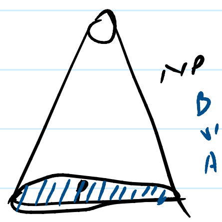
CURS #9

Tuesday, November 29, 2022 2:00 PM

Demonstrații de NP-completitudine



$A \le_m^P B$

Lemma $A \in P$, $\Rightarrow \forall B \ (\in NP)$, $B \ne \emptyset, \Sigma^*$,
$A \le_m^P B$

Dem Fie M o m.T. polinomială care decide pb. A.

$f : x \longrightarrow f(x)$ a.î.

$\boxed{x \in A \Leftrightarrow f(x) \in B}$

Fie $x_0 \in B$
$x_1 \notin B$

Alg pt funcția f:

INPUT x

rulez $M(x)$ — $x \in A$

Dacă $M(x) = 1 \Rightarrow$ return x_0

Altfel return x_1

$x \notin A$

$x \in A \Rightarrow f(x) = x_0 \in B$

$x \notin A \Rightarrow f(x) = x_1 \notin B$

NP-complete A s.n. NPC $\Leftrightarrow$ (a) $A \in NP$
(b) $\forall B \in NP$
$B \le_m^P A$

Lemma A, B sunt NPC $\Rightarrow A \le_m^P B$ și $B \le_m^P A$

Def $A \equiv_m^P B \Leftrightarrow A \le_m^P B$ și $B \le_m^P A$

(T) Fie A o problemă NPC. Atunci

$P = NP \iff$ A are alg. polinomial.

(T) SAT este NPC.

(T) Problema INDEPENDENT SET este NP-completă

Se dă: G graf

$k \geq 1$

Se cere: Are G o mulțime S de vârfuri

$|S| = k$

a.î. $\forall (v_1, v_2) \in E$ $v_1 \notin S$ sau $v_2 \notin S$

Obs.

Alg. complexitate $O(n^k)$ Trecere toate $S \subseteq V$

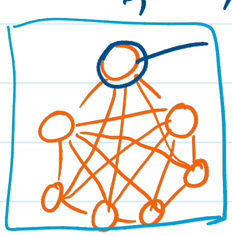
$|S| = k$

Dem. $3\text{-SAT} \leq_m^P IS$

$\phi \longrightarrow G_\phi, k_\phi$

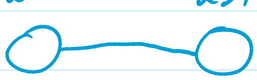
$x \vee y \vee z$

7 soluții



$\phi = C_1 \wedge C_2 \dots \wedge C_m$

$\alpha = 0$ $\alpha = 1$



corespund la soluții incompatibile

$f : \phi \longrightarrow (G_\phi, k_\phi)$

$\hookrightarrow m$ (pt fiecare gadget vreau să pot alege un IS din gadget)

$L > m$ (pt fiecare gadget vreau să pot alege un vf din gadget)

<u>Claim</u> ϕ satisfiabilă $\Leftrightarrow$ În G_ϕ există un IS cu k_ϕ vârfuri

$\Rightarrow$) Pp ϕ satisfiabilă

$\exists\ A : V \to \{0,1\}$

a.î. $A \models \phi$

Să găsesc $k_\phi = m$ vârfuri independente în G_ϕ

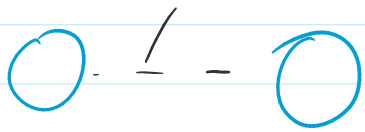
$A \models C_1 \Rightarrow \exists\ v_1$ în gadget-ul G_1 care corespunde lui A

$A \models C_m \Rightarrow \exists\ v_m$ în gadget-ul G_m care corespunde lui A

S

Arăt că S este IS

nu am muchie din definiție lui G_ϕ



$\alpha = A(\alpha)$ $\quad\quad$ $\alpha = A(\alpha)$

S este IS în G_ϕ

$|S| = m = k_\phi$

$\Leftarrow$) Pp G_ϕ are un IS S $|S| = m$

S are exact 1 vf în fiecare gadget.

<u>Vreau</u> A sol. pt ϕ

$\boxed{x \in Var(\phi) \quad A(x) = ?}$

$x \in Var(\phi) \Rightarrow \exists C_i \ni x$

$v_i \to \alpha_i$ pt x

$x \in Var(\phi) \Rightarrow \exists C_i \ni x$

$v_i \to \alpha_i$ pt x

$\boxed{A(x) = \alpha_i}$

Bine definită pt că vf din S nu se contrazic asupra valorii lui $A(x)$

$\boxtimes$

CLIQUE Se dă (G, k)

Vrem să decid: $\exists\ S \subseteq V \quad |S| = k$

a.î. $\forall\, x, y \in S$

$(x, y) \in E$

clică = vf conectate între ele

(T) CLIQUE este NP-completă

Dem: CLIQUE $\in$ NP

$IS \le_m^P$ CLIQUE

CLIQUE $\in$ NP (G, k) witness

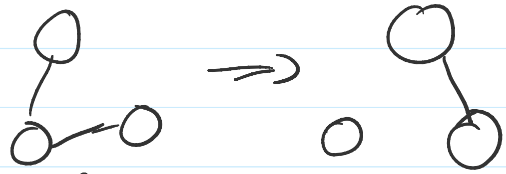
$y_1 \dots y_n \in \{0,1\}^n$

$$y_i = \begin{cases} 1 & v_i \in S \\ 0 & \text{altfel} \end{cases}$$

a.î. $y_i = 1 \quad y_j = 1 \Rightarrow (v_i, v_j) \in E$

$IS \le_m^P CLIQUE$

$(G, k) \longrightarrow (G', k')$



$k' = k$

$G' =$ complementul lui G

S este IS în $G \iff S$ este IS în G'

$\boxtimes$

Def. Vertex cover

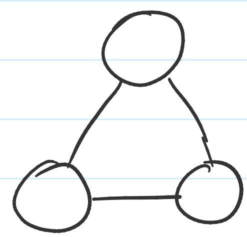
Se dă: (G, k)

Vrem: $S \subseteq V$

$|S| = k$

a.î. $\forall (v_1, v_2) \in E(G)$

$v_1 \in S$ sau $v_2 \in S$



$|S| \le 2 \Rightarrow$ DA

$|S| = 1 \Rightarrow$ NU

(T) VC este NP-complete

$VC \in NP$ la fel

$IS \le_m^P VC$ $\qquad (G, k) \longrightarrow (G', k')$

$G' = G$

$k' = n - k$

$S \subseteq V$ este IS în G

$\Updownarrow$

$V \setminus S$ este VC în $G' = G$

"In practică" $A \in NP \to A \in P$ sau A este NP-complete

Contraexemple — Ignorăm finalul a 2 grafuri

T (Ladner) $P \neq NP \Rightarrow \exists A \in NP$

- A nu este NP-completă
- $A \notin P$

Pt problema satisfiabilității

T (SCHAEFER, 1977)

SAT (S) — 3-SAT

$$S = \left\{ \begin{array}{l} x \vee y \vee z,\ x \vee y \vee \bar{z}, \\ x \vee \bar{y} \vee \bar{z},\ \bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z} \end{array} \right\}$$

Fie S o mulțime de constrângeri

$S = \{C_1, C_2 \ldots C_m\}$

- $C_1, C_2 \ldots C_m$ satisfăcute de $0 \ldots 0$ $(1, 1, \ldots 1)$

$\Downarrow$

SAT (S) **Da** $\Rightarrow$ SAT (S) $\in P$

- $C_1, \ldots C_m$ $C_i \equiv \phi_i \in$ 2-SAT

$\boxed{SAT(S) \in P}$

- $C_1 \ldots C_m$ $C_i \equiv \phi_i \in$ HORN

$\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z}$

$\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z} \vee t$

$\boxed{SAT(S) \in P}$

- $C_i \equiv \phi_i \in$ Neg-HORN ≤ 1 var. negative

$\boxed{SAT(S) \in P}$

- $C_1 \dots C_m$ $\quad C_i \equiv \phi_i \quad \phi_i$ sistem ec. liniare peste $\mathbb{Z}_2$

$\boxed{SAT(S) \in P}$

- In toate celelalte cazuri $\boxed{SAT(S) \text{ este NP-completă}}$

$\boxed{\text{UNDE SUNT INSTANȚELE CELE MAI GRELE PT'O PB. NP-completă?}}$

3-SAT NP-completă $\Rightarrow$ există formule de tip 3-SAT care sunt "dificile"

$$\phi \Rightarrow \phi_1 = \phi \wedge C$$

ϕ_1 "mai puțin satisfiabilă" decât ϕ

$\boxed{\phi_1 \in SAT \Rightarrow \phi \in SAT}$

Generăm formule aleatoare de tip 3-SAT

$$C = \frac{\# \text{clauze}}{\# \text{variabile}}$$

$(n, c) \Longrightarrow \phi$ la întâmplare cu n variabile și $c \cdot n$ clauze

$x \vee y \vee z$

$\bar{x} \vee y \vee z$

$\vdots$

alegem la întâmplare $c \cdot n$ clauze

$[\quad]$ $C \cdot M$

$8\binom{n}{3}$ clauze de lungime 3 peste n variabile.

$$\boxed{Pr\{\phi \in SAT\} = ?}$$

Când $c \nearrow$ $\quad Pr\{\phi \in SAT\} \searrow$

INTUIȚIE

Multe pb. NP-complete au "tranziții de fază"

Cele mai grele cazuri ale unei pb. NP-complete sunt în jurul tr. de fază

Există tr. de fază fără pb. dificile

Exp 1-in-3 SAT

1-in-3 SAT este NP-completă

"În medie"

1-IN-3 SAT este polinomială