① Definiție limita unui șir + proprietăți (demonstrație)

1) $x_n \to a$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_\varepsilon$ a.î. $\forall n \geq n_\varepsilon \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$

$|x_n| = |x_n - a + a| \leq |x_n - a| + |a| \leq |a| + \varepsilon$

$\underline{\varepsilon = 1}$ $\forall n \geq n_1 \Rightarrow |x_n| \leq 1 + |a|$

Fie $M = \max(1+|a|, \max\limits_{i=1}^{n} |x_i|) + 1$

2) $x_n \to a$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n'_\varepsilon$ a.î. $\forall n \geq n'_\varepsilon \Rightarrow |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$

$y_n \to b$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n''_\varepsilon$ a.î. $\forall n \geq n''_\varepsilon \Rightarrow |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$

$|x_n + y_n - (a+b)| = |x_n - a + y_n - b| \leq |x_n - a| + |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

~~Dacă~~ $n \geq \max(n'_\varepsilon, n''_\varepsilon) = n_\varepsilon$

$|x_n y_n - ab| = |x_n \cdot y_n - x_n b + x_n b - ab| \leq |x_n| \cdot |y_n - b| + |b| \cdot |x_n - a|$

Din 1) $\Rightarrow \exists M > 0$ a.î. $|x_n| \leq M$ $\forall n \geq 1$

$\forall n \geq n_\varepsilon = \max(n'_\varepsilon, n''_\varepsilon) \Rightarrow |x_n y_n - ab| < (M + |b|) \cdot \varepsilon$

3) $x_n \to a \Rightarrow |x_n| \to |a|$

$||x| - |y|| \leq |x - y|$ $\forall x, y \in \mathbb{R}$

$x_n \to a$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_\varepsilon$ a.î. $\forall n \geq n_\varepsilon \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \underset{\big||x_n| - |a|\big|}{\rotatebox{90}{$\leq$}}$

⑦ Limita superioară este un punct limită (demonstrație)

(x_{n_k}) $|x_{n_k} - a| < \frac{1}{k}$

$n_k < n_{k+1}$

$(x_n)_n \in \mathbb{R}$ $\quad a = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$

$k = 1$

$a = \inf\limits_{n \geq 1} u_n$ ($u_n = \sup\limits_{k \geq n} x_k$) $\Rightarrow \exists m_1$ a.î. $a \leq u_{m_1} < a + 1$

$u_{m_1} = \sup\limits_{k \geq n} x_k \Rightarrow \exists n_1 > m_1$ a.î. $x_{n_1} \leq u_{m_1} < x_{n_1} + 1$

$a - 1 \leq u_{m_1} - 1 < x_{n_1} \leq x_{n_1} < a + 1 \Rightarrow |a - x_{n_1}| < 1$

$k = 2$ $\quad a = \inf\limits_{n \geq 1} u_n \Rightarrow \exists m_2 > n_2$ a.î. $a \leq u_{m_2} < a + \frac{1}{2}$

$u_{m_2} = \sup\limits_{k \geq m} x_k \Rightarrow \exists n_2 \geq m_2 > n_1$ a.î.

$a-\frac{1}{2} < u_{m_2} - \frac{1}{2} < x_{n_2} \leq u_{m_2} < a + \frac{1}{2} \Rightarrow |x_n - a| < \frac{1}{2}$

Presupunem că l-am găsit pe x_{n_k}

$a = \inf_{n \geq 1} u_n$ și $u_n \searrow \Rightarrow \exists\, m_{k+1} > n_k$ a.î. $a \leq u_{m_{k+1}} < a + \frac{1}{k+1}$

$u_{m_{k+1}} = \sup_{k \geq m_{k+1}} x_k \Rightarrow \exists\, n_{k+1} \geq m_{k+1} > m_k$ a.î.

$a - \frac{1}{k+1} < u_{m_{k+1}} - \frac{1}{k+1} < x_{n_{k+1}} < u_{m_{k+1}} < a + \frac{1}{k+1} \Rightarrow$

$\Rightarrow |x_{n_{k+1}} - a| < \frac{1}{k+1}$ □

(13) Continuitatea funcției compuse (dem.)

Fie $(a_n)_{n\geq 0}$ un șir astfel ca $a_n \in D$, iar $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Deoarece funcția f este continuă în a, urmează că $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(a)$, conform teoremei de caracterizare cu șiruri. Deoarece și funcția g este continuă, $\lim_{n\to\infty} g(f(a_n)) = g(f(a))$, de unde concluzia. Cum $(a_n)_{n\geq 0}$ era arbitrar, urmează conform teoremei de caracterizare cu șiruri că $g \circ f$ este continuă în a.

(14) Caracterizarea funcției continue în spațiu metric (dem.)

1) $\Rightarrow$ 2) Fie $\varepsilon > 0 \Rightarrow B(f(a), \varepsilon) \in \mathcal{V}_{f(a)}$

f continuă în $a \Rightarrow f^{-1}(B(f(a), a)) \in \mathcal{V}_a \Rightarrow \exists\, \delta_\varepsilon > 0$ a.î.

$B(a, \delta_\varepsilon) < f^{-1}(B(f(a), \varepsilon))$

$f(B(a, \delta_\varepsilon)) \subset B(f(a), \varepsilon)$

$\forall x \in B(a, \delta_\varepsilon) \Rightarrow f(x) \in B(f(a), \varepsilon)$

$\forall x$ a.î. $d_1(a, x) < \delta_\varepsilon \Rightarrow d_2(f(a), f(x)) < \varepsilon$

2) $\Rightarrow$ 1)

$V \in \mathcal{V}_{f(a)} \Rightarrow \varepsilon_V > 0$ a.î. $B(f(a), \varepsilon) \subset V \overset{2)}{\Rightarrow} \exists\, \delta_{\varepsilon_V} > 0$ a.î.

$d_1(a, x) < \varepsilon \Rightarrow d_2(f(a), f(x)) < \varepsilon_V \Leftrightarrow x \in B(a_1, \varepsilon_V) \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x) \in B(f(a), \varepsilon_V) \subset V \mid f^{-1}$

$B(a, \varepsilon_V) \subset f^{-1}(B(f(a), \varepsilon_V)) \subset f^{-1}(V) \in \mathcal{V}_{f(a)}$

Fie $x_n \to a \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon$ a.î. $\forall n \geq n_\varepsilon \Rightarrow d_1(x_n, a) < \varepsilon \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x_n \in B(a, \varepsilon)$

f continuă în $a \Rightarrow \forall \eta > 0 \Rightarrow \exists \delta_\eta > 0$ a.î. $d_1(a, x) < \delta_\eta \Rightarrow$
$\Rightarrow d_2(f(a), f(x)) < \eta$

$\varepsilon = \delta_\eta \ \forall n \geq n_{\delta_\eta} \overset{1)}{\Rightarrow} d_1(x_n, a) < \delta_\eta \overset{2)}{\Rightarrow} d_2(f(a), f(x)) < \eta$

Caracterizarea funcției c. în spații topologice (dem.)

1) $\Rightarrow$ 2)

$D \in \mathcal{T}_2$ $(D = \mathring{D} \subset X_2)$

$\left.\begin{array}{l} x \in f^{-1}(D) \Rightarrow f(x) \in D \\ D \in \mathcal{V}_{f(x)} \\ f \text{ continuă în } x \end{array}\right| \Rightarrow f^{-1}(D) \in \mathcal{V}_x \Rightarrow f^{-1}(D) \in \mathcal{T}_1$

2) $\Rightarrow$ 1)

Fie $x \in X$ și $V \in \mathcal{V}_{f(x)} \Rightarrow \exists D \in \mathcal{T}_2$ a.î. $f(x) = D \subset V \Rightarrow x \in f^{-1}(D)$
$\subset f^{-1}(V) \Rightarrow f^{-1}(V) \in \mathcal{V}_x$

f e continuă în x

2) $\Rightarrow$ 3) F închisă din $X_2 \Rightarrow X_2 \setminus F \in \mathcal{T}_2 \overset{2}{\Rightarrow} f^{-1}(X / F) \in \mathcal{T}_1$
$f^{-1}(X_2 \setminus f^{-1}(F)) = X_1 \setminus f^{-1}(F) \Rightarrow f^{-1}(F)$ închisă

3) $\Rightarrow$ 2)

Analog

4) Teorema lui Fermat (dem.)

Presupunem că c este un punct de minim local $\Rightarrow$
$\Rightarrow \exists \varepsilon > 0$ a.î. $\forall x \in \underbrace{(c - \varepsilon, c + \varepsilon)}_{(c-\varepsilon, c+\varepsilon) \subset (a, b)} \Rightarrow f(x) \geq f(c)$

Caz I $x < c \Rightarrow f(x) - f(c) \geq 0$ și $x < c \Rightarrow f'(c) = \lim\limits_{\substack{x \to c \\ x < c}} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0$ (1)

Caz II $x > c \Rightarrow f(x) - f(c) \geq 0$ și $x > c \Rightarrow f'(c) = \lim\limits_{\substack{x \to c \\ x > c}} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0$ (2)

Din (1) și (2) $\Rightarrow f'(c) = 0$

Teorema lui Rolle (dem.)

f este continuă pe $[a,b] \Rightarrow \exists\, M, m \in \mathbb{R}$ a.î.

$M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ și $m = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$

$\underline{c_1}$ $M > f(a) = f(b) \Rightarrow \exists\, c \in [a,b]$ a.î. $M = f(c) \Rightarrow c \in (a,b)$

c e punct de maxim local $\Rightarrow f'(c) = 0$

$\underline{c_2}$ $m < f(a) = f(b) \Rightarrow \exists\, c \in [a,b]$ a.î. $m = f(c)$

c este un minim local $\xRightarrow{T.Fermat} f'(c) = 0$

$\underline{c_3}$ $M = m = f(a) = f(b) \Rightarrow f$ este constantă $\Rightarrow f'(x) = 0\ \forall x \in (a,b)$

Teorema lui Lagrange (dem.)

Fie $h : [a,b] \to \mathbb{R}$, $h(x) = f(x) - \alpha x$ a.î. $h(a) = h(b)$

$f(a) - \alpha a = f(b) - \alpha b \Rightarrow \alpha(b-a) = f(b) - f(a) \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

h derivabilă pe (a,b), continuă pe $[a,b] \xRightarrow{T.R.}$

$\Rightarrow \exists\, c \in (a,b)$ a.î. $h'(c) = 0 \Rightarrow h'(c) = f'(c) - \alpha = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow f'(c) = \alpha \Rightarrow \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ □

Teorema lui Cauchy (dem.)

Din T.L. aplicată funcției g pe $[a,b] \Rightarrow \exists\, d \in (a,b)$ a.î.

$\dfrac{g(b)-g(a)}{b-a} = g'(d) \neq 0 \Rightarrow g(b) \neq g(a)$

Considerăm $h : [a,b] \to \mathbb{R}$, $h(x) = f(x) - \alpha g(x)$ a.î. $h(a) = h(b)$

$f(a) - \alpha g(a) = f(b) - \alpha g(b) \Rightarrow \alpha = \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$

h este continuă pe $[a,b]$ și deriv. pe $(a,b) \xRightarrow{T.L.}$

$\Rightarrow \exists\, c \in (a,b)$ a.î. $h'(c) = 0$

$\Rightarrow f'(c) - \alpha g'(c) = 0 \Rightarrow \dfrac{f'(c)}{g'(c)} = \alpha = \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$ □

Teorema lui Darboux (dem.)

Fie $a < c < d < b$, $f'(c) < f'(d)$ și $\alpha \in (f'(c), f'(d))$

? $\Rightarrow \exists\ x_0 \in (c,d)$ a.î. $f'(x_0) = \alpha$

$h : (a,b) \to \mathbb{R}$, $h(x) = f(x) - \alpha x$ derivabilă

h este mărginită pe $[c,d]$ (h continuă)

$\exists\ x_0 \in [c,d)$ a.î. $h(x_0) = \inf\limits_{x \in [c,d]} h(x)$

Caz I $x_0 \in (c,d) \Rightarrow x_0$ punct de minim local $\Rightarrow$

$\Rightarrow h'(x_0) = 0 = f'(x_0) - \alpha \Rightarrow f'(x_0) = \alpha$

Cazul II $x_0 = c$, $h'(c) - \alpha < 0$, $h'(c) = \lim\limits_{x \to c} \frac{h(x) - h(c)}{x - c} \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\ \varepsilon > 0$ a.î. $\forall x \in (c - \varepsilon, c + \varepsilon) \Rightarrow \frac{h(x) - h(c)}{x - c} < 0$

$x \in (c, c + \varepsilon) \Rightarrow h(x) < h(c)$

$h(c) = m = \inf\limits_{y \in [c,d]} h(y) < h(x)$

Caz III $x_0 = d$

Analog

(52) Integrabilitatea unui șir de funcții (dem.)
(Poze)

(54) Teorema lui Leibniz-Newton (dem.)

Fie $\Delta_n = a = x_0^n < x_1^n < \ldots < x_n^n = b$ a.î. $\|\Delta\| \to 0$

$f(b) - f(a) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1}^n) - f(x_i^n)$

Aplic teorema lui Lagrange pentru f pe $[x_i^n, x_{i+1}^n] \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\ c_i^n \in (x_i^n, x_{i+1}^n)$ a.î. $f(x_{i+1}^n) - f(x_i^n) = f'(c_i^n)(x_{i+1}^n - x_i^n)$

$f(b) - f(a) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} f'(c_i^n)(x_{i+1}^n - x_i^n) = \sigma_{\Delta_n}(f', (c_i^n)_{i=\overline{0,n-1}})$

Deoarece f' este integrabilă Riemann $\Rightarrow$

$\Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} \sigma_{\Delta_n}(f', (c_i^n)_{i=\overline{0,n-1}}) = \int_a^b f'(x)\,dx = \lim\limits_{n \to \infty} f(b) - f(a) \Rightarrow$

$\Rightarrow f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x)\,dx$

47. Teorema lui Leibniz-Newton (dem) pt forme diferențiale

<u>Caz I</u> γ = drum închis $\gamma(b) = \gamma(a) \Rightarrow \int_\gamma df = 0$

$\gamma \in C^1$

$$\int_\gamma df = \int_\gamma \sum \frac{\partial f}{\partial x_i} d_i = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_i}(\gamma(t)) \cdot \gamma_i'(t)\,dt =$$

$$= \int_a^b f'(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,dt = \int_a^b (f\circ\gamma)'(t)\,dt \overset{TLN}{=} (f\circ\gamma)'(b) - (f\circ\gamma)'(a)$$

<u>Caz II</u> γ = drum de clasă C^1 pe porțiuni $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\ \Delta = a < x_0 \ldots < x_n = b$, $\gamma/_{[x_i, x_{i+1}]} \in C^1 \overset{not}{=} \gamma_i$

$$\int_\gamma df = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{\gamma_i} = \sum (f(\gamma(x_{i+1})) - f(\gamma(x_i))) = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$$

6. Criteriul lui Lebesgue

Teoremă (Lebesgue) Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ mărginită. Atunci f este integrabilă Riemann $\Leftrightarrow$ Δ_f (discontinuitatea lui f) este neglijabilă Lebesgue. (S) (D) cu demonstrații

7. Teoremă privind integrabilitatea funcțiilor continue și monotone.

Teoremă Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continuă. Atunci f este integrabilă Riemann.

- f mărginită și uniform continuă $\Rightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists \delta_\varepsilon>0$ a.î. $\forall x,y\in[a,b]$ cu $|x-y|<\delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon$
- Fie Δ cu $\|\Delta\|<\delta_\varepsilon$. Fie $x,y\in[x_i,x_{i+1}] \Rightarrow$ $|x-y|\le|x_{i+1}-x_i|\le\|\Delta\|<\delta_\varepsilon\Rightarrow|f(x)-f(y)|<\varepsilon$
- $M_i-m_i\le\varepsilon \Rightarrow S_\Delta(f)-s_\Delta(f)=\sum_{i=0}^{n-1}(M_i-m_i)(x_{i+1}-x_i)$ $\le\varepsilon\sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1}-x_i)=\varepsilon(b-a)\Rightarrow f$ e integr. Riemann

Teoremă Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ monotonă. Atunci f este integrabilă Riemann.

Dem Presupunem că f este crescătoare $\Rightarrow$ $m_i=f(x_i)$ și $M_i=f(x_{i+1})$

- $S_\Delta(f)-s_\Delta(f)=\sum_{i=0}^{n-1}(M_i-m_i)(x_{i+1}-x_i)\le$ $\le\|\Delta\|\cdot\sum(f(x_{i+1})-f(x_i))=\|\Delta\|(f(b)-f(a))$
- $\varepsilon>0\ \exists\delta_\varepsilon=\frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)+1}$ $\|\Delta\|<\delta_\varepsilon\Rightarrow$

$\Rightarrow S_\Delta(f)-s_\Delta(f)\le\|\Delta\|(f(b)-f(a))\le\frac{\varepsilon(f(b)-f(a))}{f(b)-f(a)+1}\le\varepsilon$

Calcul diferential si integral
Semestrul 1- seria 14

1)Definitia limitei unui sir + proprietati *+**demonstratii***
2)Teorema privind convergenta sirurilor monotone
3)Notiunea de: distanta, spatiu metric, B(a,r), sir convergent intr-un spatiu metric, sir Cauchy intr-un spatiu metric
4)Proprietatile sirurilor convergente si a sirurilor Cauchy intr-un spatiu metric(fara demonstratii)
5)Definitia normei
6)Definitia limitei superioare+proprietati
7)Limita superioara este un punct limita *+**demonstratie***
8)Teorema Cesaro-Stolz
9)Serii-definitie,criterii de convergenta(enunturi)
10)Definiti: topologie, multimi deschise/inchise, vecinatati, spatiu topologic asociat unui spatiu metric
11)Definitie: A', $\bar{A}$, Fr(A), iz(A), interiorul multimii A
12)Continuitatea unei functii(def)
13)Continuitatea functiei compuse *+**demonstratie***
14)Caracterizarea functiei continue in spatiu metric *+**demonstratie***
Caracterizarea functiei continue in spatii topologice *+**demonstratie***
15)Convergenta simpla si uniforma(def)
16)Pastrarea continuitatii pentru limita unui sir de functii
17)Pastrarea derivabilitatii pentru limita unui sir de functii.
18)Marginirea functiilor continue(teorema)
19)Multimi compacte(caracterizare in spatial metric si in R^n)
20)Functie uniform continua
Teorema privind uniform continuitatea functiilor continue
21)Limita unei functii(def)
22)Derivata unei functii(def1,def2)
23)Proprietatile functiei derivabile(adunarea, inmultirea, compunerea, inversa)
24)Teorema lui: Fermat , Rolle, Lagrange, Cauchy, Darboux*+**demonstratii***

25)Teorema lui L'Hospital(fara demonstratie)
26)Prima si a doua teorema a lui Taylor
27)Teorema Cauchy-Hadamad pentru serii de puteri
28)Derivata . Derivata partial pentru functii cu mai multe variabile
29)Proprietatile derivatei si ale derivatei partiale (observatiile 1-5, fara demonstratie)
30)Derivabilitatea functiilor compuse si inverse
31)Definitia derivatei partiale de ordinul II. Derivata de ordinul II
32) Teoremele lui Young si Schwarz
33)Extreme locale pentru functii de mai multe variabile
34)Teorema multiplicatorilor lui Lagrange
35) Teorema functiilor implicite
36)Suma Riemann si sumele Darboux inf si sup
37)Definitia integralei, integralei sup si inf
38)Teorema privind integrabilitatea Darboux pentru functii integrabile Riemann
39) Teorema si Lema lui Darboux (17)
40)Teorema privind integrabilitatea functiilor continue si monotone ***+demonstratie***
41)Proprietatile functiilor integrabile(+,-)(fara demonstratie)
42)Integrabilitatea limitei unui sir de functii ***+demonstratie***
43)Teorema lui Lebesque
44)Teorema Leibinz –Newton ***+demonstratie*** (10)
45)Teorema de integrare prin parti. Teorema de schimbare de variabila
46)Lungimea unui drum .Integrala curbilinie de tip I si II +proprietati
47)Teorema lui Leibinz Newton pentru forme diferentiale ***+demonstratie*** (13?)
48)Caracterizarea alternativa a existentei primitive
49)Lema lui Poincare (21)
50)Masura unei multimi, masura superioara si inferioara (definitie) (53 Guță)
51)Comportarea masurii inferioare, superioare in raport cu U,\.. (42)
52)Popozitie privind caracterizarea multimilot masurabile in raport cu frontiera (56 Guță)
53) Dreptunghiuri , multimi elementare (definitie + proprietati) (39)
54)Teorema lui Fubini (49 la Paul)
55) Teorema de schimbare de variabila (56) – mine
56)Teorema lui Darboux pentru functii de mai multe variabile (40)

Anexă la 10

Criteriul 1 : Fie $\sum_{n\geq 1} a_n$ și $\sum_{n\geq 1} b_n$ cu $a_n, b_n \geq 0$

Dacă $\exists M>0$ și $\exists n_0$ a.î. $\forall n\geq n_0 \Rightarrow a_n \leq M b_n$. Atunci:

1) Dacă seria $\sum_{n\geq 1} a_n$ este divergentă $\Rightarrow \sum_{n\geq 1} b_n$ divergentă

2) Dacă $\sum_{n\geq 1} b_n$ este convergentă $\Rightarrow \sum_{n\geq 1} a_n$ convergentă

Criteriul 2 (condensării)

Dacă $a_n \searrow 0$ atunci $\sum_{n\geq 1} a_n \sim \sum_{n\geq 1} 2^n a_{2^n}$

Criteriul raportului (3)

Fie $\sum_{n\geq 1} a_n$, $a_n>0$

1) Dacă $\exists n_0$ și $\alpha<1$ a.î. $\forall n\geq n_0 \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} < \alpha \Rightarrow \sum_{n\geq 1} a_n$ convergentă

2) Dacă $\exists n_0$ și $\alpha>1$ a.î. $\forall n\geq n_0 \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} > \alpha \Rightarrow \sum_{n\geq 1} a_n = \infty$

Criteriul radicalului (4)

Fie $\sum_{n\geq 1} a_n$, $a_n \geq 0$

1) Dacă $\lim \sqrt[n]{a_n} < 1 \Rightarrow \sum_{n\geq 1} a_n$ convergentă

2) Dacă $\lim \sqrt[n]{a_n} \geq 1 \Rightarrow$ seria $\sum_{n\geq 1} a_n$ divergentă

Criteriul Raabe-Duhamel (5)

Fie $\sum_{n\geq 1} a_n$ cu $a_n>0$ și $l = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)$.

1) Dacă $l>1 \Rightarrow \sum_{n\geq 1} a_n$ convergentă

2) Dacă $l<1 \Rightarrow \sum_{n\geq 1} a_n$ divergentă

Dacă seria $\sum_{n\geq 1} x_n$ este convergentă $\Rightarrow x_n \to 0$

Criteriul lui Cauchy (6)

$\sum_{n\geq 1} x_n$ este convergentă dacă:

$$\forall \varepsilon>0\ \exists n_\varepsilon \text{ a.î. } \forall n\geq n_\varepsilon \text{ și } \forall p\in\mathbb{N}^* \Rightarrow \left|\sum_{k=n}^{n+p} x_k\right|<\varepsilon$$

Criteriul 7:

O serie absolut convergentă este convergentă.

Criteriul lui Abel (8):

Dacă $a_n \searrow 0$ și $\exists$ M a.î. $\left|\sum_{k\geq 1}^{n} x_k\right| \leq M \Rightarrow \sum_{n\geq 1} a_n\cdot x_n$ este convergentă

<u>Pas 1:</u> Crit. rap. sau $\sqrt{\ }$

<u>Pas 2:</u> Crit. R-D sau comparației

<u>Pas 3:</u> $a_n\to 0$?

1. Definiție limită unui șir + proprietăți

Def: 1) Spunem că șirul x_n converge la a și notăm $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ sau $x_n \to a$ dacă $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_\varepsilon$ a.î. $\forall\, n \geq n_\varepsilon \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$.

2) $x_n \to \infty$ dacă $\forall\, M\ \exists\, n_M$ a.î. $\forall\, n \geq n_M \Rightarrow x_n \geq M$.

Proprietăți: Fie $x_n \to a$, $y_n \to b$ $(a, b \in \mathbb{R})$. Atunci:

1) $(x_n)_n$ este mărginit
2) $x_n + y_n \to a + b$ și $x_n y_n \to a \cdot b$
3) $|x_n| \to |a|$
4) $x_n \leq y_n \Rightarrow a \leq b$
5) $x_n \neq 0\ \forall n$ și $a \neq 0 \Rightarrow \dfrac{1}{x_n} \to \dfrac{1}{a}$

2. Teoremă privind convergența șirurilor monotone.

Teoremă: Orice șir monoton și mărginit este convergent.

3. Noțiuni de distanță, spațiu metric, $B(a,r)$, șir Cauchy, șir conv. într-un spațiu metric.

Def: Fie X o mulțime nevidă. O funcție $d: X \times X \to [0, \infty)$ se numește distanță dacă:

1) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2) $d(x,y) = d(y,x)\ \forall\, x, y \in X$
3) $d(x,y) + d(y,z) \geq d(x,z)\ \forall\, x, y, z \in X$

(X, d) se numește spațiu metric.

$a \in X$ și $r > 0$ — $B(a,r) = \{x \mid d(a,x) < r\}$ — bilă de centru a și rază r

Def: Fie (X,d) un spațiu metric. Un șir $(x_n)_n \subset X$ se numește Cauchy dacă $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_\varepsilon$ a.î. $\forall\, n, m \geq n_\varepsilon \Rightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon$.

Def: Fie (X,d) un spațiu metric, $(x_n)_n \subset X$ și $a \in X$. Spunem că șirul $(x_n)_n$ converge la a și not. $x_n \to a$ sau $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ dacă pt. $\forall \varepsilon>0\ \exists\, n_\varepsilon$ a.î. $\forall\, n \geq n_\varepsilon \Rightarrow d(x_n,a)<\varepsilon$.

4. Proprietățile șirurilor convergente și șir Cauchy într-un spațiu metric.

Propr: (X,d) un spațiu metric și $(x_n)_n \subset X$.

1) Dacă $(x_n)_n$ este convergent atunci $\Rightarrow$ este și Cauchy.
2) Dacă $(x_n)_n$ este șir Cauchy $\Rightarrow$ este mărginit.
3) Orice șir convergent este mărginit.
4) Dacă $(x_n)_n$ este șir Cauchy și $\exists\, x_{n_k} \to a \in X \Rightarrow x_n \to a$.

5. Definiția normei

Def: O funcție $\|\ \| : \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ se num. normă dacă:

1) $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$
2) $\|ax\| = |a|\cdot\|x\| \quad \forall\, a \in \mathbb{R}$ și $x \in \mathbb{R}^n$
3) $\|x+y\| < \|x\| + \|y\| \quad \forall\, x,y \in \mathbb{R}^n$

6. Definiția limitei superioare și proprietăți

Def: Se numește limita superioară a șirului x_n și se notează cu.

$$(\bar{\ell})\quad \limsup_{n\to\infty} x_n = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = \lim_{n\to\infty} u_n = \inf_{n\geq 1} u_n = \inf_{n\geq 1}\Big(\sup_{k\geq n} x_k\Big)$$

Propr:

1) $\overline{\lim}(-x_n) = -\underline{\lim}\, x_n$
2) $\overline{\lim}\, a x_n = a\,\overline{\lim}\, x_n,\ a>0$
3) $\overline{\lim}\,(x_n+y_n) \leq \overline{\lim}\, x_n + \overline{\lim}\, y_n$
4) $\overline{\lim}\,(x_n+y_m) \geq \underline{\lim}\, x_n + \overline{\lim}\, y_m$
5) $\underline{\lim}\,(x_n+y_n) \geq \underline{\lim}\, x_n + \underline{\lim}\, y_n$
6) $\underline{\lim}\,(x_n+y_m) \leq \overline{\lim}\, x_n + \underline{\lim}\, y_n$
7) $x_n>0 \Rightarrow \overline{\lim}\, \dfrac{1}{x_n} = \dfrac{1}{\underline{\lim}\, x_n}$
8) $\overline{\lim}\, x_n y_m \leq \overline{\lim}\, x_n \cdot \overline{\lim}\, y_m \quad , x_n, y_n \geq 0$

⑦ Limita superioară este un punct limită

Propoziție: Dacă $(x_n)_n$ este un șir mărginit de nr. reale atunci $\exists$ un subșir $x_{n_k} \to \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n$.

⑧. Completitudinea lui $\mathbb{R}, \mathbb{R}^n$ — NU

Teoremă: În $(\mathbb{R}^n, d_2)$ orice șir mărginit are un subșir convergent.

Teoremă: $(\mathbb{R}^n, d_2)$ este un spațiu metric complet (orice șir Cauchy este convergent)

Teoremă: În $\mathbb{R}$ un șir mărginit $(x_n)_n$ este convergent $\Longleftrightarrow$ $\overline{\lim} x_n = \underline{\lim} x_n$

⑨ Teorema Cesaro-Stolz

Teoremă: Fie $(a_n)_n$ și $(b_n)_n$ șiruri de numere reale a.î. $b_n \nearrow \infty$ și să $\exists \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$. Atunci $\exists \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$.

⑩ Serii - definiții, criterii de convergență

Def: S.n. serie o pereche de șiruri $((x_n)_{n\geq p}, (y_n)_{n\geq p})$ unde $y_n = \sum_{k=p}^{n} x_k$.

Elementele x_n s.n. termenii seriei, iar elem. y_n - sume parțiale ale seriei.

Dacă $\exists \lim_{n\to\infty} y_n$ s.n. suma seriei și s.n. $\sum_{n\geq p} x_n$.

⑪ - Noțiunea de topologie, mulțimi deschise, închise, vecinătăți.
└ Def. spațiului topologic asociat unui spațiu metric.

Def: $X = \mathbb{R}$. O mulțime $V \subset \mathbb{R}$ s.n. vecinătate a lui a dacă $\exists \varepsilon > 0$ a.î. $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subset V$.

$\mathcal{V}_a = \{V \subset \mathbb{R} \mid V\text{- vecinătate a lui } a\}$

Def: O mulțime $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(X)$ s.n. topologie dacă:

1) $\emptyset, X \in \mathcal{C}$
2) $D_1, D_2 \in \mathcal{C} \Rightarrow D_1 \cap D_2 \in \mathcal{C}$
3) $(D_i)_{i\in I} \subset \mathcal{C} \Rightarrow \bigcup_{i\in I} D_i \in \mathcal{C}$

Def: Fie (X,d) un spațiu metric. O mulțime $D\subset X$ s.n. **deschisă** dacă $\forall\, x\in D \Rightarrow D\in \mathcal{V}_x$. $\mathcal{C}=\{D\subset X \mid D \text{ deschisă}\}$ - **topologia asociată** (X,d).

Def: O mulțime F s.n. **închisă** dacă $X\setminus F\in\mathcal{C}$.

(12) Teoremă privind mulțimile deschise în $\mathbb{R}$.

Teoremă: În $\mathbb{R}$ o mulțime deschisă D este o reuniune cel mult numărabilă de intervale deschise și disjuncte.

(13) Definiții $\mathring{A}, A', \bar{A}$.

Def: Fie $(X,\mathcal{C})$ un spațiu topologic și $A\subset X$. Atunci:

$$\mathring{A}=\mathrm{Int}(A)=\{a\in A \mid A\in\mathcal{V}_a\}=\bigcup_{\substack{D\in\mathcal{C}\\ D\subset A}} D \quad \text{(interiorul)}$$

$$A'=\{x\in X \mid \forall\, V\in\mathcal{V}_x \Rightarrow V\cap A\setminus\{x\}\neq\emptyset\} \quad \text{(mult. punctelor de acumulare)}$$

$$\bar{A}=\{x\in X \mid \forall\, V\in\mathcal{V}_x \Rightarrow V\cap A\neq\emptyset\}=A'\cup A=\bigcap_{\substack{F \text{ închisă}\\ A\subset F}} F = \text{închiderea}$$

$$\mathrm{Fr}(A)=\partial A=\bar{A}\setminus\mathring{A} \quad \text{(frontiera)}$$

$$\mathrm{iz}(A)=A\setminus A' \quad \text{- mult. punctelor izolate}$$

(14) Continuitatea unei funcții

Def: Fie (X,τ_X) și (Y,τ_Y), $f: X\to Y$ și $a\in X$. Funcția f este **continuă** în a dacă $\forall\, V\in\mathcal{V}_{f(a)} \Rightarrow f^{-1}(V)\in\mathcal{V}_{(a)}$.

(15). Continuitatea funcției compuse

Def: Dacă f este continuă în a și funcția g este continuă în $f(a) \Rightarrow$ Funcția **$g\circ f$** este continuă în a.

7. Limita superioară este un punct limită

Propoziție: Dacă $(x_n)_n$ este un șir mărginit de nr. reale atunci $\exists$ un subșir $x_{n_k} \to \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$.

8. ~~Completitudinea lui $\mathbb{R}, \mathbb{R}^n$~~ — NU

Teoremă: În $(\mathbb{R}^n, d_2)$ orice șir mărginit are un subșir convergent.

Teoremă: $(\mathbb{R}^n, d_2)$ este un spațiu metric complet (orice șir Cauchy este convergent)

Teoremă: În $\mathbb{R}$ un șir mărginit $(x_n)_n$ este convergent $\Leftrightarrow \overline{\lim}\, x_n = \underline{\lim}\, x_n$

9. Teorema Cesaro-Stolz

Teoremă: Fie $(a_n)_n$ și $(b_n)_n$ șiruri de numere reale a.î. $b_n \nearrow \infty$ și să $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$. Atunci $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$.

10. Serii - definiții, criterii de convergență

Def: S.n. serie o pereche de șiruri $((x_n)_{n\geq p}, (y_n)_{n\geq p})$ unde $y_n = \sum\limits_{k=p}^{n} x_k$.

Elementele x_n s.n. termenii seriei, iar elem. y_n - sume parțiale ale seriei.

Dacă $\exists \lim\limits_{n\to\infty} y_n$ s.n. suma seriei și s.n. $\sum\limits_{n\geq p} x_n$.

11. Noțiunea de topologie, mulțimi deschise, închise, vecinătăți.
Def. spațiului topologic asociat unui spațiu metric.

Def: $X=\mathbb{R}$. O mulțime $V\subset\mathbb{R}$ s.n. vecinătate a lui a dacă $\exists\, \varepsilon>0$ a.î. $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)\subset V$.

$\mathcal{V}_a = \{V\subset\mathbb{R} \mid V \text{- vecinătate a lui } a\}$

Def: O mulțime $\mathcal{T}\subset\mathcal{P}(X)$ s.n. topologie dacă:

1) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$
2) $D_1, D_2 \in \mathcal{T} \Rightarrow D_1\cap D_2 \in \mathcal{T}$
3) $(D_i)_{i\in I}\subset\mathcal{T} \Rightarrow \bigcup\limits_{i\in I} D_i \in \mathcal{T}$

(16) Proprietățile funcțiilor continue – NU

Propr: Fie $(X, \mathcal{T})$ un spațiu topologic, $a \in X$ și $f, g : X \to \mathbb{R}$ continue în a. Atunci:

1) f este local mărginită (mărg. pe o vecinătate a lui a)
2) $f+g$ și $f \cdot g$ sunt continue în a
3) $|f|$ este continuă în $a \Rightarrow \max(f,g)$ și $\min(f,g)$ sunt cont. în a
4) Dacă $f(x) \neq 0 \ \forall x \in X \Rightarrow \frac{1}{f}$ este cont. în a

(17) Caracterizarea fct. cont. în spațiu metric / topologic + dem.

Prop: Fie (X_1, d_1) și (X_2, d_2) spații metrice, $a \in X_1$ și $f : X_1 \to X_2$. A.U.A.S.E:

1) f este continuă în a
2) $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \delta_\varepsilon > 0$ a.î. $d_1(x, a) < \delta_\varepsilon \Rightarrow d_2(f(x), f(a)) < \varepsilon$
3) $\forall (x_n)_n \subset X_1$ a.î. $x_n \to a \Rightarrow f(x_n) \to f(a)$

Teoremă: Fie $(X_1, \mathcal{T}_1)$ și $(X_2, \mathcal{T}_2)$ spații topologice și $f : X_1 \to X_2$. AUASE

1) f este continuă pe X_1
2) $\forall D \in \mathcal{T}_2 \Rightarrow f^{-1}(D) \in \mathcal{T}_1$
3) $\forall F \subset X_2$ închisă $\Rightarrow f^{-1}(F)$ este închisă

(18). Convergența simplă și uniformă

Def: Fie A o mulțime și (X, d) spațiu metric și $f_n, f : A \to X$.

Spunem că f_n converge simplu la f și not. $f_n \xrightarrow{s} f$ dacă $\forall x \in A \Rightarrow f_n(x) \to f(x)$

$\forall x \in A$ și $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_{\varepsilon,x}$ a.î. $\forall n \geq n_{\varepsilon,x} \Rightarrow d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$

Spunem că f_n converge uniform la f și not. $f_n \xrightarrow{u} f$ dacă

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon$ a.î. $\forall n \geq n_\varepsilon \Rightarrow d(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon \quad \forall x \in A$

(19) Păstrarea cont. pt. limita unui șir de funcții

Prop: Fie $f_n, f : (a,b) \to \mathbb{R}$ și $c \in (a,b)$ a.î. $f_n \xrightarrow{u} f$ și f_n să fie continuă în c $\forall\, n \geq 1$. Atunci f este continuă în c.

(20). Păstrarea derivabilității pt. limita unui șir de funcții

Teoremă: $f_n, g : (a,b) \to \mathbb{R}$, $a,b \in \mathbb{R}$ a.î.:

1) $f_n' \xrightarrow{u} g$

2) $\exists\, c \in (a,b)$ a.î. $(f_n(c))_{n\geq 1}$ să fie convergentă.

Atunci $\exists\, f : (a,b) \to \mathbb{R}$ a.î.:

1) $f_n \xrightarrow{u} f$

2) $f' = g$

(21) Mărginirea funct. continue

Teoremă: Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continuă. Atunci $\exists\, c \in [a,b]$ a.î. $f(c) = \sup\limits_{x \in [a,b]} f(x)$.

(22) Mulțimi compacte (def., caract. în s.m./$\mathbb{R}^n$)

Def: Fie $(X, \mathcal{T})$ un spațiu topologic. O mulțime $K \subset X$ s.n. **compactă** dacă $\forall\, (D_i)_{i\in I} \subset \mathcal{T}$ a.î. $K \subset \bigcup\limits_{i\in I} D_i \Rightarrow \exists\, J \subset I$ finită a.î. $K \subset \bigcup\limits_{i \in J} D_i$.

Propoziție: Fie (X, d) spațiu metric și $K \subset X$. AUASE:

1) K este compactă

2) i) $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ a.î. $K \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} B(x_i, \varepsilon)$
   ii) K completă

3) K este secvențial compactă

Teoremă: În $(\mathbb{R}^n, d_2)$ o mulțime K este compactă $\Leftrightarrow$ este închisă și mărginită.

23 Funcție uniform continuă / Teorema privind uniform cont. fct. cont.

Def: Fie $f: X_1 \to X_2$. Unde X_1 și X_2 sunt spații metrice.

f este **uniform continuă** $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \delta_\varepsilon > 0$ a.î. $\forall x, y$ cu prop. $d_1(x,y) < \delta_\varepsilon \Rightarrow$
$\Rightarrow d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Teoremă: Fie $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continuă. Atunci f este uniform continuă.

24 Limita unei funcții + ~~legătura cu continuitatea~~

Def: Fie (X, τ_X) și (Y, τ_Y), $A \subset X$, $f: A \to Y$ și $a \in A'$. Spunem că f are limita $\alpha \in Y$ în a și notăm $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \alpha$ dacă

$$\forall V \in \mathcal{V}_\alpha \Rightarrow \exists W \in \mathcal{V}_a \text{ a.î. } \forall x \in W \cap A \setminus \{a\} \Rightarrow f(x) \in V.$$

$f: (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$, $a \in X$ f **continuă** în $a \Longleftrightarrow$

$$V \in \mathcal{V}_{f(a)} \Rightarrow f^{-1}(V) \in \mathcal{V}_a \Longleftrightarrow \forall V \in \mathcal{V}_{f(a)} \Rightarrow \exists W \in \mathcal{V}_a \text{ a.î. } W \subset f^{-1}(V) \Rightarrow$$

$$\forall V \in \mathcal{V}_{f(a)} \Rightarrow \exists W \in \mathcal{V}_a \text{ a.î. } f(W) \subset V \Rightarrow \exists W \in \mathcal{V}_a \text{ a.î. } x \in W \Rightarrow f(x) \in V$$

25 Derivata unei funcții

Def: Fie $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ și $c \in (a,b)$. Spunem că f este **derivabilă** în c dacă $\exists \lim\limits_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$ și notăm cu $f'(c) = \lim\limits_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$.

$$0 = \lim_{x \to c} \underbrace{\frac{f(x) - f(c) - f'(c)(x-c)}{x - c}}_{\omega(x) \to 0}$$

Def: Fie $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ și $c \in (a,b)$. Spunem că f este **derivabilă** în c dacă $\exists \alpha \in \mathbb{R}$ și $\omega: (a,b) \to \mathbb{R}$ a.î.

1) $f(x) = f(c) + \alpha(x - c) + \omega(x)(x - c)$

2) $\lim\limits_{x \to c} \omega(x) = 0$

26. Proprietățile fct. derivabile $(+, \cdot, \circ, ^{-1})$

Propr: Fie $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ derivabile în $c \Rightarrow$

$$\exists (f+g)'_{(c)} = f'_{(c)} + g'_{(c)} \text{ și } (f \cdot g)'_{(c)} = f'_{(c)} \cdot g_{(c)} + f_{(c)} \cdot g'_{(c)}$$

Propr: Fie $f : (a,b) \to (c,d)$ și $g : (c,d) \to \mathbb{R}$ și $x_0 \in (a,b)$. Dacă $\exists f'_{(x_0)}$ și $\exists g'_{(f_{(x_0)})} \Rightarrow \exists (g \circ f)'_{(x_0)} = f'_{(x_0)} \cdot g'(f_{(x_0)})$

Prop: Fie $f : (a,b) \to (c,d)$ bijectivă și $x_0 \in (a,b)$ a.î. $\exists f'_{(x_0)} \neq 0$ și f^{-1} să fie continuă în $f_{(x_0)} = y_0 \Rightarrow \exists (f^{-1})'_{(y_0)} = \dfrac{1}{f'_{(x_0)}}$.

27. TF, TR, TL, TC, TD + dem

28. T'H

29. I și a II-a teoremă a lui Taylor

Teorema lui Taylor: Fie $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ a.î. $\exists f^{(n)}$ pe (a,b) și $f^{(n+1)}_{(c)}$.

Atunci $\exists\ \omega : (a,b) \to \mathbb{R}$ a.î.

$$1)\ f_{(x)} = \underbrace{\sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}_{(c)}}{k!} (x-c)^{n+1}}_{T_{f, n+1, c}} + (x-c)^{n+1} \cdot \omega(x)$$

$T_{f,n+1,c} \to$ Polinomul Taylor asociat lui f de ord. $n+1$ în c

Teorema lui Taylor cu restul Lagrange:

Fie $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ derivabilă ~~de~~ $n+1$ ori pe (a,b) și $c \in (a,b)$. $\forall\ x \in (a,b) \Rightarrow$ $\exists\ \alpha$ între x și c a.î. $f_{(x)} = T_{f,n,c}(x) + \dfrac{f^{(n+1)}_{(\alpha)} \cdot (x-c)^{n+1}}{(n+1)!}$

$$\frac{f^{(n+1)}_{(\alpha)} \cdot (x-c)^{n+1}}{(n+1)!} = R_{f, n+1, c}$$

Derivabilitate

Def: Fie $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ și $c\in(a,b)$. Spunem că f este derivabilă în c dacă $\exists \lim\limits_{x\to c}\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}$ și not. $\boxed{f'(c)=\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}}$.

Propr 1: Fie $f,g:(a,b)\to\mathbb{R}$ derivabile în $c \Rightarrow$

$\exists \boxed{(f+g)'(c)=f'(c)+g'(c)}$ și $\boxed{(f\cdot g)'(c)=f'(c)\cdot g(c)+f(c)\cdot g'(c)}$

Propr. 2: Fie $f:(a,b)\to(c,d)$ și $g:(c,d)\to\mathbb{R}$ și $x_0\in(a,b)$. Dacă $\exists f'(x_0)$ și $g'(f(x_0)) \Rightarrow \exists \boxed{(g\circ f)'(x_0)=f'(x_0)\cdot g'(f(x))}$.

Propr. 3: Fie $f:(a,b)\to(c,d)$ bijectivă și $x_0\in(a,b)$ a.î. $\exists f'(x_0)\neq 0$ și f^{-1} să fie continuă în $\boxed{f(x_0)=y_0 \Rightarrow \exists (f^{-1})'(y_0)=\dfrac{1}{f'(x_0)}}$

21

Teorema Fermat: Fie $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ și $c\in(a,b)$ a.î. $\exists f'(c)$ și c - punct de extrem. Atunci $f'(c)=0$

Teorema lui Rolle: Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, derivabilă pe (a,b) și continuă pe $[a,b]$ a.î. $f(a)=f(b)$. Atunci $\exists\ c\in(a,b)$ a.î. $f'(c)=0$.

Teorema lui Lagrange: Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ a.î. f să fie derivabilă pe (a,b) și continuă pe $[a,b]$. Atunci $\exists\ c\in(a,b)$ a.î. $\boxed{f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}}$.

Corolar: Fie $f:(a,b)\to\mathbb{R}$, derivabilă pe (a,b).

1) f este constantă pe $(a,b) \Leftrightarrow f'=0$ pe (a,b)
2) f este crescătoare pe $(a,b) \Leftrightarrow f'(x)\geq 0\ \forall x\in(a,b)$
3) f este strict crescătoare pe $(a,b) \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x)\geq 0 \\ \text{și} \\ \{x \mid f'(x)>0\}=[a,b] \end{cases}$

Teorema Cauchy: Fie $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ continue pe $[a,b]$, derivabile pe (a,b) a.î. $g'(x)\neq 0\ \forall x\in(a,b)$. Atunci $g_{(b)}\neq g_{(a)}$ şi $\exists\ c\in(a,b)$ a.î. $\dfrac{f_{(b)}-f_{(a)}}{g_{(b)}-g_{(a)}}=\dfrac{f'_{(c)}}{g'_{(c)}}$

Teoremă: Fie $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ derivabilă pe (a,b). Atunci f' are proprietatea lui Darboux.

25

Teorema lui L'Hôpital: Fie $f,g:(a,b)\to\mathbb{R}$ derivabile pe (a,b) cu $g'(x)\neq 0\ \forall x\in(a,b)$ a.î. $\exists \lim\limits_{\substack{x\to b\\ x<b}}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=\ell$ şi $\lim\limits_{x\nearrow b}f(x)=\lim\limits_{x\nearrow b}g_{(x)}\in\{0,\pm\infty\}$

Atunci $\exists \lim\limits_{\substack{x\to b\\ x<b}}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\ell$.

(30) Teorema Cauchy-Hadamard pt. serii de puteri

Teoremă (Cauchy-Hadamard): Fie $\sum_{n\geq 0} a_n \cdot x^n$, $\rho = \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}}$ → s.n. raza de convergență și D - domeniul de convergență.

1) Dacă $\rho = \infty \Rightarrow D = \mathbb{R}$, dacă $\rho = 0 \Rightarrow D = \{0\}$ și dacă $\rho \in (0, \infty) \Rightarrow$ $(-\rho, \rho) \subset D \subset [-\rho, \rho]$

2) Dacă $0 < R < \rho \Rightarrow s$ este normal conv. pe $(-R, R)$

3) Dacă $s_1(x) = \sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1} \Rightarrow \rho_1 = \rho$ unde ρ_1 → raza lui ρ

4) Pe $\mathring{D}$ $s' = s_1$, $s^{(k)} = s_k$ unde $s_k = \sum_{n\geq 1} n(n-1)\dots(n-k+1) a_n x^{n-k}$

(31) Derivata, derivata parțială pt. funcții cu mai multe variabile

Def: O funcție $f:(a,b) \to \mathbb{R}^m$ s.n. derivabilă în c dacă $\exists$

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = f'(c)$$

$$f = (f_1, f_2, \dots, f_m) \qquad f'(c) = (f_1'(c), f_2'(c), \dots, f_m'(c))$$

Def: Fie $D = \mathring{D} \subset \mathbb{R}^n$, $a \in D$, $v \in \mathbb{R}^n$ $v \neq 0$ și $f: D \to \mathbb{R}^m$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+tv)-f(a)}{t} \qquad v = e_i = (0, \dots, 1, \dots)$$

$$\frac{\partial f}{\partial e_i}(a) = \frac{\partial f}{\partial x_i} = f'_{x_i} = \lim_{x_i \to a_i} \frac{f(a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_n)}{x_i - a_i = t}$$

Def: Fie $D = \mathring{D} \subset \mathbb{R}^n$, $f: D \to \mathbb{R}^m$ și $a \in D$. Spunem că f este derivabilă dacă $\exists\, T \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ a.î. $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)-T(x-a)}{\underbrace{\|x-a\|_2}_{d_2(x,a)}} = 0$; $T = f'(a)$

32. Prop. derivatei și ale deriv. parțiale (observații)

Obs 1: Derivata este unică.

Obs 2: Dacă f este derivabilă în $a \Rightarrow f$ continuă în a.

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} f(a) - f'(a)\underset{0}{(x-a)} + \|x-a\|\underset{0}{\omega(x)} = f(a)$$

Obs 3: Dacă $\exists f'(a) \Rightarrow \exists \frac{df}{dv}(a) = f'(a)(v)$ $\forall v \in \mathbb{R}^n \setminus \{v\}$

Obs 4: Fie $f: B(a,r) \to \mathbb{R}$ a.î. $\exists \frac{df}{dx_i}$ $\forall i=\overline{1,n}$ și M a.î. $\left|\frac{df}{dx_i}(x)\right| < M$ $\forall i=\overline{1,n}$ $\forall x\in B(a,r)$

$\Rightarrow f$ este continuă în a

Obs 5: Fie $f: B(a,r) \to \mathbb{R}$ a.î. $\exists \frac{df}{dx_i}$ pe $B(a,r)$ $\forall i=\overline{1,n}$ și $\frac{df}{dx_i}$ să fie continuă în a. Atunci $\exists f'(a)$.

33. Derivabilitatea funct. compuse, inverse.

Prop: Fie $D=\mathring{D}\subset\mathbb{R}^n$, $G=\mathring{G}\subset\mathbb{R}^m$, $f: D\to G$, $g: G\to\mathbb{R}^p$, $a\in D$ a.î. $\exists f'(a)$ și $\exists g'(f(a))$. Atunci $\exists (g\circ f)'(a) = g'(f(a))\cdot f'(a)$.

Prop: Fie $D=\mathring{D}$, $G=\mathring{G}\subset\mathbb{R}^n$. $f: D\to G$ bijectivă, $a\in D$ a.î. $\exists f'(a)$ și $\det f'(a) \neq 0$ (sau $\exists (f'(a))^{-1}$) și f^{-1} să fie continuă în $f(a)$. Atunci $\exists (f^{-1})'(f(a)) = (f'(a))^{-1}$

34. Def. deriv. parțiale de ordin II, a deriv. de ordin II

Def: Fie $D=\mathring{D}\subset\mathbb{R}^n$, $a\in D$, $f: D\to\mathbb{R}^m$ și $u,v\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$

$$\frac{d^2 f}{dv\,du}(a) = \frac{d}{dv}\left(\frac{df}{du}(a)\right) \quad ; (u=v)\ \frac{d^2 f}{du^2}$$

35. Teoremele lui Young și Schwarz

Teorema lui Young: Fie $f: D=\mathring{D}\subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ derivabilă pe D, $a\in D$ și $u,v\in \mathbb{R}^n\setminus\{0\}$. Dacă $\exists\, f''_{(a)} \Rightarrow \exists\, \frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}$ $\forall\, u,v\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ și

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}(a)=\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}=f''_{(a)}(u,v)=f''_{(a)}(v,u).$$

Teorema lui Schwarz: Fie $D=\mathring{D}\subset\mathbb{R}^n$, $f:D\to\mathbb{R}^m$, $u,v\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ și $a\in D$ a.î. $\exists\, \frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}$ și $\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}$ ~~și $\frac{\partial^2 f}{}$~~ să fie cont. în a. Atunci

$$\exists\, \frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}(a)=\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}(a).$$

36. Teorema lui Fermat pt. funcții de mai multe variabile – NU

Teorema Fermat: Fie $D=\mathring{D}\subset\mathbb{R}^n$, $f:D\to\mathbb{R}$ și $a\in D$ a.î. $\exists\, f'_{(a)}$ și a să fie punct de extrem local pentru f. Atunci $f'_{(a)}=0$.

37. Teorema lui Taylor de ordin II pt. funcții de mai multe variabile – NU

Teorema: Fie $D=\mathring{D}\subset\mathbb{R}^n$, $a\in D$ a.î. $\exists\, f'$ pe D și $f'_{(a)}$. Atunci $\exists\, \omega: D\to\mathbb{R}$ a.î.

1) $f(x)=f_{(a)}+f'_{(a)}(x-a)+\frac{1}{2}f''(a)(x-a,x-a)+\|x-a\|^2\omega(x)$

2) $\lim\limits_{x\to a}\omega_{(x)}=0$

38. Extreme locale pt. fct. cu m.m. var.

Teoremă: Fie $D=\mathring{D}\subset\mathbb{R}^n$, $a\in D$, $f:D\to\mathbb{R}$ derivabilă pe D a.î. $\exists\, f''_{(a)}$. Atunci:

1) Dacă a este minim local $\Rightarrow f'_{(a)}=0$ și $f''_{(a)}\geq 0$

2) Dacă $f'(a)=0$ și $f''_{(a)}>0 \Rightarrow a$ este minim local

3) Dacă a este punct de maxim local $\Rightarrow f'_{(a)}=0$ și $f''_{(a)}\leq 0$

4) Dacă $f'_{(a)}=0$ și $f''_{(a)}<0 \Rightarrow a$ este maxim local

39. Teorema multiplicatorilor lui Lagrange

Teorema: Fie $D=\mathring{D}\subset\mathbb{R}^n$, $f:D\to\mathbb{R}$, $f\in C^1$, $g:D\to\mathbb{R}^m$, unde $g\in C^1$ și $m<n$ și $a\in D$ a.î. a să fie punct de extrem local pentru f pe mulțimea $\{x\in\mathbb{R}^n \mid g(x)=0\}$ și rang $g'=m$. Atunci $\exists\, \lambda=\{\lambda_1,\dots,\lambda_m\}\in\mathbb{R}^m$ a.î. $h_{\lambda}(a)=0$ unde $h_{\lambda}(x)=f+\lambda_1 g_1+\lambda_2 g_2+\dots+\lambda_m g_m$

40. Teorema funcțiilor implicite

Teorema: Fie $D=\mathring{D}\subset\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m$, $(a,b)\in D$, $(a\in\mathbb{R}^n, b\in\mathbb{R}^m)$ și $f:D\to\mathbb{R}^m$ a.î. $f(a,b)=0$, $f\in C^1$ pe D și $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$ să fie inversabilă. Atunci $\exists\, V\in\mathcal{V}_a$, $\exists\, W\in\mathcal{V}_b$ a.î. $\exists!\, \varphi:V\to W$ a.î. $f(\varphi(x),x)=0$ și $V\times W\subset D$. φ este derivabilă în b ($f,g\in C^{(k)}\Rightarrow \varphi$ este derivabilă de ordin k în b)

41. Teorema de inversare locală – NU

Teoremă: Fie $D=\mathring{D}\subset\mathbb{R}^n$, $a\in D$, $f:D\to\mathbb{R}^n$ a.î. $f\in C^1$ pe D și $\exists\,(f'_{(a)})^{-1}\Rightarrow$ $\exists\, G_1=\mathring{G}_1\subset D$ și $G_2=\mathring{G}_2\subset\mathbb{R}^n$ a.î. $f:G_1\to G_2$ să fie bijectivă și f^{-1} continuă. $(f^{-1})'_{(f(a))}=(f'_{(a)})^{-1}$ – derivabilitatea funcției inverse

42. Suma Riemann și sumele Darboux sup/inf.

Def: Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ mărginită, $\Delta = a = x_0<x_1<\dots<x_n=b$

$S_\Delta(f)$ – suma Darboux superioară asociată diviziunii Δ și funcției f

$$S_\Delta(f)=\sum_{i=0}^{n-1} M_i(x_{i+1}-x_i) \qquad M_i=\sup_{x\in[x_i,x_{i+1}]}(f(x))=\sup f([x_i,x_{i+1}])$$

$$\sigma_\Delta(f,(\alpha_i)_{i=\overline{0,n-1}})=\sum_{i=0}^{n-1} f(\alpha_i)(x_{i+1}-x_i)\ ;\ \alpha_i\in[x_i,x_{i+1}]$$ → suma Riemann

$$s_\Delta(f)=\sum_{i=0}^{n-1} m_i(x_{i+1}-x_i)\ ;\ m_i=\inf_{x\in[x_i,x_{i+1}]} f(x)$$ – suma Darboux inferioară

(43) Def. integralei, integralei sup./inf.

Def: O funcție mărginită $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ s.n. integrabilă Riemann dacă $\exists\, I\in\mathbb{R}$ a.î. $\forall\, \varepsilon>0 \Rightarrow \exists\, \delta_\varepsilon$ a.î. $\|\Delta\| = \max\limits_{i=\overline{0,n-1}}(x_{i+1}-x_i)<\delta_\varepsilon \Rightarrow$

$$\Rightarrow |I - \sigma_\Delta(f,(\xi_i)_{i=\overline{0,n-1}})|<\varepsilon$$

$$I=\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f$$

$\overline{\int_a^b} f = \inf\limits_\Delta S_\Delta(f)$ → integrala superioară

$\underline{\int_a^b} f = \sup\limits_\Delta s_\Delta(f)$ → integrala inferioară

(44) Teorema privind integrabilitatea Darboux pt. fct. int. Riemann (~~dem~~)

Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ integrabilă Riemann. Atunci $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$.

(45). Teorema și Lema Darboux

Teoremă: Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ mărginită. A.U.A.S.E:

1) f este integrabilă Riemann

2) $\overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f$

3) $\forall\,\varepsilon>0 \Rightarrow \exists\,\delta_\varepsilon>0$ a.î. $\|\Delta\|<\delta_\varepsilon \Rightarrow S_\Delta(f)-s_\Delta(f)<\varepsilon$

4) $\forall\,\varepsilon>0 \Rightarrow \exists\,\Delta$ a.î. $S_\Delta(f)-s_\Delta(f)<\varepsilon$

Lemă: Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ mărginită. Atunci:

$\forall\,\varepsilon>0\ \exists\,\delta_\varepsilon$ a.î. $\|\Delta\|<\delta_\varepsilon \Rightarrow S_\Delta(f)-\overline{\int_a^b} f<\varepsilon$ $\left(\Leftrightarrow \overline{\int_a^b} f = \lim\limits_{\|\Delta\|\to 0} S_\Delta(f) \Leftrightarrow\right.$

$\left.\forall\,(\Delta_n)_{n\geq 1}\text{ a.î. } \|\Delta\|_n\to 0 \Rightarrow S_{\Delta_n}(f)\to \overline{\int_a^b} f\right)$

46. Teorema privind integrabilitatea fct. cont. și monotone (+dem)

Teoremă: Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continuă. Atunci f este integrabilă Riemann.

Def: f este continuă pe $[a,b] \Rightarrow f$ este uniform continuă pe $[a,b]$.

Teoremă: Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ monotonă. Atunci f este integrabilă Riemann.

47. Propr. fct. integrabile (+,·)

Teoremă: Fie $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ integrabile Riemann. Atunci $f+g, \alpha f, f\cdot g, |f|$ sunt integrabile Riemann. $\int_a^b f+g = \int_a^b f + \int_a^b g$ și $\int_a^b \alpha f = \alpha\int_a^b f$.

48. Integrabilitatea limitei unui șir de fct. (+dem)

Prop: Fie $f_n, f:[a,b]\to\mathbb{R}$ a.î. $f_n \xrightarrow{u} f$. Atunci f este integrabilă Riemann și $\int_a^b f = \lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b f_n$.

49. Teorema lui Lebesgue + def. unei mulțimi neglijabile

Def: $A\subset\mathbb{R}$ s.n. neglijabilă Lebesgue dacă

$\forall \varepsilon>0\ \exists (I_n=(a_n,b_n))_{n\geq1}$ a.î. $A\subset\bigcup\limits_{n\geq1} I_n$ și $\sum\limits_{n\geq1} \ell(I_n) = \sum\limits_{n\geq1} b_n-a_n<\varepsilon$

$\ell(I_n)$ - lungimea intervalului I_n

Teoremă (Lebesgue): Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ mărginită. f este int. Riemann $\Leftrightarrow$

$\Rightarrow D_f=\{x \mid f$ discont. în $x\}$ este neglijabilă Lebesgue.

50. Teorema Leibniz-Newton (+dem)

Teoremă: Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ derivabilă cu f' integrabilă Riemann.

Atunci $\int_a^b f'(t)\,dt = f(b)-f(a)$.

51. Teorema de int. prin părți, schimbare de var.

Prop: Fie $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ derivabile cu f', g' integrabile Riemann. Atunci $f \cdot g'$ și $g \cdot f'$ sunt int. Rie. și $\int_a^b f_{(x)} \cdot g'_{(x)} dx = f_{(b)} g_{(b)} - f_{(a)} g_{(a)} - \int_a^b f'_{(x)} \cdot g_{(x)} dx$

Prop: Fie $f : [c,d] \to \mathbb{R}$ continuă, $\varphi : [a,b] \to [c,d]$ bijectivă, crescătoare și $\varphi \in C^1$. Atunci $f \circ \varphi$ și $f \circ \varphi \circ \varphi'$ sunt int. Rie. și $\int_c^d f_{(y)} dy = \int_a^b f(\varphi_{(t)}) \cdot \varphi'_{(t)} dt$.

52. Variația unei funcții → proprietăți

Def: Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ mărginită și $\Delta = a < x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$

$$V_\Delta(f) = \sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| \qquad \overset{b}{\underset{a}{V}}(f) = \sup_\Delta V_\Delta(f)$$

f s.n. cu variație mărginită dacă $\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) < \infty$.

Propr: $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$

1) $V_\Delta(f) = |f_{(b)} - f_{(a)}| \Rightarrow \overset{b}{\underset{a}{V}}(f) \geq |f(b) - f(a)|$

2) $\Delta_1 \subset \Delta_2 \quad V_{\Delta_1}(f) \geq V_{\Delta_2}(f)$

3) $V_\Delta(\alpha f) = |\alpha| \cdot V_\Delta(f) \Rightarrow \overset{b}{\underset{a}{V}} |\alpha f| = |\alpha| \cdot \overset{b}{\underset{a}{V}}(f)$

4) $\overset{b}{\underset{a}{V}}(f+g) \leq \overset{b}{\underset{a}{V}}(f) + \overset{b}{\underset{a}{V}}(g)$

5) $\overset{b}{\underset{a}{V}}(f \cdot g) \leq \|f\|_\infty \overset{b}{\underset{a}{V}}(g) + \|g\|_\infty \overset{b}{\underset{a}{V}}(f) \qquad \|f\|_\infty = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|$

6) $\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) = 0 \Leftrightarrow f$ este constantă

7) $f \nearrow \Rightarrow \overset{b}{\underset{a}{V}} f = f(b) - f(a) \qquad f \searrow \Rightarrow \overset{b}{\underset{a}{V}}(f) = f(a) - f(b)$

8) $\overset{b}{\underset{a}{V}}(|f|) \leq \overset{b}{\underset{a}{V}}(f)$

9) $\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) < \infty \Rightarrow \exists\, g, h : [a,b] \to \mathbb{R}$ crescătoare a.î. $f = g - h$

10) $\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) = \overset{c}{\underset{a}{V}}(f) + \overset{b}{\underset{c}{V}}(f)$

11) f' este int. Rieman $\Rightarrow \overset{b}{\underset{a}{V}}(f) = \int_a^b |f'|_{(t)} dt$

53. Lungimea unui drum, integrala curbilinie de tip I, II + prop

Def: Fie (X,d) un spațiu metric. O funcție continuă $\gamma:[a,b]\to X$ s.n. drum.

Δ - diviziune a lui $[a,b]$

$$V_\Delta(\gamma)=\sum_{i=0}^{n-1} d(x_{i+1},x_i)$$

$$l_\gamma=\bigvee_a^b(\gamma)=\sup_\Delta V_\Delta(\gamma)\cancel{=\int_a^b\|\gamma'\|_2\,dt}$$

Def: Fie $D=\mathring{D}\subset\mathbb{R}^n$, $\gamma:[a,b]\to D$, $\gamma\in C^1$ și $f:D\to\mathbb{R}$ continuă

$$l_\gamma=\bigvee_a^b(\gamma)=\sup_\Delta V_\Delta(\gamma)=\int_a^b\|\gamma'\|_2\,dt \qquad V_\Delta(\gamma)=\sum_{i=0}^{n-1}\|\gamma_{(x_{i+1})}-\gamma_{(x_i)}\|$$

$$\boxed{\int_\gamma f\,dl=\int_a^b f(\gamma_{(t)})\cdot\|\gamma'_{(t)}\|_2\,dt}$$

Prop:

1) $\int_\gamma (f+g)\,dl=\int_\gamma f\,dl+\int_\gamma g\,dl$

2) $\int_\gamma \alpha f\,dl=\alpha\int_\gamma f\,dl$

3) $\left|\int_\gamma f\,dl\right|\le \sup_{x\in\gamma[a,b]}|f(x)|\cdot l_\gamma$

4) $(\gamma_1,\dots,\gamma_n)$ este o descompunere a lui $\gamma\Rightarrow\int_\gamma f\,dl=\sum_{i=1}^n f\,dl$

5) $\int_{\gamma^-} f\,dl=\int_\gamma f\,dl$

6) $f_n\xrightarrow{u}f$, $\int_\gamma f_n\to\int_\gamma f$

7) $\gamma_n'\xrightarrow{u}\gamma$ $\int_{\gamma_n}f\to\int_\gamma f$

8) $\gamma_1\sim\gamma_2\Rightarrow\int_{\gamma_1}f\,dl=\int_{\gamma_2}f\,dl$

4.6

17. Integrala curbilinie de primul tip - def și propr.

Def Fie $\gamma : [a,b] \to R^n$, $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t) \dots \gamma_n(t))$ drum de clasă C^1 ($\gamma_1, \gamma_2 \dots \gamma_n$ sunt functii de clasă C^1 pe $[a,b]$).

Fie $f : D \to \mathbb{R}$ functie continuă

$$\int_\gamma f\,dl = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \|\gamma'(t)\|_2\,dt$$

Propr Fie $\gamma : [a,b] \to D = \mathring{D} \subset R^n$, $\gamma \in C^1$ pe portiuni și $f, g : D \to \mathbb{R}^n$ continue. Atunci

1) $\int_\gamma (f+g)\,dl = \int_\gamma f\,dl + \int_\gamma g\,dl$

2) $\int_\gamma c \cdot f\,dl = c \cdot \int_\gamma f\,dl$

3) γ_1, γ_2 este o descompunere a lui $\gamma \Rightarrow \int_\gamma f\,dl = \int_{\gamma_1} f\,dl + \int_{\gamma_2} f\,dl$

4) $\left|\int_\gamma f\,dl\right| \le l_\gamma \cdot \sup_{t \in \gamma([a,b])} |f(t)|$

5) $\gamma_1 \sim \gamma_2 \Rightarrow \int_{\gamma_1} f\,dl = \int_{\gamma_2} f\,dl$.

18. Integrala curbilinie de al doilea tip - def și propr.

Def Fie $D = \mathring{D} \subset \mathbb{R}^n$ și ω o formă diferențială continuă $\omega = \sum_{i=1}^n P_i\,dx_i$ și $\gamma : [a,b] \to R^n$, $\gamma \in C^1$

$$\int_\gamma \omega = \sum_{i=1}^n \int_a^b P_i(\gamma(t)) \cdot \gamma_i'(t)\,dt$$

Dacă notăm $F = (P_1, P_2 \dots P_n) : D \to R^n$ și produsul scala $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ $\Rightarrow$

$$\int_\gamma \omega = \int_a^b \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle\,dt$$

<u>Propr</u> 1) $\int_\gamma (\omega_1 + \omega_2) = \int_\gamma \omega_1 + \int_\gamma \omega_2$

2) $\int_\gamma a\omega = a\int_\gamma \omega$

3) $\int_{(\gamma_1, \gamma_2)} \omega = \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2} \omega$

4) $\int_\gamma \omega = -\int_{\gamma^-} \omega$

5) $\gamma_1 \sim \gamma_2 \Rightarrow \int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega$

(?)(?)

19. Teorema Leibnitz - Newton pt. integrale curbilinii.

<u>Teoremă</u> Fie $f : D = \overset{\circ}{D} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f \in C^1$ și $\gamma : [a,b] \to D$ drum de clasă C^1 pe porțiuni. Atunci:

$$\int_\gamma df = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

<u>Dem</u> Presupunem că $\gamma \in C^1$

$$\int_\gamma df = \int_\gamma \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i = \int_a^b \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\gamma(t)) \cdot \gamma_i'(t)\,dt =$$

$$= \int_a^b (f \circ \gamma)'\,dt = (f \circ \gamma)(b) - (f \circ \gamma)(a)$$

20. Condiții echivalente ca o formă diferențială să admită primitive + dem.

<u>Teoremă</u> Fie $D = \overset{\circ}{D} \subseteq \mathbb{R}^n$ un domeniu și ω o formă diferențială (continuă pe D). Atunci următ. afirmații sunt echivalente:

1) $\exists\, f : D \to \mathbb{R}$, $f \in C^1$ a.î. $df = \omega$

2) $\forall\, \gamma : [a,b] \to D$, $\gamma \in C^1$, închis $\Rightarrow \int_\gamma \omega = 0$

3) $\forall\, \gamma_1, \gamma_2 : [0,1] \to D$ $(\gamma \in C^1)$ a.î.

$\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$ și $\gamma_1(1) = \gamma_2(1) \Rightarrow \int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega$

(47) Teorema lui Leibniz-Newton pentru forme diferențiale (+dem.)

Fie $D = \mathring{D} \subset \mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}$, $f \in C^1$ și $\gamma : [a, b] \to D$. Atunci $\int_\gamma df = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$

(48) Caracterizarea alternativă a existenței primitive

Fie $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. O funcție se numește primitivă a funcției f pe I, orice funcție $F : I \to \mathbb{R}$ observabilă pe I și cu proprietatea că $F' = f$ pe I ($F'(x) = f(x), \forall x \in I$)

(49) Lema lui Poincare

Fie $D = \mathring{D}$ un domeniu stelat în raport cu $a \in D$ și $\omega = \sum_{i=1}^{n} P_i dx_i$ o formă diferențială de clasă C^1

Dacă $\frac{\partial P_i}{\partial x_j} = \frac{\partial P_j}{\partial x_i}$ $\forall i, j = \overline{1,n}$, $i \neq j$, atunci ω este exactă, adică $\exists f : D \to \mathbb{R}$ a.î. $df = \omega$

(50) Măsura unei mulțimi, măsura sup și inf

Fie $A \subset \mathbb{R}^n$ mărginită

$\mu^*(A) = \inf\limits_{\substack{A \subseteq E \\ E \text{ elementară} \\ E \subset \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)}} v(E)$ → măsura superioară a lui A

$\mu_*(A) = \sup\limits_{\substack{E \subseteq A \\ E \text{ elementară}, E \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)}} v(E)$

μ s.n. măsurabilă Jordan dacă $\mu^*(A) = \mu_*(A)$

(51) Comportarea măsurii inferioare, superioare în raport cu $\cup, \setminus, \cap$

Fie $A, B \subset \mathbb{R}^n$ mărginită. Atunci:

1) $\mu^*(A \cup B) + \mu^*(A \cap B) \leq \mu^*(A) + \mu^*(B)$

2) $\mu_*(A \cup B) + \mu_*(A \cap B) \geq \mu_*(A) + \mu_*(B)$

Dacă $B \subset A \Rightarrow$ 3) $\mu^*(A \setminus B) \leq \mu^*(A) - \mu_*(B)$

4) $\mu_*(A \setminus B) \geq \mu_*(A) - \mu^*(B)$

Dacă $A \subset B \Rightarrow \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$

52) Propoziție privind caracterizarea mulțimilor măsurabile în raport cu frontiera

Fie $M \subset \mathbb{R}^n$ mărginită. Atunci urm. afirmații sunt echiv.:

1) $M \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$

2) $\mathring{M}, \bar{M} \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ și $\mu(\mathring{M}) = \mu(\bar{M})$

3) $\mu^*(Fr(M)) = 0$

În acest caz $\mu(\mathring{M}) = \mu(\bar{M}) = \mu(M)$

53) Dreptunghiuri, mulțimi elementare

Dreptunghi

O mulțime $D = \overset{n}{\underset{i=1}{\times}} [a_i, b_i]$ se numește dreptunghi $(a_i < b_i)$

$\bar{D} = \overset{n}{\underset{i=1}{\times}} [a_i, b_i] \to$ dreptunghi închis

$\mathring{D} = \overset{n}{\underset{i=1}{\times}} (a_i, b_i) \to$ dreptunghi deschis

$v(D) = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$ - volumul lui D

Mulțime elementară

O mulțime $E = \bigcup_{i=1}^{n} D_i$ se numește elementară, unde D_i - dreptunghi. $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ - mulțime elementară

$v(E) = \sum_{i=1}^{m} v(D_i)$ dacă $D_i \cap D_j = \emptyset \; \forall i \neq j$ - vol. m. el.

54) Teorema lui Fubini

Fie $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ și $B \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^m)$, $A \times B \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^{n+m})$ și $f : A \times B \to \mathbb{R}$ integrabilă Riemann și $\bar{F}, \underline{F} : A \to \mathbb{R}$, $\bar{F}(x) = \bar{\int_A} f(x,y)\,dy$ și $\underline{F}(x) = \underline{\int_A} f(x,y)\,dy$.

Atunci $\bar{F}$ și $\underline{F}$ sunt integrabile Riemann și

$$\iint_{A \times B} f(x,y)\,dx\,dy = \int_A \bar{F}(x)\,dx = \int_A \left(\bar{\int_B} f(x,y)\,dy \right) dx = \int_A \underline{F}(x)\,dx$$

Dacă f e uniform continuă $\iint_{A \times B} f(x,y)\,dx\,dy = \int_A \left(\int_B f(x,y)\,dy \right) dx$

55) Teorema de schimbare de variabilă (~~mai multe variabile~~)

Fie $D = \mathring{D}$ și $G = \mathring{G}$ mulțimi deschise în $\mathbb{R}^n$

$\varphi : D \to G$ bijectivă, $A \subset \mathbb{R}^n$ a.î. $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ și $\bar{A} \subset D$

și $f : \varphi(A) \to \mathbb{R}$ integrabilă Riemann. Atunci $\Rightarrow$

$\Rightarrow f \circ \varphi \cdot \det(\varphi) : A \to \mathbb{R}$ este integrabilă Riemann și

$$\int_{\varphi(A)} f(y)\,dy = \int_A (f \circ \varphi)(x) \cdot |\det \varphi'(x)|\,dx$$

56) Teorema lui Darboux pentru funcții de mai multe variabile

Fie $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$, $f : A \to \mathbb{R}$ mărginită. AUASE: (Atunci urm. afirm. sunt (⇔))

1) f este integrabilă Riemann
2) $\overline{\int_A} f = \underline{\int_A} f$
3) $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\ \mathcal{A} = (A_i)_{i \in I}$ a.î. $S_{\mathcal{A}}(f) - s_{\mathcal{A}}(f) < \varepsilon$
4) $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\ \delta_\varepsilon > 0$ a.î. $\forall\ \mathcal{A}$ cu $\|\mathcal{A}\| < \delta_\varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow S_{\mathcal{A}}(f) - s_{\mathcal{A}}(f) < \varepsilon$