TEHNICI DE OPTIMIZARE
Appendix

Departament Informatică
Universitatea din Bucureşti

Asumăm următorul set de convenţii (prezente şi în cadrul cursului)

- În funcţie de context, simbolul 0 reprezintă valoarea reală nulă sau un tablou (vector) multi-dimensional. E.g. $H \in \mathbb{R}^{m \times m}$, afirmaţia $H = 0$ defineşte elementele matricii H egale cu 0.
- Dacă $u, v \in \mathbb{R}^n$ atunci

$$u < v$$
$$u \leq v$$
$$u = v$$

  denotă

$$u_i < v_i$$
$$u_i \leq v_i$$
$$u_i = v_i$$

  pentru orice $1 \leq i \leq n$.
- Notaţia vectorilor cu literele mici, e.g. v, iar a matricilor cu litere mari, e.g. H.

Vom lucra cu entităţi (vectori şi matrice) construite cu numere reale

- scalar: 1.2
- vector: $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$
- matrice: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

Definiţie. Un vector real x de dimensiune n este o colecţie de n numere reale dispuse ordonat într-o coloană.

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

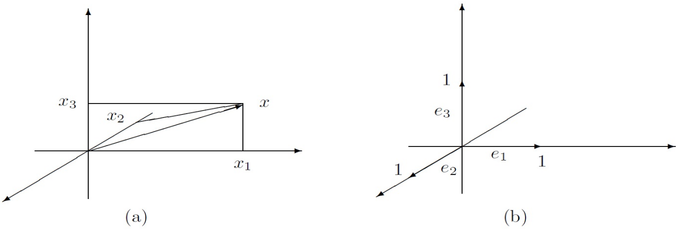


Fig. 1.1: (a) Un vector în $\mathbb{R}^3$ şi coordonatele sale; (b) vectorii unitate în $\mathbb{R}^3$

- Suma: $z = x + y = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{bmatrix}$
- Înmulţire cu un scalar: $z = \alpha x = \begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{bmatrix}$

Fig. 1.2: (a) Suma a doi vectori în $\mathbb{R}^2$; (b) Produsul cu un scalar

Considerând vectorii $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_p\}$, atunci vectorul

$$z = \alpha_1 x_1 + \cdots \alpha_p x_p = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i x_i$$

se numeşte combinaţie liniară a vectorilor din X cu coeficienţii $\alpha_1, \cdots, \alpha_p \in \mathbb{R}$.

Exemplu: $X = \{\begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\}, \alpha = [1\ 1/2]$

$$z = 1 \cdot \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} + 1/2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Produs scalar euclidian: $\langle x, y \rangle = x^T y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$

- dacă x, y au norma unitate atunci $x^T y = \cos(\theta)$, unde θ este unghiul format de x si y
- în felul acesta, capata sensul unei măsuri de similaritate (în opoziţie cu distanţa)

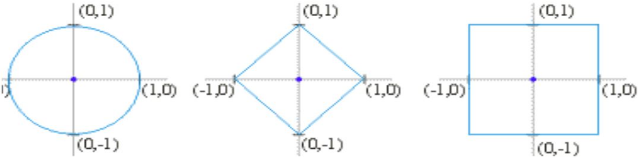
Norme $\|\cdot\|$: funcţii care satisfac următoarele condiţii

- pozitivitate: $\|x\| > 0, \forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$
- omogenitate: $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|, \forall x \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R}$
- inegalitatea triunghiului: $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \forall x, y \in \mathbb{R}^n$

$$Exemple: \|x\|_2 = \sqrt{x^T x}, \ \ \|x\|_p := \left(\sum_i |x_i|^p \right)^{1/p}$$

Norme $\|\cdot\|$: exemple

- norma 2: $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$ (fig. stânga)
- norma 1: $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$ (fig. centru)
- norma ∞: $\|x\|_1 = \max_{1 \le i \le n} |x_i|$ (fig. dreapta)



w3.cs.jmu.edu

O matrice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ reprezintă un tablou bidimensional de numere reale de forma:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

- dacă $m = n$ atunci A este matrice pătrată
- A pătrată $\Rightarrow$ diagonala principală este mulţimea poziţiilor pentru care $i = j$
- $C = A + B \Leftrightarrow c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$
- $C = \alpha A \Leftrightarrow c_{ij} = \alpha a_{ij}$
- Transpusa $B := A^T \Leftrightarrow b_{ij} = a_{ji}$

Alte definiţii:

- Matricea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ este *matrice simetrică* dacă $A = A^T$.
- Matricea simetrică A este *pozitiv semidefinită*, i.e. $A \succeq 0$, dacă unde dintre afirmaţiile de mai jos este adevarată:
  - $\lambda_i(A) \geq 0, \forall i \in \{1, \cdots, n\}$
  - $x^T A x \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$.
- Matricea simetrică A este *pozitiv definită*, i.e. $A \succ 0$, dacă unde dintre afirmaţiile de mai jos este adevarată:
  - $\lambda_i(A) > 0, \forall i \in \{1, \cdots, n\}$
  - $x^T A x \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$.
- Matricea simetrică A este negativ (semi)definită dacă $-A$ este pozitiv (semi)definită.

Exemple matrici pozitiv semidefinite:

- $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
- $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$
- $A = c \cdot c^T$

Exemple matrici pozitiv definite:

- $A = I_n$
- $A = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{bmatrix}$ where $d_i > 0, \forall 1 \leq i \leq n$.
- $A = \alpha I + c \cdot c^T$

Funcţia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ se numeşte funcţie (formă) pătratică dacă: $\exists H \in \mathbb{R}^{n\times n}, q \in \mathbb{R}^n$ astfel încât

$$f(x) := \frac{1}{2}x^T Hx + q^T x + r$$

Exemple:

- $f(x) = ax^2 + bx + r$ funcţie pătratică cu parametrii: $H = 2a, q = b$
- $f(x) = x_1^2 + x_2^2$ funcţie pătratică cu parametrii: $H = 2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, q = 0$
- $f(x) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1x_1 + x_2$ are parametrii: $H = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, q = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$

Funcţia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ se numeşte funcţie (formă) pătratică dacă: $\exists H \in \mathbb{R}^{n \times n}, q \in \mathbb{R}^n$ astfel încât

$$f(x) := \frac{1}{2} x^T H x + q^T x + r$$

Derivatele funcţiei f:

$$\nabla f(x) = Hx + q \qquad \nabla^2 f(x) = H$$

Notaţii

$\mathbb{R}^n$	spaţiul real Euclidian n-dimensional
x_i	componenta i a vectorului $x \in \mathbb{R}^n$
$\mathbb{R}^n_+$	Cadranul $n-$dimensional ne-negativ din R^n.$R^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0\}$.
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	produsul scalar: $\langle x, y \rangle = x^T y = x_1 y_1 + \cdots x_n y_n$
$\nabla f(x), f'(x)$	gradientul/derivata funcţiei scalare $f(x)$
$\nabla^2 f(x), f''(x)$	matricea Hessiană a funcţiei scalare $f(x)$
$o(h(x))$	pentru $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^s$, dacă $\frac{\|g(x)\|}{\|h(x)\|} \to 0$ când $\|x\| \to 0$, atunci $g(x) = o(h(x))$
$\mathcal{O}(h(x))$	pentru $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^s$, dacă există $\epsilon, \alpha > 0$ astfel încât $\|g(x)\| \leq \alpha \|h(x)\|$ pentru $\|x\| \leq \epsilon$, atunci $g(x) = \mathcal{O}(h(x))$
$[x]_+$	$\max\{0, x\}$
I_n	matricea identitate de ordin n
A^T	matricea transpusă asociată matricii A
$\Lambda(A)$	spectrul (mulţimea valorilor proprii) matricii simetrice A
$\|A\|$	norma matricii $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$: $\|A\| = \max_{\|x\|=1} \|Ax\| = \max_{1 \leq i \leq n} \lvert\lambda_i(A)\rvert$
$A \succeq 0$	matricea simetrică A este positiv semidefinită: $x^T Ax \geq 0$ pentru $\forall x \in \mathbb{R}^n$. Echivalent $\Lambda(A) \subset \mathbb{R}^n_+$.
$A \succeq B$	matricile A, B sunt simetrice şi $A - B \succeq 0$