$

Dacă mulțimea $\boldsymbol{D}$ este deschisă, conexă și simplu conexă, atunci condițiile de complet integrabilitate ale sistemului sînt

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u_i \partial u_j} = \frac{\partial^2 z}{\partial u_j \partial u_i}$$

sau echivalent

$$\frac{\partial \mathrm{f}_j}{\partial u_i} + \frac{\partial \mathrm{f}_j}{\partial z}\mathrm{f}_i = \frac{\partial \mathrm{f}_i}{\partial u_j} + \frac{\partial \mathrm{f}_i}{\partial z}\mathrm{f}_j,\ i, j = 1, \ldots, n-1.$$

6.4. Un cîmp vectorial **X** se numește *biscalar* dacă există două cîmpuri scalare λ și f funcțional independente astfel încît $\mathbf{X} = \lambda \operatorname{grad} \mathrm{f}$. Dacă λ și f sînt funcțional dependente, atunci cîmpul $\mathbf{X} = \lambda \operatorname{grad} \mathrm{f}$ este un *cîmp potențial.*

Discuția precedentă arată că **X** este un cîmp biscalar dacă și numai dacă admite o familie cu un parametru de hipersuprafețe ortogonale liniilor de cîmp.

6.5. Fie $\boldsymbol{D}$ o mulțime deschisă, conexă și simplu conexă din $\boldsymbol{R}^3$ și $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)$ un cîmp vectorial pe $\boldsymbol{D}$ de clasă C^1. O condiție necesară și suficientă ca **X** să fie biscalar, adică ecuația Pfaff $X_1(x, y, z)dx + X_2(x,y,z)dy + X_3(x, y, z)\, dz = 0$ să fie complet integrabilă, este $(X, \operatorname{rot} X) = 0$.

Relația $(\mathbf{X}, \operatorname{rot} \mathbf{X}) = 0$ arată că suprafețele ortogonale liniilor de cîmp ale lui **X** trebuie căutate printre suprfețele integrale ale lui rot **X** *(suprafețe de vîrtej)*. Această observație a sugerat următoarea metodă pentru găsirea soluției unei ecuații Pfaff complet integrabile, în trei variabile: se determină liniile de cîmp ale lui rot **X** *(linii de vîrtej)*, să zicem $\varphi_1(x, y, z) = c_1$, $\varphi_2(x, y, z) = c_2$; se scrie $\mathbf{X} = \alpha \operatorname{grad} \varphi_1 + \beta \operatorname{grad} \varphi_2$, $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$, ceea ce permite transcrierea ecuației Pfaff sub forma $\alpha d\varphi_1 + \beta\, d\varphi_2 = 0$, unde $\frac{\alpha}{\beta} = E(\varphi_1, \varphi_2)$, bineînțeles pentru $\beta \neq 0$; rezultă soluția generală $\Phi(\varphi_1, \varphi_2) = c$, aceasta nefiind altceva decît familia suprafețelor ortogonale liniilor de cîmp ale lui $\mathbf{X}$. Cînd este cazul, din identitatea $\mathbf{X} = \lambda \operatorname{grad} \Phi$ se găsește λ.

Exerciții și probleme.

1. Să se găsească soluțiile generale ale următoarelor ecuații Pfaff

1) $x_1(x_1^2 + x_2^2 - a^2)\,\mathrm{d}x_1 + x_2(x_1^2 + x_2^2 + a^2)\,\mathrm{d}x_2 = 0,\ (x_1, x_2) \in \boldsymbol{R}^2$

2) $\left(2x_1x_2 + x_1^2x_2 + \dfrac{x_2^3}{3}\right)\mathrm{d}x_1 + \left(x_1^2 + x_1x_2^2 + \dfrac{x_1^3}{3}\right)\mathrm{d}x_2 = 0,\ (x_1, x_2) \in \boldsymbol{R}^2$

3) $(\mathrm{e}^{x_1x_2} + 1)\,\mathrm{d}x_1 + \dfrac{x_1x_2 - 1}{x_2^2}\,\mathrm{e}^{x_1x_2}\,\mathrm{d}x_2 = 0,\ (x_1, x_2) \in \boldsymbol{R}^2 - Ox_2$

4) $(1 + \sin x_1)\,\mathrm{d}x_1 + (2 + \sin x_2)\,\mathrm{d}x_2 + \ldots + (n + \sin x_n)\,\mathrm{d}x_n = 0,$
$(x_1, \ldots, x_n) \in \boldsymbol{R}^n$

5) $\Sigma x_2x_3x_4(2x_1 + x_2 + x_3 + x_4)\,\mathrm{d}x_1 = 0,\ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \boldsymbol{R}^4$

6) $x_1(x_2 - 1)(x_3 - 1)\,\mathrm{d}x_1 + x_2(x_3 - 1)(x_1 - 1)\,\mathrm{d}x_2 +$
$+ x_3(x_1 - 1)(x_2 - 1)\,\mathrm{d}x_3 = 0,\ x_i > 1$

7) $(2x_2 - 3x_2)\,\mathrm{d}x_1 + (x_3 - 2x_1)\,\mathrm{d}x_2 + (3x_1 - x_2)\,\mathrm{d}x_3 = 0,\ 2x_1 > x_3$

8) $\mathrm{d}x_3 = \dfrac{x_3 + a}{x_1}\,\mathrm{d}x_1 + \dfrac{x_3 + a}{x_2}\,\mathrm{d}x_2,\ a = \text{const},\ x_1 > 0,\ x_2 > 0,\ x_3 + a > 0$

9) $2x_1x_3\,\mathrm{d}x_1 + 2x_2x_3\,\mathrm{d}x_2 + (x_3^2 - x_2^2 - x_1^2)\,\mathrm{d}x_3 = 0,\ x_3 > 0$

10) $(x_3^2 - x_3 \sin x_2) \cos x_1 \sin x_2\,\mathrm{d}x_1 + (x_3^2 + x_3 \sin x_1) \sin x_1 \cdot \cos x_2\,\mathrm{d}x_2 +$
$+ (\sin x_1 + \sin x_2) \sin x_1 \sin x_2\,\mathrm{d}x_3 = 0,\ x_1, x_2 \in (0, \pi),\ x_3 > 0.$

Soluție. 1) Notăm $X_1(x_1, x_2) = x_1(x_1^2 + x_2^2 - a^2)$, $X_2(x_1, x_2) = x_2(x_1^2 + x_2^2 + a^2)$. Deoarece

$$\frac{\partial X_1}{\partial x_2}(x) = \frac{\partial X_2}{\partial x_1}(x) = 2x_1x_2, \text{ pentru orice } x \in \boldsymbol{R},$$

există o funcție $\mathrm{f}: \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$ cu proprietatea $\mathrm{df} = X_1\,\mathrm{d}x_1 + X_2\,\mathrm{d}x_2$, anume

$$\mathrm{f}(x) = \int_0^{x_1} t(t^2 + x_2^2 - a^2)\,\mathrm{d}t + \int_0^{x_2} t(0^2 + t^2 + a^2)\,\mathrm{d}t = \frac{x_1^4}{4} +$$
$$+ \frac{x_1^2x_2^2}{2} - \frac{a^2x_1^2}{2} + \frac{x_2^4}{4} + \frac{a^2x_1^2}{2}.$$

Soluția generală este definită prin

$$x_1^4 + x_2^4 + 2x_1^2x_2^2 + 2a^2(x_2^2 - x_1^2) = c.$$

2) Fie $X_1(x_1, x_2) = 2x_1x_2 + x_1^2x_2 + \dfrac{x_2^3}{3}$, $X_2(x_1, x_2) = x_1^2 + x_1x_2^2 + \dfrac{x_1^3}{3}$.

Deoarece

$$\frac{\partial X_1}{\partial x_2}(x) = \frac{\partial X_2}{\partial x_1}(x) = 2x_1 + x_1^2 + x_2^2,$$

rezultă

$$f(x) = \int_{x_{10}}^{x_1}\left(2tx_2 + t^2x_2 + \frac{x_2^3}{3}\right)dt + \int_{x_{20}}^{x_2}\left(x_{10}^2 + x_{10}t^2 + \frac{x_{10}^3}{3}\right)dt =$$

$$= x_1^2x_2 + \frac{x_1^3x_2}{3} + \frac{x_1x_2^3}{3} - c_1.$$

Soluția generală a ecuației propuse este definită prin

$$3x_1x_2(x_1^2 + x_2^2 + 3x_1) = c.$$

3) $f(x) = \int_{x_{10}}^{x_1}(e^{tx_2} + 1)\,dt + \int_{x_{20}}^{x_2}\frac{x_{10}t - 1}{t^2}e^{x_{10}t}\,dt = c.$

4) Din $\omega = (1 + \sin x_1)\,dx_1 + (2 + \sin x_2)\,dx_2 + \ldots + (n + \sin x_n)\,dx_n = d(x_1 + 2x_2 + \ldots + nx_n - \cos x_1 - \cos x_2 - \ldots - \cos x_n)$, rezultă soluția generală,

$$x_1 + 2x_2 + \ldots + nx_n - \cos x_1 - \cos x_2 - \ldots - \cos x_n = c.$$

5) Din $\omega = x_2x_3x_4(2x_1 + x_2 + x_3 + x_4)\,dx_1 + x_1x_2x_4(x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4)\,dx_2 + x_1x_2x_4(x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4)\,dx_3 + x_1x_2x_3\cdot(x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4)\,dx_4 = d(x_1x_2x_3x_4(x_1 + x_2 + x_3 + x_4))$, rezultă soluția generală definită prin $x_1x_2x_3x_4(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) = c$.

6) Mulțimea $\boldsymbol{D} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \boldsymbol{R}^3 \mid x_1 > 1, x_2 > 1, x_3 > 1\}$ este deschisă, conexă și simplu conexă.

Fie ω 1-forma diferențială definită de expresia din partea stîngă. Se constată că $d\omega = (x_1 - 1)(x_3 - x_2)\,dx_2 \wedge dx_3 + (x_2 - 1)(x_1 - x_3)\,dx_3 \wedge dx_1 + (x_3 - 1)(x_2 - x)\,dx_1 \wedge dx_2$ și $\omega \wedge d\omega = 0$. De aceea ecuația propusă este complet integrabilă.

Se observă că

$$\frac{1}{(x_1 - 1)(x_2 - 1)(x_3 - 1)}\,\omega = \left(1 + \frac{1}{x_1 - 1}\right)dx_1 + \left(1 + \frac{1}{x_2 - 1}\right)dx_2 +$$

$$+\left(1 + \frac{1}{x_3 - 1}\right)dx_3 = d[x_1 + x_2 + x_3 + \ln(x_1 - 1)(x_2 - 1)(x_3 - 1)].$$

Soluția generală este definită prin

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ln(x_1 - 1)(x_2 - 1)(x_3 - 1) = c,\ (x_1, x_2, x_3) \in \boldsymbol{D}.$$

7) Notînd prin $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)$ cîmpul vectorial de coordonate $X_1(x) = 2x_2 - 3x_3$, $X_2(x) = x_3 - 2x_1$, $X_3(x) = 3x_1 - x_2$ se verifică relația $(\mathbf{X}, \text{rot}\,\mathbf{X}) = 0$, adică ecuația este complet integrabilă.

Determinăm integralele prime ale sistemului liniilor de vîrtej,

$$\frac{dx_1}{-2} = \frac{dx_2}{-6} = \frac{dx_3}{-4}.$$

Rezultă

$$\varphi_1(x_1, x_2, x_3) = 3x_1 - x_2,\quad \varphi_2(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 - x_3.$$

Scriem $\mathbf{X} = \alpha\,\text{grad}\,\varphi_1 + \beta\,\text{grad}\,\varphi_2$ și prin identificare obținem

$$\alpha(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 - x_3,\quad \beta(x_1, x_2, x_3) = x_2 - 3x_1.$$

Ecuația Pfaff devine

$$(2x_1 - x_3)\,\mathrm{d}(3x_1 - x_2) + (x_2 - 3x_1)\,\mathrm{d}(2x_2 - x_3) = 0$$

sau

$$\mathrm{d}\,\frac{3x_1 - x_2}{2x_1 - x_3} = 0.$$

Soluția generală a ecuației inițiale este definită de

$$\frac{3x_1 - x_2}{2x_1 - x_3} = c,$$

adică este reprezentată de un fascicul de plane.

8) Ecuația dată este echivalentă cu sistemul

$$\frac{\partial x_3}{\partial x_1} = \frac{x_3 + a}{x_1}, \quad \frac{\partial x_3}{\partial x_2} = \frac{x_3 + a}{x_2}, \quad x_1 > 0,\ x_2 > 0,\ x_3 + a > 0.$$

Acesta este complet integrabil deoarece

$$\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{x_3 + a}{x_1}\right) + \frac{x_3 + a}{x_2}\,\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{x_3 + a}{x_1}\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_1}\,\frac{x_3 + a}{x_2} + \frac{x_3 + a}{x_1}\,\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{x_3 + a}{x_1}\right).$$

Pentru prima ecuație a sistemului cu derivate parțiale asociem ecuația

$$\frac{\mathrm{d}x_3}{x_3 + a} = \frac{\mathrm{d}x_1}{x_1}$$

cu soluția $x_3 + a = x_1\varphi(x_2)$. Înlocuind în a doua ecuație a sistemului găsim

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\varphi} = \frac{\mathrm{d}x_2}{x_2},$$

adică $\varphi(x) = cx_2$. Rezultă că soluția generală a ecuației inițiale este definită prin

$$x_3 + a = cx_1x_2,\ x_1,\ x_2,\ x_3 + a > 0.$$

9) Ecuația complet integrabilă cu soluția generală definită prin

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = cx_3,\ x_3 > 0.$$

10) Soluția generală, $x_3 + \sin\, x_1 + \sin\, x_2 = cx_3 \sin\, x_1 \sin\, x_2$, $x_1,\ x_2 \in (0, \pi)$ $x_3 > 0$.

2. Să se determine factorul integrant necesar pentru ca ecuațiile Pfaff de mai jos să devină ecuații diferențiale exacte și să se determine soluțiile generale ale acestor ecuații.

1) $\sum\left[\dfrac{\ln\,(x_1x_2x_3)}{x_1 + x_2 + x_3} + \dfrac{1}{x_1}\right]\mathrm{d}x_1 = 0,\ x_1,\ x_2,\ x_3 > 0$

2) $2x_1(x_2^2 + x_3^2)\,\mathrm{d}x_1 - 2x_1^2x_2\mathrm{d}x_2 - 2x_1^2x_3\mathrm{d}x_3 = 0,\ (x_1,\ x_2,\ x_3) \in \mathbf{R}^3 - \{(0, 0, 0)\}.$

3) $[2x_1 + x_2x_3x_4(x_1^2 + x_2^2)]\,\mathrm{d}x_1 + [2x_2 + x_1x_3x_4(x_1^2 + x_2^2)]\,\mathrm{d}x_2 +$
$$+ x_1x_2x_4(x_1^2 + x_2^2)\,\mathrm{d}x_3 + x_1x_2x_3(x_1^2 + x_2^2)\,\mathrm{d}x_4 = 0,\ x\in \boldsymbol{R}^4.$$

Soluție. 1) Notînd

$$X_i(x) = \frac{\ln(x_1x_2x_3)}{x_1 + x_2 + x_3} + \frac{1}{x_i}$$

deducem

$$\frac{\partial X_i}{\partial x_j}(x) \neq \frac{\partial X_j}{\partial x_i}(x),\ i\neq j.$$

Să găsim o funcție $\mu: (0, \infty)^3 \to \boldsymbol{R}$ de clasă C^1 astfel încît

$$\frac{\partial(\mu X_i)}{\partial x_j} = \frac{\partial(\mu X_j)}{\partial x_i},\ i \neq j.$$

Acest sistem admite soluția particulară $\mu(x) = x_1 + x_2 + x_3$. De aceea ecuația

$$(x_1 + x_2 + x_3)\sum\left[\frac{\ln(x_1x_2x_3)}{x_1 + x_2 + x_3} + \frac{1}{x_1}\right]\mathrm{d}x_1 = 0$$

este exactă. Se găsește soluția generală, $(x_1 + x_2 + x_3)\ln(x_1x_2x_3) = c$.

2) Pentru determinarea lui μ se obține sistemul

$$x_2\frac{\partial\mu}{\partial x_3} = x_3\frac{\partial\mu}{\partial x_2},\quad (x_2^2 + x_3^2)\frac{\partial\mu}{\partial x_2} + x_1x_2\frac{\partial\mu}{\partial x_1} = -4x_2\mu,$$

$$(x_2^2 + x_3^2)\frac{\partial\mu}{\partial x_3} + x_1x_3\frac{\partial\mu}{\partial x_1} = -4x_3\mu,$$

care conduce la ecuația

$$x_1\frac{\partial\mu}{\partial x_1} + \frac{x_2^2 + x_3^2}{x_2}\frac{\partial\mu}{\partial x_2} = -4\mu$$

cu soluția particulară $\mu(x) = \dfrac{1}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^2}$.

Amplificînd prin μ se găsește o ecuație diferențială exactă cu soluția generală definită prin $x_1^2 = c(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$.

3) $\mu(x) = \mathrm{e}^{x_1x_2x_3x_4}$, $(x_1^2 + x_2^2)\,\mathrm{e}^{x_1x_2x_3x_4} = c$.

3. Fie cîmpul vectorial $\vec{X} = [(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{r}]\times\vec{r}$, unde $\vec{a}$, $\vec{b}$ sînt cîmpuri paralele, $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, $(\vec{a}, \vec{r}) > 0$, $(\vec{b}, \vec{r}) > 0$, $(\vec{a}\times\vec{b}, \vec{r}) > 0$.

1) Să se determine liniile de cîmp ale lui $\vec{X}$ și suprafața de cîmp care se sprijină pe curba $(\vec{a}, \vec{r}) = 1$, $(\vec{b}, \vec{r})\,r^2 = 1$, unde $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

2) Să se determine suprafețele de vîrtej ale lui $\vec{X}$ și să se arate că sînt ortogonale pe suprafețele de cîmp ale lui $\vec{X}$.

3) Să se arate că $\vec{X}$ și rot $\vec{X}$ sînt cîmpuri biscalare.

Soluție. 1) Liniile de cîmp sînt date de ecuația vectorială

$$\{[(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{r}]\times\vec{r}\}\times d\vec{r} = \vec{r}((\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{r}, d\vec{r}) - (\vec{r}, d\vec{r})[(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{r}] = \vec{0}.$$

Deoarece $\vec{r}$ și $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{r}$ sînt presupuse cîmpuri independente, rezultă $(\vec{r}, d\vec{r}) = 0$, $((\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{r}, d\vec{r}) = 0$ sau $(\vec{a}, \vec{r})(\vec{b}, d\vec{r}) - (\vec{b}, \vec{r})(\vec{a}, d\vec{r}) = 0$. Prin integrare obținem ecuațiile liniilor de cîmp, $r^2 = c_1$, $(\vec{a}, \vec{r}) = c_2(b, \vec{r})$.

Condiția de compatibilitate a sistemului $r^2 = c_1$, $(\vec{a}, \vec{r}) = c_2(\vec{b}, \vec{r})$, $(\vec{a}, \vec{r}) = 1$, $(\vec{b}, \vec{r})\, r^2\ 1$ este $c_1 = c_2$. Rezultă suprafața de cîmp $r^2(\vec{b}, \vec{r}) = (\vec{a}, \vec{r})$.

2) Suprafețele de vîrtej ale lui $\vec{X}$ sînt suprafețele de cîmp ale lui rot $\vec{X}$. Acestea sînt generate de liniile de cîmp ale lui rot $\vec{X}$.

Găsim rot $\vec{X} = 3(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{r}$. Ecuația vectorială $[(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{r}]\times d\vec{r} = \vec{0}$, împreună cu ipoteza că $\vec{r}$ și $\vec{a}\times\vec{b}$ nu sînt coliniare, implică $((\vec{a}\times\vec{b}), d\vec{r}) = \vec{0}$, $(\vec{r}, d\vec{r}) = 0$, adică $(\vec{a}\times\vec{b}, \vec{r}) = c_1$, $r^2 = c_2$. Suprafețele de vîrtej sînt definite prin $\Phi((\vec{a}\times\vec{b}, \vec{r}), r^2) = 0$.

Deoarece $(\vec{X}, \text{rot}\,\vec{X}) = 0$, suprafețele de cîmp ale lui $\vec{X}$ sînt ortogonale pe suprafețele de vîrtej ale lui $\vec{X}$.

3) Relația $(\vec{X}, \text{rot}\,\vec{X}) = 0$ arată că $\vec{X}$ este biscalar. Ecuația Pfaff $(\vec{X}, d\vec{r}) = 0$ are soluția $\dfrac{r}{(\vec{a}\times b, \vec{r})} = c$. Rezultă

$$\vec{X} = r(\vec{a}\times\vec{b}, \vec{r})^2 \text{ grad } \frac{r}{(\vec{a}\times\vec{b}, \vec{r})}.$$

Se constată că $(\text{rot}\,\vec{X}, \text{rot rot}\,\vec{X}) = -9(\vec{a}\times\vec{b}, (\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{r}) = 0$. Deci rot $\vec{X}$ este biscalar. Ecuația Pfaff $(\text{rot}\,\vec{X}, d\vec{r}) = 0$ are soluția $\dfrac{(\vec{b}, \vec{r})}{(\vec{a}, \vec{r})} = c$. Găsim

$$\text{rot}\,\vec{X} = 3(\vec{a}, \vec{r}) \text{ grad } \frac{(\vec{b}, \vec{r})}{(\vec{a}, \vec{r})}.$$

4. Se dau cîmpurile vectoriale

1) $\vec{X}(x, y, z) = z(1 - e^y)\,\vec{i} + xze^y\,\vec{j} + x(1 - e^y)\,\vec{k}$, $z > 0$

2) $\vec{X}(x, y, z) = x^2yz\vec{i} + xy^2z\vec{j} + xyz^2\vec{k}$, $x, y, z > 0$

3) $\vec{X}(\vec{r}) = 2(\vec{a}, \vec{r})\,\vec{a} + 2(b\times\vec{r})\,\vec{b} - \dfrac{(\vec{a}, \vec{r})^2 + (\vec{b}, \vec{r})^2}{(\vec{a}, \vec{b}\times\vec{r})}(\vec{a}, \vec{b})$, $(\vec{a}, \vec{b}\times\vec{r}) > 0$.

Să se arate că $\vec{X}$ este un cîmp biscalar și să se determine funcțiile λ și f astfel încît $\vec{X} = \lambda$ grad f.

R. 1) $\vec{X}(x, y, z) = -x^2z^2 \text{ grad } \dfrac{1 - e^y}{xz}$.

2) $\vec{X}(x, y, z) = \dfrac{xyz}{2} \cdot \text{grad}\,(x^2 + y^2 + z^2)$.

3) $\vec{X}(\vec{r}) = (\vec{a}\times\vec{b}, \vec{r})$ grad $\dfrac{(\vec{a}, \vec{r})^2 + (\vec{b}, \vec{r})^2}{(\vec{a}\times\vec{b}, \vec{r}}$.

5. Să se determine liniile de cîmp pentru $\vec{X} = y\vec{i} + z\vec{j} + x\vec{k}$, $(x, y, z)\neq \neq (0, 0, 0)$, și să se pună în evidență două suprafețe neolonome care determină aceste curbe.

Soluție. Sistemul cu coeficienți constanți

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = z, \quad \frac{dz}{dt} = x$$

are soluția generală

$$x = c\,e^t + e^{-\frac{t}{2}}\left(c_2 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + c_3 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right),$$

$$y = c_1 e^t + e^{-\frac{t}{2}}\left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2}c_2 - 1/2c_2\right)\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}c_2 - 1/2c_3\right)\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right],$$

$$z = c_1 e^t + e^{-\frac{t}{2}}\left[-1/2c_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}c_2 - c_3\right)\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right].$$

Forma simetrică

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{z} = \frac{dz}{x}$$

implică $zdx - ydy = 0$, $xdy - zdz = 0$. Aceste două ecuații Pfaff reprezintă respectiv suprafețe neolonome întrucît nu sînt complet integrabile.

Evident, prin liniile de cîmp trec și varietăți olonome;

$$\overset{x^2-yz}{\frac{dx}{y}} = \overset{y^2-zx}{\frac{dy}{z}} = \overset{z^2-xy}{\frac{dz}{x}} = \frac{(x^2 - yz)\,dx + (y^2 - zx)\,dy + (z^2 - xy)\,dz}{0}$$

implică $d(x^3 + y^3 + z^3 - xyz) = 0$ și deci $x^3 + y^3 + z^3 - xyz = c_1$.

Observații. Avem

$$\overset{z^2-xy}{\frac{dx}{y}} = \overset{x^2-yz}{\frac{dy}{z}} = \overset{y^2-xz}{\frac{dz}{x}} = \frac{(z^2 - xy)\,dx + (x^2 - yz)\,dy + (y^2 - zx)\,dz}{0}.$$

Cu toate acestea expresia $(z^2 - xy)\,dx + (x^2 - yz)\,dy + (y^2 - zx)\,dz$ nu este o combinație integrabilă deoarece rot $[(z^2 - xy)\vec{i} + (x^2 - yz)\vec{j} + (y^2 - zx)\vec{k}] = 3\vec{X}\neq\vec{0}$. Există însă un factor integrant pentru ecuația $(z^2 - xy)\,dx + (x^2 - yz)\,dy + (y^2 - zx)\,dz = 0$, dar dificultatea determinării efective a acestuia este echivalentă cu dificultatea de a găsi combinații integrabile pentru sistemul simetric.

6. Pe o subvarietate tridimensională se consideră 1-formele diferențiale

1) $\omega = (2x_1 + x_2x_3)\,dx_1 + (2x_2 + x_1x_3)\,dx_2 + (2x_3 + x_1x_2 - 1)\,dx_3$,
$2x_1 + x_2x_3 > 0$.

2) $\omega = x_3(x_2 + x_3)\,dx_1 - x_1x_3\,dx_2 + x_1x_2\,dx_3$.

3) $\omega = 2(x_2 + x_3)\,\mathrm{d}x_1 + (x_1 + 3x_2 + 3x_3)\,\mathrm{d}x_2 + (x_1 - x_2)\,\mathrm{d}x_3,$

$4x_2 + 5x_3 < 0.$

Să se reducă la forma canonică.

Soluție. 1) Deoarece $\mathrm{d}\omega = 0$ și domeniul este simplu conex, există o funcție diferențiabilă f cu proprietatea $\mathrm{d}f = \omega$ și anume

$$f(x_1, x_2, x_3) = \int_{x_{10}}^{x_1} (2x_1 + x_2x_3)\,\mathrm{d}x_1 + \int_{x_{20}}^{x_2} (2x_2 + x_{10}x_3)\,\mathrm{d}x_2 +$$

$$+ \int_{x_{30}}^{x_3} (2x_3 + x_{10}x_{20} - 1)\,\mathrm{d}x_3 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2x_3 + c.$$

Considerăm transformarea

$$\begin{cases} x_1^1 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2x_3 \\ x_2^1 = x_2 \\ x_3^1 = x_3 \end{cases}, \quad \frac{\mathrm{D}(x_1^1, x_2^1, x_3^1)}{\mathrm{D}(x_1, x_2, x_3)} = 2x_1 + x_2x_3 > 0.$$

Ținînd seama de relațiile (notații adecvate!)

$$\omega_i = \sum_{i'=1}^{3} \omega_t \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}$$

rezultă $\omega_{1'} = 1$, $\omega_{2'} = 0$, $\omega_{3'} = 0$.

2) Deoarece $\omega \wedge \mathrm{d}\omega = 0$, ecuația $\omega = 0$ este complet integrabilă. În acest caz există o transformare de coordonate astfel încît

$$\sum_{i=1}^{3} \omega_i \frac{\partial x^i}{\partial x^{3'}} = \omega_{3'} = 0, \quad \sum_{i=1}^{3} \omega_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial x^{3'}} = 0,$$

unde ω_{ij} sînt funcțiile coordonate ale lui $\mathrm{d}\omega$.

3) Se constată că $\omega \wedge \mathrm{d}\omega = (-4x_2 - 5x_3)\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3$ și deci ecuația $\omega = 0$ nu este complet integrabilă. În acest caz există o transformare de coordonate astfel încît

$$\sum_{i=1}^{3} \omega_i \frac{\partial x^i}{\partial x^{3'}} = \text{const}, \quad \sum_{i=1}^{3} \omega_{ij'} \frac{\partial x^i}{\partial x^{3'}} = 0.$$

Bibliografie

1. **J. Acher, J. Gardelle,** *Algèbre linéaire et programmation linéaire,* Dunod, Paris, 1970.
2. **T. M. Apostol,** *Calculus,* vol. II, Blaisdell Publishing Company, 1969.
3. **V. I. Arnold,** *Ecuaţii diferenţiale ordinare,* Editura ştiinţifică şi enciclopedică, Bucureşti, 1978.
4. **N. Barhvalov,** *Methodes numeriques,* Editions Mir, Moscou, 1976.
5. **C. Bănică, O. Stănăşilă,** *Metode algebrice în teoria globală a spaţiilor complexe,* Editura Academiei R.S.R., Bucureşti, 1974.
6. **M. Bercovici, S. Rimer, A. Triandaf,** *Culegere de probleme de geometrie analitică şi diferenţială,* E.D.P., Bucureşti, 1973.
7. **M. Berger, B. Gostiaux,** *Géométrie différentielle,* Armand Colin, Paris, 1972.
8. **V. Boju, M. Popescu,** *Probleme de geometria varietăţilor diferenţiabile,* Editura tehnică Bucureşti, 1978.
9. **Gh. Buzdugan, A. Beleş, C. Mitescu, R. Voinea, A. Petre, M. Blumemfeld, I. Constantinescu** *Culegere de probleme de rezistenţa materialelor,* E.D.P., Bucureşti, 1975.
10. **R. M. Bowen, C. C. Wang,** *Introduction to vectors and tensors,* vol. 1, 2, Plenum Press, New York, London, 1976.
11. **M. Craioveanu, I. D. Albu,** *Introducere algebrică în geometrie, sub forma unor exerciţii,* Litografia Universităţii Timişoara, 1976.
12. **M. Craiu, M. Roşculeţ,** *Ecuaţii diferenţiale aplicative,* E.D.P. Bucureşti, 1971; *Culegere de probleme de analiză matematică,* E.D.P. Bucureşti, 1976.
13. **I. Creangă, C. Reischer,** *Algebră liniară,* E.D.P., 1970.
14. **V. Cruceanu,** *Elemente de algebră liniară şi geometrie,* E.D.P., 1973.
15. **Şt. Dincă, R. Urseanu,** *Probleme rezolvate de matematici speciale,* Litografie I.P. B. 1977.
16. **Gh. Dodescu, M. Toma,** *Metode de calcul numeric,* E.D.P. Bucureşti, 1976.
17. **P. Dragomir, A. Dragomir,** *Structuri algebrice,* Editura Facla, 1975.
18. **N. Efimov,** *Formes quadratiques et matrices,* Editions Mir, Moscou, 1976.
19. **D. Fadeev et I. Sominski,** *Recueil d'exercices d'algèbre supérieure,* Editions Mir, Moscou, 1970.
20. **A. Philippov,** *Recueil de problèmes d'équations différentielles,* Editions Mir Moscou, 1976.
21. **D. Flondor, N. Donciu,** *Algebră şi analiză matematică,* E.D.P., vol. I şi II, 1979.
22. **Gh. Galbură, F. Rado,** *Geometrie,* E.D.P., 1979.
23. **Noël Gastinel,** *Linear numerical analysis,* Academic Press, 1970.
24. **Gh. Gheorghiev, V. Oproiu,** *Varietăţi diferenţiabile finit şi infinit dimensionale,* Editura Academiei R.S.R., 1976.
25. **Gh. Th. Gheorghiu,** *Algebră liniară, geometrie analitică şi diferenţială şi programare,* E.D.P., 1977.
26. **E. Grecu,** *Culegere de probleme de algebră liniară, geometrie şi programare liniară,* Litografia I.P.B., 1979.
27. **A. Halanay,** *Ecuaţii diferenţiale,* E.D.P., 1972.
28. **A. S. Houschalder,** *Theory of matrices in numerical analyses,* New York, Blaisdel, 1964.
29. **S. Ianuş,** *Capitole speciale de teoria relativităţii generale,* Litografia Univ. Bucureşti, 1975.
30. **M. Ikramov,** *Recueil de problèmes d'algèbre linéaire,* Editions Mir, Moscou, 1977.

31. N. **Jacobson**, *Lectures in abstract algebra*, II. *Linear algebra*, Springer-Verlag, 1975.
32. M. **Jurchescu**, *Introducere în analiza pe varietăți*, Litografia Univ. București, 1980.
33. D. **Klétěnik**, *Problèmes de géométrie analitique*, Editions Mir, Moscou, 1969.
34. N. V. **Kopchenova**, I. **Maron**, *Computational mathematics*, Editions Mir, Moscou, 1975.
35. R. S. **Ledley**, *Programarea și utilizarea calculatoarelor numerice*, Ed. tehnică, Buc., 1968.
36. J. E. **Lelong**, J. M. **Arnaudiès**, *Equations différentielles intégrales multiples. Fonctions holomorphes*, Dunod, Paris, 1974.
37. O. **Mălăncioiu**, *Integrale multiple*. Culegere de probleme. Litografia I.P. B. 1975.
38. N. **Mihăileanu**, *Geometrie analitică, proiectivă și diferențială*, E.D.P., 1972.
39. C. **Mihu**, *Metode numerice în algebra liniară*, Editura tehnică, București, 1977.
40. R. **Miron**, *Geometria analitică*, E.D.P., 1976; *Introducere în geometria diferențială*, Litografia Universității Iași, 1971.
41. I. **Morris**, W. **Hirsch**, S. **Smale**, *Diferențial equations, dynamical sistems and linear algebra*, Academic Press, 1974.
42. E. **Murgulescu**, N. **Donciu**, *Culegere de probleme de geometrie analitică și diferențială*, E.D.P., 1971.
43. E. **Murgulescu**, N. **Donciu**, V. **Popescu**, *Geometrie analitică în spațiu și geometrie diferențială. Culegere de probleme*, E.D.P., 1973.
44. P. S. **Modenov**, A. S. **Parhomenko**, *Sbornik zadaci po analiticeskoi gheometrii*, Moskva, 1976.
45. V. **Olariu**, *Analiză matematică și matematici speciale*, Litografia I.P.B., 1979.
46. B. **O'Neill**, *Elementary differential geometry*, Academic Press, 1970.
47. D. I. **Papuc**, A. C. **Albu**, *Elemente de geometrie diferențială globală*, E.D.P., 1973.
48. D. **Pedoe**, *A geometric introduction to linear algebra*, New York Wiley, 1963.
49. I. **Pop**, *Varietăți diferențiabile. Culegere de probleme*, Litografia Univ. Iași, 1975.
50. L. S. **Pontriaghin**, *Obîkovenie diferentialnîe urovnenie*, Nauka, 1974.
51. I. P. **Popescu**, *Lecții de geometrie diferențială*, Litografia Univ. Timișoara, 1973.
52. I. P. **Popescu**, *Elemente de geometrie analitică*, Litografia Univ. Timișoara, I, 1978; II, 1979.
53. C. **Radu**, *Algebră și geometrie*, Litografia I.P.B., 1976.
54. C. **Radu**, E. **Cioară**, *Programarea în FØRTRAN, metode numerice de calcul*, Litografia I.P.B. 1979.
55. M. **Sarian**, E. **Caragheorghe**, D. D. **Boiangiu**, D. **Voiculescu**, L. **Ghermănescu-Ionescu**, N. **Enescu**, St. **Staicu**, E. **Hașeganu-Zamfirescu**, D. **Rugescu**, D. **Coman**, *Probleme de mecanică pentru ingineri și subingineri*, E.D.P., București, 1975.
56. L. **Smith**, *Linear algebra*, Springer-Verlag, 1978.
57. C. **Teleman**, *Geometria diferențială locală și globală*, Editura tehnică, 1974.
58. I. D. **Teodorescu**, St. D. **Teodorescu**, *Culegere de probleme de geometrie superioară*, E.D.P. 1975.
59. J. A. **Thorpe**, *Elementary Topics in differential geometry*, Springer-Verlag, 1979.
60. C. **Udriște**, *Probleme de algebră liniară, geometrie analitică și diferențială*, E.D.P., 1976.
61. C. **Udriște**, *Curbe și suprafețe*, Litografia I.P.B., 1975.
62. C. **Udriște**, *Analiză matematică*, Litografia I.P.B., 1975.
63. C. **Udriște**, C. **Bucur**, *Probleme de matematici și observații metodologice*, Editura Facla, Timișoara, 1980.
64. C. **Udriște**, E. **Tănăsescu**, *Minime și maxime ale funcțiilor reale de variabile reale*, Editura tehnică, București, 1980.
65. C. **Udriște**, C. **Radu**, C. **Dicu**, O. **Mălăncioiu**, *Algebră, geometrie și ecuații diferențiale*, E.D.P.
66. V. **Vladimirov** et **Coll.** *Recueil de problèmes d'équations de physique mathématique*, Editions Mir, Moscou, 1976.
67. V. **Voievodine**, *Algèbre linéaire*, Editions Mir, Moscou, 1976.
68. Gh. Gh. **Vrânceanu**, G. **Mărgulescu**, *Geometrie analitică*, E.D.P., 1973.
69. **Tôhoku Math. J**, **Kōdai Math.** *Sem. Rep.*, *J. Math. Soc. Japan*, *Tensor*, *The Amer. Math. Monthly*, colecțiile 1970 – 1980.

Plan editură Nr. 9059.
Coli de tipar: 20,50.
Bun de tipar; noiembrie 1981.

Tiparul executat sub comanda
nr. 264 la
Întreprinderea poligrafică
„13 Decembrie 1918",
str. Grigore Alexandrescu nr.89—97
București
Republica Socialistă România