

Nume și grupă: _____ Data: 17.05.2024

1. (2.5p) Analizați convexitatea următoarelor funcții:

a) $f(x) = \sum_{i=1}^r |x|_{[i]}$, unde am notat cu $a_{[i]}$ componenta de rang i din a , i.e.

$$a_{[1]} \geq a_{[2]} \geq \dots \geq a_{[n]}.$$

b) $f(x, u, v) = -\log(uv - x^T x)$, unde $\text{dom}(f) = \{(x, u, v) : uv > x^T x\}$

2. (2.5p) Fie problema de minimizare:

$$\min_x -\sum_{i=1}^n \log(1 - x_i^2) - \log(1 - \sum_{i=1}^n x_i).$$

Calculați explicit primul pas al metodei Newton cu pas constant $\alpha = 1$, pornind din $x^0 = [0 \ 0 \ 0]$.

3. (2.5p) Considerați problema de programare pătratică:

$$\begin{aligned} \min_x \quad & \frac{1}{2} x^T H x + q^T x \\ \text{s.l. } & x_i \in [-1, 1], \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

$$\text{unde } H = \begin{bmatrix} 13 & 12 & -2 \\ 12 & 17 & 6 \\ -2 & 6 & 12 \end{bmatrix} \text{ și } q = \begin{bmatrix} -22 \\ -14.5 \\ 13 \end{bmatrix}$$

a) Realizați un pas de Metoda Gradient Proiectat (MGP) pornind din $x^0 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

b) Arătați că $x^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \\ -1 \end{bmatrix}$ este optimul pentru această problemă și măsurați progresul făcut de MGP în x^1 față de x^0 .

4. (2.5p) Considerați următoarea problemă de optimizare:

$$\begin{aligned} \min_x \quad & x_1 + \frac{2}{x_2} \\ \text{s.l. } & -x_2 + 1/2 \leq 0 \\ & -x_1 + x_2^2 \leq 0. \end{aligned}$$

a) Figurați mulțimea fezabilă.

b) Calculați problema duală.

c) Rezolvați folosind condițiile Kuhn-Tucker.