Broscoţeanu Daria-Mihaela
Grupa 143

Parțial LMC

I

1. Să se demonstreze că, dacă o funcție între două poseturi finite păstrează relația de succesiune, atunci acea funcție este morfism de poseturi.

Fie $(P, \leq)$ și $(Q, \leq)$ două poseturi

Relația de demonstrat devine:

Fie $f : P \to Q$

f păstrează relația de succesiune ddacă pt $\forall\, x, y \in P$,

$x \prec y$ implică $f(x) \prec f(y)$

$\prec = \{(x, y) \mid x, y \in P,\ x < y,\ (\nexists\, a \in P)\ (x < a < y)\}$

$x \prec y \Rightarrow x < y$ și $\nexists\, a \in P$ a.î. $x < a < y$

$f(x) \prec f(y) \Rightarrow f(x) < f(y)$ și $\nexists\, b \in Q$ a.î. $f(x) < b < f(y)$

f păstrează relația de succesiune $\Rightarrow \begin{cases} x < y \\ f(x) < f(y) \end{cases}$

$\Rightarrow f$ este funcție crescătoare (care păstrează ordinea)

$\Rightarrow f$ este morfism de poseturi

2. Să se dea un exemplu între două poseturi care păstrează relația de succesiune, dar nu este morfism de poseturi.

Fie posetul $(\mathbb{R}, \leq)$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , x \in \{-1, 1\} \\ x & , \text{altfel} \end{cases}$$

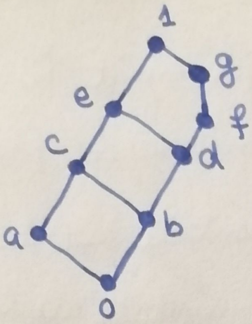
$\mathbb{R}$ este densă raportat la ordinea "$\leq$" (i.e. $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ $\exists x \in \mathbb{R}$ a.î. $a < x < b$) și păstrează succesiunea ($\prec = \emptyset$)

f morfism de poseturi dacă pt $x, y \in \mathbb{R}$, $x \leq y$ avem $f(x) \leq f(y)$

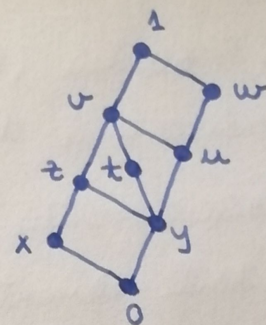
$$\left.\begin{array}{l} \text{dar } f(-1) = 1 \\ \quad f(0) = 0 \\ \text{și } -1 \leq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 1 \leq 0 \text{ ⨳}$$

$\Rightarrow$ f nu e morfism de poseturi.

II



$(A, \leq)$

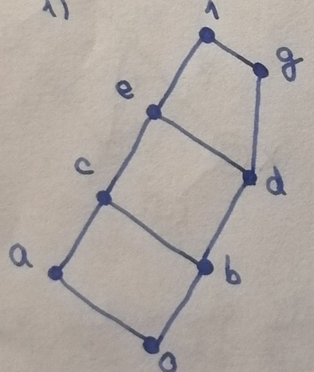


$(B, \leq)$

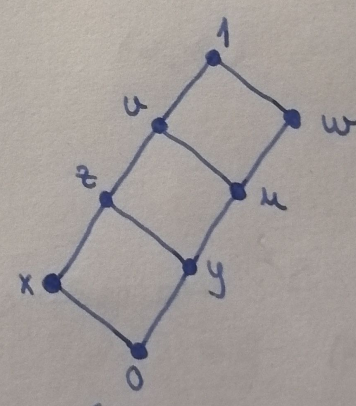
1. Să se determine toate sublaticile mărginite de cardinal maxim L ale lui $(A, \leq)$ și M ale lui $(B, \leq)$ astfel încât L este distributivă și izomorfă cu M.

O latice L este distributivă ddacă nu are nicio sublatice izomorfă cu diamantul sau cu pentagonul.

1)

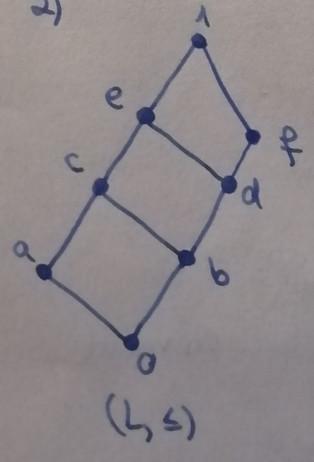


$(L, \leq)$

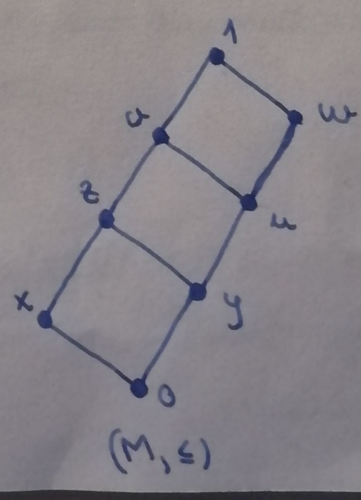


$(M, \leq)$

2)



$(L, \leq)$

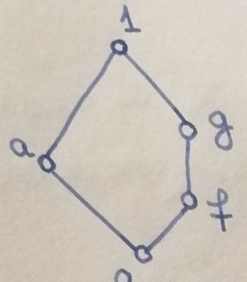


$(M, \leq)$

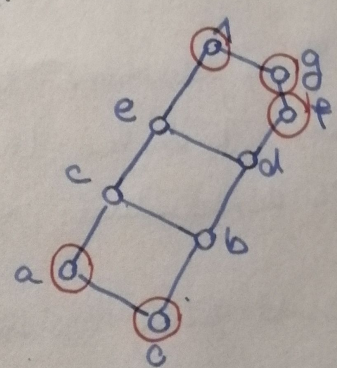
2. Să se determine toate sublaticile mărginite de cardinal minim R ale lui $(A, \leq)$ și S ale lui $(B, \leq)$ astfel încât R este izomorfă cu S și are loc măcar una dintre următoarele proprietăți:

- R conține toate elementele complementate ale lui $(A, \leq)$
- S conține toate elementele complementate ale lui $(B, \leq)$

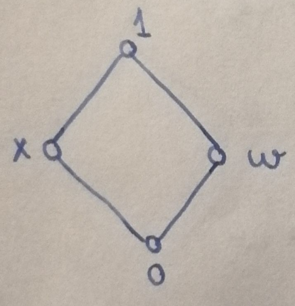
Pentru $(A, \leq)$ avem sublaticea:



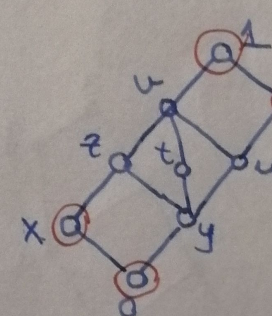
$(R, \leq)$



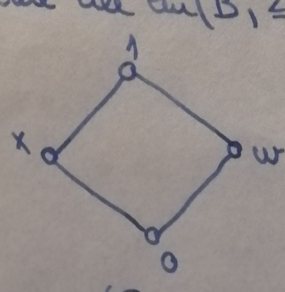
Pentru $(B, \leq)$ avem sublaticea:



$(S, \leq)$



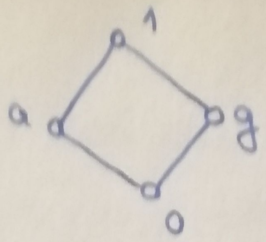
1) Fixeăm S care conține toate elementele complementate ale lui $(B, \leq)$



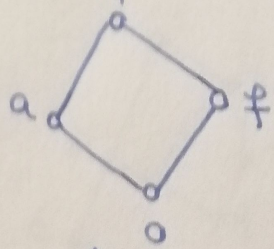
$(S, \leq)$

R izomorfă cu S $\Rightarrow |R| = |S| = 4$

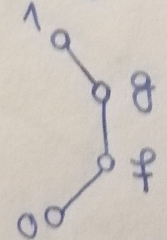
$\Rightarrow$ din R trebuie eliminat un element a)



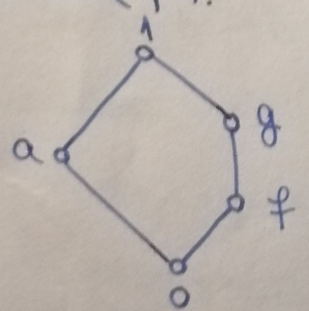
b)



c)



2) Fixăm R care conține toate elementele complementate ale lui $(A, \leq)$.



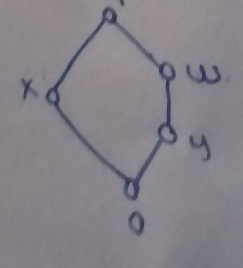
$(R, \leq)$

R izomorfă cu S $\Rightarrow |R| = |S| = 5$

$\Rightarrow$ în S trebuie adăugat un element.

- dacă adaug un elem din mulțimea $\{z, v, t, y, u\}$ nu mai sunt izomorfe

de exemplu: adaug y.



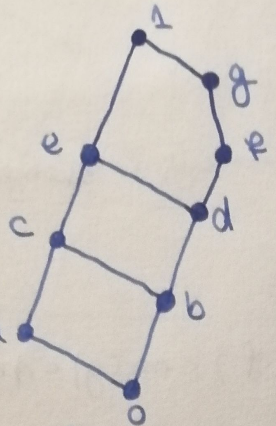
$x \wedge y = 0$

$x \vee y = z \notin \{0, x, y, w, 1\}$

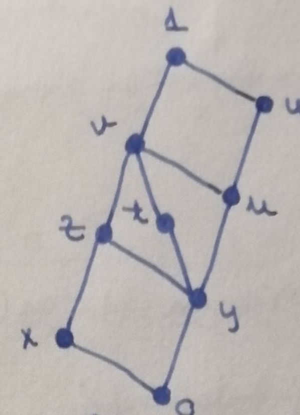
$\Rightarrow$ nu e sublatice.

III

1. Să se determine toate funcțiile de la posetul $(A, \le)$ la posetul B care păstrează relația de succesiune.



$(A, \le)$



$(B, \le)$

Fie $m : A \to B$ funcție care păstrează relația de succesiune.

$\Rightarrow x, y \in A, x < y$ $\nexists\, a \in A$ a.i. $x < a < y$ avem:

$m(x) < m(y)$ și $\nexists\, b \in B$ a.i. $m(x) < B < m(y)$ (relația 1)

Conform figurii avem:

$$\begin{cases} 0 < a < c < e < 1 \overset{1}{\Rightarrow} \\ 0 < b < d < f < g < 1 \overset{1}{\Rightarrow} \end{cases} \begin{cases} m(0) < m(a) < m(c) < m(e) < m(1) \\ m(0) < m(b) < m(d) < m(f) < m(g) < m(1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m(0) < m(a) < m(c) < m(e) < m(1) \\ m(0) < m(b) < m(d) < m(f) < m(g) < m(1) \end{cases}$$

Nu se găsește un lanț de 6 elemente din B care să îndeplinească relația!

element 0 < element 1 < element 2 < element 3 < element 4 < element 5

=> Relația

$$m(0) < m(b) < m(d) < m(f) < m(g) < m(1)$$

nu poate fi îndeplinită

=> $\nexists$ funcții de la posetul $(A, \leq)$ la posetul $(B, \leq)$ care păstrează relația de succesiune.

III

2. Să se determine toate morfismele de latici mărginite de la $(A, \le)$ la $(B, \le)$.

$$\Rightarrow \begin{cases} f(0) = 0 \\ f(1) = 1 \end{cases}$$

$a \wedge b = 0$
$a \vee b = c$

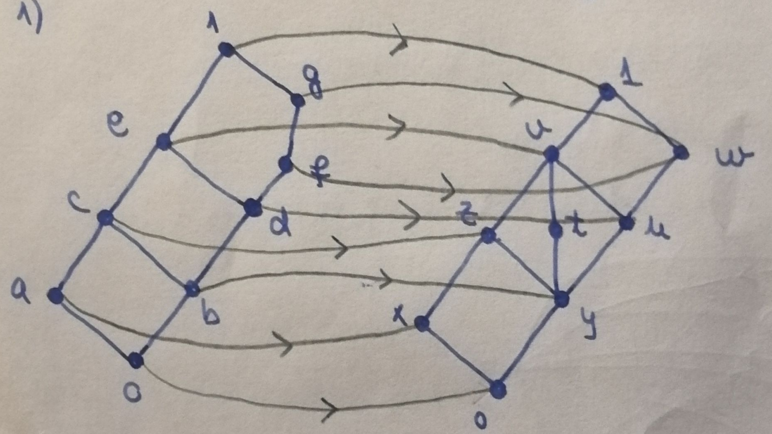
$c \wedge d = b$
$c \vee d = e$

$e \wedge f = d$
$e \vee f = 1$

$e \vee g = d$
$e \wedge g = 1$

$g \wedge f = f$
$g \vee f = g$

1)



	0	a	b	c	d	e	f	g	1
	0	x	y	z	u	v	w	w	1

$f_1(c \wedge d) = f_1(c) \wedge f_1(d) = f_1(b)$

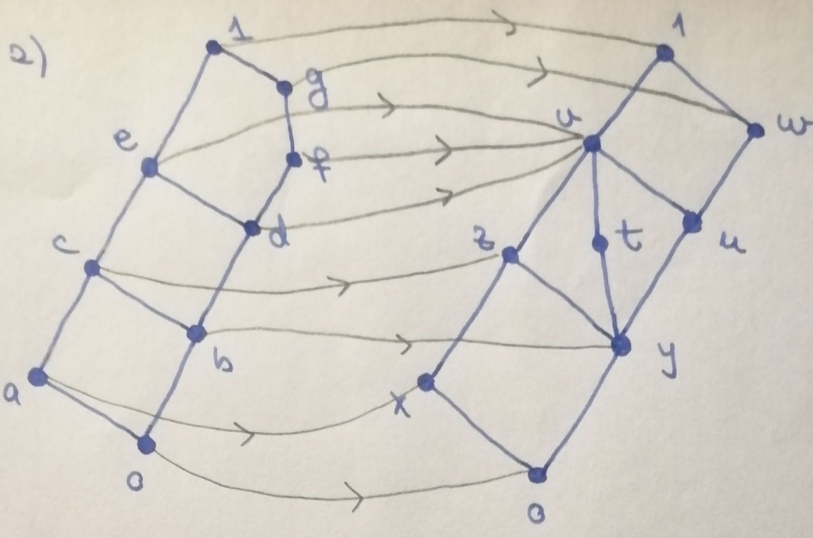
$z \wedge f_1(d) = y \Rightarrow d \in \{u, \cancel{t}, v, w\}$

$f_1(c \vee d) = f_1(c) \vee f_1(d) = f_1(e) = z \vee u = v$

$f_1(e \vee g) = f_1(1) \Rightarrow f_1(e) \vee f_1(g) = 1 \Rightarrow v \vee f_1(g) = 1$

$f_1(e \vee f) = f_1(1) = f_1(e) \vee f_1(f) \Rightarrow v \vee f_1(f)$

2)



	0	a	b	c	d	e	f	g	1
	0	x	y	z	v	v	v	w	1

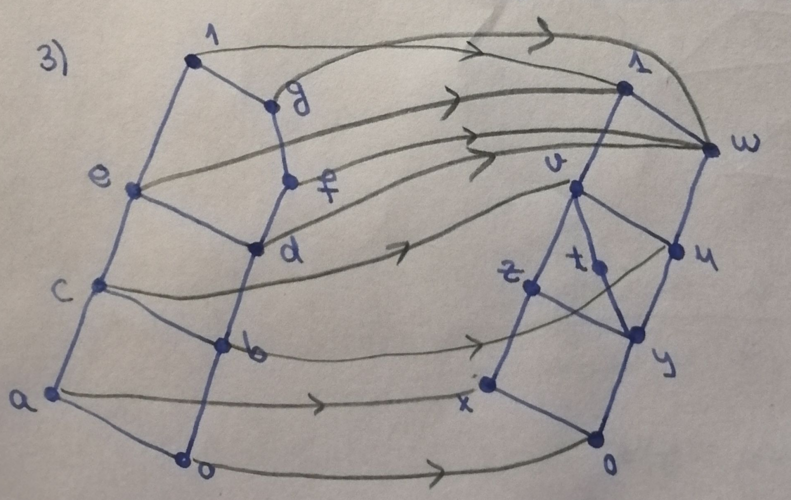
$f_1(c \vee d) = f_1(e) \Rightarrow f_1(c) \vee f_1(d) = f_1(e) \Rightarrow z \vee v = v = f_1(e)$

$f_1(e \wedge f) = f_1(e) \wedge f_1(f) = v \wedge f_1(f) = v$

$f_1(e \wedge g) = f_1(d) \Rightarrow v \wedge f_1(g) = v$

$f_1(g \vee e) = 1 \Rightarrow f_1(g) \vee f_1(e) = 1 \Rightarrow f_1(g) \vee v = 1$

3)



	0	a	b	c	d	e	f	g	1
	0	x	u	v	w	1	w	w	1

$f_1(c) \wedge f_1(d) = f_1(b) \Rightarrow u = v \wedge f_1(d)$

$f_1(c) \vee f_1(d) = f_1(e) \Rightarrow v \vee w = f_1(e) = 1$

$f_1(e) \wedge f_1(f) = f_1(d) \Leftrightarrow 1 \wedge f_1(f) = w.$

$f_1(e) \wedge f_1(g) = f_1(d) \Rightarrow 1 \wedge f_1(g) = w$