Algebră I

① Inj, Surj, Bij

Mulțimi: $C_X A = X \setminus A$, $X \supset A$.

$\bar{A} = C_X(A)$

O funcție $f: A \to B$ este o submulțime a produsului cartezian $A \times B$ cu propriet. că $\forall x \in A\ \exists!\ y \in B$ a.î. $f(x) = y$ $(x, f(x)) \in f$

$\{x, f(x)\}$ graficul lui f

$\{f(x)\}$ im lui f.

Mulțimea tuturor func. $f: A \to B$ se not. B^A

Inj: O funcție s.n. inj $\Leftrightarrow \forall x, y \in A$ cu $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$.

Surj: O func s.n. surj $\Leftrightarrow \forall y \in B\ \exists\ x \in A$ a.î. $f(x) = y$

Bij: O func bij este o func inj și surj.

$f: \{1,2,3\} \to \{1,2,3\}$; $f(x) = x$ bij

$f: \{1,2,3\} \to \{1,2,3,4\}$; $f(x) = x$ inj dar nu surj $\Rightarrow$ nu bij.

② Relații de echivalență / Mulțimea factor

Fie A o mulțime nevidă. O relație „$\sim$" pe mulțimea A este o submulțime a prod cartezian $A \times A$. Dacă $(a,b) \in \sim$ vom spune că $a \sim b$ (a este în relația „$\sim$" cu b).

O relație $\sim$ pe mulțimea A s.n. de echivalență

$$\iff \begin{cases} a \sim a \ \forall\, a \in A \text{ (reflexivă)} \\ a \sim b \Rightarrow b \sim a \ \forall\, a, b \in A \text{ (simetrică)} \\ a \sim b \text{ și } b \sim c \Rightarrow a \sim c \ \forall\, a,b,c \in A \text{ (tranzitivă)} \end{cases}$$

Ex rel echiv:

$A = \{1,2,3\}$, ~~a~b~~ $a, b \in A$

$a \sim_{=} b \iff a = b$

$a \sim_{\leq} b \iff a \leq b$ nu este rel de echiv.

$f: A \to B$ funcție: $a \sim_f b \iff f(a) = f(b)$ este rel de echiv.

Fie $\sim$ o rel de echiv pe A. Dacă $a \in A$ mult $[a] = \{b \in A \mid$ ~~a~b~~ $b \sim a\}$ s.n. clasa de echiv a elem a.

Mulțimea claselor de echiv s.n. mult factor a lui A modulo $\sim$ și se not cu $A/\sim$

$A/\sim\ = \{[a] \mid a \in A\}$

$p: A \to A/\sim$ s.n. surj canonică.

$p(a) = [a]$

③ Echivalența cardinală a mulțimilor

Fie A, B 2 mulț. $A \sim_c B \Leftrightarrow \exists f: A \to B$ bij

Obs. Rel este refl, tranz, sim (este de echiv) pe subm unei mulțimi.

Obs: $A, B, \dots X, Y \subset M$

dem:
$$\begin{cases} A \xrightarrow{1_A} A \Rightarrow A \sim_c A \\ A \xrightarrow{f} B \Rightarrow B \xrightarrow{f^{-1}} A \\ A \sim_c B \Rightarrow B \sim_c A \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \\ f, g \text{ bij} \end{array}\right| \Rightarrow g \circ f : A \to C \text{ bij}$$

Not $|A| = \{X \subset M \mid X \sim_c A\}$

nr cardinal.

Ex: $A = \{1, 2, \dots n\} = \overline{1,n}$

$|A| = n$. $X \sim_c A \Rightarrow |X| = n$.

A e numărabilă $\Leftrightarrow A \sim_c N$

~~$|A| \leq |B| \Leftrightarrow \exists f: A \to B$ inj~~

Cantor Bernstein

$|A| \leq |B|$ și $|B| \leq |A| \Rightarrow |B| = |A|$.

(5) Monoizi. Monoidul liber generat de o mulțime

Def: $(A,\cdot)$ unde $\cdot$ este asoc $\Rightarrow$ n semigrup

Def: $(A,\cdot)$ unde $\cdot$ este asoc și adm el neutru = monoid

Monoizi comutativi $(X,*)$, $X \in \{N, Z, Q, R\}$

$* \in \{+, \cdot\}$

Fie $M=(A,*)$ monoid. Un elem $a \in A$ n inversabil sau simetrizabil dacă $\exists\, a' \in A$ a.î. $a*a' = a'*a = e$

$U(M) = \{a \in A \mid \exists a' \in A$ a.î. $a*a' = a'a = e\}$

Un monoid n grup dacă $U(M) = M$ i.e. $\forall$ elem n este simetrizabil.

Dacă M este monoid și $a_1, \dots, a_n$ st. elem inv ale lui M atunci prod lor este elem inv și $(a_1 a_2 \cdots a_n)^{-1} = (a_n^{-1} \cdots a_1^{-1})$

$U(M)$ este grup față de op indusă.

Morf de monoizi: Fie A, B = monoizi $f: A \to B$ s.n. morf de monoizi $\Leftrightarrow \begin{cases} f(xy) = f(x) f(y)\ \forall x,y \in A \\ f(e_A) = 1_B \end{cases}$

Ex monoizi:

$f: A \to B$, $f(x) = 1_B$ ~~monoi~~ morf monoizi

$x \mapsto 2x$ $(N,+) \to (N,+)$ morf monoid.

f s.n. izomorfism $\Leftrightarrow$ f morf bijectiv

Monoidul liber generat de o mulțime

Fie A o mulț numită alfabet, iar elem sale litere. Vom numi cuv un șir $a_1 \dots a_n$ form din litere incluzând și u (cuvântul vid cu 0 lit). Două cuv ~~sunt egale dacă~~

$a_1 \dots a_n$, $b_1 \dots b_m$ sunt egale $\Leftrightarrow$ $n = m$ și

$a_1 = b_1, \dots, a_n = b_m$

~~W(A)~~ $W(A) = \{a_1 \dots a_n \mid a_1, \dots a_n \in A\}$ mulț tuturor cuv ~~din A~~ form cu lit din A.

$(W(A), \cdot)$ este monoid, $\cdot$ = concatenare.

$(a_1 \dots a_n)(b_1 \dots b_m) = a_1 \dots a_n b_1 \dots b_m$

Elem său neutru este u.

Ex: $B = \{b\}$ $\quad W(B) = \{u, b, b^2, \dots\}$

$W(B)$ este izomorf cu $(\mathbb{N}, +)$

Fie A mulț, M monoid și $f : A \to M$ func.

Atunci ~~f(W(A))~~ $F : W(A) \to M$, $F(a_1 a_2 \dots a_n) = f(a_1) \dots f(a_n)$

$a_1, \dots a_n \in A$ este morf de monoizi.

Monoidul liber generat de o mulțime

Fie A o mulț numită alfabet, iar elem ele litere. Vom numi cuv un șir $a_1 \ldots a_n$ form din litere incluzând și u (cuvânt vid cu o lit). Două cuv ~~sunt egale dacă~~

$a_1 \ldots a_n$, $b_1 \ldots b_m$ sunt egale $\Leftrightarrow$ $m = n$ și

$a_1 = b_1, \ldots, a_n = b_m$

~~W(A)~~ $W(A) = \{a_1 \ldots a_n \mid a_1, \ldots a_n \in A\}$ mult tuturor cuv ~~din A~~ form cu lit din A.

$(W(A), \cdot)$ este monoid ~~...~~ $\cdot$ = concatenare.

$(a_1 \ldots a_n)(b_1 \ldots b_m) = a_1 \ldots a_n b_1 \ldots b_m$

Elem său neutru este u.

Ex: $B = \{b\}$ $W(B) = \{u, b, b^2, \ldots\}$

$W(B)$ este izomorf cu $(\mathbb{N}, +)$

Fie A mult, M monoid și $f: A \to M$ func.

Atunci: ~~F(W(A))~~ $F: W(A) \to M$, $F(a_1 a_2 \ldots a_n) = f(a_1) \ldots f(a_n)$

$a_1, \ldots a_n \in A$ este morf de monoizi.

Se numește izometrie a planului euclidian $\mathbb{R}^2$ o funcț.
$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ care păstrează dist adică satisface
egalitat $d(f(P), f(Q)) = d(P,Q)$, $P,Q\in\mathbb{R}^2$
$d((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}$
$Izo(\mathbb{R}^2)$ este grup față de op de comp.
mult izometriilor

__Morf de grupuri__

Fie G,H grupuri. $f:G\to H$ s.n. morf de grupuri dacă $f(xy)=f(x)f(y)$ $\forall x,y\in G$
Un morf de grupuri bij s.n. izomorfism.
Un automorfism este un izomorf de la un grup la el însuși.

G,H grupuri, $a\in G$. Atunci $x\to 1_H: G\to H$ este morf trivial.
Aplicația identică $I_A: A\to A$ s.n. automorf id.
Ex: $f:(\mathbb{Q},+)\to(\mathbb{Z},+)$ $f(x)=2x$ morf de gr
$g:(\mathbb{R},+)\to((0,+\infty),\cdot)$ $f(x)=2^x$ este izomorf
Comp a 2 morf de gr este morf de gr
Inv unui izom de gr este izom de gr.
$f:G_1\to H_1$, $g: G_2\to H_2$ f,g izom $\Rightarrow$ f,g bij $\Rightarrow$
$g\circ f$ bij $\Rightarrow g\circ f: G_1\to H_2$ izom gr.

⑤ Grupuri. Morf. de grupuri, proprietăți

Grup = monoid cu toate elem inversabile

Grup comutativ (abelian) dacă operația e comutativă

~~Ordinul grupului~~

$\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ sunt grupuri abeliene cu $+$

$\mathbb{Q}^*, \mathbb{R}^*, \mathbb{C}^*$ sunt grupuri ab în raport cu $\cdot$

~~Operațiile~~ Unitățile unui monoid form grup în raport cu operația indusă. De ex dacă A este o mulțime, mulțimea A^A a func de la A la A este monoid față de compunerea funcțiilor. $U(A^A)$ este grupul bij $A \to A$ numit grupul permutărilor mulțimii A, grup notat cu S_A. Dacă $A = \{1, \dots, n\}$ S_A se not mai simplu cu S_n și se num gr permut de grad n.

Fie $n \geq 1$ și $a_1, \dots, a_k$ nr distincte între 1 și n. Prin permutarea, ciclul $(a_1, \dots a_k)$ se înțelege permutarea din S_n def prin $a_1 \to a_2 \to \dots \to a_k$ și $x \to x$ $\forall$ $x \neq a_i$. Un ciclu de forma $(i\ j)$ s.n. transpoziție.

Ex. S_3 constă din permut identică I, transpoz $(12), (13), (23)$ și ciclurile $(123)(132)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

6 Subgrupuri - Subgrupul gen de o mulțime

Fie G un grup. O mulț nevidă H a lui G s.n. subgrup și not $H \leq G$ dacă H este o parte stab a lui G și $x^{-1} \in H \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall x, y \in H \Rightarrow x \cdot y \in H$

$x^{-1} \in H$

O ~~mult~~ subm nevidă $H \subset$ a G grup s.n. subgr dacă $xy^{-1} \in H$ $\forall x, y \in H$.

Fie $f : G \to G'$ morf de gr.

a) Dacă H e subgr al lui G $f(H)$ este subgr al lui G' num imag dir a lui H

b) Dacă H' subgr al lui G' $f^{-1}(H')$ este subgr al lui G num preimag / imag inv a lui H'

c) $Ker(f) := f^{-1}(1)$ este subgr al lui G num nucleul lui f și f inj $\Leftrightarrow Ker(f) = \{1\}$.

Ex: $f : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}$, $f(x,y) = x - y$.

$Ker(f) = \{(x,x) \mid x \in \mathbb{Z}\}$.

Subgrupul gen de o mulțime

Fie G un grup și A o subm a lui G. Subgr gen de A este prin def

$\langle A \rangle := \{a_1^{\pm 1} \cdot a_2^{\pm 1} \cdots a_n^{\pm 1} \mid a_1, \dots, a_n \in A, n \geq 0\}$

(mulț tuturor produselor de elem din A și inv acestora). $\langle \emptyset \rangle = \{1\}$ și $\langle G \rangle = G$

Dacă $a \in G$ $\langle a \rangle = \{a^k \mid k \in \mathbb{Z}\}$

Fie G grup și A submulțime a sa. Atunci $\langle A \rangle$ este subgr. al lui G conținut al $\forall$ subgr din G care-l conț. pe A.

$A \subseteq H \leq G \Rightarrow \langle A \rangle \leq H$.

7 Congruența determinată de un subgr. pe un grup

Subgrupurile lui $(\mathbb{Z},+)$ sunt submulțimile $n\mathbb{Z}$ cu n nr natural. Dacă $a,b \in \mathbb{Z}$ $a \equiv b(n) \Leftrightarrow n/a-b$ $\Leftrightarrow a-b \in n\mathbb{Z}$

Fie G un grup și H un subgrup al lui G. Pe G def urm relații: $x \equiv_s y(H) \Leftrightarrow x^{-1}y \in H$ numită congr la st modulo H și $x \equiv_d y(H) \Leftrightarrow xy^{-1} \in H$ num congruența la dreapta modulo H.

Fie G un gr și H un subgr al său. Atunci cele 2 congr mod H sunt rel de echiv ~~la dreapta~~ pe G. Clasele de echiv de congr la st sunt submulț lui G de forma $xH = \{xh \mid h \in H\}$, $x \in G$

Clasele de echivalență de congr la dreapta sunt subm lui G de forma $Hx = \{hx \mid h \in H\}$ $x \in G$ num clase la dreapta mod H.

$(G/H)_s$ $(G/H)_d$ mulț claselor la st/dr mod H.

Ele coincid $\Leftrightarrow xH = Hx$ $\forall x \in G$

În acest caz H e subgr normal.

G grup finit, H subgr. At $|G| = |H|[G:H]$.

Dem: $C_1 \dots C_n$ clase la st mod H. Conf def $n = [G:H]$. Fie $a \in G$. Aplic $x \to ax : H \to aH$ este bijectivă cu inv $y \to a^{-1}y$. deci $|C_i| = |H|$ $\forall i = \overline{1,n}$. Cum $C_1 \dots C_n$ este o partiție a lui G $\Rightarrow |G| = \sum_{i=1}^{n} |C_i| = \sum_{i=1}^{n} |H| = |H|[G:H]$.

⑧ Ord / Ord unui elem într-un grup

Fie G grup și $x \in G$. Ordinul lui x se def prin:

$$ord(x) = \begin{cases} \infty & \text{dacă } x^n \neq 1 \ \forall n \geq 1 \\ \min\{n \in \mathbb{N}^* \mid x^n = 1\} & \text{dacă } \exists n \geq 1 \text{ a.î. } x^n = 1. \end{cases}$$

Ex:
1_G are ord 1.
în gr multipl $\{\pm 1, \pm i\}$ ord $i = 4$
$i \neq 1$, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$. $\forall$ elem nenul al lui $(\mathbb{Z}, +)$ are ord inf.

Fie G gr ~~fin~~ și $x \in G$ de ord n. Dacă $k \in \mathbb{Z}$ atunci $x^k = 1 \Leftrightarrow n$ divide k.

Dem: $ord(x) = n \Rightarrow x^n = 1$.
$x^k = 1 \Rightarrow k \geq n$ și $k = n \cdot \alpha$, $\alpha \in \mathbb{N}^* \Rightarrow$
$\frac{k}{n} = \alpha$ deci n divide k.

⑨ Subgr normale / Grup factor

Fie G grup și H subgr al său. H e subgr normal al ~~său~~ lui G $\Leftrightarrow xH = Hx$ $\forall x \in G$.

Teoremă: Fie G un grup și H un subgr al său. Atunci H este subgr normal al lui G $\Leftrightarrow xhx^{-1} \in H$ $\forall x \in G$ și $h \in H$ ie $xHx^{-1} \subseteq H$ $\forall x \in G$

Dem: $x \in H$. H subgr norm $\Rightarrow xH = Hx \Rightarrow$
$xHx^{-1} \subseteq H$. Fie $x \in H \Rightarrow xHx^{-1} \subseteq H$ ~~$\forall x \in G$~~ $\Rightarrow$
$xH \subseteq Hx$. Refac raționam pt x^{-1}
$\Rightarrow Hx \subseteq xH \Rightarrow Hx = xH$.

Ex: $H = \{I, (1\,2)\}$ nu este subgr norm al lui S_3 pt că $(1\,3)(1\,2)(1\,3)^{-1} = (2\,3)$

$K = \{I, (1\,2)(3\,4), (1\,3)(2\,4), (1\,4)(2\,3)\}$ este subgr norm S_4

Grupul factor

Fie G grup și H subgr normal al lui G.
Dacă $x \in G$ not $\hat{x} = xH = Hx$ clasa lui x mod H. Not $G/H = \{\hat{x} \mid x \in G\}$. Pe G/H def operația $\hat{x}\hat{y} = \widehat{xy}$ $\forall x, y \in G$.
Op este bine def i.e nu dep de reprezentanți ~~dat~~ claselor.

Fie $x', y' \in G$ cu $\hat{x} = \hat{x'}$ și $\hat{y} = \hat{y'}$. Atunci $h = x^{-1}x'$ și $y^{-1}y' \in H$. Cum $y'H = Hy'$ $\exists h' \in H$ cu $hy' = y'h'$ deci $(xy)^{-1}(x'y') = y^{-1}x^{-1}x'y' = y^{-1}hy' = y^{-1}y'h' \in H \Rightarrow \widehat{xy} = \widehat{x'y'}$

Fie G grup și H subgr normal. Atunci în raport cu op def anterior G/H este grup num grupul factor al lui G mod H.
În plus $\pi : G \to G/H$ (surj can) e morf de gr.

Dem: $\forall x, y, z \in G$

1. $(\hat{x}\hat{y})\hat{z} = \widehat{xy}\,\hat{z} = \widehat{xyz} = \hat{x}\,\widehat{yz}$
2. $\hat{x}\hat{1} = \hat{x} = \hat{1}\hat{x}$ $\hat{1}$ elem neutru
3. $\hat{x}\,\widehat{x^{-1}} = \widehat{xx^{-1}} = \hat{1} = \widehat{x^{-1}}\hat{x}$ deci $\forall x \in G/H$ e inv

$\pi(x)\,\pi(y) = \hat{x}\hat{y} = \widehat{xy} = \pi(x \cdot y)$

(10) <u>Teorema fundamentală de izomorfism pt grupuri</u>.

Fie $u: G \to H$ un morfism de gr. Atunci gr factor $G/Ker(u)$ este izomorf cu $Im(u)$.

$\bar{u}: G/Ker(u) \to Im(u)$, $\bar{u}(\hat{x}) = u(x)$ $x \in G$

<u>Dem</u>: $x, y \in G$ a.î. $\hat{x} = \hat{y}$. Atunci $\exists k \in Ker(u)$ a.î.

$x = ky \Rightarrow u(x) = u(ky) = u(k)u(y) = u(y)$

$\Rightarrow \bar{u}$ este bine def.

$\bar{u}(\hat{y}\hat{z}) = \bar{u}(\widehat{yz}) = u(yz) = u(y)u(z) = \bar{u}(\hat{y})\bar{u}(\hat{z})$

$\Rightarrow \bar{u}$ morf gr. din $\hat{x} \in Ker(\bar{u}) \Rightarrow 1 = \bar{u}(\hat{x}) = u(x) \Rightarrow x \in Ker(u) \Rightarrow \hat{x} = \hat{1}$ deci $\bar{u}$ este morf inj.

Ex: $f: (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{C}^*, \cdot)$ $f(x) = \cos(2\pi x) + i\sin(2\pi x)$ are imag $\Delta = \{z \in \mathbb{C} \mid |z|^2 = 1\}$ și $Ker(f) = \mathbb{Z}$

$\Rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong \Delta$.

eurotaxGLASS'S
Automotive Business Intelligence

(11) Grupuri ciclice

Un grup s.n. ciclic $\iff$ este generat de un element al său. $G = \langle a \rangle$, $a \in G$.

$\forall$ grup ciclic infinit este izomorf cu $\mathbb{Z}$ și $\forall$ grup ciclic cu n elemente este izomorf cu $\mathbb{Z}_n$.

Dem: Fie G grup ciclic. $G = \langle e \rangle$. Consid morf surj de grupuri $f : \mathbb{Z} \to G$, $f(k) = e^k$. Dacă G infinit $\Rightarrow f$ este izomorfism.

Dacă G are n elemente $\Rightarrow Ker(f) = n\mathbb{Z} \Rightarrow f \cong \mathbb{Z}_n$.

Ex: grup ciclic ~~$G = \{2, 4, 8, 16\}$~~ $G = \{2, 4, 8, 16\} = 2^i$

~~$(G,+)$ grup ciclic~~ fals $(G, \cdot)$ gr ciclic $\cong \mathbb{Z}_4$

$\forall$ subgr sau gr ~~factor~~ al unui gr ciclic e ciclic.

(12) Gr de permutări

Mult unit unui monoid form grup cu operație indusă.

Fie $A \neq \emptyset$ mulțime. Mult A^A a func de la A la A form monoid împreună cu comp func $(\circ)$.

Mult $U(A^A)$ a func $A \to A$ este grup împreună cu $\circ$ numit grupul perm lui A not S_A.

Dacă $A = \{1..n\} \Rightarrow S_A \overset{not}{=} S_n$.

Fie $n \geq 1$ și $a_1, ..., a_k$ între 1 și n. Ciclul $(a_1 ... a_k)$ reprezintă $a_1 \to a_2 \to ... \to a_k \to a_1$ și $\forall x \notin \{a_i\}$, $x \to x$, $x \in A$.

Ciclurile de lung 1 s.n. cicluri triviale iar cele de lung 2 transpoziții