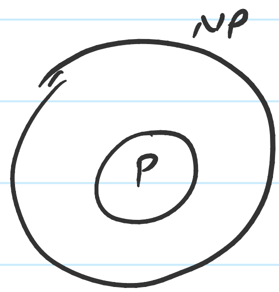
CURS #7

Tuesday, November 15, 2022 1:48 PM

Google classroom: jyc6xvl

$P \neq NP$

$\{A \mid A \in \bigcup_{k \geq 1} DTIME(n^k) : k > 0\}$



NP nondeterministic polynomial time

Def $A \in NP \iff \exists\, \rho(\cdot,\cdot)$ calculabil în timp polinomial a.î.

$$x \in A \iff \exists\, y \in \{0,1\}^{p(|x|)} \text{ a.î. } \rho(x,y) = 1$$

martor pt x

Exp. (1) Sudoku x = tablă parțial completată
y = tablă completată

(2) SAT x = Formulă logică $\phi(x_1 \ldots x_n)$
$y = y_1 \ldots y_n \in \{0,1\}^n$

(3) TSP

(4) Colorarea unui graf

$x = (G, k)$

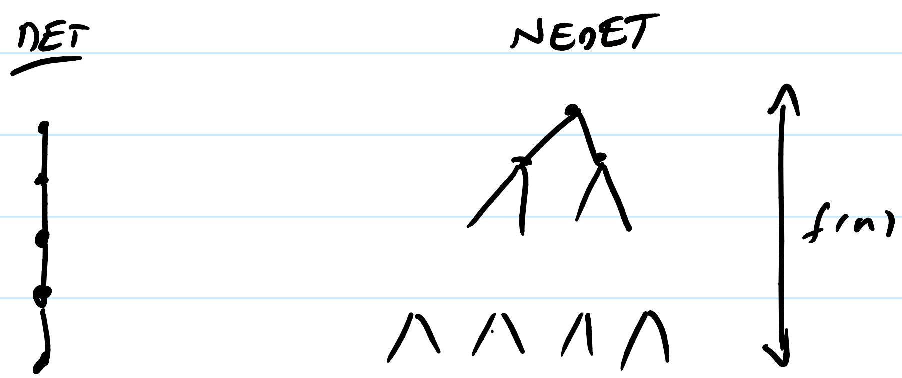
$y \in \{1, \dots k\}^n$

(5) Composites $= \{ x \in \{0,1\}^* \mid \exists\, y, z \neq 1$ a.î. $x = y \cdot z \}$

NP nondeterministic

Def Mașină Turing nedeterministă

$$|\delta(s,a)| \geq 2$$



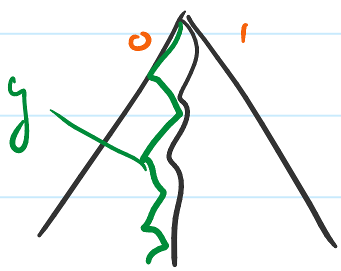
$A \in NTIME(f(n)) \iff$ există o M.T. nedeterministă M

$M(x)$ face $O(f(|x|))$ pași

$M(x)$ face $O(f(|x|))$ paşi

a.î. $M = L(M)$

Ⓣ $NP = \bigcup_{k \geq 1} NTIME\{n^k\}$



Dem

$\underbrace{\text{şir de alegeri nedeterministe}}_{\text{certificat}}$

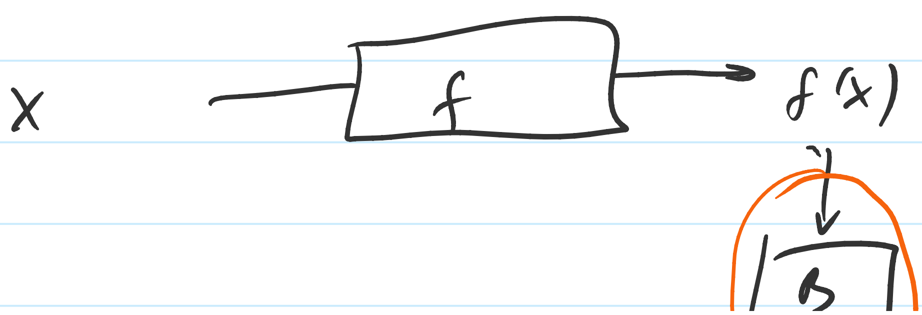
⊠

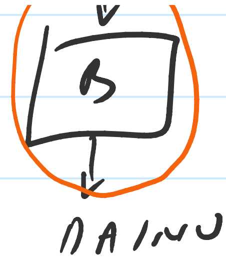
Se crede $P \neq NP$ (1 milion de \$, premiul Clay)

Def $A \leq_m^p B$ $\exists\, f: \Sigma^* \to \Sigma^*$ calculabilă în timp polinomial

a.î. $\forall x \in \Sigma^*$

$x \in A \iff f(x) \in B$





Exp. Col. grafurilor $\le_m^P$ SAT

$$(G, k) \longrightarrow \phi_{G,k}$$

$$x_{v,i} = \begin{cases} \text{TRUE} & c(v) = i \\ \text{FALSE} & \text{altfel} \end{cases}$$

$\phi_{G,k}$:

$$x_{v,1} \vee x_{v,2} \vee \dots \vee x_{v,k} \quad (\forall v \in V)$$

$$\bar{x}_{v,i} \vee \bar{x}_{v,j} \quad \forall v \in V,\ \forall 1 \le i < j \le k$$

$e = (v, w) \in E$

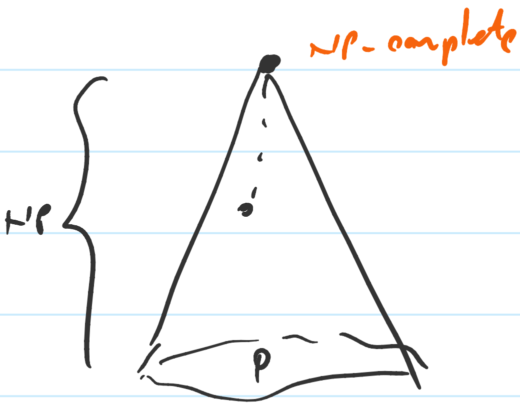
$$\bar{x}_{v,1} \vee \bar{x}_{w,1}$$
$$\vdots$$
$$\bar{x}_{v,k} \vee \bar{x}_{w,k}$$

Def A se numește NP-hard

$$\forall B \in NP \quad B \le_m^P A$$

A se numește NP-completă

$A \in NP$ și $\forall B \in NP \quad B \leq_m^P A$



(T) SAT este NP-completă
(COOK - LEVIN)
TORONTO
BOSTON UNIV.

Consecință $P = NP \Leftrightarrow$ SAT are alg. polinomiali

Schiță de demonstrație

Fie M o mașină Turing nedet. care pe intrarea x face $\leq p(|x|)$ pași face $\le p(|x|)$ pași

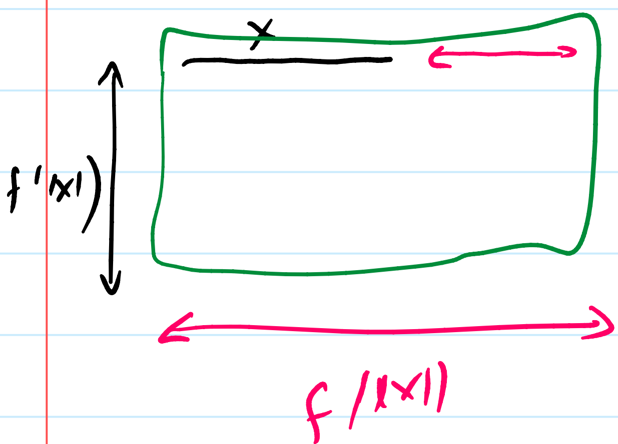
Vream

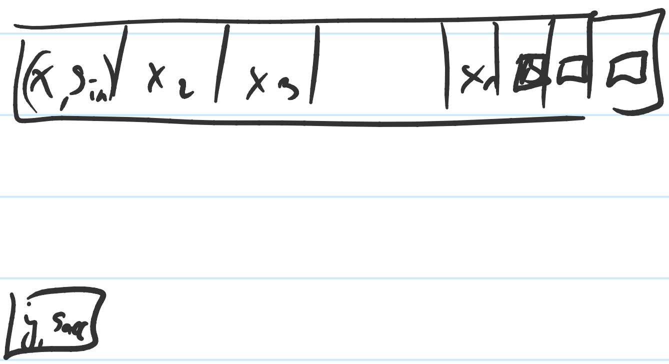
$L(M) \le_m^p SAT$

$x \in \Sigma^* \longrightarrow \phi_{f(x)}$ formulă logică

a.i.

$M(x)$ acceptă $\Longleftrightarrow \phi_{f(x)}$ satisfiabilă





Pp M dacă acceptă atunci capul ei e pe prima poziție

$x \in L(M) \Longleftrightarrow \exists\, T_x$ a.i.

(1) T pe prima linie codifică M(x) în starea inițială

(2) T pe ultima linie codifică M(x) acceptat

(3) T pe linii consecutive codifică o mișcare legală a lui M conform lui δ_M

Vrem formula logică $\Phi_{f(x)}$

care traduce existența lui T_X

în logică

$$\Phi_{f(x)} = \Phi^{(1)}_{f(x)} \wedge \Phi^{(2)}_{f(x)} \wedge \Phi^{(3)}_{f(x)}$$

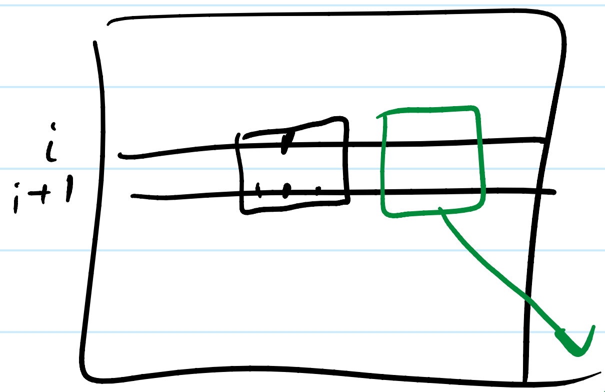
$$\Phi^{1}_{f(x)} = \bigwedge \underbrace{\Phi_{f(x),i}}_{\text{căsuța } i \text{ de pe linia 1.}} \to k \text{ variabile separate}$$

$\boxed{}$ $\leq 2^k$ $\Phi_{f(x),i}(\underbrace{y_1, y_2, \ldots y_k}_{\text{biții codificării}})$

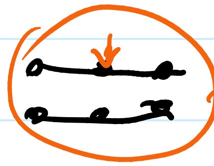
$\Phi_{f(x),1}$ $\boxed{\begin{matrix} x_1 \\ \text{simt} \end{matrix}}$ $\{\bar{y}_1 \wedge \ldots \wedge \bar{y}_k\}$

0..0

$$\Phi^{3}_{f(x)} = \bigwedge \underbrace{\Phi^{(3)}_{f(x),i}}_{\text{căsuța } i}$$



ψ_i $\qquad$ $C_i \xrightarrow{\delta} C_{i+1}$



formula

$\underline{\underline{c = d}}$

$$\left(\wedge \quad \_ \quad - \right) = \oint^{(2)}_{f(x)}$$