Curs 10

REAMINTESC

Teorema fundamentală de izom. Fie $f: G \to G'$ un morfism de grupuri. Atunci există un izomorfism între grupurile $G/_{\ker f}$ și $\operatorname{Im} f$, mai precis $\bar{f}: G/_{\ker f} \xrightarrow{\sim} \operatorname{Im} f$ $\bar{f}(\hat{x}) = f(x)$ $(\forall)\, x \in G$.

Aplicații ① Fie morfismul de grupuri $f: (\underbrace{\mathbb{R},+}_{G}) \to (\underbrace{\mathbb{C}^*,\cdot}_{G'})$,

$f(\alpha) = \cos(2\pi\alpha) + i\sin(2\pi\alpha)$ $(\forall)\,\alpha \in \mathbb{R}$. Să se arate că

$\operatorname{Im} f = U = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$, $\ker f = \mathbb{Z}$ și $(\mathbb{R}/_{\mathbb{Z}}, +) \simeq (U, \cdot)$.

$f: (\mathbb{R},+) \to (\mathbb{C}^*,\cdot)$ morf. de grupuri (1) $(\Leftarrow f(\alpha+\beta) = f(\alpha)\cdot f(\beta)$ $(\forall)\,\alpha,\beta \in \mathbb{R})$

$f(\alpha) = \cos(2\pi\alpha) + i\sin(2\pi\alpha)$ $\operatorname{Im} f = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} = U$ (2)

$z = \underbrace{|z|}_{1}(\cos\theta + i\sin\theta)$, $\theta \in [0, 2\pi)$

$\theta = 2\pi\alpha$ cu $\alpha = \frac{\theta}{2\pi} \in \mathbb{R}$

$\ker(f) = \{\alpha \in \mathbb{R} \mid f(\alpha) = 1\}$

def. nucleului

$\rightsquigarrow \cos(2\pi\alpha) + i\sin(2\pi\alpha) = 1 + i\cdot 0$

$\rightsquigarrow \begin{cases} \cos(2\pi\alpha) = 1 \\ \sin(2\pi\alpha) = 0 \end{cases} \rightsquigarrow 2\pi\alpha \in \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

$\Downarrow$

$\alpha \in \mathbb{Z} \Rightarrow$

$\Rightarrow \ker(f) \subseteq \mathbb{Z}$

Dc. $\alpha = k \in \mathbb{Z}$ $f(\alpha) = f(k) = \cos(2k\pi) + i\sin(2k\pi) \underset{k\in\mathbb{Z}}{=} 1 + i\cdot 0 = 1 \Rightarrow \mathbb{Z} \subseteq \ker(f)$

$\Rightarrow \boxed{\ker(f) = \mathbb{Z}}$ (3)

Din (1), (2) și (3) $\xrightarrow{T.F.I}$ $\mathbb{R}/_{\mathbb{Z}} \simeq U$ ∎

Exc ② Arătați că grupul $(\mathbb{C}^*/_U, \cdot)$ este izomorf cu grupul $(\mathbb{R}^*_+, \cdot)$.

③ Arătați că grupul $(\mathbb{C}^*/_{\mathbb{R}^*_+}, \cdot)$ este izomorf cu grupul $(U, \cdot)$.

Temă

Ce e de făcut? $\rightarrow$ Ar trebui găsit un morf.

$f: G \to G'$ morf. gr. $G/_{\ker f} \simeq \operatorname{Im} f$

$\mathbb{C}^*/_U \simeq \mathbb{R}^*_+$

$f: (\mathbb{C}^*, \cdot) \to (\mathbb{R}^*_+, \cdot)$ $\underline{f \text{ surj}}$ $(\Leftrightarrow \operatorname{Im} f = \mathbb{R}^*_+)$

a.î. $\ker f = U$

$f(z) = |z| \geq 0$

$z \in \mathbb{C}^* \Rightarrow |z| > 0$

f surj.

$f(z_1 \cdot z_2) = |z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| = f(z_1) f(z_2) \Rightarrow f$ morf. de gr.

$\mathrm{Ker} f = \{ z \in \mathbb{C}^* \mid f(z) = 1 \} = \{ z \in \mathbb{C}^* \mid |z| = 1 \} = U$. Aplic T.F.I. ☒

Teorema de str. a grupurilor ciclice Orice grup ciclic infinit este izomorf cu $(\mathbb{Z},+)$ și orice grup ciclic finit (cu n elemente) este izomorf cu $(\mathbb{Z}_n,+)$.

Dem $(G,\cdot) \to$ grup ciclic $\Rightarrow (\exists)\, x \in G$ a.î. $G = \langle x \rangle \overset{\text{C8?}}{=} \{ x^k \mid k \in \mathbb{Z} \}$

Definesc $f : (\mathbb{Z},+) \to (G,\cdot)$ $\quad f(k) = x^k \ (\forall)\, k \in \mathbb{Z}$ (f e evid. surj)

E f morfism? DA $\leftarrow f(k+l) = x^{k+l} = x^k \cdot x^l = f(k)\cdot f(l) \ (\forall)\, k,l \in \mathbb{Z}$

f morfism + surj $\xrightarrow{\text{T.F.I}} \mathbb{Z}/_{\mathrm{Ker} f} \simeq \mathrm{Im} f = G \qquad (1)$

f e → injectiv ($\Leftrightarrow \mathrm{Ker} f = \{0\} = 0\mathbb{Z}$) (1) devine $\underbrace{\mathbb{Z}/_{0\mathbb{Z}}}_{\mathbb{Z}=} \simeq G$ (G infinit)

f e → neinjectiv ($\Leftrightarrow \mathrm{Ker} f \neq \{0\}$; $\mathrm{Ker} f \leq \mathbb{Z} \Rightarrow \mathrm{Ker} f = n\mathbb{Z}$, $n \geq 1$)

↳ (1) devine $\underbrace{\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}}_{\mathbb{Z}_n \simeq} \simeq G$ (finit de ordin n)

Grupul $(S_n, \circ)$

Reamintesc: $A \neq \emptyset$ mulțime $\quad S_A = \{ f \mid f : A \to A \ f \text{ bijecție} \}$ $\quad (S_A, \overset{\text{comp. fct.}}{\circ}) \to$ grup

Exc! Dacă A și B sunt 2 mulțimi echipotente atunci grupurile $(S_A,\circ)$ și $(S_B,\circ)$ sunt izomorfe.

↳ Dacă $|A| = n \Rightarrow (S_A,\circ) \simeq (S_n,\circ)$ unde $S_n = \{ f : \{1,2,\ldots,n\} \to \{1,\ldots,n\},\ f \text{ bijecție} \}$

↳ grupul permutărilor de grad n.

Proprietăți ale lui $(S_n,\circ)$
- $|S_n| = n!$
- S_n e grup neabelian $\Leftrightarrow n \geq 3$.

De ce e important $(S_n,\circ)$?

Teorema (Cayley) Orice grup cu n elemente este izomorf cu un subgrup al lui S_n.

Obs Teorema lui Cayley are loc în general pt. orice grup G (nu neapărat finit): Orice grup G este izomorf cu un subgrup al lui S_G

Descrierea lui S_n Pt $\sigma \in S_n \rightsquigarrow \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$

$e \in S_n$ repr. permutarea identică $e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$

pe baza "descompunerii în cicli disjuncți".

Def Un ciclu din S_n este notat printr-un șir de întregi distincți cuprinși între 1 și n și reprezintă elementul din S_n care permută ciclic acești întregi și fixează restul întregilor. Concret, un ciclu se reprezintă astfel: fie $1 \le i_1 \ne i_2 \ne \dots \ne i_k \le n$; ciclul $(i_1, i_2, \dots, i_k)$ este permutarea σ din S_n def. astfel: $\begin{cases} \sigma(i_1) = i_2 \quad \sigma(i_2) = i_3, \dots, \sigma(i_{k-1}) = i_k, \sigma(i_k) = i_1 \\ \sigma(x) = x \quad (\forall)\ x \notin \{i_1, i_2, \dots, i_k\}. \end{cases}$

$(i_1\ i_2 \dots i_k)$

Nr. $\boxed{k}$ s.n. lungimea ciclului.

Exemple ① Ciclul $(1\,3\,2)$ din S_3 reprezintă permutarea $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

② Ciclul $(1\,3\,2)$ din S_8 repr. permutarea: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$.

③ Pt. $\boxed{n \geq 3}$ $\quad (1\,2\,3) = (1\,2) \circ (2\,3) \ne (2\,3) \circ (1\,2) = (1\,3\,2)$. (vezi (g))

$((S_n, \circ)$ nu e abelian pt $n \geq 3)$

Def 1 Ciclii de lungime 2 s.n. transpoziții. Există un singur ciclu de lungime 1, permutarea identică e. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix} = (i)$ $(\forall)\ i = \overline{1,n}$

Def 2 2 cicli $(i_1 i_2 \dots i_k)$ și $(j_1 j_2 \dots j_l)$ s.n. disjuncți dacă $\{i_1, i_2, \dots, i_k\} \cap \{j_1, j_2, \dots, j_l\} = \emptyset$. (Ex: $(1\,2\,7)$ și $(4\,5)$ sunt 2 cicli disjuncți din S_7)

Obs 2 cicli disjuncți comută, i.e. dacă $(i_1 i_2 \dots i_k)$ și $(j_1 j_2 \dots j_l)$ sunt disjuncți atunci $(i_1 i_2 \dots i_k) \circ (j_1 j_2 \dots j_l) = (j_1 \dots j_l) \circ (i_1 \dots i_k)$

Exc!

Teoremă Orice permutare $\sigma \in S_n$ se scrie ca produs de cicli disjuncți, scrierea fiind unică până la ordinea scrierii ciclilor.

Obs Prin abuz de notație (pentru simplificarea notației) vom scrie $(i_1 \dots i_k)(j_1 \dots j_l)$ în loc de $(i_1 \dots i_k) \circ (j_1 \dots j_l)$ și vom spune produs în loc de compunere.

Algoritm de descompunere al unei permutări $\sigma \in S_n$ în produs de cicli disjuncți:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \\ 12 & 13 & 3 & 1 & 11 & 9 & 5 & 10 & 6 & 4 & 7 & 8 & 2 \end{pmatrix} \in S_{13}$$

Pasul 1: pentru a începe un nou ciclu alegem cel mai mic element al lui $\{1, 2, \dots, n\}$ care nu a apărut într-un ciclu anterior; îl notăm cu a (dacă este primul ciclu $a=1$); începem noul ciclu: $(a$.

În exemplul de mai sus avem la început $(1$.

Pasul 2 Scriem $\sigma(a)$ din definiția permutării $\rightarrow$ îl notăm cu b, i.e. $\sigma(a)=b$. Dacă $b=a$, închidem ciclul cu o paranteză rotundă, fără a-l scrie pe b; astfel am scris un ciclu și ne întoarcem la Pasul 1. Dacă $b \neq a$, scriem b lângă a în acest ciclu: $(a\ b$.

În exemplul de mai sus avem: $\sigma(1) = 12 \neq 1$, deci scriem $(1\ 12$.

Pasul 3 Scriem $\sigma(b)$ din definiția permutării σ $\rightarrow$ îl notăm cu c $(\sigma(b)=c)$. Dacă $c=a$, închidem ciclul cu o paranteză rotundă și ne întoarcem la Pasul 1. Dacă $c \neq a$, scriem c după b în acest ciclu: $(a\ b\ c$. Repetăm acest pas folosind c ca noua valoare a lui b până se încheie ciclul.

În exemplul de mai sus avem $\sigma(12) = 8 \neq 1$ $\quad (1\ 12\ 8$.

$\sigma(8) = 10 \neq 1 \quad (1\ 12\ 8\ 10 \qquad \sigma(10) = 4 \neq 1 \quad (1\ 12\ 8\ 10\ 4$.

$\sigma(4) = 1 \implies$ obțin ciclul $(1\ 12\ 8\ 10\ 4)$.

$$\sigma = (1\ 12\ 8\ 10\ 4)(2\ 13)(3)(5\ 11\ 7)(6\ 9).$$

Obs În general, în scrierea ca produs de cicli disjuncți a unei permutări omitem ciclii de lungime 1 (adică permutarea identică). În particular, $\sigma = (1\ 12\ 8\ 10\ 4)(2\ 13)(5\ 11\ 7)(6\ 9)$.

$\sigma \in S_7$ $\quad \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 2 & 4 & 7 & 1 & 5 & 6 \end{pmatrix} = (1\ 3\ 4\ 7\ 6\ 5)\ (2) = (1\,3\,4\,7\,6\,5)$

ciclu de lungime 6.

$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 2 & 1 & 3 & 6 & 7 & 4 \end{pmatrix}$

$\sigma^{-2} = (\sigma^2)^{-1} = (\sigma^{-1}) \circ (\sigma^{-1})$

$\qquad\qquad \| $

$\qquad (\sigma \circ \sigma)^{-1}$

$(1\ 5\ 6\ 7\ 4\ 3)\ (2)$

$1 \to 5 \to 6 \to 7 \to 4 \to 3$

$1 \to 3 \to 4 \to 7 \to 6 \to 5$