LIA ARAMĂ ★ TEODOR MOROZAN

culegere de PROBLEME de calcul diferențial și integral

Funcții, Derivate, Primitive, Integrale definite

EDITURA TEHNICĂ
București — 1964

Acest volum cuprinde circa 900 de probleme rezolvate și probleme cu răspunsuri din capitolele funcții, derivate, primitive și integrale definite, linia lucrării fiind aceeași cu a „Manualului de Analiză matematică“, vol. I, de acad. Miron Nicolescu, N. Dinculeanu și S. Marcus; autorii insistă asupra noțiunilor de funcție — în sensul cel mai general — de limită, de convergență, de continuitate uniformă, de primitivă, de integrală definită și semnalează de fiecare dată aspecte subtile, care de multe ori scapă la o cercetare grăbită.

Se adresează studenților de la facultățile de matematică-mecanică și de fizică, studenților de la institutele tehnice, precum și tuturor celor interesați să cunoască aspecte noi în probleme de analiză matematică.

PREFAȚĂ

Publicațiile matematice au cunoscut, în anii de după elib... și mai cu deosebire în anii puterii populare, o înflorire pe ... n-ar fi putut s-o conceapă nici un cercetător științific al epocii d... cele două războaie mondiale. De această înflorire a beneficia... particular, analiza matematică: s-au publicat ori s-au litogr... cursuri, s-au tipărit tratate și manuale, la diferite nivele, ... tradus din limba rusă cursuri de largă circulație. În sfîrșit, în c... rile de matematică superioară, destinate institutelor tehnice ... facultăților de fizică, analiza matematică are o importantă dezvol...

Această concentrare a atenției asupra expunerii teoriei gen... a lăsat pe planul al doilea problemea aplicațiilor, a culegeril... exerciții. S-au tradus, este drept, și s-au tipărit în numeroase e... culegeri de probleme și exerciții de analiză din limba rusă. ... tocmai această repetată tipărire a unor traduceri constituie un ... al unei nevoi care se cerea mai larg împlinită.

Plecînd de la această constatare, colectivul catedrei de c... diferențial și integral de la Facultatea de matematică a Univ...tății din București a proiectat, cu ani în urmă, publicarea ... culegeri de exerciții și probleme de analiză matematică, trecut... prealabil prin experiența seminariilor catedrei.

Pînă la urmă, sarcina strîngerii și redactării materialul... revenit colectivului Lia Aramă și Teodor Morozan, asistenț... catedra susamintită.

Trebuie să menționez, totuși, că adunarea materialului, org...zarea și definitivarea sa, ca și întregul plan al cărții, sînt — în ... șitoare măsură — rezultatul străduinței autoarei Lia Aramă.

În numeroase direcții, acest volum aduce ceva nou față de ...mele similare cunoscute cititorilor noștri.

În primul rînd, ideea de a începe fiecare capitol cu un scurt ...mat al teoriei mi se pare foarte bună. Acest rezumat este urm... un număr de probleme, complet rezolvate, după care cititorii ...

tatele sau — în cazuri excepționale — indicații asupra metod… urmat.

În lumea pedagogilor, părerile sînt împărțite asupra celei eficiente prezentări a unei culegeri de probleme. Ca urmare, dif… culegeri de probleme (de analiză matematică, de exemplu) au st… turi diferite. Unii autori, în prima parte a cărții, pun pe citi… în fața enunțurilor problemelor, cerîndu-le să facă singuri efor… pentru rezolvarea lor; în a doua parte a volumului, înșiră lac… rezultatele, fără nici o indicație. O asemenea poziție îmi apare … excesiv de severă.

O lungă experiență didactică, adăugată la anii experienței, partea cealaltă a baricadei, din anii studenției, m-a făcut să înțe… că studenții, ca și toți cei care se dedică studiului matematicii, procesul de aplicare — prin rezolvarea de probleme — a teor… însușite, învață nu atît să rezolve probleme, cît mai ales metode rezolvare, scheme de raționamente. Aceste metode și scheme treb… să-și găsească locul lor natural în orice culegere de probleme. De a… necesitatea unui număr de probleme amănunțit tratate, la fieca… capitol al teoriei.

Culegerea de față se deosebește de alte culegeri din domeniul an… lizei matematice nu numai prin structură, dar și prin conținut. Cadrul tradițional al clasicelor culegeri de probleme de analiză es… considerabil lărgit. În afara capitolelor consacrate calculului d… derivate, de primitive, de integrale definite, de volume, de arii, d… lungimi de arce, s-a considerat necesar să se atragă atenția citito… rului asupra altor noțiuni de bază ale analizei, ca noțiunea de func… ție, în sensul său cel mai general (chiar limitîndu-ne la cazul nume… ric), dezbărat de ideea de reprezentare analitică, de șir numeric (ca… particular fundamental al noțiunii de funcție), de continuitate, de continuitate uniformă, de limită, de convergență uniformă.

Toate aceste noțiuni sînt impuse atenției cititorului prin probleme rezolvate și comentate, prin exemple, prin contra-exemple.

În acest mod, cititorul nu capătă numai rutina rezolvării problemelor curente, lucru indispensabil, dar este invitat să reflecteze serios asupra noțiunilor fundamentale ale analizei, să păstreze o atitudine deschisă la dezvoltările ulterioare de care va putea lua cunoștință mai tîrziu.

Așa cum este concepută, cartea va fi utilă tuturor celor care studiază analiza matematică, studenți sau nu.

Ea va fi folositoare îndeosebi acelora care nu locuiesc în centre universitare și care, deci, trebuie să recurgă la singurul ajutor al cuvîntului scris.

Acad. MIRON NICOLESCU

TABLA DE MATERIE

OȚIUNI INTRODUCTIVE

…egalități. Ecuații

… sau *valoarea absolută* a numărului x se notează $|$…
…ste astfel

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{dacă } x > 0 \\ 0, & \text{dacă } x = 0 \\ -x, & \text{dacă } x < 0. \end{cases}$$

… are următoarele proprietăți:

… ≥ 0 oricare ar fi x; $|x| = 0$ dacă și numai dacă $x =$ …
$= |-x|$
$y| \leq |x| + |y|$
$-|y|\,\big| \leq |x - y|$
$= |x| \cdot |y|$.
… $x| \leq c$, atunci $-c \leq x \leq c$ și reciproc, dac…
…, atunci $|x| \leq c$.
… $x| \geq c$, atunci $x \geq c$ sau $x \leq -c$. Reciproc, dac…
…lităţile $x \geq c$, $x \leq -c$ are loc, atunci $|x| \geq$ …

$c \leq x \leq -c$

Exerciții rezolvate

…ze următoarele inegalități:

… $| \leq 0{,}01$.

… proprietății (*f*), inegalitatea $|x - 1| \leq 0{,}01$ est…

… $-1 \leq 0{,}01$,

…em $+0{,}99 \leq x \leq 1{,}01$ sau $x \in [0{,}99,\ 1{,}01]$.

… $| \geq 3$.

Deci inegalitatea este ...

3. $\frac{1}{2} \leqslant |x| \leqslant 3.$

Dacă $|x| \geqslant \frac{1}{2}$, conform proprietății (g), rezultă că $x \leqslant$ sau $x \geqslant \frac{1}{2}$; dacă $|x| \leqslant 3$, conform proprietății (f), s $-3 \leqslant x \leqslant 3$. Inegalitățile vor fi simultan satisfăcute $-3 \leqslant x \leqslant -\frac{1}{2}$ sau $\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 3$, ceea ce mai putem scrie

$$x \in \left[-3, -\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{2}, 3\right].$$

4. $|x-1| + |x| > 1.$

Conform definiției, avem

$$|x-1| = \begin{cases} x-1, \text{ dacă } x-1>0, \text{ adică dacă } x \ldots \\ 0, \text{ dacă } x=1 \\ 1-x, \text{ dacă } x-1<0, \text{ adică dacă } x \ldots \end{cases}$$

$$|x| = \begin{cases} x, \text{ dacă } x>0 \\ 0, \text{ dacă } x=0 \\ -x, \text{ dacă } x<0. \end{cases}$$

Pentru $x \in (-\infty, 0)$, $|x-1| = 1-x$, $|x| = -x$ ... galitatea devine $1-x-x>1$ sau $1-2x>1$, de und... nem $x<0$.

Inegalitatea dată este deci satisfăcută pentru orice $x \in (-$ ...

Dacă $x \in (0, 1)$, $|x-1| = 1-x$, $|x| = x$ și inega... ia forma $1-x+x>1$ sau $1>1$, ceea ce este absurd.

Dacă $x \in (1, \infty)$, $|x-1| = x-1$, $|x| = x$ și avem x ... $+x>1$ sau $2x>2$, $x>1$. Orice $x \in (1, \infty)$ satisface in... tatea dată.

Constatăm că pentru $x=0$, $x=1$, obținem $1>1$, ... este absurd.

În concluzie, inegalitatea $|x-1| + |x| > 1$ este sati...

350 · 2
500
175.000

5. $|x^2-3x+2| < |x+2|.$

Conform definiției, avem

$$|x^2-3x+2| = \begin{cases} x^2-3x+2, \text{ dacă } x^2-3x+2>0, \text{ adică} \\ \qquad \text{dacă } x \in (-\infty, 1) \cup (2, \infty) \\ -x^2+3x-2, \text{ dacă } x^2-3x+2<0, \text{ adică} \\ \qquad \text{dacă } x \in (1, 2) \\ 0, \text{ dacă } x=1 \text{ sau } x=2 \end{cases}$$

$$|x+2| = \begin{cases} x+2, \text{ dacă } x>-2, \\ 0, \text{ dacă } x=-2 \\ -x-2, \text{ dacă } x<-2. \end{cases}$$

Să presupunem că $x \in (-\infty, -2)$. În acest caz, inegalitatea devine $x^2-3x+2 < -x-2$ sau $(x-2)^2 < 0$, ceea ce este imposibil.

Pentru $x=-2$, obținem $12<0$, ceea ce este absurd.

Dacă $x \in (-2, 1)$, inegalitatea devine $x^2-3x+2 < x+2$ sau $x^2-4x<0$. Deoarece $x^2-4x<0$ cînd $x \in (0, 4)$, rezultă că pentru orice $x \in (0, 1)$ inegalitatea este satisfăcută.

Pentru $x=1$, obținem $0<3$.

Pentru $x \in (1, 2)$, inegalitatea ia forma $-x^2+3x-2 < x+2$ sau $(x-2)^2>0$, ceea ce are loc pentru orice x.

Pentru $x \in (2, \infty)$, inegalitatea se scrie $x^2-3x+2 < x+2$ sau $x^2-4x<0$; inegalitatea este verificată dacă $x \in (0, 4)$.

Dacă $x=2$, inegalitatea este verificată, deoarece obținem $0<4$.

În concluzie, inegalitatea $|x^2-3x+2| < |x+2|$ este satisfăcută dacă $x \in (0, 4)$.

Să se exprime cu ajutorul modulului următoarele inegalități:

6. $y-\frac{1}{2} < x < y+\frac{1}{2}.$

Putem scrie $-\frac{1}{2} < x-y < \frac{1}{2}$ și ținînd seama de proprietatea (f), $|x-y| < \frac{1}{2}$.

7. $-2 < x < 6.$

Vom scrie inegalitatea în modul următor: $2-4 < x < 2+4$ sau $-4 < x-2 < 4$, care este echivalentă cu $|x-2| < 4$. Observăm că 2 este mijlocul intervalului $(-2, 6)$.

8. Dacă $x \in (a, b)$, atunci $\left| x - \frac{a+b}{2} \right| < \frac{b-a}{2}$ și reciproc.

Într-adevăr, dacă $a < x < b$, atunci $-\frac{b-a}{2} + \frac{a+b}{2} < x <$ $< \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}$, deci $\left| x - \frac{a+b}{2} \right| < \frac{b-a}{2}$. Reciproca este evidentă.

9. $x \geqslant \frac{1}{2} - y$ sau $x \leqslant -y - \frac{1}{2}$.

Avem $x + y \geqslant \frac{1}{2}$ sau $x + y \leqslant -\frac{1}{2}$, ceea ce — datorită poprietății (g) — se scrie $| x + y | \geqslant \frac{1}{2}$.

Să se rezolve următoarele ecuații:

10. $| \cos x | = \cos x + 1$.

Pentru valorile lui x pentru care $\cos x > 0$,

$$| \cos x | = \cos x$$

și ecuația se scrie

$$\cos x = \cos x + 1.$$

Nu avem soluții dacă $\cos x = 0$.

Dacă $\cos x < 0$,

$$| \cos x | = -\cos x,$$

iar ecuația ia forma

$$-\cos x = \cos x + 1,$$

de unde $\cos x = -\frac{1}{2}$.

Soluțiile ecuației sînt $x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

11. $| x + 1 | = 3 | x |$.

Conform definiției,

$$| x + 1 | = \begin{cases} x + 1, & \text{dacă } x + 1 > 0, \text{ adică dacă } x > -1 \\ 0, & \text{dacă } x = -1 \\ -x - 1, & \text{dacă } x + 1 < 0, \text{ adică dacă } x < -1. \end{cases}$$

Pentru $x < -1$, ecuația devine $-x - 1 = -3x$ sau $2x = 1$, de unde $x = \frac{1}{2}$, ceea ce este contradictoriu cu ipoteza $x < -1$.

Pentru $x = -1$, obținem $-3x = 0$.

Dacă $-1 < x < 0$, ecuația se scrie $x + 1 = -3x$ sau $4x = -1$, $x = -\frac{1}{4}$.

Pentru $x > 0$, ecuația devine $x + 1 = 3x$, de unde $x = \frac{1}{2}$.

Soluțiile ecuației considerate sînt, deci, $x = \frac{1}{2}$ și $x = -\frac{1}{4}$.

12. *Să se in e valoarea *) lui $E(x)$ în următoarele cazuri:*

$x = 1,5$. **R.** $E(1,5) = 1$.

$x = \sqrt{\frac{1}{0,01}}$. **R.** $E\left(\sqrt{\frac{1}{0,01}}\right) = E(\sqrt{100}) = 10$.

$x = -\frac{5}{2}$. **R.** $E\left(-\frac{5}{2}\right) = -3$.

$x = \sqrt{\frac{9}{0,1}}$. **R.** $E\left(\sqrt{\frac{9}{0,1}}\right) = E(\sqrt{90}) = 9$.

13. *Să se demonstreze inegalitatea*

$$\frac{E(nx)}{n} \leqslant x < \frac{E(nx)}{n} + \frac{1}{n}.$$

Pornim de la următoarea inegalitate, valabilă pentru orice număr natural n și orice număr real x,

$$nx - 1 < E(nx) \leqslant nx. \qquad (1)$$

Într-adevăr, dacă nx este număr întreg, $E(nx) = nx$. În caz contrar, $nx - 1 < E(nx) < nx$.

Efectuînd în inegalitatea (1) calcule elementare, obținem inegalitatea propusă.

14. *Să se rezolve **) ecuația*

$$\{x\} = 0,3. \qquad (1)$$

Ecuația (1) este echivalentă cu ecuația $x = E(x) + 0,3$, care are o infinitate de soluții: $x = n + 0,3$; $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$

*) În cele ce urmează vom nota cu $E(x)$ cel mai mare număr întreg cuprins în numărul real x.

**) Se numește *partea fracționară* a numărului x, și se notează $\{x\}$, diferența $x - E(x)$.

Exerciţii propuse spre rezolvare

Să se expliciteze următoarele inegalităţi:

15. $|x-7| \leqslant 3$. **R.** $x \in [4, 10]$.

16. $|x-1| > 10$. **R.** $x \in (-\infty, -9) \cup (11, \infty)$.

17. $|x^2-3| < 1$. **R.** $\sqrt{2} < |x| < 2$.

18. $|x^2-2| \geqslant 2$. **R.** $x \geqslant 2$, $x \leqslant -2$, $x = 0$.

Să se scrie cu ajutorul modulului următoarele inegalităţi:

19. $-3 \leqslant x \leqslant 3$.

20. $0 \leqslant x \leqslant 2$.

21. $\begin{cases} x \geqslant 4. \\ x \leqslant -4. \end{cases}$

22. $\begin{cases} x \geqslant 4 \\ x \leqslant -2. \end{cases}$

Să se rezolve următoarele ecuaţii:

23. $|x+1| + 5x + 3 = 0$. **R.** $x = -\frac{2}{3}$.

24. $|x-1| + |x-3| - 12 = 0$. **R.** $x = -4$ şi $x = 8$.

25. $|x^2 - 2x| = 3$. **R.** $x = -1$ şi $x = 3$.

26. $|\cos x| = \cos x + 3$. **R.** Nu are rădăcini.

27. $|\operatorname{tg} x| = -\operatorname{tg} x + 2$. **R.** $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Să se rezolve următoarele inegalităţi:

28. $|x| \geqslant x - 1$. **R.** $x \in (-\infty, \infty)$.

29. $|x-2| \geqslant |x| + 3$. **R.** Nu admite soluţii.

30. $|\sin x| \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$. **R.** $|x - k\pi| \leqslant \frac{\pi}{4}$.

31. $|x+2| + |x-2| \leqslant 12$. **R.** $|x| \leqslant 6$.

Să se deducă valorile lui x pentru care sînt satisfăcute egalităţile următoare:

32. $E(2x) = 1$. **R.** $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right)$.

33. $E(x^2) = 2$. **R.** $\sqrt{2} \leqslant |x| < \sqrt{3}$.

34. $E(x) = -5$. **R.** $x \in [-5, -4)$.

35. $E(x-1) = 3$. **R.** $x \in [4, 5)$.

1.2. Funcţii reale

Fie E şi F două mulţimi. Spunem că s-a definit o funcţie pe E cu valori în F, dacă fiecărui element $x \in E$ i s-a pus în corespondenţă un element $y \in F$ şi numai unul. Se numeşte *funcţie* ansamblul format din mulţimile E şi F şi din corespondenţa de la elementele lui E la elementele lui F.

Mulţimea E se numeşte *domeniul de definiţie al funcţiei*, iar mulţimea F se numeşte *mulţimea în care funcţia ia valori*. O funcţie se notează cu o literă, de exemplu cu f. Alte notaţii folosite sînt $f: E \to F$ sau $E \xrightarrow{f} F$. În loc de funcţie definită pe E cu valori în F se mai spune *aplicaţie* a lui E în F. Un element generic x din domeniul de definiţie E se numeşte *argument* sau *variabilă* a funcţiei f.

Elementul din F care corespunde unui element $x \in E$ prin funcţia f, se notează $f(x)$ şi se numeşte *imaginea* lui x prin f, sau *valoarea* funcţiei f în x.

Dacă A este o parte din E, mulţimea $\{f(x) \mid x \in A\} \subset F$ se notează $f(A)$ şi se numeşte *imaginea lui A prin funcţia f*. Mulţimea $f(E)$ se numeşte *mulţimea valorilor funcţiei f*. Dacă $f(E) = F$, se spune că f este o aplicaţie a lui E pe F.

Se spune că funcţia $f: E \to P$ este *biunivocă* dacă oricare ar fi $x' \neq x''$ din E, avem $f(x') \neq f(x'')$.

Dacă f este o aplicaţie biunivocă a lui E pe F, funcţia $\overset{-1}{f}: F \to E$ care face să-i corespundă fiecărui element $y \in F$ acel element unic $x \in E$ pentru care $f(x) = y$, se numeşte *funcţie inversă* sau *reciprocă* a lui F. Avem, deci, $\overset{-1}{f}(y) = x$ dacă şi numai dacă $y = f(x)$.

Fiind date funcţiile $E \xrightarrow{f} F$ şi $F \xrightarrow{g} G$, funcţia $E \xrightarrow{h} G$, definită prin egalitatea $h(x) = g(f(x))$ pentru $x \in E$, se numeşte *funcţia compusă* a lui g cu f şi se notează $g \bigcirc f$.

Graficul unei funcţii $f: E \to F$ este mulţimea $G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in E\}$ din produsul cartezian $E \times F$.

Fiind dată funcţia $f: E \to F$ şi submulţimea $A \subset E$, funcţia $g: A \to F$, definită prin egalitatea $g(x) = f(x)$ pentru $x \in A$, se numeşte *restricţia funcţiei f la mulţimea A*. Funcţia f se numeşte *prelungirea* sau *extensiunea funcţiei g la mulţimea E*.

Se numeşte *funcţie de argument real sau de variabilă reală* orice funcţie $f: E \to F$, definită pe o mulţime E de numere reale.

Se numeşte *funcţie reală* sau *funcţie cu valori reale* orice funcţie $f: E \to R$ pentru care atît mulţimea de definiţie, cît şi mulţimea valorilor funcţiei sînt numere reale.

Fiind date două funcţii reale $f: E \to R$ şi $g: F \to R$, astfel încît $E \cap F \neq \varnothing$, se definesc funcţiile următoare:

suma $f+g$ se defineşte pe mulţimea $E\cap F$ prin egalitatea

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x);$$

diferenţa $f-g$ se defineşte pe mulţimea $E\cap F$ prin egalitatea:

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x);$$

produsul fg se defineşte pe mulţimea $E\cap F$ prin egalitatea:

$$(fg)(x)=f(x)g(x);$$

produsul αf (cu un număr real α) se defineşte pe mulţimea E prin egalitatea $(\alpha f)(x)=\alpha f(x)$;

cîtul $\frac{f}{g}$ se defineşte pe mulţimea $E\cap F-G_0$, unde $G_0=\{x \mid x\in F,\ g(x)=0\}$, prin egalitatea

$$\frac{f}{g}(x)=\frac{f(x)}{g(x)}.$$

O funcţie reală $f: E\to R$ este *mărginită* dacă există un număr $M>0$, astfel încît pentru orice $x\in E$ să avem $|f(x)|\leqslant M$.

O funcţie reală $f: E\to R$ este:
crescătoare, dacă pentru orice $x'<x''$ din E avem $f(x')\leqslant f(x'')$
descrescătoare, dacă pentru orice $x'<x''$ din E avem $f(x')\geqslant f(x'')$
strict crescătoare, dacă pentru orice $x'<x''$ din E avem $f(x')<f(x'')$
strict descrescătoare, dacă pentru orice $x'<x''$ din F avem $f(x')>f(x'')$.

Funcţiile crescătoare sau descrescătoare se numesc *funcţii monotone*. Funcţiile strict crescătoare sau strict descrescătoare se numesc funcţii *strict monotone*.

Orice funcţie strict monotonă este biunivocă.

Dacă f este strict crescătoare, funcţia inversă f^{-1} este strict crescătoare; dacă f este strict descrescătoare, atunci f^{-1} este strict descrescătoare.

Dacă la o funcţie elementară f nu se specifică domeniul de definiţie, se subînţelege că este vorba de domeniul maxim pe care poate fi definită f, format din toate punctele $x\in R$ pentru care au sens operaţiile care intervin în definiţia funcţiei.

Exerciţii rezolvate

36. *Fie*

$$f(x)=\begin{cases} x, \text{ dacă } x\leqslant 0\\ 1, \text{ dacă } x>0,\end{cases}\qquad g(x)=\begin{cases} -x, \text{ dacă } x\leqslant 1.\\ 0, \text{ dacă } x>1.\end{cases}$$

Să se formeze funcţiile $s=f+g$ şi $p=f\cdot g$.

Deoarece f şi g sînt definite pe $(-\infty,\infty)$, $f+g$, $f\cdot g$ vor fi definite pe $(-\infty,\infty)$ în modul următor

$$s(x)=f(x)+g(x)=\begin{cases} x-x=0, \text{ dacă } x\leqslant 0\\ 1-x, \text{ dacă } 0<x\leqslant 1\\ 1+0=1, \text{ dacă } 1<x\end{cases}$$

$$p(x)=f(x)\cdot g(x)=\begin{cases} x(-x)=-x^2, \text{ dacă } x\leqslant 0\\ 1(-x)=-x, \text{ dacă } 0<x\leqslant 1\\ 1\cdot 0=0, \text{ dacă } x>1.\end{cases}$$

37. *Să se formeze funcţiile $s=f+g$ şi $c=\frac{g}{f}$, dacă f şi g sînt definite în modul următor*

$$f(x)=\begin{cases} x, \text{ dacă } -3\leqslant x\leqslant 0\\ 0, \text{ dacă } 0<x<1,\\ 2x, \text{ dacă } 1\leqslant x\leqslant 3\end{cases}\qquad g(x)=\begin{cases} x+1, \text{ dacă} -5\leqslant x\leqslant 0\\ x, \text{ dacă } 0<x\leqslant 5.\end{cases}$$

Suma $s=f+g$ este definită pe $[-5,5]\cap[-3,3]=[-3,3]$ în modul următor

$$s(x)=f(x)+g(x)=\begin{cases} x+x+1=2x+1, \text{ dacă } -3\leqslant x\leqslant 0\\ 0+x\quad =x, \text{ dacă } 0<x\leqslant 1\\ 2x+x\quad =3x, \text{ dacă } 1\leqslant x\leqslant 3.\end{cases}$$

Cîtul $c=\frac{g}{f}$ este definit pe $[-3,3]-(0,1)=[-3,0]\cup[1,3]$ în modul următor

$$\frac{g(x)}{f(x)}=\begin{cases} \frac{x+1}{x}, \text{ dacă } -3\leqslant x<0\\ \frac{1}{2}, \text{ dacă } 1\leqslant x\leqslant 3.\end{cases}$$

38. *Să se formeze funcţiile $s=f+g$, $c_1=\frac{g}{f}$ şi $c_2=\frac{f}{g}$, dacă f şi g sînt definite în modul următor*

$$f(x)=\begin{cases} x, \text{ dacă } -\infty<x\leqslant -2\\ 0, \text{ dacă } -2<x\leqslant 0,\\ 2x, \text{ dacă } 0<x\leqslant 3\end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases} x, \text{ dacă } -3\leqslant x\leqslant 0\\ -x, \text{ dacă } 0<x<2\\ 0, \text{ dacă } x\geqslant 2.\end{cases}$$

Suma $s = f + g$ este definită pe $(-\infty, 3] \cap [-3, \infty) = [-3, 3]$ în modul următor

$$s(x) = f(x) + g(x) = \begin{cases} x + x = 2x, & \text{dacă } -3 \leqslant x \leqslant -2 \\ 0 + x = x, & \text{dacă } -2 < x \leqslant 0 \\ 2x - x = x, & \text{dacă } 0 < x < 2 \\ 2x, & \text{dacă } 2 \leqslant x \leqslant 3, \end{cases}$$

ceea ce se poate scrie restrîns astfel

$$s(x) = \begin{cases} x, & \text{dacă } |x| < 2 \\ 2x, & \text{dacă } 2 \leqslant |x| \leqslant 3. \end{cases}$$

Cîtul $c_1 = \frac{g}{f}$ este definit pe $[-3, 3] - (-2, 0] = [-3, -2] \cup (0, 3]$ în modul următor

$$\frac{g(x)}{f(x)} = \begin{cases} \frac{x}{x} = 1, & \text{dacă } -3 \leqslant x \leqslant -2 \\ -\frac{x}{2x} = -\frac{1}{2}, & \text{dacă } 0 < x < 2 \\ 0, & \text{dacă } 2 \leqslant x \leqslant 3. \end{cases}$$

Cîtul $c_2 = \frac{f}{g}$ este definit pe $[-3, 3]$ din care scădem $[2, 3] \cup \{0\}$, adică pe $[-3, 0) \cup (0, 2]$, în modul următor

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} \frac{x}{x} = 1, & \text{dacă } -3 \leqslant x \leqslant -2 \\ \frac{0}{x} = 0, & \text{dacă } -2 < x \leqslant 0 \\ \frac{2x}{-x} = -2, & \text{dacă } 0 < x < 2. \end{cases}$$

39. *Fie* $f(x) = x^2$ *şi* $g(x) = 2^x$. *Să se formeze:* $f \bigcirc g$; $g \bigcirc f$, $f \bigcirc f$ *şi* $g \bigcirc g$.

Pentru a forma $f \bigcirc g$ înlocuim x în funcţia $f(x)$ cu $g(x)$ şi obţinem $f(g(x)) = [g(x)]^2 = (2x)^2 = 2^{2x}$;

$g \bigcirc f$ se formează înlocuind în funcţia $g(x)$ pe x cu $f(x)$; obţinem $g(f(x)) = 2^{f(x)} = 2^{x^2}$;

$f \bigcirc f$ se formează înlocuind în funcţia $f(x)$ pe x cu $f(x)$; obţinem $f(f(x)) = [f(x)]^2 = (x^2)^2 = x^4$;

$g \bigcirc g$ se formează înlocuind în funcţia $g(x)$ pe x cu $g(x)$; obţinem $g(g(x)) = 2^{g(x)} = 2^{2^x}$.

40. *Fie* $f(x) = x^3 - x$, $g(x) = \sin 2x$. *Să se calculeze valorile* $f\left(g\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)$, $g(f(1))$, $g(f(2))$.

Avem

$$f\left(g\left(\frac{\pi}{12}\right)\right) = \left[g\left(\frac{\pi}{12}\right)\right]^3 - g\left(\frac{\pi}{12}\right) = -\frac{3}{8};$$

$$g(f(1)) = \sin 2f(1) = 0; \quad g(f(2)) = \sin 2f(2) = \sin 12.$$

41. *Să se formeze* $f \bigcirc g$, $g \bigcirc f$, $f \bigcirc f$, $g \bigcirc g$ *în cazul următoarelor funcţii:*

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \geqslant 0 \\ 1 - x, & \text{dacă } x < 0, \end{cases} \quad g(x) = x^2.$$

Avem

$$f(g(x)) = \begin{cases} g(x), & \text{dacă } g(x) \geqslant 0 \\ 1 - g(x), & \text{dacă } g(x) < 0. \end{cases}$$

Însă, deoarece $g(x) \geqslant 0$ oricare ar fi x, rezultă

$$f(g(x)) = g(x) = x^2.$$

Mai departe,

$$g(f(x)) = [f(x)]^2.$$

Dacă $x \geqslant 0$, $f(x) = x$, $[f(x)]^2 = x^2$ şi $g(f(x)) = x^2$.

Dacă $x < 0$, $f(x) = 1 - x$, $g(f(x)) = (1 - x)^2$.

În concluzie,

$$g(f(x)) = \begin{cases} x^2, & \text{dacă } x \geqslant 0 \\ (1 - x)^2, & \text{dacă } x < 0. \end{cases}$$

De asemenea,

$$f(f(x)) = \begin{cases} f(x), & \text{dacă } f(x) \geqslant 0 \\ 1 - f(x), & \text{dacă } f(x) < 0. \end{cases}$$

Însă $f(x) \geqslant 0$ pentru orice x şi deci

$$f(f(x)) = f(x) = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \geqslant 0 \\ 1 - x, & \text{dacă } x < 0. \end{cases}$$

În sfîrşit,

$$g(g(x)) = [g(x)]^2 = (x^2)^2.$$

42. *Fie*

$$f(x) = x^2 - 2x.$$

Să se determine intervalele pe care restricţia funcţiei admite funcţie inversă şi să se determine această funcţie inversă. Să se verifice relaţiile $\overset{-1}{f}(f(x)) = f\left(\overset{-1}{f}(x)\right)$.

Va trebui să determinăm intervalele pe care funcţia este strict monotonă. Funcţia mai poate fi scrisă sub forma următoare

$$f(x) = x^2 - 2x = x^2 - 2x + 1 - 1 = (x-1)^2 - 1.$$

Să presupunem $x - 1 > 0$, adică $x > 1$. Dacă $1 < x_1 < x_2$, atunci $x_1 - 1 < x_2 - 1$, $(x_1 - 1)^2 < (x_2 - 1)^2$, iar $(x_1 - 1)^2 - 1 < (x_2 - 1)^2 - 1$. Prin urmare, pe intervalul $(1, \infty)$, $f(x)$ este strict crescătoare. Deoarece $f(1) = -1$ şi f este strict crescătoare, rezultă că în intervalul $(1, \infty)$ f ia valori mai mari decît -1.

Să arătăm că pe intervalul $(1, \infty)$ funcţia ia toate valorile cuprinse în $(-1, \infty)$. Într-adevăr, fie $b \in (-1, \infty)$. Ecuaţia $x^2 - 2x = b$ admite pentru $x > 1$ soluţia $x = 1 + \sqrt{1+b}$, care este reală — datorită condiţiei $b > -1$.

Fie acum $x \leqslant 1$. Dacă $x_1 < x_2 < 1$, atunci $x_1 - 1 < x_2 - 1 < 0$, iar $(x_1 - 1)^2 - 1 > (x_2 - 1)^2 - 1$. Funcţia este strict descrescătoare pe $(-\infty, 1)$ şi (se arată ca mai sus) ia toate valorile cuprinse între -1 şi ∞. Prin urmare funcţia dată nu este biunivocă pe $(-\infty, \infty)$, deci nu admite inversă pe $(-\infty, \infty)$.

Să notăm cu $f_1(x) = x^2 - 2x$ restricţia funcţiei la intervalul $(-\infty, 1)$; funcţia $f_1(x)$ fiind strict descrescătoare pe acest interval, admite o inversă care este soluţia ecuaţiei $y = x^2 - 2x$, adică $x = 1 - \sqrt{1+y}$.

Cu notaţia obişnuită putem scrie

$$\overset{-1}{f_1}(x) = 1 - \sqrt{1+x}. \tag{1}$$

Funcţia (1) este definită pe mulţimea valorilor funcţiei $f(x)$, adică pe $(-1, \infty)$.

În mod analog, inversa restricţiei funcţiei $f(x) = x^2 - 2x$ la intervalul $(1, \infty)$ este funcţia strict crescătoare

$$\overset{-1}{f_2}(x) = 1 + \sqrt{1+x}, \quad \text{definită pe } (-1, \infty).$$

Să arătăm că sînt verificate relaţiile

$$\overset{-1}{f_1}(f_1(x)) = x \quad \text{şi} \quad f_1\left(\overset{-1}{f_1}(x)\right) = x.$$

Într-adevăr,

$$f_1\left(\overset{-1}{f_1}(x)\right) = (1 - \sqrt{1+x})^2 - 2(1 - \sqrt{1+x}) = x.$$

$$\overset{-1}{f_1}(f_1(x)) = 1 - \sqrt{1 + f_1(x)} = 1 - \sqrt{1 + x^2 - 2x} = 1 - \sqrt{(x-1)^2} = 1 - |x - 1|.$$

Însă, deoarece $x < 1$, $|x - 1| = 1 - x$; deci $\overset{-1}{f_1}(f_1(x)) = 1 - (1 - x) = x$.

Analog, se verifică relaţiile $f_2\left(\overset{-1}{f_2}(x)\right) = x$ şi $\overset{-1}{f_2}(f_2(x)) = x$.

43. *Fie*

$$f(x) = \frac{1-x}{1+x}$$

definită pe $(-\infty, \infty) - \{-1\}$. *Să se arate că funcţia admite o inversă şi să se determine acea inversă.*

Va trebui să arătăm că funcţia este biunivocă pe $(-\infty, \infty) - \{-1\}$. Pentru aceasta o vom scrie sub forma

$$f(x) = 1 - \frac{2x}{1+x}.$$

Fie $x_1 < x_2 < -1$; atunci

$$f(x_1) - f(x_2) = \frac{-2x_1}{1+x_1} + \frac{2x_2}{1+x_2} = 2\,\frac{x_2 - x_1}{(1+x_1)(1+x_2)}.$$

Deoarece $1 + x_1 < 0$, $1 + x_2 < 0$, rezultă că $f(x_1) - f(x_2) > 0$, adică $f(x_1) > f(x_2)$. Funcţia este deci descrescătoare pentru $x < -1$. Dacă $-1 < x_1 < x_2$, $f(x_1) > f(x_2)$. Funcţia este descrescătoare şi pentru $x > -1$.

Să arătăm că funcţia nu ia aceeaşi valoare în două puncte diferite. Observăm că

$$f(x_1) - f(x_2) = 2\,\frac{x_2 - x_1}{(1+x_1)(1+x_2)} \neq 0,$$

dacă $x_1 \neq x_2$. Funcţia fiind biunivocă admite pe $(-\infty, \infty)$ o inversă, care este soluţia ecuaţiei $y = \frac{1-x}{1+x}$. Rezolvînd ecuaţia în raport cu x, obţinem $x = \frac{1-y}{1+y}$ sau, folosind notaţia obişnuită, $\overset{-1}{f}(x) = \frac{1-x}{1+x}$. În cazul de faţă, funcţia inversă coincide cu funcţia dată.

2*

Propunem cititorului să generalizeze rezultatele pentru funcţia

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}, \quad ad - bc \neq 0.$$

44. *Fiind dată funcţia*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 6x + 11, & \textit{pentru } x \in [3, \infty) \\ x - 1, & \textit{pentru } x \in (-\infty, 3), \end{cases}$$

să se determine funcţia inversă.

Dacă $x \in (-\infty, 3)$, $f(x) = x - 1$ este strict crescătoare şi ia toate valorile cuprinse între $-\infty$ şi 2. Dacă $x \in [3, \infty)$, $f(x) = x^2 - 6x + 11 = (x-3)^2 + 2$ este de asemenea strict crescătoare şi, deoarece $f(3) = 2$, vom avea $f(x) > 2$ pentru $x > 3$. Vom arăta că în intervalul $(3, \infty)$ $f(x)$ ia toate valorile cuprinse între 2 şi ∞. Fie $b \in (2, \infty)$. Ecuaţia $x^2 - 6x + 11 = b$ admite pentru $x > 3$ soluţia reală $x = 3 + \sqrt{b-2}$ $(b > 2)$. Funcţia fiind strict crescătoare pe $(-\infty, \infty,)$ admite o inversă $\overset{-1}{f}(x)$, definită în modul următor

$$\overset{-1}{f}(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{pentru } x \in (-\infty, 2) \\ -3 + \sqrt{x-2} & \text{pentru } x \in [2, \infty). \end{cases}$$

Să se stabilească domeniul maxim pe care pot fi definite următoarele funcţii prin formulele:

45. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - x - 2}}$.

Operaţia de extragere a radicalului are sens numai pentru valorile lui x satisfăcînd inegalităţile $\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-x-2} \geqslant 0$ şi $x^2 - x - 2 \neq 0$.

Sînt acceptabile următoarele cazuri:

1) $x^2 - 4x + 3 \geqslant 0$ şi $x^2 - x - 2 > 0$

2) $x^2 - 4x + 3 \leqslant 0$ şi $x^2 - x - 2 < 0$.

C a z u l 1. Avem $x^2 - 4x + 3 \geqslant 0$ dacă $x \in (-\infty, 1] \cup [3, \infty)$ şi $x^2 - x - 2 > 0$ dacă $x \in (-\infty, -1) \cup (2, \infty)$. Deci inegalităţile $x^2 - 4x + 3 \geqslant 0$ şi $x^2 - x - 2 > 0$ au loc simultan dacă $x \in (-\infty, -1) \cup [3, \infty)$.

C a z u l 2. Avem $x^2 - x - 2 < 0$ dacă $x \in (-1, 2)$ şi $x^2 - 4x + 3 \leqslant 0$ dacă $x \in [1, 3]$. Deci inegalităţile au loc simultan dacă $x \in (-1, 2) \cap [1, 3] = [1, 2)$. Domeniul maxim pe care poate fi definită funcţia dată este $(-\infty, -1) \cup [1, 2) \cup [3, \infty)$.

46. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - 4x + 3}}{\sqrt{x^2 - x - 2}}$.

Domeniul maxim pe care poate fi definită funcţia este intersecţia domeniilor pe care pot fi definite funcţiile de la numărător şi numitor, din care se scot punctele în care se anulează numitorul. Radicalul de la numărător are sens numai dacă $x^2 - 4x + 3 \geqslant 0$, ceea ce (am văzut în exerciţiul 45) are loc pentru $x \in (-\infty, 1] \cup [3, \infty)$, iar radicalul de la numitor are sens numai dacă $x^2 - x - 2 \geqslant 0$, ceea ce are loc dacă $x \in (\infty, -1] \cup [2, \infty)$. Intersectînd cele două domenii şi scoţînd punctele $x = 2$ şi $x = -1$ în care se anulează numitorul, obţinem domeniul $(-\infty, -1) \cup [3, \infty)$.

Observăm că deşi funcţia dată în acest exerciţiu se obţine din funcţia dată în exerciţiul 45 printr-o transformare uzuală, funcţiile nu sînt identice, deoarece au domenii de definiţie diferite.

Restricţia funcţiei date în exerciţiul 45 la domeniul $(-\infty, -1) \cup [3, \infty)$ este egală, însă, cu funcţia dată în acest exerciţiu.

47. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-2}{x+2}} + \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$.

Deoarece funcţia $f(x)$ este suma funcţiilor $f_1(x) = \sqrt{\dfrac{x-2}{x+2}}$ şi $f_2(x) = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$, domeniul maxim pe care poate fi definită $f(x)$ este intersecţia domeniilor pe care pot fi definite cele două funcţii.

Domeniul maxim pe care poate fi definită funcţia $f_1(x) = \sqrt{\dfrac{x-2}{x+2}}$ se obţine din condiţiile $\dfrac{x-2}{x+2} \geqslant 0$ şi $x + 2 \neq 0$, care au loc dacă $x \in (-\infty, -2) \cup [2, \infty)$.

Domeniul maxim pe care poate fi definită funcţia $f_2(x) = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$ se obţine din condiţiile $\dfrac{x-1}{x+1} \geqslant 0$ şi $x + 1 \neq 0$, care au loc dacă $x \in (-\infty, -1) \cup [1, \infty)$.

Intersecţia celor două domenii este formată din reuniunea a două intervale: $(-\infty, -2) \cup [2, \infty)$.

48. $f(x) = \sqrt{E(x) - x}$.

Este necesar ca $E(x) - x \geqslant 0$, adică $E(x) \geqslant x$. Însă, ţinînd seama de însăşi definiţia funcţiei $E(x)$, inegalitatea $E(x) > x$

nu poate avea loc pentru nici un x. Rămîne cazul $E(x) = x$; egalitatea are loc dacă x este număr întreg. Prin urmare, funcţia are sens dacă $x = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm n, \ldots$

49. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{|x| - x}}$.

Este necesar ca $|x| - x > 0$. Dacă $x > 0$, $|x| = x$; atunci $|x| - x = x - x = 0$. Deci $f(x)$ nu are sens pentru $x > 0$. Acelaşi rezultat obţinem dacă $x = 0$. Dacă $x < 0$, $|x| = -x$, iar $|x| - x = -x - x = -2x > 0$. Domeniul maxim pe care poate fi definită funcţia dată este, deci, intervalul $(-\infty, 0)$.

50. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{|x+1| - |x|}}$.

Ca şi în exerciţiul 49, impunem condiţia $|x+1| - |x| > 0$. Conform definiţiei modulului, avem

$$|x+1| = \begin{cases} x+1, \text{ dacă } x+1 > 0, \text{ adică dacă } x > -1 \\ 0, \text{ dacă } x+1 = 0, \text{ adică dacă } x = -1 \\ -x-1, \text{ dacă } x+1 < 0, \text{ adică dacă } x < -1. \end{cases}$$

Dacă $x \in (-\infty, -1)$, $|x+1| - |x| = -x - 1 - (-x) = -1 < 0$.

Dacă $x = -1$, $|x+1| - |x| = -1$.

Dacă $x \in (-1, 0)$ $|x+1| - |x| = x + 1 - (-x) = 2x + 1$; $2x + 1 > 0$ dacă $x > -\frac{1}{2}$.

Pentru $x = 0$, deducem că $|x+1| - |x| = 1$, iar dacă $x > 0$, $|x+1| - |x| = x + 1 - x = 1 > 0$.
Deci domeniul maxim pe care poate fi definită funcţia considerată este $\left(-\frac{1}{2}, \infty\right)$.

51. $f(x) = \log_a (x^2 - 4x + 3)^2$, $a > 0$.

Deoarece logaritmul are valori reale numai pentru valorile strict pozitive ale argumentului, rezultă că trebuie să impunem condiţia $(x^2 - 4x + 3)^2 > 0$, care are loc dacă $x \in (-\infty, 1) \cup (1, 3) \cup (3, \infty)$.

52. $f(x) = 2 \log_a (x^2 - 4x + 3)$, $a > 0$.

Condiţia $(x^2 - 4x + 3) > 0$ are loc dacă $x \in (-\infty, 1) \cup (3, \infty)$.

Observăm că această funcţie se obţine din funcţia dată la exerciţiul 51 printr-o transformare uzuală. Cele două funcţii nu sînt identice, însă, deoarece au domenii de definiţie diferite. Restricţia funcţiei date în exerciţiul 51 la intervalul $(-\infty, 1) \cup (3, \infty)$ coincide cu funcţia dată în acest exerciţiu.

53. $f(x) = \frac{\sqrt{1-x}}{\ln(4 - x^2)}$.

Domeniul maxim pe care poate fi definită funcţia se obţine din condiţiile $1 - x \geqslant 0$, $4 - x^2 > 0$ şi $\ln(4 - x^2) \neq 0$. Însă $\ln(4 - x^2) = 0$ dacă $4 - x^2 = 1$, adică dacă $x = \pm\sqrt{3}$. Inegalităţile $1 - x \geqslant 0$, $4 - x^2 > 0$ şi $x \neq \pm\sqrt{3}$, vor fi simultan satisfăcute dacă $x \in (-2, -\sqrt{3}) \cup (-\sqrt{3}, 1)$.

54. $f(x) = \lg[\lg(3 - x) - 1]$.

Impunem condiţiile $\lg(3 - x) - 1 > 0$ şi $3 - x > 0$. Inegalitatea $3 - x > 0$ are loc dacă $x \in (-\infty, 3)$, iar $\lg(3 - x) > 1$, dacă $3 - x > 10$, adică dacă $x \in (-\infty, -7)$. Operaţia are sens numai pentru $x \in (-\infty, -7) \cap (-\infty, 3) = (-\infty, -7)$.

55. $f(x) = \sqrt{\lg(x^2 - 3x - 9)}$.

Operaţia de extragere a radicalului are sens dacă $\lg(x^2 - 3x - 9) \geqslant 0$, ceea ce are loc dacă $x^2 - 3x - 9 \geqslant 1$, adică dacă $x^2 - 3x - 10 \geqslant 0$. Rădăcinile trinomului fiind $x = 5$ şi $x = -2$, inegalitatea $x^2 - 3x - 10 \geqslant 0$ are loc numai pentru $x \in (-\infty, -2) \cup (5, \infty)$.

56. $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x+5}}{|\lg x - 1| + \lg x - 3}$.

Radicalul de la numărător fiind de indice impar are sens pentru orice valoare a lui x. Rămîne de văzut care sînt punctele în care se anulează funcţia de la numitor; obţinem aceste puncte rezolvînd ecuaţia

$$|\lg x - 1| + \lg x - 3 = 0. \tag{1}$$

Însă

$$|\lg x - 1| = \begin{cases} \lg x - 1, \text{ dacă } \lg x - 1 > 0, \text{ ceea ce are loc pentru } x > 10 \\ 0, \text{ dacă } x = 10 \\ 1 - \lg x, \text{ dacă } \lg x - 1 < 10, \text{ ceea ce are loc pentru } x < 10. \end{cases}$$

Deci pentru $x < 10$ ecuaţia (1) devine $1 - \lg x + \lg x - 3 = 0$, ceea ce este absurd.

Pentru $x = 10$ deducem $1 - 3 = 0$, o absurditate.

Pentru $x > 10$ ecuația devine $\lg x - 1 + \lg x - 3 = 0$ sau $2 \lg x = 4$ și este satisfăcută pentru $x = 100$. Domeniul maxim pe care poate fi definită funcția este $(0, \infty) - \{100\}$.

57. $f(x) = \arcsin(2x - 5)$.

Funcția arcsin u este definită pentru $-1 \leqslant u \leqslant 1$. Notînd $u = 2x - 5$, vom obține inegalitatea $-1 \leqslant 2x - 5 \leqslant 1$, verificată dacă $x \in [2, 3]$.

58. $f(x) = \arccos \dfrac{x+1}{x+2}$.

Ca și în exercițiul 57 impunem condiția $-1 \leqslant \dfrac{x+1}{x+2} \leqslant 1$. Fie $x + 2 > 0$, adică $x > -2$. Înmulțind inegalitatea cu $x + 2$, rezultă $-x - 2 \leqslant x + 1 \leqslant x + 2$, care se verifică dacă $x \in \left[-\dfrac{3}{2}, \infty\right)$.

Dacă $x + 2 < 0$, prin înmulțirea inegalității cu $x + 2$, sensul ei se va schimba, adică vom obține $x + 2 \leqslant x + 1 \leqslant -x - 2$, ceea ce este absurd. Prin urmare funcția poate fi definită pentru $x \in \left[-\dfrac{3}{2}, \infty\right)$.

59. $f(x) = \sqrt{\cos x^2}$.

Impunem condiția $\cos x^2 \geqslant 0$, valabilă dacă $0 \leqslant x^2 \leqslant \dfrac{\pi}{2}$, sau $-\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \leqslant x^2 \leqslant \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$ Inegalitățile precedente au loc pentru $|x| < \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$ și $|x^2 - 2k\pi| < \dfrac{\pi}{2}$, $k = \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm n, \ldots$

60. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\sin x}} + \sqrt[3]{\sin x}$.

Condiția $\sin x > 0$ are loc pentru $2k\pi < x - (2k + 1)\pi$, k întreg.

Să se deseneze graficele următoarelor funcții:

61. $f(x) = |x + 1| + |x - 1|$, *definită pe* $(-\infty, \infty)$.

Conform definiției modulului, avem

$$|x + 1| = \begin{cases} x + 1, & \text{dacă } x > -1 \\ 0, & \text{dacă } x = -1; \\ -x - 1, & \text{dacă } x < -1 \end{cases}$$

$$|x - 1| = \begin{cases} x - 1, & \text{dacă } x > 1 \\ 0, & \text{dacă } x = 1 \\ 1 - x, & \text{dacă } x < 1. \end{cases}$$

Deci

$$f(x) = \begin{cases} -x - 1 + 1 - x = -2x, & \text{dacă } x < -1 \\ 2, & \text{dacă } x = -1 \\ x + 1 + 1 - x = 2, & \text{dacă } x - 1 < x < 1 \\ 2, & \text{dacă } x = 1 \\ x + 1 + x - 1 = 2x, & \text{dacă } x > 1. \end{cases}$$

Graficul funcției este dat în fig. 1.

62. $f(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & \text{dacă } |x| \leqslant 1 \\ 0, & \text{dacă } |x| > 1. \end{cases}$

Funcția se poate scrie sub forma următoare

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty) \\ 1 - x, & \text{dacă } x \in [0, 1] \\ 1 + x, & \text{dacă } x \in [-1, 0). \end{cases}$$

Graficul funcției este dat în fig. 2.

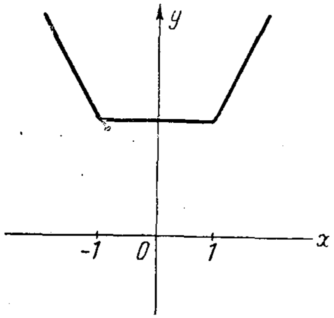

Fig. 1

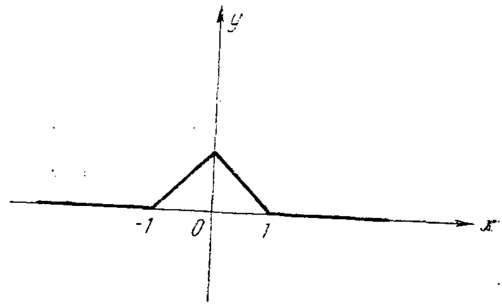

Fig. 2

63. $f(x) = E(x)$, $x \in (-\infty, \infty)$.

Din definiția funcției $f(x) = E(x)$, rezultă că

$$f(x) = \begin{cases} n, & \text{dacă } n \leqslant x < n + 1 \\ -n, & \text{dacă } -n \leqslant x < -n + 1 \end{cases} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Funcţia este reprezentată în fig. 3.

64. $f(x) = E(|x|)$, $x \in (-\infty, \infty)$.

Dacă $x > 0$, $|x| = x$, iar $E(|x|) = E(x)$.

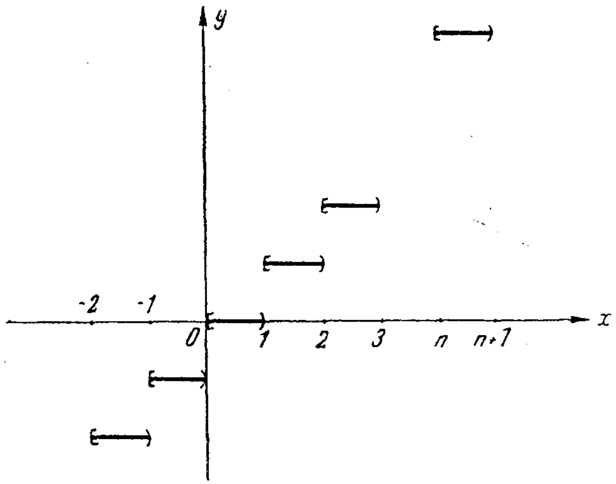

Fig. 3

Dacă $-n-1 < x \leqslant -n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, $n \leqslant |x| < n+1$, $E(|x|) = n$.

Funcţia $f(x) = E(|x|)$ este reprezentată în fig. 4.

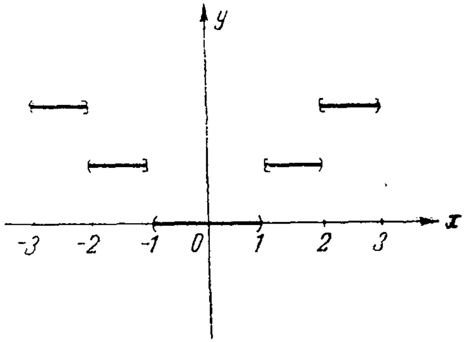

Fig. 4

65. $f(x) = \text{sign } x$, $x \in (-\infty, \infty)$.

Funcţia $f(x) = \text{sign } x$ este definită în modul următor

$$\text{sign } x = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x \in (0, \infty) \\ 0, & \text{dacă } x = 0 \\ -1, & \text{dacă } x \in (-\infty, 0) \end{cases}$$

şi este reprezentată în fig. 5.

66. $f(x) = \text{sign}(\sin \pi x)$, *definită pentru* $x > 0$.

Conform definiţiei funcţiei $\text{sign}(\sin \pi x)$, avem

$$\text{sign}(\sin \pi x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } 2k < x < 2k+1, \quad k = 0, 1, 2, 3, \ldots \\ 0, & \text{dacă } x = k, \quad k = 0, 1, 2, 3, \ldots \\ -1, & \text{dacă } 2k+1 < x < 2k+2, \quad k = 0, 1, 2, 3, \ldots \end{cases}$$

Funcţia este reprezentată în fig. 6.

Deoarece $f(x) = f(x+2)$, funcţia este periodică de perioadă 2.

67. $f(x) = \text{sign}(|x| - 1)$, $x \in (-\infty, \infty)$.

$$\text{sign}(|x| - 1) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } |x| > 1 \\ 0, & \text{dacă } |x| = 1 \\ -1, & \text{dacă } |x| < -1. \end{cases}$$

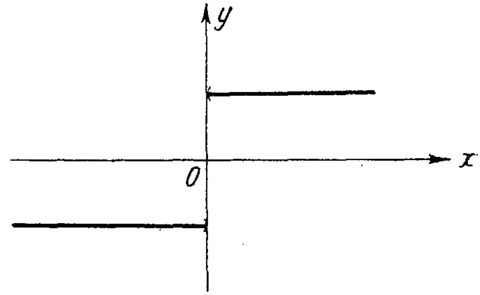

Fig. 5

Explicit se scrie

$$\text{sign}(|x| - 1) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x > 1 \text{ sau } x < -1 \\ 0, & \text{dacă } x = \pm 1 \\ -1, & \text{dacă } -1 < x < 1. \end{cases}$$

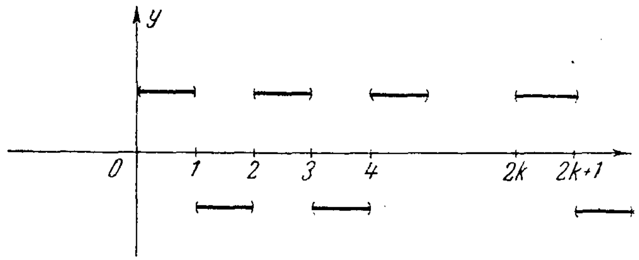

Fig. 6

Funcţia este reprezentată în fig. 7. Observăm că este pară.

68. $f(x) = E(|\cos x|)$, *definită pentru* $|x| < \infty$.

Dacă $x \neq k\pi$, k număr întreg, $|\cos x| < 1$, deci $E(|\cos x|) = 0$.

Dacă $x = k\pi$, k număr întreg, $|\cos x| = 1$, deci $E(|\cos x|) = 1$.

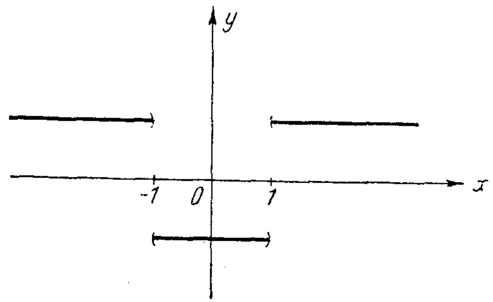

Fig. 7

Funcţia este reprezentată în fig. 8.

Observăm că funcţia este pară şi periodică de perioadă π.

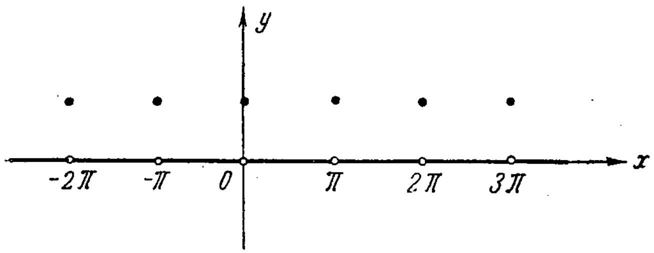

Fig. 8

69. $f(x) = \dfrac{|x^2-1|}{x^2-1}$, *definită pentru* $x \neq \pm 1$.

Avem

$$|x^2 - 1| = \begin{cases} x^2 - 1, \text{ dacă } x > 1 \text{ sau } x < -1 \\ 1 - x^2, \text{ dacă } -1 < x < 1. \end{cases}$$

Deci

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{ dacă } x > 1 \text{ sau } x < -1 \\ -1, \text{ dacă } -1 < x < 1. \end{cases}$$

Funcţia este reprezentată în fig. 9. Observăm că este pară.

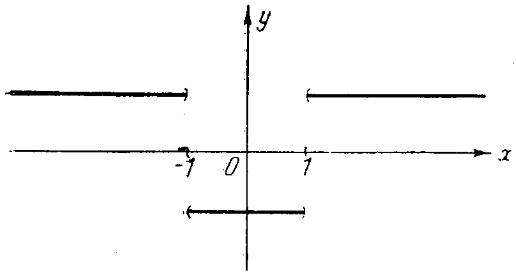

Fig. 9

70. *Fiind cunoscut graficul funcţiei* $f(x)$, *să se arate cum se construieşte graficul funcţiei* $|f(x)|$.

Din definiţia funcţiei $f(x)$ rezultă că graficele funcţiilor $f(x)$ şi $|f(x)|$ coincid în intervalele în care $f(x) \geqslant 0$. În intervalele în care $f(x) < 0$, graficul funcţiei $|f(x)|$ este simetricul faţă de axa Ox al graficului funcţiei $f(x)$.

Exemplu. Funcţia $f(x) = x^2 - 1$ este reprezentată în fig. 10, iar funcţia $f(x) = |x^2 - 1|$ este reprezentată în fig. 11.

71. *Graficul funcţiei* $f(x) = x^3$, $x \in (-\infty, \infty)$, *fiind dat în* fig. 12, *să se deseneze graficele funcţiilor* $f_1(x) = |x^3|$ *şi* $f_2(x) = \overset{-1}{f}(x)$.

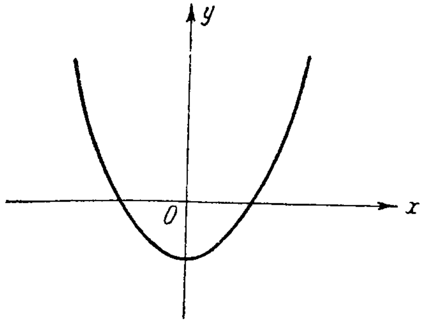

Fig. 10

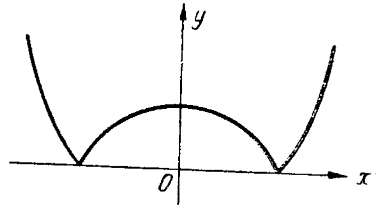

Fig. 11

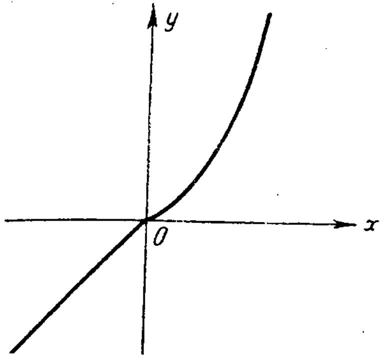

Fig. 12

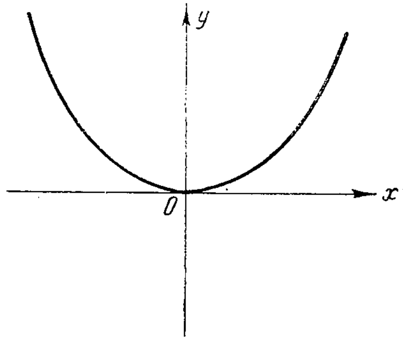

Fig. 13

Graficul funcţiei $f_1(x) = |x^3|$ este reprezentat în fig. 13.

Funcţiile inverse avînd graficele simetrice faţă de prima bisectoare, rezultă că $f_2(x) = \overset{-1}{f}(x)$ are graficul din fig. 14.

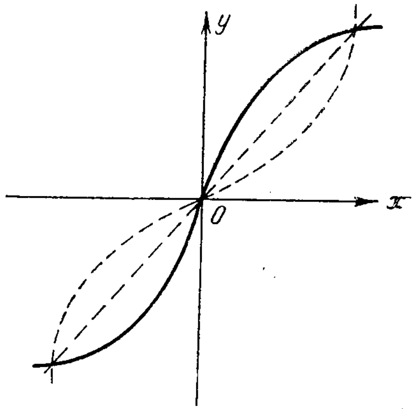

Fig. 14

72. *Graficele funcţiilor* $f(x) = \operatorname{tg} x$ *şi* $f_1(x) = |\operatorname{tg} x|$, $x \neq (2k+1)\dfrac{\pi}{2}$, *k număr întreg, sînt date respectiv în* fig. 15 *şi* fig. 16.

73. *Fie*

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{ dacă } |x| \leqslant 1 \\ 0, \text{ dacă } |x| > 1, \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 2 - x^2, \text{ dacă } |x| \leqslant 2 \\ 2, \text{ dacă } |x| > 2. \end{cases}$$

Să se construiască graficele funcțiilor $f \bigcirc f$, $f \bigcirc g$, și $g \bigcirc f$.

Avem

$$f(f(x)) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } |f(x)| \leqslant 1 \\ 0, & \text{dacă } |f(x)| > 1. \end{cases}$$

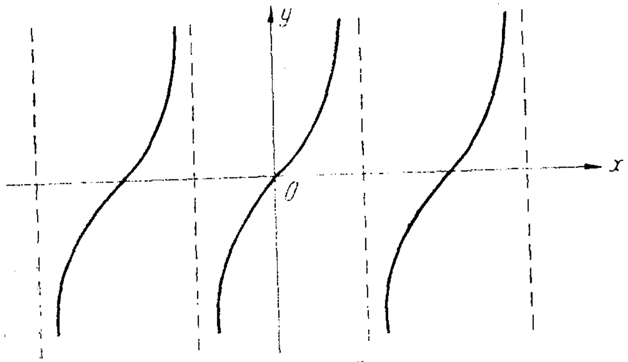

Fig. 15

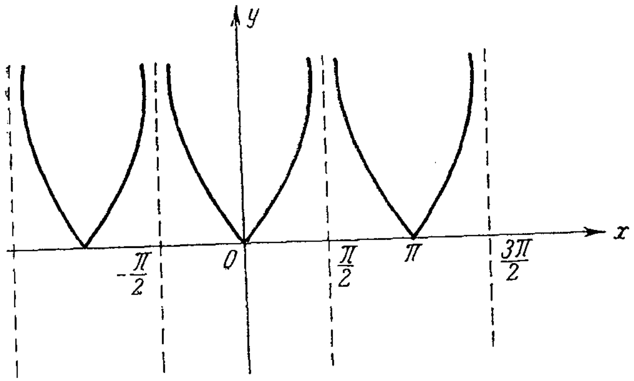

Fig. 16

Însă $|f(x)| \leqslant 1$, oricare ar fi x.

Deci $f(f(x)) \equiv 1$, iar graficul funcției este o paralelă la axa Ox.

$$f(g(x)) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } |g(x)| \leqslant 1 \\ 0, & \text{dacă } |g(x)| > 1. \end{cases}$$

Însă $|g(x)| \leqslant 1$, dacă $|2 - x^2| \leqslant 1$ sau $-1 \leqslant x^2 - 2 \leqslant 1$ sau $1 \leqslant x^2 \leqslant 3$; de unde $1 \leqslant |x| \leqslant \sqrt{3}$, ceea ce are loc dacă $1 \leqslant x \leqslant \sqrt{3}$ sau $-\sqrt{3} \leqslant x \leqslant -1$. Dacă $x < -\sqrt{3}$, sau $-1 < x < 1$, sau $x > \sqrt{3}$, $|g(x)| > 1$.

În concluzie,

$$f(g(x)) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } 1 \leqslant |x| \leqslant \sqrt{3} \\ 0, & \text{dacă } |x| > \sqrt{3} \text{ sau } |x| < 1. \end{cases}$$

Funcția $f(g(x))$ este reprezentată în fig. 17.

$$g(f(x)) = \begin{cases} 2 - f^2(x), & \text{dacă } |f(x)| \leqslant 2 \\ 2, & \text{dacă } |f(x)| > 2. \end{cases}$$

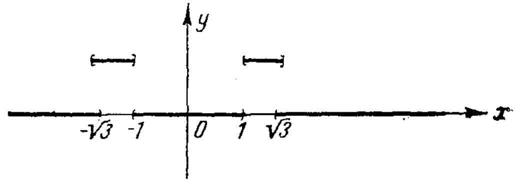

Fig. 17

Însă, oricare ar fi x, $|f(x)| \leqslant 1$, deci

$$g(f(x)) = 2 - f^2(x) = \begin{cases} 2 - 1 = 1, & \text{dacă } |x| \leqslant 1 \\ 2 - 0 = 2, & \text{dacă } |x| > 1. \end{cases}$$

Funcția $g[f(x)]$ este reprezentată în fig. 18.

Să se deseneze graficele următoarelor funcții):*

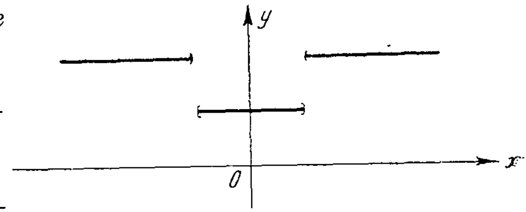

Fig. 18

74. $f(x) = \min\,[x, 2x - 1]$, $x \in (-\infty, \infty)$.

Notăm $g(x) = x - (2x - 1) = 1 - x$. Avem

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{dacă } g(x) \leqslant 0 \\ 2x - 1, & \text{dacă } g(x) > 0 \end{cases} \quad \text{sau} \quad f(x) = \begin{cases} x, & x \geqslant 1 \\ 2x - 1, & x < 1. \end{cases}$$

Graficul funcției este reprezentat în fig. 19.

75. $f(x) = \max\,[|x + 3|, 4]$, $|x| \leqslant 10$.

Notăm $g(x) = |x + 3| - 4$ și atunci

$$\max\,[|x + 3|, 4] = \begin{cases} |x + 3|, & \text{dacă } g(x) > 0 \\ 4, & \text{dacă } g(x) < 0. \end{cases}$$

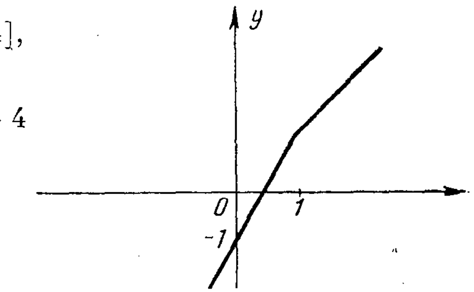

Fig. 19

*) Se notează $f(x) = \max\,[\varphi(x), \psi(x)]$, $x \in [a, b]$, funcția care în fiecare punct $x \in [a, b]$ are valoarea egală cu cea mai mare dintre valorile $\varphi(x)$ și $\psi(x)$ și $f(x) = \min\,[\varphi(x), \psi(x)]$, $x \in [a, b]$, funcția care în fiecare punct $x \in [a, b]$ are valoarea egală cu cea mai mică dintre valorile $\varphi(x)$ și $\psi(x)$.

Însă $g(x) > 0$ dacă $|x + 3| > 4$, ceea ce are loc dacă $x + 3 > 4$ sau $x + 3 < -4$, și $g(x) < 0$ dacă $|x + 3| < 4$, ceea ce are loc dacă $-4 < x + 3 < 4$.

Prin urmare

$$f(x) = \begin{cases} |x + 3|, & \text{dacă } x \in (-10, -7) \cup (1, 10) \\ 4, & \text{dacă } x \in (-7, 1), \end{cases}$$

care se mai poate scrie

$$f(x) = \begin{cases} x + 3, & \text{dacă } x \in (1, 10) \\ + 4, & \text{dacă } x \in (-7, 1) \\ - x - 3, & \text{dacă } x \in (-10, -7). \end{cases}$$

Funcția este reprezentată în fig. 20.

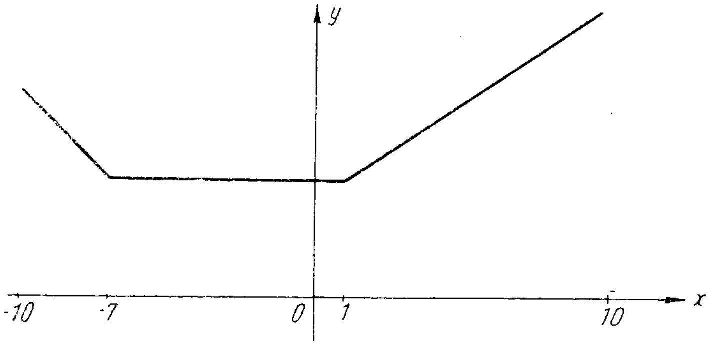

Fig. 20

Exerciții propuse spre rezolvare

Să se stabilească domeniul maxim pe care pot fi definite următoarele funcții prin formulele:

76. $f(x) = \sqrt{E(x) - 1}$. **R.** $[1, \infty)$.

77. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{E(5x) - 3}}$. **R.** $\left[\dfrac{4}{5}, \infty\right)$.

78. $f(x) = \sqrt{E(x - 2) - 3}$. **R.** $[5, \infty)$.

79. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{E(|x|) - 1}}$. **R.** $|x| \geqslant 2$.

80. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{|x - 3| - 1}}$. **R.** $(-\infty, 2) \cup (4, \infty)$.

81. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 2x - 3}}$. **R.** $(-\infty, -2] \cup (-1, 2[\cup (3, \infty)$.

82. $f(x) = \log(x^2 + x - 12)$. **R.** $(-\infty, -4) \cup (3, \infty)$.

83. $f(x) = \sqrt{\ln(x^2 - 7x + 10)}$. **R.** $(-\infty, 2] \cup [5, \infty)$.

84. $f(x) = \log[\log(x - 1)] + \arcsin(x - 5)$. **R.** $[4, 6]$.

85. $f(x) = \arccos \dfrac{3x + 5}{x} + \dfrac{x}{3x + 5}$.

R. $\left[-\dfrac{5}{2}, -\dfrac{5}{3}\right) \cup \left(-\dfrac{5}{3}, -\dfrac{5}{4}\right]$.

Să se formeze funcțiile $f + g$, fg, $\dfrac{f}{g}$, $\dfrac{g}{f}$ în următoarele cazuri:

86. $f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & -3 \leqslant x \leqslant 0 \\ x, & 0 < x \leqslant 2, \\ 3x, & 2 < x \leqslant 3 \end{cases}$

$g(x) = \begin{cases} 5x, & -4 \leqslant x \leqslant -2 \\ x, & -2 < x < 2 \\ 2x + 1, & 2 \leqslant x \leqslant 4 \end{cases}$

87. $f(x) = \begin{cases} 3x + 2, & 0 \leqslant x < 2 \\ x, & 2 \leqslant x \leqslant 4 \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} x - 1, & 0 \leqslant x < 3 \\ 2x, & 3 \leqslant x \leqslant 5. \end{cases}$

Să se deseneze graficele următoarelor funcții:

88. $f(x) = \text{sign}\,[(x^2 - x)\;2^{E(x)}]$, $x \in [-2, 2]$.

89. $f(x) = \text{sign}\,(|x| - 2)$, $x \in (-\infty, \infty)$.

90. $f(x) = \text{sign}\,(x^2 - x - 2)$, $x \in (-\infty, \infty)$.

91. $f(x) = \text{sign}\,(\sin x - \cos x)$, $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$.

92. $f(x) = |x + 3| + |x - 1|$, $x \in (-\infty, \infty)$.

93. $f(x) = E\left(\sin x - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$.

94. $f(x) = (x + 3)\,\text{sign}\,(4 - x^2)$, $x \in (-\infty, \infty)$.

95. $f(x) = \min\,[|x - 4|, 2]$, $x \in (-\infty, \infty)$.

96. $f(x) = \min\left[\sin x, \frac{1}{2}\right]$, $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$.

97. *Cunoscînd graficul funcției $f(x)$, definite pe $[a,b]$, să se reprezinte graficele funcțiilor:*

a) $g_1(x) = \frac{f(x) + |f(x)|}{2}$; b) $g_2(x) = \frac{f(x) - |f(x)|}{2}$;

c) $g_3(x) = f(x-2)$; d) $g_4(x) = f(x+4)$.

2. ȘIRURI DE NUMERE REALE

2.1. Șiruri

Se numește *șir* de elemente ale unei mulțimi E orice funcție definită pe mulțimea N a numerelor naturale cu valori în E. Un șir se notează $a_1, a_2, \ldots, a_n \ldots$ și prescurtat $(a_n)_{n \in N}$ sau $(a_n)_{1 \leqslant n < \infty}$. Mai departe vor fi considerate numai șiruri de numere reale, numite simplu șiruri; a_n se numește *termenul general* al șirului.

Un șir $(a_n)_{n \in N}$ este *mărginit* dacă există un număr $M > 0$, astfel încît oricare ar fi $n \in N$ să avem $|a_n| \leqslant M$.

Un șir $(a_n)_{n \in N}$ este:

crescător dacă $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n \leqslant a_{n+1} \ldots$

descrescător dacă $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n \geqslant a_{n+1} \ldots$

strict crescător dacă $a_1 < a_2 < \ldots < a_n < \ldots$

strict descrescător dacă $a_1 > a_2 > \ldots > a_n > \ldots$

Un *subșir* al unui șir $(a_n)_{n \in N}$ este un șir $(a_{n_p})_{p \in N}$ astfel încît $n_1 < n_2 < \ldots < n_p < \ldots$

Definiție. Un număr a (finit sau infinit) este limita unui șir dacă în afara oricărei vecinătăți V a lui a se află cel mult un număr finit de termeni ai șirului $(a_n)_{n \in N}$. În scris, $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$ sau $a_n \to a$.

Vecinătățile lui a sînt mulțimile care conțin: un interval deschis (α, β) cu $\alpha < a < \beta$ dacă a este finit; o semidreaptă $(\alpha, +\infty)$ dacă $a = +\infty$; o semidreaptă $(-\infty, \beta)$ dacă $a = -\infty$.

Dacă $a_n \to a$ și a este finit, șirul a_n este *convergent*.

Dacă a este finit, $a_n \to a$ înseamnă că pentru orice număr $\varepsilon > 0$ există un număr $N(\varepsilon)$, astfel încît oricare ar fi $n \geqslant N(\varepsilon)$ să avem $|a_n - a| < \varepsilon$.

$a_n \to \infty$ înseamnă că pentru orice număr ε există un număr $N(\varepsilon)$, astfel încît oricare ar fi $n \geqslant N(\varepsilon)$ să avem $a_n > \varepsilon$.

$a_n \to -\infty$ înseamnă că pentru orice număr ε există un număr $N(\varepsilon)$, astfel încît oricare ar fi $n \geqslant N(\varepsilon)$ să avem $a_n < \varepsilon$.

I. *Criterii.* 1) Dacă $|a_n - a| \leqslant \alpha_n$ și $\alpha_n \to 0$, atunci $a_n \to a$.

2) Dacă $a_n \geqslant \alpha_n$ și $\alpha_n \to \infty$, atunci $a_n \to \infty$.

3) Dacă $a_n \leqslant \alpha_n$ și $\alpha_n \to -\infty$, atunci $a_n \to -\infty$.

4) Dacă $a_n \to 0$, iar $|b_n| < M$ oricare ar fi n, atunci $a_n b_n \to 0$.

II. *Proprietăți.* 1) Dacă $a_n \to a$, atunci $|a_n| \to |a|$.

2) Orice șir convergent este mărginit.

3) Dacă $a_n \to a$, orice subșir a lui $(a_n)_{n\in N}$ are tot limita a.

4) *Lema lui Cesaro.* Orice șir $(a_n)_{n\in N}$ conține un subșir (a_{n_p}) care are limită. Orice șir mărginit conține un subșir convergent.

5) Dacă $a_n \to a$, prin schimbarea ordinei termenilor, prin înlăturarea sau prin adăugarea unui număr finit de termeni se obține un șir care are tot limita a.

III. *Operații.* Fie $(a_n)_{n\in N}$ și $(b_n)_{n\in N}$ două șiruri care au limită: $a_n \to a$, $b_n \to b$.

1) Dacă $a + b$ are sens, atunci șirul $a_n + b_n$ are limită și $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

2) Dacă $a - b$ are sens, atunci șirul $a_n - b_n$ are limită și $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n - \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

3) Dacă $\alpha \in R$, șirul $(\alpha a_n)_{n\in N}$ are limită și $\lim\limits_{n\to\infty}(\alpha a_n) = \alpha \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ dacă $\alpha \neq 0$.

4) Dacă ab are sens, atunci $(a_n b_n)_{n\in N}$ are limită și $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

5) Dacă $\frac{a}{b}$ are sens, atunci $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n\in N}$ are limită și

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}.$$

6) Dacă a^b are sens, atunci $(a_n^{b_n})_{n\in N}$ are limită și

$$\lim_{n\to\infty}(a_n^{b_n}) = \lim_{n\to\infty} a_n^{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}.$$

Prin convenție vom pune:

$\infty + \infty = \infty$

$a + \infty = \infty + a = \infty$ oricare ar fi $a \in R$

$a + (-\infty) = (-\infty) + a = -\infty$

$-\infty + (-\infty) = -\infty$

$a \cdot \infty = \infty \cdot a = \infty,\ a > 0$

$a \cdot \infty = \infty \cdot a = -\infty,\ a < 0$

$\infty \cdot \infty = \infty$

$\infty(-\infty) = (-\infty)\infty = -\infty$

$(-\infty)(-\infty) = \infty$

$\infty^\infty = \infty$; $a^\infty = \infty$ dacă $a \in R$, $a > 1$

$\infty^{-\infty} = 0$; $a^{-\infty} = 0$ dacă $a \in R$, $a > 1$

$\left(\frac{1}{a}\right)^\infty = 0$ dacă $a > 1$

$0^\infty = 0$; $\infty^\alpha = \infty$; $\infty^{-\alpha} = 0$ dacă $\alpha > 0$.

Nu se acordă nici un sens scrierii:

$$\infty - \infty,\ 0(\pm\infty),\ \frac{\infty}{\infty},\ \frac{-\infty}{\infty},\ \frac{\infty}{-\infty},\ \frac{-\infty}{-\infty},\ 1^\infty,\ 1^{-\infty},\ \infty^0.$$

IV. *Trecerea la limită în inegalități.* 1) Dacă șirurile $(a_n)_{n\in N}$ și $(b_n)_{n\in N}$ au limită și dacă $a_n \leqslant b_n$ pentru orice $n \in N$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

2) Dacă $(a_n)_{n\in N}$ are limită și $\alpha \leqslant a_n \leqslant \beta$, atunci $\alpha \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} a_n \leqslant \beta$.

În particular:

3) Dacă $(a_n)_{n\in N}$ are limită și $a_n \geqslant 0$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \geqslant 0$.

4) Dacă $a_n \leqslant x_n \leqslant b_n$ și dacă există $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = l$, atunci $(x_n)_{n\in N}$ are limită și $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$.

V. *Un șir $(a_n)_{n\in N}$ este șir Cauchy sau șir fundamental*, dacă pentru orice număr $\varepsilon > 0$ există un număr $N(\varepsilon)$, astfel încît oricare ar fi n, $m > N(\varepsilon)$ să avem $|a_n - a_m| < \varepsilon$

sau

pentru orice număr $\varepsilon > 0$ există un număr $N(\varepsilon)$, astfel încît oricare ar fi $n > N(\varepsilon)$ și $p \in N$ să avem $|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon$

sau

pentru orice număr $\varepsilon > 0$, există un număr $N(\varepsilon)$, astfel încît oricare ar fi $n \geqslant N$ să avem $|a_n - a_N| < \varepsilon$.

Criteriul lui Cauchy: un șir $(a_n)_{n\in N}$ este convergent dacă și numai dacă este șir fundamental.

VI. *Limitele şirurilor monotone.* 1) Orice şir monoton are limită.
2) Orice şir monoton şi mărginit este convergent.
3) Dacă $(a_n)_{n \in N}$ şi $(b_n)_{n \in N}$ sînt două şiruri care au proprietăţile următoare:

a) $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant \ldots, \ldots \leqslant b_n \leqslant \ldots \leqslant b_2 \leqslant b_1$

b) $\lim\limits_{n \to \infty} (b_n - a_n) = 0,$

atunci cele două şiruri sînt convergente şi au aceeaşi limită.

Exerciţii rezolvate

98. *Fie şirul cu termenul general* $a_n = \dfrac{n+1}{5n+2}$:

Să se verifice că acest şir are limita $\dfrac{1}{5}$.

Va trebui să arătăm că pentru orice număr pozitiv ε există un număr $N = N(\varepsilon)$, astfel încît să aibă loc inegalitatea

$\forall n > N(\varepsilon)$

$$\left| a_n - \frac{1}{5} \right| < \varepsilon \tag{1}$$

pentru orice $n > N(\varepsilon)$.

Într-adevăr, primul membru al inegalităţii (1) se poate scrie

$$\left| a_n - \frac{1}{5} \right| = \left| \frac{n+1}{5n+2} - \frac{1}{5} \right| = \frac{3}{5(5n+2)}$$

şi inegalitatea (1) devine $\dfrac{3}{5(5n+2)} < \varepsilon$.

De aici deducem

$$n > \frac{3}{25\varepsilon} - \frac{2}{5}.$$

Notînd $N(\varepsilon) = E\left(\dfrac{3}{25\varepsilon} - \dfrac{2}{5}\right)$, rezultă că pentru toţi indicii $n > N(\varepsilon)$ avem $\left| a_n - \dfrac{1}{5} \right| < \varepsilon$.

Întrucît şirul cu termenul general a_n are limită, el este convergent.

99. *Să se verifice că şirul cu termenul general*

$$a_n = \frac{n^2}{2n^2+2}$$

are limita $\dfrac{1}{2}$. *Să se determine rangurile de la care începînd, toţi termenii şirului diferă de* $\dfrac{1}{2}$ *cu mai puţin de* $\dfrac{1}{10}, \dfrac{1}{100}$.

Fie ε un număr pozitiv arbitrar. Condiţia $\left| a_n - \dfrac{1}{2} \right| < \varepsilon$ care este $\left| \dfrac{n^2}{2n^2+2} - \dfrac{1}{2} \right| < \varepsilon$ este satisfăcută dacă $n > \sqrt{\dfrac{1}{2\varepsilon} - 1}$. Notînd $N(\varepsilon) = E\left(\sqrt{\dfrac{1}{2\varepsilon} - 1}\right)$, rezultă că oricărui $\varepsilon > 0, \left(\varepsilon < \dfrac{1}{2}\right)$ îi corespunde $N(\varepsilon) = E\left(\sqrt{\dfrac{1}{2\varepsilon} - 1}\right)$, astfel că îndată ce $n > N(\varepsilon)$ avem $\left| a_n - \dfrac{1}{2} \right| < \varepsilon$; aceasta stabileşte convergenţa şirului a_n către $\dfrac{1}{2}$.

Dacă $\varepsilon = \dfrac{1}{10}$, $N(\varepsilon) = E(\sqrt{5-1}) = 2$.

Deci termenii a_3, a_4, ... diferă de limita $\dfrac{1}{2}$ cu mai puţin de $\dfrac{1}{10}$. Dacă $\varepsilon = \dfrac{1}{100}$, $N(\varepsilon) = E(\sqrt{49}) = 7$. Rezultă că a_8, a_9 ... diferă de limita $\dfrac{1}{2}$ cu mai puţin de $\dfrac{1}{100}$.

100. *Să se arate că* $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{3n^2}{n^3+1} = 0$.

Vom arăta că pentru orice $\varepsilon > 0$ există un $N(\varepsilon)$ astfel încît pentru orice $n > N(\varepsilon)$ să avem $\dfrac{3n^2}{n^3+1} < \varepsilon$.

Într-adevăr,

$$\frac{3n^2}{n^3+1} = \frac{3}{n\left(1 + \frac{1}{n^3}\right)}$$

şi, deoarece $1 + \dfrac{1}{n^3} > 1$, rezultă

$$\frac{3}{n\left[1 + \frac{1}{n^3}\right]} < \frac{3}{n} < \varepsilon$$

pentru $n > E\left(\dfrac{3}{\varepsilon}\right)$. Luînd $N(\varepsilon) = E\left(\dfrac{3}{\varepsilon}\right)$, pentru $n > E\left(\dfrac{3}{\varepsilon}\right)$ avem $\dfrac{3n^2}{n^3+1} < \varepsilon$.

101. *Să se arate că* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n + (-2)^n}{3^n} = 0.$

Fie $\varepsilon > 0$. Avem

$$\left|\frac{2^n + (-2)^n}{3^n}\right| < \frac{2^n + 2^n}{3^n} = \frac{2^{n+1}}{3^n} < \varepsilon,$$

de unde $\left(\frac{2}{3}\right)^n < \frac{\varepsilon}{2}$.

Deci $n \lg\frac{2}{3} < \lg\frac{\varepsilon}{2}$, de unde $n > \dfrac{\lg\frac{\varepsilon}{2}}{\lg\frac{2}{3}}$ (sensul inegalităţii s-a schimbat, deoarece $\lg\frac{2}{3} < 0$).

Rezultă că numărului $\varepsilon > 0$ îi corespunde $N(\varepsilon) = E\left(\dfrac{\lg\frac{\varepsilon}{2}}{\lg\frac{2}{\varepsilon}}\right)$, astfel încît pentru orice $n > N(\varepsilon)$ avem $\frac{2^n + (-2)^n}{3^n} < \varepsilon$; aceasta stabileşte convergenţa şirului dat către zero.

102. *Să se arate că şirul cu termenul general* $a_n = \frac{2^n + (-2)^n}{2^n}$ *nu tinde către zero.*

Dacă şirul ar tinde către zero, ar însemna că pentru orice $\varepsilon > 0$ există $N(\varepsilon)$, astfel încît îndată ce $n > N(\varepsilon)$ să avem $|a_n| < \varepsilon$.

Fie $\varepsilon = \frac{1}{4}$. Oricare ar fi indicele $N(\varepsilon)$, pentru toate numerele naturale n_k pare, $n_k > N(\varepsilon)$, avem

$$a_{n_k} = \frac{2^{n_k} + (-2)^{n_k}}{2^{n_k}} = \frac{2^{n_k} + 2^{n_k}}{2^{n_k}} = 2 > \varepsilon.$$

Deci şirul considerat nu tinde către zero.

103. *Să se arate că şirul cu termenul general* $a_n = n^{(-1)^n}$ *este nemărginit şi nu tinde către* ∞.

Dacă şirul ar fi mărginit, ar însemna că există un număr M astfel încît $|a_n| < M$, oricare ar fi n. Însă oricare ar fi $M > 0$, pentru orice număr natural par $n_1 > M_1$, avem $(-1)^{n_1} = 1$, $a_{n_1} = n_1 > M$.

Să arătăm acum că şirul considerat nu tinde către infinit. Dacă şirul ar tinde către infinit, ar însemna că oricărui număr $\varepsilon > 0$ îi corespunde un număr natural $N(\varepsilon)$, astfel încît pentru $n > N(\varepsilon)$ să avem $a_n > \varepsilon$. Fie n_1 un număr natural $n_1 > \frac{1}{\varepsilon}$, n_1 impar. Avem $a_{n_1} = n_1^{-1} = \frac{1}{n_1}$, ceea ce dovedeşte că şirul dat nu tinde către infinit.

104. *Fie şirul cu termenul general*

$$a_n = \frac{\alpha_0 n^k + \alpha_1 n^{k-1} + \ldots + \alpha_k}{\beta_0 n^p + \beta_1 n^{p-1} + \ldots + \beta_p}, \quad \begin{matrix}\alpha_0 \neq 0\\ \beta_0 \neq 0\end{matrix}, \ k, p > 0$$
$$\beta_0 n^p + \ldots + \beta_p \neq 0.$$

Să se arate că

$$\lim a_n = \begin{cases} \frac{\alpha_0}{\beta_0}, & \textit{dacă } k = p\\ 0, & \textit{dacă } p > k\\ \infty, & \textit{dacă } p < k.\end{cases}$$

Se scrie a_n sub forma următoare

$$a_n = \frac{n^k\left(\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{n} + \ldots + \frac{\alpha_k}{n^k}\right)}{n^p\left(\beta_0 + \frac{\beta_1}{n} + \ldots + \frac{\beta_p}{n^p}\right)}.$$

Dacă $k = p$,

$$a_n = \frac{\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{n} + \ldots + \frac{\alpha_k}{n^k}}{\beta_0 + \frac{\beta_1}{n} + \ldots + \frac{\beta_p}{n^p}}.$$

Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\alpha_i}{n^i} = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\beta_i}{n^i} = 0$, obţinem $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{\alpha_0}{\beta_0}$.

Dacă $k < p$,

$$a_n = \frac{1}{n^{p-k}} \cdot \frac{\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{n} + \ldots + \frac{\alpha_k}{n^k}}{\beta_0 + \frac{\beta_1}{n} + \ldots + \frac{\beta_p}{n^p}},$$

unde $p - k > 0$. Deoarece

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{n} + \ldots + \frac{\alpha_k}{n^k}}{\beta_0 + \frac{\beta_1}{n} + \ldots + \frac{\beta_p}{n^p}} = \frac{\alpha_0}{\beta_0} \text{ şi } \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{p-k}} = 0,$$

deducem $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Dacă $k > p$,

$$a_n = n^{k-p}\,\frac{\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{n} + \dots + \frac{\alpha_k}{n^k}}{\beta_0 + \frac{\beta_1}{n} + \dots + \frac{\beta_p}{n^p}}, \quad k - p > 0.$$

Deci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ pentru următoarele şiruri:

105. $a_n = \dfrac{1 + 2 + 3 + \dots + n}{n^2}$.

Întrucît

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}, \quad a_n = \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2} = \frac{n(n+1)}{2n^2},$$

deci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{1}{2}$.

106. $a_n = \dfrac{C_n^k}{n^k}$.

Avem

$$\frac{C_n^k}{n^k} = \frac{(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!\,n^{k-1}} =$$

$$= \frac{n^{k-1} - (1 + 2 + \dots + k - 1)\,n^{k-2} + \dots}{k!\,n^{k-1}} \text{ şi deci } \lim_{n\to\infty} \frac{C_n^k}{n^k} = \frac{1}{k!}.$$

107. *Se consideră şirul $(a_n)_{n\in N}$ definit în modul următor $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_3 = \dfrac{a_1 + a_2}{2}, \dots, a_n = \dfrac{a_{n-2} + a_{n-1}}{2}$ dacă $n > 2$.*

Folosind metoda inducţiei să se arate că termenul general verifică următoarea relaţie

$$a_n - \frac{2}{3} = \frac{2}{3}\cdot\frac{(-1)^n}{2^{n-1}}, \quad n = 2, 3, \dots$$

Să se calculeze apoi $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Să se afle rangul de la care începînd termenii şirului aproximează limita cu două zecimale exacte.

Relaţia dată este verificată pentru $n = 2$. Într-adevăr $a_2 - \dfrac{2}{3} = \dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{2}$. Să arătăm că presupunînd relaţia adevărată pentru indicele n, ea este adevărată pentru indicele $n + 1$.

Într-adevăr,

$$a_{n+1} = \frac{a_n + a_{n-1}}{2} = \frac{\frac{2}{3} + \frac{2}{3}\frac{(-1)^n}{2^{n-1}} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3}\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-2}}}{2} =$$

$$= \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\left[\frac{(-1)^n}{2^{n-1}} + \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-2}}\right] = \frac{2}{3} + \frac{(-1)^{n-1}}{3\cdot 2^{n-2}}\left[-\frac{1}{2} + 1\right] =$$

$$= \frac{2}{3} + (-1)^{n+1}\frac{2}{3\cdot 2^n}.$$

Conform principiului inducţiei, relaţia dată este adevărată oricare ar fi n, şi

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{2}{3} + \frac{2}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n-1}} = \frac{2}{3}.$$

Termenii şirului aproximează limita cu ~~două~~ trei zecimale exacte dacă $\left|\dfrac{2}{3} - a_n\right| < 0{,}001$ sau $\dfrac{2}{3\cdot 2^{n-1}} < 0{,}001$; din ultima inegalitate obţinem $(n-2)\log 2 > \log\dfrac{1000}{3}$; deci $n > \dfrac{\log\frac{1000}{3}}{\log 2} + 2$ şi

$$N(\varepsilon) = E\left(\frac{\log\frac{1000}{3}}{\log 2} + 2\right).$$

108. *Să se arate că* $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{2^n} = 0$.

Putem scrie

$$\frac{n}{2^n} = \frac{n}{(1+1)^n} = \frac{n}{1 + n + \frac{n(n-1)}{2} + \dots + 1} < \frac{n}{\frac{n(n-1)}{2}} = \frac{2}{n-1}.$$

Fiind dat $\varepsilon > 0$, avem $\dfrac{n}{2^n} < \dfrac{2}{n-1} < \varepsilon$, îndată ce $n > E\left(\dfrac{2+\varepsilon}{\varepsilon}\right)$.

Propunem cititorului să arate că $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^k}{2^n} = 0$.

109. *Să se arate că dacă $|a| < 1$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} na^n = 0$.*

Deoarece $|a| < 1$, putem scrie $|a| = \dfrac{1}{1+\rho}$, $\rho > 0$. Deducem că $|a^n| = \dfrac{1}{(1+\rho)^n} < \dfrac{2}{n(n-1)\rho^2}$. Deci $n\,|a^n| < \dfrac{2}{(n-1)\rho^2}$.

Fie $\varepsilon > 0$, arbitrar dat. Avem $\frac{2}{(n+1)\rho^2} < \varepsilon$ pentru $n > \frac{2}{\rho^2\varepsilon} + 1$. Deci există un $N(\varepsilon) = E\left(\frac{2}{\rho^2\varepsilon} + 1\right)$, astfel ca pentru $n > N(\varepsilon)$ să avem $n\,|a^n| < \varepsilon$, ceea ce este echivalent cu $\lim\limits_{n\to\infty} na^n = 0$ dacă $|a| < 1$.

Propunem cititorului să arate că dacă $|a| < 1$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} n^k a^n = 0$ (k număr natural).

110. *Să se arate că* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Va trebui să demonstrăm că pentru orice $\varepsilon > 0$, există un rang $N(\varepsilon)$ astfel ca pentru orice $n > N(\varepsilon)$ să aibă loc inegalitatea

$$|\sqrt[n]{n} - 1| < \varepsilon.$$

Însă, oricare ar fi $n > 1$, $\sqrt[n]{n} > 1$. Fie $\sqrt[n]{n} - 1 = \alpha_n > 0$. Deducem $\sqrt[n]{n} = 1 + \alpha_n$ sau $n = (1+\alpha_n)^n = 1 + n\alpha_n + \frac{n(n-1)}{2}\alpha_n^2 + \dots + \alpha_n^n$, de unde $n > \frac{n(n-1)}{2}\alpha_n^2$ sau $\alpha_n^2 < \frac{2}{n-1}$.

Înlocuind α_n cu valoarea lui, obținem $\sqrt[n]{n} - 1 < \sqrt{\frac{2}{n-1}} < \varepsilon$ pentru $n > E\left(\frac{2}{\varepsilon^2} + 1\right)$.

Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ *pentru următoarele șiruri.*

111. $a_n = \sqrt[n]{a}$, *n număr natural*, $a > 0$.

Să presupunem $a > 1$. Atunci și $\sqrt[n]{a} > 1$. Pentru orice $\varepsilon > 0$, avem $a < 1 + n\varepsilon$ dacă $n > E\left(\frac{a-1}{\varepsilon}\right)$. Însă, ținînd seama de inegalitatea $(1+\varepsilon)^n > 1 + \varepsilon n$, deducem $a < (1+\varepsilon)^n$ sau

$$1 - \varepsilon < 1 < \sqrt[n]{a} < 1 + \varepsilon \qquad (1)$$

pentru $n > E\left(\frac{a-1}{\varepsilon}\right) = N(\varepsilon)$.

Inegalitatea (1) se mai poate scrie $|\sqrt[n]{a} - 1| < \varepsilon$, pentru orice $n > N(\varepsilon)$, ceea ce echivalează cu $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

Să presupunem $a < 1$. Notînd $a_1 = \frac{1}{a} > 1$, obținem

$$|\sqrt[n]{a} - 1| = \left|\frac{1}{\sqrt[n]{a_1}} - 1\right| = \left|\frac{\sqrt[n]{a_1} - 1}{\sqrt[n]{a_1}}\right| < \sqrt[n]{a_1} - 1.$$

În virtutea celor demonstrate anterior, pentru orice $\varepsilon > 0$ dat există rangul $N(\varepsilon)$, astfel ca $|\sqrt[n]{a_1} - 1| < \varepsilon$ pentru orice $n > N(\varepsilon)$. Cu atît mai mult $|\sqrt[n]{a} - 1| < \varepsilon$ pentru $n > N(\varepsilon)$, adică $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

Dacă $a = 1$, $\sqrt[n]{a} \equiv 1$ oricare ar fi n, deci și $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

În concluzie, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ oricare ar fi $a > 0$.

112. $a_n = (\sin n!)\frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+1} \cdot \frac{n^2}{3n+1}$.

Deoarece $|\sin n!| \leqslant 1$ oricare ar fi n, și $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n^2+1} = 0$, rezultă în baza criteriului (4) că $\lim\limits_{n\to\infty} (\sin n!)\frac{n}{n^2+1} = 0$. Mai departe, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n^2+1} \cdot \frac{n^2}{3n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^3}{3n^3+n^2+3n+1} = \frac{1}{3}$. Deci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} (\sin n!)\frac{n}{n^2+1} + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n^2+1} \cdot \frac{n^2}{3n+1} = \frac{1}{3}$.

113. $a_n = \frac{E(x) + E(2^2x) + \dots + E(n^2x)}{n^3}$.

Am văzut (exercițiul 13) că oricare ar fi numărul natural n și numărul real x au loc următoarele inegalități:

$$n^2x - 1 < E(n^2x) \leqslant n^2x.$$

Să scriem aceste inegalități pentru $n = 1, 2, 3$:

$$\begin{array}{ll}
n = 1, & x - 1 < E(x) \leqslant x \\
n = 2, & 2^2x - 1 < E(2^2x) \leqslant 2^2x \\
n = 3, & 3^2x - 1 < E(3^2x) \leqslant 3^2x \\
\dots\dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
n = n, & n^2x - 1 < E(n^2x) \leqslant n^2x.
\end{array}$$

Adunînd inegalitățile membru cu membru, obținem

$$x(1+2^2+\ldots+n^2)-n < E(x)+E(2^2x)+\ldots+E(n^2x) \leqslant$$
$$\leqslant x(1+2^2+\ldots+n^2),$$

de unde

$$\frac{x(1+2^2+\ldots+n^2)-n}{n^3} < \frac{E(x)+E(2^2x)+\ldots+E(n^2x)}{n^3} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1+2^2+\ldots+n^2}{n^3}\,x.$$

Însă

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{n^3}\,x = x\lim_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{n^3} =$$
$$= x\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \frac{x}{3},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x(1^2+2^2+\ldots+n^2)-n}{n^3} = \lim_{n\to\infty} x\,\frac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{n^3} - \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{x}{3}.$$

Aplicînd proprietatea IV.4, enunțată în introducerea capitolului, obținem

$$\lim_{n\to\infty}\frac{E(x)+E(2^2x)+\ldots+E(n^2x)}{n^3} = \frac{x}{3}.$$

114. *Pentru șirul avînd termenul general*

$$a_n = \frac{1!+2!+\ldots+n!}{(2n)!}.$$

1) *să se formeze termenii* a_1, a_2, a_3
2) *să se calculeze* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

1) Observăm că numărătorul termenului general conține suma a n termeni. Deci numărătorul termenului a_1 are un singur termen:

$$a_1 = \frac{1}{(2\cdot 1)!} = \frac{1}{2}.$$

Numărătorul termenului a_2 este suma a doi termeni:

$$a_2 = \frac{1!+2!}{(2\cdot 2)!} = \frac{3}{24} = \frac{1}{8}.$$

Numărătorul termenului a_3 este suma a trei termeni:

$$a_3 = \frac{1!+2!+3!}{(2\cdot 3)!} = \frac{9}{6!}.$$

2) Din inegalitățile evidente:

$$1! < n!,\ 2! < n!,\ \ldots,\ (n-1)! < n!,$$

valabile pentru orice $n > 1$, deducem

$$0 < a_n < \frac{\overbrace{n!+n!+\ldots+n!}^{n\ \text{termeni}}}{(2n)!} = \frac{n\cdot n!}{1\cdot 2\ldots n(n+1)\ldots 2n} = \frac{n}{(n+1)\ldots 2n}.$$

Însă $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{(n+1)\ldots 2n} = 0$. Aplicînd proprietatea IV.4, enunțată în introducerea capitolului, obținem

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1!+2!+\ldots+n!}{(2n)!} = 0.$$

115. $\boxed{a_n = \frac{n^2}{n!}}$.

Avem $0 < \frac{n^2}{n!} = \frac{n^2}{1\cdot 2\ldots n} < \frac{n^2}{n(n-1)(n-2)}$ oricare ar fi $n > 5$. Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{n(n-1)(n-2)} = 0$, conform proprietății IV.4, rezultă că și

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{1\cdot 2\ldots n} = 0.$$

Propunem cititorului să generalizeze acest exercițiu la cazul $a_n = \frac{n^k}{n!}$ (k număr natural).

116. $\boxed{a_n = \frac{2^n}{n!}}$.

Pentru orice $n \geqslant 3$ avem

$$0 < \frac{2^n}{n!} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{2}\cdots\frac{2}{n} < \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdots\frac{2}{3} = 2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}.$$

Deoarece $\frac{2}{3} < 1$, avem $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} = 0$; deci

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!} = 0.$$

117. $\boxed{a_n = \frac{\alpha^n}{n!}}$, $\alpha > 0$.

Fie k un număr natural, $k > 2\alpha$. Dacă $n > k$,

$$\frac{\alpha^n}{n!} = \left(\frac{\alpha}{1}\cdot\frac{\alpha}{2}\cdots\frac{\alpha}{k}\right)\left(\frac{\alpha}{k+1}\cdots\frac{\alpha}{n}\right).$$

Fiecare din factorii din prima paranteză este mai mic decît α şi fiecare din factorii din paranteza a doua este mai mic decît $\frac{1}{2}$.

Deci

$$\frac{\alpha^n}{n!} < \alpha^k \frac{1}{2^{n-k}} = (2\alpha)^k \frac{1}{2^n} < \varepsilon \quad \text{dacă } n > E\left(\frac{(2\alpha)^k}{\varepsilon \ln 2}\right).$$

Deci $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\alpha^n}{n!} = 0$, dacă $\alpha > 0$.

118. $a_n = n\left(\frac{2}{3}\right)^n + n^2 \sin\frac{\pi}{2^n}$.

Conform exerciţiului 109, $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$.

Deducem uşor că $0 < \sin\frac{\pi}{2^n} < \frac{\pi}{2^n}$ oricare ar fi n, deci $0 < n^2 \sin\frac{\pi}{2^n} < \frac{\pi n^2}{2^n}$. Analog ca în exerciţiul 108 stabilim că $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{2^n} = 0$.

Deci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{2}{3}\right)^n + \lim\limits_{n\to\infty} n^2 \sin\frac{\pi}{2^n} = 0$.

119. *Să se arate că dacă* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$, *atunci şi* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[3]{a_n} = \sqrt[3]{\alpha}$.

Se disting următoarele cazuri:

1) $\alpha < 0$. Începînd de la un rang N, toţi termenii şirului sînt negativi. Putem presupune că $N = 1$, ceea ce obţinem lăsînd la o parte un număr finit de termeni, operaţie ce nu influenţează asupra limitei şirului.

Vom avea

$$\sqrt[3]{a_n} - \sqrt[3]{\alpha} = \frac{\left(\sqrt[3]{a_n} - \sqrt[3]{\alpha}\right)\left(\sqrt[3]{a_n^2} + \sqrt[3]{\alpha a_n} + \sqrt[3]{\alpha^2}\right)}{\sqrt[3]{a_n^2} + \sqrt[3]{\alpha a_n} + \sqrt[3]{\alpha^2}} =$$

$$= \frac{a_n - \alpha}{\sqrt[3]{a_n^2} + \sqrt[3]{\alpha^2} + \sqrt[3]{\alpha a_n}} < \frac{a_n - \alpha}{\sqrt[3]{\alpha^2}}$$

(am ţinut seama de identitatea $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$).

Înmulţirea cu paranteza $\left(\sqrt[3]{a_n^2} + \sqrt[3]{\alpha^2} + \sqrt[3]{\alpha a_n}\right)$ este posibilă deoarece dacă $\alpha < 0$, sîntem siguri că $\sqrt[3]{a_n^2} + \sqrt[3]{\alpha^2} + \sqrt[3]{\alpha a_n} \neq 0$.

Fie $\varepsilon > 0$, dat. Din ipoteza $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$ rezultă că există un rang $N(\varepsilon)$, astfel încît pentru $n > N(\varepsilon)$ să avem

$$|a_n - \alpha| < \varepsilon \sqrt[3]{\alpha^2}.$$

Prin urmare $\left|\sqrt[3]{a_n} - \sqrt[3]{\alpha}\right| < \frac{|a_n - \alpha|}{\sqrt[3]{\alpha^2}} < \frac{\varepsilon}{\sqrt[3]{\alpha^2}} \sqrt[3]{\alpha^2} = \varepsilon$ pentru $n > N(\varepsilon)$.

Lăsăm pe seama cititorului demonstraţia în cazul $\alpha > 0$.

2) $\alpha = 0$. Prin ipoteză, numărul $\varepsilon > 0$ fiind dat, există rangul $N(\varepsilon)$ astfel încît pentru orice $n > N(\varepsilon)$ să avem $|a_n| < \varepsilon^3$. Rezultă că $\left|\sqrt[3]{a_n}\right| < \varepsilon$ pentru $n > N(\varepsilon)$.

Propunem ca exerciţiu cititorului să demonstreze:

Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\alpha \geqslant 0$, $a_n \geqslant 0$, atunci şi $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{\alpha}$.

Să se generalizeze exerciţiul precedent la cazul cînd indicele radicalului este un număr natural p.

120. *Pentru şirul avînd termenul general*

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}.$$

1) *să se scrie termenii* a_1, a_3, a_5

2) *să se calculeze* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

1) Deoarece a_n este suma a n termeni, a_1 va conţine un singur termen

$$a_1 = \frac{1}{\sqrt{1^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}};$$

a_3 va conţine suma a trei termeni

$$a_3 = \frac{1}{\sqrt{3^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{3^2+2}} + \frac{1}{\sqrt{3^2+3}};$$

a_5 va conţine suma a cinci termeni

$$a_5 = \frac{1}{\sqrt{5^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{5^2+2}} + \frac{1}{\sqrt{5^2+3}} + \frac{1}{\sqrt{5^2+4}} + \frac{1}{\sqrt{5^2+5}}.$$

2) Ţinem seama de următoarele inegalităţi

$$\underbrace{\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}}_{n \text{ termeni}} < \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} < \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}}_{n \text{ termeni}}$$

din care deducem

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} < a_n < \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}.$$

4

Însă

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = 1;$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = 1.$$

Aplicînd proprietatea IV.4, obținem $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

121. *Pentru șirul avînd termenul general*

$$a_n = \frac{2^2+4^2+\ldots+(2n)^2}{1^2+3^2+\ldots+(2n-1)^2}$$

1) *să se scrie termenii* a_1, a_2, a_3
2) *să se calculeze* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

1) Raționînd ca în exercițiile precedente, obținem

$$a_1 = \frac{2^2}{1^2}, \quad a_2 = \frac{2^2+4^2}{1^2+3^2}, \quad a_3 = \frac{2^2+4^2+6^2}{1^2+3^2+5^2}.$$

2) Întrucît

$$1^2+3^2+\ldots+(2n-1)^2 = 1^2+2^2+\ldots+(2n)^2-[2^2+ +4^2+\ldots+(2n)^2] = \frac{2n(2n+1)(4n+1)}{6} - 2^2(1^2+2^2+\ldots+n^2) =$$

$$= \frac{2n(2n+1)(4n+1)}{6} - 2^2\frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

deducem

$$a_n = \frac{2^2 \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}{\frac{2n(2n+1)(4n+1)}{6} - \frac{2^2 n(n+1)(2n+1)}{6}} =$$

$$= \frac{2(n+1)(2n+1)}{(2n+1)(4n+1)-2(n+1)(2n+1)} = \frac{4n^2+6n+\ldots}{4n^2+\ldots}.$$

Deci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

Să se calculeze limitele șirurilor care au termenul general:

122. $a_n = \sqrt{n}\,(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$.

Înmulțim și împărțim termenul general cu paranteza $(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$; obținem

$$a_n = \sqrt{n}\,\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \sqrt{n}\,\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} =$$

$$= \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}.$$

Însă $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right) = 2$ și deci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}$.

123. $a_n = \sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}$.

Înmulțim și împărțim termenul general a_n cu $\sqrt[3]{(n+1)^2} + \sqrt[3]{n(n+1)} + \sqrt[3]{n^2}$; deducem

$$a_n = \frac{(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n})(\sqrt[3]{(n+1)^2}+\sqrt[3]{n(n+1)}+\sqrt[3]{n^2})}{\sqrt[3]{(n+1)^2}+\sqrt[3]{n(n+1)}+\sqrt[3]{n^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt[3]{(n+1)^2}+\sqrt[3]{n(n+1)}+\sqrt[3]{n^2}}.$$

Însă $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt[3]{(n+1)^2}+\sqrt[3]{n(n+1)}+\sqrt[3]{n^2}} = 0$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

124. $a_n = n^{\frac{1}{3}}\left[\sqrt[3]{(n+1)^2} - \sqrt[3]{(n-1)^2}\right]$.

Procedînd ca în exercițiul 123, obținem

$$a_n = \frac{n^{\frac{1}{3}}(\sqrt[3]{(n+1)^2}-\sqrt[3]{(n-1)^2})(\sqrt[3]{(n+1)^4}+\sqrt[3]{(n+1)^2(n-1)^2}+\sqrt[3]{(n-1)^4})}{\sqrt[3]{(n+1)^4}+\sqrt[3]{(n+1)^2(n-1)^2}+\sqrt[3]{(n-1)^4}} =$$

$$= \frac{n^{\frac{1}{3}}[(n+1)^2-(n-1)^2]}{\sqrt[3]{(n+1)^4}+\sqrt[3]{(n+1)^2(n-1)^2}+\sqrt[3]{(n-1)^4}} =$$

$$= \frac{4n\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{(n+1)^4}+\sqrt[3]{(n+1)^2(n-1)^2}+\sqrt[3]{(n-1)^4}} =$$

$$= \frac{4}{\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^4}+\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2\left(1-\frac{1}{n}\right)^2}+\sqrt[3]{\left(1-\frac{1}{n}\right)^4}}.$$

Însă $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^4} = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3]{\left(1-\frac{1}{n}\right)^4} = 1$,

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2\left(1-\frac{1}{n}\right)^2} = 1$; deci

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{4}{3}.$$

125. $a_n = \dfrac{3^n + 5^n}{3^{n+1} + 5^{n+1}}$.

Pentru a calcula $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ ne vom baza pe un rezultat cunoscut: $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha^n = 0$ dacă $|\alpha| < 1$.

Dînd factor comun la numărător pe 5^n şi la numitor pe 5^{n+1}, obţinem

$$a_n = \frac{1 + \left(\frac{3}{5}\right)^n}{5\left[1 + \left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}\right]}.$$

Deci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{1}{5} \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}\left[1 + \left(\frac{3}{5}\right)^n\right]}{\lim\limits_{n\to\infty}\left[1 + \left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}\right]} = \dfrac{1}{5}$.

126. $a_n = \dfrac{\alpha^n + \beta^n}{\alpha^{n+1} + \beta^{n+1}}$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$.

Experienţa exerciţiului 125 ne conduce la considerarea următoarelor cazuri

1) $\alpha > \beta$. Dăm factor comun la numărător şi la numitor pe α^n, respectiv α^{n+1}. Obţinem

$$a_n = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1 + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n}{1 + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n+1}}.$$

Deoarece $\dfrac{\beta}{\alpha} < 1$, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^{n+1} = 0$. Deci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{1}{\alpha}$.

2) $\alpha < \beta$. Dăm factor comun la numărător şi la numitor pe β^n, respectiv β^{n+1}. Obţinem

$$a_n = \frac{1}{\beta} \cdot \frac{1 + \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n}{1 + \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{n+1}}.$$

Deoarece $\dfrac{\alpha}{\beta} < 1$, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^n = 0$. Deci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{1}{\beta}$.

3) $\alpha = \beta$. În acest caz,

$$a_n = \frac{2\alpha^n}{2\alpha^{n+1}} = \frac{1}{\alpha},$$

oricare ar fi n. Deci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{1}{\alpha}$.

Rezultatele obţinute se pot rezuma astfel

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{\max(\alpha, \beta)}$$

(prin $\max(\alpha, \beta)$ am notat pe cel mai mare dintre numerele α şi β).

127. $a_n = \dfrac{\alpha^n}{1 + \alpha^{2n}}$, $\alpha > 0$.

Ştiind că

$$\lim \alpha^n = \begin{cases} 0, & \text{dacă } \alpha < 1 \\ 1, & \text{dacă } \alpha = 1 \\ \infty, & \text{dacă } \alpha > 1, \end{cases}$$

vom considera următoarele cazuri:

1) $\alpha < 1$; $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{\lim \alpha^n}{1 + \lim \alpha^{2n}} = \dfrac{0}{1} = 0$.

2) $\alpha = 1$; $a_n = \dfrac{1}{2}$ oricare ar fi n, deci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{1}{2}$.

3) $\alpha > 1$; $a_n = \dfrac{\alpha^n}{\alpha^{2n}\left(1 + \frac{1}{\alpha^{2n}}\right)} = \dfrac{1}{\alpha^n\left(1 + \frac{1}{\alpha^{2n}}\right)}$.

Însă $\dfrac{1}{\alpha} < 1$, deci $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\alpha}\right)^{2n} = 0$, iar $\lim\limits_{n\to\infty} a_n =$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\alpha^n} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{\alpha^{2n}}} = 0.$$

Deci

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha^n}{1 + \alpha^{2n}} \begin{cases} 0, & \text{dacă } 0 < \alpha < 1 \\ \frac{1}{2}, & \text{dacă } \alpha = 1 \\ 0, & \text{dacă } \alpha > 1. \end{cases}$$

128. $a_n = \dfrac{\alpha^n}{(1+\alpha)(1+\alpha^2)\ldots(1+\alpha^n)}$, $\alpha > 0$.

Dacă $\alpha < 1$,

$$0 < \frac{\alpha^n}{(1+\alpha)(1+\alpha^2)\ldots(1+\alpha^n)} < \alpha^n$$

(am ținut seama că dacă $\alpha > 0$, $1 + \alpha^n > 1$ oricare ar fi n). Însă $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha^n = 0$. Aplicînd proprietatea IV.4 se deduce că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Dacă $\alpha = 1$, $a_n = \dfrac{1}{\underbrace{2 \cdot 2 \ldots 2}_{\text{de } n \text{ ori}}} = \dfrac{1}{2^n}$; deci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Dacă $\alpha > 1$, $0 < \dfrac{\alpha^n}{(1+\alpha)(1+\alpha^2)\ldots(1+\alpha^n)} < \dfrac{\alpha^n}{\alpha \cdot \alpha^2 \ldots \alpha^n} =$

$$= \frac{1}{\alpha^{\frac{n(n-1)}{2}}}.$$

Însă, deoarece $\dfrac{1}{\alpha} < 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{\alpha}\right)^{\frac{n(n-1)}{2}} = 0$. Aplicînd proprietatea IV.4, obținem $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Folosindu-se teorema de convergență a șirurilor monotone și mărginite, să se demonstreze convergența următoarelor șiruri:

129. $a_n = \dfrac{n^n}{(n!)^2}$.

Avem

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{n+1}.$$

Însă șirul $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ fiind crescător și tinzînd către e, rezultă că $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n < e$, oricare ar fi n. Deci

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{e}{n+1} < 1 \text{ pentru } n \geqslant 2.$$

Rezultă că șirul $(a_n)_{n\in N}$ este monoton descrescător.
Fiind mărginit inferior, $a_n > 0$, oricare ar fi n, rezultă conform teoremei VI.2 că este convergent. Fie $l = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Trecînd la limită, din relația existentă între termenii a_n și a_{n+1},

$$a_{n+1} = a_n \cdot \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n},$$

obținem

$$l = l \cdot \frac{1}{l} \cdot 0 = 0.$$

130. $a_n = \dfrac{\alpha^n}{n!}$, $\alpha > 0$.

$\alpha < n+1$ $\quad 1 < \frac{n+1}{\alpha}$ $\quad \frac{\alpha}{n+1} < 1$

Avem

$$a_{n+1} = \frac{\alpha^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{\alpha^n}{n!} \cdot \frac{\alpha}{n+1} = a_n \cdot \frac{\alpha}{n+1}.$$

Pentru $n > \alpha - 1$ rezultă $\dfrac{\alpha}{n+1} < 1$, deci $a_{n+1} < a_n$. Șirul fiind monoton descrescător și mărginit inferior de zero, are o limită finită. Fie $l = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Trecînd la limită în egalitatea $a_{n+1} = \dfrac{\alpha}{n+1} a_n$, obținem $l = 0 \cdot l = 0$.

Am regăsit rezultatul obținut la exercițiul 117.

131. *Pentru șirul al cărui termen general este*

$$a_n = \frac{5}{4} \cdot \frac{7}{7} \cdot \frac{9}{10} \cdots \frac{5 + 2(n-1)}{4 + 3(n-1)}$$

1) *să se scrie termenii* a_1, a_2, a_3, a_{10}

2) *să se arate că șirul* $(a_n)_{n\in N}$ *are limită și apoi să se calculeze această limită.*

1) Observăm că a_n este produsul a n factori. Prin urmare a_1 se compune dintr-un singur factor $a_1 = \dfrac{5}{4}$;

a_2 este produsul a doi factori: $a_2 = \dfrac{5}{4} \cdot \dfrac{7}{7}$;

a_3 este produsul a trei factori: $a_3 = \dfrac{5}{4} \cdot \dfrac{7}{7} \cdot \dfrac{9}{10}$.

Pentru a forma pe a_{10} vom lua produsul a 10 factori:

$$a_{10} = \frac{5}{4} \cdot \frac{7}{7} \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{11}{13} \cdot \frac{13}{16} \cdot \frac{15}{19} \cdot \frac{17}{22} \cdot \frac{19}{25} \cdot \frac{21}{28} \cdot \frac{23}{31}.$$

2) Vom arăta că şirul este monoton descrescător. Într-adevăr,

$$a_n - a_{n-1} = \frac{5}{4} \cdot \frac{7}{7} \cdots \frac{5 + 2(n-2)}{4 + 3(n-2)} \left[\frac{2 - n}{4 + 3(n-1)} \right].$$

Pentru $n > 2$, $a_n - a_{n-1} < 0$, deci $a_n < a_{n-1}$.

Deoarece oricare ar fi n, $a_n > 0$, rezultă că şirul este şi mărginit inferior. Prin urmare şirul are limită finită. Fie $l = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Trecînd la limită în următoarea relaţie, existentă între termenii a_n şi a_{n+1}, $a_{n+1} = a_n \dfrac{5 + 2n}{4 + 3n}$, obţinem

$$l = l \cdot \frac{2}{3}. \tag{1}$$

Egalitatea (1) poate avea loc, însă, numai dacă $l = 0$; deci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

132. *Fie date numerele a_0 şi b_0 ($a_0 < b_0$). Termenii şirurilor $(a_n)_{n\in N}$ şi $(b_n)_{n\in N}$ se dau cu ajutorul formulelor*

$$a_1 = \frac{a_0 + b_0}{2}, \qquad b_1 = \frac{a_0 + 2b_0}{3}$$

$$a_2 = \frac{a_1 + b_1}{2}, \qquad b_2 = \frac{a_1 + 2b_1}{3}$$

şi în general,

$$a_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}, \qquad b_n = \frac{a_{n-1} + 2b_{n-1}}{3}.$$

Să se demonstreze că şirurile $(a_n)_{n\in N}$ şi $(b_n)_{n\in N}$ sînt convergente şi tind către aceeaşi limită.

În primul rînd, vom arăta că şirul $(a_n)_{n\in N}$ este monoton crescător şi mărginit superior, iar şirul $(b_n)_{n\in N}$ monoton descrescător şi mărginit inferior.

Într-adevăr:

$$a_1 = \frac{a_0 + b_0}{2} > \frac{a_0 + a_0}{2} = a_0, \quad b_1 = \frac{a_0 + 2b_0}{3} < b_0, \quad b_1 - a_1 = \frac{b_0 - a_0}{6} > 0.$$

Deci $a_0 < a_1 < b_1 < b_0$.

Să presupunem că $a_n < b_n$. Rezultă

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} > a_n, \quad b_{n+1} = \frac{a_n + 2b_n}{3} < b_n, \quad b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b_n - a_n}{6} > 0.$$

Deci $a_n < a_{n+1} < b_{n+1} < b_n$, relaţii valabile pentru orice n, în virtutea principiului inducţiei.

Şirul $(a_n)_{n\in N}$ este deci crescător şi mărginit superior de b_0, în timp ce şirul $(b_n)_{n\in N}$ este descrescător şi mărginit inferior de a_0. Conform teoremei VI.2 cele două şiruri au limită finită.

Fie $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, $\beta = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

Trecînd la limită în ambii membri ai relaţiei

$$a_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2},$$

obţinem $\alpha = \dfrac{\alpha + \beta}{2}$, de unde $\alpha = \beta$.

133. *Fie $\alpha > 0$ şi şirul $(a_n)_{n\in N}$ definit în modul următor*

$$a_n = \frac{1}{2}\left(a_{n-1} + \frac{\alpha}{a_{n-1}} \right), \quad a_0 > 0.$$

Să se arate că şirul este convergent şi $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sqrt{\alpha}$.

Din condiţia $a_0 > 0$ obţinem $a_1 = \dfrac{1}{2}\left(a_0 + \dfrac{\alpha}{a_0}\right) > 0$.

Presupunem $a_{n-1} > 0$. Avem $a_n = \dfrac{1}{2}\left(a_{n-1} + \dfrac{\alpha}{a_{n-1}}\right) > 0$. Deci conform principiului inducţiei, $a_n > 0$ oricare ar fi n.

Din $a_n^2 = \dfrac{1}{4}\left(a_{n-1}^2 + \dfrac{\alpha^2}{a_{n-1}^2} + 2\alpha\right)$ obţinem

$$a_n^2 - \alpha = \frac{1}{4}\left(a_{n-1} - \frac{\alpha}{a_{n-1}}\right)^2 > 0, \quad \text{deci } a_n^2 > \alpha.$$

Rezultă că dacă şirul are limită, aceasta nu poate fi egală cu zero.

Şirul este monoton descrescător. Într-adevăr,

$$a_n - a_{n-1} = \frac{1}{2}\left(a_{n-1} + \frac{\alpha}{a_{n-1}}\right) - a_{n-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{a_{n-1}} - a_{n-1}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha - a_{n-1}^2}{a_{n-1}} < 0.$$

Conform teoremei VI.2 şirul $(a_n)_{n\in N}$ este convergent. Fie $l = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Trecînd la limită în egalitatea $a_n = \frac{1}{2}\left(a_{n-1} + \frac{\alpha}{a_{n-1}}\right)$, obţinem

$$l = \frac{1}{2}\left(l + \frac{\alpha}{l}\right),$$

de unde $l = \sqrt{\alpha}$.

134. *Fie şirul*

$$a_1 = \frac{x}{2}, \quad a_2 = \frac{x}{2} - \frac{a_1^2}{2}, \quad a_3 = \frac{x}{2} - \frac{a_2^2}{2}, \dots, a_n = \frac{x}{2} - \frac{a_{n-1}^2}{2}, \dots, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1$$

Să se arate că şirul este convergent şi $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -1 + \sqrt{x+1}$.

Avem

$$a_1 - a_2 = \frac{a_1^2}{2} \tag{1}$$

$$a_2 - a_3 = \frac{a_2^2 - a_1^2}{2} \tag{2}$$

$$a_3 - a_4 = \frac{a_3^2 - a_2^2}{2} \tag{3}$$

. . . .

Adunînd egalităţile (1) cu (2) şi (2) cu (3), obţinem

$$a_1 - a_3 = \frac{a_2^2}{2} > 0; \quad a_2 - a_4 = \frac{a_3^2 - a_1^2}{2} < 0.$$

Folosind metoda inducţiei, propunem cititorului să arate că

$$a_{2k} < a_{2k+2} \text{ şi } a_{2k+1} > a_{2k+3}.$$

Deci

$$a_1 > a_3 > a_5 > \dots > a_{2k+1} > a_{2k+3} > \dots \text{ şi } a_2 < a_4 < a_6 < \dots < a_{2n} < a_{2n+2} < \dots$$

Vom arăta că şirul dat este şi mărginit. Avem $0 < a_1 < \frac{1}{2}$.

Să presupunem că $|a_k| < \frac{1}{2}$; atunci $-\frac{1}{8} < -\frac{a_k^2}{2} < 0$ şi

$$|a_{k+1}| = \left|\frac{x}{2} - \frac{a_k^2}{2}\right| < \frac{1}{2}.$$

Rezultă că $|a_k| < \frac{1}{2}$, oricare ar fi k. Prin urmare, şirurile $a_1, a_3, a_5, \dots, a_{2k+1}, \dots$, şi $a_2, a_4, \dots, a_{2n}$ sînt convergente. Să punem $l = \lim\limits_{k\to\infty} a_{2k+1}$, $l_1 = \lim\limits_{k\to\infty} a_{2k}$.

Din egalitatea $a_{2n} - a_{2n+1} = \frac{a_{2n}^2 - a_{2n-1}^2}{2}$ rezultă

$$l_1 - l = \frac{l_1^2 - l^2}{2} \text{ sau } (l_1 - l)(l_1 + l - 2) = 0.$$

Însă egalitatea $l_1 + l = 2$ este incompatibilă cu $|a_k| < \frac{1}{2}$.

Rezultă că $l = l_1$. Din egalitatea $a_n = \frac{x}{2} - \frac{a_{n-1}^2}{2}$ deducem că $l = \frac{x}{2} - \frac{l^2}{2}$, de unde $l = -1 + \sqrt{1+x}$, $l > 0$.

Să se demonstreze existenţa limitei pentru următoarele şiruri:

135. $a_n = \frac{\cos x}{3} + \frac{\cos 2x}{3^2} + \dots + \frac{\cos nx}{3^n}$.

În multe cazuri, pentru a se arăta existenţa limitei unui şir se foloseşte criteriul general al lui Cauchy. În cele ce urmează vom arăta că şirul dat satisface criteriul general al lui Cauchy, adică pentru orice $\varepsilon > 0$ există numărul natural $N = N(\varepsilon)$, astfel că pentru orice $n > N(\varepsilon)$ şi pentru orice p să avem $|a_n - a_{n+p}| < \varepsilon$.

Însă

$$a_{n+p} = \frac{\cos x}{3} + \frac{\cos 2x}{3^2} + \dots + \frac{\cos nx}{3^n} + \frac{\cos(n+1)x}{3^{n+1}} + \dots + \frac{\cos(n+p)x}{3^{n+p}}.$$

Deci

$$|a_{n+p} - a_n| = \left|\frac{\cos(n+1)x}{3^{n+1}} + \dots + \frac{\cos(n+p)x}{3^{n+p}}\right| \leqslant \left|\frac{\cos(n+1)x}{3^{n+1}}\right| + \dots + \left|\frac{\cos(n+p)x}{3^{n+p}}\right|.$$

Dar $|\cos \alpha x| \leqslant 1$, oricare ar fi α și oricare ar fi x. Prin urmare

$$|a_n - a_{n+p}| \leqslant \frac{1}{3^{n+1}} + \frac{1}{3^{n+2}} + \dots + \frac{1}{3^{n+p}} = \frac{1}{3^{n+1}}\left[1 + \frac{1}{3} + \right.$$

$$\left. + \dots + \frac{1}{3^{p-1}}\right] = \frac{1}{3^{n+1}} \cdot \frac{1 - \frac{1}{3^p}}{\frac{2}{3}} < \frac{1}{2 \cdot 3^n}.$$

Fie inegalitatea $\frac{1}{2\cdot 3^n} < \varepsilon$ sau $\frac{1}{2\cdot\varepsilon} < 3^n$. Logaritmînd, obținem $n \lg 3 > \lg \frac{1}{2\varepsilon}$. Dacă $N(\varepsilon) = E\left(\frac{\lg \frac{1}{2\varepsilon}}{\lg 3}\right)$, pentru $n > N(\varepsilon)$ avem $\frac{1}{2\cdot 3^n} < \varepsilon$, deci $|a_n - a_{n+p}| < \varepsilon$.

136. $a_n = \frac{1}{1\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 7} + \dots + \frac{1}{[1 + 3(n-1)](1 + 3n)}$.

Existența limitei se demonstrează folosind criteriul lui Cauchy. Avem

$$a_{n+p} = \frac{1}{1\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 7} + \dots + \frac{1}{[1 + 3(n-1)](1+3n)} +$$

$$+ \frac{1}{(1+3n)[1 + 3(n+1)]} + \dots + \frac{1}{[1 + 3(n+p-1)][1 + 3(n+p)]},$$

$$|a_{n+p} - a_n| = \frac{1}{(1+3n)[1+3(n+1)]} +$$

$$\dots + \frac{1}{[1 + 3(n+p-1)][1 + 3(n+p)]}.$$

Însă $\frac{1}{[1 + 3(n+p-1)][1 + 3(n+p)]} = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{1 + 3(n+p-1)} - \right.$ $\left. - \frac{1}{1 + 3(n+p)}\right]$.

Deci, oricare ar fi p,

$$a_{n+p} - a_n = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{1+3n} - \frac{1}{1 + 3(n+1)} + \frac{1}{1 + 3(n+1)} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{1 + 3(n+2)} + \dots + \frac{1}{1 + 3(n+p-1)} - \frac{1}{1 + 3(n+p)}\right].$$

Prin reducerea termenilor asemenea obținem

$$a_{n+p} - a_n = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{1+3n} - \frac{1}{1+3(n+p)}\right] < \frac{1}{3(1+3n)} < \frac{1}{n} < \varepsilon$$

pentru $n > E\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$.

137. $a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$.

Avem

$$|a_{n+p} - a_n| = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \dots + \frac{1}{(n+p)^2}.$$

Însă

$$\frac{1}{(n+1)^2} = \frac{1}{(n+1)(n+1)} < \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

$$\frac{1}{(n+2)^2} = \frac{1}{(n+2)(n+2)} < \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$$

$$\frac{1}{(n+p)^2} = \frac{1}{(n+p)(n+p)} < \frac{1}{(n+p-1)(n+p)} = \frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p}.$$

Deci

$$|a_{n+p} - a_n| < \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+p-1} -$$

$$- \frac{1}{n+p} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n} < \varepsilon$$

pentru $n > E\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$, oricare ar fi p. Prin urmare șirul este convergent.

Să se arate că următoarele șiruri sînt divergente:

138. $a_n = \frac{10}{1} + \frac{11}{3} + \frac{12}{5} + \dots + \frac{10+n}{2n+1}$.

Divergența șirului se stabilește arătînd că nu este satisfăcut criteriul lui Cauchy. Într-adevăr, dacă șirul ar fi convergent, ar trebui să existe un număr natural $N(\varepsilon)$, astfel încît pentru $n > N(\varepsilon)$ să avem

$$|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon$$

oricare ar fi p. În particular, ar trebui să avem, începînd de la un anumit rang, $|a_{2n} - a_n| < \frac{1}{2}$. Însă

$$a_{2n} = \frac{10}{1} + \frac{11}{3} + \dots + \frac{10+n}{2n+1} + \frac{10+n+1}{2n+3} + \dots + \frac{10+2n}{4n+1}.$$

În cazul nostru,

$$a_{2n} - a_n = \frac{10+n+1}{2n+3} + \dots + \frac{10+2n}{4n+1} > \frac{10+2n}{4n+1}.$$

Verificăm însă, cu ușurință inegalitatea $\frac{10+2n}{4n+1} > \frac{1}{2}$ pentru orice n. Deci, șirul este divergent.

139. $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$.

Fie $\varepsilon = \frac{1}{2}$ și $p = n$. Dacă șirul ar fi convergent, ar trebui să existe numărul natural $N(\varepsilon)$, astfel încît pentru orice $n > N(\varepsilon)$ să avem $|a_{2n} - a_n| < \varepsilon$.

Însă

$$|a_{2n} - a_n| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \underbrace{\frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n}}_{n \text{ termeni}} = \frac{1}{2}.$$

Rezultă că șirul este divergent.

140. *Dacă șirul $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ tinde către a, atunci șirul $S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$, unde*

$$S_n = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

tinde către aceeași limită a.

Fie $t_n = a_n - a$. Avem $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = 0$. Deci fiind dat $\varepsilon > 0$, există $N(\varepsilon)$, astfel încît pentru orice $n > N(\varepsilon)$ să avem $|t_n| < \frac{\varepsilon}{2}$. Presupunînd $n > N(\varepsilon)$ putem scrie

$$\frac{t_1 + t_2 + \dots + t_n}{n} = \frac{t_1 + t_2 + \dots + t_N}{n} + \frac{t_{N+1} + t_{N+2} + \dots + t_n}{n}$$

și

$$\left|\frac{t_1 + t_2 + \dots + t_n}{n}\right| \leqslant \left|\frac{t_1 + t_2 + \dots + t_N}{n}\right| + \left|\frac{t_{N+1} + t_{N+2} + \dots + t_n}{n}\right|.$$

Însă

$$\left|\frac{t_{N+1} + t_{N+2} + \dots + t_n}{n}\right| \leqslant \left|\frac{t_{N+1}}{n}\right| + \dots + \left|\frac{t_n}{n}\right| < \underbrace{\frac{\varepsilon}{2n} + \dots + \frac{\varepsilon}{2n}}_{n-N \text{ termeni}} =$$

$$= \frac{n-N}{2n}\varepsilon < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, rezultă că fiind dat $\varepsilon > 0$, există $N(\varepsilon)$, astfel încît pentru orice $n > N'$ să avem

$$\frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2(t_1 + t_2 + \dots + t_N)}.$$

Deci pentru $n > \max(N', N)$, vom avea

$$\frac{|t_1 + t_2 + \dots + t_n|}{n} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \text{ adică } \lim_{n\to\infty} \frac{t_1 + t_2 + \dots + t_n}{n} = 0.$$

Ținînd seama de semnificația lui t_n, deducem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = a.$$

Sumele S_n se numesc *sumele lui Cesaro.*

O b s e r v a ț i e. Reciproca propoziției enunțate nu este adevărată, după cum arată exemplul următor.

Fie șirul $a_1 = 1$, $a_2 = 0$, $a_3 = 1, \dots, a_n = \frac{1 + (-1)^{n-1}}{2}, \dots$ Șirul $(a_n)_{n\in N}$ nu are limită în timp ce pentru

$$\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} = \begin{cases} \frac{1}{2}, & n \text{ par} \\ \frac{n+1}{2n}, & n \text{ impar,} \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} = \frac{1}{2}.$$

141. *Dacă șirul de numere pozitive $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$, tinde către numărul pozitiv α, atunci șirul $a_1, \sqrt{a_1 a_2}, \dots, \sqrt[n]{a_1 \dots a_n}, \dots$, tinde de asemenea către α.*

Într-adevăr, putem scrie

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} = e^{\ln \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}} = e^{\frac{1}{n} \ln a_1 a_2 \dots a_n} = e^{\frac{\ln a_1 + \ln a_2 + \dots + \ln a_n}{n}}.$$

Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$, iar $\lim\limits_{n\to\infty} \ln a_n = \ln \alpha$, conform exercițiului 140, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln a_1 + \ln a_2 + \dots + \ln a_n}{n} = \ln \alpha$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} = e^{\ln \alpha} = \alpha$.

142. *Să se arate că dacă $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \alpha$, atunci și $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \alpha$, $a_n > 0$.*

Într-adevăr, $\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{a_1}{1}\cdot\frac{a_2}{a_1}\cdots\frac{a_n}{a_{n-1}}}$. Aplicînd exercițiul 141, obținem $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \alpha$.

143. *Fie șirul* $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots,$ *unde* $a_n = \sqrt[n]{\frac{(n+1)\ldots 2n}{n^n}}$.

1) *să se formeze termenii* a_2, a_3, a_4

2) *să se calculeze* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

1) Avem

$$a_2 = \sqrt{\frac{(2+1)(2+2)}{2^2}} = \sqrt{\frac{3\cdot 4}{4}};\quad a_3 = \sqrt[3]{\frac{(3+1)(3+2)(3+3)}{3^3}} = \sqrt[3]{\frac{4\cdot 5\cdot 6}{3^3}};$$

$$a_4 = \sqrt[4]{\frac{(4+1)(4+2)(4+3)(4+4)}{4^4}} = \sqrt[4]{\frac{5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}{4^4}}.$$

2) Să notăm $t_n = \frac{(n+1)\ldots 2n}{n^n}$. Avem

$$\frac{t_{n+1}}{t_n} = \frac{\dfrac{(n+2)(n+3)\ldots(2n+2)}{(n+1)^{n+1}}}{\dfrac{(n+1)(n+2)\ldots 2n}{n^n}} = \frac{n^n}{(n+1)^n}\cdot\frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2}.$$

Însă

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2} = 4 \text{ și } \lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n+1)^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e}.$$

Deci $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{t_{n+1}}{t_n} = \frac{4}{e}$. Aplicînd exercițiul 142, deducem că și $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{t_n} = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{4}{e}$.

144. *Să se calculeze* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ *dacă* $a_n = \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$.

Observăm că $a_n = \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}$. Dacă notăm $t_n = \frac{n!}{n^n}$,

$$\frac{t_{n+1}}{t_n} = \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{(n+1)!}{n!} = \frac{n^n}{(n+1)^n}.$$

Deci

$$\lim_{n\to\infty}\frac{t_{n+1}}{t_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n+1)^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e}.$$

Conform exercițiului 142, deducem că $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{t_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}$.

145. *Fie* $(a_n)_{n\in N}$ *un șir arbitrar și* $(b_n)_{n\in N}$ *un șir divergent. Dacă*

a) $(b_n)_{n\in N}$ *este strict monoton,*

b) *există* $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = A$,

atunci:

$$\textit{există } \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} \textit{ și } \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = A\ [\textit{Stolz}].$$

Cazul 1. A finit. Să presupunem $b_n\to\infty$. Fie $V = (\alpha, \beta)$, o vecinătate a lui A. Deci $\alpha < A < \beta$. Să luăm $V' = (\alpha', \beta')$, astfel încît $\alpha < \alpha' < A < \beta' < \beta$. Din (b) rezultă că există un rang N, astfel încît oricare ar fi $n > N$, să avem

$$\alpha' < \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} < \beta' \text{ sau } \alpha'(b_{n+1}-b_n) < a_{n+1}-a_n < \beta'(b_{n+1}-b_n).$$

Să scriem aceste inegalități pentru $N, N+1, \ldots, n-1$ și să le adunăm:

$$\begin{aligned}
&\alpha'(b_{N+1}-b_N) < a_{N+1}-a_N < \beta'(b_{N+1}-b_N)\\
&\alpha'(b_{N+2}-b_{N+1}) < a_{N+2}-a_{N+1} < \beta'(b_{N+2}-b_{N+1})\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\alpha'(b_n-b_{n-1}) < a_n-a_{n-1} < \beta'(b_n-b_{n-1})\\
\hline
&\alpha'(b_n-b_N) < a_n-a_N < \beta'(b_n-b_N).
\end{aligned}$$

Împărțind cu b_n, care poate fi considerat pozitiv, obținem

$$\alpha'\left(1-\frac{b_N}{b_n}\right) < \frac{a_n}{b_n}-\frac{a_N}{b_n} < \beta'\left(1-\frac{b_N}{b_n}\right)$$

$$\alpha' + \left(\frac{a_N}{b_n} - \frac{\alpha' b_N}{b_n}\right) < \frac{a_n}{b_n} < \beta' + \left(\frac{a_N}{b_n} - \frac{\beta' b_N}{b_n}\right).$$

Dar expresiile din paranteze tind către zero; așadar există un rang N', astfel încît oricare ar fi $n > N'$ să avem

$$\alpha < \alpha' + \left(\frac{a_N}{b_n} - \frac{\alpha' b_N}{b_n}\right), \quad \beta > \beta' + \left(\frac{a_N}{b_n} - \frac{\beta' b_N}{b_n}\right).$$

Deci $\alpha < \frac{a_n}{b_n} < \beta$ oricare ar fi $n > N'$; rezultă că șirul $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n\in N}$ este convergent și că $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = A$.

Cazul 2. $A = +\infty$. Fie $V = (\alpha, \infty)$ o vecinătate a lui $+\infty$ și să luăm $V' = (\alpha', \infty)$ cu $\alpha' > \alpha$. Raționamentul se continuă ca la cazul 1. Obținem $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = A$.

Cazul 3. $A = -\infty$. Procedăm ca la cazul 2, alegînd o vecinătate a lui $-\infty$ de forma $V = (-\infty, \alpha)$ și luînd apoi $V' = (-\infty, \alpha')$ cu $\alpha' < \alpha$. Obținem $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = A$.

Să se calculeze limitele următoarelor șiruri;

146. $a_n = \frac{u^n}{n}$, $u > 0$.

Notăm $\alpha_n = u^n$, $\beta_n = n$. Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\alpha_{n+1} - \alpha_n}{\beta_{n+1} - \beta_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{u^{n+1} - u^n}{n+1-n} = (u-1) \lim\limits_{n\to\infty} u^n$, rezultă

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} 0, & \text{dacă } u \leqslant 1 \\ \infty, & \text{dacă } u > 1. \end{cases}$$

147. $a_n = \frac{1^p + 2^p + \ldots + n^p}{n^p} - \frac{n}{p+1}$.

Avem

$$a_n = \frac{1^p + 2^p + \ldots + n^p}{n^p} - \frac{n}{p+1} = \frac{(1^p + 2^p + \ldots + n^p)(p+1) - n^{p+1}}{(p+1)\,n^p}.$$

Dacă notăm $\alpha_n = (1^p + 2^p + \ldots + n^p)(p+1) - n^{p+1}$, $\beta_n = (p+1)\,n^p$, deducem

$$\frac{\alpha_{n+1} - \alpha_n}{\beta_{n+1} - \beta_n} =$$

$$= \frac{[1^p+2^p+\ldots n^p+(n+1)^p](p+1) - (n+1)^{p+1} - (1^p+2^p+\ldots+n^p)(p+1) + n^{p+1}}{(p+1)(n+1)^p - (p+1)\,n^p}$$

$$= \frac{(n+1)^p(p+1) - (n+1)^{p+1} + n^{p+1}}{(p+1)(n+1)^p - (p+1)\,n^p} =$$

$$= \frac{(n+1)^p(p-n) + n^{p+1}}{p(p+1)\,n^{p-1} + \frac{(p+1)p(p-1)}{2}\,n^{p-2} + \ldots}.$$

Însă

$$(n+1)^p(p-n) + n^{p+1} = (n+1)^p p - n(n+1)^p + n^{p+1} =$$

$$= pn^p + p^2 n^{p-1} + \ldots - n^{p+1} - pn^p - \frac{p(p-1)}{2}\,n^{p-1} - \ldots + n^{p+1} =$$

$$= \frac{p(p+1)}{2}\,n^{p-1} + \ldots$$

Prin urmare,

$$\frac{\alpha_{n+1} - \alpha_n}{\beta_{n+1} - \beta_n} = \frac{\frac{p(p+1)}{2}\,n^{p-1} + \ldots}{p(p+1)\,n^{p-1} + \ldots} \quad \text{și} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_{n+1} - \alpha_n}{\beta_{n+1} - \beta_n} = \frac{1}{2}.$$

Conform teoremei lui Stolz, rezultă că și $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}$.

Exerciții propuse spre rezolvare

148. *Pornind de la definiție, să se arate că*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 + 2}{3n^2 + 1} = \frac{1}{3}.$$

Să se determine un rang de la care începînd diferența dintre limita șirului și termenul general este mai mică decît $\frac{1}{100}$.

149. *Să se arate că șirul avînd termenul general*

$$a_n = (1 + \cos n\pi)\,\frac{n}{n+1}$$

nu are limită.

150. *Să se arate că șirul avînd termenul general*

$$a_n = \left(\sin n\,\frac{\pi}{2}\right) n^3$$

este nemărginit și nu tinde către infinit.

5*

Pentru fiecare din şirurile date mai departe să se scrie termenii a_1, a_2, a_3 şi apoi să se studieze natura lor:

151. $a_n = \dfrac{2\cdot5\cdot8\cdots[2+(n-1)\,3]}{5\cdot10\cdot15\cdots[5+(n-1)\,5]}$. **R.** Convergent.

152. $a_n = \dfrac{1}{2}+\dfrac{4}{6}+\dfrac{7}{10}+\ldots+\dfrac{1+3\,(n-1)}{2+4(n-1)}$. **R.** Divergent.

153. $a_n = 1+\dfrac{1}{3^2+2}+\dfrac{1}{3^3+2}+\ldots+\dfrac{1}{3^n+2}$. **R.** Convergent.

154. $a_n = 1+\dfrac{2}{4^2+1}+\dfrac{3}{4^3+1}+\ldots+\dfrac{n}{4^n+1}$. **R.** Convergent.

155. $a_n = \dfrac{1}{1\cdot2}+\dfrac{1}{3\cdot2^3}+\ldots+\dfrac{1}{(2n-1)\,2^{2n-1}}$. **R.** Convergent.

156. $a_n = \dfrac{1}{2\cdot5}+\dfrac{1}{3\cdot6}+\ldots+\dfrac{1}{(n+1)\,(n+4)}$.

Se caută o descompunere de forma $\dfrac{1}{n\,(n+3)} = \dfrac{A}{n}+\dfrac{B}{n+3}$.
R. Convergent.

157. $a_n = \dfrac{\sin x}{2}+\dfrac{\sin 2x}{2^2}+\ldots+\dfrac{\sin nx}{2^n}$. **R.** Convergent.

158. $a_n = 1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}$. **R.** Divergent.

159. *Fie* $a_n = \dfrac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{3^n n!}$. *Să se calculeze* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Se ţine seama de relaţia ce există între termenii a_n şi a_{n+1}. **R.** 0.

Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ *în următoarele cazuri:*

160. $a_n = \dfrac{\sqrt{n^2+n+1}-2\sqrt{n^2-n+1}}{n}$. **R.** -1.

161. $a_n = \dfrac{2^n+2\cdot3^n+3\cdot5^n}{3^n+3\cdot4^n+5\cdot5^n}$. **R.** $\dfrac{3}{5}$.

162. $a_n = \sqrt[n]{n}\cdot\dfrac{n-1}{5n+1}+\dfrac{4n-1}{5n}$. **R.** 1.

163. $a_n = (0{,}999)^n\, n \sin\sqrt{n^2+1}+\dfrac{3n\,(n-1)}{(n+1)\,(2n+1)}+$

$= \quad + (0{,}77)^n\,\dfrac{n^2}{n+1}$. **R.** $\dfrac{3}{2}$.

164. $a_n = (-1)^n\cdot\dfrac{n}{5^n}+\dfrac{\sqrt{n+\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$. **R.** 1.

165. $a_n = \left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\ldots+\dfrac{1}{2^n}\right)\left(\dfrac{3\cdot2^n+(-1)^n}{2^n}\right)$. **R.** 6.

166. $a_n = \dfrac{\sqrt{n+\sqrt{n^2+1}}}{\sqrt{3n+1}}$. **R.** $\sqrt{\dfrac{2}{3}}$.

167. $a_n = \dfrac{(-1)^n\, n^3}{n^2+1}\left(\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4n}\right)^n$. **R.** 0.

168. $a_n = \dfrac{3^n+(-3)^n}{4^n}$. **R.** 0.

169. $a_n = \sqrt[3]{n^2}\,[\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n-1}]$. **R.** $\dfrac{2}{3}$.

170. $a_n = \dfrac{n!}{(n+1)\,(n+2)\ldots(n+n)}$. **R.** 0.

171. $a_n = \dfrac{a^{6n}}{(1+a^{n})\,(1+2a^{2n})\,(1+3a^{2n})}$, $a>0$.

R. 0, dacă $a<1$; $\dfrac{1}{24}$, dacă $a=1$; $\dfrac{1}{6}$, dacă $a>1$.

172. $a_n = \dfrac{3^{3n}}{\left(3+\dfrac{1}{n}\right)^{3n}}$. **R.** $\dfrac{1}{e}$

173. $a_n = \dfrac{E\,(x)+E\,(3^2x)+\ldots+E\,((2n-1)^2\,x)}{n^3}$. **R.** $\dfrac{4}{3}\,x$.

Să se arate că:

174. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^k}{a^n} = 0$, *k număr natural*, $a>1$.

175. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n!}}{(2+\sqrt{1})\,(2+\sqrt{2})\ldots(2+\sqrt{n})} = 0$.

Să se calculeze:

176. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{n!}{2^{\frac{n(n+1)}{2}}}}$. **R.** 0.

177. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{3^{3n}\,(n!)^3}{(3n)!}}$. **R.** 1.

178. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{n^n\cdot 4^n}{(2n)!}}$. **R.** (

179. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{(n!)^2}{(2n)!\,8^n}}$. **R.** $\dfrac{1}{32}$

Se va folosi rezultatul obținut în exercițiul 142.

180. *Fie date numerele a_0 și b_0 $(a_0 > b_0)$. Termenii șirurilo $(a_n)_{n\in N}$ se dau cu ajutorul relațiilor:*

$$a_1 = \frac{a_0 + b_0}{2},\quad a_2 = \frac{a_1 + b_1}{2},\ \dots,\quad a_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2},\ \dots;$$

$$b_1 = \sqrt{a_0 b_0},\quad b_2 = \sqrt{a_1 b_1},\ \dots,\quad b_n = \sqrt{a_{n-1}\,b_{n-1}},\ \dots$$

Să se demonstreze că șirurile $(a_n)_{n\in N}$ și $(b_n)_{n\in N}$ sînt convergent și tind către aceeași limită (numită media aritmetico-geometrică a lui Gauss).

Se va proceda ca în exercițiul 132.

Să se calculeze limitele următoarelor șiruri:

181. $a_n = \dfrac{1^p + 2^p + \dots + n^p}{n^{p+1}}$. **R.** $\dfrac{1}{p+1}$

182. $a_n = \dfrac{1^p + 3^p + \dots + (2n-1)^p}{n^{p+1}}$. **R.** $\dfrac{2^p}{p+1}$

183. $a_n = \dfrac{\ln n}{n^k}$. **R.** 0

Se va aplica teorema lui Stolz.

184. *Să se verifice cu ajutorul teoremei lui Stolz rezultatul obținu în exercițiul 113.*

185. *Să se arate că*

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n_k}\right)^{n_k} = e,\ n_k \text{ numere naturale.}$$

186. *Să se arate că*

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e,\ a_n \text{ numere reale},\ \lim_{n\to\infty} a_n = \infty.$$

Punînd $n_k = E(a_k)$ se obține, $n_k \leqslant a_k \leqslant n_{k+1}$,

$$\left(1 + \frac{1}{n_{k+1}}\right)^{n_k} < \left(1 + \frac{1}{a_k}\right)^{a_k} < \left(1 + \frac{1}{n_k}\right)^{n_{k+1}}.$$

187. *Să se arate că* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 - \dfrac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e^{-1}$ *dacă* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

188. *Să se arate că dacă* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, *atunci pentru orice permutare a termenilor se obțin șiruri care converg către a.*

189. *Să se calculeze* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ *dacă*

$$a_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{1 + \frac{k}{n^2}} - 1\right).$$

Se înmulțește fiecare paranteză cu conjugata. **R.** $\dfrac{1}{4}$.

190. $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\left(\sqrt[n]{1 + \dfrac{k^2}{n^3}} - 1\right)$. **R.** $\dfrac{1}{9}$.

191. *Termenii șirului a_n se dau în modul următor:*

$$a_1 = \sqrt{a},\ a_2 = \sqrt{a + \sqrt{a}},\ \dots,\ a_n = \underbrace{\sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a + \dots + \sqrt{a}}}}}_{n \text{ radicali}},\ a > 0.$$

Să se arate că șirul este convergent și să se calculeze apoi limita sa.

127
73
54

Observăm că șirul este crescător. Din relația

$$a_n = \frac{a}{a_n} + \frac{a_{n-1}}{a_n}$$

deducem că șirul este și mărginit. Limita șirului o obținem trecînd la limită în relația $a_n^2 = a + a_{n-1}$.

192. *Fiind dat șirul al cărui termen general este*

$$a_n = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{n^2}\right);$$

să se formeze termenii a_1, a_2, a_3 și apoi să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{1}{2}$.

Se studiază posibilitatea simplificării unei fracții care se află într-o paranteză, cu fracțiile vecine.

2.2. Marginile și limitele extreme ale unui șir de numere reale

Marginea superioară. Fie șirul $(a_n)_{n\in N}$. Se numește *margine superioară* a șirului dat numărul μ_d (finit sau $+\infty$) care posedă următoarele proprietăți:

1) $a_n \leqslant \mu_d$ pentru orice n;

2) pentru orice $\alpha < \mu_d$ există cel puţin un indice n astfel încît $a_n > \alpha$.

Se notează $\mu_d = \sup\limits_{n \in N} a_n = \sup\,(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$.

Şirul $(a_n)_{n \in N}$ este mărginit superior dacă şi numai dacă $\sup\limits_{n \in N} a_n < \infty$.

Marginea inferioară. Fie şirul $(a_n)_{n \in N}$. *Se numeşte margine inferioară* a şirului dat numărul μ_s (finit sau $-\infty$) care posedă următoarele proprietăţi:

1) $a_n \geqslant \mu_s$ pentru orice n;

2) pentru orice $\alpha > \mu_s$ există cel puţin un indice n astfel ca $a_n < \alpha$.

Se notează $\mu_s = \inf\limits_{n \in N} a_n = \inf\,(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$.

Şirul $(a_n)_{n \in N}$ este mărginit la stînga, dacă şi numai dacă $\inf\limits_{n \in N} a_n > -\infty$.

Limita superioară. Se numeşte *limita superioară* a şirului $(a_n)_{n \in N}$ numărul l_d finit sau infinit care are următoarele proprietăţi:

1) oricare ar fi numărul $\alpha < l_d$, inegalitatea $a_n > \alpha$ are loc pentru o infinitate de valori ale lui n;

2) oricare ar fi numărul $\beta > l_d$, inegalitatea $a_n > \beta$ este verificată cel mult pentru un număr finit de termeni.

Se notează $l_d = \overline{\lim\limits_{n \to \infty}}\, a_n = \lim\limits_{n \to \infty} \sup a_n$.

Avem $\overline{\lim\limits_{n \to \infty}}\, a_n < \infty$ dacă şi numai dacă $(a_n)_{n \in N}$ este mărginit la dreapta.

Limita inferioară. Fie şirul $(a_n)_{n \in N}$. Se numeşte *limita inferioară* a şirului $(a_n)_{n \in N}$ numărul l_s care are următoarele proprietăţi:

1) oricare ar fi numărul $\beta > l_s$, inegalitatea $a_n < \beta$ are loc pentru o infinitate de valori ale lui n;

2) oricare ar fi numărul $\alpha < l_s$, inegalitatea $a_n \leqslant \alpha$ este verificată cel mult pentru un număr finit de termeni.

Se notează $l_s = \underline{\lim\limits_{n \to \infty}}\, a_n = \lim\limits_{n \to \infty} \inf a_n$.

Şirul $(a_n)_{n \in N}$ este mărginit inferior, dacă şi numai dacă $\underline{\lim\limits_{n \to \infty}}\, a_n > -\infty$.

Avem

$$\inf_{n \in N} a_n \leqslant \underline{\lim_{n \to \infty}}\, a_n \leqslant \overline{\lim_{n \to \infty}}\, a_n \leqslant \sup_{n \in N} a_n.$$

Proprietăţi. 1) Pentru ca şirul $(a_n)_{n \in N}$ să aibă limită este necesar şi suficient ca

$$\underline{\lim_{n \to \infty}}\, a_n = \overline{\lim_{n \to \infty}}\, a_n.$$

2) Oricare ar fi şirul de numere reale $(a_n)_{n \in N}$, avem

$$\underline{\lim_{n \to \infty}}\, a_n = \sup_{n \in N} \inf\,(a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots)$$

$$\overline{\lim_{n \to \infty}}\, a_n = \inf_{n \in N} \sup\,(a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots).$$

3) Fie şirul $(a_n)_{n \in N}$. Dacă notăm $x_n = \sup\,(a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{n+p}, \ldots)$, (respectiv $y_n = \inf\,(a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{n+p}, \ldots)$), atunci şirul $(x_n)_{n \in N}$ este descrescător (respectiv y_n crescător) şi

$$\lim_{n \to \infty} x_n = \overline{\lim_{n \to \infty}}\, a_n \left(\text{respectiv } \lim_{n \to \infty} y_n = \underline{\lim_{n \to \infty}}\, a_n\right).$$

Exerciţii rezolvate

Să se determine marginea inferioară şi marginea superioară pentru următoarele şiruri de numere:

193. $a_n = 1 - \dfrac{1}{n}$.

Şirul este crescător şi convergent către 1. Marginea inferioară a şirului este deci 0. Într-adevăr:

1) oricare ar fi n, $a_n > 0$;

2) oricare ar fi $\alpha > 0$, există termenul $a_1 = 0$ astfel încît $a_1 < \alpha$.

Marginea superioară a şirului este 1. Într-adevăr:

1) nu există nici un termen al şirului mai mare decît 1, ceea ce este evident;

2) oricare ar fi $\alpha < 1$, există cel puţin un termen a_n astfel ca $a_n > \alpha$, căci inegalitatea $1 - \dfrac{1}{n} > \alpha$ este satisfăcută dacă $n > \dfrac{1}{1 - \alpha}$.

194. $a_n = \dfrac{n}{n + 1}$.

Şirul dat este crescător, deoarece

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{(n + 1)\,(n + 2)}.$$

Marginea inferioară este $a_1 = \frac{1}{2}$. Într-adevăr:

1) șirul fiind crescător, $a_n > a_1 = \frac{1}{2}$, oricare ar fi n;

2) pentru orice $\alpha > \frac{1}{2}$ există termenul a_1 astfel ca $a_1 < \alpha$.

Marginea superioară este 1. Într-adevăr:

1) șirul fiind crescător și avînd limita 1, înseamnă că nu există nici un termen al șirului mai mare decît 1;

2) pentru orice $\alpha < 1$ inegalitatea $a_n > \alpha$, adică $\frac{n}{n+1} > \alpha$, este îndeplinită dacă $n > \frac{\alpha}{1-\alpha}$.

195. $a_n = \frac{1}{n} n^{(-1)^n} + \sin n\frac{\pi}{2}$.

Observăm că

$$a_n = \begin{cases} 1, & \text{dacă } n = 2k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \\ \frac{1}{n^2} + 1, & \text{dacă } n = 4k + 1, \ k = 0, 1, 2, \ldots \\ \frac{1}{n^2} - 1, & \text{dacă } n = 4k - 1, \ k = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Propunem cititorului să verifice că $\mu_d = 2$ și $\mu_s = -1$.

196. $a_n = \frac{1}{n - 3{,}4}$.

Să scriem primii termeni ai șirului:

$$-\frac{1}{2{,}4}, \ -\frac{1}{1{,}4}, \ -\frac{1}{0{,}4}, \ \frac{1}{0{,}6}, \ \frac{1}{1{,}6}, \ \ldots$$

Observăm că termenii a_1, a_2, a_3 sînt negativi și descrescători, iar ceilalți termeni, pozitivi, descrescători și tinzînd la zero. Rezultă că

$$\mu_d = \frac{1}{0{,}6}, \ \mu_s = -\frac{1}{0{,}4}.$$

Stabilim ușor că numerele μ_d și μ_s găsite verifică condițiile care le definesc.

197. *Din șirul $(a_n)_{n\in N}$ se extrage subșirul $u_{k1}, u_{k2}, \ldots, u_{kn}, \ldots$ Să se arate că*

$$\sup a_{kn} \leqslant \sup a_n, \ \inf a_{kn} \geqslant \inf a_n.$$

Vom demonstra numai prima inegalitate, cea de a doua lăsînd-o pe seama cititorului.

Fie $\mu_d = \sup\limits_{n\in N} a_n$ și $\mu'_d = \sup\limits_{n\in N} a_{kn}$. Sînt următoarele posibilități:

1) nu există nici un termen al șirului $(a_n)_{n\in N}$ mai mare decît μ'_d; în acest caz, aplicînd definiția marginii superioare constatăm că $\mu'_d = \mu_d$;

2) există termeni ai șirului $(a_n)_{n\in N}$ mai mari decît μ'_d; în acest caz, $\mu_d > \mu'_d$.

198. *Să considerăm șirurile $(a_n)_{n\in N}$ și $(b_n)_{n\in N}$. Să se arate că* $\sup(a_n + b_n) \leqslant \sup a_n + \sup b_n$, $\inf(a_n + b_n) \geqslant \inf a_n + \inf b_n$.

Din inegalitățile evidente

$$a_n \leqslant \sup a_n, \quad b_n \leqslant \sup b_n,$$

valabile oricare ar fi n, obținem

$$a_n + b_n \leqslant \sup a_n + \sup b_n,$$

deci și:

$$\sup(a_n + b_n) \leqslant \sup a_n + \sup b_n.$$

Stabilirea celei de a doua inegalități o lăsăm pe seama cititorului.

199. *Fiind dat șirul*

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n(-1)^n} \cdot \frac{n}{2n+1} + \cos n\frac{\pi}{2},$$

să se determine un subșir a cărui limită să fie $\frac{e}{2} + 1$.

Deoarece

$$\cos n\frac{\pi}{2} = \begin{cases} 1, & \text{dacă } n = 4k, & k = 0, 1, 2, \ldots \\ 0, & \text{dacă } n = 2k + 1, & k = 0, 1, 2, \ldots \\ -1, & \text{dacă } n = 4k + 2, & k = 0, 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Rezultă că

$$a_n = \begin{cases} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \frac{n}{2n+1} + 1, & \text{dacă } n = 4k, & k = 0, 1, 2, \ldots \\ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} \frac{n}{2n+1}, & \text{dacă } n = 2k + 1, & k = 0, 1, \ldots \\ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \frac{n}{2n+1}, & \text{dacă } n = 4k + 2, & k = 0, 1, \ldots \end{cases}$$

Subșirul (a_{4k}) are limita cerută.

Să se determine limitele extreme ale următoarelor şiruri:

200. $a_n = \frac{1+(-1)^n}{2} + (-1)^n \frac{n}{2n+1}$

Avem

$$a_n = \begin{cases} 1 + \frac{n}{2n+1}, & \text{dacă } n \text{ este par} \\ -\frac{n}{2n+1}, & \text{dacă } n \text{ este impar.} \end{cases}$$

Să arătăm că 1) $l_d = \frac{3}{2}$, 2) $l_s = \frac{1}{2}$.

1. a) Pentru orice $\alpha < \frac{3}{2}$ (inegalitatea $1 + \frac{n}{2n+1} < \alpha$ este satisfăcută de termenii a_n, $n = 2k$, $k = 0, 1, \ldots, n > \frac{\alpha - 1}{3 - 2\alpha}$;

b) subşirul $1 + \frac{n}{2n+1}$ fiind crescător şi avînd limita $\frac{3}{2}$, rezultă că oricare ar fi n, $a_n < \frac{3}{2}$.

2. a) Pentru orice $\beta > -\frac{1}{2}$ inegalitatea $-\frac{n}{2n+1} < \beta$ este satisfăcută de termenii a_n, n impar, $n > \frac{\beta}{1+2\beta}$;

b) subşirul $-\frac{n}{2n+1}$ fiind descrescător şi avînd limita $-\frac{1}{2}$, rezultă că oricare ar fi n, $a_n > -\frac{1}{2}$.

201. $a_n = \frac{n^{2(-1)^n}}{n}$.

Avem

$$a_n = \begin{cases} n, & \text{dacă } n \text{ este par} \\ \frac{1}{n^3}, & \text{dacă } n \text{ este impar.} \end{cases}$$

Şirul fiind nemărginit, $l_d = \infty$.
Să arătăm că $l_s = 0$. Într-adevăr:
1) inegalitatea $a_n < \beta$ este satisfăcută de o infinitate de termeni a_n, $n = 2k+1$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n > \sqrt[3]{\frac{1}{\beta}}$;

2) $a_n \geq 0$ oricare ar fi n.

202. *Dacă μ_d este marginea superioară a şirului $(a_n)_{n \in N}$, atunci există un subşir convergent către μ_d, precum şi un subşir care converge către μ_s.*

Să se determine marginea superioară şi marginea inferioară pentru următoarele şiruri:

203. $a_n = \frac{n}{n^2+1}$. **R.** $\mu_d = \frac{1}{2}$; $\mu_s = 0$.

204. $a_n = 2 + (-2)^n$. **R.** $\mu_d = 4$; $\mu_s = 0$.

205. $a_n = \frac{n-1}{n+1} \cos n\pi$. **R.** $\mu_d = 1$; $\mu_s = -1$.

206. $a_n = \frac{n+1}{n} \sin n\frac{\pi}{2}$. **R.** $\mu_d = 2$; $\mu_s = -\frac{4}{3}$.

207. $a_n = \frac{1+(-1)^n}{2} + (-1)^n \frac{n}{2n+1}$. **R.** $\mu_d = \frac{3}{2}$; $\mu_s = -\frac{1}{2}$.

208. $a_n = \frac{1+(-1)^n}{2} \cdot \frac{n-1}{n}$. **R.** $\mu_d = 1$; $\mu_s = 0$.

209. *Se dau şirurile:*

$$a_n = \frac{1}{n-2{,}2}, \quad b_n = \frac{1}{n+2{,}2}.$$

Să se arate că

$$\sup (a_n + b_n) < \sup a_n + \sup b_n,$$
$$\inf (a_n + b_n) > \inf a_n + \inf b_n.$$

210. *Fiind date şirurile $(a_n)_{n \in N}$ şi $(b_n)_{n \in N}$, să se arate că*

$$\inf_{n \in N} (a_n + b_n) \leqslant \inf_{n \in N} a_n + \sup_{n \in N} b_n,$$
$$\sup_{n \in N} a_n + \inf_{n \in N} b_n \leqslant \sup_{n \in N} (a_n + b_n).$$

211. *Să se arate că*

$$\inf_{n \in N} \left(\frac{1}{a_n}\right) = \begin{cases} \frac{1}{\sup\limits_{n \in N} a_n}, & \text{dacă } \sup\limits_{n \in N} a_n \neq 0 \\ \pm\infty, & \text{dacă } \sup a_n = 0. \end{cases}$$

Consecinţă imediată a definiţiilor.

212. *Să se arate că*

$$\inf_{n\in N} a_n \inf_{n\in N} b_n \leqslant \inf_{n\in N} (a_n b_n) \leqslant \sup_{n\in N} (a_n b_n) \leqslant \sup_{n\in N} a_n \sup_{n\in N} b_n$$

dacă şirurile $(a_n)_{n\in N}$ şi $(b_n)_{n\in N}$ *sînt cu termeni pozitivi.*

213. *Să se arate că dacă între termenii şirurilor* $(a_n)_{n\in N}$ *şi* $(b_n)_{n\in N}$ *are loc relaţia* $a_n \leqslant b_n$ *oricare ar fi n, atunci*

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n \leqslant \underline{\lim}_{n\to\infty} b_n \text{ şi } \overline{\lim}_{n\to\infty} a_n \leqslant \overline{\lim}_{n\to\infty} b_n.$$

Consecinţă imediată a definiţiilor.

214. *Să se arate că*

$$\lim_{n\to\infty}\inf(-a_n) = -\lim_{n\to\infty}\sup a_n;\ \lim_{n\to\infty}\sup(-a_n) = -\lim_{n\to\infty}\inf a_n.$$

Consecinţă imediată a definiţiilor.

215. *Dacă din şirul* (a_n) *se extrage şirul* $(a_{k_n})_{n\in N}$ *atunci*

$$\lim_{n\to\infty}\sup a_{kn} \leqslant \lim_{n\to\infty}\sup a_n,\ \lim_{n\to\infty}\inf a_{kn} \geqslant \lim_{n\to\infty}\inf a_n.$$

216. *Dacă dintr-un şir se extrage un număr finit de termeni, limitele extreme ale şirului nu se schimbă.*

217. *Fiind date şirurile* $(a_n)_{n\in N}$ *şi* $(b_n)_{n\in N}$ *de numere pozitive, să se stabilească relaţiile*

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n \underline{\lim}_{n\to\infty} b_n \leqslant \underline{\lim}_{n\to\infty} (a_n b_n) \leqslant \overline{\lim}_{n\to\infty} (a_n b_n) \leqslant \overline{\lim}_{n\to\infty} a_n \overline{\lim}_{n\to\infty} b_n.$$

218. *Fiind dat şirul de numere pozitive* $(a_n)_{n\in N}$ *cu* $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n \neq 0$, *să se arate că*

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n}.$$

Ce se întîmplă dacă $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n = 0$?

Să se determine marginea inferioară, marginea superioară şi limitele extreme pentru următoarele şiruri:

219. $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left[\frac{1}{2} + (-1)^n\right] + \cos n\frac{\pi}{2}.$

Ţinem seama că şirul $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ este crescător şi tinde spre e.

R. $l_d = \frac{3e}{2} + 1;\ l_s = -\frac{e}{2};\ \mu_d = \frac{3e}{2} + 1;\ \mu_s = -\frac{e}{2}.$

220. $a_n = (-1)^{n+1}\left[1 - \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{2}\right] + (-1)^n \frac{n}{4n+1}[1 + (-1)^n].$

R. $l_s = \mu_s = -1;\ l_d = \mu_d = \frac{3}{2}.$

221. $a_n = \frac{1}{n} n^{(-1)^n} + \sin^2 n\frac{\pi}{4}.$ **R.** $l_s = \mu_s = \frac{1}{2};\ l_d = \mu_d = 2.$

3. LIMITE DE FUNCȚII. CONTINUITATE

3.1. Limite de funcții

Fie A o mulțime de numere reale și x_0 (număr finit ori nu) un punct de acumulare al mulțimii A (neaparținînd neapărat mulțimii A). Fie f o funcție reală definită pe A.

Se spune că l (finit sau infinit) este *limita funcției* f în punctul x_0 relativ la mulțimea A dacă, oricare ar fi șirul $(x_n)_{n\in N}$ de puncte din A, $x_n \neq x_0$, cu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, șirul $f(x_n)$ al valorilor funcției are limita l. Vom scrie aceasta astfel

$$l = \lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in A}} f(x) \quad \text{sau} \quad l = \lim_{x\to x_0} f(x).$$

Numărul l (finit sau infinit) este limita funcției în punctul x_0 relativ la mulțimea A dacă și numai dacă, pentru orice vecinătate V a lui l există o vecinătate U (depinzînd de V) a lui x_0, astfel încît, oricare ar fi $x \in A \cap U$, $x \neq x_0$, să avem $f(x) \in V$.

Această propoziție este echivalentă cu următoarele:

Dacă x_0 și l sînt finite, l este limita funcției în punctul x_0 relativ la mulțimea A dacă și numai dacă, pentru orice număr $\varepsilon > 0$ există un număr $\delta(\varepsilon) > 0$, astfel încît pentru orice $x \in A$, $x \neq x_0$, cu $|x - x_0| < \delta(\varepsilon)$ să avem $|f(x) - l| < \varepsilon$.

Dacă x_0 este finit și $l = +\infty$, atunci $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$ dacă și numai dacă, pentru orice număr $\varepsilon > 0$ există un număr $\delta(\varepsilon) > 0$, astfel încît oricare ar fi $x \in A$, $x \neq x_0$, $|x - x_0| < \delta(\varepsilon)$, să avem $f(x) > \varepsilon$.

Propunem cititorului să formuleze definiția în cazul $l = -\infty$ și x_0 finit.

Dacă $x_0 = \infty$ și l este finit, atunci $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = l$ dacă și numai dacă, pentru orice număr $\varepsilon > 0$ există un număr $\delta(\varepsilon) > 0$, astfel încît dacă $x \in A$, $x \neq x_0$, $x > \delta(\varepsilon)$, să avem $|f(x) - l| < \varepsilon$.

Propunem cititorului să formuleze definiția în cazul $x_0 = -\infty$ și l finit.

Dacă $x_0 = \infty$, $l = \infty$, atunci $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ dacă și numai dacă pentru orice număr $\varepsilon > 0$ există un număr $\delta(\varepsilon)$, astfel încît oricare ar fi $x \in A$, $x > \delta(\varepsilon)$, să avem $f(x) > \varepsilon$.

Propunem cititorului să formuleze definițiile corespunzătoare în cazurile $x_0 = -\infty$, $l = \infty$; $x_0 = \infty$, $l = -\infty$; $x_0 = -\infty$, $l = -\infty$.

I. *Operații*. Fie f și g două funcții definite pe mulțimea A și x_0 un punct de acumulare (finit sau infinit) a lui A. Presupunem că funcțiile f și g au limitele l_1 și l_2 (finite sau nu) în punctul x_0.

1) Dacă $l_1 + l_2$ are sens, funcția sumă $f + g$ are limită în x_0 și

$$\lim_{x\to x_0} [f(x) + g(x)] = l_1 + l_2 = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x).$$

2) Dacă $l_1 l_2$ are sens, funcția fg are limită în punctul x_0 și

$$\lim_{x\to x_0} f(x)\ g(x) = l_1 l_2 = \lim_{x\to x_0} f(x) \lim_{x\to x_0} g(x).$$

3) Dacă $\frac{l_1}{l_2}$ are sens, funcția cît $\frac{f}{g}$ are limită în punctul x_0 și

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l_1}{l_2} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}.$$

4) Dacă α este un număr, atunci funcția $\alpha f(x)$ are limită în x_0 și

$$\lim_{x\to x_0} [\alpha f(x)] = \alpha l_1 = \alpha \lim_{x\to x_0} f(x).$$

5) Dacă $l_1 - l_2$ are sens, funcția $f - g$ are limită în x_0 și

$$\lim_{x\to x_0} [f(x) - g(x)] = l_1 - l_2 = \lim_{x\to x_0} f(x) - \lim_{x\to x_0} g(x).$$

6) Dacă $l_1^{l_2}$ are sens, funcția fg are limită în x_0 egală cu $l_1^{l_2}$:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = l_1^{l_2}.$$

Fie funcțiile $f\colon A \to B$ și $g\colon B \to R$, a un punct de acumulare a lui A și b un punct de acumulare a lui B. Dacă:

1) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, 2) $f(x) \neq b$ pentru $x \neq a$, 3) $\lim\limits_{y\to b} g(y) = b$, atunci funcția compusă $g \bigcirc f$ are limită în punctul a și

$$\lim_{x\to a} g\ [f(x)] = \lim_{y\to b} g(y).$$

II. *Criterii*. 1) Dacă $|f(x) - l| \leqslant g(x)$ oricare ar fi $x \in A$ și dacă $\lim_{x \to x_0} g(x) = 0$, atunci $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$.

2) Dacă $f(x) \geqslant h(x)$ și dacă $\lim_{x \to x_0} h(x) = \infty$, atunci și $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$.

3) Dacă $f(x) \leqslant h(x)$ pentru $x \in A$ și dacă $\lim_{x \to x_0} h(x) = -\infty$, atunci și $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$.

4) Dacă $|f(x)| < M$ și $\lim_{x \to x_0} g(x) = 0$, atunci $\lim_{x \to x_0} f(x)\, g(x) = 0$.

5) *Criteriul lui Cauchy-Bolzano*. Condiția necesară și suficientă ca funcția f definită pe mulțimea A să aibă limită finită în punctul x_0(x_0 finit) de acumulare al lui A este ca pentru orice $\varepsilon > 0$ să existe o vecinătate V a lui x_0, astfel ca îndată ce $x', x'' \in V \cap A$, $x' \neq x_0$, $x'' \neq x_0$ să avem $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

Se spune că l_d este *limita la dreapta a funcției* f în punctul x_0, și se notează

$$l_d = f(x_0 + 0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x),$$

dacă pentru orice șir (x_n), $x_n > x_0$ și $\lim_{n \to \infty} x_n = x_0$, avem $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = l_d$.

Se spune că l_s este *limita la stînga* a funcției f în punctul x_0, și se notează

$$l_s = f(x_0 - 0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x),$$

dacă pentru orice șir $(x_n)_{n \in N}$, $x_n < x_0$ și $\lim_{n \to \infty} x_n = x_0$, avem $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = l_s$.

Definițiile formulate mai sus sînt echivalente cu următoarele:

Numărul l_d este *limita la dreapta* a funcției f în punctul x_0 (x_0 finit) dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există un număr $\delta(\varepsilon)$, astfel încît îndată ce $0 < x - x_0 < \delta(\varepsilon)$ să avem $|f(x) - l_d| < \varepsilon$.

Numărul l_s este *limita la stînga* a funcției f în punctul x_0 (x_0 finit) dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există un număr $\delta(\varepsilon)$, astfel încît îndată ce $0 < x_0 - x < \delta(\varepsilon)$ să avem $|f(x) - l_s| < \varepsilon$.

Formularea definițiilor echivalente în celelalte cazuri o lăsăm pe seama cititorului.

Dacă limitele la stînga și la dreapta ale funcției f în punctul x_0 au sens, atunci limita funcției f în x_0 există dacă și numai dacă primele există și sînt egale.

III. *Proprietăți*. 1) Orice funcție monotonă are limite laterale în orice punct de acumulare al domeniului său de definiție.

2) Dacă $f(x) \leqslant g(x)$, pentru x situat într-o vecinătate V a lui x_0, și dacă f și g au limite în x_0, atunci $\lim_{x \to x_0} f(x) \leqslant \lim_{x \to x_0} g(x)$.

3) Dacă $f(x)$ are limită în x_0 și dacă există o vecinătate V a lui x_0, astfel încît pentru orice $x \in V \cap A$, cu $x \neq x_0$, să avem $\alpha \leqslant f(x) \leqslant \beta$, atunci $\alpha \leqslant \lim_{x \to x_0} f(x) \leqslant \beta$.

4) În particular, dacă $f(x) \geqslant 0$ pentru $x \in U$, $x \neq x_0$, atunci $\lim_{x \to x_0} f(x) \geqslant 0$.

5) Dacă $\lim_{x \to x_0} f(x) > \alpha$, există o vecinătate V a lui x_0, astfel încît pentru orice $x \in V \cap A$, $x \neq x_0$, să avem $f(x) > \alpha$.

O propoziție asemănătoare este valabilă pentru $\lim_{x \to \infty} f(x) < \beta$.

6) Dacă $\lim_{x \to x_0} f(x) \neq 0$, avem $f(x) \neq 0$ pe o vecinătate a lui x_0.

În aplicații se folosesc des următoarele limite:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x \text{ este măsura arcului în radiani} \\ \dfrac{\pi}{180}, & \text{dacă } x \text{ este măsura arcului în grade.} \end{cases}$$

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e; \quad \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a$$

$$\lim_{x \to \infty} a^x = \begin{cases} \infty, & \text{dacă } a > 1 \\ 0, & \text{dacă } a < 1; \end{cases} \qquad \lim_{x \to -\infty} a^x = \begin{cases} 0, & \text{dacă } a > 1 \\ \infty, & \text{dacă } 0 < a < 1. \end{cases}$$

Exerciții rezolvate

Folosind definiția limitei într-un punct, să se demonstreze că:

222. $\lim_{x \to 2} x^2 = 4$.

Vom arăta că pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta(\varepsilon) > 0$, astfel încît pentru orice x satisfăcînd inegalitatea $|x - 2| < \delta$, să avem $|x^2 - 4| < \varepsilon$.

Să presupunem că $|x - 2| < \delta$, adică $2 - \delta < x < 2 + \delta$. Însă $|x + 2| \leqslant |x| + 2$ și din inegalitatea $-2 - \delta < 2 - \delta < x < 2 + \delta$ deducem

$$|x| < 2 + \delta, \quad |x| + 2 < 4 + \delta.$$

Deci

$$|x^2 - 4| = |(x - 2)(x + 2)| = |x - 2|\,|x + 2| < |x - 2|\,(|x| + 2) < \delta\,(4 + \delta).$$

Fiind dat $\varepsilon > 0$ arbitrar, dacă $\delta(4 + \delta) \leqslant \varepsilon$, atunci și $|x^2 - 4| < \varepsilon$. Însă $\delta(4 + \delta) \leqslant \varepsilon$ dacă $0 < \delta < -2 + \sqrt{4 + \varepsilon} =$

$$= \frac{\varepsilon}{2 + \sqrt{4 + \varepsilon}}.$$

223. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x^2 + 1} = 0.$

Vom arăta că pentru orice $\varepsilon > 0$ dat, există $\delta(\varepsilon) > 0$, astfel încît pentru orice $x > \delta(\varepsilon)$, să avem $\left|\frac{1}{x^2 + 1}\right| < \varepsilon$. Din inegalitatea $\frac{1}{x^2 + 1} < \varepsilon$ obținem $x > \sqrt{\frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon}}$. Deci $\delta(\varepsilon) = \sqrt{\frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon}}$.

224. *Fie* $f(x) = \frac{\sin x}{4x}$, $x \neq 0$. *Să se arate că* $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$.

Deoarece $|\sin x| \leqslant 1$ și $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$, aplicînd criteriul II.4, obținem $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$.

225. *Fie funcția*

$$f(x) = \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x},$$

definită pe $(-\infty, \infty) - \{0\}$. *Să se arate că funcția nu tinde către infinit cînd* x *tinde către zero.*

Dacă funcția $f(x) = \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x}$ ar tinde către infinit cînd x tinde către zero, ar însemna că pentru orice șir $x_n \to 0$ să avem $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = \infty$. Vom arăta că funcția considerată nu satisface condiția precedentă, adică vom arăta că există un șir $(x_n)_{n \in N}$ cu $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 0$, astfel încît $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) \neq \infty$.

Fie $x_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + n\pi}$. Evident, $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 0$. Însă $f(x_n) = \left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) = 0$, oricare ar fi n. Deci și $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = 0$.

226. *Să se arate că funcția*

$$f(x) = (1 + \sin x) \ln x, \qquad (1)$$

definită pentru $x > 0$, *nu tinde către infinit cînd* x *tinde către infinit.*

Dacă funcția $f(x) = (1 + \sin x) \ln x$ ar tinde către infinit cînd x tinde către infinit, ar însemna că pentru orice șir $x_n \to \infty$ să avem $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = \infty$. Vom arăta că funcția (1) nu satisface această condiție, adică vom arăta că există un șir $x_n \to \infty$ pentru care să avem $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) \neq \infty$.

Fie $x_n = \frac{3\pi}{2} + 2n\pi$ acest șir; funcția

$$f(x_n) = \left[1 + \sin\left(\frac{3\pi}{2} + 2n\pi\right)\right] \ln\left(\frac{3\pi}{2} + 2n\pi\right) = 0,$$

oricare ar fi n, deoarece oricare ar fi n, $1 + \sin\left(\frac{3\pi}{2} + 2n\pi\right) = 0$.

Deci și $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = 0$, ceea ce trebuia arătat.

227. *Să se arate că pentru funcția*

$$f(x) = (2 + \sin x) \ln x,$$

definită pentru $x > 0$, *avem* $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$.

Într-adevăr, deoarece $-1 \leqslant \sin x$,

$$(2 + \sin x) \ln x \geqslant (2 - 1) \ln x = \ln x.$$

Însă $\lim\limits_{x \to \infty} \ln x = \infty$. Deci conform criteriului II.2 avem

$$\lim (2 + \sin x) \ln x = \infty.$$

228. *Să se arate că funcția* $f(x) = \sin x$ *nu are limită cînd* x *tinde către infinit.*

Vom arăta că pentru șiruri diferite $\{x_n\}_{n \in N} \to \infty$, obținem pentru șirurile $(f(x_n))_{n \in N}$ corespunzătoare limite diferite.

Într-adevăr, fie $x_n = n\pi$; $f(x_n) = \sin n\pi = 0$, oricare ar fi n. Deci $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = 0$.

Pentru șirul $x_n' = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$, evident, $\lim\limits_{n \to \infty} x_n' = \infty$; însă oricare ar fi n, $f(x_n') = 1$, deci și $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n') = 1$.

Pentru șirul $x_n'' = 2n\pi + \frac{3\pi}{2}$, avem $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n'') = -1$.

O b s e r v a ț i e. Se poate arăta chiar mai mult: pentru orice α, $-1 < \alpha < 1$, există un șir x_n, astfel încît $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \infty$, $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = \alpha$. Fie $-1 <$

$< \alpha < 1$; există un ω, astfel încît $\sin \omega = \alpha$. Pentru şirul $x_n = \omega + 2n\pi$, avem $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$, în timp ce oricare ar fi n, $f(x_n) = \sin(\omega + 2n\pi) = \alpha$, iar $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \alpha$.

229. *Să se arate că funcţia*

$$f(x) = 2^x \arcsin(\sin x)$$

nu tinde către infinit cînd x tinde către infinit.

Vom arăta că există un şir (x_n) astfel încît $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \neq \infty$.

Fie $x_n = 2n\pi$; $f(x_n) = 0$, oricare ar fi n. Deci şi $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = 0$.

Să se calculeze:

230. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{x}{3} E\left(\frac{2}{x}\right)$.

Folosim inegalitatea

$$\frac{2}{x} - 1 < E\left(\frac{2}{x}\right) \leqslant \frac{2}{x}. \tag{1}$$

Să înmulţim (1) cu $\frac{x}{3}$. Deoarece x ia valori negative, sensul inegalităţii se va schimba şi vom obţine

$$\frac{2}{x}\cdot\frac{x}{3} \leqslant \frac{x}{3} E\left(\frac{2}{x}\right) < \frac{x}{3}\left(\frac{2}{x} - 1\right).$$

Deoarece $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{2}{x}\cdot\frac{x}{3} = \frac{2}{3}$, rezultă că şi $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{x}{3} E\left(\frac{2}{x}\right) = \frac{2}{3}$.

Lăsăm pe seama cititorului să arate că $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{x}{3} E\left(\frac{2}{x}\right) = \frac{2}{3}$.

Rezultă că funcţia $f(x) = \frac{x}{3} E\left(\frac{2}{x}\right)$ are limita $\frac{2}{3}$ în punctul $x = 0$.

231. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{b}{x} E\left(\frac{x}{a}\right)$.

Distingem următoarele cazuri:

1) $a > 0$. În acest caz, $\frac{x}{a} > 0$ şi pentru orice $0 < x < a$,

$$\frac{x}{a} < 1,\ E\left(\frac{x}{a}\right) \equiv 0. \text{ Deci } \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{b}{x} E\left(\frac{x}{a}\right) = 0.$$

2) $b = 0$. În acest caz, $\frac{b}{x} E\left(\frac{x}{a}\right) \equiv 0$, deci $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{b}{x} E\left(\frac{x}{a}\right) = 0$.

3) $a < 0$, $b > 0$. Vom avea $\frac{x}{a} < 0$, iar pentru $|a| > x$,

$$-1 < \frac{x}{a} < 0, \text{ deci } E\left(\frac{x}{a}\right) = -1,\ \frac{b}{x} E\left(\frac{x}{a}\right) = -\frac{b}{x}.$$

Deci $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{b}{x} E\left(\frac{x}{a}\right) = -\infty$.

4) $a < 0$, $b < 0$. Dacă $0 < x < |a|$, $E\left(\frac{x}{a}\right) = -1$, $\frac{b}{x} E\left(\frac{x}{a}\right) = -\frac{b}{x} > 0$, iar $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{b}{x} E\left(\frac{x}{a}\right) = \infty$.

Propunem cititorului ca în mod analog să calculeze $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{b}{x} E\left(\frac{x}{a}\right)$.

232. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{(-1)^{E(x)}}{x-1}$.

Ţinem seama că

$$E(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x \in [0, 1) \\ 1, & \text{dacă } x \in [1, 2). \end{cases}$$

Prin urmare,

$$f(1-0) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{(-1)^0}{x-1} = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{1}{x-1} = -\infty$$

$$f(1+0) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{(-1)^1}{x-1} = \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{-1}{x-1} = -\infty.$$

$$\text{Deci } \lim_{x\to 1} \frac{(-1)^{E(x)}}{x-1} = -\infty.$$

233. $\lim\limits_{x\to 2} \frac{(-1)^{E(x)+2}}{x^2-4}$.

Întrucît

$$E(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x \in [1, 2) \\ 2, & \text{dacă } x \in [2, 3), \end{cases}$$

$$f(2-0)=\lim_{\substack{x\to 2\\ x<2}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 2\\ x<2}}\frac{(-1)^{1+2}}{(x-2)(x+2)}=\lim_{\substack{x\to 2\\ x<2}}\frac{1}{x+2}\lim_{\substack{x\to 2\\ x<2}}\frac{-1}{x-2}=\frac{1}{4}\cdot\infty=\infty.$$

$$f(2+0)=\lim_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 2\\ x>2}}\frac{(-1)^{2+2}}{(x-2)(x+2)}=\infty.$$

Deci $\lim\limits_{x\to 2}\frac{(-1)^{E(x)+2}}{x^2-4}=\infty$.

234. *Fie $f(x)=\{x\}$ ($\{x\}$ este partea fracționară a lui x). Are funcția limită în punctul $x=1$? Să se generalizeze pentru $x=n$, $n>1$ (n număr natural). Să se deseneze graficul funcției $f(x)=\{x\}$.*

Conform definiției, $\{x\}=x-E(x)$. Atunci

$$f(1-0)=\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\{x\}=\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}}[x-E(x)]=\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}}(x-0)=1$$

$$f(1+0)=\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\{x\}=\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}}[x-E(x)]=\lim_{x\to 1}(x-1)=0.$$

Să considerăm cazul general $x=n$. Avem

$$E(x)=\begin{cases} n-1, \text{ dacă } x\in[n-1,\ n)\\ n, \text{ dacă } x\in[n,\ n+1)\end{cases}$$

$$f(n-0)=\lim_{\substack{x\to n\\ x<n}}\{x\}=\lim_{\substack{x\to n\\ x<n}}[x-E(x)]=\lim_{\substack{x\to n\\ x<n}}(x-n+1)=1$$

$$f(n+0)=\lim_{\substack{x\to n\\ x>n}}\{x\}=\lim_{\substack{x\to n\\ x>n}}[x-E(x)]=\lim_{\substack{x\to n\\ x>n}}(x-n)=0.$$

Deci funcția nu are limită în punctul $x=n$.

Să desenăm graficul funcției $f(x)=\{x\}$. Pentru aceasta vom presupune că $n\leqslant x<n+1$, $n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$ În acest caz, $E(x)=n$ și $f(x)=x-n$. Dacă $n\leqslant x_1<x_2<n+1$, $f(x)_1-f(x_2)=x_1-x_2<0$.

Deoarece $f(n)=0$ și $\lim\limits_{\substack{x\to n+1\\ x<n+1}} f(x)=1$, rezultă că în intervalul $[n,\ n+1]$ funcția este liniară și crescătoare, crescînd de la 0 la 1. Graficul ei este reprezentat în fig. 21.

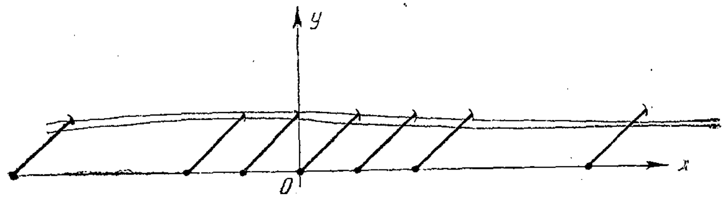

Fig. 21

Observăm că funcția este periodică, de perioadă 1, ceea ce explică faptul că în punctul $x=n$ avem aceleași limite la stînga și la dreapta ca în punctul $x=1$.

235. *Să se cerceteze dacă funcția $f(x)=E(x)$ are limită în punctul $x=2$.*

Din definiția funcției $E(x)$ rezultă

$$E(x)=\begin{cases}1, \text{ dacă } x\in[1,2)\\ 2, \text{ dacă } x\in[2,3).\end{cases}$$

Deci $f(2-0)=\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} E(x)=1$, $f(2+0)=\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} E(x)=2$.

Deoarece $f(2-0)\neq f(2+0)$, urmează că funcția considerată nu are limită în punctul $x=2$. Analog arătăm că funcția nu are limită în nici un punct $x=n$ (n număr întreg).

236. *Să se cerceteze dacă $f(x)=E(-x)$ are limită în punctul $x=-2$.*

Va trebui să calculăm $f(-2-0)$ și $f(-2+0)$. Însă

$$E(-x)=\begin{cases}-3, \text{ dacă } -x\in[-3,\ -2), \text{ adică } x\in(2,3]\\ -2, \text{ dacă } -x\in[-2,\ -1), \text{ adică } x\in(1,2].\end{cases}$$

Deci $f(-2-0)=\lim\limits_{\substack{-x\to -2\\ -x<-2}} E(-x)=-3$, $f(-2+0)=\lim\limits_{\substack{-x\to -2\\ -x>-2}} E(-x)=-2$.

Rezultă că funcția nu are limită în $x=-2$. În mod asemănător arătăm că funcția nu are limită în $x=k$ (k număr întreg).

237. *Pentru funcția $f(x)=E(-x)+E(x)$ să se calculeze $f(2-0)$, $f(2)$, $f(2+0)$.*

Dacă, $x\in(1,2)$, $E(-x)+E(x)=-2+1=-1$. Deci $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} f(x)=-1$.

Dacă, $x\in(2,3)$, $E(-x)+E(x)=-3+2=-1$. Deci $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f(x)=-1$.

Deoarece $f(2-0)=f(2+0)=-1$, rezultă că $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=-1$ și $f(2)=0$.

238. *Pentru ce valoare a constantei α funcția*

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{\alpha^2-2\alpha x\ \ln\ xe+x^2}, & x\in(0,1)\\ \alpha+\dfrac{x}{e}, & x\in(1,2]\end{cases}$$

are limită în punctul $x=1$?

Evident, radicalul are sens oricare ar fi α şi oricare ar fi x. Folosind inegalitatea

$$(|x| - |\alpha|)^2 = x^2 + \alpha^2 - 2|\alpha||x| \geqslant 0,$$

obţinem

$$|2\alpha x \ln ex| < 2|\alpha||x| \leqslant x^2 + \alpha^2 \quad (\ln xe < 1, \text{ dacă } x < 1).$$

Funcţia dată are limită în punctul $x = 1$ dacă şi numai dacă

$$f(1-0) = f(1+0).$$

Însă

$$f(1+0) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x) = \lim_{x\to 1}\left(\alpha + \frac{x}{2}\right) = \alpha + \frac{1}{2},$$

$$f(1-0) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \sqrt{\alpha^2 - 2\alpha x \ln xe + x^2} = \sqrt{(\alpha-1)^2} = |\alpha - 1|.$$

Condiţia $f(1-0) = f(1+0)$ este echivalentă cu ecuaţia $|\alpha - 1| = \alpha + \frac{1}{2}$. Dacă $\alpha > 1$, $|\alpha - 1| = \alpha - 1$ şi ecuaţia se scrie $\alpha - 1 = \alpha + \frac{1}{2}$, ceea ce este imposibil.

Imposibilitate rezultă şi cînd $\alpha = 1$. Dacă $\alpha < 1$, $|\alpha - 1| = 1 - \alpha$, şi ecuaţia devine $1 - \alpha = \alpha + \frac{1}{2}$, de unde $\alpha = \frac{1}{4}$.

Deci numai pentru $\alpha = \frac{1}{4}$ funcţia admite limită în punctul $x = 1$.

239. *Fie*

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x-2}}}$$

definită pe $(-\infty, \infty) - \{2\}$. *Are funcţia limită în punctul* $x = 2$?

Vom calcula $f(2+0)$ şi $f(2-0)$. Avem

$$f(2+0) = \lim_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 2\\ x>2}} \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x-2}}}.$$

Însă $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} \frac{1}{x+2} = +\infty$, $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} e^{\frac{1}{x-2}} = \infty$; deci $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x-2}}} = 0.$

De asemenea,

$$f(2-0) = \lim_{\substack{x\to 2\\ x<2}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 2\\ x<2}} \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x-2}}}.$$

Însă $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} \frac{1}{x-2} = -\infty$, $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} e^{\frac{1}{x-2}} = 0$; deci $f(2-0) = 1$.

Funcţia nu are limită în punctul $x = 2$.

240. *Fie* $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$, *definită pentru* $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty)$. *Are limită funcţia în punctele* $x = -1$ *şi* $x = 1$?

Avem

$$f(-1-0) = \lim_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} \frac{x}{x^2-1} = \lim_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} \frac{x}{x-1} \lim_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}(-\infty) = -\infty,$$

$$f(-1+0) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{x}{x^2-1} = \lim_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} \frac{x}{x-1} \cdot \lim_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}(\infty) = \infty.$$

Funcţia considerată nu are, deci, limită în punctul $x = -1$.

Raţionamente analoge se fac şi pentru a se arăta că funcţia nu are limită nici în punctul $x = 1$. Într-adevăr

$$f(1-0) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{x}{x^2-1} = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{x}{x-1} \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{1}{x-1} = \frac{1}{2}(-\infty) = -\infty$$

$$f(1+0) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{x}{x^2-1} = \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{x}{x+1} \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{1}{x-1} = \frac{1}{2}(\infty) = \infty.$$

241. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$ *(n număr natural).*

Vom arăta în primul rînd că dacă $\alpha \geqslant 1$, avem $\alpha \geqslant \ln \alpha$. Fie m un număr natural astfel încît $m \leqslant \alpha \leqslant m + 1$. Avem $e^m \leqslant e^\alpha$. Însă $e^m \geqslant 2^m = (1+1)^m = 1 + C_m^1 + C_m^2 + \ldots + 1 > 1 + C_m^1 = 1 + m$.

Deducem că

$$e^\alpha > 1 + m \geqslant \alpha. \tag{1}$$

Logaritmînd inegalităţile (1), obţinem $\alpha > \ln \alpha$.

Presupunînd $x \geqslant 1$, avem

$$0 \leqslant \frac{\ln x}{x^n} = \frac{\ln\left(x^{\frac{n}{2}}\right)^{\frac{2}{n}}}{x^n} = \frac{2}{n}\,\frac{\ln x^{\frac{n}{2}}}{x^n} \leqslant \frac{2}{n}\cdot\frac{x^{\frac{n}{2}}}{x^n} = \frac{2}{n}\cdot\frac{1}{x^{\frac{n}{2}}}.$$

Deoarece $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{2}{n}\cdot\frac{1}{n}}{x^2} = 0$, rezultă în baza criteriului II.1 că și $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^n} = 0$.

Să se arate că

242. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^n} = \infty$.

Într-adevăr, deoarece $e^\alpha \geqslant \alpha$ pentru $\alpha \geqslant 1$, avem

$$\frac{e^x}{x^n} = \left(\frac{e^{\frac{x}{2n}}}{x^{\frac{1}{2}}}\right)^{2n} \geqslant \left(\frac{\frac{x}{2n}}{x^{\frac{1}{2}}}\right)^{2n} = \left(\frac{1}{2n}\right)^{2n} x^n.$$

Deoarece $\lim\limits_{x\to\infty} x^n = \infty$, rezultă în baza criteriului II.2 că $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^n} = \infty$.

243. *Să se calculeze* $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}$.

Deoarece $\left|\sin\frac{1}{x}\right| \leqslant 1$, avem $\left|x\sin\frac{1}{x}\right| \leqslant x$. Deci conform proprietății II.4, $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0$.

244. *Să se arate că pentru funcția* $f(x) = x\sin\frac{1}{x}$, $x \neq 0$, *este satisfăcut criteriul lui Cauchy-Bolzano în vecinătatea originii.*

Vom arăta că pentru orice $\varepsilon > 0$, există un număr $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, astfel încît pentru orice x', $x'' \neq 0$ și satisfăcînd inegalitățile $|x'| < \delta$, $|x''| < \delta$ să avem $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$. Însă

$$|f(x') - f(x'')| = \left|x'\sin\frac{1}{x'} - x''\sin\frac{1}{x''}\right| \leqslant \left|x'\sin\frac{1}{x'}\right| + \left|x''\sin\frac{1}{x''}\right| \leqslant |x'| + |x''|.$$

Fiind dat $\varepsilon > 0$ arbitrar, este suficient să alegem $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$, astfel ca îndată ce $|x'| < \frac{\varepsilon}{2}$, $|x''| < \frac{\varepsilon}{2}$, să avem $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

245. *Să se arate că funcția* $f(x) = \cos\frac{1}{x}$, $x \neq 0$, *nu are limită în punctul* $x = 0$, *demonstrînd că nu satisface criteriul general al lui Cauchy.*

Vom arăta că există un $\varepsilon_1 > 0$, astfel ca pentru orice $\delta > 0$ să existe x_1 și x_2 satisfăcînd inegalitățile $|x_1| < \delta$, $|x_2| < \delta$, $|f(x)_1) - f(x_2)| \geqslant \varepsilon_1$.

Fie $\varepsilon = 2$. Oricare ar fi δ, există n astfel ca $x_1 = \frac{1}{2n\pi} < \delta$, $x_2 = \frac{1}{(2n+1)\pi} < \delta$, $|f(x_1) - f(x_2)| = |\cos 2n\pi - \cos(2n+1)\pi| = 2$.

246. *Să se arate că funcția* $f(x) = \frac{x}{x+1}$, $x \neq -1$, *satisface criteriul lui Cauchy în punctul* $x = 1$.

Fie $x' > 0$ și $x'' > 0$, x', $x'' \neq 1$. Avem $|f(x') - f(x'')| = \left|\frac{x'}{1+x'} - \frac{x''}{1+x''}\right| = \left|\frac{x'-x''}{(1+x')(1+x'')}\right| < |x' - x''| = |x' - 1 + 1 - x''| \leqslant |x' - 1| + |x'' - 1|$.

Este suficient să alegem $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$, astfel încît dacă $|x' - 1| < \frac{\varepsilon}{2}$, $|x'' - 1| < \frac{\varepsilon}{2}$, să avem $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

247. *Să se arate că funcția* $f(x) = \operatorname{sign} x$ *nu satisface criteriul lui Cauchy în vecinătatea originii.*

Știm că

$$\operatorname{sign} x = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x > 0 \\ 0, & \text{dacă } x = 0 \\ -1, & \text{dacă } x < 0. \end{cases}$$

Fie $\varepsilon_1 = 2$. Oricare ar fi δ, există n astfel ca $\frac{1}{n} < \delta$. Fie $x' = \frac{1}{n}$, $x'' = -\frac{1}{n}$. Avem $|f(x') - f(x'')| = \left|\operatorname{sign}\frac{1}{n} - \operatorname{sign}\left(-\frac{1}{n}\right)\right| = 2$.

Să se calculeze următoarele limite:

248. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1} - x)$.

Sîntem în cazul de excepție $\infty - \infty$. Transformăm funcția în modul următor

$$\sqrt{x^2+1} - x = \frac{(\sqrt{x^2+1} - x)(\sqrt{x^2+1} + x)}{\sqrt{x^2+1} + x} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1} + x} = \frac{1}{|x|\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + x}.$$

Însă pentru $x > 0$,

$$|x| = x \text{ și } \sqrt{x^2+1} - x = \frac{1}{x\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)}.$$

Deci

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1} - x) = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1} = 0.$$

249. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x(\sqrt{x^2+1} - x)$.

Avem

$$x(\sqrt{1+x^2} - x) = \frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+x}.$$

Dacă $x > 0$,

$$|x| = x,\ x(\sqrt{1+x^2} - x) = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1},$$

deci $\lim\limits_{x\to\infty} x(\sqrt{1+x^2} - x) = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1} = \dfrac{1}{2}.$

Dacă $x < 0$,

$$|x| = -x,\ x(\sqrt{1+x^2} - x) = x\left(-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} - x\right) =$$

$$= -x^2\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right), \text{ deci, } \lim_{x\to-\infty}\left[-x^2\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right)\right] = -\infty.$$

250. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1-x+x^2})$.

Avem

$$\sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1-x+x^2} = \frac{2x}{\sqrt{1+x+x^2}+\sqrt{1-x+x^2}} =$$

$$= \frac{2x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+|x|\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}.$$

Dacă $x > 0$,

$$|x| = x \text{ și } \sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1-x+x^2} =$$

$$= \frac{2x}{x\left[\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right]}.$$

Deci

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1-x+x^2}) =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}} = 1.$$

251. $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1-x+x^2})$.

Deoarece pentru $x < 0$, $|x| = -x$, putem scrie

$$\sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1-x+x^2} = \frac{-2}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}.$$

Deci $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1-x+x^2}) = -1.$

252. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt[3]{x^3+x^2+1} - \sqrt[3]{x^3-x^2+1})$.

Sîntem în cazul $\infty - \infty$. Notăm $a = \sqrt[3]{x^3+x^2+1}$, $b = \sqrt[3]{x^3-x^2+1}$. Înmulțind și împărțind funcția dată cu $a^2 + ab + b^2 = \sqrt[3]{(x^3+x^2+1)^2} + \sqrt[3]{(x^3-x^2+1)(x^3+x^2+1)} + \sqrt[3]{(x^3-x^2+1)^2}$, obținem

$$\sqrt[3]{x^3+x^2+1} - \sqrt[3]{x^3-x^2+1} =$$

$$= \frac{x^3+x^2+1-(x^3-x^2+1)}{\sqrt[3]{(x^3-x^2+1)^2}+\sqrt[3]{(x^3-x^2+1)(x^3+x^2+1)}+\sqrt[3]{(x^3-x^2+1)^2}} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt[3]{\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}\right)^2}+\sqrt[3]{\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}\right)\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}\right)}+\sqrt[3]{\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}\right)^2}}$$

de unde

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt[3]{x^3+x^2+1} - \sqrt[3]{x^3-x^2+1}) = \frac{2}{3}.$$

253. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}$.

Sîntem în cazul de excepție $\frac{0}{0}$. Ținem seamă de relația $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\ldots+ab^{n-2}+b^{n-1})$.

În cazul nostru, notăm $a = \sqrt[n]{1+x}$, $b = 1$. Înmulțim numitorul și numărătorul funcției a cărei limită vrem s-o calculăm cu $a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + b^{n-1}$ și obținem

$$\frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x} = \frac{x}{x\left[\sqrt[n]{(1+x)^{n-1}} + \sqrt[n]{(1+x)^{n-2}} + \ldots + 1\right]};$$

deci

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\left[1 + \sqrt[n]{1+x} + \ldots + \sqrt[n]{(1+x)^{n-1}}\right]} = \frac{1}{n}.$$

În exercițiile următoare se folosesc cîteva limite cunoscute: $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\sin \alpha(x)}{\alpha(x)} = 1$, $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\operatorname{tg} \alpha(x)}{\alpha(x)} = 1$, dacă $\lim\limits_{x\to x_0} \alpha(x) = 0$ și $\alpha(x) \neq 0$ pentru $x \neq x_0$.

Să se calculeze:

~~254.~~ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{x}$.

Deoarece $\lim\limits_{x\to 0} \sin 5x = 0$, sîntem în cazul $\frac{0}{0}$.

Însă $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{x} = 5 \lim\limits_{x\to 0} \cdot \frac{\sin 5x}{5x} = 5.$

~~255.~~ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$.

Sîntem de asemenea în cazul $\frac{0}{0}$. Avem

$$\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{2\left(\frac{x}{2}\right)^2}.$$

Deoarece $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = 1$, rezultă

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\left(\sin \frac{x}{2}\right)^2}{\left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}.$$

~~256.~~ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos^3 x}{x \sin 2x}$.

Sîntem în cazul $\frac{0}{0}$. Avem

$$\frac{1-\cos^3 x}{x\sin 2x} = \frac{(1-\cos x)(1+\cos x+\cos^2 x)}{x \sin 2x} =$$

$$= \frac{(1+\cos x+\cos^2 x)}{\cos \frac{x}{2} \cos x} \cdot \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{2x \sin \frac{x}{2}}.$$

Însă

$$\lim_{x\to 0} \frac{1+\cos x+\cos^2 x}{\cos \frac{x}{2} \cos x} = 3, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{2x\sin \frac{x}{2}} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{4 \cdot \frac{x}{2}} = \frac{1}{4}.$$

Deci $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos^3 x}{x \sin 2x} = \frac{3}{4}$.

~~257.~~ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x\sin x} - \sqrt{\cos 2x}}{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$.

Sîntem în cazul $\frac{0}{0}$. Avem

$$\frac{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos 2x}}{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1+x\sin x-\cos 2x}{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}\left(\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos 2x}\right)} =$$

$$= \frac{x \sin x + 2\sin^2 x}{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}\left(\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos 2x}\right)}.$$

Deci

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos 2x}}{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos 2x}} \times$$

$$\times \lim_{x\to 0} \frac{x\sin x + 2\sin^2 x}{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}.$$

Însă

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos 2x}}=\frac{1}{2},$$

$$\text{iar }\lim_{x\to0}\frac{x\sin x+2\sin^2 x}{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\lim_{x\to0}\frac{2x\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}+$$

$$+\lim_{x\to0}\frac{8\sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=12.$$

$$\text{Deci }\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos 2x}}{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=6.$$

258. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 5x-\sin 3x}{5x}$.

Avem

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin 5x-\sin 3x}{5x}=\lim_{x\to0}\frac{2\sin x\cos 4x}{5x}=\frac{2}{5}.$$

259. $\lim\limits_{x\to1}(1-x)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$.

Deoarece $\lim\limits_{x\to1}(1-x)=0$, $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}=\infty$, $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}=-\infty$, sîntem în cazul de excepție $0\cdot\infty$. Notînd $1-x=u$, avem

$$(1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}=u\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}(1-u)=u\operatorname{cotg}\frac{\pi}{2}u=u\,\frac{\cos\frac{\pi}{2}u}{\sin\frac{\pi}{2}u},$$

$$\text{deci }\lim_{x\to1}(1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}=\lim_{u\to0}\frac{u}{\sin\frac{\pi}{2}u}\cos\frac{\pi}{2}u=\frac{2}{\pi}.$$

260. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin mx}{\sin nx}$.

Sîntem în cazul $\dfrac{0}{0}$. Notăm $x=\pi+u$; rezultă

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin mx}{\sin nx}=\lim\frac{\sin m(\pi+u)}{\sin n(\pi+u)}=$$

$$=\lim_{u\to0}\frac{\sin m\pi\cos mu+\cos m\pi\sin mu}{\sin n\pi\cos nu+\cos n\pi\sin nu}.$$

Deoarece $\sin m\pi=\sin n\pi=0$, $\cos m\pi=(-1)^m$, $\cos n\pi=(-1)^n$, oricare ar fi întregii m, n, avem

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin mx}{\sin nx}=\lim_{u\to0}\frac{(-1)^m\sin mu}{(-1)^n\sin nu}=(-1)^{m-n}\lim_{u\to0}\frac{m\,\frac{\sin mu}{mu}}{n\,\frac{\sin nu}{nu}}=$$

$$=(-1)^{m-n}\cdot\frac{m}{n}.$$

261. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$.

Deoarece sîntem din nou în cazul $\dfrac{0}{0}$ și deoarece radicalii care intervin sînt de indici diferiți, vom transforma funcția a cărei limită vrem s-o calculăm aducînd radicalii la același indice. Vom obține

$$\frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}=\frac{\sqrt[6]{\cos^3 x}-\sqrt[6]{\cos^2 x}}{\sin^2 x}=$$

$$=\frac{\cos^3 x-\cos^2 x}{\sin^2 x\left(\sqrt[6]{\cos^{15} x}+\sqrt[6]{\cos^{14} x}+\sqrt[6]{\cos^{13} x}+\sqrt[6]{\cos^{12} x}+\sqrt[6]{\cos^{11} x}+\sqrt[6]{\cos^{10} x}\right)}=$$

$$=\frac{\cos^2 x\,(\cos x-1)}{\sin^2 x\left(\sqrt[6]{\cos^{15} x}+\sqrt[6]{\cos^{14} x}+\sqrt[6]{\cos^{13} x}+\sqrt[6]{\cos^{12} x}+\sqrt[6]{\cos^{11} x}+\sqrt[6]{\cos^{10} x}\right)}.$$

Însă

$$\lim_{x\to0}\frac{\cos^2 x}{\sqrt[6]{\cos^{15} x}+\sqrt[6]{\cos^{14} x}+\sqrt[6]{\cos^{13} x}+\sqrt[6]{\cos^{12} x}+\sqrt[6]{\cos^{11} x}+\sqrt[6]{\cos^{10} x}}=\frac{1}{6}$$

și

$$\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{\sin^2 x}=\lim_{x\to0}\frac{-2\sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2 x}=-\frac{1}{2}.$$

$$\text{Deci }\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}=-\frac{1}{12}.$$

Limita se mai poate calcula scriind

$$\frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}=\frac{\sqrt{\cos x}-1}{\sin^2 x}+\frac{1-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}=\frac{\cos x-1}{\sin^2 x\,(1+\sqrt{\cos x})}+$$

$$+\frac{1-\cos x}{\sin^2 x\,(1+\sqrt[3]{\cos x}+\sqrt[3]{\cos^2 x})}.$$

Prin urmare, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x} = -\dfrac{1}{2\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} = -\dfrac{1}{12}$.

În exercițiile următoare se folosesc cîteva limite:

$\lim\limits_{x\to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$, $\lim\limits_{x\to x_0} [1 + \alpha(x)]^{\frac{1}{\alpha(x)}} = e$, dacă $\lim\limits_{x\to x_0} \alpha(x) = 0$ și $\alpha(x) \neq 0$ *pentru* $x \neq x_0$.

262. $\lim\limits_{x\to 0} (1 + x^2)^{\operatorname{cotg}^2 x}$.

Deoarece $\lim\limits_{x\to 0} (1 + x^2) = 1$, $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{cotg}^2 x = \infty$, sîntem în cazul de excepție 1^∞. Vom scrie funcția a cărei limită vrem s-o calculăm sub forma următoare

$$(1 + x^2)^{\operatorname{cotg}^2 x} = \left[(1 + x^2)^{\frac{1}{x^2}}\right]^{x^2 \operatorname{cotg}^2 x}.$$

Deoarece $\lim\limits_{x\to 0} (1 + x^2)^{\frac{1}{x^2}} = e$ și $\lim\limits_{x\to 0} x^2 \operatorname{cotg}^2 x = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{\operatorname{tg}^2 x} = 1$, deducem

$$\lim_{x\to 0} (1 + x^2)^{\operatorname{cotg}^2 x} = e^1 = e.$$

263. $\lim\limits_{x\to 0} (1 + \operatorname{tg}^2\sqrt{x})^{\frac{1}{2x}}$, $x > 0$.

Deoarece $\lim\limits_{x\to 0} (1 + \operatorname{tg}^2\sqrt{x}) = 1$, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{2x} = \infty$, sîntem în cazul 1^∞.

Vom scrie funcția sub forma următoare

$$(1 + \operatorname{tg}^2\sqrt{x})^{\frac{1}{2x}} = \left[(1 + \operatorname{tg}^2\sqrt{x})^{\frac{1}{\operatorname{tg}^2\sqrt{x}}}\right]^{\frac{\operatorname{tg}^2\sqrt{x}}{2x}}.$$

Însă

$$\lim_{x\to 0} (1 + \operatorname{tg}^2\sqrt{x})^{\frac{1}{\operatorname{tg}^2\sqrt{x}}} = e, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}^2\sqrt{x}}{2x} = \frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \left(\frac{\operatorname{tg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2 = \frac{1}{2}.$$

Deci $\lim\limits_{x\to 0} (1 + \operatorname{tg}^2\sqrt{x})^{\frac{1}{2x}} = e^{\frac{1}{2}}$.

264. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 2}\right)^{x^2}$.

Observăm că $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 2} = 1$, deci sîntem în cazul 1^∞. Efectuînd împărțirea $\dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 2}$, obținem $\dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 2} = 1 + \dfrac{3}{x^2 - 2}$, deci

$$\left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 2}\right)^{x^2} = \left(1 + \frac{3}{x^2 - 2}\right)^{x^2} = \left[\left(1 + \frac{3}{x^2 - 2}\right)^{\frac{x^2 - 2}{3}}\right]^{\frac{3x^2}{x^2 - 2}}.$$

Însă, deoarece $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \dfrac{3}{x^2 - 2}\right)^{\frac{x^2 - 2}{3}} = e$, $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2}{x^2 - 2} = 3$, deducem

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 2}\right)^{x^2} = e^3.$$

265. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

Avem

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{\cos 2x} = 1, \quad \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty,$$

deci sîntem în cazul 1^∞.

Vom scrie funcția a cărei limită vrem s-a calculăm sub forma

$$\left(\frac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = \left[1 + \left(\frac{\cos x}{\cos 2x} - 1\right)\right]^{\frac{1}{x^2}} =$$

$$= \left\{\left[1 + \left(\frac{\cos x}{\cos 2x} - 1\right)\right]^{\frac{1}{\frac{\cos x}{\cos 2x} - 1}}\right\}^{\left(\frac{\cos x}{\cos 2x} - 1\right)\frac{1}{x^2}}.$$

Însă, deoarece $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\cos x}{\cos 2x} - 1\right) = 0$, avem

$$\lim_{x\to 0} \left[1 + \left(\frac{\cos x}{\cos 2x} - 1\right)\right]^{\frac{1}{\frac{\cos x}{\cos 2x} - 1}} = e,$$

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\cos x}{\cos 2x} - 1\right)\frac{1}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \cos 2x}{x^2} \cdot \frac{1}{\cos 2x} = \frac{3}{2}.$$

Deci $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\frac{3}{2}}$.

266. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{\sin x}{x-\sin x}}$.

Sîntem în cazul 1^∞. Vom scrie funcția sub forma

$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{\sin x}{x-\sin x}} = \left\{\left[1+\left(\frac{\sin x}{x}-1\right)\right]^{\frac{1}{\frac{\sin x}{x}-1}}\right\}^{\left(\frac{\sin x}{x}-1\right)\frac{\sin x}{x-\sin x}}.$$

Deci $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{\sin x}{x-\sin x}} = \dfrac{1}{e}$.

267. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+kx)}{x}$.

Sîntem în cazul $\dfrac{0}{0}$. Avem

$$\frac{\ln(1+kx)}{x} = \ln(1+kx)^{\frac{1}{x}} = \ln\left[(1+kx)^{\frac{1}{kx}}\right]^k = k\ln\left[(1+kx)^{\frac{1}{kx}}\right].$$

Însă $\lim\limits_{x\to 0}(1+kx)^{\frac{1}{kx}} = e$, $\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+kx)^{\frac{1}{kx}} = 1$.

Deci $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+kx)}{x} = k$.

268. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{3x}$.

Sîntem în cazul $\dfrac{0}{0}$. Să notăm $\alpha(x) = e^{2x}-1$. Avem $e^{2x} =$

$= \alpha(x)+1$, $2x = \ln[\alpha(x)+1]$, $3x = \dfrac{3}{2}\ln(1+\alpha)$,

$$\lim_{x\to 0}\alpha(x) = 0.$$

Deci $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{3x} = \dfrac{2}{3}\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{1}{\ln(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}} = \dfrac{2}{3}$.

269. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-\cos x}{x^2}$.

Vom scrie

$$\frac{e^{x^2}-\cos x}{x^2} = \frac{e^{x^2}-1}{x^2} + \frac{1-\cos x}{x^2}.$$

Însă (v. exercițiul 255) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$; rămîne să calculăm $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1}{x^2}$. Ca și în exercițiul 268, notăm $e^{x^2}-1 = \alpha(x)$ și obținem

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{x^2} = \lim_{\alpha\to 0}\frac{1}{\ln(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}} = 1.$$

Deci $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-\cos x}{x^2} = 1+\dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2}$.

270. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{2^{\operatorname{cotg} x}-2}{x-\frac{\pi}{4}}$.

Scriem

$$\frac{2^{\operatorname{cotg} x}-2}{x-\frac{\pi}{4}} = \frac{2\left(2^{\operatorname{cotg} x-1}-1\right)}{x-\frac{\pi}{4}}$$

și notăm $2^{\operatorname{cotg} x-1}-1 = \alpha(x)$; rezultă $(\operatorname{cotg} x-1)\ln 2 =$ $= \ln[1+\alpha(x)]$ și prin urmare

$$\frac{2^{\operatorname{cotg} x}-2}{x-\frac{\pi}{4}} = 2\,\frac{\alpha(x)}{\ln[1+\alpha(x)]}\cdot\frac{(\operatorname{cotg} x-1)\ln 2}{x-\frac{\pi}{4}}.$$

Deci

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{2^{\operatorname{cotg} x}-2}{x-\frac{\pi}{4}} = 2\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\ln[1+\alpha(x)]^{\frac{1}{\alpha(x)}}}\times$$

$$\times\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\operatorname{cotg} x-\operatorname{cotg}\frac{\pi}{4}}{x-\frac{\pi}{4}}\ln 2 = -4\ln 2.$$

271. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{a^x - x^a}{x - a}$, $a > 0$.

Avem $\dfrac{a^x - x^a}{x - a} = \dfrac{a^x - a^a}{x - a} - \dfrac{x^a - a^a}{x - a}$. Însă

$$\lim_{x\to a} \frac{a^x - a^a}{x - a} = a^a \lim_{x\to a} \frac{a^{x-a} - 1}{x - a} = a^a \ln a,$$

$$\frac{x^a - a^a}{x - a} = \frac{e^{a\ln x} - e^{a \ln a}}{x - a} = \frac{e^{a\ln x} - e^{a\ln a}}{a \ln x - a \ln a} \cdot \frac{a \ln x - a \ln a}{x - a}.$$

Dar

$$\frac{e^{a\ln x} - e^{a\ln a}}{a \ln x - a \ln a} = \frac{e^{a\ln a}\left[e^{a \ln \frac{x}{a}} - 1\right]}{a \ln \dfrac{x}{a}}$$

şi dacă notăm $e^{a\ln\frac{x}{a}} - 1 = t(x)$, obţinem

$$\lim_{x\to a} \frac{e^{a\ln x} - e^{a\ln a}}{a \ln x - a \ln a} = a^a \lim_{t\to 0} \frac{t}{\ln (t + 1)} = a^a.$$

Totodată avem

$$\lim_{x\to a} \frac{a \ln x - a \ln a}{x - a} = a \lim_{x\to a} \frac{\ln\left(1 + \dfrac{x - a}{a}\right)}{x - a} =$$

$$= \lim_{x\to a} \ln\left(1 + \frac{x - a}{a}\right)^{\frac{a}{x-a}} = 1.$$

Deci $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{a^x - x^a}{x - a} = a^a (\ln a - 1)$.

272. $\lim\limits_{n\to\infty} n^2(\sqrt[n]{x} - \sqrt[n+1]{x})$, $x > 0$, $n \neq 1$.

Avem

$$n^2 \left(\sqrt[n]{x} - \sqrt[n+1]{x}\right) = n^2 \sqrt[n+1]{x}\left(x^{\frac{1}{n(n+1)}} - 1\right) =$$

$$= \frac{n^2 \sqrt[n+1]{x}}{n(n + 1)} \cdot \frac{x^{\frac{1}{n(n+1)}} - 1}{\dfrac{1}{n(n + 1)}}.$$

Notînd $x^{\frac{1}{n(n+1)}} - 1 = t_n$, obţinem

$$\frac{1}{n(n + 1)} \ln x = \ln (1 + t_n) \text{ sau } \frac{1}{n(n + 1)} = \frac{\ln (1 + t_n)}{\ln x}$$

şi

$$n^2 (\sqrt[n]{x} - \sqrt[n+1]{x}) = \frac{n^2 \sqrt[n+1]{x}}{n(n + 1)} \cdot \frac{t_n \ln x}{\ln (1 + t_n)}.$$

Dar $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{t_n}{\ln (1 + t)} = 1$, deci pentru orice şir $t_n \to 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{t_n}{\ln (1 + t_n)} = 1$. Aşadar $\lim\limits_{n\to\infty} n^2(\sqrt[n]{x} - \sqrt[n+1]{x}) = \ln x$.
(Trebuie observat că $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = 0$).

Dacă $x = 1$, evident limita este zero.

273. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln (x^2 + e^x)}{\ln (x^4 + e^{2x})}$.

Sîntem în cazul de excepţie $\dfrac{0}{0}$. Vom transforma funcţia a cărei limită vrem s-o calculăm astfel

$$\frac{\ln (x^2 + e^x)}{\ln (x^4 + e^{2x})} = \frac{\ln e^x \left(1 + \dfrac{x^2}{e^x}\right)}{\ln e^{2x} \left(1 + \dfrac{x^4}{e^{2x}}\right)} = \frac{\dfrac{\ln e^x + \ln\left(1 + \dfrac{x^2}{e^x}\right)}{x}}{\dfrac{\ln e^{2x} + \ln\left(1 + \dfrac{x^4}{e^{2x}}\right)}{x}} =$$

$$= \frac{1 + \dfrac{x^2 \ln \left(1 + \dfrac{x^2}{e^x}\right)^{\frac{e^x}{x^2}}}{e^x x}}{2 + \dfrac{x^4 \ln \left(1 + \dfrac{x^4}{e^{2x}}\right)^{\frac{e^{2x}}{x^4}}}{e^{2x} x}}.$$

Însă

$$\lim_{x\to 0} \frac{x \ln \left(1 + \dfrac{x^2}{e^x}\right)^{\frac{e^x}{x^2}}}{e^x} = 0, \quad \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{e^{2x}} \ln \left(1 + \frac{x^4}{e^{2x}}\right)^{\frac{e^{2x}}{x^4}} = 0.$$

Deci $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln (x^2 + e^x)}{\ln (x^4 + e^{2x})} = \dfrac{1}{2}$.

Să se deseneze graficele următoarelor funcții:

274. $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n}{2^n + x^n}$, $x \geqslant 0$.

Avem de analizat următoarele posibilități:

1) $0 \leqslant x < 2$. În acest caz,

$$\frac{2^n}{2^n + x^n} = \frac{2^n}{2^n\left[1 + \left(\frac{x}{2}\right)^n\right]} = \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{2}\right)^n}.$$

Deoarece $\dfrac{x}{2} < 1$, avem $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x}{2}\right)^n = 0$, iar $f(x) = 1$.

2) $x = 2$. În acest caz, oricare ar fi n avem $\dfrac{2^n}{2^n + x^n} = \dfrac{1}{2}$, deci $f(x) = \dfrac{1}{2}$.

3) $2 < x$. În acest caz,

$$\frac{2^n}{2^n + x^n} = \frac{2^n}{x^n} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{2}{x}\right)^n}.$$

Deoarece $\dfrac{2}{x} < 1$, avem

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{x}\right)^n = 0,\ f(x) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{x}\right)^n \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 + \left(\frac{2}{x}\right)^n} = 0 \cdot 1 = 0.$$

Funcția este reprezentată în fig. 22.

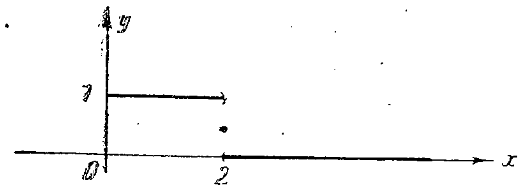

Fig. 22

275. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\dfrac{x^{2n+2}}{2^{2n} + x^{2n}}}$.

Avem de analizat următoarele posibilități:

1) $|x| < 2$. În acest caz,

$$\sqrt{\frac{x^{2n+2}}{2^{2n} + x^{2n}}} = \sqrt{\frac{x^{2n+2}}{2^{2n}\left[1 + \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}\right]}}.$$

Deoarece $1 + \left(\dfrac{x}{2}\right)^{2n} > 1$, rezultă că

$$\sqrt{\frac{x^{2n+2}}{2^{2n}\left[1 + \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}\right]}} < \sqrt{\frac{x^{2n+2}}{2^{2n}}} = \left|\frac{x}{2}\right|^n |x|.$$

Însă $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{x}{2}\right|^n = 0$, deci $f(x) = 0$.

2) $|x| = 2$. În acest caz,

$$\sqrt{\frac{x^{2n+2}}{2^{2n} + x^{2n}}} = \sqrt{\frac{2^{2n+2}}{2^{2n+1}}} = \sqrt{2} \text{ oricare ar fi } n; \text{ deci } f(x) = \sqrt{2}.$$

3) $|x| > 2$. În acest caz,

$$\sqrt{\frac{x^{2n+2}}{2^{2n} + x^{2n}}} = \sqrt{\frac{x^{2n+2}}{x^{2n}\left[1 + \left(\frac{2}{x}\right)^{2n}\right]}} = |x| \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{2}{x}\right)^{2n}}}.$$

Rezultă că

$$f(x) = |x| \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{1}{1 + \left(\frac{2}{x}\right)^{2n}}} = |x|.$$

În concluzie,

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } |x| < 2 \\ 2, & \text{dacă } |x| = 2 \\ x, & \text{dacă } |x| > 2. \end{cases}$$

Funcția este reprezentată în fig. 23.

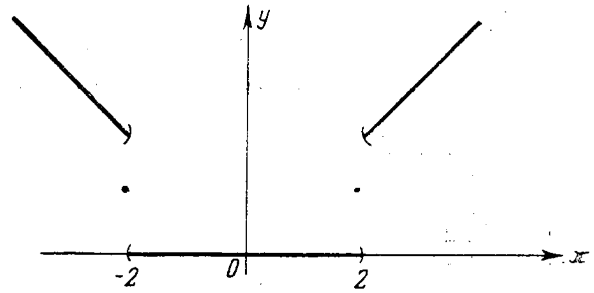

Fig. 23

Să se calculeze:

276. $\lim\limits_{x\to-2} \frac{x^2+2x}{7} E\left(\frac{5}{x^2-x-6}\right)$. **R.** $\frac{2}{7}$,

277. $\lim\limits_{x\to0} \operatorname{tg} x\, E\left(\frac{5}{\sin x}\right)$. **R.** 5.

278. *Să se determine constanta* α *astfel ca funcția*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{tg} 6(x-1)}{\sin 2(x-1)}, & \text{dacă } x < 1 \\ \sqrt{\alpha^2 + 4 + \frac{4\alpha}{e^{x-1}}}, & \text{dacă } x > 1 \end{cases}$$

să aibă limită în punctul $x = 1$.

Să se stabilească existența limitelor pentru următoarele funcții, în punctele indicate în dreptul fiecăreia:

279. $f(x) = \begin{cases} 2\,\frac{\sqrt{x^2+7}-\sqrt{x^2+x+4}}{x-3}, & x < 3 \\ \frac{-2x}{\sin 8x}, & x > 3 \end{cases}$ *în punctul* $x = 3$.

R. Există și este egală cu $-\frac{1}{4}$.

280. $f(x) = \begin{cases} \operatorname{tg} x \sin\frac{1}{x}, & x < 0 \\ \frac{\cos\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x}}}, & x > 0 \end{cases}$ *în punctul* $x = 0$.

R. Există și este egală cu zero.

281. $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+x-6}{x^2-3x+2}, & x < 2 \\ \frac{4}{\sqrt{e}}\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x-2}}, & x > 2 \end{cases}$ *în punctul* $x = 2$.

R. Nu există.

282. $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{\operatorname{cotg} x}}, & x > 0 \\ -\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{1}{x}, & x < 0 \end{cases}$ *în punctul* $x = 0$.

R. Există și este egală cu 1.

283. $f(x) = \begin{cases} 2^{\frac{1}{x-2}}, & x < 2 \\ \frac{1}{e^{\frac{1}{x-2}}}, & x > 2 \end{cases}$ *în punctul* $x = 2$.

R. Există și este egală cu zero.

284. $f(x) = \frac{x^2-7x+12}{x^2-2x-3}(-1)^{E(x)}$ *în punctul* $x = 3$.

R. Nu există.

285. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x-1}}}, & x > 1 \\ e^{\frac{1}{\sin(x-1)}}, & x < 1 \end{cases}$ *în punctul* $x = 1$.

R. Există și este egală cu zero.

Să se calculeze

286. $\lim\limits_{x\to2} \frac{\sqrt{x^2+3x+6}-\sqrt{x^2-2x+16}}{x-2}$. **R.** $\frac{5}{8}$.

287. $\lim\limits_{x\to1} \frac{2x-\sqrt{x^2+3}}{\sqrt{x+3}-\sqrt{2x+2}}$. **R.** -6.

288. $\lim\limits_{x\to3} \frac{\sqrt[3]{x^2+2x+12}-\sqrt[3]{2x^2+x+6}}{x-3}$. **R.** $-\frac{5}{27}$.

289. $\lim\limits_{x\to0} \frac{\sqrt[n]{1+x}-\sqrt[n]{1-x}}{x}$. **R.** $\frac{2}{n}$.

290. $\lim\limits_{x\to3} \frac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{\frac{x}{2}+\frac{5}{2}}\right)(x-\sqrt[3]{9+6x})}{(x-3)^2}$. **R.** $\frac{21}{216}$.

291. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1-\cos x)^2}{x^4}$. R. $\dfrac{1}{4}$.

292. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x - \operatorname{tg} x}{x^2 \operatorname{tg} x}$. R. $-\dfrac{1}{2}$.

293. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x\operatorname{tg} x}-\sqrt{1+x\sin x}}{x^4}$. R. $\dfrac{1}{4}$.

294. $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\sin x}{1-\dfrac{x^2}{\pi^2}}$.

Se face substituția $x=\pi+u$. R. $\dfrac{\pi}{2}$.

295. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\cos x-\sin x}{x-\dfrac{\pi}{4}}$. R. $-\sqrt{2}$.

296. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2}$. R. e^2.

297. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-4x+4}\right)^{x}$. R. e^2.

298. $\lim\limits_{x\to e} (\ln x)^{\frac{1}{x^2-3ex+2e^2}}$. R. $e^{-\frac{1}{e^2}}$.

299. $\lim\limits_{\substack{x\to \frac{\pi}{4}\\ x>\frac{\pi}{4}}} \left(\dfrac{\sin x+\cos x}{\sqrt{2}}\right)^{\frac{1}{\sqrt{x-\frac{\pi}{4}}}}$. R. 1.

300. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{2^{\operatorname{tg} x}-2}{x-\dfrac{\pi}{4}}$. R. $\ln 16$.

301. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{5^{\sin x}-5^{\frac{2}{\sqrt{2}}\cos\frac{x}{2}}}{x-\dfrac{\pi}{2}}$. R. $\dfrac{5}{2}\ln 5$.

302. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{3^{\sin^2 x}-3}{x-\dfrac{\pi}{2}}$. R. 0.

303. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^x-a^a}{x-a}$, $a>0$.

Scriem $\dfrac{x^x-a^a}{x-a}=\dfrac{x^x-x^a}{x-a}+\dfrac{x^a-a^a}{x-a}$. R. $a^a(\ln a+1)$.

304. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^{\operatorname{tg} x}-x^{\operatorname{tg} a}}{\sin bx-\sin ba}$, $x>0$, $a>0$. R. $\dfrac{a^{\operatorname{tg} a}(1+\operatorname{tg}^2 a)\ln a}{b\cos ba}$.

305. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{a^{a^x}-a^{a^a}}{x-a}$, $a>0$. R. $a^{a^a}a^a\ln^2 a$.

306. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{a^{x^x}-a^{a^a}}{x-a}$, $a>0$. R. $a^{a^a}a^a(1+\ln a)\ln a$.

307. $\lim\limits_{n\to \infty} \left(\dfrac{\sqrt[n]{a_1}+\sqrt[n]{a_2}}{2}\right)^n$, $a_1, a_2>0$. R. $\sqrt{a_1a_2}$.

308. $\lim\limits_{n\to \infty} \left(\dfrac{\sqrt[n]{a_1}+\sqrt[n]{a_2}+\ldots+\sqrt[n]{a_k}}{k}\right)^n$, $a_1>0$, $a_2>0, \ldots, a_k>0$.

R. $\sqrt[k]{a_1a_2\ldots a_k}$.

309. $\lim\limits_{\substack{x\to e\\ x>e}} \dfrac{1}{\ln x-1}$.

310. $\lim\limits_{\substack{x\to e\\ x<e}} \dfrac{1}{\ln x-1}$.

311. $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \dfrac{1}{e^{\frac{1}{x}}-e}$.

312. $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \dfrac{1}{e^{\frac{1}{x}}-e}$.

313. $\lim\limits_{\substack{x\to \frac{\pi}{4}\\ x>\frac{\pi}{4}}} e^{\frac{1}{\operatorname{tg} x-1}}$.

314. $\lim\limits_{\substack{x\to \frac{\pi}{4}\\ x<\frac{\pi}{4}}} e^{\frac{1}{\operatorname{tg} x-1}}$.

315. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x \ln x$. **R.** 0.

Se face substituția $x = \frac{1}{u}$.

316. $\lim\limits_{x\to 0} x^x$, $x > 0$. **R.** 1.

317. $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$. **R.** $\frac{1}{e}$.

318. a) $\lim\limits_{n\to\infty} \underbrace{\sin \sin \ldots \sin x}_{n \text{ ori}}$. **R.** 0.

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \underbrace{\cos \cos \ldots \cos x}_{n \text{ ori}}$. **R.** Limita este egală cu rădăcina ecuației $x = \cos x$.

319. *Să se arate că*

$$\lim_{m\to\infty}\left[\lim_{n\to\infty} \cos^n(\pi m!\, x)\right] = \begin{cases} 1, & \textit{dacă } x \textit{ este rațional} \\ 0, & \textit{dacă } x \textit{ este irațional.} \end{cases}$$

3.2. Funcții continue

Fie funcția reală de variabilă reală $f: A\to R$ și $x_0 \in A$.

Funcția f este *continuă* în x_0 dacă pentru orice șir $x_n \to x_0$, $x_n\in A$, avem $f(x_n)\to f(x_0)$

sau

pentru orice vecinătate U a lui $f(x_0)$ există o vecinătate V a lui x_0, astfel încît oricare ar fi $x\in V\cap A$ să avem $f(x)\in U$

sau

pentru orice număr $\varepsilon > 0$ există un număr $\delta(\varepsilon) > 0$, astfel încît oricare ar fi $x\in A$ cu $|x - x_0| < \delta(\varepsilon)$ să avem $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Dacă x_0 este un punct izolat al lui A, f este continuă în x_0.

Dacă x_0 este un punct de acumulare a lui A, atunci f este continuă în x_0 dacă și numai dacă f are limită în x_0 și $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Funcția f este continuă pe A dacă este continuă în fiecare punct din A.

Funcția $f: A\to R$ este *continuă la stînga* în $x_0\in A$ dacă pentru orice șir $x_n\in A$, $x_n\to x_0$, $x_n \leqslant x_0$, avem $f(x_n)\to f(x_0)$

sau

pentru orice vecinătate U a lui $f(x_0)$ există o vecinătate V a lui x_0, astfel încît oricare ar fi $x\in V\cap A$, $x<x_0$, să avem $f(x)\in U$

sau

pentru orice număr $\varepsilon > 0$ există un număr $\delta(\varepsilon) > 0$, astfel încît oricare ar fi $x\in A$, cu $x_0 - \delta < x < x_0$, să avem $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Funcția $f: A\to R$ este *continuă la dreapta în* $x_0\in A$ dacă pentru orice șir $x_n\in A$, $x_n \geqslant x_0$, $x_n\to x_0$, avem $f(x_n)\to f(x_0)$

sau

pentru orice vecinătate U a lui $f(x_0)$ există o vecinătate V a lui x_0 astfel încît oricare ar fi $x\in V\cap A$, $x > x_0$, să avem $f(x)\in U$

sau

pentru orice număr $\varepsilon > 0$ există un număr $\delta(\varepsilon) > 0$, astfel încît oricare ar fi $x\in A$, cu $x_0 < x < x_0 + \delta$, să avem $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Funcția f este *continuă* în punctul x_0 dacă și numai dacă este continuă la stînga și la dreapta în punctul x_0.

Dacă x_0 este un punct de acumulare și dacă limita la stînga în x_0 are sens, atunci f este continuă la stînga în x_0 dacă și numai dacă $f(x_0 - 0) = f(x_0)$.

Dacă x_0 este un punct de acumulare și dacă limita la dreapta în x_0 are sens, atunci f este continuă la dreapta în x_0, dacă și numai dacă $f(x_0 + 0) = f(x_0)$.

Un punct $x_0\in A$ este *punct de discontinuitate* a lui f dacă f nu este continuă în x_0.

Un punct x_0 de discontinuitate este de speța întîi — dacă limitele laterale (care au sens) există și sînt finite.

Punctul x_0 de discontinuitate este de speța a doua dacă nu este de speța întîi.

Proprietăți. 1) Dacă funcțiile $f, g: A\to R$ sînt continue în x_0, atunci funcțiile $f+g$, $f-g$, αf și fg sînt continue în x_0; dacă $g(x_0)\neq 0$, atunci $\frac{f}{g}$ este continuă în x_0.

2) Dacă f și g sînt continue pe A, funcțiile $f+g$, $f-g$, αf, fg sînt continue pe domeniul lor de definiție; dacă $g(x_0)\neq 0$, atunci $\frac{f}{g}$ este continuă pe A.

3) Dacă funcția $f: A\to B$ este continuă în $x_0\in A$ respectiv pe A, iar funcția $g: B\to R$ este continuă în punctul corespun-

zător $y = f(x_0) \in B$ (respectiv pe B), atunci funcţia compusă $g \bigcirc f$ este continuă în x_0 (respectiv pe A).

4) Dacă f şi $g: A \to R$ sînt continue în x_0 şi dacă $f(x_0) < g(x_0)$, atunci există o vecinătate U a lui x_0, astfel încît pentru orice $x \in U \cap A$ să avem $f(x) < g(x)$.

5) Dacă $f: A \to R$ este continuă în x_0 şi $\alpha < f(x_0) < \beta$, atunci $\alpha < f(x) < \beta$ pentru o întreagă vecinătate a lui x_0.

6) Dacă $f(x_0) \neq 0$ şi f este continuă în x_0, atunci $f(x) \neq 0$ pe o vecinătate a lui x_0.

O funcţie $f: I \to R$, definită pe un interval, are proprietatea lui Darboux dacă oricare ar fi $a \neq b$ din I şi oricare ar fi λ cuprins între $f(a)$ şi $f(b)$, există un număr c_λ cuprins între a şi b astfel încît $f(c_\lambda) = \lambda$ (funcţia nu trece de la o valoare la alta fără a trece prin toate valorile intermediare).

7) Dacă $f: I \to R$ are proprietatea lui Darboux, atunci:

a) dacă în două puncte $a, b \in I$ are valori cu semne contrare, se anulează cel puţin o dată între a şi b;

b) dacă nu se anulează pe I, păstrează acelaşi semn pe I;

c) dacă există $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x)$, atunci $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$;

d) dacă f are proprietatea lui Darboux, atunci $f(I)$ este interval.

8) Orice funcţie continuă $f: I \to R$ are proprietatea lui Darboux, însă reciproca acestei propoziţii nu este adevărată.

Exerciţii rezolvate

Să se studieze continuitatea următoarelor funcţii:

320. $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x+2}}}, & \text{dacă } x \in (-\infty, \infty) - \{-2\} \\ 0, & \text{dacă } x = -2. \end{cases}$$

Aplicînd regulile generale, observăm că în orice punct $x \neq -2$ funcţia este continuă.

În punctul $x = -2$, avem

$$f(-2 + 0) = \lim_{\substack{x \to -2 \\ x > -2}} \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x+2}}}.$$

Însă

$$\lim_{\substack{x \to -2 \\ x > -2}} \frac{1}{x+2} = +\infty, \lim_{\substack{x \to -2 \\ x > -2}} 2^{\frac{1}{x+2}} = \infty,$$

deci $f(-2 + 0) = 0$.

Totodată,

$$f(-2-0) = \lim_{\substack{x \to -2 \\ x < -2}} \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x+2}}}, \lim_{x \to -2} \frac{1}{x+2} = -\infty, \lim_{\substack{x \to -2 \\ x < -2}} 2^{\frac{1}{x+2}} = 0,$$

deci $f(-2-0) = 1$.

Funcţia considerată nu are limită în $x = -2$, deci nu poate fi continuă. Însă, deoarece $f(-2 + 0) = f(-2)$, funcţia considerată este continuă la dreapta în punctul $x = -2$. Punctul $x = -2$ este punct de discontinuitate de a doua speţă.

321. $$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{-1}{x^2}}, & \textit{dacă } x \in (-\infty, \infty) - \{0\} \\ 1, & \textit{dacă } x = 0. \end{cases}$$

Deoarece pentru $x \neq 0$ funcţia este continuă, o vom studia numai în origine. Avem

$$\lim_{x \to 0} \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\infty \text{ şi } \lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0. \quad = f(0) = 1$$

Am obţinut $\lim\limits_{x \to 0} f(x) \neq f(0)$, deci funcţia nu este continuă în punctul $x = 0$; acest punct este un punct de discontinuitate de speţa întîi.

322. *Fie*

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & x \in [0, 1] \\ 3ax + 3, & x \in (1, 2]. \end{cases}$$

Să se determine constanta a, astfel încît funcţia să fie continuă pe segmentul închis [0,2]. *Să se deseneze apoi graficul funcţiei obţinute.*

Deoarece în intervalele $[0, 1)$ $(1, 2]$ funcţia este liniară, deci continuă, o vom studia numai în punctul $x = 1$. Condiţia de continuitate în punctul $x = 1$ se scrie

$$f(1) = f(1 - 0) = f(1 + 0).$$

Dar

$$f(1) = 1 + 1 = 2$$

$$f(1-0) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = \lim_{x\to 1} (x+1) = 2$$

$$f(1+0) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x) = \lim_{x\to 1} (3ax+3) = 3a+3.$$

Constanta a trebuie să satisfacă relația $2 = 3a + 3$, de unde

$$a = -\frac{1}{3}.$$

Funcția devine

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{dacă } x \in [0,1] \\ -x+3, & \text{dacă } x \in (1,2]. \end{cases}$$

Graficul ei este dat în fig. 24.

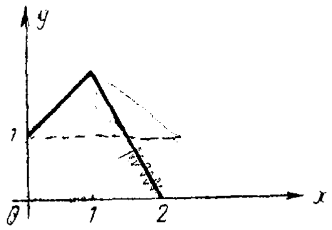

Fig. 24

323. *Fie*

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{\sin^2\alpha - \dfrac{x}{e^{1-x}}\sin\alpha + \dfrac{x^2}{4}}\,, & \textit{dacă } x\in[0,1), 0\leqslant\alpha\leqslant 2\pi \\ \dfrac{1}{2}, & \textit{dacă } x = 1 \\ \dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{1}{x^2+x+1}, & \textit{dacă } x\in(1,2]. \end{cases}$$

Pentru ce valoarea a lui α, $f(x)$ *este continuă în punctul* $x = 1$?

Radicalul are sens, oricare ar fi α, deoarece

$$\left|\frac{x}{e^{1-x}}\sin\alpha\right| \leqslant x|\sin\alpha| < \sin^2\alpha + \frac{x^2}{4}$$

(am ținut seama că $e^{1-x} \geqslant 1$, dacă $1 > x \geqslant 0$, precum și de inegalitatea $2|a||b| \leqslant a^2 + b^2$). Avem

$$f(1-0) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \sqrt{\sin^2\alpha - \frac{\sin\alpha}{e^{1-x}} + \frac{1}{4}} = \left|\sin\alpha - \frac{1}{2}\right|.$$

$$f(1+0) = \frac{3}{2}\lim_{x\to 1}\frac{1}{x^2+x+1} = \frac{1}{2}.$$

Funcția este continuă în punctul $x = 1$ numai dacă satisface ecuația

$$\left|\frac{1}{2} - \sin\alpha\right| = \frac{1}{2},$$

ale cărei soluții sînt $\alpha = 0$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $\alpha = \pi$, $\alpha = 2\pi$.

Să se studieze continuitatea și să se deseneze graficul următoarelor funcții:

324. $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} (x^n + 1)$, $0 \leqslant x \leqslant 1$.

Dacă $0 \leqslant x < 1$, $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} x^n + 1 = 1$, iar $f(1) = 2$.

Funcția este discontinuă în punctul $x = 1$, avînd o discontinuitate de prima speță. Graficul ei este dat în fig. 25.

325. $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+x^n}$.

Dacă $0 \leqslant x < 1$, $f(x) = 1$. Dacă $x > 1$, $f(x) = 0$.

Observăm că $f(1-0) = 1$, $f(1) = \frac{1}{2}$, $f(1+0) = 0$. Funcția este deci discontinuă în punctul $x = 1$. Discontinuitatea este de prima speță.

Graficul funcției este reprezentat în fig. 26.

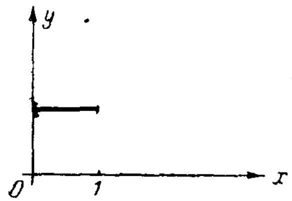

Fig. 25

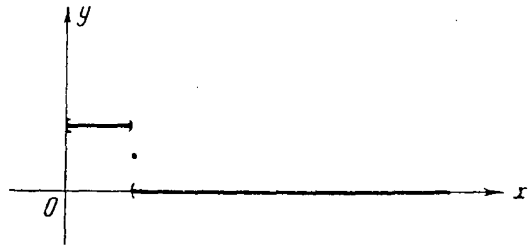

Fig. 26

326. $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x + x^2 e^{nx}}{1 + e^{nx}}$, $x\in(-\infty, \infty)$.

Dacă $x > 0$,

$$f(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{x^2 + \dfrac{x}{e^{nx}}}{1 + \dfrac{1}{e^{nx}}}.$$

Însă $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x}{e^{nx}} = 0$ oricare ar fi $x > 0$. Deci $f(x) = x^2$.

Dacă $x < 0$, $f(x) = x$. Totodată, $f(0) = 0$. Deci

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{dacă } x > 0 \\ 0\,, & \text{dacă } x = 0 \\ x\,, & \text{dacă } x < 0. \end{cases}$$

Funcția este continuă pe toată dreapta. Ea este reprezentată în fig. 27.

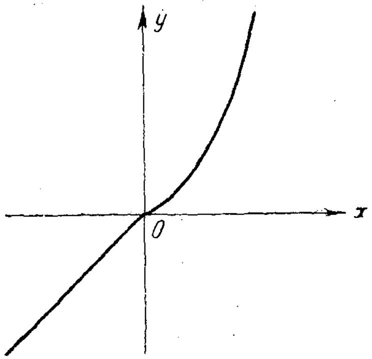

Fig. 27

Să se studieze continuitatea următoarelor funcții:

327. $f(x) =$

$$= \begin{cases} \operatorname{arctg} \dfrac{\pi}{2-x}, & \text{dacă } x \neq 2 \\ \alpha, & \text{dacă } x = 2,\ \alpha = \text{const.} \end{cases}$$

Avem

$$f(2+0) = \lim_{\substack{x\to 2\\ x>2}} \operatorname{arctg} \frac{\pi}{2-x}.$$

Însă $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} \dfrac{\pi}{2-x} = -\infty$. Deci $f(2+0) = -\dfrac{\pi}{2}$.

Deoarece $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} \dfrac{\pi}{2-x} = \infty$, $f(2-0) = \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} \operatorname{arctg} \dfrac{\pi}{2-x} = \dfrac{\pi}{2}$.

Deci oricum am alege constanta α, funcția nu poate fi continuă în $x = 2$. Ea este continuă pentru $x \neq 2$.

328. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{|x|}, & \textit{dacă } x \neq 0 \\ 1, & \textit{dacă } x = 0. \end{cases}$

Este necesar să studiem continuitatea funcției numai în origine. Avem

$$f(0+0) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\sin x}{|x|} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$f(0-0) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{\sin x}{|x|} = \lim_{x\to 0} \left(-\frac{\sin x}{x}\right) = -1$$

$$f(0) = 1.$$

Prin urmare funcția nu este continuă în origine. Discontinuitatea este de prima speță.

329. $f(x) = xE(x)$, *definită pentru* $x \geqslant 0$.

Conform definiției lui $E(x)$, avem

$$E(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x \in [0, 1) \\ 1, & \text{dacă } x \in [1, 2) \\ \dots\dots\dots & \\ n-1, & \text{dacă } x \in [n-1, n) \\ n, & \text{dacă } x \in [n, n+1) \\ \dots\dots\dots & \end{cases}$$

$$f(x) = xE(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x \in [0, 1) \\ x, & \text{dacă } x \in [1, 2) \\ 2x, & \text{dacă } x \in [2, 3) \\ \dots\dots\dots & \\ (n-1)\,x, & \text{dacă } x \in [n-1, n) \\ nx, & \text{dacă } x \in [n, n+1) \\ \dots\dots\dots & \end{cases}$$

Observăm că funcția este continuă în interiorul fiecăruia din intervalele $(n, n+1)$, $n = 1, 2, \dots$ Rămîne de cercetat continuitatea la capetele intervalelor, adică în punctele $x = n$, $n = 1, 2, 3, \dots$

Însă în punctul $x = n$ avem

$$f(n-0) = \lim_{\substack{x\to n\\ x<n}} f(x) = \lim_{x\to n} (n-1)x = n\,(n-1)$$

$$f(n+0) = \lim_{\substack{x\to n\\ x>n}} f(x) = \lim_{x\to n} nx = n^2$$

și

$$f(n) = n^2,$$

ceea ce stabilește discontinuitatea funcției în punctul $x = n$. Funcția este, însă, continuă la dreapta în punctul $x = n$.

330. $f(x) = x^2 - E(x^2)$.

Avem

$$E(x^2) = \begin{cases} 0, \text{ dacă } x \in [0,1) \\ 1, \text{ dacă } x \in [1, \sqrt{2}) \\ 2, \text{ dacă } x \in [\sqrt{2}, \sqrt{3}) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ n-1, \text{ dacă } x \in [\sqrt{n-1}, \sqrt{n}) \\ \quad n, \text{ dacă } x \in [\sqrt{n}, \sqrt{n+1}) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Deci

$$f(x) = \begin{cases} x^2, \qquad \text{dacă } x \in [0,1) \\ x^2 - 1, \text{ dacă } x \in [1, \sqrt{2}) \\ x^2 - 2, \text{ dacă } x \in [\sqrt{2}, \sqrt{3}) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x^2 - n + 1, \text{ dacă } x \in [\sqrt{n-1}, \sqrt{n}) \\ x^2 - n, \qquad \text{dacă } x \in [\sqrt{n}, \sqrt{n-1}) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Deoarece funcţia este continuă în intervalele deschise $(\sqrt{n}, \sqrt{n+1})$, rămîne să-i studiem continuitatea în $x = \sqrt{n}$, $n = 1, 2, \ldots$

Însă, ţinînd seama că

$$f(\sqrt{n} - 0) = \lim_{x\to\sqrt{n}} (x^2 - n + 1) = 1,$$

$$f(\sqrt{n} + 0) = \lim_{x\to\sqrt{n}} (x^2 - n) = 0, \ f(\sqrt{n}) = 0,$$

rezultă că funcţia este discontinuă în $x = \sqrt{n}$, avînd o discontinuitate de prima speţă în acest punct. Funcţia este continuă la dreapta în punctul $x = \sqrt{n}$.

331. *Fie*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{1 - \cos x^2}}{1 - \cos x}, \ \textit{dacă } x \in -\left[\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right] - \{0\} \\ \qquad \alpha, \qquad \textit{dacă } x = 0. \end{cases}$$

Cum trebuie ales α pentru ca funcţia să fie continuă în origine?

Trebuie ca $\lim\limits_{x\to0} f(x) = \alpha$, adică $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sqrt{1 - \cos x^2}}{1 - \cos x} = \alpha$.

Însă

$$\lim_{x\to0} \frac{\sqrt{1 - \cos x^2}}{1 - \cos x} = \lim_{x\to0} \frac{\sqrt{2\sin^2 \frac{x^2}{2}}}{2\sin^2 \frac{x}{2}} = \lim_{x\to0} \frac{\sqrt{2}\left|\sin\frac{x^2}{2}\right|}{2\sin^2\frac{x}{2}}.$$

Întrucît pentru orice valoare a lui x, $\frac{x^2}{2} > 0$ şi considerînd $\frac{x^2}{2} \leqslant \pi$, avem $\left|\sin\frac{x^2}{2}\right| = \sin\frac{x^2}{2}$.

Deci

$$\lim_{x\to0} f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{x\to0} \frac{\sin\frac{x^2}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{x\to0} \frac{2\,\dfrac{\sin\frac{x^2}{2}}{\frac{x^2}{2}}}{\dfrac{\sin^2\frac{x}{2}}{\frac{x^2}{4}}} = \sqrt{2}.$$

Pentru $\alpha = \sqrt{2}$ funcţia este continuă în întreg intervalul închis $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

332. *Folosind proprietatea lui Darboux pentru funcţii continue, să se arate că funcţia $f(x) = x^5 - 3x - 1$ se anulează cel puţin o dată între punctele $x = 1$ şi $x = 2$.*

Observăm că

$f(1) = 1^5 - 3\cdot1 - 1 = -3 < 0$, $\ f(2) = 32 - 6 - 1 = > 0$.

Conform teoremei lui Darboux, există cel puţin un punct $\xi \in (1, 2)$, astfel că $f(\xi) = 0$.

333. *Să se arate că funcţia $f(x) = x\cdot2^x - 1$ se anulează într-un punct $0 < \xi < 1$.*

Avem

$$f(1) = 1, \ f(0) = -1.$$

Există, deci $\xi \in (0,1)$ astfel ca $f(\xi) = 0$.

334. *În partea introductivă a capitolului s-a afirmat că nu orice funcție care se bucură de proprietatea lui Darboux este și continuă.*

Următorul exemplu dat de Lebesgue confirmă acest lucru *).

Să considerăm intervalul $(0,1)$. Orice punct $x \in (0,1)$ va fi scris în scriere zecimală astfel

$$x = 0,\ a_1\ a_2\ a_3\ a_4 \ldots$$

Fie f funcția definită în intervalul $(0,1)$ în modul următor:

1) dacă șirul zecimalelor de rang impar: $a_1, a_3, a_5, \ldots$ este, începînd de la un anumit rang $2n-1$, periodic, atunci:

$$f(x) = 0,\ a_{2n}\ a_{2n+2}\ a_{2n+4} \ldots$$

2) dacă șirul precedent nu este periodic, atunci:

$$f(x) = 0.$$

Vom arăta că în orice interval (α, β) de lungime δ, $0 < \alpha < \beta < 1$, funcția f trece prin toate valorile cuprinse între zero și unu, inclusiv valorile zero și unu.

Într-adevăr, fie $y_0 \in [0,1]$ pe care îl vom scrie în scriere zecimală sub forma

$$y_0 = 0,\ b_1\ b_2\ b_3 \ldots$$

(dacă $y_0 = 1$, atunci vom scrie $y_0 = 0{,}999 \ldots$).

Vom arăta că există un număr $x_0 \in (\alpha, \beta)$, astfel încît să avem $f(x_0) = y_0$.

Fie x un număr arbitrar aparținînd intervalului (α, β), în scriere zecimală:

$$x = 0,\ a_1\ a_2\ a_3 \ldots$$

Să punem $\delta = \min\,[|\alpha - x|,\ |\beta - x|]$ și să considerăm șirul $a_1, a_3, a_5, \ldots$

Dacă acest șir nu este, începînd de la un anumit rang $2n-1$, periodic, putem construi un număr $x' \in (\alpha, \beta)$:

$$x' = 0,\ a_1'\ a_2'\ a_3' \ldots,$$

astfel încît șirul zecimalelor de rang impar a_1', a_3', a_5' să se bucure de această proprietate.

*) Exemplul este reprodus după acad. *Miron Nicolescu*, Analiză matematică, vol. II, Editura tehnică, București, 1958, p. 192.

Pentru aceasta este suficient să determinăm numărul natural n prin condiția

$$\frac{1}{10^{2n-2}} < \frac{\delta}{2}$$

și să schimbăm în șirul $a_1, a_3, a_5, \ldots$ cifrele, începînd de la rangul $2n-1$, prin cifrele unui șir periodic oarecare: $a_{2n-1}', a_{2n+1}', \ldots$ Luînd

$$x' = 0,\ a_1\ a_2 \ldots a_{2n-2}\ a_{2n-1}'\ a_{2n}\ a_{2n+1}' \ldots,$$

vom avea

$$|x' - x| < \frac{1}{10^{2n-2}} < \frac{\delta}{2},$$

deci $x' \in (\alpha, \beta)$.

Invers, dacă șirul de zecimale $a_1, a_3, a_5 \ldots$ este periodic, putem strica perioada înlocuind, de exemplu, pe a_{2n-1} printr-o altă cifră a_{2n-1}' și obținem un număr

$$x' = 0,\ a_1 a_2 \ldots a_{2n-2}\ a_{2n-1}'\ a_{2n} \ldots$$

pentru care

$$|x - x'| < \frac{1}{10^{2n-2}} < \frac{\delta}{2};$$

deci $x' \in (\alpha, \beta)$.

Prin urmare oricare ar fi intervalul $(\alpha, \beta) \subset [0,1]$, putem găsi în acest interval un număr x care să se bucure, fie de proprietatea indicată la pct. (1), fie de proprietatea indicată la pct. (2).

În asemenea condiții, dacă $y_0 = 0$, vom lua în intervalul (α, β) un număr x_0 care să îndeplinească condiția (2) și vom avea $f(x_0) = y_0 = 0$.

Dacă $0 < y_0 \leqslant 1$, vom lua în (α, β) un număr x care să îndeplinească condiția (1):

$$x = 0,\ a_1\ a_2\ a_3 \ldots$$

Numărul δ avînd semnificația de mai înainte, vom considera numărul:

$$x_0 = 0,\ a_1\ a_2 \ldots a_{2n-1} b_1\ a_{2n+1}\ b_2\ a_{2n+3} \ldots,$$

în care n este determinat prin condiția

$$\frac{1}{10^{2n-2}} < \delta.$$

Atunci

$$|x - x_0| < \frac{1}{10^{2n-2}} < \delta,$$

deci $x_0 \in (\alpha, \beta)$.

Conform definiției, vom avea

$$f(x_0) = y_0$$

și afirmația noastră este justificată. Funcția considerată se bucură de proprietatea lui Darboux, deoarece în orice interval (α, β) cu $f(\alpha) \neq f(\beta)$ această funcție trece prin toate valorile cuprinse între $f(\alpha)$ și $f(\beta)$.

Funcția considerată este însă discontinuă în orice punct al intervalului $(0, 1)$, deoarece în orice interval $(\alpha, \beta) \subset [0, 1]$ oscilația sa este egală cu unu.

335. *Dacă două funcții $f_1(x)$ și $f_2(x)$ au în intervalul (α, β) proprietatea lui Darboux, atunci suma lor $s(x) = f_1(x) + f_2(x)$ va mai avea în intervalul (α, β) această proprietate?*

Răspunsul este negativ. Într-adevăr, fie

$$f_1(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ \sin\frac{1}{x}, & 0 < x \leqslant 1, \end{cases} \qquad f_2(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ -\sin\frac{1}{x}, & 0 < x \leqslant 1. \end{cases}$$

Lăsăm pe seama cititorului să verifice că funcțiile $f_1(x)$ și $f_2(x)$ au proprietatea lui Darboux în intervalul $[0, 1]$.

Constatăm însă ușor că funcția sumă:

$$s(x) = f_1(x) + f_2(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x \leqslant 1 \\ 2, & x = 0 \end{cases}$$

nu se mai bucură de această proprietate.

Dintr-un exemplu*) dat de M. Iosifescu reiese că dacă două funcții $f_1(x)$, $f_2(x)$ au în intervalul (α, β) proprietatea lui Darboux, funcția produs $f_1(x) f_2(x)$ nu are întotdeauna această proprietate.

Să se studieze continuitatea funcțiilor compuse $f \bigcirc g$ și $g \bigcirc f$ în următoarele cazuri:

336. $f(x) = \text{sign } x$, $g(x) = 1 + x^2$.

Reamintim că

$$\text{sign } x = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x > 0 \\ 0, & \text{dacă } x = 0 \\ -1, & \text{dacă } x < 0. \end{cases}$$

*) Comunicările Academiei R.P.R., tom. VII, 1957, nr. 3, p. 319—321.

Deoarece oricare ar fi x, $g(x) > 0$, funcția $f[g(x)] = 1$ este continuă pe toată dreapta.

$$\text{Dacă: } \begin{cases} x > 0, \; f(x) = 1, & g[f(x)] = 1 + [f(x)]^2 = 2 \\ x = 0, \; f(x) = 0, & g[f(x)] = 1 \\ x < 0 \;\; f(x) = -1, & g[f(x)] = 1 + (-1)^2 = 2. \end{cases}$$

Prin urmare $g[f(x)]$ este discontinuă în $x = 0$.

337. $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } |x| \leqslant 1 \\ 0, & \text{dacă } |x| > 1 \end{cases}$, $\quad g(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } |x| \leqslant 1 \\ 0, & \text{dacă } |x| > 1. \end{cases}$

Putem scrie

$$f(x) = g(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0, & \text{dacă } x > 1, \text{ sau } x < -1. \end{cases}$$

Funcția $f[g(x)]$ este definită în modul următor

$$f[g(x)] = \begin{cases} 1, & \text{dacă } -1 \leqslant g(x) \leqslant 1 \\ 0, & \text{dacă } g(x) > 1 \text{ sau } g(x) < -1. \end{cases}$$

Însă, dacă $-1 < x < 1$, $g(x) = 1$, deci $f[g(x)] = 1$, iar dacă $x < -1$ sau $x > 1$, $g(x) = 0$, iar $f[g(x)] = 1$. Deci oricare ar fi x, $f[g(x)] = g[f(x)] = 1$.

Observăm că deși ambele funcții sînt discontinue în $x = \pm 1$, totuși funcția compusă este continuă pe toată dreapta.

338. *Funcția*

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \textit{dacă } x \textit{ este rațional} \\ -1, & \textit{dacă } x \textit{ este irațional} \end{cases}$$

este discontinuă în orice punct de dreaptă.

Într-adevăr, dacă x' este rațional, în orice vecinătate a lui se va găsi un punct irațional x''. Deci diferența $f(x') - f(x'') = 1$ și nu poate fi făcută oricît de mică. Se raționează analog în cazul cînd x' este irațional.

339. *Poate fi suma a două funcții, ambele discontinue într-un punct, o funcție continuă în acel punct?*

Răspunsul este afirmativ, după cum ne arată următorul exemplu

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x \text{ este rațional} \\ -1, & \text{dacă } x \text{ este irațional,} \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} -1, & \text{dacă } x \text{ este rațional} \\ 1, & \text{dacă } x \text{ este irațional.} \end{cases}$$

Funcțiile considerate sînt ambele discontinue în orice punct de pe dreaptă, însă suma lor $f(x) + g(x) \equiv 0$ este o funcție continuă pe toată dreapta.

340. *Poate fi $f(x) + g(x)$ continuă într-un punct x_0 în care $f(x)$ este continuă, iar $g(x)$ este discontinuă?*

Răspunsul este negativ. Dacă $s(x) = f(x) + g(x)$ ar fi continuă în x_0, ar rezulta că $g(x) = s(x) - f(x)$ ar fi diferența a două funcții continue în x_0, deci continuă în x_0, ceea ce contrazice ipoteza.

341. *Ce se poate spune despre produsul a două funcții discontinue într-un punct?*

Luînd aceleași funcții ca în exercițiul 339, obținem $f(x)g(x) = -1$.

Deci produsul a două funcții discontinue într-un punct poate fi o funcție continuă în acel punct.

342. *Fie funcția lui Riemann*

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x \text{ este irațional, sau } x = 0,\ x \in [0, 1] \\ \dfrac{1}{q}, & \text{dacă } x = \dfrac{p}{q} \text{ este o fracție ireductibilă} \neq 0. \end{cases}$$

Să se arate că F este discontinuă în orice punct rațional $x = \dfrac{p}{q}$, $x \neq 0$, și este continuă în orice punct irațional.

Funcția F este discontinuă în orice punct rațional $x = \dfrac{p}{q}$, $x \neq 0$. Într-adevăr, oricare ar fi δ, în intervalul $\left(\dfrac{p}{q} - \delta, \dfrac{p}{q} + \delta\right)$ există un punct irațional ξ și avem $\left|F(\xi) - F\left(\dfrac{p}{q}\right)\right| = \dfrac{1}{q}$.

În orice punct irațional ξ, F este continuă. Fie n un număr natural astfel ca $\dfrac{1}{n} < \varepsilon$.

Pentru orice număr natural k, există un număr întreg l, astfel încît

$$\frac{l}{k} < \xi < \frac{l+1}{k}.$$

Vom nota cu I_k un interval (a_k, b_k), astfel încît

$$\frac{l}{k} < a_k < \xi < b_k < \frac{l+1}{k}.$$

Evident, intervalul I_k nu conține nici un punct rațional cu numitorul k. Vom construi succesiv intervalele $I_1, I_2, \ldots, I_n$ și vom nota cu $c = max(a_k)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, $d = min(b_k)$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Intervalul (c, d) nu conține nici un punct de forma $x = \dfrac{p}{q}$, $q = 1, 2, \ldots, n$ $\left(\dfrac{p}{q}\text{ fracție ireductibilă}\right)$ și orice punct rațional care-i aparține este de forma $x = \dfrac{p}{q}$, $q = n+1, n+2, \ldots$ pentru care $F(x) = \dfrac{1}{q}$.

Prin urmare $|F(\xi) - F(x)| = |F(x)| = \dfrac{1}{2} < \dfrac{1}{n} < \varepsilon$ pentru orice $x \in (c, d)$

Exerciții propuse spre rezolvare

Să se determine valoarea constantei α astfel ca următoarele funcții să fie continue:

343. $f(x) = \begin{cases} \sqrt{\alpha^2 - 2\alpha x + x^2}, & 1 \leqslant x < 2 \\ \alpha x + 3, & 2 \leqslant x < 3. \end{cases}$ **R.** $\alpha = -\dfrac{1}{3}$.

344. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{6\sin\alpha(x-1)}{x-1}, & 0 \leqslant x < 1 \\ -\alpha + 5x, & 1 \leqslant x \leqslant 2. \end{cases}$ **R.** $\alpha = \dfrac{5}{7}$.

345. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x-2} - 1}{x-3}, & 2 \leqslant x < 3 \\ \dfrac{\alpha x}{9} + \dfrac{1}{3}, & 3 \leqslant x \leqslant 4. \end{cases}$ **R.** $\alpha = \dfrac{1}{2}$.

Să se studieze continuitatea următoarelor funcții:

346. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{\sin x} - 1}{x - \dfrac{\pi}{2}}, & x \neq \dfrac{\pi}{2} \\ 1, & x = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$ **R.** Discontinuă în punctul $x = \dfrac{\pi}{2}$.

347. $f(x) = \begin{cases} e^x + x - 1, & x \leqslant 1 \\ x^{\frac{1}{x-1}}, & x > 1. \end{cases}$ **R.** Continuă.

348. $f(x) = \begin{cases} (x + e^x)^{\frac{1}{x}}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0. \end{cases}$ **R.** Discontinuă în punctul $x = 0$.

349. *Cum trebuie definită funcția*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin 4x}{5x}, & -1 \leqslant x < 0 \\ \dfrac{x^2 + 2x}{\operatorname{tg} 5(x^2 + 2x)} + \dfrac{3}{5}, & 0 < x \leqslant 1 \end{cases}$$

în punctul $x = 0$ pentru ca să fie continuă în acest punct?

R. $f(0) = \frac{4}{5}$.

350. *Cum trebuie definită funcția*

$$f(x) = \begin{cases} 2^{\operatorname{tg} x \operatorname{arctg} \frac{1}{x}}, & -1 \leqslant x < 0 \\ 2^{\frac{\sqrt{1+x}-1}{xe^x}}, & x > 0 \end{cases}$$

în punctul $x = 0$ pentru ca să fie continuă în acest punct?

R. $f(0) = 0$.

351. *Să se studieze continuitatea următoarelor funcții:*

a) $f(x) = X[X(x)]$ *dacă* $X(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x \text{ este rațional} \\ 1, & \text{dacă } x \text{ este irațional} \end{cases}$

R. Continuă.

b) $g(x) = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \text{ este rațional} \\ -x, & \text{dacă } x \text{ este irațional} \end{cases}$ $x \in (-\infty, \infty)$,

R. Continuă numai în origine.

c) $f(x) = X(\operatorname{sign} x)$, $x \in (-\infty, \infty)$. **R.** Continuă.

d) $f(x) = \operatorname{sign}[X(x)]$, $x \in (-\infty, \infty)$. **R.** Continuă.

e) $f(x) = \operatorname{sign}[g(x)]$, $x \in (-\infty, \infty)$. **R.** Discontinuă în orice punct.

f) $f(x) = g[F(x)]$, $x \in [0, 1]$, *unde* $F(x)$ *este funcția lui Riemann.*

R. Continuă.

g) $f(x) = X[F(x)]$, $x \in [0, 1]$. **R.** Continuă.

h) $f(x) = X(x)\, F(x)$, $x \in [0, 1]$.

R. Discontinuă în punctele raționale.

i) $f(x) = \operatorname{sign}^2[F(x)]$, $x \in [0, 1]$. **R.** Discontinuă în orice punct.

352. *Să se cerceteze continuitatea funcției*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x \neq \dfrac{1}{n} \\ 1, & \text{dacă } x = \dfrac{1}{n}, \end{cases} \quad x \in [0, 1].$$

R. Funcția este discontinuă în punctele $x = \frac{1}{n}$, $n \in N$ și $x = 0$.

353. *Fie funcția f definită pe $(0, \infty)$, egală în fiecare punct $x \neq \frac{2n+1}{2}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, cu diferența dintre x și numărul întreg cel mai apropiat de x și nulă în punctele $x = \frac{2n+1}{2}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ Să se deseneze graficul funcției și să se studieze continuitatea ei.*

R. Funcția este discontinuă în punctele $x = \frac{2n+1}{2}$, $n = 1, 2, \ldots$, avînd în aceste puncte discontinuități de speța întîi.

3.3. Funcții uniform continue

O funcție f definită pe un interval I este *uniform continuă* pe I, dacă oricare ar fi $\varepsilon > 0$, există un număr $\delta(\varepsilon) > 0$, astfel încît oricare ar fi punctele x' și x'' aparținînd intervalului I astfel ca $|x' - x''| < \delta(\varepsilon)$ să avem $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

Proprietăți. 1) Orice funcție uniform continuă pe I este continuă pe I, fără ca afirmația reciprocă să fie adevărată.

2) O funcție continuă pe un interval compact I este uniform continuă pe I.

3) O funcție uniform continuă pe un interval mărginit este mărginită pe acel interval, fără ca reciproca să fie adevărată.

Exerciții rezolvate

Să se studieze continuitatea uniformă a următoarelor funcții:

354. $f(x) = \sin x^2$, $x \in (-\infty, \infty)$.

Observăm că funcția este mărginită și continuă pe toată axa.

Funcția nu este însă uniform continuă. Avem

$$\sin x^2 = \begin{cases} 1, \text{ dacă } x^2 = (4k+1)\frac{\pi}{2}, & k = 0, 1, 2, \ldots \\ -1, \text{ dacă } x^2 = (4k+3)\frac{\pi}{2}, & k = 0, 1, 2, \ldots \\ 0, \text{ dacă } x^2 = k\pi, & k = 0, 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Fie

$$x' = \sqrt{(4k+3)\frac{\pi}{2}},\quad x'' = \sqrt{(4k+1)\frac{\pi}{2}},\quad x' - x'' =$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{(4k+3)\frac{\pi}{2}} + \sqrt{(4k+1)\frac{\pi}{2}}}.$$

Mai observăm că pentru k suficient de mare punctele x' și x'' pot fi luate oricît de apropiate vrem. Însă,

$$|f(x') - f(x'')| = \left|\sin (4k+1)\frac{\pi}{2} - \sin (4k+3)\frac{\pi}{2}\right| = 2.$$

Am arătat că există $\varepsilon = 2$ și punctele $x' = \sqrt{(4k+3)\frac{\pi}{2}}$, $x'' = \sqrt{(4k+1)\frac{\pi}{2}}$ situate la distanță oricît de mică, astfel că $|f(x') - f(x'')| = 2$. Deci funcția nu este uniform continuă dacă $I = (-\infty, \infty)$.

Însă, datorită proprietății (2), funcția este uniform continuă pe orice interval compact.

~~355.~~ $f(x) = \dfrac{x}{x+1} + x,\ 0 \leqslant x < \infty.$

Observăm că funcția este continuă și nemărginită în intervalul considerat. Vom arăta că este uniform continuă.

Fie $x_1, x_2 \geqslant 0$. Avem

$$|f(x_1) - f(x_2)| = \left|\frac{x_1}{1+x_1} + x_1 - \frac{x_2}{1+x_2} - x_2\right| = |(x_1 - x_2) +$$

$$+ (x_1 - x_2)\left[1 + \frac{x_2 - x_1}{(1+x_1)(1+x_2)}\right] \leqslant |x_1 - x_2|\left[1 + \frac{|x_2 - x_1|}{(1+x_1)(1+x_2)}\right] <$$

$$|x_1 - x_2|\,[1 + |x_2 - x_1|] < \delta(1+\delta) \leqslant \varepsilon.$$

Ultimele inegalități au loc dacă

$$|x_2 - x_1| < \delta = \frac{-1 + \sqrt{1+4\varepsilon}}{2} = \frac{2\varepsilon}{\sqrt{1+4\varepsilon}+1}.$$

356. *Este uniform continuă funcția*

$$f(x) = \frac{x}{x+1} + x$$

în intervalul $(-1, \infty)$?

Răspunsul este negativ. Într-adevăr, să considerăm punctele $x_1 = -\dfrac{n+1}{n+2}$, $x_2 = -\dfrac{n}{n+1}$. Avem $|x_1 - x_2| = \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$. Punctele x_1 și x_2 sînt oricît de apropiate pentru n suficient de mare, însă $f(x_1) - f(x_2) = 1 + \dfrac{1}{(n+1)(n+2)} > 1$.

Deci funcția nu este uniform continuă.

Exerciții propuse spre rezolvare

~~357.~~ *Să se studieze continuitatea uniformă a următoarelor funcții:*

a) $f(x) = \ln x$, $\quad 0 < x < 1;\ \varepsilon \leqslant x \leqslant e$. **R.** Nu, da.

b) $f(x) = e^x \cos \dfrac{1}{x}$, $\quad 0 < x < 1$. **R.** Nu.

c) $f(x) = \sin \dfrac{1}{x}$, $\quad 0 < x < \dfrac{1}{\pi}$. **R.** Nu.

d) $f(x) = \dfrac{1}{\sin x}$, $\quad 0 < x \leqslant \dfrac{\pi}{2}$. **R.** Nu.

e) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - x - 2}$, $\quad 0 \leqslant x \leqslant 1$. **R.** Da.

358. *Să se arate că suma și produsul unui număr finit de funcții uniform continue este o funcție uniform continuă.* pe un interval

~~359.~~ *Să se cerceteze continuitatea uniformă a următoarelor funcții:*

a) $f(x) = x \sin^2 x^2, x \in (-\infty, \infty)$. **R.** Nu este uniform continuă.

b) $f(x) = x \cos^2 x^2, x \in (-\infty, \infty)$. **R.** Nu este uniform continuă.

c) *Să se formeze apoi funcția* $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, $x \in (-\infty, \infty)$ *și să se tragă concluzia.*

360. *Fiind dat* $\varepsilon > 0$, *să se determine un* $\delta(\varepsilon)$ *satisfăcînd condiția de continuitate uniformă pentru următoarele funcții:*

a) $f(x) = \sqrt{2x+3}$, $\ x \in [0, 2]$.

b) $f(x) = \sin x + \cos x$, $\ x \in (-\infty, \infty)$.

c) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 2}$, $x \in [1, \infty)$.

d) $f(x) = \sqrt[n]{x}$, $\quad x \geqslant 1$.

361. *Să se calculeze modulul de continuitate*) pentru următoarele funcții:*

a) $f(x) = x$ *pe segmentul* $[0,1]$. **R.** t.
b) $f(x) = x^2$ *pe segmentul* $[0,1]$. **R.** $(2 - t)\, t$.
c) $f(x) = \sqrt{x}$ *pe segmentul* $[0,1]$. **R.** $\sqrt{t}$.

362. *Funcția f definită pe $[a, b]$ este uniform continuă pe $[a, b]$ dacă și numai dacă* $\lim\limits_{t \to 0} \omega(t) = 0$.

*) Mărimea $\omega(t, a, b, f) = \omega(t) = \sup\limits_{\substack{|x-y| \leqslant t \\ x, y \in [a, b]}} |f(y) - f(x)|$ se numește *modulul de continuitate* al funcției f pe $[a, b]$.

4. DERIVATE

4.1. Derivata unei funcții

Fie funcția $f : I \to R$ definită pe intervalul I și x_0 un punct din I. Limita

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

dacă există, se numește *derivata funcției în punctul* x_0. Derivata $f'(x_0)$ se mai notează $\dfrac{\mathrm{d}f(x_0)}{\mathrm{d}x}$ sau $\mathrm{D}f(x_0)$.

Dacă $f'(x_0)$ este finită, se spune că *f este derivabilă în punctul x_0*.

Dacă f este derivabilă în x_0, atunci f este continuă în x_0 însă reciproca nu este adevărată.

Spunem că funcția f este derivabilă pe I dacă este derivabilă în fiecare punct din I.

Funcția $f' : I \to R$ definită prin egalitatea $(f')(x) = f'(x)$ se numește *funcția derivată a lui f sau derivata lui f*.

Limitele:

$$f'_s(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{și} \quad f'_d(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

dacă există, se numesc respectiv *derivata la stînga și derivata la dreapta* a funcției în punctul x_0.

Funcția f are derivată în x_0 dacă și numai dacă are derivate laterale egale în x_0.

Interpretare geometrică. Dacă există derivata $f'(x_0)$, graficul funcției f are tangentă în punctul $M(x_0, f(x_0))$. Tangenta este paralelă cu axa Oy dacă derivata $f'(x_0)$ este infinită. Dacă derivata $f'(x_0)$ este finită, tangenta nu este paralelă cu axa Oy, iar coeficientul său unghiular este egal cu $f'(x_0)$.

Operații. Dacă $f,\ g: I \to R$ sînt derivabile în x_0 (sau pe I) atunci funcțiile $f+g$, $f-g$, αf, fg și $\frac{f}{g}$ (dacă $g(x_0) \neq 0$) sînt derivabile în x_0 (respectiv pe I) și:

$$(f+g)' = f' + g';\quad (f-g)' = f' - g';\quad (\alpha f)' = \alpha f';$$

$$(fg)' = f'g + fg';\quad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}.$$

Dacă funcțiile f și g sînt derivabile de n ori în x_0 (sau pe I), atunci funcția $f\cdot g$ este derivabilă de n ori în x_0 (respectiv pe I) și:

$$(fg)^{(n)} = f^{(n)}g + C_n^1 f^{(n-1)}g' + C_n^2 f^{(n-2)}g'' + \ldots + fg^{(n)} =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} C_n^i f^{(n-i)} g^i$$

(formula lui Leibniz).

Fie funcțiile $u: I \to J$ și $f: J \to R$ și funcția compusă $f \circ u: I \to R$. Dacă u este derivabilă în $x_0 \in I$ (respectiv pe I) și f este derivabilă în punctul corespunzător $y_0 = f(x_0)$ (respectiv pe J), atunci funcția compusă $f \circ u$ este derivabilă în x_0 (respectiv pe I) și

$$(f \circ u)'(x_0) = f'(u(x_0))\, u'(x_0).$$

Fie $f: I \to J$ o funcție strict monotonă cu $f(I) = J$. Dacă f este derivabilă într-un punct $x_0 \in I$ (respectiv pe I) și dacă $f'(x_0) \neq 0$ (respectiv $f'(x) \neq 0$ pentru $x \in I$), atunci funcția inversă $\overset{-1}{f}$ este derivabilă în punctul corespunzător $y_0 = f(x_0) \in J$ (respectiv pe J) și $\left(\overset{-1}{f}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$, respectiv $\left(\overset{-1}{f}\right)'(y) = \frac{1}{f'(x)}$ cu $y = f(x)$ sau $x = \overset{-1}{f}(y)$.

În cele ce urmează presupunem cunoscute cititorului derivatele funcțiilor elementare.

Exerciții rezolvate

Pornind de la definiție, să se calculeze derivatele următoarelor funcții, în punctele specificate:

363. $f(x) = \sqrt{5x+1}$ *în punctul* $x = 3$.

Avem

$$f'(3) = \lim_{x\to 3} \frac{f(x) - f(3)}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{5x+1} - 4}{x-3} =$$

$$= \lim_{x\to 3} \frac{5x+1-16}{(x-3)\left[\sqrt{5x+1}+4\right]} = \frac{5}{8}.$$

364. $f(x) = \ln(x^2+5x)$ *în punctul* $x = 1$.

Deducem

$$f'(1) = \lim_{x\to 1} \frac{\ln(x^2+5x) - \ln 6}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\ln \frac{x^2+5x}{6}}{x-1} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \ln \left(\frac{x^2+5x}{6}\right)^{\frac{1}{x-1}} = \lim_{x\to 1} \ln \left[1 + \left(\frac{x^2+5x}{6}\right) - 1\right]^{\frac{1}{x-1}} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \ln \left\{\left[1 + \frac{x^2+5x-6}{6}\right]^{\frac{6}{x^2+5x-6}}\right\}^{\frac{x^2+5x-6}{6(x-1)}} = \quad ?$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{x^2+5x-6}{6(x-1)} = \frac{7}{6}.$$

365. $f(x) = \sin(2x^2+1)$ *în punctul* $x = 2$.

Avem

$$f'(2) = \lim_{x\to 2} \frac{\sin(2x^2+1) - \sin 9}{x-2} =$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{2\sin\frac{2x^2+1-9}{2}\cos\frac{2x^2+1+9}{2}}{x-2} =$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{2\sin(x^2-4)\cos(x^2+5)}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{2\sin(x^2-4)}{x^2-4}(x+2) \times$$

$$\times \cos(x^2+5) = 8\cos 9.$$

366. $f(x) = \arcsin(x-1)$ *în punctul* $x = 1$.

Deducem

$$f'(1) = \lim_{x\to 1} \frac{\arcsin(x-1)}{x-1}.$$

Notînd cu $z = \arcsin(x-1)$, obținem $\sin z = x - 1$. Prin urmare, $f'(1) = \lim_{z\to 0} \frac{z}{\sin z} = 1$.

367. $f(x) = \operatorname{tg} x$ *în punctul* $x = 45°$ (x *măsura arcului în grade*).

Deducem

$$\lim_{x\to 45°} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} 45°}{x-45°} = \frac{1}{\cos 45°}\lim_{x\to 45°}\frac{1}{\cos x}\cdot\lim_{x\to 45°}\frac{\sin(x-45°)}{x-45°} =$$

$$= \frac{1}{\cos^2 45°}\cdot\frac{\pi}{180}.$$

Însă $\cos^2 45° = \frac{1}{2}$, deci $\frac{1}{\cos^2 45°} = 2$; așadar derivata este $\frac{\pi}{90}$.

Folosind regulile obișnuite de calcul, să se deriveze următoarele funcții:

368. $f(x) = \sqrt{\frac{x^2-1}{x^2+1}}$, $|x| \geqslant 1$.

Funcția este derivabilă pentru $|x| > 1$. Notăm $u(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$ și derivăm funcția obținută ținînd seama de regula de derivare a funcțiilor compuse:

$$f'(x) = \left(\sqrt{u(x)}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{u(x)}}\,u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2+1}}}\cdot\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)' =$$

$$= \frac{\frac{2x(x^2+1)-2x(x^2-1)}{(x^2+1)^2}}{2\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2+1}}} = \frac{2x}{(x^2+1)^{3/2}\sqrt{x^2-1}}.$$

369. a) $f(x) = \sqrt[3]{\frac{1+x^3}{1-x^3}}$, $x \neq 1$.

b) $f(x) = \sqrt[3]{(1+\sqrt[3]{x^2})}$.

a) Funcția este derivabilă pentru $x \neq 1$. Notăm $u(x) = \frac{1+x^3}{1-x^3}$ și avem $f(x) = [u(x)]^{1/3}$. Deci

$$f'(x) = \frac{1}{3}\,[u(x)]^{\frac{1}{3}-1}\,u'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{u^2(x)}}\,u'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{\left(\frac{1+x^3}{1-x^3}\right)^2}}\times$$

$$\times\frac{3x^2(1-x^3)-(-3x^2)(1+x^3)}{(1-x^3)^2} = \frac{1}{3\sqrt[3]{\left(\frac{1+x^3}{1-x^3}\right)^2}}\,\frac{6x^2}{(1-x^3)^2} =$$

$$= \frac{2x^2}{\sqrt[3]{(1-x^3)^4}\,\sqrt[3]{(1+x^3)^2}}.$$

b) Notăm $u(x) = 1 + \sqrt[3]{x^2}$ și deducem

$$f'(x) = \frac{1}{3}\,[u(x)]^{\frac{1}{3}-1}\,u'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(1+\sqrt[3]{x^2})^2}}\,(1+\sqrt[3]{x^2})' =$$

$$= \frac{1}{3\sqrt[3]{(1+\sqrt[3]{x^2})^2}}\cdot\frac{2}{3}\,x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{9\sqrt[3]{(1+\sqrt[3]{x^2})^2}\,\sqrt[3]{x}}.$$

370. $f(x) = \cos x + \cos^5 x + \cos^3\frac{x^2}{x^2+1}$.

Avem

$$f'(x) = (\cos x)' + (\cos^5 x)' + \left(\cos^3\frac{x^2}{x^2+1}\right)'.$$

Pentru a calcula derivata funcției $\cos^5 x$, notăm $u_1(x) = \cos x$. Atunci

$$(\cos^5 x)' = [u_1^5(x)]' = 5u_1^4(x)\,u_1'(x) = 5\cos^4 x\,(\cos x)' =$$

$$= -5\cos^4 x\sin x.$$

Pentru a calcula derivata funcției $\cos^3\frac{x^2}{x^2+1}$, notăm $v(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$, $\cos v(x) = u(x)$; deci

$$\left(\cos^3\frac{x^2}{x^2+1}\right)' = (u^3(x))' = 3u^2(x)\,u'(x).$$

Însă

$$u'(x) = [\cos v(x)]' = -v'(x)\,[\sin v(x)] = \left(-\sin\frac{x^2}{x^2+1}\right)\times$$

$$\times\frac{2x(x^2+1)-2x^3}{(x^2+1)^2} = -\frac{2x}{(x^2+1)^2}\sin\frac{x^2}{x^2+1},\quad \left(\cos^3\frac{x^2}{x^2+1}\right)' =$$

$$= -\frac{6x}{(x^2+1)^2}\cos^2\frac{x^2}{x^2+1}\sin\frac{x^2}{x^2+1}.$$

Prin urmare,

$$f'(x) = -\sin x - 5\cos^4 x \sin x - \frac{6x}{(x^2+1)^2}\cos^2\frac{x^2}{x^2+1}\sin\frac{x^2}{x^2+1}.$$

371. $f(x) = e^{\sin\frac{1}{x}}, \quad x \neq 0.$

Notăm $u(x) = \sin\frac{1}{x}$ și atunci

$$f'(x) = (e^{u(x)})' = e^{u(x)}\,u'(x) = -\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}\,e^{\sin\frac{1}{x}}.$$

372. $f(x) = 2^{\operatorname{tg}^3 x^2}$.

Notăm $u(x) = \operatorname{tg}^3 x^2$ și deci

$$f'(x) = 2^{u(x)}\,u'(x)\ln 2.$$

?

Pentru a calcula $u'(x)$ notăm $v(x) = x^2$ și $\operatorname{tg} v(x) = w(x)$. Deducem

$$u'(x) = [w^3(x)]' = 3w^2(x)\,w'(x) = 3w^2(x)\,[\operatorname{tg} v(x)]' =$$

$$= 3\operatorname{tg}^2 v(x) \times \frac{1}{\cos^2 v(x)}\,v'(x) = 3\,\frac{\sin^2 x^2}{\cos^4 x^2}\cdot 2x.$$

Prin urmare, $f'(x) = 2^{\operatorname{tg}^3 x^2}\,\frac{3\sin^2 x^2}{\cos^4 x^2}\,2x\ln 2.$

373. $f(x) = \ln^3(1 + x^2)$.

Notăm $u(x) = 1 + x^2$, $v(x) = \ln u(x)$; avem

$$f'(x) = [v^3(x)]' = 3v^2(x)\,v'(x) = 3\ln^2(1+x^2)\,[\ln u(x)]' =$$

$$= 3[\ln^2(1+x^2)]\cdot\frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{6x}{1+x^2}\ln^2(1+x^2).$$

374. $f(x) = \frac{x^2-1}{x}\cdot\ln\frac{x^2-1}{x^2+1}, \quad |x| > 1.$

Avem

$$f'(x) = \left(\frac{x^2-1}{x}\right)'\ln\frac{x^2-1}{x^2+1} + \frac{x^2-1}{x}\left(\ln\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)'.$$

Însă $\left(\frac{x^2-1}{x}\right)' = \frac{x^2+1}{x^2}$,

$$\left[\ln\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)\right]' = \frac{\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)'}{\frac{x^2-1}{x^2+1}} = \frac{\frac{2x(x^2+1) - 2x(x^2-1)}{(x^2+1)^2}}{\frac{x^2-1}{x^2+1}} = \frac{4x}{x^4-1}.$$

Prin urmare

$$f'(x) = \frac{x^2+1}{x^2}\ln\frac{x^2-1}{x^2+1} + \frac{x^2-1}{x}\cdot\frac{4x}{x^4-1} =$$

$$= \frac{x^2+1}{x^2}\ln\frac{x^2-1}{x^2+1} + \frac{4}{x^2+1}.$$

375. $f(x) = \arccos\frac{1}{\sqrt{x}}, \quad x \geqslant 1.$

Funcția este derivabilă dacă $x > 1$. Notăm $\frac{1}{\sqrt{x}} = u(x)$; deducem

$$f'(x) = [\arccos u(x)]' = \frac{-1}{\sqrt{1-u^2(x)}}\,u'(x) =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x}}}\cdot\left(-\frac{1}{2x\sqrt{x}}\right) = \frac{1}{2x\sqrt{x-1}}.$$

376. $f(x) = \operatorname{arctg}\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1.$

Notăm $u(x) = \frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}$ și deducem

$$f'(x) = [\operatorname{arctg} u(x)]' = \frac{1}{1+u^2(x)}\,u'(x) = \frac{1}{1+\frac{x^2}{(1+\sqrt{1-x^2})^2}} \times$$

$$\times \frac{1+\sqrt{1-x^2}+x\frac{2x}{2\sqrt{1-x^2}}}{(1+\sqrt{1-x^2})^2} = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}.$$?

377. $f(x) = \arcsin \sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}$, $|x| \leqslant 1$.

Notăm $u(x) = \sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}$ și obținem

$$f'(x) = [\arcsin u(x)]' = \frac{u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1-x^2}{1+x^2}}} \cdot \frac{\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)'}{2\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}} =$$

$$= \frac{-\sqrt{2}x}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}\,|x|}.$$

Însă

$$\frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x > 0 \\ -1, & \text{dacă } x < 0. \end{cases}$$

Prin urmare

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-\sqrt{2}}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}, & x > 0 \\ \dfrac{\sqrt{2}}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}, & x < 0. \end{cases}$$

Rezultatul obținut este valabil pentru $x \neq 0$. Pentru $x = \pm 1$ funcția nu este derivabilă.

378. $f(x) = \operatorname{arccotg} \frac{a-2x}{2\sqrt{ax-x^2}}$, $0 < x < a$.

Notăm $u(x) = \frac{a-2x}{2\sqrt{ax-x^2}}$ și avem

$$f'(x) = [\operatorname{arccotg} u(x)]' = \frac{-u'(x)}{1+u^2(x)} =$$

$$= -\frac{1}{1+\frac{(a-2x)^2}{4(ax-x^2)}} \cdot \left(\frac{a-2x}{2\sqrt{ax-x^2}}\right)'.$$

Însă

$$\left(\frac{a-2x}{2\sqrt{ax-x^2}}\right)' = \frac{1}{2} \cdot \frac{-2\sqrt{ax-x^2} - (\sqrt{ax-x^2})'(a-2x)}{ax-x^2} =$$

$$= \frac{-a^2}{4(ax-x^2)\sqrt{ax-x^2}}.$$

Prin urmare, $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{ax-x^2}}$.

379. $f(x) = x^{\operatorname{tg} x}$, $x > 0$.

Observăm că atît baza cît și exponentul sînt funcții de x și scriem

$$f(x) = e^{\ln x \operatorname{tg} x} = e^{\operatorname{tg} x \ln x}.$$

Avem

$$f'(x) = e^{\operatorname{tg} x \ln x}(\operatorname{tg} x \ln x)' = e^{\operatorname{tg} x \ln x}\left[\frac{\ln x}{\cos^2 x} + \frac{\operatorname{tg} x}{x}\right] =$$

$$= x^{\operatorname{tg} x}\left[\frac{\ln x}{\cos^2 x} + \frac{\operatorname{tg} x}{x}\right].$$

380. $f(x) = x^{\cos^2 \frac{1}{x}}$, $x > 0$.

Avem $f(x) = e^{\cos^2 \frac{1}{x} \ln x}$ și deci

$$f'(x) = e^{\cos^2 \frac{1}{x} \ln x}\left[\frac{\cos^2 \frac{1}{x}}{x} + \frac{2}{x^2}\cos\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x} \cdot \ln x\right] =$$

$$= x^{\cos^2 \frac{1}{x}}\left[\frac{\cos^2 \frac{1}{x}}{x} + \frac{2}{x^2}\cos\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}\ln x\right].$$

381. $f(x) = g(\sqrt{x^2+1})$, *g fiind o funcție derivabilă.*

Notăm $u(x) = \sqrt{x^2+1}$ și deducem

$$f'(x) = [g(u(x))]' = g'(u(x))\,u'(x) = g'(\sqrt{x^2+1})\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

382. *Să se calculeze $f''(x)$ dacă $f(x) = g(e^{2x})$, g fiind o funcție care admite derivată de ordinul al doilea.*

Avem

$$f'(x) = g'(e^{2x})(e^{2x})' = 2e^{2x}g'(e^{2x})$$

$$f''(x) = 2[e^{2x}g'(e^{2x})]' = 2\{(e^{2x})'g'(e^{2x}) + e^{2x}[g'(e^{2x})]'\}.$$

Însă

$$[g'(e^{2x})]' = g''(e^{2x})(e^{2x})' = 2e^{2x}g''(e^{2x}),$$

deci

$$f''(x) = 4[e^{2x}g'(e^{2x}) + e^{4x}g''(e^{2x})].$$

383. *Să se calculeze $f''(x)$ dacă $f(x) = g(x \sin x)$, g fiind o funcție care admite derivată de ordinul al doilea.*

Avem

$$f'(x) = g'(x \sin x)(x \sin x)' = (\sin x + x \cos x) g'(x \sin x)$$

$$f''(x) = [\sin x + x \cos x]' g'(x \sin x) + (\sin x + x \cos x)[g'(x \sin x)]'.$$

Însă

$$(\sin x + x \cos x)' = \cos x + \cos x - x \sin x = 2 \cos x - x \sin x, \quad [g'(x \sin x)]' = g''(x \sin x)(x \sin x)' = g''(x \sin x)(\sin x + x \cos x).$$

Prin urmare,

$$f''(x) = (2 \cos x - x \sin x) g'(x \sin x) + (\sin x + x \cos x)^2 g''(x \sin x).$$

Să se calculeze derivatele de ordinul n ale următoarelor funcții:

384. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 3x + 2}$.

Calculăm succesiv derivatele de ordinul întîi, al doilea, al treilea și observăm regula generală de formare a derivatei de ordinul n. Mai observăm că funcția dată se poate scrie astfel

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x + 2} = \frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1}.$$

Avem

$$f'(x) = (-1)^1 \left[\frac{1}{(x-2)^2} - \frac{1}{(x-1)^2}\right];$$

$$f''(x) = (-1)^2 \cdot 2 \left[\frac{1}{(x-2)^3} - \frac{1}{(x-1)^3}\right];$$

$$f'''(x) = (-1)^3 \cdot 2 \cdot 3 \left[\frac{1}{(x-2)^4} - \frac{1}{(x-1)^4}\right].$$

Să presupunem că $f^{(n)}(x) = (-1)^n n! \left[\dfrac{1}{(x-2)^{n+1}} - \dfrac{1}{(x-1)^{n+1}}\right]$.

Vom arăta că $f^{(n+1)}(x)$ se formează după aceeași regulă.

Într-adevăr,

$$f^{(n+1)}(x) = (-1)^n n! \left[-\frac{n+1}{(x-2)^{n+2}} - \frac{n+1}{(x-1)^{n+2}}\right] = (-1)^{n+1}(n+1)! \left[\frac{1}{(x-2)^{n+2}} - \frac{1}{(x-1)^{n+2}}\right].$$

Conform principiului inducției, avem pentru orice n

$$f^n(x) = (-1)^n n! \left[\frac{1}{(x-2)^{n+1}} - \frac{1}{(x-1)^{n+1}}\right].$$

385. $f(x) = \ln(ax + b)$, $x > -\dfrac{b}{a}$, $a, b \neq 0$.

Avem

$$f'(x) = \frac{a}{ax+b}, \quad f''(x) = -\frac{a^2}{(ax+b)^2}, \quad f'''(x) = \frac{2a^3}{(ax+b)^3}.$$

Să presupunem că $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \dfrac{(n-1)!\, a^n}{(ax+b)^n}$.

Rezultă, $f^{(n+1)}(x) = (-1)^n n! \dfrac{a^{n+1}}{(ax+b)^{n+1}}$.

Conform principiului inducției, avem pentru orice n

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!\, a^n}{(ax+b)^n}.$$

386. *Să se calculeze $f^{(n)}(x)$ pentru $f(x) = e^{ax} e^{bx}$.*

Aplicăm formula lui Leibniz ținînd seama că

$$(e^{ax})^{(n)} = a^n e^{ax}, \quad (e^{bx})^{(n)} = b^n e^{bx}$$

și obținem

$$f^{(n)}(x) = e^{ax} e^{bx} (a + b)^n.$$

Rezultatul se obține mai simplu ținînd seama că

$$f(x) = e^{(a+b)x}.$$

Să se studieze derivabilitatea următoarelor funcții:

387. $f(x) = \begin{cases} \ln(1 + 2x), & -\frac{1}{2} < x \leqslant 0 \\ 2x, & x > 0. \end{cases}$

Avem

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{1+2x}, & -\frac{1}{2} < x < 0 \\ 2, & x > 0. \end{cases}$$

În punctul $x = 0$, calculăm derivata pornind de la definiție și obținem

$$f'_d(0) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{2x}{x} = 2;\ f'_s(0) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{f(x) - f(0)}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+2x)}{x} = \lim 2 \ln (1 + 2x)^{\frac{1}{2x}} = 2.$$

Deoarece $f'_d(0) = f'_s(0) = 2$, funcția este derivabilă și în punctul $x = 0$ și avem $f'(0) = 2$.

388. $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + 5x + 2}, & x \leqslant 2 \\ \frac{9}{8}x + \frac{7}{4}, & x > 2. \end{cases}$

Avem

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2x+5}{2\sqrt{x^2+5x+2}}, & x < 2 \\ \frac{9}{8}, & x > 2. \end{cases}$$

În punctul $x = 2$ obținem

$$f'_d(2) = \lim_{\substack{x\to 2\\ x>2}} \frac{\frac{9}{8}x + \frac{7}{4} - 4}{x-2} = \lim_{\substack{x\to 2\\ x>2}} \frac{\frac{9}{8}x - \frac{18}{8}}{x-2} = \frac{9}{8};$$

$$f'_s(2) = \lim_{\substack{x\to 2\\ x<2}} \frac{\sqrt{x^2+5x+2} - 4}{x-2} = \lim_{\substack{x\to 2\\ x<2}} \frac{x^2+5x-14}{(x-2)(\sqrt{x^2+5x+2}+4)} = \frac{9}{8}.$$

Funcția considerată este derivabilă și în punctul $x = 2$ și avem $f'(2) = \frac{9}{8}$.

389. $f(x) = \begin{cases} \sin^3 x \operatorname{sign} x, & |x| \leqslant \frac{\pi}{4} \\ \frac{3\sqrt{2}}{4} x \operatorname{sign} x + \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\pi}{4}\frac{3\sqrt{2}}{4}, & |x| > \frac{\pi}{4}. \end{cases}$

$$f'(x) = \begin{cases} 3\sin^2 x \cos x \operatorname{sign} x, & |x| \leqslant \frac{\pi}{4} \\ \frac{3\sqrt{2}}{4} \operatorname{sign} x, & |x| > \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

În punctele $|x| = \frac{\pi}{4}$, derivabilitatea funcției se studiază pornind de la definiție.

Pentru punctul $x = \frac{\pi}{4}$ obținem

$$f'_d\left(\frac{\pi}{4}\right) = \lim_{\substack{x\to\frac{\pi}{4}\\ x>\frac{\pi}{4}}} \frac{\frac{3\sqrt{2}}{4}x + \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\pi}{4}\frac{3\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}}{x - \frac{\pi}{4}} = \frac{3\sqrt{2}}{4};$$

$$f'_s\left(\frac{\pi}{4}\right) = \lim_{\substack{x\to\frac{\pi}{4}\\ x<\frac{\pi}{4}}} \frac{\sin^3 x - \sin^3 \frac{\pi}{4}}{x - \frac{\pi}{4}} =$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\left(\sin x - \sin\frac{\pi}{4}\right)\left(\sin^2 x + \sin x \sin\frac{\pi}{4} + \sin^2\frac{\pi}{4}\right)}{x - \frac{\pi}{4}} =$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \left(\sin^2 x + \sin x \sin\frac{\pi}{4} + \right.$$

$$\left. + \sin^2\frac{\pi}{4}\right) \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{2\sin\frac{x-\frac{\pi}{4}}{2}\cos\frac{x+\frac{\pi}{4}}{2}}{x - \frac{\pi}{4}} = \frac{3\sqrt{2}}{4}.$$

În punctul $x = -\frac{\pi}{4}$, obținem

$$f'_d\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \lim_{\substack{x\to-\frac{\pi}{4}\\ x>-\frac{\pi}{4}}} \frac{f(x) - f\left(-\frac{\pi}{4}\right)}{x + \frac{\pi}{4}} = \lim_{\substack{x\to-\frac{\pi}{4}\\ x>-\frac{\pi}{4}}} \frac{-\sin^3 x + \sin^3\left(-\frac{\pi}{4}\right)}{x + \frac{\pi}{4}} =$$

$$= -\lim_{\substack{x\to -\frac{\pi}{4}\\ x>-\frac{\pi}{4}}} \frac{\sin^3 x + \sin^3 \frac{\pi}{4}}{x+\frac{\pi}{4}} = -\frac{3\sqrt{2}}{4}.$$

$$f'_s\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \lim_{\substack{x\to -\frac{\pi}{4}\\ x<-\frac{\pi}{4}}} \frac{f(x) - f\left(-\frac{\pi}{4}\right)}{x+\frac{\pi}{4}} =$$

$$= \lim_{\substack{x\to -\frac{\pi}{4}\\ x>-\frac{\pi}{4}}} \frac{-\frac{3\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\pi}{4}\frac{3\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}}{x+\frac{\pi}{4}} = -\frac{3\sqrt{2}}{4}.$$

Rezultă că funcția considerată este derivabilă și în punctele $|x| = \frac{\pi}{4}$, și avem $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{3\sqrt{2}}{4}$, $f'\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{3\sqrt{2}}{4}$.

390. $f(x) = \max\,[\cos x, \cos^3 x]$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$.

Fie $g(x) = \cos x - \cos^3 x = \cos x\,(1 - \cos^2 x) = \cos x \sin^2 x$. Avem $g(x) > 0$ dacă $0 < x < \frac{\pi}{2}$, $g(x) < 0$ dacă $\frac{\pi}{2} < x < \pi$; deci $\cos x > \cos^3 x$ pentru $0 < x < \frac{\pi}{2}$ și $\cos x < \cos^3 x$ pentru $\frac{\pi}{2} < x < \pi$. Rezultă că

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2} \\ \cos^3 x, & \frac{\pi}{2} < x \leqslant \pi \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} -\sin x, & 0 \leqslant x < \frac{\pi}{2} \\ -3\cos^2 x \sin x, & \frac{\pi}{2} < x \leqslant \pi. \end{cases}$$

În punctul $x = \frac{\pi}{2}$, studiem derivabilitatea pornind de la definiție; obținem

$$f'_d\left(\frac{\pi}{2}\right) = \lim_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}\\ x>\frac{\pi}{2}}} \frac{\cos^3 x}{x - \frac{\pi}{2}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{x - \frac{\pi}{2}} = 0;$$

$$f'_s\left(\frac{\pi}{2}\right) = \lim_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}\\ x<\frac{\pi}{2}}} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{x - \frac{\pi}{2}} = -1.$$

Rezultă că funcția considerată nu este derivabilă în punctul $x = \frac{\pi}{2}$.

391. $f(x) = |x^3 - x|$.

Studiind semnul polinomului $x^3 - x$, obținem

$$f(x) = \begin{cases} x - x^3, & \text{dacă } x \in (-\infty, -1) \cup (0, 1) \\ 0, & \text{dacă } x = 0,\ x = \pm 1 \\ x^3 - x, & \text{dacă } x \in (-1, 0) \cup (1, \infty). \end{cases}$$

Dacă $x \in (-\infty, -1) \cup (0, 1)$ atunci $f'(x) = 1 - 3x^2$, iar dacă $x \in (-1, 0) \cup (1, \infty)$, atunci $f'(x) = 3x^2 - 1$.

În punctele $x = -1$, $x = 0$, $x = +1$, studiem derivata pornind de la definiție.

În punctul $x = -1$, avem

$$f'_s(-1) = \lim_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} \frac{f(x) - f(-1)}{x+1} = \lim_{x\to -1} \frac{x - x^3}{x+1} = \lim_{x\to -1} x(1 - x) = -2,$$

$$f'_d(-1) = \lim_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} \frac{f(x) - f(-1)}{x+1} = \lim_{x\to -1} \frac{x^3 - x}{x+1} = \lim_{x\to -1} x\,(x - 1) = 2.$$

Rezultă că funcția nu este derivabilă în punctul $x = -1$.

În punctele $x = 0$ și $x = 1$, obținem

$$f'_s(0) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3 - x}{x} = -1;$$

$$f'_d(0) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x - x^3}{x} = 1.$$

Analog:

$$f'_s(1) = -2, \quad f'_d(1) = 2.$$

Rezultă că nici în punctele $x = 0$ și $x = 1$, funcția dată nu este derivabilă.

392. $f(x) = \begin{cases} 2^{\frac{1}{x-1}}, & x < 1 \\ 0, & x = 1 \\ \ln(x^2 - 2x + 2), & x > 1. \end{cases}$

Avem

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-2^{\frac{1}{x-1}}}{(x-1)^2} \ln 2, & x < 1 \\ \dfrac{2x - 2}{x^2 - 2x + 2}, & x > 1. \end{cases}$$

În punctul $x = 1$, avem

$$f'_d(1) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{\ln(x^2 - 2x + 2)}{x - 1} =$$

$$= \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \ln\left\{[1 + (x^2 - 2x + 1)]^{\frac{1}{x^2 - 2x + 1}}\right\}^{\frac{x^2-2x+1}{x-1}} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1} = 0, \quad f'_s(1) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{2^{\frac{1}{x-1}}}{x - 1}.$$

Notăm $u(x) = 2^{\frac{1}{x-1}}$, de unde $\dfrac{1}{x-1}\ln 2 = \ln u(x)$; deci $f'_s(1) =$ $= \lim\limits_{\substack{u\to 0\\ u>0}} \dfrac{u \ln u}{\ln 2} = 0.$

Prin urmare, $f'(1) = 0$.

393. *Să se determine coeficienții α și β, astfel încît funcția*

$$f(x) = \begin{cases} \ln^3 x, & 0 < x \leqslant e \\ \alpha x + \beta, & x > e \end{cases}$$

să fie derivabilă pentru orice $x > 0$.

Din condiția de continuitate a funcției în punctul $x = e$ obținem

$$1 = \alpha e + \beta.$$

Condiția de derivabilitate a funcției în punctul $x = e$ este

$$f'_s(e) = f'_d(e).$$

Dar

$$f'_s(e) = \lim_{\substack{x\to e\\ x<e}} \frac{f(x) - f(e)}{x - e} = \lim_{x\to e} \frac{\ln^3 x - \ln^3 e}{x - e} =$$

$$= \lim_{x\to e} \frac{\ln x - \ln e}{x - e} [\ln^2 x + \ln x \ln e + \ln^2 e] = \frac{3}{e};$$

$$f'_d(e) = \lim_{\substack{x\to e\\ x>e}} \frac{f(x) - f(e)}{x - e} = \lim_{x\to e} \frac{\alpha x + \beta - 1}{x - e} = \lim_{x\to e} \frac{\alpha x + 1 - \alpha e - 1}{x - e} = \alpha.$$

Prin urmare $\alpha = \dfrac{3}{e}$, $\beta = 1 - 3 = -2$. Funcția dată este derivabilă pentru orice $x > 0$ și derivata ei este

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{3 \ln^2 x}{x}, & 0 < x < e \\ \dfrac{3}{e}, & x \geqslant e. \end{cases}$$

Să se calculeze $f''(x)$ în cazul următoarelor funcții, în punctele specificate în dreptul fiecăreia:

394. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x^2 + 1}, & x < 0 \\ x, & x \geqslant 0 \end{cases}$ *în punctul* $x = 0$.

Avem

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - x^2}{(1 + x^2)^2}, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

$$f'_d(0) = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x} = 1; \quad f'_s(0) = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x}{x^2 + 1}}{x} = 1.$$

Prin urmare $f'(0) = 1$.

$$f''_d(0) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{f'(x) - f'(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1-1}{x} = 0;$$

$$f''_s(0) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{f'(x) - f'(0)}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{\dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2} - 1}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-x^4 - 3x^2}{x(x^2+1)^2} = 0.$$

Rezultă că $f''(0) = 0$.

395. $f(x) = \begin{cases} \ln^2(x-2), & x \geqslant 3 \\ (x-3)^2, & x < 3 \end{cases}$ *în punctul* $x = 3$.

Avem

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{2\ln(x-2)}{x-2}, & x > 3 \\ 2(x-3), & x < 3 \end{cases}$$

$$f'_d(3) = \lim_{\substack{x\to 3\\ x>3}} \frac{\ln^2(x-2)}{x-3} = \lim_{\substack{x\to 3\\ x>3}} \ln(x-2) \lim_{\substack{x\to 3\\ x>3}} \ln\left[1 + (x-3)\right]^{\frac{1}{x-3}} = 0.$$

$$f'_s(3) = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)^2}{x-3} = 0.$$

Prin urmare $f'(3) = 0$.

$$f''_d(3) = \lim_{x\to 3} \frac{2\dfrac{\ln(x-2)}{x-2}}{x-3} = 2\lim_{x\to 3} \frac{1}{x-2} \lim_{x\to 3} \frac{\ln(x-2)}{x-3} = 2.$$

$$f''_s(3) = \lim_{x\to 3} \frac{2(x-3)}{x-3} = 2.$$

Prin urmare $f''(3) = 2$.

396. *Fie* $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0; \end{cases}$

1) *să se schiţeze graficul funcţiei*

2) *să se arate că derivata funcţiei este discontinuă în origine.*

1) Deoarece $-x^2 \leqslant x^2 \sin\frac{1}{x} \leqslant x^2$, graficul funcţiei este cuprins între parabolele $y = x^2$ şi $y = -x^2$.
Din

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x = \pm\dfrac{1}{n\pi} \\ -\dfrac{1}{\left(2n\pi + \dfrac{3\pi}{2}\right)^2}, & \text{dacă } x = \pm\dfrac{1}{2n\pi + \dfrac{3\pi}{2}} \\ \dfrac{1}{\left(2n\pi + \dfrac{\pi}{2}\right)^2}, & \text{dacă } x = \pm\dfrac{1}{2n\pi + \dfrac{\pi}{2}} \end{cases}$$

rezultă că în vecinătatea originii curba are o infinitate de bucle (fig. 28).

2) Dacă $x \neq 0$, $f'(x) = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$, iar

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin\dfrac{1}{x}}{x} = 0.$$

Funcţia

$$f'(x) = \begin{cases} 2x\sin\dfrac{1}{x} - \cos\dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

este discontinuă în origine, deoarece funcţia $2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$ nu are limită în origine. Discontinuitatea este de speţa a doua.

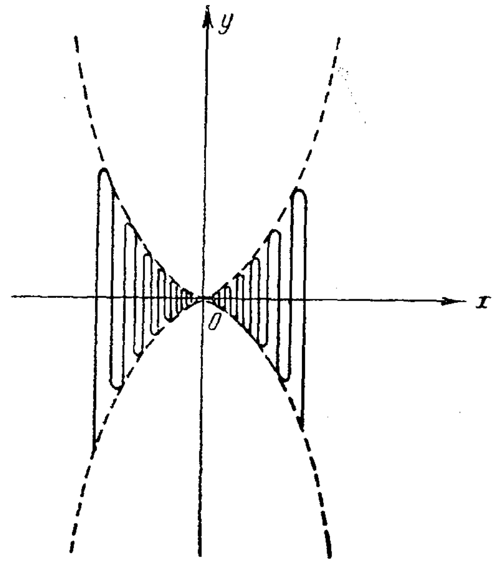

Fig. 28

397. *Să se arate că funcţia*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\dfrac{1}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

este derivabilă în orice punct, iar derivata este nemărginită în vecinătatea originii.

Avem

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Fie șirul $x_n = \frac{1}{\sqrt{2n\pi}}$. Evident $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, iar

$$f'(x_n) = \frac{2}{\sqrt{2n\pi}} \sin 2n\pi - 2\sqrt{2n\pi} \cos 2n\pi = -2\sqrt{2n\pi}$$

(am ținut seama că $\sin 2n\pi = 0$ și $\cos 2n\pi = 1$, oricare ar fi numărul natural n).

Deci $\lim\limits_{n\to\infty} f'(x_n) = -\infty$.

Pentru șirul $x_n = \frac{1}{\sqrt{(2n+1)\pi}}$,

$$f'(x_n) = \frac{2}{\sqrt{(2n+1)\pi}} \sin (2n+1)\pi - 2\sqrt{(2n+1)\pi} \cos (2n+1)\pi =$$

$$= 2\sqrt{(2n+1)\pi}.$$

Deci $\lim\limits_{n\to\infty} f'(x_n) = \infty$.

Funcția derivată este nemărginită în vecinătatea originii. Originea este un punct de discontinuitate de speța a doua pentru funcția $f'(x)$.

398. *Să se arate că funcția*

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{1+x}{1-x}, & x \neq 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$$

este derivabilă pentru $x \in (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$, *există* $\lim\limits_{x\to 1} f'(x)$, *dar funcția nu este derivabilă în punctul* $x = 1$.

Funcția dată are o discontinuitate de speța întîi în punctul $x = 1$. Într-adevăr,

$$f(1-0) = \lim_{\substack{x\to 1 \\ x<1}} \operatorname{arctg} \frac{1+x}{1-x} = \frac{\pi}{2},$$

$$f(1+0) = \lim_{\substack{x\to 1 \\ x>1}} \operatorname{arctg} \frac{1+x}{1-x} = -\frac{\pi}{2}.$$

Deci funcția nu este derivabilă în punctul $x = 1$. Dacă $x \neq 1$,

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \text{ iar } \lim_{x\to 1} f'(x) = \frac{1}{2}.$$

Din acest exemplu se trage concluzia că dacă limita derivatei [sau limita la stînga (dreapta)] — într-un punct — există, nu rezultă că funcția este derivabilă [sau derivabilă la stînga (dreapta)] în acel punct.

399. *În cele ce urmează vom da un exemplu elementar de funcție continuă, nederivabilă în nici un punct.* Exemplul*) se datorește lui S. Marcus.

Fie $0 < x < 1$ și $x = \cdot x_1 x_2 \ldots x_n \ldots$ reprezentarea lui x în baza 3. Prin definiție reprezentarea diadică a lui $f(x)$ este

$$f(x) = \cdot y_1 y_2 \ldots y_n \ldots, \tag{1}$$

unde

$$y_1 = 1 \tag{2}$$

dacă și numai dacă $x_1 = 1$,

$$y_{n+1} = y_n \tag{3}$$

dacă și numai dacă $x_{n+1} = x_n$.

Se arată ușor că $f(x)$ nu depinde de reprezentarea triadică a lui x (în cazul cînd x admite două reprezentări triadice).

În cele ce urmează vom arăta că funcția f definită de (1), (2) și (3) este lipsită în orice punct din (0,1) de derivate unilaterale finite.

Într-adevăr, pentru orice $x \in (0, 1)$ există o reprezentare triadică $x = \cdot x_1 x_2 \ldots x_n \ldots$ cu proprietatea că fiecărui n îi corespunde un k_n astfel încît $x_{k_n} > 0$. Fie atunci $x' \in (0, 1)$, astfel încît reprezentarea triadică a lui x' să se obțină din reprezentarea triadică a lui x în felul următor: x_{k_n} se înlocuiește prin 0 și cifrele de rang mai mare decît k_n se înlocuiesc în așa fel încît:

$$0 < x - x' < 3^{-(k_n - 1)}$$

$$|f(x') - f(x)| = 2^{-k_n}.$$

---

*) Gazeta Matematică și Fizică, seria A, 1962, vol. XIV, nr. 2, p. 79–81.

Prin urmare

$$\left|\frac{f(x')-f(x)}{x'-x}\right| \geqslant \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{k_n}$$

şi deci f nu are derivată finită la stînga în nici un punct din $(0, 1)$.

Pentru orice $x \in (0,1)$ există o reprezentare triadică $x = \cdot x_1 x_2 \ldots \ldots x_n \ldots$ cu proprietatea că fiecărui n îi corespunde un $h_n > n$, astfel încît $x_{h_n} < 2$. Fie atunci $x'' \in (0,1)$, astfel încît reprezentarea triadică a lui x'' să se obţină din reprezentarea triadică a lui x în felul următor: x_{h_n} se înlocuieşte prin 2 şi cifrele de rang mai mare decît h_n se înlocuiesc în aşa fel încît:

$$0 < x'' - x < 3^{-h_n-1}$$

$$|f(x'') - f(x)| = 2^{-h_n}.$$

Deducem că

$$\left|\frac{f(x'')-f(x)}{x''-x}\right| \geqslant \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{h_n};$$

şi deci nu are derivată finită la dreapta în nici un punct din $(0,1)$.

400. *Să se scrie ecuaţia tangentei la curba a cărei ecuaţie este* $f(x) = \ln x + x^2 - 1$, *în punctul* (e, e^2).

Ecuaţia tangentei la curba dată, în punctul (e, e^2), este $y - e^2 = f'(e)(x - e)$. Însă $f'(x) = \frac{1}{x} + 2x$, iar $f'(e) = \frac{1+2e^2}{e}$. Prin urmare ecuaţia cerută este

$$y - e^2 = \frac{1+2e^2}{e}(x - e).$$

401. *Să se determine un punct pe curba a cărei ecuaţie este* $y = \frac{x-1}{x+1}$ *în care tangenta să fie paralelă cu dreapta de ecuaţie* $y = \frac{x}{2}$.

Punctul se determină prin condiţia următoare: coeficientul unghiular al tangentei în punctul respectiv trebuie să fie egal cu $\frac{1}{2}$:

$$f'(x) = \frac{2}{(x+1)^2} = \frac{1}{2}.$$

Obţinem ecuaţia $x^2 + 2x - 3 = 0$, ale cărei rădăcini sînt $x = 1$ şi $x = -3$. Condiţia cerută este satisfăcută în punctele de coordonate $(-3, 2)$ şi $(1, 0)$.

402. *Să se determine constantele* α *şi* β *astfel încît curbele care au ecuaţiile*

$$y = \alpha x^2 + \beta x + 2, \quad y = \frac{x-1}{x}$$

să fie tangente în punctul $x = 1$.

Impunem condiţia ca cele două curbe date să se intersecteze în punctul $x = 1$ şi tangentele lor în acest punct să aibă acelaşi coeficient unghiular. Vom obţine sistemul

$$\alpha + \beta + 2 = 0, \quad 2\alpha + \beta = 1,$$

de unde $\alpha = 3$, $\beta = -5$.

403. *Să se scrie ecuaţia normalelor la parabola care are ecuaţia* $y = x^2 - 4x + 5$, *în punctele de intersecţie ale acesteia cu dreapta de ecuaţie* $x - y + 1 = 0$.

Punctele de intersecţie sînt date de ecuaţia $x^2 - 5x + 4 = 0$, ale cărei soluţii sînt $x = 1$ şi $x = 4$. Deoarece $y'(x) = 2x - 4$, avem $y'(1) = -2$ şi $y'(4) = 4$. Ecuaţiile normalelor sînt $y - 2 = \frac{1}{2}(x - 1)$ şi $y - 5 = -\frac{1}{4}(x - 4)$.

Exerciţii propuse spre rezolvare

Să se studieze derivabilitatea şi să se calculeze derivatele următoarelor funcţii:

404. $f(x) = \begin{cases} \ln(x^2 + 3x), & 0 < x < 1 \\ \frac{5}{4}(x - 1) + 2\ln 2, & x > 1. \end{cases}$

R. Funcţia este derivabilă pentru orice x.

405. $f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x^2 + 11}, & x \leqslant 4 \\ \frac{8}{27}x + \frac{49}{27}, & x > 4. \end{cases}$

R. Funcţia este derivabilă pentru orice x.

406. $f(x) = \begin{cases} \mathrm{tg}^4\, x, & |x| \leqslant \frac{\pi}{4} \\ 8x \operatorname{sign} x + 1 - \frac{8\pi}{4}, & |x| > \frac{\pi}{4}. \end{cases}$

R. Funcţia este derivabilă în orice punct.

407. $f(x) = |\ln x - 1|$.

R. Funcţia nu este derivabilă în punctul $x = e$. În acest punct, funcţia are o derivată la stînga şi o derivată la dreapta.

408. $f(x) = |\cos^3 x|$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$.

R. Funcţia este derivabilă în orice punct al intervalului considerat.

409. $f(x) = \max\left[\frac{\operatorname{tg} x}{2},\ \operatorname{tg} x \sin x\right]$, $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4}$.

R. Funcţia nu este derivabilă în punctul $x = \frac{\pi}{6}$.

410. $f(x) = \min\,[x^2 + x,\ 4x - 2]$.

R. Funcţia nu este derivabilă în punctele $x = 1$ şi $x = 2$.

411. $f(x) = \min\,[x^2 + 3x,\ x]$.

R. Funcţia nu este derivabilă în punctele $x = 0$ şi $x = -2$.

412. $f(x) = \max\,[|1 - x|,\ 3|x|]$.

R. Funcţia nu este derivabilă în punctele $x = -\frac{1}{2}$ şi $x = \frac{1}{4}$.

413. *Să se determine coeficienţii a şi b astfel ca funcţia*

$$f(x) = \begin{cases} e^{|x|}, & |x| \leqslant 1 \\ ax + b, & x > 1 \end{cases}$$

să fie derivabilă pe toată dreapta.

R. $a = e \operatorname{sign} x$, $b = 0$.

2

Să se calculeze derivatele următoarelor funcţii:

414. $f(x) = \ln \frac{x^2}{x+1} + \frac{6}{x+1}$, $x > -1$, $x \neq 0$.

R. $f'(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x(x+1)^2}$.

415. $f(x) = \frac{1}{8}\sqrt[3]{(1 + x^3)^8} - \frac{1}{5}\sqrt[3]{(1 + x^3)^5}$.

R. $f'(x) = x^5 \sqrt[3]{(1 + x^3)^2}$.

416. $f(x) = \sqrt[3]{\frac{1 - x^2}{1 + x^2}}$, $x \neq \pm 1$.

R. $f'(x) = \frac{4x}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{(1 - x^4)^2}\,\sqrt[3]{(1 + x^2)^2}}$.

417. $f(x) = \frac{1}{15}\cos^3 x\,(3\cos^2 x - 5)$.

R. $f'(x) = \sin^3 x \cos^2 x$.

418. $f(x) = \frac{1}{3\cos^3 x} - \frac{1}{\cos x}$, $x \neq (2k + 1)\frac{\pi}{2}$, $k = 0, \pm 1, \ldots, \pm n \ldots$

R. $f'(x) = \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}$.

419. $f(x) = \frac{1}{2}\operatorname{cotg}\frac{x}{2} - \frac{1}{6}\operatorname{cotg}^3\frac{x}{2}$, $x \neq 2k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm n, \ldots$

R. $f'(x) = \frac{\cos x}{(1 - \cos x)^2}$.

420. $f(x) = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}^2 x)$. **R.** $f'(x) = \frac{\sin 2x}{\cos^4 x + \sin^4 x}$.

421. $f(x) = x - \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{1 + 2\operatorname{tg} x}{\sqrt{3}}$.

R. $f'(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^2 x}$.

422. $f(x) = \frac{1}{2}\left[\arcsin x - (x + 2)\sqrt{1 - x^2}\right]$, $|x| \leqslant 1$.

R. $f'(x) = \frac{x\sqrt{1 + x}}{\sqrt{1 - x}}$.

423. $f(x) = \arccos\frac{1}{x} - \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x}$, $|x| > 1$.

R. $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \cdot \frac{x \operatorname{sign} x - 1}{x^2}$.

424. $f(x) = x - \frac{\operatorname{cotg}^7 x}{7} + \frac{\operatorname{cotg}^5 x}{x} - \frac{\operatorname{cotg}^3 x}{3} + \operatorname{cotg} x$, $x \neq k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm n, \ldots$

R. $f'(x) = \frac{1}{\operatorname{tg}^8 x}$.

425. $f(x) = 2^{x^x}$, $x > 0$. **R.** $f'(x) = 2^{x^x}\ln 2\,[x^x(\ln x + 1)]$.

426. $f(x) = e^{x \operatorname{tg} x}$, $x \neq (2k + 1)\frac{\pi}{2}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm n, \ldots$

R. $f'(x) = e^{x \operatorname{tg} x}\,[\operatorname{tg} x + x(1 + \operatorname{tg}^2 x)]$.

427. $f(x) = (1 + x^2)^{\sqrt{x}}, \; x > 0.$

R. $f'(x) = (1 + x^2)^{\sqrt{x}} \left[\frac{2x\sqrt{x}}{1 + x^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \ln (1 + x^2)\right].$

428. *Să se arate că următoarele funcții verifică relațiile scrise în dreptul fiecăreia:*

a) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} + \frac{(1 + x^2)^2}{3x}, \; x \neq 0; \; x(x^2 + 1) f'(x) + f(x) = x(1 + x^2)^2.$

b) $f(x) = \frac{x^2}{2}\left(\ln x - \frac{3}{2}\right) + x, \; x > 0; \; f''(x) = \ln x.$

c) $f(x) = \frac{2}{5} x^2 \sqrt{2x} - \frac{16}{5} x, \; x > 0; \; f''(x) = \frac{f'(x)}{x} - \frac{x^2}{f'(x)}.$

d) $f(x) = 2e^{\frac{x^2}{2}} - 1; \; f''(x) = x f'(x) + f(x) + 1.$

Presupunînd că g este o funcție care admite derivate de ordinul al doilea să se calculeze $f''(x)$ *pentru funcțiile definite în modul următor:*

429. $f(x) = g(e^{x^2}).$
R. $f''(x) = 2\left[e^{x^2} g'(e^{x^2}) + 2x^2 e^{x^2} g'(e^{x^2}) + 2x^2 (e^{x^2})^2 g''(e^{x^2})\right].$

430. $f(x) = g\left(\frac{1}{x}\right), \; x \neq 0.$

R. $f''(x) = \frac{2}{x^3} g'\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x^4} g''\left(\frac{1}{x}\right).$

431. $f(x) = g\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}\right).$

R. $f''(x) = \frac{x^2}{(1 + x^2)^3} g''\left(\frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}\right) - g'\left(\frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}\right) \frac{\sqrt{(x^2 + 1)^3} - 3x^2\sqrt{1 + x^2}}{(x^2 + 1)^3}.$

432. *Să se calculeze* $f''(x)$ *pentru următoarele funcții în punctele specificate în dreptul fiecăreia:*

a) $f(x) = \begin{cases} \ln^2 (1 - x), & x < 0 \\ \operatorname{tg}^2 x, & x \geqslant 0 \end{cases}$ *în punctul* $x = 0.$

R. $f''(0) = \frac{2}{3}.$

b) $f(x) = |x - 1|^3$ *în punctul* $x = 1.$ **R.** $f''(1) = 0.$

Să se calculeze derivatele de ordinul n pentru următoarele funcții:

433. $f(x) = \frac{1}{(x - 1)^2}.$

R. $f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{(n + 1)!}{(x - 1)^{n+2}}.$

434. $f(x) = \frac{1}{2x^2 - 3x - 5}, \; x \neq -1, \; x \neq \frac{5}{2}.$

R. $f^{(n)}(x) = -\frac{1}{7}\left[(-1)^n \frac{n!}{(x + 1)^{n+1}} - (-1)^n \frac{2^{n+1} n!}{(2x - 5)^{n+1}}\right].$

435. *Fie f o funcție definită pe* (a, b) *de n ori derivabilă în* (a, b), $0 \notin (a, b)$. *Să se arate că dacă* $\frac{1}{x} \in (a, b)$, *are loc identitatea*

$$\frac{1}{x^{n+1}} f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right) = (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}\left[x^{n-1} f\left(\frac{1}{x}\right)\right].$$

Se va raționa prin recurență relativ la n.

436. *Să se demonstreze următoarea formulă:*

$$\frac{d^n}{dx^n} (\operatorname{arctg} x) = (-1)^{n-1} \frac{(n - 1)!}{(1 + x^2)^{n/2}} \sin\left(n \operatorname{arctg} \frac{1}{x}\right).$$

437. *Să se scrie ecuațiile tangentelor la curbele ale căror ecuații sînt date mai departe, în punctele scrise în dreptul fiecăreia:*

a) $y = \frac{x}{(1 - x^2)^2}$ *în punctul* $\left(2, \frac{2}{9}\right).$

R. $y - \frac{2}{9} = -\frac{5}{27}(x - 2).$

b) $y = \sin^4 x + \cos^4 x$ *în punctul* $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{5}{8}\right).$

R. $y - \frac{5}{8} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{6}\right).$

c) $y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}, \; x > 0,$ *în punctul* $(1, 0).$

R. $y = x - 1.$

438. *Să se găsească un punct pe curba a cărei ecuație este* $y = x \ln x$ *în care tangenta să fie paralelă cu dreapta de ecuație* $y = 2x + 3.$

R. $(e, e).$

439. *Să se găsească un punct pe curba a cărei ecuație este* $y = (x-3)\sqrt{x}$ *în care tangenta să fie paralelă cu dreapta de ecuație* $4y = 9x - 27$.

R. $(4, 2)$.

440. *Să se determine constantele* α *și* β *astfel încît curbele care au respectiv ecuațiile* $y = \dfrac{x}{x+1}$, $y = \alpha x^2 + \beta x + 1$ *să fie tangente în punctul de coordonate* $\left(2, \dfrac{2}{3}\right)$.

R. $\alpha = \dfrac{5}{36}$, $\beta = -\dfrac{4}{9}$.

441. *Să se calculeze distanța de la origine pînă la normala dusă la curba care are ecuația* $y = e^{2x} + x^2$.

R. $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

442. *Să se arate că dacă* $f'(x_0)$ *există, atunci există și* $D'f(x_0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h}$ *(derivata simetrică). Este adevărată afirmația reciprocă?*

443. *Dacă există* $f'_d(x_0)$ *și* $f'_s(x_0)$, *atunci există și* $D'f(x_0)$ *și* $D'f(x_0) = \dfrac{1}{2}[f'_d(x_0) + f'_s(x_0)]$. *Este adevărată afirmația reciprocă?*

4.2. Teoremele lui Rolle, Lagrange, Cauchy și consecințele lor

I. *Teorema lui Rolle.* Fie f o funcție definită pe intervalul I și $a \in I$, $b \in I$, $a < b$. Dacă:

1) f este continuă pe intervalul închis $[a, b]$
2) f este derivabilă pe intervalul deschis (a, b).
3) $f(a) = f(b)$,

atunci există cel puțin un punct c, $a < c < b$, astfel încît $f'(c) = 0$.

II. *Teorema lui Lagrange* (teorema creșterilor finite). Fie f o funcție definită pe intervalul I și $a \in I$, $b \in I$, $a < b$. Dacă:

1) f este continuă pe intervalul închis $[a, b]$

2) f este derivabilă pe intervalul deschis (a, b), atunci există cel puțin un punct c, $a < c < b$, astfel încît

$$f(b) - f(a) = f'(c)\,(b - a).$$

Interpretarea geometrică a teoremei lui Lagrange: între a și b există cel puțin un punct c în care tangenta este paralelă cu coarda subîntinsă de acest arc.

Consecințe ale teoremei lui Lagrange:

Dacă f este o funcție definită pe un interval I și dacă este derivabilă pe acest interval, atunci:

II_1. Dacă $f'(x) = 0$ pentru orice $x \in I$, atunci f este constantă pe intervalul I.

II_2. Dacă $f'(x) > 0$ pe intervalul I, atunci f este strict crescătoare pe acest interval.

II_3. Dacă $f'(x) < 0$ pe intervalul I, atunci f este strict descrescătoare pe acest interval.

III. *Teorema lui Cauchy.* Fie f și g două funcții definite pe intervalul I și $a \in I$, $b \in I$. Dacă:

1) f și g sînt continue pe intervalul închis $[a, b]$
2) f și g sînt derivabile pe intervalul deschis (a, b)
3) $g'(x) \neq 0$ oricare ar fi $x \in (a, b)$,

atunci $g(b) - g(a) \neq 0$ și există cel puțin un punct $\xi \in (a, b)$, astfel încît să aibă loc egalitatea

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

IV. *Proprietăți ale funcțiilor derivate.* Derivata f' a unei funcții derivabile:

a) are proprietatea lui Darboux,
b) nu poate avea discontinuități de prima speță.

Fie f o funcție definită și derivabilă pe intervalul (a, b), mărginit sau nemărginit, și $x_1, x_2, \ldots, x_n$ rădăcinile scrise în ordine crescătoare ale ecuației $f'(x) = 0$. Teorema lui Rolle și proprietatea lui Darboux a funcțiilor continue au drept consecință următoarea teoremă de existență și de separare a rădăcinilor reale ale ecuației $f(x) = 0$:

Dacă doi termeni consecutivi din șirul lui Rolle $f(a), f(x), \ldots, \ldots, f(x_n), f(b)$ au semne contrare, atunci între valorile corespunzătoare ale argumentului se află o rădăcină reală și numai una.

Dacă doi termeni consecutivi din șirul lui Rolle au același semn, între valorile corespunzătoare ale argumentului nu se află nici o rădăcină reală. Pentru simplificare am notat

$$f(a) = \lim_{x\to a} f(x),\ f(b) = \lim_{x\to b} f(x).$$

Să se studieze valabilitatea teoremei lui Rolle pentru următoarele funcţii:

444. $f(x) = \begin{cases} \cos x, \text{ dacă } 0 < x \leqslant \frac{\pi}{4} \\ \sin x, \text{ dacă } \frac{\pi}{4} < x \leqslant \frac{\pi}{2}. \end{cases}$

Deducem că:

1) $f(x)$ este continuă pe segmentul $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,

2) $f(x)$ este derivabilă în intervalele $\left[0, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ şi

$$f'(x) = \begin{cases} -\sin x, & 0 \leqslant x < \frac{\pi}{4} \\ \cos x, & \frac{\pi}{4} < x \leqslant \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

În punctul $x = \frac{\pi}{4}$, studiem derivabilitatea pornind de la definiţie:

$$f'_s\left(\frac{\pi}{4}\right) = \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \cos\frac{\pi}{4}}{x - \frac{\pi}{4}} = -\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$f'_d\left(\frac{\pi}{4}\right) = \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \sin\frac{\pi}{4}}{x - \frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}; \; f'_s\left(\frac{\pi}{4}\right) \neq f'_d\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

3) $f(0) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$

Observăm că în interiorul intervalului $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ nu există nici un punct c astfel ca $f'(c) = 0$. Aceasta, deoarece condiţia I.2 de derivabilitate a funcţiei în intervalul $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ nu este satisfăcută.

445. $f(x) = |x - 1|, \; 0 \leqslant x \leqslant 2.$

Deducem că:

1) $f(x)$ este continuă pe segmentul $[0, 2]$.

2) $f(x)$ este derivabilă în intervalul $[0, 1) \cup (1, 2]$ şi

$$f'(x) = \begin{cases} -1, & 0 \leqslant x < 1 \\ 1, & 1 < x \leqslant 2. \end{cases}$$

În punctul $x = 1$, studiem derivabilitatea pornind de la definiţie:

$$f'_s(1) = \lim_{x \to 1} \frac{1 - x}{x - 1} = -1, \; f'_d(1) = \lim_{x \to 1} \frac{x - 1}{x - 1}, \; f'_s(1) \neq f'_d(1)$$

3) $f(0) = f(2) = 1.$

Nu există nici un punct $c \in (0, 2)$ astfel ca $f'(c) = 0$. Aceasta, deoarece condiţia I.2 de derivabilitate nu este satisfăcută în intervalul $(0,2)$.

446. $f(x) = |x - 1|^3, \; 0 \leqslant x \leqslant 2.$

Deducem că:

1) $f(x)$ este continuă în $[0, 2]$.

2) $f(x)$ este derivabilă în intervalul $(0, 2)$ şi

$f'(x) = 3(x - 1)|x - 1|.$

3) $f(0) = f(2) = 1.$

Condiţiile enunţate în teorema lui Rolle sînt satisfăcute. Punctul c este $x = 1$ şi $f'(1) = 0.$

447. *Să se afle numărul rădăcinilor reale ale ecuaţiei*

$$x^3 + 2x^2 - 7x + 1 = 0$$

şi să se separe aceste rădăcini.

Fie $f(x) = x^3 + 2x^2 - 7x + 1, \; x \in (-\infty, \infty)$; $f'(x) = 3x^2 + 4x - 7$; $f'(x) = 0$ pentru $x_1 = -\frac{7}{3}, x_2 = 1$; $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to \infty} f(x) = +\infty$. Şirul lui Rolle este

$$-\infty, \; \frac{419}{27}, \; -3, \; \infty$$

şi prezintă trei variaţii de semn.

Prin urmare ecuația are trei rădăcini reale situate respectiv în intervalele $\left(-\infty, -\frac{7}{3}\right), \left(-\frac{7}{3}, 1\right)$ $(1, \infty)$.

448. *Să se discute, după valorile parametrului m, rădăcinile reale ale următoarelor ecuații:*

a) $x^2 - x - \ln x + m = 0$.

Notăm $f(x) = x^2 - x - \ln x + m$. Funcția $f(x)$ este definită și derivabilă în intervalul $(0, \infty)$. Deducem

$$f'(x) = 2x - 1 - \frac{1}{x} = \frac{2x^2 - x - 1}{x}; \ x_1 = 1; \ \lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = m + \lim_{x\to\infty} x^2\left(1 - \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x^2}\right) = +\infty$$

$\left(\text{am ținut seama că } \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0\right)$.

Șirul lui Rolle este

$$+\infty, \ m, \ +\infty.$$

Dacă $m > 0$, ecuația nu are nici o rădăcină reală. Dacă $m < 0$, ecuația are două rădăcini reale în intervalele $(0,1)$, $(1,\infty)$. Dacă $m = 0$, ecuația are pe $x = 1$ rădăcină dublă.

b) $2mx^3 + x^2 - 4m = 0$.

Notăm $f(x) = 2mx^3 + x^2 - 4m$. Funcția $f(x)$ este definită și derivabilă în intervalul $(-\infty,\infty)$. Găsim $f'(x) = 6mx^2 + 2x$. Dacă $m = 0$, ecuația admite pe $x = 0$ rădăcină dublă.

Presupunem $m < 0$. În acest caz, $x_1 = 0$, $x_2 = -\frac{1}{3m}$.

Șirul lui Rolle este

$$+\infty, \ -4m, \ g(m) = \frac{-108m^3 + 1}{27m^3}, \ -\infty.$$

Deoarece $g(m) > 0$, rezultă că ecuația admite o singură rădăcină reală, situată în intervalul $\left(-\frac{1}{3m}, \infty\right)$.

Presupunem $m > 0$. Șirul lui Rolle este

$$-\infty, \ g(m), \ -4m, \ +\infty.$$

Dar $g(m) = 0$ pentru $m = \frac{1}{\sqrt[3]{108}}$; dacă $m < \frac{1}{\sqrt[3]{108}}$, $g(m) > 0$ și ecuația are trei rădăcini reale, situate respectiv în intervalele $\left(-\infty, -\frac{1}{3m}\right)$, $\left(-\frac{1}{3m}, 0\right)$, $(0,\infty)$. Dacă $m = \frac{1}{\sqrt[3]{108}}$, ecuația are o rădăcină dublă $x = -\frac{1}{3\sqrt[3]{108}}$ și o rădăcină simplă situată în intervalul $(0, \infty)$. Dacă $m > \frac{1}{\sqrt[3]{108}}$, $g(m) < 0$ și deci ecuația are o singură rădăcină reală în intervalul $(0, \infty)$.

Să se demonstreze următoarele inegalități:

449. $\frac{x}{1+x^2} < \operatorname{arctg} x$, $x \in (0, \infty)$.

Notăm $f(x) = \frac{x}{1+x^2} - \operatorname{arctg} x$. Deducem $f'(x) = -\frac{2x^2}{(1+x^2)^2}$.

Dar $f'(x) < 0$ pentru $x > 0$, deci $f(x)$ este descrescătoare pentru $x > 0$.

Deoarece $f(0) = 0$ și din faptul că $f(x)$ este descrescătoare pentru $x > 0$, rezultă că $f(x) < 0$ cînd $x > 0$.

De aici rezultă inegalitatea cerută.

450. $\operatorname{tg} x > x + \frac{x^3}{3}$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Fie $f(x) = \operatorname{tg} x - x - \frac{x^3}{3}$. Avem

$$f'(x) = \frac{\sin^2 x - x^2\cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{(\sin x + x\cos x)(\sin x - x\cos x)}{\cos^2 x}.$$

Notăm $g(x) = \sin x - x\cos x$; deci $g'(x) = x\sin x$; $g'(x) > 0$ pentru $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, prin urmare în acest interval $g(x)$ este crescătoare. Deoarece $g(0) = 0$, rezultă că $g(x) > 0$ pentru $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Deci în intervalul $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ avem $f'(x) > 0$.

Deoarece $f(0) = 0$, rezultă că $f(x) > 0$ în intervalul considerat. Prin urmare $\operatorname{tg} x > x + \frac{x^3}{3}$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

451. *Să se studieze semnul funcției*

$$f(x) = \ln(x^2 + 1) - x$$

în intervalul $(-\infty, \infty)$.

Derivata este $f'(x) = \frac{2x}{1+x^2} - 1 = -\frac{(x-1)^2}{1+x^2} \leqslant 0$. Funcţia $f(x)$ este descrescătoare pe toată axa. Deoarece $f(0) = 0$, rezultă că $f(x) > 0$ pentru $x < 0$ şi $f(x) < 0$ pentru $x > 0$.

452. *Să se studieze aplicabilitatea teoremei lui Lagrange în cazul funcţiei*

$$f(x) = \begin{cases} x, & 1 \leqslant x \leqslant 2 \\ \frac{x^2}{4} + 1, & 2 < x \leqslant 3. \end{cases}$$

Deducem că:

1) $f(x)$ este continuă, deoarece $f(2) = \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f(x) = 2$,

2) $f(x)$ este derivabilă în intervalul $(1, 3)$ şi

$$f'(x) = \begin{cases} 1, & 1 \leqslant x < 2 \\ \frac{x}{2}, & 2 < x \leqslant 3. \end{cases}$$

$\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$

În punctul $x = 2$, calculăm derivata pornind de la definiţie şi obţinem

$$f_s'(2) = \lim_{\substack{x\to 2\\ x<2}} \frac{x-2}{x-2} = 1; f_d'(2) = \lim_{\substack{x\to 2\\ x>2}} \frac{\frac{x^2}{4}+1-2}{x-2} = \frac{1}{4} \lim \frac{x^2-4}{x-2} = 1.$$

Rezultă că $f'(2) = 1$.

Teorema lui Lagrange afirmă existenţa cel puţin a unui punct c, astfel încît

$$f(3) - f(1) = 2\, f'(c), \text{ sau } \frac{9}{8} = f'(c).$$

Pentru $2 < c < 3$, relaţia devine $\frac{c}{2} = \frac{9}{8}$, de unde $c = \frac{9}{4}$.

453. *Pe curba care are ecuaţia* $f(x) = \frac{1}{x}$ *să se determine un punct* $P(a, b)$ *în care tangenta să fie paralelă cu coarda ce uneşte punctele* $A\ (1, 1)$ *şi* $B\left(2, \frac{1}{2}\right)$.

Ţinînd seama de interpretarea geometrică a teoremei lui Lagrange, avem $f(2) - f(1) = f'(a)$, de unde $a = \sqrt{2}$, $b = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

454. *Să se demonstreze următoarele inegalităţi, folosind teorema lui Lagrange:*

a) $|\sin b - \sin a| \leqslant |b - a|$.

Fie $f(x) = \sin x$, $x \in [a,b]$; $f(x)$ este continuă şi derivabilă pe segmentul $[a,b]$ şi deci conform teoremei lui Lagrange avem

$$f(b) - f(a) = f'(c)\ (b-a),\ a < c < b,$$

adică

$$\sin b - \sin a = (b-a) \cos c.$$

Dar

$$|\sin b - \sin a| = |\cos c|\ |b-a| \leqslant |b-a|,$$

deoarece $|\cos c| \leqslant 1$; deci $|\sin b - \sin a| \leqslant |b-a|$.

b) $\frac{b-a}{\cos^2 a} \leqslant \operatorname{tg} b - \operatorname{tg} a \leqslant \frac{b-a}{\cos^2 b}$, $0 \leqslant a < b < \frac{\pi}{2}$.

Fie $f(x) = \operatorname{tg} x$, $x \in [a, b]$; $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$. Formula lui Lagrange se scrie

$$\operatorname{tg} b - \operatorname{tg} a = \frac{1}{\cos^2 c}(b-a),\ a < c < b.$$

Funcţia $\cos x$ este descrescătoare pe segmentul $[a, b]$ şi deci

$$\frac{1}{\cos^2 a} < \frac{1}{\cos^2 c} < \frac{1}{\cos^2 b},$$

de unde rezultă inegalitatea cerută.

455. *Folosind teorema* II_1 *să se demonstreze următoarele egalităţi:*

a) $\arccos \frac{1-x^2}{1+x^2} = 2 \operatorname{arctg} x,\ x \in [0, \infty)$.

Fie funcţia $f(x) = \arccos \frac{1-x^2}{1+x^2} - 2 \operatorname{arctg} x$, definită în intervalul $(-\infty, \infty)$ şi derivabilă în orice punct, cu excepţia originii:

$$f'(x) = \frac{2x}{|x|(1+x^2)} - \frac{2}{1+x^2}.$$

Dacă $x \in (0, \infty), f'(x) = 0$. Rezultă în baza teoremei II_1 că $f(x) = c$. Constanta se determină dînd lui x o valoare particulară din intervalul considerat, fie aceasta $x = 1$; $f(1) = \arccos 0 - 2 \operatorname{arctg} 1 = 0 = C$. Observăm că și $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$. Prin urmare, $f(x) = 0, \; x \in [0, \infty)$.

b) $2 \operatorname{arctg} x + \arcsin \dfrac{2x}{1 + x^2} = \begin{cases} \pi, \text{ dacă } x \in [1, \infty) \\ -\pi, \text{dacă } x \in (-\infty, -1]. \end{cases}$

Fie funcția $f(x) = 2 \operatorname{arctg} x + \arcsin \dfrac{2x}{1 + x^2}$, definită în intervalul $(-\infty, \infty)$ și derivabilă pentru orice punct x, cu excepția punctelor $x = -1$ și $x = +1$:

$$f'(x) = \frac{2(1 - x^2)}{|1 - x^2|(1 + x^2)} + \frac{2}{1 + x^2}.$$

Însă dacă $|x| > 1$, atunci $|1 - x^2| = x^2 - 1$ și deci $f'(x) = -\dfrac{2}{1 + x^2} + \dfrac{2}{1 + x^2} = 0$.

Prin urmare $f(x) = C_1$ pentru $x \in (-\infty, -1)$ și $f(x) = C_2$ pentru $x \in (1, \infty)$.

Constantele C_1 și C_2 se determină dînd lui x valori particulare în intervalele $(-\infty, -1), (1, \infty)$. Avem

$$C_2 = f(\sqrt{3}) = \operatorname{arctg} \sqrt{3} + \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = \pi$$

$$C_1 = f(-\sqrt{3}) = 2 \operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) + \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \pi$$

De asemenea, $f(1) = \pi, f(-1) = -\pi$. Rezultă că

$$f(x) = \begin{cases} \pi, \; x \in [1, \infty) \\ -\pi, \; x \in (-\infty, -1]. \end{cases}$$

Dacă $|x| < 1$, atunci $f'(x) = \dfrac{4}{1 + x^2}$ și deci $f(x) = 4 \operatorname{arctg} x + C$.

Determinînd ca mai sus constanta C, obținem $C = 0$.

456. *Să se demonstreze că f și g diferă printr-o constantă pe anumite intervale. Să se determine intervalele și valorile corespunzătoare ale constantelor în următoarele cazuri:*

a) $f(x) = \arcsin x, \; g(x) = -\arccos x$.

Fie $h(x) = \arcsin x + \arccos x$; funcția $h(x)$ este definită pe segmentul $[-1, 1]$ și derivabilă în intervalul $(-1, 1)$:

$$h'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} = 0.$$

Rezultă că $h(x) = C$ pentru $x \in (-1, 1)$; C se determină ca și în exercițiile precedente, dînd lui x o valoare particulară din intervalul considerat, de exemplu fie $x = 0$. Avem $h(0) = \arcsin 0 + \arccos 0 = \dfrac{\pi}{2} = C$. Deducem că egalitatea are loc și în punctele $x = \pm 1$. Prin urmare intervalul cerut în enunț este $[-1, 1]$, iar constanta corespunzătoare este $\dfrac{\pi}{2}$.

b) $f(x) = \operatorname{arctg} x, \; g(x) = -\operatorname{arctg} \dfrac{1}{x}$.

Fie $h(x) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x}$; funcția $h(x)$ este definită și derivabilă pentru $x \neq 0$. Găsim $h'(x) = 0$, deci

$$h(x) = \begin{cases} C_1 \text{ pentru } x \in (-\infty, 0) \\ C_2 \text{ pentru } x \in (0, \infty). \end{cases}$$

Determinînd constantele ca în exercițiile precedente, obținem

$$C_1 = -\frac{\pi}{2}, \quad C_2 = \frac{\pi}{2}. \text{ Prin urmare}$$

$$\operatorname{arctg} x = \begin{cases} -\operatorname{arctg} \dfrac{1}{x} - \dfrac{\pi}{2} \text{ pentru } x \in (-\infty, 0) \\ -\operatorname{arctg} \dfrac{1}{x} + \dfrac{\pi}{2} \text{ pentru } x \in (0, \infty). \end{cases}$$

Intervalele cerute sînt $(-\infty, 0), (0, \infty)$; constantele sînt respectiv $-\dfrac{\pi}{2}$ și $\dfrac{\pi}{2}$.

457. *Să se studieze semnul următoarei funcții în intervalul specificat*

$$f(x) = \sin x \operatorname{tg} x - 2x, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Deducem $f'(x) = \dfrac{\cos^3 x - 2 \cos^2 x - 1}{\cos^2 x}$. Fie $g(x) = \cos^3 x - 2 \cos^2 x - 1$; avem $g'(x) = \cos x \sin x (4 - 3 \cos x)$; $g'(x) > 0$

pentru $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ şi $g'(x) < 0$ pentru $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$. Din relaţiile $g\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$ şi $g'(x) < 0$ pentru $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$, rezultă că $g(x) < 0$ în intervalul $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$. Din relaţiile $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$ şi $g'(x) > 0$, dacă $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, rezultă că $g(x) < 0$ în intervalul $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Deoarece $f'(x) = \frac{g(x)}{\cos^2 x}$, rezultă că $f'(x) < 0$ în intervalul $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, deci $f(x)$ este descrescătoare. Deoarece $f(0) = 0$, rezultă că $f(x) > 0$ în intervalul $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ şi $f(x) < 0$ în intervalul $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

458. *Să se determine constanta ξ care intervine în formula lui Cauchy pentru următoarele funcţii:*

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+3}, & -2 \leqslant x < 1 \\ \frac{x}{4} + \frac{7}{4}, & 1 \leqslant x \leqslant 5 \end{cases}, \quad g(x) = x.$$

Funcţia $g(x)$ este continuă şi derivabilă pe segmentul $[-2, 5]$; pentru funcţia $f(x)$ este necesar să verificăm continuitatea şi derivabilitatea numai în punctul $x = 1$. Avem,

$$f(1) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x) = 2$$

$$f'_s(1) = \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{x - 1}{(x-1)(\sqrt{x+3} + 2)} = \frac{1}{4};$$

$$f'_d(1) = \lim_{x \to 1} \frac{\frac{x}{4} + \frac{7}{4} - 2}{x - 1} = \frac{1}{4}.$$

Deci

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x+3}}, & -2 \leqslant x \leqslant 1 \\ \frac{1}{4}, & 1 < x \leqslant 5 \end{cases}, \quad g'(x) = 1.$$

Aplicînd formula lui Cauchy, obţinem

$$\frac{2}{7} = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{\xi + 3}}, & \text{dacă } \xi \in [-2, 1] \\ \frac{1}{4}, & \text{dacă } \xi \in [1, 5] \end{cases}$$

ceea ce evident, este imposibil.

Prin urmare $\frac{2}{7} = \frac{1}{2\sqrt{\xi + 3}}$; $\xi = \frac{1}{16}$.

459. *Fie funcţia $f : (a, b) \to R$ şi $x_0 \in (a, b)$, $a < b$.*

Să se arate că:

1) *Dacă f este:*

a) *continuă pe $[x_0, b)$*

b) *derivabilă pe (x_0, b)*

c) *$f'(x_0 + 0) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f'(x)$ există şi este finită, atunci*

$$f'(x_0 + 0) = f'_d(x_0).$$

Să aplicăm teorema lui Lagrange funcţiei f în intervalul $[x_0, x]$, $x_0 < x < b$:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(c), \quad x_0 < c < x;$$

trecînd la limită în ambii membri, obţinem

$$f'_d(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f'(x) = f'(x_0 + 0).$$

Propunem cititorului să demonstreze în mod analog următoarea propoziţie:

2) Dacă f este:

a) continuă pe $(a, x_0]$

b) derivabilă pe (a, x_0)

c) $f'(x_0 - 0) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f'(x)$ există şi este finită, atunci

$$f'(x_0 - 0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f'(x).$$

460. *Să se calculeze derivata funcţiei*

$$f(x) = \arccos \frac{1 - x^2}{1 + x^2}, \quad x\ (-\infty, \infty).$$

Funcția dată este derivabilă pentru $\frac{1-x^2}{1+x^2} \neq \pm 1$, ceea ce are loc dacă $x \neq 0$, și

$$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}} \frac{-2x(1+x^2)-2x(1-x^2)}{(1+x^2)^2} =$$

$$= \frac{2x}{(1+x^2)\,|x|}.$$

Deci

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2}{1+x^2}, \text{ dacă } x > 0 \\ -\frac{2}{1+x^2}, \text{ dacă } x < 0. \end{cases}$$

Aplicînd rezultatul obținut anterior, avem

$$f'_d(0) = \lim_{x\to 0} \frac{2}{1+x^2} = 2,\ f'_s(0) = \lim_{x\to 0}\left(-\frac{2}{1+x^2}\right) = -2.$$

Deci în punctul $x = 0$ funcția nu este derivabilă.

461. *Să se arate că șirul* $a_n = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \ldots + \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha \neq 1$, *este convergent dacă* $\alpha > 1$ *și divergent dacă* $\alpha < 1$.

Aplicăm teorema creșterilor finite funcției $f(x) = \frac{1}{x^{\alpha-1}}$ pentru valorile n și $n+1$. Avem,

$$\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{n^{\alpha-1}} = \frac{1-\alpha}{(n+\theta)^\alpha},\ 0 < \theta < 1.$$

Cazul 1: $\alpha < 1$. Ținînd seama că

$$\frac{1-\alpha}{(n+1)^\alpha} < \frac{1-\alpha}{(n+\theta)^\alpha} < \frac{1-\alpha}{n^\alpha},$$

deducem

$$\frac{1-\alpha}{(n+1)^\alpha} < \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{n^{\alpha-1}} < \frac{1-\alpha}{n^\alpha}. \qquad (1)$$

În inegalitățile (1), dînd lui n succesiv valorile $1, 2, \ldots, n$, obținem:

$$\text{pentru } n = 1:\ \frac{1-\alpha}{2^\alpha} < \frac{1}{2^{\alpha-1}} - \frac{1}{1^{\alpha-1}} < \frac{1-\alpha}{1^\alpha}$$

$$\text{pentru } n = 2:\ \frac{1-\alpha}{3^\alpha} < \frac{1}{3^{\alpha-1}} - \frac{1}{2^{\alpha-1}} < \frac{1-\alpha}{2^\alpha} \qquad (2)$$

. . . .

$$\text{pentru } n = n:\ \frac{1-\alpha}{(n+1)^\alpha} < \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{n^{\alpha-1}} < \frac{1-\alpha}{n^\alpha}.$$

Adunînd inegalitățile (2) și împărțind cu $1-\alpha$, găsim

$$\frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \ldots + \frac{1}{(n+1)^\alpha} < \frac{1}{1-\alpha}\left[\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} - 1\right] < \frac{1}{1^\alpha} + \frac{1}{2^\alpha} + \ldots + \frac{1}{n^\alpha}.$$

A doua inegalitate se mai poate scrie

$$a_n > \frac{1}{1-\alpha}\left[(n+1)^{1-\alpha} - 1\right]$$

și, deoarece $\lim_{n\to\infty} (n+1)^{1-\alpha} = \infty$, rezultă că și $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$.

Cazul 2: $\alpha > 1$. Pornind de la inegalitățile

$$\frac{1-\alpha}{n^\alpha} < \frac{1-\alpha}{(n+\theta)^\alpha} < \frac{1-\alpha}{(n+1)^\alpha},\ 1-\alpha < 0,$$

și procedînd ca în cazul 1, obținem următoarele inegalități

$$\frac{1}{2^\alpha} + \ldots + \frac{1}{(n+1)^\alpha} < \frac{1}{1-\alpha}\left[\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} - 1\right] < \frac{1}{1^\alpha} + \frac{1}{2^\alpha} \ldots + \frac{1}{n^\alpha}.$$

Din prima inegalitate deducem

$$a_{n+1} - 1 < \frac{1}{\alpha-1} \quad \text{sau } a_{n+1} < \frac{\alpha}{\alpha-1},$$

oricare ar fi n. Șirul a_n, fiind crescător și mărginit, este convergent și $\lim_{n\to\infty} a_n \leqslant \frac{\alpha}{\alpha-1}$.

Din a doua inegalitate, care se mai scrie

$$a_n > \frac{1}{1-\alpha}\left[\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} - 1\right],$$

rezultă $\lim_{n\to\infty} a_n \geqslant \frac{1}{\alpha-1}$. Deci

$$\frac{1}{\alpha-1} < \lim_{n\to\infty} a_n < \frac{\alpha}{\alpha-1}.$$

462. *Să se stabilească inegalitatea*

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n},$$

numerele $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *fiind pozitive.*

Demonstrăm inegalitatea folosind metoda inducţiei. Ea este adevărată pentru $n = 2$. Într-adevăr, din inegalitatea

$(\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2})^2 = a_1 + a_2 - 2\sqrt{a_1 a_2} \geqslant 0$ obţinem $\sqrt{a_1 a_2} \leqslant \frac{a_1 + a_2}{2}$,

egalitatea $\sqrt{a_1 a_2} = \frac{a_1 + a_2}{2}$ avînd loc numai dacă $a_1 = a_2$.

Presupunem inegalitatea adevărată pentru $n - 1$, adică

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}}{n-1} \geqslant \sqrt[n-1]{a_1 a_2 \ldots a_{n-1}},$$

egalitatea avînd loc numai dacă $a_1 = a_2 = \ldots = a_{n-1}$.

Să considerăm funcţia

$$f(x) = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + x}{n} - \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_{n-1} x}, \quad 0 < x < \infty;$$

atunci

$$f'(x) = \frac{1}{n} - \frac{\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_{n-1}}}{n} x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{x^{\frac{1}{n}-1}}{n}\left[x^{1-\frac{1}{n}} - \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_{n-1}}\right]$$

şi $f'(x) = 0$ dacă $x^{1-\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_{n-1}}$, de unde $x = \sqrt[n-1]{a_1 a_2 \ldots a_{n-1}}$.

Deoarece $f'(x) < 0$ dacă $x < \sqrt[n-1]{a_1 a_2 \ldots a_{n-1}}$, $f'(x) > 0$ dacă $x > \sqrt[n-1]{a_1 a_2 \ldots a_{n-1}}$, funcţia $f(x)$ are un minim în punctul $x = \sqrt[n-1]{a_1 \cdot a_2 \ldots a_{n-1}}$, valoarea minimului fiind

$$f\left(\sqrt[n-1]{a_1 a_2 \ldots a_{n-1}}\right) = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + \sqrt[n-1]{a_1 a_2 \ldots a_{n-1}}}{n} -$$

$$- \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_{n-1}} \sqrt[n(n-1)]{a_1 a_2 \ldots a_{n-1}} =$$

$$= \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + \sqrt[n-1]{a_1 a_2 \ldots a_{n-1}}}{n} - \sqrt[n-1]{a_1 a_2 \ldots a_{n-1}} =$$

$$= \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} - (n-1)\sqrt[n-1]{a_1 a_2 \ldots a_{n-1}}}{n}.$$

Minimul fiind pozitiv în virtutea ipotezei, rezultă că $f(x) \geqslant 0$, oricare ar fi $x > 0$.

Egalitatea subzistă numai dacă minimul este nul, adică dacă numerele $a_1 a_2, \ldots, a_{n-1}$ sînt egale: $a_1 = a_2 = \cdots = a_{n-1} = a$, şi atunci $x = \sqrt[n-1]{a_1 a_2 \ldots a_{n-1}} = a$.

463. *Să se arate că dacă funcţia f definită în intervalul mărginit* (a, b) *este nemărginită în acest interval, atunci şi* $f'(x)$ *este nemărginit în acest interval.*

Fiind continuă dar nemărginită în (a, b), funcţia f este nemărginită în vecinătatea cel puţin a unuia din capetele intervalului.

Să presupunem că derivata $f'(x)$ este mărginită, deci că $|f'(x)| < M$ dacă $x \in (a, b)$, şi fie c un punct arbitrar din (a, b). Avem

$$||f(x)| - |f(c)|| \leqslant |f(x) - f(c)| = |f'(\xi)|\,|x - c| < M\,|x - c|.$$

Rezultă că

$$-M\,|x - c| + |f(c)| < |f(x)| < |f(c)| + M\,|x - c|,$$

ceea ce înseamnă că şi f este mărginită pe (a, b), contrar ipotezei.

Se pot da exemple care să arate că proprietatea din enunţ nu are loc dacă intervalul (a, b) este nemărginit.

464. *Fie f o funcţie definită pe un interval I, cu valori reale. Notăm*

$$\Delta^1 f(x;\, h_1) = f(x + h_1) - f(x)$$

şi apoi prin recurenţă

$$\Delta^p f(x;\, h_1, h_2, \ldots, h_{p-1} h_p) = \Delta^{p-1} f(x + h_p, h_1, h_2, \ldots, h_{p-1}) -$$
$$- \Delta^{p-1} f(x;\, h_1, h_2, \ldots, h_{p-1}),$$

aceste funcţii fiind definite pentru orice $x \in I$ *dacă* h_i *sînt destul de mici.*

Să se arate că dacă funcţia f admite într-o vecinătate a punctului x derivată de ordinul n, continuă în punctul x, are loc relaţia

$$\lim_{h_1, h_2, \ldots, h_n \to 0} \frac{\Delta^n f(x;\, h_1, \ldots, h_n)}{h_1, h_2, \ldots h_n} = f^{(n)}(x).$$

Vom demonstra prin recurenţă că

$$\Delta^n f(x;\, h_1, \ldots, h_n) = h_1 h_2 \ldots h_n f^{(n)}(x + \theta_1 h_1 + \ldots + \theta_n h_n),\ 0 < \theta_i < 1.$$

Relaţia se verifică pentru $n = 1$: $\Delta^1 f(x;\, h_1) = h_1 f'(x + \theta_1 h_1)$.

Presupunem că relaţia este adevărată pentru $n - 1$, deci

$$\Delta^{n-1} f(x;\, h_1 h_2, \ldots, h_{n-1}) = h_1 h_2 \ldots h_{n-1} f^{(n-1)}(x + \theta_1 h_1 + \ldots + \theta_{n-1} h_{n-1})$$

şi vom arăta că este adevărată şi pentru numărul n.

Într-adevăr,

$$\Delta^n f(x;\, h_1 h_2, \ldots, h_n) = \Delta^{n-1} f(x + h_n;\, h_1 h_2, \ldots h_{n-1}) -$$
$$\Delta^{n-1} f(x;\, h_1, h_2, \ldots, h_{n-1}) = h_1 h_2 \ldots h_{n-1}\, [f^{(n-1)}(x + h_n + \theta_1 h_1 +$$
$$+ \ldots + \theta_{n-1} h_{n-1}) - f^{(n-1)}(x + \theta_1 h_1 + \theta_2 h_2 + \ldots + \theta_{n-1} h_{n-1})] =$$
$$= h_1 h_2 \ldots h_n f^n(x + \theta_1 h_1 + \ldots + \theta_n h_n),\ 0 < \theta_i < 1. \text{ Atunci}$$
$$\frac{\Delta^n f(x;\, h_1, \ldots, h_n)}{h_1 h_2 \ldots h_n} = \frac{\Delta^{n-1}(x + h_n;\, h_1, \ldots, h_{n-1}) - \Delta^{n-1} f(x;\, h_1, h_2, \ldots h_{n-1})}{h_1 h_2 \ldots h_n} =$$
$$= \frac{h_1 h_2 \ldots h_{n-1}\, [f^{(n-1)}(x + h_n + \theta_1 h_1 + \ldots + \theta_{n-1} h_{n-1}) - f^{(n-1)}(x + \theta_1 h_1 + \ldots + \theta_{n-1} h_{n-1})]}{h_1 h_2 \ldots h_n} =$$
$$= f^{(n)}(x + \theta_1 h_1 + \ldots + \theta_n h_n)$$

și

$$\lim_{h_1, h_2, \ldots, h_n \to 0} \frac{\Delta^n f(x;\, h_1, \ldots, h_n)}{h_1 h_2 \ldots h_n} =$$
$$= \lim_{h_1, h_2, \ldots, h_n \to 0} f^{(n)}(x + \theta_1 h_1 + \ldots + \theta_n h_n) = f^{(n)}(x).$$

Exerciții propuse spre rezolvare

465. *Să se cerceteze aplicabilitatea teoremei lui Rolle în cazul următoarelor funcții:*

a) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + 1}, & x \in [-1, 0]. \\ \sqrt{x + 1}, & x \in (0, 1]. \end{cases}$ **R.** Nu este aplicabilă.

b) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + x + 4}, & x \in [0, 3]. \\ \frac{x^2}{4} + 2, & x \in [-2\sqrt{2}, 0). \end{cases}$ **R.** Nu este aplicabilă.

c) $f(x) = |\sin x|,\quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. **R.** Nu este aplicabilă.

d) $f(x) = |\sin^3 x|,\quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. **R.** Este aplicabilă, $c = 0$.

e) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 7},\quad x \in [-3, 3]$. **R.** Este aplicabilă, $c = 0$.

466. *Să se determine valoarea c care intervine în teorema lui Lagrange pentru următoarele funcții:*

a) $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in [0, 1] \\ 2x - 1, & x \in (1, 2]. \end{cases}$ **R.** $c = \frac{3}{4}$.

b) $f(x) = |\sin x|\ \mathrm{sign}(\sin x),\ x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. **R.** $c = \arccos \frac{2}{\pi}$.

c) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x + 1}, & x \in (0, 3) \\ \frac{x}{2} + 1, & x \in [-4, 0]. \end{cases}$ **R.** $c = \frac{13}{36}$.

467. *Să se demonstreze următoarele egalități:*

a) $\arcsin \sqrt{1 - x^2} + \arccos x = +\frac{\pi}{2},\ x \in (-1, 0)$.

b) $\mathrm{arctg}\, x + \mathrm{arctg}\, \frac{1 - x}{1 + x} = \begin{cases} \frac{\pi}{4}, & x \in (-1, \infty) \\ \frac{-3\pi}{4}, & x \in (-\infty, -1). \end{cases}$

c) $\arcsin x + 3 \arccos x + \arcsin 2x\sqrt{1 - x^2} = \frac{3\pi}{2}$,

$x \in \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Să se demonstreze următoarele inegalități:

468. $e^x > 1 + x,\ x \neq 0$.

469. $x \cos x < \sin x,\quad x \in \left(0, \frac{5\pi}{4}\right)$.

470. $x \cos x > \sin x,\quad x \in \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$.

471. $2 \sin x < x^2 \sin x + 2x \cos x,\quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

472. $2\,|x| > x^2,\quad x \in (-2, 0) \cup (0, 2)$.

473. $\arcsin x > x + \frac{x^3}{6},\quad x \in (0, 1)$.

474. $|\cos b - \cos a| \leqslant |b - a|$.

475. $(a-b)pb^{p-1} < a^p - b^p < (a-b)pa^{p-1}$, $a > b > 0$, $p > 1$.

476. $\frac{a-b}{a} \leqslant \ln\frac{a}{b} \leqslant \frac{a-b}{b}$, $0 < b < a$.

477. *Să se determine numărul rădăcinilor reale și să se separe rădăcinile următoarelor ecuații:*

a) $x^6 + 2x^4 + x^2 - 3 = 0$.
R. Două rădăcini situate în intervalele $(-\infty, 0)$, $(0, \infty)$.

b) $x^5 - 3x^4 + 4x^3 - 2 = 0$.

R. O rădăcină în intervalul $(0, \infty)$.

c) $x^5 - 2x^4 + x^3 - 4 = 0$.

R. O rădăcină în intervalul $(1, \infty)$.

d) $2 \ln x + mx^2 + 7 = 0$, $x > 0$.
R. Dacă $m > 0$, o rădăcină în intervalul $(0, \infty)$. Dacă $m < 0$, și $m > -e^6$, o rădăcină în intervalul $\left(0, \sqrt{-\frac{1}{m}}\right)$. Dacă $m < 0$ și $m < -e^6$, o rădăcină în intervalul $\left(\sqrt{-\frac{1}{m}}, \infty\right)$. Dacă $m = -e^6$, o rădăcină în $(0, \infty)$.

478. *Să se determine abscisa unui punct c în care tangenta la curba de ecuație, $f(x) = \sqrt{x+1}$ este paralelă cu coarda ce unește punctele $x = 0$ și $x = 3$.*

R. $c = \frac{5}{4}$.

479. *Să se determine valoarea care intervine în formula lui Cauchy în cazul următoarelor funcții:*

a) $f(x) = \ln x$, $g(x) = \frac{e}{x}$, $x \in [1, e]$.

R. $c = \frac{e}{e-1}$.

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{3} - x^2 + 1, & x \in (1, 3] \\ -x + \frac{4}{3}, & x \in [0, 1] \end{cases}$, $g(x) = x$.

R. $c = \frac{2\sqrt{2}}{3} + 1$; $c = \frac{1}{9}$.

480. *Să se arate că funcția*

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x, \quad x > 0,$$

este crescătoare, iar funcția

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1}, \quad x > 0,$$

este descrescătoare și ambele au aceeași limită.

481. *Fie $f: [a, b] \to R$ derivabilă și $|f'(x)| < M$ dacă $x \in [a, b]$. Folosind teorema creșterilor finite, să se arate că funcția este uniform continuă iar δ (ε) care intervine în definiția continuității uniforme poate fi egal cu $\frac{\varepsilon}{M}$. Să se determine apoi $\delta(\varepsilon)$ pentru următoarele funcții:*

a) $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $1 \leqslant x \leqslant 2$.
b) $f(x) = e^{-x}$, $2 \leqslant x \leqslant 3$.
c) $f(x) = \arcsin x$, $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$.
d) $f(x) = \ln x$, $a \leqslant x \leqslant b$, $a > 0$.

482. *Să se arate că dacă $f: [a, b] \to R$ este pozitivă și derivabilă, există egalitatea*

$$\frac{f(b)}{f(a)} = e^{(b-a)\frac{f'(c)}{f(c)}}, \quad a < c < b.$$

Se aplică formula creșterilor finite funcției $\ln f(x)$.

483. *Să se arate că șirul avînd termenul general*

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n$$

este convergent și limita sa l este cuprinsă între 0 și 1 (l se numește constanta lui Euler).

Se aplică formula creșterilor finite funcției $f(x) = \ln x$ în intervalul $[n, n+1]$ și se procedează ca în exercițiul 461.

484. *Fie f și g două funcții definite pe $[a, b]$ de n ori derivabile pe acest interval și $x_0 \in (a, b)$. Dacă:*

a) $f^{(k)}(x_0) = g^{(k)}(x_0)$, $k = 0, 1, \dots, n-1$
b) $f^{(n)}(x) > g^{(n)}(x)$ pentru $x > x_0$,

atunci are loc inegalitatea $f(x) > g(x)$ pentru $x > x_0$.

485. *Să se arate că dacă funcția f este definită și derivabilă de n ori pe $(-\infty, \infty)$, $f^{(n)}(x) = 0$, $x \in (-\infty, \infty)$, atunci f este un polinom de gradul $n - 1$.*

Proprietatea este adevărată pentru $n = 1$. Se raționează prin recurență de la $n - 1$ la n.

486. *Să se arate că derivata funcției* $f(x) = \frac{x^6}{6} - \frac{3}{2}x^2$ *are cel puțin o rădăcină cuprinsă între* 1 *și* 2.

487. *Fie* $f\colon [a, b] \to R$. *Este posibil ca pentru fiecare punct* $\xi \in [a, b]$ *să existe două puncte* $x_1, x_2 \in [a, b]$ *astfel ca*

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi), \quad x < x_2?$$

Se consideră $f(x) = x^3$.

488. *Fie* f *o funcție definită pe* (a, b) *de* n *ori derivabilă pe acest interval. Fie punctele* $x_1, x_2, \ldots, x_p$ *distincte din* (a, b) *și* $n_i (1 \leqslant i \leqslant p)$ *numere naturale astfel încît* $n_1 + n_2 + \ldots + n_p = n$. *Se presupune că funcția* f *se anulează în punctul* x_i *împreună cu cele* $n_i - 1$ *derivate* $1 \leqslant i \leqslant p_i$; *să se arate că există cel puțin un punct* $\xi \in (a, b)$ *astfel încît* $f^{n-1}(\xi) = 0$.
Se aplică teorema lui Rolle.

489. *Să se arate că polinomul lui Legendre*

$$P_n(x) = \frac{d^n}{dx^n}(x^2 - 1)^n$$

are n *rădăcini distincte în intervalul* $(-1, 1)$.
Se aplică de n ori teorema lui Rolle funcției $Q_n(x) = (x^2 - 1)^n$.

490. *Fie* f *o funcție definită pe* $[a, b]$, *de* n *ori derivabilă în acest interval, și punctele* $x_i \in (a, b)$, $1 \leqslant i \leqslant p$. *Fie* g *un polinom de gradul* n *(cu coeficienți reali), astfel ca în punctul* x_i $(1 \leqslant i \leqslant p)$ g *împreună cu primele sale* $n_i - 1$ *derivate să aibă valori egale cu acelea ale funcției* f *și respectiv a primelor sale* $n_i - 1$ *derivate. Să se arate că*

$$f(x) = g(x) + \frac{(x - x_1)^{n_1}(x - x_2)^{n_2} \ldots (x - x_p)^{n_p}}{n!} f^n(\xi),$$

unde ξ *este un punct interior celui mai mic interval conținînd punctele* $x_i (1 \leqslant i \leqslant p)$ *și* x.

491. *Fie* g *o funcție impară definită într-un interval conținînd originea și de cinci ori derivabilă în acest interval. Să se arate că*

$$g(x) = \frac{x}{3}[g'(x) + 2g'(0)] - \frac{x^5}{180} g^{(5)}(\xi), \quad \xi = \theta x \ (0 < \theta < 1).$$

Să se arate că dacă f *este o funcție definită pe* (a, b) *și de cinci ori derivabilă în acest interval, avem*

$$f(b) - f(a) = \frac{b - a}{6}\left[f'(a) + f'(b) + 4f'\left(\frac{a + b}{2}\right) - \frac{(b - a)^5}{2880} f^{(5)}(\xi)\right], \ (a < \xi < b)$$

(formula lui Simpson).

4.3. Formula lui Taylor

Fie I un interval și $f\colon I \to R$ o funcție derivabilă de n ori într-un punct $a \in I$. Polinomul

$$T_n(x) = f(a) + \frac{x - a}{1} f'(a) + \ldots + \frac{(x - a)^n}{n!} f^{(n)}(a)$$

se numește *polinomul lui Taylor* de gradul n, atașat funcției f în punctul a. Dacă pentru orice $x \in I$ notăm

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x),$$

avem

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x)$$

sau

$$f(x) = f(a) + \frac{x - a}{1!} f'(a) + \frac{(x - a)^2}{2!} f''(a) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{(x - a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + R_n(x).$$

Această egalitate se numește *formula lui Taylor de ordinul* n *a funcției* f *în punctul* a și $R_n(x)$ se numește *restul* de ordinul n al formulei lui Taylor.
Avem

$$R_n(x) = \frac{(x - a)^n}{n!} \omega(x) \quad \text{cu} \lim_{x \to a} \omega(x) = 0.$$

Se demonstrează că dacă f este derivabilă de n ori pe I, au loc următoarele egalități:

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1} f^{(n+1)}[a+\theta(x-a)]}{(n+1)!}, \quad 0 < \theta < 1,$$

(restul în forma lui Lagrange)

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}(1-\theta)^n f^{(n+1)}[a+\theta(x-a)]}{n!}, \quad 0 < \theta < 1$$

(restul în forma lui Cauchy).

Dacă în formula lui Taylor se ia $a = 0$, se obține *formula lui MacLaurin:*

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \ldots + \frac{x^n f^{(n)}(0)}{n!} + R_n(x),$$

unde

$$R_n(x) = \frac{x^{n+1} f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}, \quad 0 < \theta < 1,$$

(restul în forma lui Lagrange) sau

$$R_n(x) = \frac{x^{n+1}(1-\theta)^n f^{(n+1)}(\theta x)}{n!}, \quad 0 < \theta < 1$$

(restul în forma lui Cauchy).

Cu ajutorul formulei lui Taylor se obțin următoarele egalități:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x) \tag{1}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + R_{2n+1}(x) \tag{2}$$

$$\cos x = x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + R_{2n}(x) \tag{3}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)} + R_{n+1}(x) \tag{4}$$

$$(1+x)^k = 1 + C_k^1 x + C_k^2 x^2 + \ldots + C_k^n x^n + R_n(x). \tag{5}$$

S-a notat cu C_k^n coeficientul $\frac{k(k-1)\ldots(k-n+1)}{n!}$.

Tot cu ajutorul formulei lui Taylor se stabilește următoarea teoremă:

Fie $f\colon I \to R$ și $a \in I$. Dacă f admite derivată de ordinul n pe I, continuă în a, și dacă

$$f'(a) = f''(a) = \ldots = f^{(n-1)}(a) = 0, \text{ și } f^{n}(a) \neq 0,$$

atunci:

dacă $n = 2k$ și $f^{(n)}(a) < 0$, a este un punct de maxim relativ

dacă $n = 2k$ și $f^{(n)}(a) > 0$, a este un punct de minim relativ

dacă $n = 2k+1$ și a este punct interior, atunci a este un punct de inflexiune al funcției.

Formula lui Taylor are numeroase aplicații în calculul aproximativ al funcțiilor. Fiind dată funcția $f: I \to R$, numărul $\varepsilon > 0$ și $T_n(x)$ polinomul lui Taylor de gradul n atașat funcției f în punctul a, $a \in I$, problema aproximării funcției f poate fi pusă în unul din următoarele moduri:

1) Fiind dat punctul $x \in I$, să se determine un număr natural n (cît mai mic posibil) astfel încît

$$|f(x) - T_n(x)| < \varepsilon.$$

2) Să se determine numărul natural n astfel încît inegalitatea $|(f(x) - T_n(x)| < \varepsilon$ să fie satisfăcută în toate punctele unui interval.

3) Fiind dat numărul natural n, să se determine intervalul în care are loc inegalitatea anterioară.

Exerciții rezolvate

492. *Să se scrie formula lui MacLaurin de ordinul n pentru funcția*

$$f(x) = \sqrt{a+x}; \quad a > 0,\ x > -a.$$

Avem

$$f(x) = \sqrt{a+x} = \sqrt{a\left(1+\frac{x}{a}\right)} = \sqrt{a}\left(1+\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Aplicăm formula (5) cu $k = \frac{1}{2}$ și obținem

$$f(x) = \left(1 + \frac{x}{2a} + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{3!}\left(\frac{x}{a}\right)^3 + \ldots \right.$$

$$\left. \ldots + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\ldots\left(\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}\left(\frac{x}{a}\right)^n + R_n(x)\right)\sqrt{a}$$

sau

$$f(x)=\left(1+\frac{1}{2}\,\frac{x}{a}+(-1)^1\frac{1}{2^2}\,\frac{1}{2!}\left(\frac{x}{a}\right)^2+(-1)^2\,\frac{1}{2^3}\,\frac{1\cdot 3}{3!}\left(\frac{x}{a}\right)^3+\dots\right.$$

$$\left.\dots+(-1)^{n-1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\dots(2n-3)}{n!\,2^n}\left(\frac{x}{a}\right)^n+R_n(x)\right)\sqrt{a}$$

sau

$$f(x)=\left(1+\frac{x}{2a}+\sum_{k=2}^{n}(-1)^{k-1}\,\frac{1\cdot 3\cdot 5\dots(2k-3)}{k!\,2^k}\left(\frac{x}{a}\right)^k+R_n(x)\right)\sqrt{a}.$$

Să se calculeze cu ajutorul formulei lui Taylor următoarele limite:

493. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}$.

Formula lui Taylor, de ordinul al doilea pentru funcţia $\sin x$ în punctul a este

$$\sin x=\sin a+\frac{x-a}{1!}\cos a-\frac{(x-a)^2}{2!}\sin[a+\theta(x-a)],\ 0<\theta<1,$$

de unde

$$\frac{\sin x-\sin a}{x-a}=\cos x-\frac{x-a}{2!}\sin[a+\theta(x-a)],\quad 0<\theta<1.$$

Prin urmare,

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}=\cos a.$$

494. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$.

Notînd $g(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}$, avem

$$g'(x)=-xe^{-\frac{x^2}{2}},\qquad g'''(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}(3x-x^3)$$

$$g''(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}(x^2-1),\qquad g^{(IV)}(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}(x^4-6x^2+3),$$

de unde $g'(0)=0,\ g''(0)=-1,\ g'''(0)=0,\ g^{(IV)}(0)=3.$

Deci

$$e^{-\frac{x^2}{2}}=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{3x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}g^{(5)}(\theta x),\qquad 0<\theta<1.$$

Deducem

$$\frac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}=$$

$$=\frac{1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}\cos^{(5)}\left[\theta x+5\frac{\pi}{2}\right]-1+\frac{x^2}{2!}-\frac{3x^4}{4!}-\frac{x^5}{5!}g^{(5)}(\theta x)}{x^4}=$$

$$=\frac{1}{4!}-\frac{3}{4!}+\frac{x}{5!}\left[\cos\left(\theta x+5\frac{\pi}{2}\right)-g^{(5)}(\theta x)\right]$$

şi deci

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}=\frac{1}{4!}-\frac{3}{4!}=-\frac{1}{12}.$$

495. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2}$.

Ţinînd seama că

$$\sqrt{1+x^2}=1+\frac{x^2}{2!}+R_2(x)\ \text{ cu }\ R_2(x)=$$

$$=\frac{x^3}{3!}\left[-3\theta x\,(1+\theta^2x^2)^{-\frac{5}{2}}\right],\qquad 0<\theta<1,$$

avem

$$\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2}=\frac{1}{2!}+\frac{x^2}{3!}\left[-3\theta(1+\theta^2x^2)^{-\frac{5}{2}}\right],\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2}=\frac{1}{2}.$$

Să se determine punctele de maxim şi de minim ale următoarelor funcţii, în intervalul specificat în dreptul fiecăreia:

496. $f(x)=2x^6-x^3+3,\qquad -\dfrac{1}{2}\leqslant x\leqslant\dfrac{1}{2}.$

Deducem

$$f'(x)=12x^5-3x^2;\ f'(x)=0,\ \text{dacă}\ x^2=0\ \text{sau}\ x=\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$$

$$f''(x)=60x^4-6x;\ f''(0)=0;\ f'''(x)=240x^3-6=6(40x^3-1)$$

$$f'''(0)=-6.$$

În intervalul $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ funcţia nu are nici un punct de extrem. Originea este punct de inflexiune.

497. $f(x) = 2\cos x + x^2$. $\qquad x \in (-\infty, \infty)$.

Avem

$f'(x) = -2\sin x + 2x = 2(x - \sin x)$; $\quad f'(x) = 0$, dacă $x = 0$

$f''(x) = -2\cos x + 2 = 2(1 - \cos x)$; $\quad f''(0) = 0$

$f'''(x) = 2\sin x$; $\quad f'''(0) = 0$

$f^{IV}(x) = 2\cos x$; $\quad f^{IV}(0) = 2$.

În origine funcția are un minim, valoarea acestuia fiind 2.

498. *Să se determine numărul natural n astfel ca polinomul lui Taylor de gradul n asociat funcției $f(x) = e^x$ să aproximeze funcția în intervalul $[-1, 1]$ cu două zecimale exacte.*

Impunem condiția

$$|R_n(x)| = \left|\frac{x^{n-1}e^{\theta x}}{(n+1)!}\right| < \frac{1}{1\,000}.$$

Însă deoarece $\theta x < x \leqslant 1$, $e^{\theta x} < e < 3$ și avem

$$\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x}\right| < \frac{3}{(n+1)!}.$$

Dacă $n = 6$, $\frac{1}{(n+1)!} = \frac{1}{7!} = \frac{1}{5040}$. Rezultă că

$$|R_6(x)| = |e^x - T_6(x)| < \frac{3}{5\,040} < \frac{1}{1\,000}.$$

Astfel, polinomul

$$T_6(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^6}{6!}$$

aproximează funcția e^x pe segmentul $[-1, 1]$ cu o precizie de $\frac{1}{1\,000}$.

În particular, luînd $x=1$, obținem

$$e - \left(1 + \frac{1}{1!} + \ldots + \frac{1}{6!}\right) < \frac{1}{1\,000}.$$

499. *Să se determine numărul natural n astfel ca polinomul lui Taylor de gradul n asociat funcției $f(x) = \sqrt{1+x}$ să difere de funcție cu mai puțin de $1/16$ pe intervalul $[0, 1]$.*

Pentru aceasta este suficient ca

$$|R_n(x)| = \left|\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)x^{n+1}}{2^{n-1}\cdot(n+1)!\,(1+\theta x)^{n+\frac{1}{2}}}\right| < \frac{1}{16}.$$

Însă

$$\left|\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)x^{n+1}}{2^{n+1}(n+1)!\,(1+\theta x)^{n+\frac{1}{2}}}\right| < \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2^{n+1}(n+1)!}, \text{ dacă } 0 \leqslant x \leqslant 1. \quad (1)$$

Dacă $n = 2$, partea dreaptă a inegalității (1) este egală cu $\frac{1\cdot 3}{2^3 3!} = \frac{1}{16}$. Deci

$$\left|\sqrt{1+x} - 1 + \frac{x}{2} + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1\right)}{2!}x^2\right| < \frac{1}{16}.$$

500. *Se presupune că în formula lui MacLaurin pentru funcția $f(x) = \cos x$, $n = 5$. Să se determine un segment $[-p, p]$ pe care $T_5(x)$ să aproximeze funcția cu o precizie de 0,00005.*

Avem

$$R_5(x) = -\frac{x^6 \cos\theta x}{6!}, \quad |R_5(x)| < \frac{|x^6|}{6!};$$

dacă $\frac{p^6}{6!} < 0{,}00005$, atunci $|R_5(x)| < 0{,}00005$ oricare ar fi $x \in [-p, p]$

Însă din inegalitatea $p^6 < 720 \times 0{,}00005$ obținem $p < 0{,}57$.

Rezultă că $T_5(x)$ aproximează funcția $\cos x$ cu o precizie de 0,00005 pe segmentul $[-0{,}57,\ 0{,}57]$.

501. *Să se calculeze valoarea aproximativă pentru $\sqrt[4]{260}$ și să se evalueze eroarea comisă.*

Notăm $f(x) = \sqrt[4]{x}$ și scriem polinomul lui Taylor de ordinul al doilea asociat funcției $\sqrt[4]{x}$ pentru $x = 260$ și $a = 256$. Avem

$$f(256) = \sqrt[4]{256} = 4$$

$$f'(x) = \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}; \quad f'(256) = \frac{1}{4\cdot 4^3} = \frac{1}{4^4}$$

$$f''(x) = -\frac{3}{4^2}\,\frac{1}{\sqrt[4]{x^7}}; \quad f''(256) = \frac{3}{4^2\cdot 4^7} = -\frac{3}{4^9}$$

$$f'''(x) = -\frac{3}{4^2}\left(-\frac{7}{4}\right)\frac{1}{\sqrt[4]{x^{11}}}$$

$$f(260) = f(256) + \frac{4}{1!}f'(256) + \frac{4^2}{2!}f''(256) + \frac{4^3}{3!}f'''(\xi),\ 256 < \xi < 260$$

sau

$$\sqrt[4]{260} = 4 + \frac{4}{1!}\,\frac{1}{4^4} - \frac{4^2}{2!}\cdot\frac{3}{4^9} + \frac{4^3}{3!}f'''(\xi).$$

Efectuînd calculele, obținem

$$\sqrt[4]{260} = 4 + 0,15625 - 0,000009 + \frac{4^3}{3!} f'''(\xi) = 4,156241 + \frac{4^3}{3!} f'''(\xi).$$

Eroarea comisă este

$$\left| \frac{4^3}{3!} \cdot \frac{3 \cdot 7}{4^3} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{\xi^{11}}} \right|.$$

Deoarece $256 < \xi < 260$,

$$\frac{1}{\sqrt[4]{\xi^{11}}} < \frac{1}{4^{11}} \quad \text{și} \quad |R_2(x)| < \frac{7}{2 \cdot 4^{11}} < \frac{1}{10^6}.$$

502. *Să se calculeze valoarea aproximativă pentru* $\sqrt[3]{e}$.

Considerăm funcția $f(x) = e^x$ și scriem polinomul lui Taylor atașat ei pentru $x = \frac{1}{3}$, $n = 3$. Obținem

$$e^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{\frac{1}{3}}{1!} + \frac{\frac{1}{3^2}}{2!} + \frac{\frac{1}{3^3}}{3!} + R_3(\xi), \quad 0 < \xi < \frac{1}{3}.$$

Efectuînd calculele, deducem

$$\sqrt[3]{e} \approx 1,389$$

cu eroarea

$$|R_3(x)| = \left| \frac{e^\xi}{4!} x^4 \right| < \frac{\sqrt[3]{3}}{3^4 \cdot 4!} < 0,0001.$$

Dacă luăm $n = 4$, obținem $\sqrt[3]{e} \approx 1,3895$ cu eroarea $|R_4(x)| < 0,00001$.

Exerciții propuse spre rezolvare

Folosind formula lui Taylor, să se calculeze următoarele limite:

503. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{-2x} + e^{2x} - 2}{x^2}$. **R.** 4.

504. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1 + 2x) - \sin 2x + 2x^2}{x^3}$. **R.** 4.

505. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$. **R.** $\frac{1}{3!}$.

506. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{1 + x^3} - 1}{x^3}$. **R.** $\frac{1}{3}$.

507. $\lim\limits_{x \to \infty} \left[x - x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \right]$. **R.** $\frac{1}{2}$.

Să se calculeze cu aproximație și să se evalueze erorile pentru următoarele valori:

508. $\sqrt[3]{30}$. **R.** 3,1072.

509. $\sqrt{e}$. **R.** 1,64872.

510. $\ln(1,2)$. **R.** 0,182321.

511. arcsin 0,45. **R.** 0,46676.

4.4. Regulile lui l'Hospital

Regula I (Cauchy). Fie f și g două funcții definite pe intervalul I și c un punct din I. Dacă:

1) $f(c) = g(c) = 0$
2) f și g sînt derivabile în punctul c
3) $g'(c) \neq 0$,

atunci

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Regula II (l'Hospital). Cazul $\frac{0}{0}$. Fie I un interval, c un punct de acumulare al lui I și f și g două funcții difinite pe $I - \{c\}$. Dacă:

1) $\lim\limits_{x \to c} f(x) = \lim\limits_{x \to c} g(x) = 0$
2) f și g sînt derivabile pe $I - \{c\}$
3) $g'(x) \neq 0$ pentru $x \in I - \{c\}$
4) $\lim\limits_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$,

atunci

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A.$$

Regula III (l'Hospital). Cazul $\frac{\infty}{\infty}$. Fie I un interval, c un punct de acumulare al lui I, f și g două funcții definite pe $I - \{c\}$ și

1) $\lim\limits_{x \to c} |g(x)| = +\infty$
2) f și g sînt derivabile pe $I - \{c\}$

3) $g'(x) \neq 0$ pentru $x \in I - \{c\}$

4) $\lim\limits_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$,

atunci

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A.$$

Corolar. Dacă f şi g definite pe $I - \{c\}$:

1) admit derivate de ordinul n pe $I - \{c\}$

2) $g^{(n)}(x) \neq 0$ pentru orice $x \in I - \{c\}$

3) $\lim\limits_{x \to c} |f(x)| = \lim\limits_{x \to c} |g(x)| = a_0$, $\lim\limits_{x \to c} |f'(x)| = \lim\limits_{x \to c} |g'(x)| = a_1, \ldots$

$\ldots, \lim\limits_{x \to c} |f^{(n-1)}(x)| = \lim\limits_{x \to c} |g^{(n-1)}(x)| = a_{n-1}$,

unde $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ sînt 0 sau ∞,

4) $\lim\limits_{x \to c} \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)} = A, \quad -\infty \leqslant A \leqslant \infty$,

atunci

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)} = A.$$

Fie $F = f \cdot g$, funcţiile f şi g fiind definite pe $I - \{c\}$ şi astfel încît $\lim\limits_{x \to c} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to c} g(x) = \infty$.

Scriind funcţia F sub forma

$$F = \frac{f}{\frac{1}{g}} = \frac{g}{\frac{1}{f}},$$

obţinem unul din cazurile de excepţie, $\frac{0}{0}$ sau $\frac{\infty}{\infty}$, enunţate anterior.

Dacă $\Phi = f - g$, f şi g fiind definite pe $I - \{c\}$ şi astfel încît $\lim\limits_{x \to c} f(x) = \lim\limits_{x \to c} g(x) = \pm \infty$, scriind funcţia Φ sub forma

$$\Phi = f - g = \frac{\frac{1}{g} - \frac{1}{f}}{\frac{1}{f \cdot g}},$$

obţinem unul din cazurile de excepţie $\frac{0}{0}$ sau $\frac{\infty}{\infty}$.

Dacă $\psi = f^g$, f şi g fiind definite pe $I - \{c\}$ şi astfel încît

$$\lim_{x \to c} f(x) = 0 \text{ şi } \lim_{x \to c} g(x) = 0$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 1 \text{ şi } \lim_{x \to c} g(x) = \infty$$

$$\lim_{x \to c} f(x) = \infty \text{ şi } \lim_{x \to c} g(x) = 0,$$

scriind funcţia ψ sub forma

$$\psi = e^{g \ln f},$$

obţinem cazul de excepţie $0 \cdot \infty$.

Exerciţii rezolvate

Să se calculeze:

512. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x}$.

Notăm $f(x) = \operatorname{tg} x - x$, $g(x) = x - \sin x$. Observăm că

1) f şi g sînt derivabile pentru orice $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ şi

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - 1, \quad g'(x) = 1 - \cos x$$

2) $g'(x) \neq 0$ pentru ori ce $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

3) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} g(x) = 0$

4) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\frac{1}{\cos^2 x} - 1}{1 - \cos x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{\cos^2 x (1 - \cos x)} = 2.$

Conform regulei II a lui l'Hospital, avem $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x} = 2$.

513. *Reciproca regulei II a lui l'Hospital nu este adevărată, după cum se vede din exemplul următor:*

Dacă $f(x) = x^2 \cos \frac{1}{x}$ și $g(x) = x$, atunci, evident,

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} x \cos \frac{1}{x} = 0,$$

în timp ce funcția

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{2x \cos \frac{1}{x} + \sin \frac{1}{x}}{1}$$

nu are limită cînd x tinde către zero, deoarece în acest caz $\sin \frac{1}{x}$ poate să tindă către orice număr $l \in [-1, 1]$.

514. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^x - x}{\ln x - x + 1}$.

Notăm $f(x) = x^x - x$, $g(x) = \ln x - x + 1$. Avem:

1) f și g sînt definite și derivabile pentru orice $x > 0$

și

$$f'(x) = x^x(\ln x + 1) - 1, \quad g'(x) = \frac{1}{x} - 1$$

$$f''(x) = x^x(\ln x + 1)^2 + x^{x-1}, \quad g''(x) = -\frac{1}{x^2}.$$

2) $g''(x) \neq 0$ pentru $x > 0$

3) $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} g(x) = \lim\limits_{x\to 1} f'(x) = \lim\limits_{x\to 1} g'(x) = 0$

4) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f''(x)}{g''(x)} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^x(\ln x + 1)^2 + x^{x-1}}{-\dfrac{1}{x^2}} = -2.$

În baza corolarului enunțat în introducerea capitolului, avem $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 2.$

515. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$, *dacă* $f(x) = \begin{cases} \sin^2 x, & x < 0 \\ x^2, & x \geqslant 0 \end{cases}$, $g(x) = \ln \cos x$.

Avem: 1) f și g sînt definite și derivabile, admițînd derivate de ordinul al doilea în intervalul $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ și

$$f'(x) = \begin{cases} \sin 2x, & x < 0 \\ 2x, & x > 0 \end{cases},$$

$$f_s'(0) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{\sin^2 x}{x} = 0, \quad f_d'(0) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{x^2}{x} = 0.$$

Rezultă că $f'(0) = 0$.

Mai calculăm

$$f''(x) = \begin{cases} 2\cos 2x, & x < 0, \\ 2, & x > 0. \end{cases} \quad f''(0) = 2.$$

$$g'(x) = -\frac{\sin x}{\cos x} = -\operatorname{tg} x, \quad g''(x) = -(1 + \operatorname{tg}^2 x).$$

2) $g''(x) \neq 0$ pentru orice x

3) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} g(x) = \lim\limits_{x\to 0} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0} g'(x) = 0$

4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f''(x)}{g''(x)} = -2.$

Conform corolarului, avem $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = -2.$

516. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{\ln(\sin 2x)}{\ln(\sin 3x)}$.

Notăm $f(x) = \ln(\sin 2x)$, $g(x) = \ln(\sin 3x)$. Constatăm că:

1) f și g sînt derivabile în intervalul $\left(0, \frac{\pi}{8}\right)$ și

$$f'(x) = 2\frac{\cos 2x}{\sin 2x}, \quad g'(x) = 3\frac{\cos 3x}{\sin 3x}$$

2) $g'(x) \neq 0$ în intervalul considerat

3) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} |f(x)| = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} |g(x)| = \infty$

4) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\dfrac{\cos 2x}{2\sin 2x}}{\dfrac{3\cos 3x}{\sin 3x}} = 1.$

În baza corolarului, avem $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{\ln(\sin 2x)}{\ln(\sin 3x)} = 1.$

517. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^{ax}}$, $a > 0$, $n \in N$.

Notăm $f(x) = x^n$, $g(x) = e^{ax}$. Avem:

1) $f(x)$ și $g(x)$ sînt derivabile pentru orice $x > 0$ și

$$f'(x) = nx^{n-1},\ f''(x) = n(n-1)\,x^{n-2}, \ldots, f^{(n-1)}(x) = n!\,x$$

$$f^{(n)}(x) = n!,\ g'(x) = ae^{ax},\ g''(x) = a^2e^{ax}, \ldots, g^{(n-1)}(x) = a^n e^{ax}$$

2) $g^{(n)}(x) \neq 0$ oricare ar fi $x \in (0, \infty)$

3) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} g(x) = , \ldots, = \lim\limits_{x\to\infty} f^{(n-1)}(x) = \lim\limits_{x\to\infty} g^{(n-1)}(x) = \infty$

4) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{n!}{a^n e^{ax}} = 0.$

În baza corolarului, deducem $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^{ax}} = 0$, oricare ar fi $n \in N$, $a > 0$.

518. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)}$ *dacă* $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \text{ rațional} \\ 0, & x \text{ irațional} \end{cases}$, $g(x) = \sin x$.

Funcția f este derivabilă numai în origine. Într-adevăr:

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{f(x)}{x} = \begin{cases} x, & x \text{ rațional} \\ 0, & x \text{ irațional.} \end{cases}$$

În ambele cazuri, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 0$. În orice alt punct, este discontinuă. Prin urmare regula II nu este aplicabilă. Apelînd însă la regula I, obținem

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(0)}{g'(0)} = \frac{0}{1} = 0.$$

519. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^2 \ln x$.

Notăm $f(x) = x^2$, $g(x) = \ln x$. Deoarece $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ și $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g(x) = -\infty$, sîntem în cazul de excepție $0\cdot\infty$. Conform celor expuse în introducerea capitolului, scriem

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^2 \ln x = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}}$$

și ajungem la cazul de excepție $\frac{\infty}{\infty}$.

Verificăm cu ușurință că toate condițiile care intervin în regula III sînt îndeplinite. Prin urmare

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^2 \ln x = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-2}{x^3}} = 0.$$

520. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\operatorname{cotg} x - \frac{1}{x}\right)$.

Deoarece

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \operatorname{cotg} x = +\infty,\ \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x} = +\infty,\ \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \operatorname{cotg} x = -\infty,$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{1}{x} = -\infty$$

sîntem în cazul de excepție $\infty - \infty$. Efectuăm transformarea

$$\operatorname{cotg} x - \frac{1}{x} = -\frac{\frac{1}{\operatorname{cotg} x} - x}{\frac{x}{\operatorname{cotg} x}} = \lim_{x\to 0} \left(\operatorname{cotg} x - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{tg} x}{x \operatorname{tg} x}.$$

Aplicînd de două ori regula II, obținem

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{tg} x}{x \operatorname{tg} x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg} x + x(1 + \operatorname{tg}^2 x)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-2\operatorname{tg} x(1 + \operatorname{tg}^2 x)}{2(1 + \operatorname{tg}^2 x) + 2x \operatorname{tg} x(1 + \operatorname{tg}^2 x)} = 0.$$

521. $\lim\limits_{x\to 0} \left[\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right]^{\frac{1}{x}}$.

Notăm $f(x) = \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}$, $g(x) = \frac{1}{x}$ și deducem

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 1,\ \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x} = \infty,\ \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} g(x) = -\infty.$$

Scriem

$$\left[\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right]^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}\ln\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}}, \quad \lim_{x\to 0}\left[\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right]^{\frac{1}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}}{x}}.$$

Însă

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\left[\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right]'}{\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}\left[-\frac{\ln(1+x)}{x^2}+\frac{1}{x(1+x)}\right]}{(1+x)^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x\to 0}\frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1-\ln(1+x)-\frac{1+x}{1+x}}{2x+3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}}{2+6x} = -\frac{1}{2}$$

(am aplicat de trei ori succesiv regula II a lui l'Hospital).

Prin urmare

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right]^{\frac{1}{x}} = e^{-\frac{1}{2}}.$$

522. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^x$.

Sîntem în cazul de excepție 0^0. Scriem

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^x = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} e^{x\ln x} = e^{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x\ln x}.$$

Însă

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x\ln x = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} x = 0.$$

Prin urmare $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^x = e^0 = 1$.

Exerciții propuse spre rezolvare

Folosind regulile lui l'Hospital să se calculeze:

523. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 x}{x\sin 2x}$. **R.** $\frac{3}{4}$.

524. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$. **R.** $-\frac{1}{12}$.

525. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-x\sin x-\cos x}{x^2}$. **R.** $\frac{1}{2}$.

526. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{xe^{ax}-2ax}$. **R.** 0, dacă $a\neq\frac{1}{2}$; 2, dacă $a=\frac{1}{2}$.

527. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{3^{\sin^2 x}-3}{x-\frac{\pi}{2}}$. **R.** 0.

528. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^{3\sin^2 x}$. **R.** 1.

529. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} e^{-\frac{1}{x}}\ln x$. **R.** 0.

530. $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} (x-1)\,e^{\frac{1}{x-1}}$. **R.** ∞.

531. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^{\operatorname{tg} x}$. **R.** 1.

532. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}$. **R.** $-\frac{e}{2}$.

533. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\arcsin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$. **R.** $e^{\frac{1}{6}}$.

534. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x$. **R.** e^{2a}.

535. *Să se studieze posibilitatea aplicării regulei lui l'Hospital fracției* $\frac{f(x)}{g(x)}$ *pentru* x *tinzînd către infinit în următoarele cazuri:*

a) $f(x) = x-\sin x$, $g(x) = x+\sin x$.

R. Regula lui l'Hospital nu se poate aplica. Limita este egală cu 1.

b) $f(x) = e^{-2x}(\cos x+2\sin x)+e^{-x^2}\sin^2 x$, $g(x) = e^{-x}(\cos x+\sin x)$.

R. Regula lui l'Hospital nu se poate aplica. Limita nu există.

4.5. Probleme de maxim şi de minim

Probleme rezolvate

536. *Într-o emisferă cu raza R să se înscrie un paralelipiped de volum maxim, avînd baza un pătrat.*

Notăm cu x latura bazei şi cu y înălţimea paralelipipedului (fig. 29). Volumul paralelipipedului este

$$V = x^2 y.$$

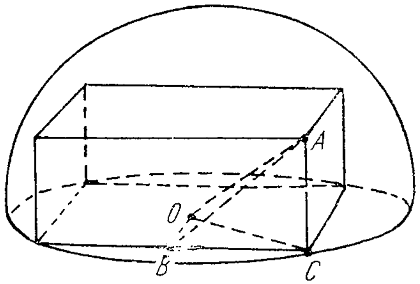

Fig. 29

Din triunghiul dreptunghic OCB deducem $\overline{OC}^2 = \overline{CB}^2 + \overline{OB}^2$ sau $\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \overline{OC}^2$, de unde $\overline{OC} = \frac{x}{\sqrt{2}}$.

Din triunghiul OCA obţinem $\overline{OC}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{OA}^2$ sau $\frac{x^2}{2} + y^2 = R^2$, de unde $y = \sqrt{R^2 - \frac{x^2}{2}}$.

Rezultă

$$V(x) = x^2\sqrt{R^2 - \frac{x^2}{2}}, \quad \frac{x^2}{2} < R^2$$

$x^2 < 2R^2$

$x < R\sqrt{2}$

Problema revine la a determina valoarea lui x pentru care $V(x)$ este maxim. Derivata

$$V'(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{4xR^2 - 3x^2}{\sqrt{2R^2 - x^2}}\right]$$

este nulă, $V'(x) = 0$, dacă $x = 0$, $x = \pm\frac{2R}{\sqrt{3}}$.

Datorită semnificaţiei variabilei x, considerăm numai valorile pozitive ale acesteia:

x	0					$\frac{2R}{\sqrt{3}}$					$R\sqrt{2}$
$4xR^2 - 3x^2$		+	+	+	+	0	—	—	—	—	
$V'(x)$	0	+	+	+	+	0	—	—	—	—	

$V(x)$ are un maxim în punctul $x = \frac{2R}{\sqrt{3}}$. Găsim $y = \frac{R}{\sqrt{3}}$ şi volumul maxim este $\frac{4R^3}{3\sqrt{3}}$.

537. *Prin punctul $P(1, 4)$ să se ducă o dreaptă astfel ca suma lungimilor segmentelor tăiate de ea pe axele de coordonate să fie minimă.*

Fie u şi v lungimile tăiate de dreaptă pe axele de coordonate. Ecuaţia dreptei este

$$\frac{x}{u} + \frac{y}{v} = 1.$$

Impunînd condiţia ca dreapta să treacă prin punctul $P(1, 4)$, obţinem $u = \frac{v}{v - 4}$.

Trebuie să determinăm minimul funcţiei $v + u$, adică minimul funcţiei

$$v + \frac{v}{v - 4} = \frac{v^2 - 3v}{v - 4} = f(v).$$

Avem $f'(v) = 0$, dacă $v^2 - 8v + 12 = 0$, adică dacă $v = 4 \pm \sqrt{16 - 12} = 4 \pm 2$.

Trecem rezultatele obţinute în următorul tablou:

v					2					6				
$f'(v)$	+	+	+	+	0	—	—	—	—	0	+	+	+	+
$f(v)$							minim							

Funcţia $f(v) = \frac{v^2 - 3v}{v - 4}$ este minimă pentru $v = 6$.

Din relaţia $u = \frac{v}{v - 4}$ obţinem $u = 3$. Ecuaţia dreptei cerute este $\frac{x}{3} + \frac{y}{6} = 1$.

Probleme propuse spre rezolvare

538. *Să se înscrie într-o sferă de rază R un con avînd aria laterală maximă.*

R. Înălţimea conului este $\frac{4}{3}R$.

539. *Să se circumscrie unei sfere un con avînd volumul minim.*

R. Volumul conului este dublul volumului sferei.

540. *Să se înscrie într-un con un cilindru de volum maxim (se va presupune că baza cilindrului şi baza conului se află situate în acelaşi plan).*

R. Raza bazei conului este odată şi jumătate mai mare decît raza cilindrului.

541. *Prin punctul fix $P(a, b)$ se duce o dreaptă care taie axele de coordonate în punctele $A(x, 0)$ şi $B(0, y)$, $x > 0$, $y > 0$. Să se determine poziţia dreptei astfel încît:*

a) *Suma $x + y$ să fie maximă.*
b) *Aria triunghiului xOy să fie minimă.*
c) *Suma $x^n + y^n$ să fie minimă.*

542. *În elipsa care are ecuaţia $4x^2 + 9y^2 = 36$ să se înscrie un dreptunghi de arie maximă.*

R. Dimensiunile dreptunghiului sînt $3\sqrt{2}$ şi $2\sqrt{2}$.

4. 6. Reprezentarea graficului unei funcţii

Pentru a construi graficul unei funcţii este necesar să cunoaştem pe etape următoarele elemente:

I. *Domeniul de definiţie al funcţiei.* 1) Dacă domeniul de definiţie nu este dat explicit, se subînţelege că acesta este domeniul de existenţă maxim al funcţiei. Vom nota acest domeniu cu E.

2) Cercetăm dacă funcţia este pară $[f(x) = f(-x)]$, impară $[f(-x) = -f(x)]$ sau periodică $[f(x + k) = f(x)$, k fiind perioada$]$.

Dacă funcţia este pară, este suficient să reprezentăm graficul funcţiei pentru $x \in E \cap R_+$ (R_+ este mulţimea numerelor reale pozitive).

Dacă funcţia este impară, este suficient să reprezentăm graficul funcţiei pentru $x \in E \cap R_+$, deoarece pentru $x \in E \cap R_-$ (R_- este mulţimea numerelor reale negative) graficul va fi simetric faţă de origine.

Dacă funcţia este periodică de perioadă k, este suficient să reprezentăm graficul funcţiei pentru x aparţinînd unui interval de lungime k, deoarece graficul funcţiei se repetă apoi.

3) Cercetăm dacă există puncte în care graficul taie axele de coordonate.

4) Cercetăm dacă există $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ şi $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

II. *Derivata de ordinul întîi.* 1) Calculăm derivata de ordinul întîi, $f'(x)$.

2) Rezolvăm ecuaţia $f'(x) = 0$. Punctele în care derivata se anulează şi îşi schimbă semnul sînt puncte de *maxim* sau de *minim*.

3) Determinăm intervalele în care derivata păstrează semnul constant. Dacă $f'(x) < 0$ pentru $x \in (\alpha, \beta)$, atunci $f(x)$ este strict descrescătoare în (α, β). Dacă $f'(x) > 0$ în (α, β), atunci $f(x)$ este strict crescătoare în acest interval.

III. *Derivata de ordinul al doilea.* 1) Calculăm derivata de ordinul al doilea, $f''(x)$.

2) Rezolvăm ecuaţia $f''(x) = 0$. Punctele în care derivata a doua se anulează şi îşi schimbă semnul sînt puncte de inflexiune.

3) Determinăm intervalele în care $f''(x)$ păstrează semnul constant. Dacă $f''(x) > 0$ în intervalul (α, β), graficul funcţiei este convex. Dacă $f''(x) < 0$ în intervalul (α, β), graficul funcţiei este concav.

IV. *Asimptote.* 1) *Asimptote verticale* sînt dreptele $x = a$, unde a sînt punctele pentru care $f(a + 0)$ sau $f(a - 0)$ sau ambele sînt infinite.

2) *Asimptotele oblice* pot exista numai dacă domeniul E este nemărginit şi dacă $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \pm\infty$ sau $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \pm\infty$. În acest caz, calculăm $m = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}$ $\left[\text{respectiv } m' = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}\right]$. Dacă m (respectiv m') este finit, calculăm $n = \lim\limits_{x \to \infty} [f(x) - mx]$ {respectiv $n' = \lim [f(x) - m'x]$}. Dacă şi n (respectiv n') este finit, atunci dreapta de ecuaţie $y = mx + n$ este asimptotă la ramura spre $+\infty$ a graficului (respectiv $y = m'x + n'$ este asimptotă la ramura spre $-\infty$ a graficului). În particular, dacă $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = a$, dreapta de ecuaţie $y = a$ este *asimptotă orizontală.*

V. *Tabloul.* Într-un tablou cu rubrici orizontale trecem:

— în rubrica întîi, valorile remarcabile ale lui x obţinute anterior;

— în rubrica a doua, valorile corespunzătoare pentru $f'(x)$ şi semnul acesteia;

— în rubrica a treia, valorile corespunzătoare pentru $f(x)$ şi săgeţile care indică creşterea sau descreşterea funcţiei;

— în rubrica a patra, valorile corespunzătoare pentru $f''(x)$ şi semnul acesteia.

Să se reprezinte grafic următoarele funcții:

543. $f(x) = \dfrac{1}{x(x-1)}$.

Deducem:

I. $E = (-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, \infty)$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x(x-1)} = 0, \ \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x(x-1)} = 0$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{1}{x(x-1)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x-1} \cdot \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{1}{x} = -1(-\infty) = \infty$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x(x-1)} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x} \lim_{x\to 0} \frac{1}{x-1} = -1\,(\infty) = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{1}{x(x-1)} = -\infty; \ \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{1}{x(x-1)} = \infty.$$

II. Derivata întîi este

$$f'(x) = -\frac{2x-1}{x^2(x-1)^2};$$

$f'(x) = 0$ pentru $x = \frac{1}{2}$; $f'(x) > 0$ pentru $x < \frac{1}{2}$ și $f'(x) < 0$ pentru $x > \frac{1}{2}$.

III. Derivata a doua este

$$f''(x) = 2\,\frac{3x^2 - 3x + 1}{x^3(x-1)^3}.$$

Derivata a doua nu se anulează în nici un punct și are același semn ca și produsul $x^3(x-1)^3$, adică $f''(x) > 0$ pentru $x \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$ și $f''(x) < 0$ pentru $x \in (0, 1)$.

IV. Graficul nu are asimptote oblice. Dreptele de ecuații $x = 0$ și $x = 1$ sînt asimptote verticale, iar dreapta de ecuație $y = 0$ este asimptotă orizontală.

V. Trecem rezultatele obținute în următorul tablou

x	$-\infty$	0	$\frac{1}{2}$	1	∞
$f'(x)$	+ + + + +	+ +	0	− − | − − −	− − −
$f(x)$	0 ↗	$+\infty$ | $-\infty$ ↗	-4	↘ $-\infty$ | $+\infty$	↘ 0
$f''(x)$	0 + + + +	− − −	− −	+ + +	+ + +

Graficul funcției este reprezentat în fig. 30.

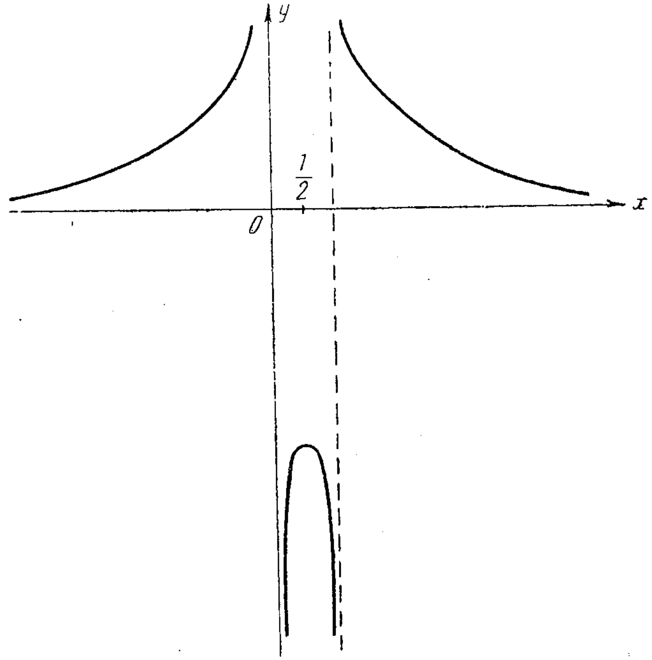

Fig. 30

544. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$.

Deducem:

I. $E = (-\infty, -1) \cup [1, \infty)$

$$f(x) = 0 \text{ pentru } x = 1, \ \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} = 1, \ \lim_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} = \infty.$$

II. $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{(x-1)(x+1)^3}}$ pentru $x \neq 1$,

$$f'_d(1) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}}{x-1} = \infty.$$

Prin urmare în punctul $x = 1$, tangenta la curbă este verticală.

III. $f''(x) = \dfrac{1-2x}{(x^2-1)\sqrt{(x-1)(x+1)^3}}$ pentru $x \neq 1$;

$f''(x) = 0$, dacă $x = \dfrac{1}{2}$. Prin urmare $f''(x)$ nu se anulează în interiorul domeniului de definiție; $f''(x) < 0$, dacă $x \in (1, \infty)$, $f''(x) > 0$ dacă $x \in (-\infty, -1)$.

IV. Graficul nu are asimptote oblice. Dreapta de ecuație $y = 1$ este asimptotă orizontală la ambele ramuri. Dreapta de ecuație $x = -1$ este asimptotă verticală.

V. Formăm tabloul

x	$-\infty$		-1		1		∞
$f'(x)$		$+\ +\ +\ +$				$+\ +\ +\ +\ +\ +$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	∞		0	$\nearrow$	1
$f''(x)$		$+\ +\ +\ +$				$-\ -\ -\ -\ -\ -$	

Funcția este reprezentată în fig. 31.

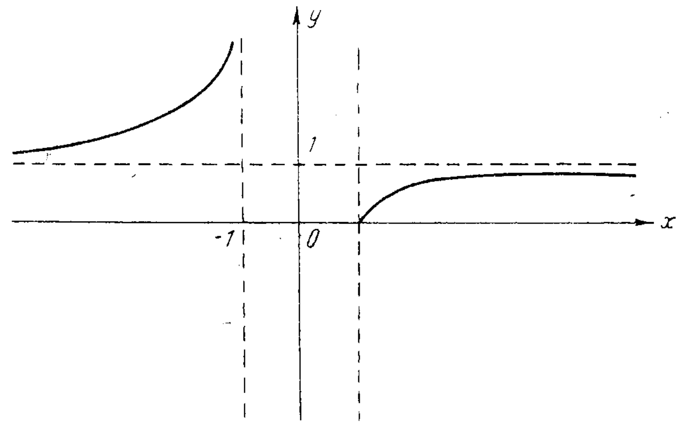

Fig. 31

545. $f(x) = \dfrac{\cos x}{1 + \cos x}$.

I. $E = R - \{(2k+1)\pi\}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

Funcția este periodică avînd perioada 2π. Într-adevăr,

$$f(x + 2\pi) = \frac{\cos(x + 2\pi)}{1 + \cos(x + 2\pi)} = \frac{\cos x}{1 + \cos x} = f(x).$$

Prin urmare este suficient s-o reprezentăm într-un interval de lungime 2π, fie acesta $(-\pi, \pi)$.

Din relația $\dfrac{\cos x}{1 + \cos x} = \dfrac{\cos(-x)}{1 + \cos(-x)}$ deducem că funcția este pară și este de ajuns s-o reprezentăm numai pentru $x \geqslant 0$, adică în intervalul $[0, \pi)$. Deducem

$$f(x) = 0, \text{ dacă } x = \frac{\pi}{2}, \quad f(0) = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{\substack{x\to\pi\\ x<\pi}} f(x) = \lim_{\substack{x\to\pi\\ x<\pi}} \frac{\cos x}{1 + \cos x} = \lim_{x\to\pi} \cos x \cdot \lim_{\substack{x\to\pi\\ x<\pi}} \frac{1}{1 + \cos x} = -1\,(\infty) = -\infty.$$

II. $f'(x) = \dfrac{-\sin x}{(1 + \cos x)^2}$;

$f'(x) = 0$ pentru $x = 0$; pentru $x \in (0, \pi)$, $f'(x) < 0$. Punctul $x = 0$ este punct de maxim.

III. $f''(x) = \dfrac{\cos^2 x - \cos x - 2}{(1 + \cos x)^3}$.

Deoarece $f''(x)$ nu se anulează în intervalul $(0, \pi)$, ea păstrează semnul constant în acest interval. Deoarece $f''\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -2$, rezultă că $f''(x) < 0$ pentru $x \in (0, \pi)$.

IV. Dreapta de ecuație $x = \pi$ este asimptotă verticală.

V. Tabloul este

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$f'(x)$		$-\ -\ -\ -\ -$		$-\ -\ -\ -\ -\ -$	
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$
$f''(x)$		$-\ -\ -\ -\ -\ -$		$-\ -\ -\ -\ -\ -$	

Funcţia este reprezentată în fig. 32.

546. $$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

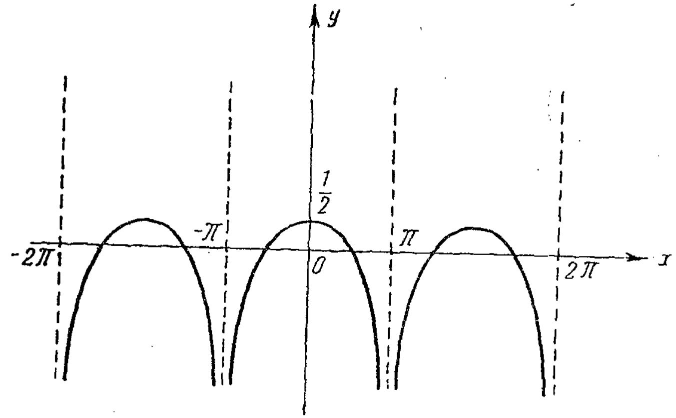

Fig. 32

I. $E = R$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1, \ \lim_{x\to\infty} f(x) = 1$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} e^{\frac{1}{x}} = \infty, \ \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} e^{\frac{1}{x}} = 0.$$

II. $f'(x) = -\frac{1}{x^2}\, e^{\frac{1}{x}}$ pentru $x \neq 0$

$$f'_d(0) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} = \infty$$

$$f'_s(0) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{\frac{1}{x}}{e^{-\frac{1}{x}}} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}\, e^{-\frac{1}{x}}} = -\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} e^{\frac{1}{x}} = 0$$

$f'(x) < 0$ dacă $x \in E - \{0\}$.

III. $f''(x) = \dfrac{e^{\frac{1}{x}}(1+2x)}{x^4}$ pentru $x \neq 0$;

$f''(x) = 0$ pentru $x = -\frac{1}{2}$; $f''(x) < 0$ pentru $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$;

$$f''(x) > 0 \text{ pentru } x \in \left(-\frac{1}{2}, 0\right) \cup (0, \infty).$$

Deoarece $f''(x)$ se anulează în punctul $x = -\frac{1}{2}$ şi îşi schimbă semnul, rezultă că $x = -\frac{1}{2}$ este punct de inflexiune.

IV. Dreapta de ecuaţie $x = 0$ este asimptotă verticală, iar dreapta de ecuaţie $y = 1$ este asimptotă orizontală.

V. Tabloul este

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		0		∞
$f'(x)$	$-$	$- - -$	$-$	$- - -$	$0 \mid -$	$- - -$	$-$
$f(x)$	1	$\searrow$	e^{-2}	$\searrow$	$0 \mid \infty$	$\searrow$	1
$f''(x)$	$-$	$- - -$	0	$+ + +$	$+ \mid +$	$+ + +$	$+$

Graficul funcţiei este reprezentat în fig. 33.

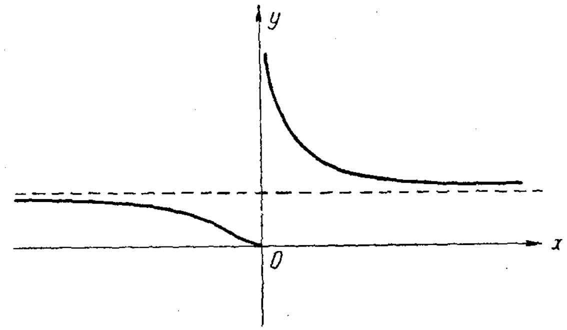

Fig 33

547. $f(x) = |x| e^{-|x-1|}$.

Ţinînd seama de definiţia modulului, avem

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{x}{e^{1-x}}, & x \in (-\infty, 0) \\ 0, & x = 0 \\ \dfrac{x}{e^{\frac{x}{1-x}}}, & x \in (0, 1) \\ 1, & x = 1 \\ \dfrac{x}{e^{x-1}}, & x \in (1, \infty). \end{cases}$$

I. $E = (-\infty, +\infty)$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^{x-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^{x-1}} = 0; \ \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x}{e^{1-x}} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-1}{-e^{1-x}} = 0.$$

$$\text{II. } f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{1+x}{e^{1-x}} \text{ pentru } x \in (-\infty, 0) \\ \dfrac{1+x}{e^{1-x}} \text{ pentru } x \in (0, 1) \\ \dfrac{1-x}{e^{x-1}} \text{ pentru } x \in (1, \infty). \end{cases}$$

În punctele $x = 0$ şi $x = 1$, calculăm derivata pornind de la definiţie.

$$f'_d(0) = \lim_{x\to0} \frac{e^{\frac{x}{1-x}}}{x} = \frac{1}{e}; \ f'_s(0) = \lim_{x\to0} \frac{e^{-\frac{x}{1-x}}}{x} = -\frac{1}{e};$$

$$f'_d(1) = \lim_{\substack{x\to1 \\ x>1}} \frac{e^{\frac{x}{x-1}}-1}{x-1} = \lim_{\substack{x\to1 \\ x>1}} \frac{x-e^{x-1}}{x-1} = 0; f'_s(1) = \lim_{x\to1} \frac{e^{\frac{x}{1-x}}-1}{x-1} = 2;$$

$f'(x) = 0$ pentru $x = -1$; $f'(x) > 0$ pentru $x \in (-\infty, -1) \cup (0, 1)$; $f'(x) < 0$ pentru $x \in (-1, 0) \cup (1, \infty)$. Punctul $x = 1$ este punct de maxim.

$$\text{III. } f''(x) = \begin{cases} -\dfrac{2+x}{e^{1-x}} \text{ pentru } x \in (-\infty, 0) \\ \dfrac{2+x}{e^{1-x}} \text{ pentru } x \in (0, 1) \\ \dfrac{x-2}{e^{x-1}} \text{ pentru } x \in (1, \infty) \end{cases}$$

$f''(x) = 0$, dacă $x = -2$ şi $x = 2$; $f''(x) > 0$, dacă $x \in (-\infty, -2) \cup (0, 1) \cup (2, \infty)$; $f''(x) < 0$, dacă $x \in (-2, 0)$. Punctele $x = -2$ şi $x = 2$ sînt puncte de inflexiune.

IV. Asimptote oblice şi verticale nu are. Dreapta de ecuaţie $y = 0$ este asimptotă orizontală.

V. Tabloul este

x	$-\infty$ $\quad -2 \quad -1 \quad 0 \quad\quad 1 \quad 2 \quad \infty$
$f'(x)$	$+ + + + + + 0 \quad -\frac{1}{e} \mid \frac{1}{e} + + + 2 \mid 0$ — — —
$f(x)$	$0 \nearrow \frac{2}{e^3} \nearrow \frac{1}{e^2} \searrow 0 \nearrow 1 \searrow \frac{2}{e} \searrow 0$
$f''(x)$	$+ + + + 0$ — — — — — $\mid + + + \mid$ — — $0 + +$

Funcţia este reprezentată în fig. 34.

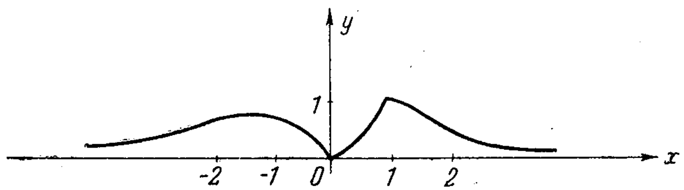

Fig. 34

548. $f(x) = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$.

Deoarece $f(x) = -f(-x)$, vom reprezenta funcţia numai pentru $x \geqslant 0$.

I. Domeniul de definiţie îl obţinem din condiţia $-1 \leqslant \frac{2x}{1+x^2} \leqslant 1$, care are loc pentru orice x. Deci $E = (-\infty, \infty)$.
Deducem $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$.

II. $f'(x) = \frac{2\,\mathrm{sign}(1-x^2)}{1+x^2}$, pentru $x \neq \pm 1$; $f'(x) \neq 0$; $f'(x) > 0$ dacă $0 < x < 1$; $f'(x) < 0$ dacă $x > 1$.

Ţinînd seama de rezultatul de la exerciţiul 459, avem $f'_d(1) = -2$, $f'_s(1) = 2$.

III. $f''(x) = \frac{4x\,\mathrm{sign}\,(x^2-1)}{(1+x^2)^2}$ pentru $x \neq \pm 1$; $f''(x) = 0$ pentru $x = 0$; $f''(x) > 0$ pentru $x \in (1, \infty)$; $f''(x) < 0$ pentru $x \in (0, 1)$.

IV. Asimptote oblice şi verticale nu are. Dreapta de ecuaţie $y = 0$ este asimptotă orizontală.

V. Tabloul este

	0		1		∞
$f'(x)$		+ + +	|	— — — —	
$f(x)$	0	↗	$\frac{\pi}{2}$	↘	0
$f''(x)$		— — —	|	+ + +	+

Graficul este reprezentat în fig. 35.

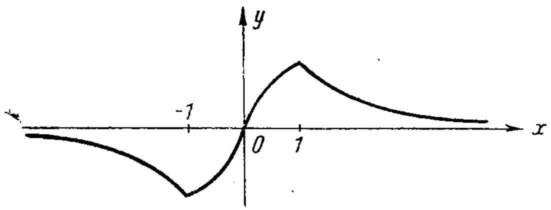

Fig. 35

549. $f(x) = \frac{|1-x^2|}{x}$.

I. $E = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. Ţinînd seama de definiţia modulului, putem scrie funcţia în modul următor

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-x^2}{x} \text{ pentru } x \in (-1, 0) \cup (0, 1) \\ 0 \qquad \text{pentru } x = \pm 1 \\ \frac{x^2-1}{x} \text{ pentru } x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty). \end{cases}$$

Funcţia fiind impară, $f(-x) = -f(x)$, graficul este simetric faţă de origine. Este suficient deci s-o reprezentăm pe intervalul $(0, \infty)$. Avem

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1-x^2}{x} = \infty\ ;\ \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-1}{x} = \infty.$$

II. $$f'(x) = \begin{cases} -\frac{x^2+1}{x} \text{ pentru } x \in (0, 1) \\ \frac{x^2+1}{x} \text{ pentru } x \in (1, \infty). \end{cases}$$

În punctul $x = 1$, calculăm derivata pornind de la definiţie

$$f'_d(1) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{\frac{x^2-1}{x}}{x-1} = 2;\ f'_s(1) = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1-x^2}{x}}{x-1} = -2.$$

Punctul $x = 1$ este punct unghiular. Derivata $f'(x) > 0$ pentru $x \in (1, \infty)$; $f'(x) < 0$ pentru $x \in (0, 1)$.

III. $$f''(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^3} \text{ pentru } x \in (0, 1) \\ -\frac{2}{x^3} \text{ pentru } x \in (1, \infty) \end{cases}$$

$f''(x) > 0$ pentru $x \in (0, 1)$; $f''(x) < 0$ pentru $x \in (1, \infty)$.

Punct de inflexiune nu are.

IV. Dreapta de ecuaţie $x = 0$ este asimptotă verticală. Deoarece $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$, se pune problema determinării asimptotelor oblice, dacă acestea există:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-1}{x^2} = 1;\ n = \lim_{x\to\infty} [f(x) - mx] =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \left[\frac{x^2-1}{x} - x\right] = \lim_{x\to\infty} \left(-\frac{1}{x}\right) = 0.$$

Dreapta de ecuaţie $y = x$ este asimptotă oblică.

V. Tabloul este

x	0		1		∞
$f'(x)$	$-\ -\ -\ -\ -$	2	2	$+\ +\ +\ +\ +$	
$f(x)$	∞	$\rightarrow$	0	$\nearrow$	∞
$f''(x)$	$+\ +\ +\ +\ +$			$-\ -\ -\ -\ -$	

Graficul funcției este reprezentat în fig. 36.

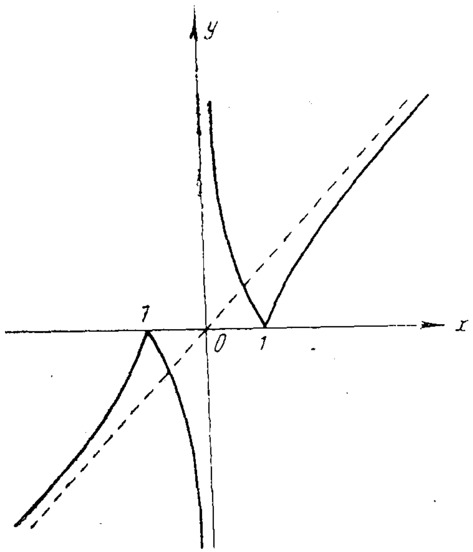

Fig. 36

550. $f(x) = x - 2 \operatorname{arctg} x$.

I. $E = (-\infty, \infty)$. Funcția este impară. Prin urmare este suficient s-o reprezentăm în intervalul $[0, \infty]$. Avem

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} (x - 2 \operatorname{arctg} x) = \infty.$$

II. $f'(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$; $f'(x) = 0$ pentru $x = \pm 1$

$f'(x) > 0$ pentru $x \in (1, \infty)$;

$f'(x) < 0$ pentru $x \in [0, 1]$.

III. $f''(x) = \dfrac{4x}{(1 + x^2)^2}$; $f''(0) = 0$ pentru $x = 0$. Punctul $x = 0$ este punct de inflexiune; $f''(x) > 0$ pentru $x > 0$.

IV. Asimptote orizontale și verticale nu are. Să cercetăm dacă există asimptote oblice:

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x - 2 \operatorname{arctg} x}{x} = 1;\ n = \lim_{x \to \infty} [f(x) - mx] = -\pi.$$

Dreapta de ecuație $y = x - \pi$ este asimptotă la ramura de la $+\infty$ a curbei.

V. Tabloul este

x	0		1		∞
$f'(x)$		$-\ -\ -\ -$	0	$+\ +\ +\ +\ +$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$1 - \frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	∞
$f''(x)$	0	$+\ +\ +$	$+$	$+\ +\ +\ +$	

Funcția este reprezentată în fig. 37.

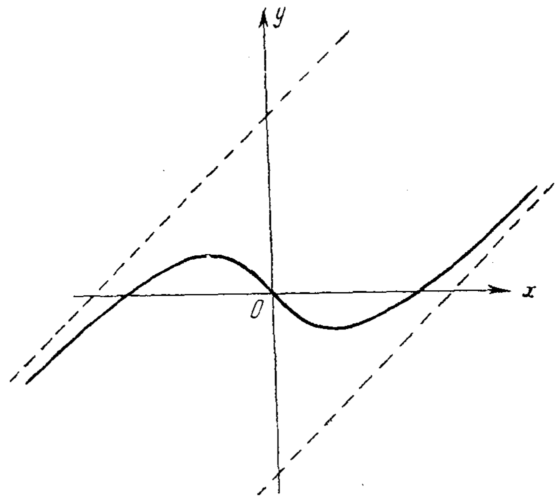

Fig. 37

551. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 1}}$.

I. $E = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty)$. Deducem că $f(x) = -f(-x)$. Funcția fiind impară, graficul este simetric față de origine. Este suficient să studiem variația funcției pentru $x \in [0, 1) \cup (1, \infty)$. Avem

$$f(x) = 0 \text{ pentru } x = 0;\ \lim_{x \to \infty} f(x) = \infty\ \lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \frac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 1}} = \infty,$$

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = -\infty.$$

II. $f'(x) = \dfrac{x^2 - 3}{3\sqrt[3]{(x^2 - 1)^4}}$, $x \neq 0$; $f'(x) = 0$ pentru $x = \sqrt{3}$,

$f'(x) > 0$ pentru $x \in (\sqrt{3}, \infty)$, $f'(x) < 0$ pentru $x \in [0, 1) \cup (1, \sqrt{3})$. Punctul $x = \sqrt{3}$ este punct de minim.

Observăm că în origine curba este tangentă dreptei de ecuație $y = -1$.

III. $f''(x) = \dfrac{2x(9 - x^2)}{9(x^2 - 1)^2 \sqrt[3]{x^2 - 1}}$, $x \neq 1$;

$f''(x) = 0$ pentru $x = 0$ și $x = 3$; $f''(x) > 0$ pentru $x \in (1, 3)$; $f''(x) < 0$ pentru $x \in (0, 1) \cup (3, \infty)$. Punctele $x = 0$ și $x = 3$ sînt puncte de inflexiune.

IV. Dreapta de ecuație $x = 1$ este asimptotă verticală.

Deoarece $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$, dreapta de ecuație $y = 0$ este asimptotă orizontală.

Graficul nu are asimptote oblice.

V. Tabloul este

x	0		1		$\sqrt{3}$		3		∞
$f'(x)$	-1	$- \; - \; -$		$- \; -$	0	$+ \; +$	$+$	$+ \; + \; +$	$+$
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\infty \mid +\infty$	$\searrow$	$\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}$	$\nearrow$	$\dfrac{3}{2}$	$\nearrow$	∞
$f''(x)$		$- \; - \; - \; -$		$+ \; + \; +$	$+$		0	$- \; - \; -$	$-$

Graficul funcției este reprezentat în fig. 38.

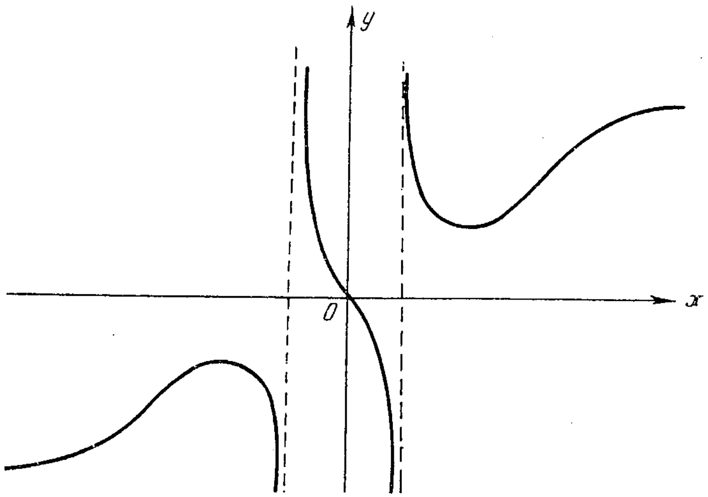

Fig. 38

552. $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \textit{pentru } x \neq 0 \\ 0 & \textit{pentru } x = 0. \end{cases}$

I. $E = (-\infty, \infty)$. Întrucît $f(x) = f(-x)$, funcția este pară; deci e suficient să o reprezentăm în intervalul $[0, \infty)$. Găsim $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = 0$.

II. $f'(x) = \dfrac{2e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^3}$ pentru $x \neq 0$.

În origine, calculăm derivata pornind de la definiție

$$f'_d(0) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x^2}}} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{-\frac{1}{x^2}}{-\frac{2}{x^3} e^{\frac{1}{x^2}}} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x}{2e^{\frac{1}{x^2}}} = 0; \; f'(x) > 0 \text{ pentru } x \geqslant 0.$$

III. $f''(x) = \dfrac{2e^{-\frac{1}{x^2}}(2 - 3x^2)}{x^6}$ pentru $x \neq 0$; $f''(x) = 0$ pentru $x = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$; $f''(x) > 0$ pentru $x \in \left(0, \sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)$; $f''(x) < 0$ pentru

$$x \in \left(\sqrt{\frac{2}{3}}, \infty\right).$$

Punctul $x = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$ este punct de inflexiune.

IV. Graficul nu are asimptote verticale. Dreapta de ecuație $y = 1$ este asimptotă orizontală.

V. Tabloul este

x	0		$\sqrt{\frac{2}{3}}$		∞
$f'(x)$	0	$+ \; +$	$+$	$+ \; + \; + \; +$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$e^{-\frac{3}{2}}$	$\nearrow$	1
$f''(x)$	$+$	$+ \; +$	0	$- \; - \; - \; -$	

Graficul funcției este reprezentat în fig. 39.

553. $f(x) = \dfrac{|x-1|}{x+1}$.

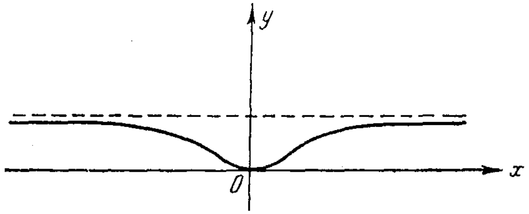

Fig. 39

I. $E = (-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$. Avem

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-x}{1+x} & \text{pentru } x < 1 \\ 0 & \text{pentru } x = 1 \\ \dfrac{x-1}{x+1} & \text{pentru } x > 1 \end{cases}$$

$$\lim_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} f(x) = \lim_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} \frac{1-x}{1+x} = -\infty; \quad \lim_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} f(x) = \lim_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} \frac{1-x}{1+x} = +\infty$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 1; \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -1.$$

$$\text{II. } f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{2}{(1+x)^2} & \text{pentru } x < 1 \\ \dfrac{2}{(1+x)^2} & \text{pentru } x > 1. \end{cases}$$

În punctul $x = 1$, calculăm derivata pornind de la definiție:

$$f'_d(1) = \frac{1}{2}; \quad f'_s(1) = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{III. } f''(x) = \begin{cases} \dfrac{4}{(1+x)^3} & \textit{pentru } x < 1 \\ -\dfrac{4}{(1+x)^3} & \textit{pentru } x > 1. \end{cases}$$

Curba nu are puncte de inflexiune. $f''(x) > 0$ pentru $x \in (-1, 1)$ și $f''(x) < 0$ pentru $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.

IV. Dreapta de ecuație $y = 1$ este asimptotă orizontală la ramura de la ∞ și dreapta de ecuație $y = -1$ este asimptotă orizontală la ramura de la $-\infty$. Dreapta de ecuație $x = -1$ este asimptotă verticală.

V. Tabloul este

x	$-\infty$	-1		1		∞
$f'(x)$	$- \; - \; -$		$- \; - \; -$	$-\frac{1}{2} \mid \frac{1}{2}$	$+ \; + \; + \; + \; + \; +$	
$f(x)$	$-1 \searrow -\infty$		$\infty \searrow$	0	$\nearrow$	1
$f''(x)$	$- \; - \; -$		$+ \; + \; + \; +$		$- \; - \; - \; - \; - \; - \; -$	

Funcția este reprezentată în fig. 40.

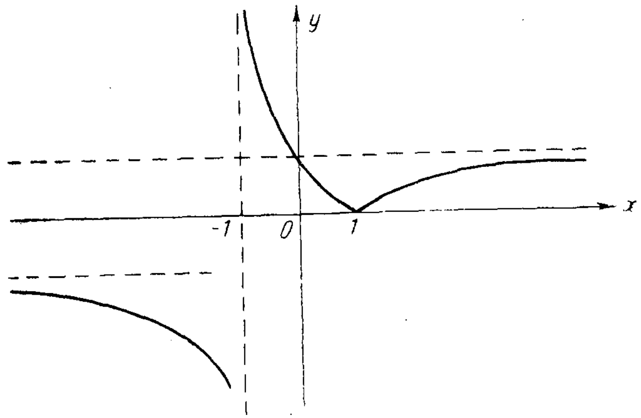

Fig. 40

554. $f(x) = \dfrac{\alpha x^4}{(\beta + \gamma x)^3}$, $\alpha, \beta, \gamma \neq 0$.

Să se determine constantele α, β, γ, astfel încît graficul funcției să admită ca asimptotă dreapta de ecuație $y = x - 3$. Să se reprezinte apoi funcția astfel determinată.

Determinăm constantele α, β, γ prin următoarele condiții:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\dfrac{\alpha x^4}{(\beta + \gamma x)^3}}{x} = 1; \quad \lim_{x \to \infty} \left[\frac{\alpha x^4}{(\beta + \gamma x)^3} - x \right] = -3.$$

Obținem

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\alpha x^3}{(\beta+\gamma x)^3}=\frac{\alpha}{\gamma^3}=1,$$

de unde $\alpha=\gamma^3$, și

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{\gamma^3x^4}{(\beta+\gamma x)^3}-x\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{-3\beta\gamma^2x^3+\dots}{\gamma^3x^3+\dots}=-\frac{3\beta}{\gamma}=-3,$$

de unde $\beta=\gamma$. Prin urmare

$$f(x)=\frac{\gamma^3x^4}{\gamma^3(1+x)^3}=\frac{x^4}{(1+x)^3}.$$

I. $E=(-\infty,\ -1)\cup(-1,\ \infty)$. Avem

$f(x)=0$ pentru $x=0$, $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$

$$\lim_{\substack{x\to-1\\x>-1}}f(x)=\infty;\quad \lim_{\substack{x\to-1\\x<-1}}f(x)=-\infty.$$

II. $f'(x)=\dfrac{x^3(4+x)}{(1+x)^4}$ pentru $x\neq 1$, $f'(x)=0$ pentru $x=0$, $x=-4$; $f'(x)<0$ pentru $-4<x<0$; $f'(x)>0$ pentru $x\in(-\infty,\ -4)\cup(0,\ \infty)$.

Punctul $x=-4$ este punct de maxim; punctul $x=0$ este punct de minim.

III. $f''(x)=\dfrac{12\,x^2}{(1+x)^5}$ pentru $x\neq 1$; $f''(x)=0$ pentru $x=0$. Însă originea nu este punct de inflexiune, deoarece — în acest punct — derivata a doua nu își schimbă semnul; $f''(x)>0$ pentru $x>-1$ și $f''(x)<0$ pentru $x<-1$.

IV. Dreapta de ecuație $y=x-3$ este asimptotă oblică la ambele ramuri. Dreapta de ecuație $x=-1$ este asimptotă verticală.

V. Tabloul este următorul

x	$-\infty$		-4		-1		0		∞
$f'(x)$		+ + +	0	− − −	|	− −	0	+ + +	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$-\frac{256}{27}$	↘	$-\infty$ | ∞	↘	0	↗	∞
$f''(x)$		− −	−	− − −	|	+ +		+ + +	

Graficul funcției este reprezentat în fig. 41.

Exerciții propuse spre rezolvare

Să se reprezinte grafic următoarele funcții:

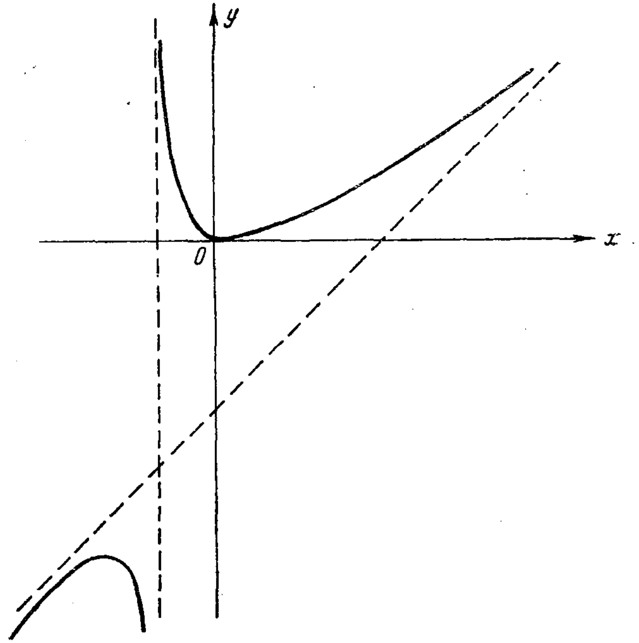

Fig. 41

555. $f(x)=\dfrac{e^x}{x}$.

R. $x\in(-\infty,\ 0)\cup(0,\ \infty)$. Funcția are un minim în punctul $x=1$. Puncte de inflexiune nu are. Dreapta de ecuație $x=0$ este asimptotă verticală.

556. $f(x)=\sqrt{x^3+1}$.

R. $x\in(-1,\ \infty)$. Funcția este crescătoare. Punctul $x=0$ este punct de inflexiune. Asimptote nu sînt.

557. $f(x)=x\ln(1+x^2)$.

R. $x\in(-\infty,\ \infty)$. Funcția este crescătoare. Originea este punct de inflexiune. Asimptote nu sînt.

558. $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1-x}{1+x}$.

R. $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$. Funcția este descrescătoare. Originea este punct de inflexiune. Dreapta de ecuație $y = -\frac{\pi}{4}$ este asimptotă orizontală.

559. $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 3}$.

R. $x \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (-\sqrt{3}, \sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, \infty)$. Funcția are un maxim în punctul $x = -3$ și un minim în $x = 3$. Originea este punct de inflexiune. Dreptele de ecuații $x = -\sqrt{3}$, $x = \sqrt{3}$ sînt asimptote verticale; dreapta de ecuație $y = x$ este asimptotă oblică.

560. $f(x) = \sqrt{x(x-1)}$.

R. $x \in (0, \infty)$. Funcția are un maxim în punctul $x = \frac{1}{3}$. Punctul $x = 1$ este punct unghiular. Puncte de inflexiune și asimptote nu sînt.

561. $f(x) = \frac{x^2 + 1}{e^{|x-1|}}$.

R. $x \in (-\infty, \infty)$. Funcția are un maxim în punctul $x = 1$. Puncte de inflexiune în $x = -3$, $x = -1$, $x = 3$. Dreapta de ecuație $y = 0$ este asimptotă orizontală.

562. $f(x) = \begin{cases} \frac{|x+1|}{\ln|x+1|}, & x \neq -1 \\ 0, & x = -1. \end{cases}$

R. $x \in (-\infty, -2) \cup (-2, 0) \cup (0, \infty)$. Funcția are un maxim în punctul $x = -1$ și minime în $x = -1 - e$, $x = e - 1$. Puncte de inflexiune în $x = -e^2 - 1$, $x = e^2 - 1$. Dreptele de ecuații $x = -2$, $x = 0$ sînt asimptote verticale. Asimptote oblice sau orizontale nu sînt.

563. $f(x) = \frac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$.

R. $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$. Funcția are un maxim în punctul $x = -5$. Punctul $x = 1$ este punct de inflexiune. Dreapta de ecuație $x = -1$ este asimptotă verticală, dreapta de ecuație $y = x - 5$ este asimptotă oblică.

564. $f(x) = \sqrt[3]{x^2} - x$.

R. $x \in (-\infty, \infty)$. Funcția are un maxim în punctul $x = \frac{8}{27}$. Puncte de inflexiune și asimptote nu sînt. Originea este punct de întoarcere.

565. $f(x) = \frac{x}{4}(x^2 - 2)\sqrt{4 - x^2} + 2 \arcsin \frac{x}{2}$.

R. $x \in [-2,2]$. Funcția este crescătoare. Puncte de inflexiune în $x = 0$, $x = \pm\sqrt{\frac{8}{3}}$. Asimptote verticale nu sînt.

566. $f(x) = \frac{|x-2|}{x-4}$.

R. $x \in (-\infty, 4) \cup (4, \infty)$. Funcția are un maxim în punctul $x = 2$. Puncte de inflexiune nu sînt. Dreapta de ecuație $x = 4$ este asimptotă verticală, dreapta de ecuație $y = 1$, asimptotă orizontală.

5. PRIMITIVE

Fie f o funcţie reală definită pe un interval I. Se numeşte *primitivă* a funcţiei f pe I orice funcţie F definită şi derivabilă pe I astfel ca $F'(x) = f(x)$ pentru orice $x \in I$.

Dacă F este o primitivă a funcţiei f pe I, atunci $F + C$ este o primitivă a funcţiei f pe intervalul I, oricare ar fi constanta C; reciproc, orice primitivă a lui f este de forma $F + C$.

Se numeşte *integrală nedefinită* a funcţiei f mulţimea tuturor primitivelor funcţiei f şi se notează $\int f(x)\,\mathrm{d}x$.

Proprietăţi ale primitivelor:

$$\int af(x)\,\mathrm{d}x = a\int f(x)\,\mathrm{d}x \quad (a = \text{const} \neq 0)$$

$$\int [f(x) + g(x)]\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x.$$

5.1. Calculul primitivelor cu ajutorul schimbării de variabilă

Fie funcţiile $I \xrightarrow{u} j$ şi $j \xrightarrow{f} R$. Presupunem că u are derivată continuă pe I şi că f este continuă pe j. Dacă $\int f(t)\mathrm{d}t = F(t) + C$, atunci $\int f(u(x))\, u'(x)\,\mathrm{d}x = F(u(x)) + C$.

Formal se scrie $\int f(u(x))\, u'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(t)\,\mathrm{d}t$.

Exerciţii rezolvate

Să se calculeze:

567. $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}\,\mathrm{d}x$, $x \geqslant 1$.

Efectuăm schimbarea de variabilă $\ln x = u(x)$ şi obţinem

$$\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}\,\mathrm{d}x = \int \sqrt{u}\,\mathrm{d}u = \frac{2u^{\frac{3}{2}}}{3} + C = 2\,\frac{(\ln x)^{\frac{3}{2}}}{3} + C.$$

568. $\int \frac{e^x\,\mathrm{d}x}{e^x + 1}$, $-\infty < x < \infty$.

Efectuăm schimbarea de variabilă $e^x = t$ şi obţinem

$$\int \frac{e^x\,\mathrm{d}x}{e^x+1} = \int \frac{\mathrm{d}t}{1+t} = \ln(1+t) + C = \ln(1+e^x) + C.$$

569. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-25x^2}}$, $|x| < \frac{1}{5}$.

Efectuăm schimbarea de variabilă $5x = t$, de unde

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-25x^2}} = \frac{1}{5}\int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{5}\arcsin 5x + C.$$

570. $\int \frac{x^3\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^8}}$, $|x| < 1$.

Efectuăm schimbarea de variabilă $x^4 = t$, de unde

$$\int \frac{x^3\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^8}} = \frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{4}\arcsin t + C = \frac{1}{4}\arcsin x^4 + C.$$

Exerciţii propuse spre rezolvare

Să se calculeze:

571. $\int \frac{2^x\mathrm{d}x}{\sqrt{1-4^x}}$. **R.** $\frac{\arcsin 2^x}{\ln 2} + C.$

572. $\int \frac{\cos\alpha\,\mathrm{d}\alpha}{a^2 + \sin^2\alpha}$, $a \neq 0$. **R.** $\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{\sin\alpha}{a} + C.$

573. $\int \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$, $|x| < 1$.

R. $\arcsin x - \sqrt{1-x^2} + C.$

574. $\int \frac{x(1-x^2)}{1+x^4}\,\mathrm{d}x$ **R.** $\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x^2 - \frac{1}{4}\ln(x^4+1) + C.$

575. $\int \frac{x + (\arccos 3x)^2}{\sqrt{1-9x^2}}\,\mathrm{d}x$, $|x| < \frac{1}{3}$.

R. $C - \frac{1}{9}\left[\sqrt{1-9x^2} + (\arccos 3x)^3\right].$

576. $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 2\cos^2 x}$. **R.** $\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}\right) + C.$

577. $\int \frac{\cos x \, dx}{\sqrt{2 + \cos 2x}}$. **R.** $\frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin\left(\sqrt{\frac{2}{3}} \sin x\right) + C.$

5.2. Primitive care se calculează cu ajutorul formulei de integrare prin părți

Fie f și g două funcții definite pe intervalul I. Dacă f și g au derivate continue pe I, atunci se poate aplica formula (de integrare prin părți):

$$\int f'g \, dx = fg - \int g'f \, dx.$$

Exerciții rezolvate

Să se calculeze:

578. $I = \int \frac{x e^{\arcsin x}}{\sqrt{1 - x^2}} dx, \; -1 < x < 1.$ $1-x^2=u$

Notăm $f(x) = e^{\arcsin x}$, $g'(x) = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$, de unde obținem

$$f'(x) = \frac{e^{\arcsin x}}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad g(x) = -\sqrt{1 - x^2}.$$

Deducem

$$I = \int \frac{x e^{\arcsin x}}{\sqrt{1 - x^2}} dx = -\sqrt{1 - x^2}\, e^{\arcsin x} + \int e^{\arcsin x} dx. \qquad (1)$$

Integrala obținută se calculează folosind din nou formula de integrare prin părți. Notăm $f(x) = e^{\arcsin x}$, $g'(x) = 1$, de unde rezultă $f'(x) = \frac{e^{\arcsin x}}{\sqrt{1 - x^2}}$, $g(x) = x$.

Prin urmare

$$\int e^{\arcsin x} dx = x e^{\arcsin x} - \int \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} e^{\arcsin x} dx.$$

Înlocuind în (1), obținem

$$I = -\sqrt{1 - x^2}\, e^{\arcsin x} + x e^{\arcsin x} - I,$$

de unde

$$I = \frac{1}{2}\left(-\sqrt{1 - x^2}\, e^{\arcsin x} + x e^{\arcsin x}\right) + C.$$

579. $I = \int \frac{x e^{\operatorname{arctg} x}}{\sqrt{(1 + x^2)^3}} dx.$

Notăm $\frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} = f(x)$, $g'(x) = \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{1 + x^2}$, de unde

$$f'(x) = \frac{1}{(1 + x^2)^{3/2}}, \quad g(x) = e^{\operatorname{arctg} x}.$$

Deci

$$I = \frac{x e^{\operatorname{arctg} x}}{\sqrt{1 + x^2}} - \int \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{(1 + x^2)^{3/2}} dx.$$

Mai integrăm o dată prin părți, notînd

$$g'(x) = \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{1 + x^2}, \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}, \text{ de unde}$$

$$f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{(1 + x^2)^3}}.$$

Deci

$$I = \frac{x e^{\operatorname{arctg} x}}{\sqrt{1 + x^2}} - \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{\sqrt{1 + x^2}} \text{ sau } I = \frac{1}{2} \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{\sqrt{1 + x^2}}(x - 1) + C.$$

580. $I_n = \int \frac{dx}{(a^2 + x^2)^n}, \quad a \neq 0.$

Considerăm integrala $I_{n-1} = \int \frac{dx}{(a^2 + x^2)^{n-1}}$ care se integrează prin părți notînd $f(x) = \frac{1}{(a^2 + x^2)^{n-1}}$, $g'(x) = 1$; obținem $f'(x) = -2(n - 1)\frac{x}{(a^2 + x^2)^n}$, $g(x) = x$. Deci

$$I_{n-1} = \frac{x}{(a^2 + x^2)^{n-1}} + 2(n - 1)\int \frac{x^2}{(a^2 + x^2)^n} dx = \frac{x}{(a^2 + x^2)^{n-1}} +$$
$$+ 2(n - 1)\int \frac{dx}{(a^2 + x^2)^{n-1}} - 2a^2(n - 1)\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n}$$

sau

$$I_{n-1} = \frac{x}{(a^2 + x^2)^{n-1}} + 2(n - 1) I_{n-1} - 2a^2(n - 1) I_n.$$

Rezultă următoarea formulă de recurență

$$I_n = \frac{x}{2(a^2 + x^2)^{n-1} a^2 (n - 1)} + \frac{2n - 3}{2n - 2} \cdot \frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{(a^2 + x^2)^{n-1}}.$$

Pentru $n = 3$, de exemplu, obținem

$$I_3 = \int \frac{dx}{(a^2 + x^2)^3} = \frac{1}{4} \cdot \frac{x}{a^2(a^2 + x^2)^2} + \frac{3}{4a^2} I_2$$

$$I_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{a^2(x^2 + a^2)} + \frac{1}{2a^2} I_1.$$

$$I_1 = \int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a}.$$

Deci

$$I_3 = \int \frac{dx}{(a^2 + x^2)^3} = \frac{1}{4} \cdot \frac{x}{a^2(a^2 + x^2)} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{a^4} \cdot \frac{x}{a^2 + x^2} +$$
$$+ \frac{1}{2a^5} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C.$$

581. $I_m = \int \cos^m x \, dx$.

Notăm $f(x) = \cos^{m-1} x$, $g'(x) = \cos x$; obținem

$$\int \cos^m x \, dx = \cos^{m-1} x \sin x + (m-1) \int \cos^{m-2} \sin^2 x \, dx$$

sau

$$\int \cos^m x \, dx = \cos^{m-1} x \sin x + (m-1) \int \cos^{m-2} x \, dx -$$
$$- (m-1) \int \cos^m x \, dx$$

sau

$$\int \cos^m x \, dx = \frac{1}{m} \cos^{m-1} x \sin x + \frac{m-1}{m} \int \cos^{m-2} x \, dx.$$

Rezultă următoarea formulă de recurență

$$I_m = \frac{1}{m} \cos^{m-1} x \sin x + \frac{m-1}{m} I_{m-2}. \tag{1}$$

Cazul 1: $m > 0$. Aplicăm formula de recurență (1) și integrala finală este $\int dx = x$, dacă m este par și $\int \cos x \, dx = \sin x$, dacă m este impar.

Pentru $m = 8$, de exemplu, avem

$$I_8 = \int \cos^8 x \, dx = \frac{1}{8} \cos^7 x \sin x + \frac{7}{8} I_6$$

$$I_6 = \int \frac{1}{6} \cos^5 x \sin x + \frac{5}{6} I_4$$

$$I_4 = \int \frac{1}{4} \cos^3 x \sin x + \frac{3}{4} I_2$$

$$I_2 = \frac{1}{2} \cos x \sin x + \frac{1}{2} I_0 = \frac{1}{2} \cos x \sin x + \frac{x}{2}.$$

Deci

$$I_8 = \left(\frac{1}{8} \cos^7 x + \frac{7}{8 \cdot 6} \cos^5 x + \frac{7 \cdot 5}{8 \cdot 6 \cdot 4} \cos^3 x + \right.$$
$$\left. + \frac{7 \cdot 5 \cdot 3}{8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2} \cos x \right) \sin x + \frac{7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1}{8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2} x + C.$$

Observație. Dacă $m = 2n - 1$, atunci integrala propusă se mai poate calcula astfel:

$$\int \cos^{2n+1} x \, dx = \int (1 - \sin^2 x)^n \, d \sin x.$$

Cazul 2: $m < 0$, $x \neq (2k + 1) \frac{\pi}{2}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Scriem relația de recurență în modul următor:

$$\frac{m-1}{m} \int \cos^{m-2} x \, dx = -\frac{1}{m} \cos^{m-1} x \sin x + \int \cos^m x \, dx. \tag{2}$$

Împărțim egalitatea (2) cu $\frac{m-1}{m}$:

$$\int \cos^{m-2} x \, dx = -\frac{1}{m-1} \cos^{m-1} x \sin x + \frac{m}{m-1} \int \cos^m x \, dx. \tag{3}$$

Notînd $m - 2 = -n$, relația de recurență (3) devine

$$\int \frac{dx}{\cos^n x} = \frac{\sin x}{(n-1) \cos^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\cos^{n-2} x}.$$

Observație. Dacă $n = 2m$, $x \neq (2k + 1) \frac{\pi}{2}$, atunci integrala dată se poate calcula și astfel:

$$\int \frac{dx}{\cos^{2m} x} = \int \frac{1}{(\cos^2 x)^{m-1}} \cdot \frac{dx}{\cos^2 x} = \int (1 + \operatorname{tg}^2 x)^{m-1} \, d \operatorname{tg} x.$$

Fie de calculat $I_5 = \int \frac{dx}{\cos^5 x}$, $x \neq (2k + 1) \frac{\pi}{2}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, n = 5$. Avem

$$I_5 = \frac{\sin x}{4 \cos^4 x} + \frac{3}{4} I_3, \quad I_3 = \frac{\sin x}{2 \cos^2 x} + \frac{1}{2} I_1,$$

$$I_1=\int\frac{dx}{\cos x}=\int\frac{dx}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}=\int\frac{dx}{2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)}=$$

$$=-\int\frac{\dfrac{dx}{2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)}}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)}=-\ln\left[\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\right].$$

Prin urmare

$$\int\frac{dx}{\cos^5 x}=\frac{\sin x}{4\cos^4 x}+\frac{3\cdot 1}{4\cdot 2}\cdot\frac{\sin x}{\cos^2 x}-\frac{1}{2}\ln\left[\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\right]+C.$$

582. $\int \sin^m x\cos^n x\,dx.$

Dacă cel puțin unul dintre numerele m și n este impar, de exemplu, $n=2p+1$, atunci

$$\int\sin^m x\cos^m x\,dx=\int\sin^m x\cos^{2p}x\cos x\,dx=$$
$$=\int\sin^m x(1-\sin^2 x)^p d\sin x.$$

Ultima integrală se calculează notînd $\sin x=t$, ceea ce revine la găsirea primitivei unui binom (v. § 5).

Dacă numerele m și n sînt pare, $m=2p$, $n=2r$, atunci:

$$\int\sin^m x\cos^n x\,dx=\int\sin^{2p}x\cos^{2r}x\,dx=\int\cos^{2r}x(1-\cos^2 x)^r dx.$$

Facem calculul în ultima integrală și ținem seama de rezultatul de la exercițiul 581.

583. $I_m=\int\frac{x^m dx}{\sqrt{a^2-x^2}},\quad |x|<a.$

Notăm $f(x)=x^{m-1}$, $g'(x)=\frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$, de unde $f'(x)=(m-1)x^{m-2}$, $g(x)=-\sqrt{a^2-x^2}$. Deci

$$\int\frac{x^m dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=-x^{m-1}\sqrt{a^2-x^2}+(m-1)\int x^{m-2}\sqrt{a^2-x^2}\,dx.$$

Înlocuim în ultima integrală $\sqrt{a^2-x^2}=\frac{a^2-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}$ și obținem

$$\int\frac{x^m dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=-x^{m-1}\sqrt{a^2-x^2}+(m-1)a^2\int\frac{x^{m-2}dx}{\sqrt{a^2-x^2}}-$$
$$-(m-1)\int\frac{x^m dx}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

Trecînd ultima integrală în membrul întîi al egalității și împărțind apoi cu m, obținem

$$\int\frac{x^m dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=-\frac{x^{m-1}}{m}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{m-1}{m}a^2\int\frac{x^{m-2}dx}{\sqrt{a^2-x^2}}. \quad (1)$$

Cazul 1: $m>0$. Formula (1) constituie o relație de recurență. Ea se mai scrie

$$I_m=-\frac{x^{m-1}}{m}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{m-1}{m}a^2 I_{m-2}.$$

Formula (1) se recomandă numai în cazul cînd m este un număr par.

Dacă m este impar, $m=2n+1$, atunci integrala propusă se integrează mai ușor făcînd substituția $t=\sqrt{a^2-x^2}$, cînd obținem $x^2=a^2-t^2$, $x\,dx=-t\,dt$; deci

$$\int\frac{x^{2n+1}dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=-\int\frac{(a^2-t^2)^n t\,dt}{t}=-\int(a^2-t^2)^n dt.$$

Cazul 2: $m<0$, $x\neq 0$. Notînd $m-2=-n$ $(n>0)$, formula de recurență (1) devine

$$\int\frac{dx}{x^{n-2}\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{(n-2)x^{n-1}}+\frac{(n-1)a^2}{n-2}\int\frac{dx}{x^n\sqrt{a^2-x^2}}. \quad (2)$$

Schimbînd în (2) locul celor două integrale, deducem

$$\int\frac{dx}{x^n\sqrt{a^2-x^2}}=-\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{(n-1)a^2x^{n-1}}+\frac{n-2}{(n-1)a^2}\int\frac{dx}{x^{n-2}\sqrt{a^2-x^2}}$$

(formulă de reducere).

Observație. Se mai putea calcula primitiva efectuînd substituția $x=a\sin t$.

Exerciții propuse spre rezolvare

Să se calculeze:

584. $\int\operatorname{arctg}\sqrt{x}\,dx,\ x>0.$

R. $x\operatorname{arctg}\sqrt{x}-\sqrt{x}+\operatorname{arctg}\sqrt{x}+C.$

585. $\int\frac{\ln^3 x}{x^2}dx,\ x>0.$

R. $C-\frac{1}{x}(\ln^3 x+3\ln^2 x+6\ln x+6),\ x>0.$

586. $\int e^{ax} \cos bx \, dx.$

R. $\frac{e^{ax}}{a^2 + b^2}(b \sin bx + a \cos bx) + C.$

587. $\int \frac{x^2 e^x}{(x+2)^2} dx, \quad x \in (-2, \infty).$

R. $\frac{x-2}{x+2} e^x + C.$

588. $\int \sin \ln x \, dx, \quad x > 0.$

R. $\frac{x}{2}(\sin \ln x - \cos \ln x) + C$

589. $\int x^2 e^x \sin x \, dx.$

R. $\frac{1}{2}[(x^2 - 1)\sin x - (x-1)^2 \cos x]\, e^x + C.$

590. $\int \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{(1+x^2)^{3/2}} dx.$

R. $\frac{(1+x)\, e^{\operatorname{arctg} x}}{2\sqrt{1+x^2}} + C.$

591. $\int e^{\sqrt{x}} dx, \; x > 0.$

R. $2(\sqrt{x} - 1)\, e^{\sqrt{x}} + C.$

592. $\int \ln (x + \sqrt{1+x^2}) \, dx.$

R. $x \ln (x + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2} + C.$

593. $\int \sqrt{x^2 + a} \, dx, \quad a > 0.$

R. $\frac{x}{2}\sqrt{x^2+a} + \frac{a}{2} \ln \left| x + \sqrt{x^2+a} \right| + C.$

5.4. Primitivele funcţiilor raţionale în x

1. *Calculul primitivelor de forma* $\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}$, unde $a \neq 0$ şi $b^2 - 4ac < 0$. Scriem trinomul de la numitor sub forma unei sume de două pătrate perfecte:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}}\right)^2\right].$$

Deci

$$\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} = \frac{4a}{4ac - b^2} \int \frac{dx}{1 + \left(\frac{2ax + b}{\sqrt{4ac - b^2}}\right)^2}.$$

Facem substituţia $\frac{2ax + b}{\sqrt{4ac - b^2}} = t$ şi obţinem

$$\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} = \frac{2\,\text{[redacted]}}{\sqrt{4ac - b^2}} \int \frac{\text{[redacted]}t}{1 + t^2} = \frac{2\,\text{[redacted]}}{\sqrt{4ac - b^2}} \operatorname{arctg} \frac{2ax + b}{\sqrt{4ac - b^2}} + C.$$

2. *Calculul primitivelor* $\int \frac{mx + \text{[redacted]}}{(x^2 + ax + b)^p} dx$, $m \neq 0$, *m, n constante, p număr natural,* $p > 1$, $a^2 - 4b < 0$. Scriem

$$\int \frac{mx + n}{(x^2 + ax + b)^p} dx = \frac{m}{2} \int \frac{\left(2x + 2\frac{n}{m}\right) dx}{(x^2 + ax + b)^p} = \frac{m}{2} \int \frac{(2x + a)\, dx}{(x^2 + ax + b)^p} + $$

$$+ \frac{m}{2}\left(2\frac{n}{m} - a\right) \int \frac{dx}{(x^2 + ax + b)^p}.$$

Însă

$$\int \frac{(2x + a)\, dx}{(x^2 + ax + b)^p} = \int \frac{d(x^2 + ax + b)}{(x^2 + ax + b)^p} = \frac{1}{1 - p} \cdot \frac{1}{(x^2 + ax + b)^{p-1}}.$$

Pentru a calcula $I_p = \int \frac{dx}{(x^2 + ax + b)^p}$, pornim de la integrala $I_{p-1} = \int \frac{dx}{(x^2 + ax + b)^{p-1}}$ care se integrează prin părţi. Notăm $g'(x) = 1$, $\frac{1}{(x^2 + ax + b)^{p-1}} = f(x)$ şi obţinem o relaţie de recurenţă între I_p şi I_{p-1}.

3. *Calculul primitivelor* $\int R(x)\, dx$, $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ *fiind o funcţie raţională, definită pe un interval I pe care numitorul* $Q(x)$ *nu se anulează în nici un punct.*

Cazul 1: gradul polinomului $P(x)$ este mai mic decît gradul polinomului $Q(x)$. Să presupunem că polinomul $Q(x)$ poate fi descompus în forma

$Q(x) = (x - a)^{\alpha} (x - b)^{\beta} \ldots (x - c)^{\gamma} (x^2 + px + q)^{\lambda} (x^2 + rx + s)^{\mu} + \ldots + (x^2 + ux + v)^{\nu}$, unde $\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \mu, \ldots, \nu$ sînt numere naturale şi factorii $(x + px + q), \ldots, (x^2 + ux + v)$ au rădăcini complexe.

O teoremă afirmă că în acest caz $\frac{P(x)}{Q(x)}$ poate fi descompus în elemente simple după cum urmează:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_{\alpha-1}}{(x-a)^{\alpha-1}} + \cdots + \frac{A_1}{x-a} +$$

$$+ \frac{B_\beta}{(x-b)^\beta} + \frac{B_{\beta-1}}{(x-b)^{\beta-1}} + \cdots + \frac{B_1}{x-b} +$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+ \frac{C_\gamma}{(x-c)^\gamma} + \frac{C_{\nu-1}}{(x-c)^{\nu-1}} + \cdots + \frac{C_1}{x-c} +$$

$$+ \frac{M_\lambda x + N_\lambda}{(x^2+px+q)^\lambda} + \frac{M_{\lambda-1} x + N_{\lambda-1}}{(x^2+px+q)^{\lambda-1}} + \cdots + \frac{M_1 x + N_1}{x^2+px+q} +$$

$$+ \frac{R_\mu x + S_\mu}{(x^2+rx+q)^\mu} + \frac{R_{\mu-1} x + S_{\mu-1}}{(x^2+px+q)^{\mu-1}} + \cdots + \frac{R_1(x) + S_1}{x^2+rx+s} +$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+ \frac{U_\nu x + V_\nu}{(x^2+ux+v)^\nu} + \frac{U_{\nu-1} x + V_{\nu-1}}{(x^2+ux+v)^{\nu-1}} + \cdots + \frac{U_1 x + V_1}{x^2+ux+v}.$$

Coeficienţii de la numărător se pot determina aducînd fracţiile la acelaşi numitor şi identificînd coeficienţii termenilor asemenea.

Deci calculul primitivelor funcţiilor raţionale considerate revine la calculul primitivelor de forma $\int \frac{dx}{(x-a)^\lambda}$, $\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}\,dx$ şi $\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^\lambda}$ care sînt cunoscute.

Cazul 2: Gradul polinomului de la numărător, $P(x)$, este mai mare sau egal cu gradul polinomului de la numitor. În acest caz împărţim $P(x)$ la $Q(x)$ şi obţinem

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = R(x) + \frac{P_1(x)}{Q_1(x)},$$

unde $R(x)$ este un polinom în x şi $\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$ este o fracţie de forma studiată anterior.

Să se calculeze:

594. $\int \frac{dx}{2x^2+3x+2}$, $x \in (-\infty, \infty)$.

Trinomul de la numitor avînd rădăcini complexe, îl vom scrie ca o sumă de pătrate perfecte:

$$2x^2+3x+2 = 2\left(x^2+\frac{3}{2}x+1\right) = 2\left[\left(x+\frac{3}{4}\right)^2+\frac{7}{16}\right].$$

Prin urmare

$$\int\frac{dx}{2x^2+3x+2} = \frac{1}{2}\int\frac{dx}{\frac{7}{16}+\left(x+\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{8}{7}\int\frac{dx}{1+\left(\frac{4x+3}{\sqrt{7}}\right)^2}.$$

Facem substituţia $\frac{4x+3}{\sqrt{7}} = u$, de unde $du = \frac{4}{\sqrt{7}}dx$. Deci

$$\int\frac{dx}{2x^2+3x+2} = \frac{8}{7}\int\frac{\frac{\sqrt{7}}{4}du}{1+u^2} = \frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{4x+3}{\sqrt{7}} + C.$$

595. $\int \frac{dx}{x^2+5x+7}$, $x \in (-\infty, \infty)$.

Trinomul de la numitor are rădăcini complexe. Îl vom scrie:

$$x^2+5x+7 = \left(x+2\frac{5}{2}x+\frac{25}{4}\right)+\frac{3}{4} = \left(x+\frac{5}{2}\right)^2+\frac{3}{4}.$$

Deci

$$\int\frac{dx}{x^2+5x+7} = \int\frac{dx}{\left(x+\frac{5}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}\int\frac{dx}{1+\left(\frac{2x+5}{\sqrt{3}}\right)^2}.$$

Prin intermediul substituţiei $\frac{2x+5}{\sqrt{3}} = t$, obţinem $\int\frac{dx}{x^2+5x+7} =$

$$= \frac{4}{3}\int\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}dt}{1+t^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg} t + C = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+5}{\sqrt{3}} + C.$$

596. $\int \frac{x+4}{(x^2+x+1)^2}\,dx,\ x\in(-\infty, \infty).$

Scriem

$$\int \frac{x+4}{(x^2+x+1)^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+8}{(x^2+x+1)^2} = \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}\,dx + \frac{7}{2}\int \frac{dx}{(x^2+x+1)^2}.$$

Pentru a calcula $\int \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}\,dx$, notăm $x^2+x+1=u$ și obținem

$$\int \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}\,dx = \int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u} + C = -\frac{1}{x^2+x+1} + C.$$

Primitiva $I_2 = \int \frac{dx}{(x^2+x+1)^2}$ o calculăm în modul următor: pornim de la $I_1 = \int \frac{dx}{x^2+x+1}$ pe care o integrăm prin părți, notînd $g'(x)=1$, $f(x) = \frac{1}{x^2+x+1}$. Deducem $g(x)=x$, $f'(x) = -\frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}$.

Deci

$$I_1 = \int \frac{dx}{x^2+x+1} = \frac{x}{x^2+x+1} + \int \frac{2x^2+x}{(x^2+x+1)^2}\,dx.$$

Însă $\int \frac{dx}{x^2+x+1} = \int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$ și prin urmare

$$\frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}} = \frac{x}{x^2+x+1} + \int \frac{2x^2+x}{(x^2+x+1)^2}\,dx =$$

$$= \frac{x}{x^2+x+1} + \int \frac{2x^2+2x+2-x-2}{(x^2+x+1)^2}\,dx =$$

$$= \frac{x}{x^2+x+1} + 2I_1 - \frac{1}{2}\int \frac{2x+4}{(x^2+x+1)^2}\,dx.$$

Deci

$$\frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}} = \frac{x}{x^2+x+1} + \frac{4}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}\,dx - \frac{3}{2}I_2.$$

Deducem că

$$I_2 = \frac{2}{3}\left[\frac{x}{x^2+x+1} - \frac{1}{2(x^2+x+1)} + \frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right]$$

și

$$\int \frac{x+4}{(x^2+x+1)^2}\,dx = \frac{7}{3}\,\frac{x}{x^2+x+1} + \frac{2}{3(x^2+x+1)} + \frac{14}{3\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

597. $\int \frac{x^2-3x+2}{x^3+2x^2+x}\,dx,\ x\in(a, b),\ 0\notin(a, b),\ -1\notin(a, b).$

Ni se cere să calculăm primitiva unei funcții raționale în care gradul numărătorului este mai mic decît gradul numitorului. Observăm că rădăcinile polinomului de la numitor sînt $x=0$ și $x=-1$ (rădăcină dublă). Conform teoriei, putem descompune fracția în elemente simple, după cum urmează

$$\frac{x^2-3x+2}{x^3+2x^2+x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x+1}.$$

Egalînd coeficienții termenilor de același grad în identitatea

$$x^2-3x+2 \equiv A(x+1)^2 + Bx + Cx(x+1),$$

care se obține prin aducerea fracțiilor la același numitor, formăm sistemul

$$A=2,\ A+C=1,\ 2A+B+C=-3,$$

ce admite soluțiile $A=2$, $B=-6$, $C=-1$. Deci

$$\frac{x^2-3x+2}{x(x^2+2x+1)} = \frac{2}{x} - \frac{6}{(x+1)^2} - \frac{1}{x+1}.$$

Urmează că

$$\int \frac{x^2-3x+2}{x(x+1)^2}\,dx = 2\int \frac{dx}{x} - 6\int \frac{dx}{(x+1)^2} - \int \frac{dx}{x+1} =$$

$$= 2\ln|x| + \frac{6}{x+1} - \ln|x+1| + C =$$

$$= \ln\frac{x^2}{x+1} + \frac{6}{x+1} + C.$$

598. $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^4}$, $x\in(-\infty,\ \infty)$.

Polinomul de la numitor are rădăcini complexe. Deoarece $x = \sqrt[4]{-1}$ şi $-1 = \cos\pi + i\sin\pi$, aplicînd formula lui Moivre obţinem următoarele valori pentru rădăcinile polinomului de la numitor:

$$x_k = \cos\frac{\pi+2k\pi}{4} + i\sin\frac{\pi+2k\pi}{4},\quad k = 0,\ 1,\ 2,\ 3,$$

sau

$$x_0 = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4},\quad x_1 = \cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4},$$
$$x_2 = \cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4},\quad x_3 = \cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}$$

sau

$$x_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2},\quad x_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2},$$
$$x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2},\quad x_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Deci

$$x^4+1 = \left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left[\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{2}{4}\right]\left[\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{2}{4}\right] =$$
$$= (x^2 - x\sqrt{2}+1)(x^2+x\sqrt{2}+1)$$

şi

$$\frac{1}{x^4+1} = \frac{Ax+B}{x^2+x\sqrt{2}+1} + \frac{Cx+D}{x^2-x\sqrt{2}+1}.$$

Din identitatea

$$1 \equiv (Ax+B)(x^2-x\sqrt{2}+1) + (Cx+D)(x^2+x\sqrt{2}+1),$$

prin identificarea termenilor de acelaşi grad, obţinem pentru coeficienţi valorile

$$A = -C = \frac{1}{2\sqrt{2}},\quad B = D = \frac{1}{2}.$$

Deci

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{1+x^4} = \int\frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}x+\frac{1}{2}}{x^2+x\sqrt{2}+1}\,\mathrm{d}x + \int\frac{-\frac{1}{2\sqrt{2}}x+\frac{1}{2}}{x^2-x\sqrt{2}+1}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\int\frac{x+\sqrt{2}}{x^2+x\sqrt{2}+1}\,\mathrm{d}x - \int\frac{x-\sqrt{2}}{x^2-x\sqrt{2}+1}\,\mathrm{d}x\right]$$

sau

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{1+x^4} = \frac{1}{4\sqrt{2}}\int\frac{2x+\sqrt{2}}{x^2+x\sqrt{2}+1}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{4\sqrt{2}}\int\frac{\sqrt{2}\,\mathrm{d}x}{x^2+x\sqrt{2}+1} -$$
$$-\frac{1}{4\sqrt{2}}\int\frac{2x-\sqrt{2}}{x^2-x\sqrt{2}+1}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{4\sqrt{2}}\int\frac{\sqrt{2}\,\mathrm{d}x}{x^2-x\sqrt{2}+1}.$$

Însă, deoarece

$$\int\frac{2x+\sqrt{2}}{x^2+x\sqrt{2}+1}\,\mathrm{d}x = \ln(x^2+x\sqrt{2}+1),\quad \int\frac{2x-\sqrt{2}}{x^2-x\sqrt{2}+1}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \ln(x^2-x\sqrt{2}+1);$$

obţinem

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{1+x^4} = \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}-1} + \frac{1}{4}\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+x\sqrt{2}+1} +$$
$$+\frac{1}{4}\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2-x\sqrt{2}+1}.$$

Dar

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2\pm x\sqrt{2}+1} = \int\frac{\mathrm{d}x}{\left(x\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}} = 2\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\left(\frac{2x\pm\sqrt{2}}{2}\right)^2} =$$
$$= \frac{2}{\sqrt{2}}\int\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} = \sqrt{2}\operatorname{arctg} u = \sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{2x\pm\sqrt{2}}{2},$$

(am notat $u = \frac{2x\pm\sqrt{2}}{2}$). Prin urmare

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{1+x^4} = \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1} +$$
$$+\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\operatorname{arctg}\frac{2x+\sqrt{2}}{2} + \operatorname{arctg}\frac{2x-\sqrt{2}}{2}\right].$$

Să notăm $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{2x+\sqrt{2}}{2} + \operatorname{arctg} \frac{2x-\sqrt{2}}{2}$. Avem

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{2x+\sqrt{2}}{\sqrt{2}} + \frac{2x-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}}{1 - \frac{2x+\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2x-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}} = \frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}, \quad \alpha = \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}.$$

Rezultatul final este

$$\int \frac{dx}{1+x^4} = \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{2}}{1-x^2} + C.$$

599. $\int \frac{x^3+x-1}{(x^2+2)^2}\, dx,\ x \in (-\infty, \infty)$.

Polinomul de la numitor are rădăcini multiple, complexe. Descompunerea în elemente simple se face astfel

$$\frac{x^3+x-1}{(x^2+2)^2} = \frac{Ax+B}{(x^2+2)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+2}.$$

Aducînd fracțiile la același numitor, obținem identitatea $x^3 + x - 1 \equiv Ax + B + Cx^3 + 2Cx + Dx^2 + 2D$. Prin egalarea coeficienților puterilor egale, obținem valorile: $C = 1$, $A = -1$, $D = 0$, $B = -1$. Deci

$$\frac{x^3+x-1}{(x^2+2)^2} = -\frac{x+1}{(x^2+2)^2} + \frac{x}{x^2+2}.$$

Rezultă

$$\int \frac{x^3+x-1}{(x^2+2)^2}\, dx = \int \frac{x}{x^2+2}\, dx - \int \frac{x+1}{(x^2+2)^2}\, dx =$$

$$= \frac{1}{2} \ln (x^2+2) - \int \frac{x}{(x^2+2)^2}\, dx - \int \frac{dx}{(x^2+2)^2}.$$

Dar

$$\int \frac{x\, dx}{(x^2+2)^2} = \frac{1}{2} \int \frac{2x\, dx}{(x^2+2)^2} = \frac{1}{2} \int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{2u} =$$

$$= -\frac{1}{2(x^2+2)} \quad (\text{am notat } u = x^2+2).$$

Fie $I_2 = \int \frac{dx}{(x^2+2)^2}$. Pentru a calcula integrala I_2 pornim de la integrala $I_1 = \int \frac{dx}{x^2+2}$, care se integrează prin părți, notînd

$g'(x) = 1$, $f(x) = \frac{1}{x^2+2}$; rezultă $g(x) = x$, $f'(x) = -\frac{2x}{(x^2+2)^2}$ și deci

$$I_1 = \frac{x}{x^2+2} + \int \frac{2x^2}{(x^2+2)^2}\, dx = \frac{x}{x^2+2} + 2 \int \frac{x^2+2-2}{(x^2+2)^2}\, dx =$$

$$= \frac{x}{x^2+2} + 2I_1 - 4I_2.$$

De aici

$$I_2 = \frac{1}{4} I_1 + \frac{1}{4} \cdot \frac{x}{x^2+2}.$$

Însă

$$I_1 = \int \frac{dx}{x^2+2} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{1 + \left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{\frac{dx}{\sqrt{2}}}{1 + \left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}}.$$

Așadar

$$I_2 = \frac{1}{4\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{x}{4(x^2+2)}.$$

În concluzie

$$\int \frac{x^3+x-1}{(x^2+2)^2}\, dx = \frac{1}{2} \ln (x^2+2) + \frac{1}{2(x^2+2)} -$$

$$- \frac{x}{4(x^2+2)} - \frac{1}{4\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}} + C.$$

600. $\int \frac{x^4}{x^3-1}\, dx,\ x \in (a, b),\ 1 \notin (a, b)$.

Avem

$$\frac{x^4}{x^3-1} = x + \frac{x}{x^3-1},$$

deci

$$\int \frac{x^4 dx}{x^3-1} = \int x dx + \int \frac{x}{x^3-1}\, dx.$$

Însă

$$\frac{x}{x^3-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}\,.$$

Efectuînd calculele obţinem $A=\frac{1}{3}$, $B=-\frac{1}{3}$, $C=\frac{1}{3}$.

Rezultă

$$\int\frac{x}{x^3-1}\,dx=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x-1}-\frac{1}{3}\int\frac{x-1}{x^2+x+1}\,dx=$$

$$=\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{6}\int\frac{2x+1-3}{x^2+x+1}\,dx=$$

$$=\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{6}\ln(x^2+x+1)+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\,.$$

În concluzie,

$$\int\frac{x^4}{x^3-1}\,dx=\frac{x^2}{2}+\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{6}\ln(x^2+x+1)+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$$

Exerciţii propuse spre rezolvare

Să se calculeze:

601. $\int\frac{x\,dx}{(x+1)(2x+1)}$, $x\in(a,b)$, $-1\notin(a,b)$, $-\frac{1}{2}\notin(a,b)$.

R. $\ln\frac{|x+1|}{\sqrt{2x+1}}+C.$

602. $\int\frac{x^3-1}{4x^3-x}\,dx$, $x\in(a,b)$, $0\notin(a,b)$, $\pm\frac{1}{2}\notin(a,b)$.

R. $\frac{1}{4}x+\ln|x|-\frac{7}{16}\ln|2x-1|-\frac{9}{16}\ln|2x+1|+C.$

603. $\int\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2\frac{dx}{x}$, $x\in(a,b)$, $0\notin(a,b)$, $1\notin(a,b)$.

R. $4\ln|x|-3\ln|x-1|-\frac{9}{x-1}+C.$

604. $\int\frac{dx}{(x+1)^2(x^2+1)}$, $x\notin(a,b)$, $-1\notin(a,b)$.

R. $\frac{1}{2}\ln|x+1|-\frac{1}{4}\ln(1+x^2)-\frac{1}{2(x+1)}+C.$

605. $\int\frac{(x+1)^4}{(x^2+2x+2)^3}\,dx$, $x\in(-\infty,\infty)$.

R. $\frac{3}{8}\operatorname{arctg}(x+1)-\frac{5x^3+15x^2+18x+8}{8(x^2+2x+2)}+C.$

606. $\int\frac{x^2dx}{(x+2)^2(x+4)^2}$, $x\in(a,b)$, $-2\notin(a,b)$, $-4\notin(a,b)$.

R. $2\ln\left|\frac{x+4}{x+2}\right|-\frac{5x+12}{x^2+6x+8}+C.$

607. $\int\frac{dx}{x^4+x^2+1}$, $x\in(-\infty,\infty)$.

R. $\frac{1}{4}\ln\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x^2-1}{x\sqrt{3}}+C.$

5.4. Primitivele funcţiilor raţionale în sin x şi cos x

Fie de calculat $\int R(\sin x,\cos x)\,dx$, unde $R(u,v)=\frac{P(u,v)}{Q(u,v)}$ este o funcţie raţională de două variabile, definită pe un interval $I=(x_1,x_2)$, şi $Q(\sin x,\cos x)\neq 0$ pentru orice $x\in I$.

Dacă $-\frac{\pi}{2}<x_1<x_2<\frac{\pi}{2}$, substituţia $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$ conduce la calculul primitivei unei funcţii raţionale în t.

Într-adevăr, ţinînd seama de identităţile trigonometrice

$$\sin x=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}},\quad \cos x=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}},$$

precum şi de egalităţile $\frac{x}{2}=\operatorname{arctg}t$, $dx=\frac{2dt}{1+t^2}$, avem

$$\int R(\sin x,\cos x)\,dx=\int R\left(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2}=\int R_1(t)\,dt.$$

Calculul primitivei date poate fi simplificat în următoarele cazuri:

$$R(\sin x, \cos x) = -R(-\sin x, \cos x)$$

și se face substituția $\cos x = t$

$$R(\sin x, \cos x) = -R(\sin x, -\cos x)$$

și se face substituția $t = \sin x$

$$R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$$

și se face substituția $t = \operatorname{tg} x,\ -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$.

Primitivele de forma $\int R(\operatorname{tg} x)\,dx$ se calculează cu ajutorul substituției $t = \operatorname{tg} x,\ -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$.

Exerciții rezolvate

Să se calculeze:

608. $\displaystyle\int \frac{dx}{5 + 4\sin x},\ x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Făcînd substituția $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$, obținem

$$\int \frac{dx}{5 + 4\sin x} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{5 + \frac{8t}{1+t^2}} = \int \frac{2dt}{5t^2 + 8t + 5}.$$

Insă

$$5t^2 + 8t + 5 = 5\left(t^2 + \frac{8}{5}t + 1\right) = 5\left(t^2 + 2\cdot\frac{4}{5}t + \frac{16}{25} + \frac{9}{25}\right) = 5\left[\left(t + \frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2\right]$$

și

$$\int \frac{dx}{5 + 4\sin x} = \frac{2}{5}\int \frac{dt}{\left(t + \frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{10}{9}\int \frac{dt}{1 + \left(\frac{5t+4}{3}\right)^2}.$$

Printr-o nouă substituție, $u = \frac{5t+4}{3}$, deducem

$$\int \frac{dx}{5 + 4\sin x} = \frac{10}{9}\int \frac{\frac{3}{5}\,du}{1 + u^2} = \frac{2}{3}\int \frac{du}{1+u^2} = \frac{2}{3}\operatorname{arctg} u + C =$$

$$= \frac{2}{3}\operatorname{arctg}\frac{5\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 4}{3} + C.$$

609. $\displaystyle\int \frac{dx}{a + b\cos x},\ a + b\cos x \neq 0, x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Facem substituția $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$; avem $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}$ și deci

$$\int \frac{dx}{a + b\cos x} = \int \frac{2dt}{a + b + (a-b)t^2}.$$

Schimbînd la nevoie semnul integralei, se poate admite întotdeauna că $a + b$ este pozitiv; atunci $a - b$ poate fi pozitiv sau negativ.

Cazul 1: $a - b > 0$. Punem $a + b = \alpha^2$, $a - b = +\beta^2$. Rezultă

$$\int \frac{dx}{a + b\cos x} = \int \frac{2dt}{\alpha^2 + \beta^2 t^2} = \frac{2}{\alpha\beta}\operatorname{arctg}\frac{\beta t}{\alpha} + C =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) + C.$$

Cazul 2: $a - b < 0$. Punem $a + b = \alpha^2$, $a - b = -\beta^2$. Rezultă

$$\int \frac{dx}{a + b\cos x} = \int \frac{2dt}{\alpha^2 - \beta^2 t^2} = \frac{1}{\alpha\beta}\ln\frac{\alpha + \beta t}{\alpha - \beta t} + C =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}}\ln\frac{\sqrt{b+a} + \sqrt{b-a}\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{b+a} - \sqrt{b-a}\operatorname{tg}\frac{x}{2}} + C =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}}\cdot\ln\frac{b + a\cos x + \sqrt{b^2 - a^2}\sin x}{a + b\cos x} + C.$$

610. $\displaystyle\int \frac{dx}{a + b\cos x + c\sin x}$, $\quad a + b\cos x + c\sin x \neq 0.$

Aducem integrala la forma integralei din exercițiul 609, punînd $b = r\cos\varphi$, $c = r\sin\varphi$. Rezultă

$$\int \frac{dx}{a + b\cos x + c\sin x} = \int \frac{dx}{a + r\cos(x - \varphi)}.$$

Obținem valoarea ultimei integrale înlocuind în exercițiul 609 b cu r și x cu $x - \varphi$.

611. $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x\, dx}{1 + \sin^2 x}$, $x \in (a, b) \subset \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Facem substituția $t = \operatorname{tg} x$ și, ținînd seama de formula $\sin^2 x = \dfrac{\operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$, obținem

$$\int \frac{\sin^2 x\, dx}{1 + \sin^2 x} = \int \frac{t^2\, dt}{(1 + 2t^2)(1 + t^2)}.$$

Descompunem în elemente simple:

$$\frac{t^2}{(1 + t^2)(1 + 2t^2)} = \frac{At + B}{1 + t^2} + \frac{Ct + D}{1 + 2t^2}$$

și calculăm coeficienții. Găsim valorile $A = C = 0$, $B = 1$, $D = -1$; deci

$$\int \frac{\sin^2 x\, dx}{1 + \sin^2 x} = \int \frac{dt}{1 + t^2} - \int \frac{dt}{1 + 2t^2} = \operatorname{arctg} t -$$

$$- \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2}t) + C = x - \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(\sqrt{2}\operatorname{tg} x) + C.$$

Exerciții propuse spre rezolvare

612. $\displaystyle\int \frac{dx}{2\sin x - \cos x + 5}$. **R.** $\dfrac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \dfrac{3\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 1}{\sqrt{5}} + C.$

613. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}$. **R.** $\dfrac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\dfrac{\operatorname{tg} 2x}{\sqrt{2}}\right) + C.$

614. $\displaystyle\int \frac{dx}{(\sin x + \cos x)^2}$, $x \neq -\dfrac{\pi}{4} + k\pi$ (k întreg).

R. $C - \dfrac{1}{1 + \operatorname{tg} x}$.

615. $\displaystyle\int \frac{dx}{1 + \operatorname{tg} x}$, $x \neq -\dfrac{\pi}{4} + k\pi$ (k întreg).

R. $\dfrac{1}{2}[x + \ln|\sin x + \cos x|] + C.$

616. $\displaystyle\int \frac{2 - \sin x}{2 + \cos x}\, dx$. **R.** $\ln(2 + \cos x) +$

$$+ \frac{4}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) + C.$$

5.5. Primitivele funcțiilor binomiale

$$I = \int x^m (ax^n + b)^p\, dx,$$

unde $a \neq 0$, $ax^n + b > 0$, m, n și p sînt numere raționale. Calculul primitivelor funcțiilor binomiale se reduce la calculul primitivelor funcțiilor raționale numai în următoarele cazuri stabilite de Cebîșev:

1) p număr întreg:

2) $\dfrac{m+1}{n}$ număr întreg; facem substituția $ax^n + b = z^N$, N fiind numitorul lui p.

3) $\dfrac{m+1}{n} + p$ număr întreg; facem substituția $a + bx^{-n} = z^N$, N fiind numitorul fracției p.

Exerciții rezolvate

Să se calculeze următoarele primitive:

617. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{x^2 + 1}}$, $x \in (a, b)$, $0 \notin (a, b)$.

În cazul funcției $f(x) = \dfrac{1}{x\sqrt[3]{x^2+1}}$, $m = -1$, $n = 2$, $p = -\dfrac{1}{3}$, $\dfrac{m+1}{n} = 0$.

Prin urmare facem substituția $1 + x^2 = z^3$, de unde $x^2 = z^3 - 1$, $x = \sqrt{z^3 - 1}$, $dx = \dfrac{3z^2}{2\sqrt{z^3 - 1}}\, dz$. Deci

$$\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{x^2 + 1}} = \int \frac{\frac{3z^2 dz}{2\sqrt{z^3 - 1}}}{z\sqrt{z^3 - 1}} = \frac{3}{2} \int \frac{z}{z^3 - 1}\, dz.$$

Calculul primitivei date s-a redus la calculul primitivei unei funcţii raţionale. Descompunem funcţia în fracţii simple:

$$\frac{z}{z^3-1}=\frac{A}{z-1}+\frac{Bz+C}{z^2+z+1}=\frac{Az^2+Az+A+Bz^2-Bz+Cz-C}{z^3-1}.$$

Prin egalarea coeficienţilor puterilor egale, obţinem $A=\frac{1}{3}$; $B=-\frac{1}{3}$, $C=\frac{1}{3}$; deci

$$\int\frac{z}{z^3-1}\,dz=\frac{1}{3}\ln|z-1|-\frac{1}{3}\int\frac{z-1}{z^2+z+1}\,dz.$$

Însă

$$\int\frac{z-1}{z^2+z+1}\,dz=\frac{1}{2}\int\frac{2z-2-1+1}{z^2+z+1}\,dz=\frac{1}{2}\int\frac{2z+1}{z^2+z+1}\,dz-\frac{3}{2}\int\frac{dz}{z^2+z+1}=\frac{1}{2}\ln(z^2+z+1)-\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2z+1}{\sqrt{3}}.$$

În concluzie:

$$\int\frac{dx}{x\sqrt[3]{x^2+1}}=\frac{1}{2}\ln\frac{|z-1|}{\sqrt{z^2+z+1}}+\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{arctg}\frac{2z+1}{\sqrt{3}}+C=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\frac{|z-1|^{3/2}}{\sqrt{z^3-1}}+\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{arctg}\frac{2z+1}{\sqrt{3}}+C=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\frac{(\sqrt[3]{1+x^2}-1)^{3/2}}{x}+\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt[3]{1+x^2}+1}{\sqrt{3}}+C.$$

618. $\int\frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$, $x\in(-\infty,\infty)$.

Avem $m=0$, $n=4$, $p=-\frac{1}{4}$ şi $\frac{m+1}{n}+p=0$ număr întreg. Deci facem substituţia $x^{-4}+1=z^4$, de unde $x=\frac{1}{\sqrt[4]{z^4-1}}$, $dx=-\frac{z^3\,dz}{\sqrt[4]{(z^4-1)^5}}$. Rezultă $\int\frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}=-\int\frac{z^3\,dz}{z(z^4-1)}=-\int\frac{z^2\,dz}{z^4-1}$.

Am obţinut o integrală a unei funcţii raţionale. Descompunem funcţia în elemente simple:

$$\frac{z^2}{z^4-1}=\frac{A}{z-1}+\frac{B}{z+1}+\frac{Cz+D}{z^2+1}=\frac{1}{4(z-1)}-\frac{1}{4(z+1)}+\frac{1}{2(z^2+1)}.$$

Deci

$$\int\frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{z+1}{z-1}\right|-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}z+C \text{ cu } z=\frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x}.$$

Exerciţii propuse spre rezolvare

619. $\int\frac{x\,dx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}$, $x\in(-\infty,\infty)$.

R. $\frac{3}{5}\sqrt{(1+\sqrt[3]{x^2})^5}-2\sqrt{(1+\sqrt[3]{x^2})^3}+3\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}+C$.

620. $\int x^5\sqrt[3]{(1+x^3)^2}\,dx$, $x\in(-\infty,\infty)$.

R. $\frac{1}{8}\sqrt[3]{(1+x^3)^8}-\frac{1}{5}\sqrt[3]{(1+x^3)^5}+C$.

621. $\int\sqrt{x^3+x^4}\,dx$, $x>0$.

R. $\frac{1}{3}\sqrt{(x+x^2)^3}-\frac{1+2x}{8}\sqrt{x+x^2}+\frac{1}{8}\ln(\sqrt{x}+\sqrt{1+x})$.

622. $\int\frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$, $x>0$.

R. $\frac{3}{7}(4\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}-3)\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}+C$.

623. $\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}\,dx$, $x>0$.

R. $12\left[\frac{\sqrt[3]{u^{13}}}{13}-\frac{3\sqrt[3]{u^{10}}}{10}+\frac{3\sqrt[3]{u^7}}{7}-\frac{\sqrt[3]{u^4}}{4}\right]+C$ cu $u=1+\sqrt[4]{x}$.

5.6. Primitivele funcţiilor raţionale în x şi $\sqrt{ax^2+bx+c}$

Fie de calculat $\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$, unde $R(u,v)=\frac{P(u,v)}{Q(u,v)}$ este o funcţie raţională, definită pe un interval I, astfel încît $Q(x,\sqrt{ax^2+bx+c})\neq 0$ pentru orice $x\in I$, $ax^2+bx+c>0$ pentru orice $x\in I$, $a\neq 0$, $b^2-4ac\neq 0$.

Distingem următoarele trei cazuri:

1) ax^2+bx+c are rădăcini complexe şi $a>0$. Substituţia $\sqrt{ax^2+bx+c}=x\sqrt{a}+t$ conduce la calculul primitivei unei funcţii raţionale în t.

2) ax^2+bx+c are rădăcinile reale α și β și cel puțin una dintre rădăcini (α, de exemplu) nu aparține intervalului I. Substituția $t=\sqrt{a\,\frac{x-\beta}{x-\alpha}}$ conduce la o funcție rațională în t.

3) $c>0$. Substituția $u(x)=t$, funcția $u(x)$ fiind definită pe I astfel

$$u(x)=\frac{\sqrt{ax^2+bx+c}-\sqrt{c}}{x},\ \text{dacă}\ x\neq 0,\ x\notin I,$$

$$u(0)=\frac{b}{2c},\ \text{dacă}\ 0\in I,$$

conduce la o funcție rațională în t.

Exerciții rezolvate

Să se calculeze:

624. $\displaystyle\int\frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+x+x^2}},\quad x\in(a,b),\quad -1\notin(a,b).$

Facem substituția $\sqrt{x^2+x+1}=x+t$. Ridicînd la pătrat ambii membri, deducem

$$x=\frac{t^2-1}{1-2t},\quad dx=-2\,\frac{t^2-t+1}{(1-2t)^2}\,dt,\quad 1+x=\frac{t(t-2)}{1-2t},$$

$$\sqrt{1+x+x^2}=\frac{-t^2+t-1}{1-2t}.$$

Deci

$$\int\frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+x+x^2}}=2\int\frac{dt}{t(t-2)}=\frac{1}{2}\left[\ln(t-2)-\ln t\right]=\frac{1}{2}\ln\frac{t-2}{t},$$

cu $t=\sqrt{1+x+x^2}-x$.

625. $\displaystyle\int\frac{dx}{(x^2+a^2)\sqrt{a^2-x^2}},\quad x\in(-a,a).$

Întrucît trinomul de sub radical are rădăcini reale, facem substituția $t=\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$, de unde

$$x=a\,\frac{t^2-1}{t^2+1},\quad dx=\frac{4at\,dt}{(t^2+1)^2},$$

$$\sqrt{a^2-x^2}=\frac{2at}{1+t^2},\quad x^2+a^2=\frac{2a^2(1+t^4)}{(t^2+1)^2}.$$

Deci

$$\int\frac{dx}{(x^2+a^2)\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{1}{a^2}\int\frac{t^2+1}{t^4+1}\,dt.$$

Descompunem fracția rațională în elemente simple:

$$\frac{t^2+1}{t^4+1}=\frac{At+B}{t^2+t\sqrt{2}+1}+\frac{Ct+D}{t^2-t\sqrt{2}+1}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t^2+t\sqrt{2}+1}+\frac{1}{t^2-t\sqrt{2}+1}\right).$$

Deci

$$\int\frac{dx}{(x^2+a^2)\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{1}{2a^2}\int\frac{dt}{t^2+t\sqrt{2}+1}+$$

$$+\frac{1}{2a^2}\int\frac{dt}{t^2-t\sqrt{2}+1}=\frac{1}{a^2\sqrt{2}}\left[\operatorname{arctg}(t\sqrt{2}+1)+\operatorname{arctg}(t\sqrt{2}-1)\right]+$$

$$+C=\frac{1}{a^2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t\sqrt{2}}{1-t},\quad \text{cu}\quad t=\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}.$$

Exerciții propuse spre rezolvare

Să se calculeze:

626. $\displaystyle\int\frac{a^2-2x}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx,\ |x|<a.$ **R.** $x\sqrt{a^2-x^2}+C.$

627. $\displaystyle\int\frac{dx}{x-\sqrt{x^2-x+1}},\quad x\in(a,b),\quad 1\notin(a,b).$

R. $\displaystyle C-\frac{3}{2(2x-1-2\sqrt{x^2-x+1})}-\frac{3}{2}\ln|2x-1-2\sqrt{x^2-x+1}|+$

$$+2\ln|x-\sqrt{x^2-x+1}|.$$

628. $\displaystyle\int\frac{dx}{(2x-3)\sqrt{4x-x^2}},\quad x\in(a,b)\subset(0,4),\quad \frac{3}{2}\notin(a,b).$

R. $\displaystyle C-\frac{1}{\sqrt{15}}\ln\frac{x+6+\sqrt{60x-15x^2}}{2x-3}.$

629. $\displaystyle\int\frac{dx}{1+\sqrt{x^2+2x+2}},\quad x\in(-\infty,\infty).$

R. $\displaystyle\frac{1-\sqrt{x^2+2x+2}}{x+1}+\ln\left(x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right)+C.$

6. INTEGRALE

6.1. Integrala definită

Fie f o funcţie definită pe un interval şi fie a, b, două puncte aparţinînd acestui interval. Fie d o diviziune a intervalului închis $[a, b]$ în intervale parţiale:

$$d : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b.$$

Lungimea celui mai mare dintre intervalele diviziunii d se numeşte *norma* diviziunii d şi se notează $\nu(d)$. Mai notăm

$$\sigma_d(f) = \sum_{i=1}^{n+1} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}), \quad \xi_i \in [x_{i-1}, x_i].$$

Definiţie. Funcţia f este integrabilă pe intervalul $[a, b]$ dacă există un număr $I \in R$ cu proprietatea că pentru orice şir de diviziuni (d_n) cu $\nu(d_n) \to 0$ avem

$$\sigma_{d_n}(f) \to I,$$

oricare ar fi punctele ξ_i.

Numărul I se numeşte *integrala* lui f pe $[a, b]$ şi se notează

$$\int_a^b f(x)\,dx \quad \text{sau} \quad \int_a^b f\,dx.$$

Funcţia f este integrabilă pe $[a, b]$ dacă şi numai dacă există un număr I cu proprietatea că pentru orice $\varepsilon > 0$ există un număr $\delta(\varepsilon)$ astfel încît oricare ar fi divizunea d cu $\nu(d) < \delta(\varepsilon)$ şi oricare ar fi punctele ξ_i să avem $|\sigma_d(f) - I| < \varepsilon$.

Fie f o funcţie mărginită pe $[a, b]$. Notăm cu m_i şi M_i marginea inferioară, respectiv marginea superioară, a funcţiei f în intervalul $[x_{i-1}, x_i]$ şi cu

$$S_d(f) = \sum_{i=1}^{n+1} M_i(x_i - x_{i-1}), \quad s_d(f) = \sum_{i=1}^{n+1} m_i(x_i - x_{i-1}).$$

Sumele $S_d(f)$ respectiv $s_d(f)$ se numesc *suma Darboux superioară*, respectiv *suma Darboux inferioară*, a funcţiei f pe $[a, b]$.

Criteriul lui Darboux. O funcţie mărginită $f : [a, b] \to R$ este integrabilă pe $[a, b]$ dacă şi numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta(\varepsilon)$, astfel încît oricare ar fi diviziunea d cu $\nu(d) < \delta(\varepsilon)$ să avem $S_d(f) - s_d(f) < \varepsilon$.

Se numeşte *integrală Darboux inferioară*, care se notează $\underline{I} = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx$ marginea superioară a sumelor $s_d(f)$, şi *integrală Darboux superioară* marginea inferioară a sumelor $S_d(f)$, care se notează $\bar{I} = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$.

Funcţia f mărginită pe $[a, b]$ este integrabilă pe $[a, b]$ dacă şi numai dacă

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx.$$

Valoarea comună a acestor integrale este integrala funcţiei f pe $[a, b]$.

Proprietăţi. 1) Orice funcţie continuă pe $[a, b]$ este integrabilă pe $[a, b]$.

2) Orice funcţie mărginită care are un număr finit de puncte de discontinuitate pe $[a, b]$ este integrabilă pe $[a, b]$.

3) Orice funcţie monotonă pe $[a, b]$ este integrabilă pe acest segment.

4) Dacă f este integrabilă pe $[a, b]$, atunci şi $|f|$ este integrabilă pe $[a, b]$.

5) Dacă f şi g sînt integrabile pe $[a, b]$, atunci $f + g$, este integrabilă pe $[a, b]$ şi:

$$\int_a^b (f + g)\,dx = \int_a^b f\,dx + \int_a^b g\,dx.$$

6) Dacă f şi g sînt integrabile pe $[a, b]$ şi dacă $f(x) \leqslant g(x)$, respectiv $f(x) < g(x)$, atunci

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx,$$

respectiv

$$\int_a^b f(x)\,dx < \int_a^b g(x)\,dx.$$

În particular, dacă $f(x) > 0$, atunci şi $\int_a^b f(x)\,dx > 0$.

7) Dacă f este integrabilă pe $[a, b]$ și $a < c < b$, atunci

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

(proprietatea de aditivitate a integralei ca funcție de interval).

8) Dacă f este integrabilă pe $[a, b]$ și $m \leqslant f(x) \leqslant M$, atunci

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a).$$

9) Dacă f este continuă pe $[a, b]$, atunci există un punct $c \in [a, b]$, astfel încît

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a) f(c).$$

10) Dacă f este integrabilă și dacă are primitivă pe $[a, b]$, atunci

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b,$$

oricare ar fi primitiva F a lui f (formula lui Leibniz-Newton).

Această formulă reduce calculul integralelor la calculul primitivei funcției de integrat.

11) Dacă f este integrabilă pe $[a, b]$, atunci funcția $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ este continuă pe $[a, b]$.

12) Dacă f este continuă în punctul x_0, atunci funcția $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ este derivabilă în punctul x_0 și $F'(x_0) = f(x_0)$.

13) Dacă f și g sînt funcții cu derivată continuă pe $[a, b]$, atunci

$$\int_a^b f(x) g'(x)\,dx = f(x) g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x) g(x)\,dx$$

(formula de integrare prin părți).

14) Fie funcțiile $I \xrightarrow{u} J$ și $J \xrightarrow{f} R$. Dacă u are derivată continuă u' pe I și dacă f este continuă pe J, atunci pentru orice puncte $a, b \in I$, avem

$$\int_a^b f(u(x))\, u'(x)\,dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(t)\,dt$$

(prima formulă de schimbare a variabilei).

15) Fie funcțiile $I \xrightarrow{u} J$ și $J \xrightarrow{f} R$. Dacă:

a) u este o aplicație strict monotonă a lui I pe J

b) funcția inversă $v = \overset{-1}{u}$ are derivată continuă v' pe J

c) f este continuă pe J,

atunci, pentru orice puncte $a, b \in I$, avem

$$\int_a^b f(u(x))\,dx = \int_{u(a)}^{v(b)} f(t)\, v'(t)\,dt$$

(a doua formulă de schimbare a variabilei).

Practic, facem înlocuirea $u(x) = t$, diferențiem, $u'(x)\,dx = dt$, și înlocuim.

Exerciții rezolvate

630. *Fie*

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x \text{ este rațional} \\ -1, & \text{dacă } x \text{ este irațional.} \end{cases}$$

Să se arate că f nu este integrabilă pe $[a, b]$.

Fie diviziunea

$$d : a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b.$$

Avem

$$\sigma_d(f) = \sum_{i=1}^{n+1} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Dacă ξ_i sînt puncte raționale, $f(\xi_i) = 1$, iar

$$\sigma_d(f) = \sum_{i=1}^{n+1} (x_i - x_{i-1}) = b - a,$$

oricare ar fi diviziunea d; deci $\lim\limits_{\nu(d)\to 0} \sigma_d(f) = b - a$. Dacă ξ_i sînt puncte iraționale, atunci $f(\xi_i) = -1$, iar

$$\sigma_d(f) = \sum_{i=1}^{n+1} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = a - b,$$

oricare ar fi diviziunea d; deci $\lim\limits_{\nu(d)\to 0} \sigma_d(f) = a - b$.

Limita sumelor integrale depinzînd de alegerea punctelor ξ_i, funcția nu este integrabilă.

631. *Fie $s(x) = f_1(x) + f_2(x)$. Poate fi funcția s integrabilă pe $[a, b]$ dacă f_1 și f_2 nu sînt integrabile pe $[a, b]$?*

Răspunsul este afirmativ, ceea ce se poate constata din exemplul următor

$$f_1(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x \text{ este rațional} \\ -1, & \text{dacă } x \text{ este irațional} \end{cases}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} -1, & \text{dacă } x \text{ este rațional} \\ 1, & \text{dacă } x \text{ este irațional.} \end{cases}$$

Constatăm că $s(x) = 0$, deci este integrabilă.

632. *Să se dea un exemplu în care reciproca teoremei enunțate la numărul 4 să nu fie adevărată.*

Într-adevăr, în cazul funcției

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x \text{ este rațional} \\ -1, & \text{dacă } x \text{ este irațional} \end{cases}$$

avem $|f(x)| = 1$ care este integrabilă, în timp ce $f(x)$ nu este integrabilă.

633. *Să se arate că produsul a două funcții neintegrabile poate fi o funcție integrabilă.*

Considerînd funcțiile din exercițiul 631, obținem $f_1(x)\, f_2(x) = -1$ care este integrabilă pe orice interval.

Să se cerceteze integrabilitatea următoarelor funcții:

634. $g(x) = \begin{cases} x, & \textit{dacă } x \textit{ este rațional} \\ -x, & \textit{dacă } x \textit{ este irațional} \end{cases}$

pe segmentul $[0, 1]$

Vom arăta că funcția nu este integrabilă. Fie d o diviziune arbitrară a segmentului $[0, 1]$:

$$d : 0 = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+1} = 1$$

și fie $\xi_i' \in [x_i, x_{i+1}]$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, n)$ puncte arbitrare raționale iar $\xi_i'' \in [x_i, x_{i+1}]$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, n)$ puncte arbitrare iraționale. Vom forma sumele integrale $\sigma_d'(g)$ respectiv $\sigma_d''(g)$ corespunzătoare punctelor ξ_i' respectiv ξ_i'' $(i = 0, 1, 2, \ldots, n)$. Avem:

$$\sigma_d'(g) = \sum_{i=1}^{n} \xi_{i-1}' (x_i - x_{i-1})$$

$$\sigma_d''(g) = \sum_{i=1}^{n} \xi_{i-1}'' (x_i - x_{i-1}).$$

Însă $\sigma_d'(g)$ este suma integrală corespunzătoare funcției $f(x) = x$ pe segmentul $[0, 1]$, care, deoarece $f(x) = x$ este integrabilă, tinde către $\int_0^1 x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$ cînd norma diviziunii tinde către zero; $\sigma_d''(g)$ este suma integrală corespunzătoare funcției $f(x) = -x$ pe segmentul $[0, 1]$ și tinde către $\int_0^1 -x\,dx = -\frac{1}{2}$, dacă norma diviziunii tinde la zero. Întrucît limita sumelor integrale depinde de alegerea punctelor ξ_i, rezultă că funcția nu este integrabilă.

635. $F(x) = \begin{cases} 0, & \textit{dacă } x \textit{ este irațional sau } x = 0 \\ \frac{1}{q}, & \textit{dacă } x = \frac{p}{q},\ \frac{p}{q} \textit{ fracție ireductibilă} \end{cases} \quad x \in [0, 1].$

Funcția este integrabilă pe segmentul $[0, 1]$. Într-adevăr, fie N un număr ales arbitrar. Să considerăm mulțimea tuturor punctelor raționale din intervalul $[0, 1]$ avînd numitorul mai mic decît N. Există un număr finit de astfel de puncte, fie acesta k. Fie d o diviziune arbitrară a segmentului $[0, 1]$. Există cel mult $2k$ intervale parțiale (pe care le notăm cu d_1', d_2', ..., d_{2k}') care să conțină cele $2k$ puncte considerate anterior. Fiind dat $\varepsilon > 0$, vom alege diviziunea în așa fel încît suma lungimilor celor $2k$ intervale să fie inferioară numărului $\frac{\varepsilon}{2}$. Aceasta se poate realiza alegînd norma diviziunii suficient de mică. Notăm cu d_1'', d_2'', ..., d_m'' celelalte intervale parțiale ale diviziunii. Intervalele $d_i''(i = 1, \ldots, m)$ conțin, în afară de puncte iraționale în care valoarea funcției date este zero, puncte raționale de forma $x = \frac{p}{q}$, $q > N$, și astfel ca $F\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{1}{q} < \frac{1}{N}$. Deci

$$S_d(F) - s_d(F) = \sum_{i=1}^{2k}{}' (M_i' - m_i')\, d_i' + \sum_{i=1}^{m}{}'' (M_i'' - m_i'')\, d_i''$$

(am notat cu M_i', respectiv m_i', marginea superioară, respectiv marginea inferioară, a funcției în intervalul d_i' și cu M_i'', respectiv m_i'', marginea superioară, respectiv marginea inferioară a funcției în intervalul d_i'').

Deoarece $M'_i - m''_i < 1$, $m''_i = 0$, $M''_i < \frac{1}{N}$, oricare ar fi i, avem

$$S_d(F) - s_d(F) < \sum_{i=1}^{2k}{}' d'_i + \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{m}{}'' d''_i < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{N}.$$

Dacă $N > \frac{2}{\varepsilon}$, atunci $\frac{1}{N} < \frac{\varepsilon}{2}$ și $S_d(F) - s_d(F) < \varepsilon$.

Putem calcula efectiv valoarea integralei. Într-adevăr, deoarece în orice interval marginea inferioară a funcției este 0, avem $s_d(F) = 0$, oricare ar fi diviziunea d; rezultă $\int_0^1 F(x)\, dx = 0$. Datorită integrabilității funcției F, avem

$$\int_0^1 F(x)\, dx = 0.$$

636. *Fie funcția*

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x = 0 \\ 0, & \text{dacă } x = 0 \end{cases} \quad \text{definită pe } [0, 1].$$

Să se cerceteze integrabilitatea funcției $f(F(x))0 \leqslant x \leqslant 1$, *unde* $F(x)$ *este funcția studiată în exercițiul* 635.

Avem

$$f(F(x)) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x \text{ este irațional} \\ 1, & \text{dacă } x \text{ este rațional} \end{cases} \quad x \in [0, 1].$$

Rezultă că $\varphi(x) = f(F(x))$ nu este integrabilă cu toate că ambele funcții componente sînt integrabile.

637. *Să se arate că dacă mulțimea punctelor de discontinuitate ale funcției* f *mărginite pe* $[a, b]$ *este de măsură Jordan nulă* *), *atunci* f *este integrabilă pe* $[a, b]$.

Fie $\varepsilon' > 0$ un număr arbitrar dat și fie $[a_i, b_i]$ $(i = 1, 2, \ldots, p)$ un sistem finit de intervale de lungime totală mai mică decît ε', $\sum_{i=1}^{p} (b_i - a_i) < \varepsilon'$, care conține punctele de discontinuitate ale funcției.

*) Se spune că o mulțime M este de măsura Jordan nulă dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există un număr finit de intervale de lungime totală mai mică decît ε care să conțină toate punctele mulțimii M.

Vom considera o diviziune d a segmentului $[a, b]$, supusă condiției ca punctele a_i, b_i $(i = 1, 2, \ldots, p)$ să facă parte dintre punctele de diviziune și nici un alt punct al diviziunii să nu aparțină interiorului segmentelor $[a_i, b_i]$. Fie N un număr astfel ca $|f(x)| < N$ dacă $x \in [a, b]$. Vom nota cu $[c_k, d_k]$ $(k = 1, 2, \ldots, q)$ intervalele diviziunii d, diferite de intervalele $[a_i, b_i]$ $(i = 1, 2, \ldots, p)$. În fiecare din intervalele $[c_k, d_k]$ $(k = 1, 2, \ldots, q)$ funcția f este continuă, deci uniform continuă. Prin urmare, intervalele $[c_k, d_k]$ pot fi divizate astfel, încît în fiecare din intervalele obținute oscilația funcției să fie inferioară numărului ε'' (pentru a nu complica notația vom nota tot cu $(c_k, d_k) = \tau_i$, $k = 1, 2, \ldots, q$, intervalele obținute). Avem

$$S_d(f) - s_d(f) = \sum_{i=1}^{p} (M_{\sigma_i} - m_{\sigma_i})(b_i - a_i) +$$
$$+ \sum_{k=1}^{q} (M_{\tau_k} - m_{\tau_k})(d_k - c_k)$$

(am notat cu M_{σ_i}, respectiv m_{σ_i}, marginea superioară respectiv marginea inferioară a funcției f în intervalul σ_i și cu M_{τ_k}, respectiv m_{τ_k} marginea superioară, respectiv marginea inferioară a funcției f în intervalul τ_k). Însă $M_{\sigma_i} - m_{\sigma_i} < 2N$, $M_{\tau_k} - m_{\tau_k} < \varepsilon''$, $i = 1, 2, \ldots, p$, $k = 1, 2, \ldots, q$.

Deci

$$S_d(f) - s_d(f) < 2N\varepsilon' + \varepsilon''(b - a).$$

Este suficient să luăm $\varepsilon'' < \frac{\varepsilon}{4N}$, $\varepsilon''' < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$ pentru a avea $S_d(f) - s_d(f) < \varepsilon$.

638. *Propunem cititorului să demonstreze următoarea propoziție:*

Dacă funcțiile f *și* g, *integrabile și mărginite pe segmentul* $[a, b]$, *diferă numai în punctele mulțimii* M *de măsură Jordan nulă**), *atunci*

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b g(x)\, dx.$$

*) A se vedea nota de la p. 256.

Se deduce imediat următoarea consecință:

Valoarea integralei $\int_a^b f(x)\ dx$ *nu se schimbă dacă schimbăm valoarea funcției pe o mulțime M de măsură Jordan nulă.*

639. *Să se arate că funcția*

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{ dacă } x = \dfrac{1}{n} \\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0, \text{ dacă } x \neq \dfrac{1}{n} \end{cases}$$

este integrabilă pe segmentul $[0, 1]$ *și* $\int_0^1 f(x)\ dx = 0$.

Verificăm ușor că funcția este discontinuă în punctele

$$0, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots .$$

Este suficient să arătăm că mulțimea acestor puncte este de măsură Jordan nulă. Fie $\varepsilon' > 0$ un număr arbitrar. Segmentul $\delta_1 = \left[0, \frac{\varepsilon''}{2}\right]$ conține punctele șirului precedent pentru $n > \frac{2}{\varepsilon}$. Celelalte puncte ale șirului, în număr finit (fie k numărul lor), sînt situate în afara segmentului $\left[0, \frac{\varepsilon'}{2}\right]$ și pot fi acoperite cu un număr finit de segmente de lungime totală inferioară lui $\frac{\varepsilon''}{2}$ (pentru aceasta este suficient să acoperim fiecare punct cu un segment de lungime inferioară lui $\frac{\varepsilon'}{2k}$. Deci punctele șirului considerat pot fi acoperite cu un număr finit de segmente de lungime totală inferioară numărului ε'.

Luînd $g(x) = 0$ și ținînd seama de exercițiul 638 avem

$$\int_0^1 f(x)\ dx = 0.$$

640. *Fie*

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ dacă } x \text{ este irațional sau } x = 0 \\ \dfrac{1}{q}, \text{ dacă } x = \dfrac{p}{q}, \dfrac{p}{q}, \text{ fracție ireductibilă} \end{cases}$$

$x \in [0, 1]$. *Să se arate că* $F'(x) \neq f(x)$, *dacă* $x = \frac{p}{q}$.

În exercițiul 342, am arătat că funcția lui Riemann este discontinuă în punctele raționale și în exercițiul 635 am arătat că $F(x) = \int_0^x f(t)\ dt = 0$, oricare ar fi $x \in [0, 1]$.

Rezultă că $F'(x) = 0$, oricare ar fi $x \in [0, 1]$; în particular, $F'\left(\frac{p}{q}\right) = 0$. Deci $F'\left(\frac{p}{q}\right) \neq f\left(\frac{p}{q}\right)$.

Din acest exercițiu tragem concluzia că se poate ca proprietatea 12 să nu aibă loc dacă funcția f nu este continuă în punctul x.

641. *Fie*

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{ dacă } x = \dfrac{1}{n} \\ 0, \text{ dacă } x \neq \dfrac{1}{n}. \end{cases}$$

Să se arate că $F'(0) = f(0)$.

Funcția nu este continuă în origine (lăsăm pe seama cititorului verificarea acestei afirmații). În exercițiul 640 am arătat că $F(x) = \int_0^x f(t)dt = 0$, oricare ar fi $x \in [0, 1]$. Rezultă că $F'(0) = 0 = f(0)$.

Din acest exercițiu tragem concluzia că nu este întotdeauna necesară continuitatea funcției f în punctul x pentru ca proprietatea 12 să aibă loc.

642. *Să se calculeze o primitivă pentru funcția* $f(x) = \max\,[1, x^2]$, $0 \leqslant x \leqslant 2$.

Dacă $x \in [0, 1]$, $F(x) = \int_0^x 1 \cdot dx = x$.

Dacă $x \in (1, 2]$, $F(x) = \int_0^x f(t)\ dt = \int_0^1 1 \cdot dt + \int_1^x t^2\ dt = 1 + \frac{t^3}{3}\Big|_1^x = 1 + \frac{x^3}{3} - \frac{1}{3} = \frac{x^3}{3} + \frac{2}{3}$.

643. *Să se calculeze o primitivă pentru funcția*

$$f(x) = \sqrt{1 + \cos x},\ 0 \leqslant x \leqslant 2\pi.$$

Avem

$$f(x) = \sqrt{2\cos^2\frac{x}{2}} = \sqrt{2}\left|\cos\frac{x}{2}\right| = \begin{cases} \sqrt{2}\cos\dfrac{x}{2}, & 0 \leqslant x \leqslant \pi \\ -\sqrt{2}\cos\dfrac{x}{2}, & \pi < x \leqslant 2\pi. \end{cases}$$

Dacă $x \in [0, \pi]$,

$$F(x) = \int_0^x \sqrt{2}\cos\frac{x}{2}\,dx = 2\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}\Big|_0^x = 2\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}.$$

Dacă $x \in (\pi, 2\pi]$,

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt = \int_0^\pi \sqrt{2}\cos\frac{x}{2}\,dx - \int_\pi^x \sqrt{2}\cos\frac{x}{2}\,dx =$$

$$= 2\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}\Big|_0^\pi - 2\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}\Big|_\pi^x = 2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}\sin\frac{x}{2} + 2\sqrt{2} =$$

$$= 4\sqrt{2} - 2\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}.$$

644. *Să se găsească exemple de funcții integrabile care nu admit primitivă.*

Funcțiile monotone și discontinue sînt integrabile, însă nu admit primitivă, deoarece au numai discontinuități de speța întîi.

645. *Să se arate că funcția*

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x}\cos\dfrac{1}{x^2}, & 0 < x \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \\ k, & x = 0 \end{cases}$$

nu este integrabilă pe $\left[0, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right]$.

Într-adevăr, fie diviziunea d_n:

$$d_n:\ x_0 = 0 < \frac{1}{\sqrt{2n\pi}} < \frac{1}{\sqrt{2(n-1)\pi}} < \ldots < \frac{1}{\sqrt{2\cdot 2\pi}} < \frac{1}{\sqrt{2\pi}} = x_n$$

și să notăm $x_i = \dfrac{1}{\sqrt{2(n-i+1)\pi}}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Avem

$$\sigma_{d_n}(g) = \sum_{i=1}^{n} g(x_i)(x_i - x_{i-1}) = 2\sqrt{2n\pi}\,\frac{1}{\sqrt{2n\pi}} +$$

$$+ 2\sqrt{2(n-1)\pi}\left[\frac{1}{\sqrt{2(n-1\pi)}} - \frac{1}{\sqrt{2n\pi}}\right] + \ldots + 2\sqrt{4\pi}\left[\frac{1}{\sqrt{4\pi}} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\sqrt{2\cdot 3\pi}}\right] = 2 + \frac{4\pi}{\sqrt{2(n-1)\pi}\left[\sqrt{2(n-1)\pi} + \sqrt{2n\pi}\right]} +$$

$$+ \frac{4\pi}{\sqrt{2(n-2)\pi}\left[\sqrt{2(n-2)\pi} + \sqrt{2(n-1)\pi}\right]} + \ldots + \frac{4\pi}{\sqrt{2\cdot 3\pi}\left(\sqrt{4\pi} + \sqrt{6\pi}\right)} >$$

$$> 2 + \frac{4\pi}{2\sqrt{2(n-1)\pi}\cdot\sqrt{2n\pi}} + \frac{4\pi}{2\sqrt{2(n-2)\pi}\cdot\sqrt{2(n-1)\pi}} + \cdots$$

$$\cdots + \frac{4\pi}{2\sqrt{2\cdot 3\pi}\cdot\sqrt{4\pi}} > 2 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \ldots + \frac{1}{3}.$$

Însă șirul $a_n = \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$ este divergent. Deci $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_{d_n}(f) = \infty$.

Observație. Pentru diviziunea

$$d_n:\ x_0 = 0 < \frac{1}{\sqrt{n\pi + \frac{\pi}{2}}} < \frac{1}{\sqrt{(n-1)\pi + \frac{\pi}{2}}} < \ldots < \frac{1}{\sqrt{3\pi + \frac{\pi}{2}}} <$$

$$< \frac{1}{\sqrt{2\pi + \frac{\pi}{2}}} < \frac{1}{\sqrt{2\pi}} = x_n$$

cu $x_i = \dfrac{1}{\sqrt{(n-i+1)\pi + \frac{\pi}{2}}}$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$, obținem

$$\sigma_{d_n}(g) = \sum_{i=1}^{n} g(x_i)(x_i - x_{i-1}) = 2\sqrt{2\pi} \times \cos 2\pi\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} - \frac{1}{\sqrt{2\pi + \frac{\pi}{2}}}\right) =$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{2\pi + \frac{\pi}{2}}\left(\sqrt{2\pi} + \sqrt{2\pi + \frac{\pi}{2}}\right)} \text{ oricare ar fi } n, \text{ deci } \lim_{n\to\infty}\sigma_{d_n}(g) =$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{2\pi + \frac{\pi}{2}}\left(\sqrt{2\pi} + \sqrt{2\pi + \frac{\pi}{2}}\right)}.$$

646. *Să se arate că funcția*

$$f(x) = \begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x^2}, & 0 < x \leqslant \sqrt{\dfrac{1}{2\pi}}, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

este derivabilă pe $\left[0, \sqrt{\frac{1}{2\pi}}\right]$ *cu derivata neintegrabilă pe* $\left[0, \sqrt{\frac{1}{2\pi}}\right]$.

În exercițiul 397 am arătat că funcția dată este derivabilă pe $\left[0, \sqrt{\frac{1}{2\pi}}\right]$ și are derivata nemărginită în vecinătatea originii. Am arătat că

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

În virtutea exercițiului 645, rezultă că funcția $f'(x)$ nu este integrabilă pe $\left[0, \sqrt{\frac{1}{2\pi}}\right]$.

Să se calculeze următoarele integrale definite:

647. $\int_0^\pi (x \sin x)^2 \, dx$.

Ținînd seama de formula $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$, integrala se scrie

$$\int_0^\pi x^2 \sin^2 x \, dx = \int_0^\pi x^2 \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \int_0^\pi \frac{x^2}{2} dx -$$

$$- \frac{1}{2}\int_0^\pi x^2 \cos 2x \, dx = \frac{x^3}{6}\Big|_0^\pi - \frac{1}{2}\int_0^\pi x^2 \cos 2x \, dx =$$

$$= \frac{\pi^3}{6} - \frac{1}{2}\int_0^\pi x^2 \cos 2x \, dx.$$

Calculăm integrala $\int_0^\pi x^2 \cos 2x \, dx$, aplicînd de două ori formula de integrare prin părți; obținem

$\int_0^\pi x^2 \cos 2x \, dx = x^2 \frac{\sin 2x}{2}\Big|_0^\pi - \int_0^\pi \frac{\sin 2x}{2} 2x \, dx$ (am notat $g'(x) = \cos 2x$, $f(x) = x^2$, $g(x) = \frac{\sin 2x}{2}$, $f'(x) = 2x$).

Deci

$$\int_0^\pi x^2 \cos 2x \, dx = -\int_0^\pi x \sin 2x \, dx.$$

Notînd în continuare $\sin 2x = g'(x)$, $f(x) = x$, $g(x) = -\frac{\cos 2x}{2}$, $f'(x) = 1$, avem

$$\int_0^\pi x^2 \cos 2x \, dx = \frac{x}{2}\cos 2x\Big|_0^\pi - \int_0^\pi \frac{\cos 2x}{2} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Deci

$$\int_0^\pi x^2 \sin^2 x \, dx = \frac{\pi^3}{6} - \frac{\pi}{4}.$$

648. $\int_0^1 x^2 \sqrt{1 - x^2} \, dx$.

Facem substituția $x = \cos t$, $dx = -\sin t \, dt$. Pentru $x = 0$, $t = \frac{\pi}{2}$, și pentru $x = 1$, $t = 0$. Integrala devine

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \cos^2 t \sqrt{1 - \cos^2 t}\,(-\sin t)\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \,|\sin t|\, \sin t \, dt.$$

Deoarece $\sin t \geqslant 0$ pentru $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, avem $|\sin t| = \sin t$; deci

$$\int_0^1 x^2 \sqrt{1 - x^2}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos^2 t \, dt = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 4 \sin^2 t \cos^2 t \, dt =$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2t \, dt = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 4t}{2} dt = \frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt -$$

$$- \frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 4t \, dt = \frac{\pi}{16} - \frac{\sin 4t}{32}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{16}.$$

Observație. Integrala se mai poate calcula făcînd substituția $t = \sqrt{\frac{1 - x}{1 + x}}$ care însă conduce la calcule complicate.

649. $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}\, dt$.

Facem substituția $t = \sqrt{e^x - 1}$; obținem $e^x = t^2 + 1$, $e^x dx = 2t \, dt$, $dx = \frac{2t\,dt}{t^2 + 1}$. Observăm că t este strict crescătoare și avem pentru $x = 0$, $t = 0$; pentru $x = \ln 2$, $t = \sqrt{e^{\ln 2} - 1} = \sqrt{2 - 1} = 1$. Deci segmentul $[0, \ln 2]$ se transformă în segmentul $[0, 1]$ și rezultă

$$\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}\, dx = 2\int_0^1 \frac{t^2\, dt}{1 + t^2} = 2\int_0^1 \frac{t^2 + 1 - 1}{t^2 + 1}\, dt = 2\int_0^1 dt =$$

$$= 2\int_0^1 \frac{dt}{1 + t^2} = 2t\Big|_0^1 - 2\operatorname{arctg} t\Big|_0^1 = 2 - 2\frac{\pi}{4} = 2 - \frac{\pi}{2}.$$

650. $\int_0^2 e^x f(x)\, dx$, unde $f(x) = \max\, [1, x^2]$.

Funcția $f(x) = \max\, [1, x^2]$ reprezintă funcția care în fiecare punct are valoarea egală cu cea mai mare dintre valorile 1 și x^2. Deoarece $x^2 \leqslant 1$ pentru $x \in [0, 1]$ și $x^2 > 1$ pentru $x \in (1, 2]$, avem

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x \in [0, 1] \\ x^2, & \text{dacă } x \in (1, 2]. \end{cases}$$

Ținînd seama de proprietatea de aditivitate a integralei ca funcție de interval, deducem

$$\int_0^2 e^x f(x)\, dx = \int_0^1 e^x\, dx + \int_1^2 x^2 e^x\, dx = e^x\Big|_0^1 + \int_1^2 e^x x^2\, dx.$$

Integrala $\int_1^2 e^x x^2\, dx$ se calculează aplicînd de două ori formula de integrare prin părți. Astfel, notînd $f(x) = x^2$, $g'(x) = e^x$, avem

$$\int_1^2 e^x x^2 dx = x^2 e^x\Big|_1^2 - 2\int_1^2 x e^x dx = 4e^2 - e - 2\int_1^2 x e^x dx.$$

În ultima integrală notăm $f(x) = x$, $g'(x) = e^x$ și obținem

$$\int_1^2 x e^x\, dx = x e^x\Big|_1^2 - \int_1^2 e^x = 2e^2 - e - e^2 + e = e^2.$$

Deci

$$\int_0^2 f(x)\, dx = 2e^2 - 1.$$

651. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) \sin x\, dx$, $f(x) = \max\, [\sin x, \sin^3 x]$.

Dacă $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $0 \leqslant \sin x \leqslant 1$, deci $\sin^3 x \leqslant \sin x$. Pentru $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$, $\sin^3 x \geqslant \sin x$.

Rezultă

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{dacă } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \\ \sin^3 x, & \text{dacă } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right). \end{cases}$$

Deducem

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) \sin x\, dx = \int_{-\frac{\pi}{2}} \sin^4 x\, dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x.$$

În continuare,

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \sin^4 x\, dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \sin^2 x (1 - \cos^2 x)\, dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \sin^2 x\, dx -$$

$$- \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \sin^4 x \cos^2 x\, dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \frac{1 - \cos 2x}{2}\, dx -$$

$$- \frac{1}{4}\int_{-\frac{\pi}{4}}^0 \frac{1 - \cos 4x}{2}\, dx = \frac{3\pi}{16}, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\, dx =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 2x}{2}\, dx = \frac{\pi}{4}.$$

Deci

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) \sin x\, dx = \frac{3\pi}{16} + \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{16}.$$

652. $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx,\ f(x) = \max\left[\left(\frac{1}{3}\right)^x,\ 3^x\right].$

Avem

$$f(x) = \begin{cases} 3^x, & \textit{dacă } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ \left(\frac{1}{3}\right)^x, & \textit{dacă } -1 \leqslant x < 0. \end{cases}$$

Deci

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0}\left(\frac{1}{3}\right)^x dx + \int_0^1 3^x\,dx =$$

$$= \left.\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^x}{\ln\frac{1}{3}}\right|_{-1}^{0} + \left.\frac{3^x}{\ln 3}\right|_0^1 = \frac{4}{\ln 3}.$$

653. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3 + 2\cos x}.$

Funcția de integrat este rațională în $\cos x$. În acest caz facem substituția $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$. Deducem că $x = 2\operatorname{arctg} t,\ dx = \frac{2\,dt}{1 + t^2},\ \cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$. Deoarece $\operatorname{tg}\frac{0}{2} = 0,\ \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$, avem

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3 + 2\cos x} = \int_0^1 \frac{2\,dt}{5 + t^2} = \frac{2}{5}\int_0^1 \frac{dt}{1 + \left(\frac{t}{\sqrt{5}}\right)^2}.$$

Facem substituția $u = \frac{t}{\sqrt{5}}$ și obținem

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3 + 2\cos x} = \frac{2}{5}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{5}}} \frac{\sqrt{5}\,du}{1 + u^2} = \frac{2}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

654. $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{4 - 3\cos x}.$

Făcînd substituția $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$, obținem

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{4 - 3\cos x} = \int_0^0 \frac{2\,dt}{1 + 7t^2} = 0. \qquad (1)$$

Însă deoarece $\frac{1}{4 - 3\cos x} > 0$, oricare ar fi $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$, conform proprietății 6 ar trebui ca și $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{4 - 3\cos x} > 0$, ceea ce ar contrazice rezultatul (1). De unde provine contradicția?

Contradicția se datorește următorului fapt. Din substituția $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$, obținem $x = 2\operatorname{arctg} t$. Cînd t crește de la $-\infty$ la $+\infty$, funcția $\operatorname{arctg} t$ crește de la $-\frac{\pi}{2}$ la $+\frac{\pi}{2}$, iar $x = 2\operatorname{arctg} t$ crește de la $-\pi$ la $+\pi$ și nu acoperă intervalul $[0, 2\pi]$ care intervine în integrala dată. Pe de altă parte, funcția $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ nu are sens în punctul $x = \pi$. Pentru ca totuși substituția să fie posibilă este necesar să se efectueze în prealabil translația $x = \pi + u$ cu ajutorul căreia segmentul $[0, 2\pi]$ se transformă în segmentul $[-\pi, \pi]$; avem:

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{4 - 3\cos x} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{du}{4 - 3\cos(\pi + u)} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{du}{4 + 3\cos u} =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{4 + 3\cos x} = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} \int_{-\pi+\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} \frac{dx}{4 + 3\cos x}.$$

Efectuînd substituția $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$ în integrala $\int_{-\pi+\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} \frac{dx}{4 + 3\cos x}$, obținem

$$\int_{-\pi+\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} \frac{dx}{4 + 3\cos x} = \int_{\operatorname{tg}\frac{-\pi+\varepsilon}{2}}^{\operatorname{tg}\frac{\pi-\varepsilon}{2}} \frac{2\,dt}{7 + t^2} = \frac{2}{\sqrt{7}}\int_{\operatorname{tg}\frac{-\pi+\varepsilon}{2}}^{\operatorname{tg}\frac{\pi-\varepsilon}{2}} \frac{dt}{1 + \left(\frac{t}{\sqrt{7}}\right)^2} =$$

$$= \left.\frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{7}}\right|_{\operatorname{tg}\frac{-\pi+\varepsilon}{2}}^{\operatorname{tg}\frac{\pi-\varepsilon}{2}} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{7}}\left[\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi - \varepsilon}{2}}{\sqrt{7}} - \operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}\frac{-\pi + \varepsilon}{2}}{\sqrt{7}}\right].$$

Deci

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \int_{-\pi+\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} \frac{\mathrm{d}x}{4+3\cos x} = \frac{2}{\sqrt{7}}\left[\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right] = \frac{2\pi}{\sqrt{7}}.$$

Folosind diferite metode, să se calculeze:

655. $I = \int_2^3 \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt{x^2-1}}$.

Integrala este de forma $\int_a^b R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)\mathrm{d}x$, cu $b^2 - 4ac > 0$, $a > 0$.
Scriem

$$\int_2^3 \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt{x^2-1}} = \int_2^3 \frac{\mathrm{d}x}{(x^2-1)\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}}.$$

Efectuăm substituția $t = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$; obținem $x = \frac{t^2+1}{t^2-1}$, $\mathrm{d}x = -\frac{4t\,\mathrm{d}t}{(t^2-1)^2}$. Dacă $x = 2$, $t = \sqrt{3}$; dacă $x = 3$, $t = \sqrt{2}$. Deci

$$I = -\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{2}} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = -\frac{1}{t}\Bigg|_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Observație. Integrala se mai poate calcula cu ajutorul substituției $x = \frac{1}{\cos t}$. Deducem $\mathrm{d}x = \frac{\sin t}{\cos^2 t}\mathrm{d}t$; pentru $x = 2$, $t = \frac{\pi}{3}$; dacă $x = 3$, $t = \arccos\frac{1}{3}$. Deci

$$I = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\arccos\frac{1}{3}} \frac{\mathrm{d}t}{1+\cos t} = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\arccos\frac{1}{3}} \frac{\mathrm{d}t}{2\cos^2\frac{t}{2}} = \operatorname{tg}\frac{t}{2}\Bigg|_{\frac{\pi}{3}}^{\arccos\frac{1}{3}} =$$

$$= \operatorname{tg}\frac{\arccos\frac{1}{3}}{2} - \operatorname{tg}\frac{\pi}{6}.$$

Însă $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$. Urmează că $\operatorname{tg}\frac{\arccos\frac{1}{3}}{2} = \sqrt{\frac{1-\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}}} =$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ și } I = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

656. $I = \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1} \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}}$.

Integrala este de forma $\int_a^b R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)\mathrm{d}x$ cu $a > 0$, $b^2 - 4ac < 0$. Facem substituția $\sqrt{1+x^2} = t + x$. Prin ridicare la pătrat obținem $1 + x^2 = t^2 + x^2 + 2tx$, de unde

$$x = \frac{1-t^2}{2t},\quad \mathrm{d}x = -\frac{t^2+1}{2t^2}\mathrm{d}t,\quad \sqrt{1+x^2} = t + \frac{1-t^2}{2t} = \frac{t^2+1}{2t}.$$

Dacă $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $t = \frac{1}{\sqrt{3}}$; dacă $x = 1$, $t = \sqrt{2} - 1$. Deci

$$I = \frac{1}{4}\int_{\sqrt{2}-1}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{(1-t^2)^2}{t^3}\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\left(\frac{t^2}{2} - \frac{1}{2t^2} - 2\ln t\right)\Bigg|_{\sqrt{2}-1}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} =$$

$$= \frac{1}{4}\ln\frac{3}{3+2\sqrt{2}} - \frac{2-3\sqrt{2}}{6}.$$

Observații. 1. Integrala poate fi considerată de forma $\int_a^b x^m(a+bx^n)^p\mathrm{d}x$ cu $m = 2$, $n = 2$, $p = -\frac{1}{2}$, $\frac{m+1}{n} + p =$ număr întreg.

Facem substituția $1 + x^{-2} = t^2$, de unde $x = (t^2-1)^{-\frac{1}{2}}$, $\mathrm{d}x = -\frac{t}{(t^2-1)^{3/2}}\mathrm{d}t$,

$$1 + x^2 = \frac{t^2}{t^2-1}.$$

Pentru $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $t = 2$; pentru $x = 1$, $t = 2$. Obținem

$$I = \int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{\mathrm{d}t}{(t^2-1)^2} = \int_{\sqrt{2}}^{2}\left[\frac{\frac{1}{4}}{(t-1)^2} - \frac{\frac{1}{4}}{t-1} + \frac{\frac{1}{4}}{(t+1)^2} + \frac{\frac{1}{4}}{t+1}\right]\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\left[-\frac{1}{t-1}\Bigg|_{\sqrt{2}}^{2} - \frac{1}{t+1}\Bigg|_{\sqrt{2}}^{2} + \ln\frac{t+1}{t-1}\Bigg|_{\sqrt{2}}^{2}\right] =$$

$$= \frac{1}{4}\ln\frac{2}{3+2\sqrt{2}} - \frac{2-3\sqrt{2}}{6}.$$

2. Integrala se mai poate calcula efectuînd substituţia $x = \operatorname{tg} t$. Rezultă

$$I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg}^2 x}{\frac{1}{\cos x}} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x} dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^3 x} dx =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^3 x} dx - \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos x}.$$

Pentru a calcula $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^3 x}$, pornim de la integrala $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos x} = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x} \cdot$ $\cdot \cos x \, dx$ care se integrează prin părţi notînd $f(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ $g'(x) = \cos x$; obţinem

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x} \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} - 2 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x} dx = \sqrt{2} - \frac{2}{3} -$$

$$- 2 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^3 x} dx + 2 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos x},$$

de unde

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^3 x} = \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos x} + \frac{3\sqrt{2} - 2}{6};$$

urmează că

$$I = \frac{3\sqrt{2} - 2}{6} - \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos x} = \frac{3\sqrt{2} - 2}{6} - \frac{1}{4} \ln \frac{3}{3 + 2\sqrt{2}}.$$

657. *Fie*

$$\int_{-2}^{1} (x^2 + 2x) \, dx.$$

Calculînd integrala după regulile obişnuite obţinem

$$\int_{-2}^{1} (x^2 + 2x) \, dx = \frac{x^3}{3} \Big|_{-2}^{1} + x^2 \Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{3} + 1 - \left(-\frac{8}{3} + 4\right) = 0.$$

Pe de altă parte, făcînd substituţia $y = x^2 + 2x$, *avem*

$$\int_{-2}^{1} (x^2 + 2x) \, dx = \pm \int_{0}^{3} y \frac{dy}{\sqrt{1 + y}}.$$

Ultima integrală fiind binomă o calculăm cu ajutorul substituţiei $t = \sqrt{1 + y}$; *obţinem*

$$\int_{-2}^{1} (x^2 + 2x) \, dx = \pm \int_{0}^{3} y \frac{dy}{\sqrt{1 + y}} = \pm 2 \int_{0}^{2} (t^2 - 1) \, dt =$$

$$= \pm 2 \left(\frac{t^3}{3} \Big|_{1}^{2} - t \Big|_{1}^{2} \right) = \pm \frac{8}{3},$$

ceea ce contrazice rezultatul dedus anterior pe cale directă. Unde este greşala?

Rezolvare corectă. Substituţia $y = x^2 + 2x$ este echivalentă cu $x = -1 \pm \sqrt{1 + y}$, $y \geqslant -1$. Fie $x = -1 + \sqrt{1 + y}$. Observăm că dacă y creşte de la -1 la $+\infty$, x creşte de la -1 la $+\infty$. Deci prin substituţia $x = -1 + \sqrt{1 + y}$, x nu acoperă segmentul $[-2, 1]$, ci numai segmentul $[-1, 1]$. Considerînd $x = -1 - \sqrt{1 + y}$, $y \geqslant -1$, observăm că dacă y descreşte de la $+\infty$ la -1, x creşte de la $-\infty$ la -1. Prin urmare, prin substituţia $x = 1 - \sqrt{1 + y}$, x poate acoperi numai segmentul $[-2, -1]$.

Scriem

$$\int_{-2}^{1} (x^2 + 2x) \, dx = \int_{-2}^{-1} (x^2 + 2x) \, dx + \int_{-1}^{1} (x^2 + 2x) \, dx.$$

În integrala $\int_{-2}^{-1} (x^2 + 2x) \, dx$ facem substituţia:

$x = -1 - \sqrt{1 + y}$ şi obţinem $\int_{-2}^{-1} (x^2 + 2x) \, dx =$

$$= -\frac{1}{2} \int_{0}^{-1} \frac{y \, dy}{\sqrt{1 + y}} = \frac{1}{2} \int_{-1}^{0} \frac{y \, dy}{\sqrt{1 + y}}.$$

Dacă în ultima integrală efectuăm substituţia

$t = \sqrt{1 + y}$, avem $\int_{-2}^{-1} (x^2 + 2x) \, dx = \frac{1}{2} \int_{0}^{1} (t^2 - 1) \, dt = -\frac{2}{3}$.

Integrala $\int_{-1}^{1} (x^2 + 2x) \, dx$ o calculăm cu ajutorul substituţiei $x = -1 + \sqrt{1 + y}$ şi obţinem $\int_{-1}^{1} (x^2 + 2x) \, dx = \frac{2}{3}$.

În concluzie, $\int_{-2}^{1} (x^2 + 2x) \, dx = 0$.

Fără a calcula integralele să se arate care dintre următoarele integrale are valoarea mai mare:

658. $\int_1^2 \ln(1+x)\,dx$ sau $\int_1^2 \frac{x}{1+x}\,dx$.

Vom arăta că dacă $1 \leqslant x \leqslant 2$, atunci $\ln(1+x) > \frac{x}{1+x}$.

Notăm $\varphi(x) = \ln(1+x) - \frac{x}{1+x}$. Avem $\varphi(0) = 0$ și $\varphi'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{x}{(1+x)^2}$. Rezultă că pentru $x > 0$, $\varphi'(x) > 0$, deci $\varphi(x)$ este crescătoare. Deoarece $\varphi(0) = 0$, deducem că pentru $x > 0$, $\varphi(x) > 0$.

Rezultă $\int_1^2 \ln(1+x)\,dx > \int_1^2 \frac{x}{1+x}\,dx$.

659. $\int_2^{10} x \operatorname{arctg} x\,dx$ sau $\int_2^{10} \ln(1+x^2)\,dx$.

Vom arăta că pentru $2 \leqslant x \leqslant 10$, $\operatorname{arctg} x > \ln(1+x^2)$. Notăm $\varphi(x) = x \operatorname{arctg} x - \ln(1+x)^2$ și $\varphi'(x) = \operatorname{arctg} x + \frac{x}{1+x^2} - \frac{2x}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x - \frac{x}{1+x^2}$. Nu putem trage nici o concluzie asupra semnului derivatei.

Calculăm $\varphi''(x)$; găsim

$$\varphi''_{(x)} = \frac{2x^2}{(1+x^2)^2}.$$

Deducem că $\varphi''(x) > 0$, oricare ar fi x, $-\infty < x < \infty$; deci $\varphi'(x)$ este crescătoare pe toată dreapta. Deoarece $\varphi'(0) = 0$, vom avea $\varphi'(x) > 0$ dacă $x > 0$; deci $\varphi(x)$ este crescătoare și deoarece $\varphi(0) = 0$, rezultă că $\varphi(x) > 0$ pentru $x > 0$, adică $x \operatorname{arctg} x > \ln(1+x^2)$. Aplicînd proprietatea 6 enunțată în introducerea capitolului, deducem că

$$\int_2^{10} x \operatorname{arctg} x\,dx > \int_2^{10} \frac{x}{1+x}\,dx.$$

660. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx$ sau $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1} x\,dx$.

Dacă $0 < x < \frac{\pi}{2}$, $0 < \sin x < 1$, iar $\sin^n x > \sin^{n+1} x$. Rezultă că

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx > \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1} x\,dx.$$

Fără a calcula efectiv integrala să se arate că:

661. $\frac{1}{3} \leqslant \int_4^7 \frac{x-3}{x+5}\,dx \leqslant 1$.

Fie $f(x) = \frac{x-3}{x+5}$. Întrucît $f'(x) = \frac{8}{(x+5)^2} > 0$, rezultă că $f(x)$ este strict crescătoare; deci dacă $4 \leqslant x \leqslant 7$, avem

$$f(4) \leqslant \frac{x-3}{x+5} \leqslant f(7). \tag{1}$$

Deoarece $f(4) = \frac{1}{9}$, $f(7) = \frac{1}{3}$, putem scrie inegalitățile (1) astfel

$$\frac{1}{9} \leqslant \frac{x-3}{x+5} \leqslant \frac{1}{3}.$$

Aplicînd proprietatea 8 enunțată în introducerea capitolului, obținem

$$\frac{1}{3} = \frac{7-4}{9} \leqslant \int_4^7 \frac{x-3}{x+5}\,dx \leqslant \frac{7-4}{3} = 1.$$

662. $1 < \int_0^1 e^{x^2}\,dx < e$.

Funcția $f(x) = e^{x^2}$ este strict crescătoare. Deci dacă $0 \leqslant x \leqslant 1$, atunci $1 \leqslant e^{x^2} \leqslant e$, din care deducem inegalitățile cerute.

663. *Să se determine punctele de maxim și de minim ale funcției*

$$F(x) = \int_0^x e^{x^2}(x^2-2)\,dx,\quad x \in (-\infty, \infty).$$

Punctele de extrem sînt punctele în care derivata se anulează și își schimbă semnul. Aplicînd proprietatea 12 enunțată în introducerea capitolului, deducem $F'(x) = e^{x^2}(x^2-2)$. Dacă $x = \pm\sqrt{2}$, $F'(x) = 0$. Punctul $x = -\sqrt{2}$ este un punct de maxim în timp ce punctul $x = \sqrt{2}$ este un punct de minim pentru funcția considerată.

664. *Fie*

$$G(x) = \int_0^{x^3} e^{t^2}\,dt. \tag{1}$$

Să se calculeze $G'(x)$.

O metodă constă în a calcula efectiv integrala și apoi a deriva funcția obținută. Însă primitiva funcției $f(x) = e^{x^2}$ nu se poate exprima cu ajutorul funcțiilor elementare. Vom nota cu $F(x)$ o primitivă a funcției $f(x) = e^{x^2}$, deci $F'(x) = f(x)$. Aplicînd integralei (1) formula lui Leibniz-Newton, obținem

$$G(x) = \int_0^{x^3} e^{t^2} \mathrm{d}t = F(x^3) - F(0),$$

de unde

$$G'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^{x^3} e^{t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(x^3) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(0)$$

sau

$$G'(x) = 3x^2F'(x^3) = e^{x^6}\cdot 3x^2 \qquad \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(0) = 0\right].$$

665. *Să se calculeze*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^{\sin x}\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Notăm cu $F(x)$ primitiva funcției $f(x) = \sqrt{1-x^2}$. Aplicînd formula lui Leibniz-Newton, obținem

$$\int_0^{\sin x}\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t = F(\sin x) - F(0).$$

De aici,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^{\sin x}\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(\sin x) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(0) =$$

$$= F'(\sin x)\cdot\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x}\cdot\cos x = |\cos x|\cos x =$$

$$= \cos^2 x\cdot\operatorname{sign}(\cos x).$$

666. *Să se demonstreze că:*

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,\mathrm{d}x = 0.$$

Fie $\varepsilon > 0$ dat. Atunci:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\varepsilon}{3}}\sin^n x\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{\varepsilon}{3}}^{\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{3}}\sin^n x\,\mathrm{d}x +$$

$$+\int_{\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,\mathrm{d}x.$$

Însă deoarece $\sin^n x < 1$, $0 < \int_0^{\frac{\varepsilon}{3}}\sin^n x\,\mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{3}$. În intervalul $\left[\frac{\varepsilon}{3}, \frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{3}\right]$ $\sin x$ fiind crescătoare, avem

$$\int_{\frac{\varepsilon}{3}}^{\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{3}}\sin^n x\,\mathrm{d}x < \left(\frac{\pi}{2}-\frac{2\varepsilon}{3}\right)\sin^n\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{3}\right) =$$

$$= \left(\frac{\pi}{2}-\frac{2\varepsilon}{3}\right)\cos^n\frac{\varepsilon}{3} < \frac{\pi}{2}\cos^n\frac{\varepsilon}{3} \text{ și } \int_{\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,\mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Deci

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,\mathrm{d}x < \frac{2\varepsilon}{3} + \frac{\pi}{2}\cos^n\frac{\varepsilon}{3}.$$

Deoarece $\cos\frac{\varepsilon}{3} < 1$, $\lim\limits_{n\to\infty}\cos^n\frac{\varepsilon}{3} = 0$; prin urmare, există rangul $N(\varepsilon)$ astfel încît pentru $n > N(\varepsilon)$ să avem

$$\frac{\pi}{2}\cos^n\frac{\varepsilon}{3} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

În concluzie, $0 < \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,\mathrm{d}x < \varepsilon$ pentru $n > N(\varepsilon)$.

667. *Să se calculeze*

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\operatorname{tg}^{2n} x\,\mathrm{d}x.$$

Avem

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\operatorname{tg}^{2n} x\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\operatorname{tg}^{2n-2} x\cdot\operatorname{tg}^2 x\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}}\operatorname{tg}^{2n-2} x(1+\operatorname{tg}^2 x)\,\mathrm{d}x - \int_0^{\frac{\pi}{4}}\operatorname{tg}^{2n-2} x\,\mathrm{d}x.$$

I_{n-1}

În integrala $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{tg}^{2n-2}\, x\,(1 + \mathrm{tg}^2 x)\, dx$ facem substituția $\mathrm{tg}\, x = z$ și obținem formula de recurență

$$I_n = \frac{1}{2n-1} - I_{n-1},$$

de unde

$$I_{n-1} = \frac{1}{2n-3} - I_{n-2}$$

. . . .

$$I_2 = \frac{1}{3} - I_1 = \frac{1}{3} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{tg}^2\, x\, dx =$$

$$= \frac{1}{3} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\, dx = \frac{1}{3} - 1 + \frac{\pi}{4}.$$

Deci

$$I_n = \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n-3} + \frac{1}{2n-5} + \ldots + \frac{(-1)^n}{3} + (-1)^{n+1} + $$
$$+ (-1)^n \frac{\pi}{4}.$$

Cu ajutorul integralelor definite să se calculeze limitele următoarelor șiruri:

668. $S_n = \frac{1}{n^5}[1 + 2^4 + 3^4 + \ldots + (n-1)^4 + n^4]$.

Avem $S_n = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n^4} + \frac{1}{n} \cdot \frac{2^4}{n^4} + \ldots + \frac{1}{n} \cdot \frac{n^4}{n^4}$.

Fie $f(x) = x^4$ definită pe segmentul $[0, 1]$ și d o diviziune a segmentului $[0, 1]$ în n intervale parțiale egale, adică

$$d : 0 < \frac{1}{n} < \frac{2}{n} < \ldots < \frac{n-1}{n} < \frac{n}{n} = 1.$$

Să notăm $x_i = \frac{i}{n}$, $i = 0, 1, \ldots, n$. Observăm că

$$S_n = f\left(\frac{1}{n}\right)\frac{1}{n} + f\left(\frac{2}{n}\right)\frac{1}{n} + \ldots + f\left(\frac{n-1}{n}\right)\frac{1}{n} +$$
$$+ f(1)\frac{1}{n} = f(x_1)(x_1 - x_0) + f(x_2)(x_2 - x_1) + \ldots$$
$$\ldots + f(x_{n-1})(x_{n-1} - x_{n-2}) + f(x_n)(x_n - x_{n-1}).$$

Funcția $f(x) = x^4$, fiind continuă pe $[0, 1]$, este integrabilă pe acest segment. Rezultă că

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \int_0^1 f(x)\, dx = \int_0^1 x^4\, dx = \frac{x^5}{5}\Big|_0^1 = \frac{1}{5}.$$

669. $S_n = \frac{1}{n^2} e^{\frac{1}{n^2}} + \frac{2}{n^2} e^{\frac{4}{n^2}} + \ldots + \frac{n-1}{n^2} e^{\left(\frac{n-1}{n}\right)^2} + \frac{n}{n^2} e^{\frac{n^2}{n^2}}$.

Avem:

$$S_n = \frac{1}{n}\left[\frac{1}{n} e^{\frac{1}{n^2}} + \frac{2}{n} e^{\frac{4}{n^2}} + \ldots + \frac{n-1}{n} e^{\left(\frac{n-1}{n}\right)^2} + \frac{n}{n} e^{\left(\frac{n}{n}\right)^2}\right].$$

Considerînd funcția $f(x) = xe^{x^2}$ și diviziunea d a segmentului $[0, 1]$ în n intervale parțiale egale prin punctele $x_i = \frac{i}{n}$, $i = 0, 1, \ldots, n$, observăm că $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)(x_i - x_{i-1})$.

Funcția $f(x) = xe^{x^2}$ fiind integrabilă, rezultă că $\lim_{n\to\infty} S_n =$

$$= \int_0^1 xe^{x^2}\, dx = \frac{1}{2}(e - 1).$$

670. $S_n = \frac{1}{n^2}\left[\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} + \sqrt{1 + \frac{2^2}{n^2}} + \ldots\right.$
$\left.\ldots + \sqrt{1 + \left(\frac{n-1}{n}\right)^2} + \sqrt{1 + \frac{n^2}{n^2}}\right]$.

Fie $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$ și d o diviziune a segmentului $[0, 1]$ prin punctele $x_i = \frac{i}{n}$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$. În acest caz, $S_n = \sum_{i=0}^{n} f\,(x)_i\,(x_i - x_{i-1})$. Funcția $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$ fiind continuă pe $[0, 1]$ este și integrabilă; deci $\lim_{n\to\infty} S_n = \int_0^1 \sqrt{1 + x^2}\, dx$.

Funcția de sub semnul integralei este de forma $R\,(x\sqrt{1 + x^2})$, trinomul de sub radical avînd rădăcini complexe.

Facem substituția $\sqrt{1 + x^2} = x + t$.

Deducem

$$x^2 + t^2 + 2tx = 1 + x^2,\ x = \frac{1 - t^2}{2t},$$

$$dx = -\frac{1 + t^2}{2t^2} dt \text{ și } \sqrt{1 + x^2} = \frac{1 + t^2}{2t}.$$

Pentru $x = 0$, $t = 1$ și pentru $x = 1$, $t = \sqrt{2} - 1$.
Deci

$$\int_0^1 \sqrt{1 + x^2}\,dx = -\frac{1}{4}\int_1^{\sqrt{2}-1} \frac{(1+t^2)^2}{t^3}\,dt = \frac{1}{4}\int_{\sqrt{2}-1}^{1} \frac{(1+t^2)^2}{t^3}\,dt =$$

$$= \frac{1}{4}\int_{\sqrt{2}-1}^{1}\left(\frac{1}{t^3} + t + \frac{2}{t}\right)dt = \frac{1}{4}\left[2\ln t\,\Big|_{\sqrt{2}-1}^{1} + \frac{t^2}{2}\,\Big|_{\sqrt{2}-1}^{1} -\right.$$

$$\left. -\frac{1}{2t^2}\,\Big|_{\sqrt{2}-1}^{1}\right] = \frac{1}{2}\ln(\sqrt{2}+1) + 2\sqrt{2}.$$

Exerciții propuse spre rezolvare

671. *Fără a calcula integralele, să se demonstreze următoarele inegalități:*

a) $\dfrac{16}{3} \leqslant \displaystyle\int_4^6 \frac{x^2}{x+2}\,dx \leqslant 9.$

b) $\sqrt{10} \leqslant \displaystyle\int_{-4}^{-3} \sqrt{x^2+1}\,dx \leqslant \sqrt{17}.$

c) $0 \leqslant \displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{0} x\ln(1-x^2)\,dx \leqslant \frac{1}{4}\ln\frac{4}{3}.$

672. *Să se calculeze*

$$\lim_{x\to\pi} \frac{\displaystyle\int_0^{\sin x} e^{x^2}\,dx}{\displaystyle\int_0^{\operatorname{tg} x} e^{x^2}\,dx}.$$

R. -1.

Fără a calcula integralele, să se demonstreze egalitățile:

673. $\dfrac{d}{dx}\left(\displaystyle\int_0^{\sin x} \arcsin x\,dx\right) = x\cos x.$

674. $\dfrac{d}{dx}\left(\displaystyle\int_0^{x^2+2x} \sqrt{1+t}\,dt\right) = 2\,|x+1|\,(x+1).$

Să se calculeze următoarele integrale definite:

675. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin x - \cos x|\,dx.$ **R.** $2(\sqrt{2}-1)$.

676. $\displaystyle\int_{-2}^{2} |x^2 - 1|\,dx.$ **R.** 4.

677. $\displaystyle\int_1^{2e} |\ln x - 1|\,dx.$ **R.** $2(e\ln 2 - 1)$.

678. $\displaystyle\int_{-2}^{2} \min[(x-1), (x+1)]\,dx.$ **R.** 2.

679. $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \max[\operatorname{tg}^3 x, \operatorname{tg} x]\,dx.$ **R.** $\ln 2 - \dfrac{1}{2}$.

680. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dx}{4 - 2\cos x}.$ **R.** $\dfrac{\pi}{\sqrt{3}}$.

681. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dx}{3 + \sin x}.$ **R.** $\dfrac{\pi}{\sqrt{2}}$.

682. $\displaystyle\int_1^{3} \sqrt{7x+3}\,dx.$ **R.** $\dfrac{4}{21}\left[24\sqrt{6} - 5\sqrt{10}\right]$.

683. $\displaystyle\int_1^{e} \ln^3 x\,dx.$ **R.** $6 - 2e$.

684. $\displaystyle\int_0^{a\sqrt{7}} \frac{x^3\,dx}{\sqrt[3]{a^2+x^2}}.$ **R.** $\dfrac{141\,a^3\sqrt[3]{a}}{20}$.

685. $\displaystyle\int_0^{2} \frac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt{(x+1)^3}}.$ **R.** $\dfrac{\pi}{6}$.

686. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + \frac{\sin^2 x}{6}}.$ **R.** $\dfrac{\pi}{2}\sqrt{\dfrac{6}{7}}$.

Să se calculeze următoarele integrale definite, utilizînd pentru fiecare integrală toate metodele cunoscute:

687. $\displaystyle\int_{-a}^{a} \frac{x^2\,dx}{\sqrt{a^2+x^2}}.$ **R.** $a^2[\sqrt{2} - \ln(3 - 2\sqrt{2})]$.

688. $\displaystyle\int_0^{3} \frac{dx}{(x^2+3)^{\frac{5}{2}}}.$ **R.** $\dfrac{\sqrt{3}}{24}$.

689. $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{dx}{(2x^2+1)\sqrt{x^2+1}}.$ **R.** $\operatorname{arc\,tg}\dfrac{1}{2}$.

690. $\int_0^a \frac{dx}{x+\sqrt{a^2-x^2}}$. **R.** $\frac{\pi}{4}$.

691. $\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\,dx$. **R.** $\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$.

692. $\int_0^1 \sqrt{(1-x^2)^3}\,dx$. **R.** $\frac{3\pi}{16}$.

693. *Să se rezolve ecuația* $\int_{\sqrt{2}}^x \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \frac{\pi}{12}$. **R.** $x = 2$.

694. *Cu ajutorul integralelor definite să se calculeze limitele șirurilor avînd termenul general:*

a) $$u_n = \frac{1}{n^2}\left[\frac{1}{n+1} + \frac{2^2}{n+2} + \frac{3^2}{n+3} + \ldots + \frac{(n-1)^2}{2n-1} + \frac{n^2}{2n}\right].$$ **R.** $\ln 2 - \frac{1}{2}$.

b) $$u_n = \frac{1}{n^6}\left[1 + 2^5 + 3^5 + \ldots + n^5\right].$$ **R.** $\frac{1}{6}$.

c) $$u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\left[\frac{1}{\sqrt{2+5n}} + \frac{1}{\sqrt{4+5n}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{2n+5n}}\right].$$ **R.** $\sqrt{7}-\sqrt{5}$.

695. *Fie funcția f care admite derivată de ordinul al doilea în intervalul* $[x_0 - r, x_0 + r]$. *Să se arate că există un punct* $\xi \in (x_0 - r, x_0 + r)$, *astfel încît să avem*

$$f''(\xi) = \frac{3}{r^3}\int_{x_0-r}^{x_0+r}\left[f(x) - f(x_0)\right]dx.$$

Ținem seama de egalitatea

$$f(x) - f(x_0) = (x - x_0) f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2} f''(\xi),\ x_0<\xi<x.$$

696. *Fie funcția* f: $[0, a]$ *monoton crescătoare. Notînd*

$$r_n = \int_0^a f(t)\,dt - \frac{a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(k\,\frac{a}{n}\right),$$

să se demonstreze inegalitatea

$$0 \leqslant r_n \leqslant \frac{a}{n}\left[f(a) - f(0)\right].$$

Scriem

$$r_n = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{k\frac{a}{n}}^{(k+1)\frac{a}{n}}\left[f(t) - f\left(k\,\frac{a}{n}\right)\right]dt.$$

697. *Fie funcția definită pe segmentul* $[0, 1]$, *crescătoare în intervalul* $[0, \xi]$, *descrescătoare în intervalul* $[\xi, 1]$ *și avînd maximul* $M = f(\xi)$. *Notînd*

$$r_n = \int_0^1 f(x)\,dx - \frac{1}{n}\left[f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \ldots + f\left(\frac{n}{n}\right)\right],$$

să se arate că

$$-\frac{M - f(0)}{n} \leqslant r_n \leqslant \frac{M - f(1)}{n}.$$

698. *Fie funcția f definită pe* $[0, a]$, *derivabilă, cu derivata* f' *integrabilă pe segmentul* $[0, a]$. *Păstrînd notațiile din exercițiul 696, să se arate că*

$$\lim_{n\to\infty} n r_n = \frac{a}{2}\quad\left[f(a) = f(0)\right].$$

Aceeași metodă ca în exercițiul 696.

699. *Fie funcția f definită pe* $[0, a]$, *derivabilă de două ori, cu derivata* f'' *integrabilă pe* $[0, a]$. *Notînd*

$$r_n = \int_0^a f(t)\,dt - \frac{a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(2k - 1\cdot\frac{a}{2n}\right),$$

să se arate că

$$\lim_{n\to\infty} n^2 r_n = \frac{a^2}{24}\,[f'(a) - f'(0)].$$

700. *Să se arate că:*

a) $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{2n+1} + \frac{2}{2n+3} + \ldots + \frac{2}{4n-1}\right) = \ln 2.$$

b) $$\lim_{n\to\infty} n^2(\ln 2 - v_n) = \frac{1}{32},$$ unde

$$v_n = \frac{2}{2n+1} + \frac{2}{2n+3} + \ldots + \frac{2}{4n-1}.$$

Se aplică exercițiul 699.

701. *Fie funcția f definită pe segmentul $[a, b]$, derivabilă pe acest segment și $f(a) = f(b) = 0$. Să se demonstreze că există cel puțin un punct ξ astfel încît*

$$|f'(\xi)| > \frac{4}{(b-a)^2}\int_a^b f(x)\,dx.$$

702. *Să se arate că*

$$I_m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\,dx = \begin{cases} \dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2k}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & \text{dacă } m = 2k \\ \dfrac{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2k}{1\cdot 3\cdot 5\cdots 2k+1}, & \text{dacă } m = 2k+1. \end{cases}$$

703. *Folosind rezultatul stabilit în exercițiul 702, să se calculeze* $\int_0^1 \frac{x^n\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

704. *Să se arate că* $\int_0^1 x^m (\ln x)^n\,dx = (-1)^n \cdot \frac{n!}{(m+1)^{n+1}}$.

705. *Folosind inegalitatea*

$$\sin^{2n+1} x < \sin^{2n} x < \sin^{2n-1} x$$

și folosind rezultatele exercițiului 702, să se demonstreze că

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{2\cdot 4\cdots 2n}{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}\right]^2\cdot\frac{1}{n} = \pi$$

(formula lui Wallis).

706. *Să se arate că:*

$$\int_0^1 (1-x^2)^n\,dx = 2^{2n}\frac{(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

Stabilim o formulă de recurență.

707. *Fie șirul*

$$S_n = \int_0^1 (1-x^2)^n\,dx.$$

Să se arate că $\lim_{n\to\infty} S_n = 0$.

708. *Fie funcțiile f și g definite pe segmentul $[a, b]$, de n ori derivabile și cu derivatele $f^{(n)}$ și $g^{(n)}$ integrabile pe $[a, b]$. Să se arate că are loc formula*

$$\int_a^b f^{(n)}(t)\,g(t)\,dt = \left(\sum_{p=0}^{n-1}(-1)^p\,[f^{(n-p-1)}(t)\,g^{(p)}(t)]\right)\Bigg|_a^b +$$

$$+(-1)^n\int_a^b f(t)g^{(n)}(t)\,dt$$

(formula de integrare prin părți de ordinul n).

709. *Să se stabilească formula*

$$f(x) = f(a) + f'(a)\frac{x-a}{1!} + \ldots + f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!} +$$

$$+\int_a^x f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}\,dt.$$

În formula de integrare prin părți de ordinul n, înlocuim b cu x și $g(t)$ cu $\frac{(t-x)^n}{n!}$.

710. *Fie g o funcție care admite o derivată continuă și diferită de zero în $[a, x]$ și f o funcție care admite derivată de ordinul $n+1$ continuă. Să se arate că restul r_n al dezvoltării în serie Taylor de ordinul n, în jurul punctului a, poate fi scris sub forma*

$$r_n(x) = [g(x) - g(a)]\,\frac{(x-\xi)^n f^{(n+1)}(\xi)}{n!\,g'(\xi)},\quad 0 < \xi < x.$$

Folosim rezultatul obținut în exercițiul 709.

711. *Dacă $f:[a, b]\to R$ are o discontinuitate de speța întîi în punctul $x_0 \in (a, b)$ și $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, atunci*

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x_0+h) - F(x_0-h)}{2h} = \frac{1}{2}[f(x_0+0) + f(x_0-0)].$$

712. *Fie*

$$f(x) = \begin{cases} x\,E\left(\dfrac{1}{x}\right), & \text{dacă } x \in (0, 1) \\ 1, & \text{dacă } x = 0. \end{cases}$$

a) *Să se calculeze* $\lim\limits_{x\to 0} xE\left(\frac{1}{x}\right)$.

b) *Să se cerceteze integrabilitatea funcţiei pe* $[0, 1]$.

R. a) 1; b) funcţia este integrabilă.

713. *Dacă funcţia* $f:[a, b]\to R$ *este mărginită pe* $[a, b]$, *atunci*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt, \quad x\in[a, b],$$

este lipschiţiană pe $[a, b]$.

6.2. Aplicaţii ale integralei definite

Fie f o funcţie continuă, cu semnul arbitrar, definită pe $[a, b]$. Aria S a suprafeţei mărginite de graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x = a$, $x = b$, este dată de egalitatea

$$S = \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Volumul obţinut prin rotirea graficului funcţiei f în jurul axei Ox este dat de egalitatea

$$V = \pi\int_a^b f^2(x)\,dx.$$

Dacă funcţia f are derivată continuă, lungimea $l(c)$ a curbei C, care are ecuaţia $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, este dată de egalitatea

$$l(c) = \int_a^b \sqrt{1+f'^2(x)}\,dx.$$

Dacă f este o funcţie reală definită pe $[a, b]$ şi cu derivată continuă, aria suprafeţei obţinute prin rotirea graficului funcţiei considerate în jurul axei Ox este

$$A = 2\pi\int_a^b |f(x)|\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx.$$

Dacă $f > 0$, definită pe $[a,b]$, este continuă, coordonatele centrului de greutate al figurii mărginite de graficul funcţiei f, dreptele de ecuaţii $x = a$, $x = b$ şi axa Ox sînt

$$x_G = \frac{\int_a^b xf(x)\,dx}{\int_a^b f(x)\,dx}, \quad y_G = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b f^2(x)\,dx}{\int_a^b f(x)\,dx}.$$

714. *Să se calculeze aria mărginită de graficul funcţiei* $f(x) = e^{-x}\sin x$ *şi axa* Ox *între punctele* $x = 0$ *şi* $x = 2\pi$.

Avem

$$S = \int_0^{2\pi} |f(x)|\,dx = \int_0^{2\pi} |e^{-x}\sin x|\,dx.$$

Însă $e^{-x} > 0$ oricare ar fi x, iar $\sin x > 0$ pentru $0 < x < \pi$, $\sin x < 0$ pentru $\pi < x < 2\pi$. Deci

$$S = \int_0^{\pi} e^{-x}\sin x\,dx - \int_{\pi}^{2\pi} e^{-x}\sin x\,dx.$$

Calculăm $F(x) = \int e^{-x}\sin x\,dx$, integrînd prin părţi de două ori:

$$F(x) = \int e^{-x}\sin x\,dx = -e^{-x}\cos x - \int e^{-x}\cos x\,dx =$$
$$= -e^{-x}\cos x - (e^{-x}\sin x + \int e^{-x}\sin x\,dx)$$

sau

$$F(x) = -e^{-x}\cos x - e^{-x}\sin x - F(x),$$

de unde

$$2F(x) = -e^{-x}(\cos x + \sin x),$$
$$F(x) = -\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x + \cos x).$$

$$S = F(\pi) - F(0) - F(2\pi) + F(\pi) = e^{-\pi} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2e^{2\pi}}.$$

715. *Să se calculeze aria mărginită de graficul funcţiei* $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$, *axa* Ox *şi dreptele de ecuaţii* $x = 1$, $x = 2$.

Deoarece $\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \geqslant 0$ oricare ar fi x,

$$|f(x)| = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \text{ şi } S = \int_1^2 \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\,dx.$$

Facem substituţia $t = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$, de unde obţinem $x = \frac{1+t^2}{1-t^2}$, $dx = \frac{4t\,dt}{(1-t^2)^2}$.

Observăm că pentru $x=1$, $t=0$ şi pentru $x=2$, $t=\frac{1}{\sqrt{3}}$. Deci

$$\int_1^2 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx = 4\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{t^2\,dt}{(1-t^2)^2}.$$

Am obţinut o funcţie raţională în t, gradul numărătorului fiind mai mic decît gradul numitorului. Conform teoriei generale, fracţia se descompune în elemente simple astfel

$$\frac{t^2}{(1-t^2)^2} = \frac{t^2}{(1-t)^2(1+t)^2} = \frac{A}{1-t} + \frac{B}{(1-t)^2} + \frac{C}{1+t} + \frac{D}{(1+t)^2}.$$

Pentru coeficienţii A, B, C, D obţinem valorile $A = -\frac{1}{4}$, $B = \frac{1}{4}$, $C = -\frac{1}{4}$, $D = \frac{1}{4}$.

Prin urmare,

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\left[-\frac{1}{1-t}+\frac{1}{(1-t)^2}-\frac{1}{1+t}+\frac{1}{(1+t)^2}\right]dt = \ln|1-t|\Big|_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} +$$

$$+\frac{1}{1-t}\Big|_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} - \ln|1+t|\Big|_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} - \frac{1}{1+t}\Big|_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} =$$

$$= \ln\left|\frac{1-t}{1+t}\right|_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} + \frac{2t}{1-t^2}\Big|_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \ln\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{2} +$$

$$+\sqrt{3} = \ln(2-\sqrt{3}) + \sqrt{3}.$$

716. *Să se calculeze aria mărginită de graficul funcţiei* $f(x) = \frac{\cos x}{1+\cos x}$, *axa Ox şi dreptele de ecuaţii* $x=0$, $x=\frac{3\pi}{4}$.

Avem

$$S = \int_0^{\frac{3\pi}{4}}\left|\frac{\cos x}{1+\cos x}\right|dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x\,dx}{1+\cos x} - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}}\frac{\cos x}{1+\cos x}dx.$$

Calculăm $F(x) = \int\frac{\cos x\,dx}{1+\cos x}$ cu ajutorul substituţiei $\mathrm{tg}\frac{x}{2} = t$:

$$\int\frac{\cos x}{1+\cos x}dx = \int\frac{\frac{1-t^2}{1+t^2}}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2\,dt}{1+t^2} = -\int\frac{t^2-1}{1+t^2}dt =$$

$$= -\int\frac{t^2+1-2}{t^2+1}dt = -\int\left(1-\frac{2}{1+t^2}\right)dt = -t + 2\,\mathrm{arctg}\,t =$$

$$= -\mathrm{tg}\frac{x}{2} + 2\,\mathrm{arctg}\,\mathrm{tg}\frac{x}{2}.$$

Deci

$$S = F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F(0) - F\left(\frac{3\pi}{4}\right) + F\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2 + \mathrm{tg}\frac{3\pi}{8} - \frac{\pi}{4}.$$

717. *Să se calculeze aria mărginită de graficul funcţiei*

$$f(x) = \frac{|x-1|}{|x+1|}$$

şi dreptele de ecuaţii $x=0$, $x=2$.

Avem

$$S = -\int_0^1\frac{x-1}{x+1}dx + \int_1^2\frac{x-1}{x+1}dx.$$

Notăm

$$F(x) = \int\frac{x-1}{x+1}dx = \int\left(1-\frac{2}{x+1}\right)dx = x - 2\ln(x+1),$$

deci

$$S = F(2) - F(1) - F(1) + F(0) = \ln\frac{4}{9}.$$

718. *Să se calculeze aria porţiunii din suprafaţa cercului care are ecuaţia* $x^2+y^2=3$, *situată în interiorul parabolei de ecuaţie* $y^2=2x$.

Ni se cere să calculăm aria $OABCO$ (fig. 42).

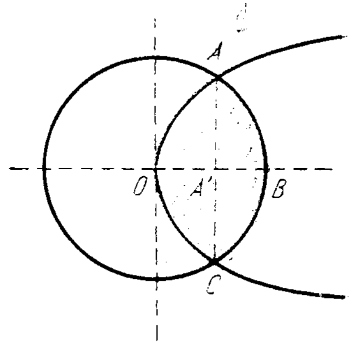

Fig. 42

Însă aria $OABCO = 2$ aria $OABO = 2$ (aria $OAA'O +$ $+$ aria $A'ABA'$).

Avem

$$\text{aria } OAA'O = \int_0^1 \sqrt{2x}\, dx = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\text{aria } A'ABA' = \int_1^{\sqrt{3}} \sqrt{3 - x^2}\, dx.$$

Calculăm integrala $\int_1^{\sqrt{3}} \sqrt{3 - x^2}$ cu ajutorul substituţiei $x = \sqrt{3} \sin t$, de unde $dx = \sqrt{3} \cos t\, dt$.

Prin urmare,

$$\int_1^{\sqrt{3}} \sqrt{3 - x^2}\, dx = 3 \int_{\arcsin \frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\, dt =$$

$$= 3 \int_{\arcsin \frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2t}{2}\, dt = \frac{3}{2} t \Big|_{\arcsin \frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{3}{4} \sin 2t \Big|_{\arcsin \frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{3\pi}{4} - \frac{3 \arcsin \frac{1}{\sqrt{3}}}{2} - \frac{3}{4} \sin 2 \arcsin \frac{1}{\sqrt{3}} .$$

Însă

$$\sin 2 \arcsin \frac{1}{\sqrt{3}} = 2 \sin \arcsin \frac{1}{\sqrt{3}} \cos \arcsin \frac{1}{\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{1 - \frac{1}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{2}}{3} .$$

Deci

$$\text{aria } OABCO = 2 \left(\frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{3\pi}{4} - \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{3}{3} \arcsin \frac{1}{\sqrt{3}} \right) .$$

719. *Să se calculeze lungimea curbei care are ecuaţia*

$$f(x) = 2 \ln x,\ 2 \leqslant x \leqslant 2\sqrt{3}.$$

Avem $f'(x) = \frac{2}{x}$, $1 + f'^2(x) = \frac{x^2 + 4}{x^2}$. Deci

$$l = \int_2^{2\sqrt{3}} \frac{\sqrt{x^2 + 4}}{x}\, dx. \qquad (1)$$

Vom calcula integrala (1) efectuînd substituţia $x = 2 \operatorname{tg} t$:

$$l = 2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dt}{\sin t \cos^2 t} = 2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1 + \operatorname{tg}^2 t}{\sin t}\, dt =$$

$$= 2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dt}{\sin t} + 2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin t\, dt}{\cos^2 t} = 2 \ln \operatorname{tg} \frac{t}{2} \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} -$$

$$- \frac{2}{\cos t} \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = 2 \ln \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} - 2 \ln \operatorname{tg} \frac{\pi}{8} - 4 + \frac{4}{\sqrt{2}} .$$

Deoarece $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}$, avem

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}}} \text{ şi } l = 2 \left[\ln \frac{1}{\sqrt{3}} - \ln \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}}} \right] +$$

$$+ 2\sqrt{2} [1 - \sqrt{2}] = \ln \frac{2 + \sqrt{2}}{3(2 - \sqrt{2})} + 2\sqrt{2} [1 - \sqrt{2}] .$$

Propunem cititorului ca exerciţiu să calculeze integrala folosind alte substituţii cunoscute.

720. *Să se calculeze coordonatele centrului de greutate al suprafeţei mărginite de curba care are ecuaţia* $f(x) = \frac{x^4}{\sqrt{1 - x^2}}$, *dreptele de ecuaţii* $x = 0$, $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ *şi axa* Ox.

Avem

$$x_G = \frac{\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{x^5}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx}{\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{x^4}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx} .$$

Să calculăm $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$. Efectuînd substituția $x = \sin t$, obținem

$$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^5 t\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1-\cos^2 t)^2 \sin t\,dt =$$

$$= -\cos t \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{\cos^5 t}{5}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + 2\frac{\cos^3 t}{3}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{8}{15} - \frac{11\sqrt{2}}{24}.$$

Folosind aceeași substituție pentru integrala

$$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{x^4}{\sqrt{1-x^2}}\,dx, \text{ obținem}$$

$$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{x^4\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^4 t\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 t\,dt -$$

$$-\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 t\cos^2 t\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-\cos 2t}{2}\,dt -$$

$$-\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-\cos 4t}{2}\,dt = \frac{\pi}{16} - \frac{1}{4}.$$

$$\text{Deci } x_G = \frac{\frac{8}{15} - \frac{11\sqrt{2}}{22}}{\frac{\pi}{16} - \frac{1}{4}}.$$

Pentru a obține pe y_G este suficient să calculăm integrala

$$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{x^8}{1-x^2}\,dx = -\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} (x^6+x^4+x^2+1)\,dx + \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dx}{1-x^2} =$$

$$= -\frac{91}{56\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\cdot \ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}.$$

$$\text{Deci } y_G = \frac{-\frac{91}{56\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}}{\frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}}.$$

Propunem cititorului să calculeze integralele din acest exercițiu folosind alte metode cunoscute.

721. *Să se calculeze volumul obținut prin rotirea curbei care are ecuația* $f(x) = \arcsin x$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, *în jurul axei* Ox.

Avem

$$V = \pi \int_0^1 (\arcsin x)^2\,dx.$$

Notînd $f(x) = (\arcsin x)^2$, $g'(x) = 1$, găsim $f'(x) = 2\arcsin x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $g(x) = x$ și deci $\int (\arcsin x)^2\,dx = x(\arcsin x)^2\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin x\,dx$.

Calculăm ultima integrală tot prin părți. Notăm

$$\frac{2x}{\sqrt{1-x^2}} = g'(x),\ f(x) = \arcsin x \text{ și obținem } g(x) =$$

$$= -2\sqrt{1-x^2},\ f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};\ \text{deci}$$

$$\int_0^1 \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin x\,dx = -2\sqrt{1-x^2}\arcsin x\Big|_0^1 +$$

$$+ \int_0^1 \frac{2\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

Să considerăm integrala $\int_0^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$. Deoarece x variază în intervalul închis $[0, 1]$, $\sqrt{1-x^2}$ se anulează în punctul $x = 1$ și simplificarea cu $\sqrt{1-x^2}$ nu mai este posibilă. Pentru a calcula intergrala vom proceda în modul următor:

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{1-\varepsilon} \frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{1-\varepsilon} dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}(1-\varepsilon) = 1.$$

Reunind toate rezultatele, obținem

$$V = \pi\left[x(\arcsin x)^2\Big|_0^1 + 2\sqrt{1-x^2}\arcsin x\Big|_0^1 - 1\right] =$$

$$= \pi\left[\frac{\pi^2}{4} - 1\right].$$

722. *Să se calculeze aria suprafeței obținute prin rotirea parabolei care are ecuația* $f(x) = \sqrt{2px}$, $1 \leqslant x \leqslant 3$, *în jurul axei* Ox.

Avem

$$A = 2\pi \int_1^3 \sqrt{2px} \sqrt{1 + \frac{p}{2x}}\, dx = 2\pi \int_1^3 \sqrt{2px + p^2}\, dx.$$

Pentru a calcula ultima integrală facem substituția

$t = \sqrt{p^2 + 2px}$ și deducem

$$A = \frac{2\pi}{p} \int_{\sqrt{2p+p^2}}^{\sqrt{6p+p^2}} t^2\, dt = \frac{2\pi}{3p} t^3 \Big|_{\sqrt{2p+p^2}}^{\sqrt{6p+p^2}} = \frac{2\pi}{3p} \left[\sqrt{(6p+p^2)^3} - \sqrt{p^2 + 2p}\right].$$

Exerciții propuse spre rezolvare

Să se calculeze:

723. *Aria figurii mărginite de graficul funcției* $f(x) = \dfrac{1}{x + x^3}$, *de axa* Ox *și de dreptele care au ecuațiile* $x = 1$, $x = 2$.

R. $\dfrac{1}{2} \ln \dfrac{8}{5}$.

724. *Aria figurii mărginite de graficul funcției* $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}$, *axa* Ox *și dreptele de ecuații* $x = 0$, $x = 0{,}75$.

R. $\dfrac{1}{\sqrt{2}} \ln \dfrac{9 + 4\sqrt{2}}{7}$.

725. *Aria figurii mărginite de curbele care au ecuațiile* $y = \ln x$, $y = \ln^2 x$. **R.** $3 - e$.

? **726.** *Aria figurii mărginite de curba care are ecuația* $x^2y^2 = 4(x-1)$ *și dreapta care trece prin punctele ei de inflexiune.*

R. $8\left(\sqrt{1 + \frac{2}{3}\sqrt{3}} - \operatorname{arctg}\sqrt{1 + \frac{2}{3}\sqrt{3}}\right)$.

727. *Volumul obținut prin rotirea curbei care are ecuația* $f(x) = x \ln x$, $1 \leqslant x \leqslant e$, *în jurul axei* Ox.

R. $\pi\left(\dfrac{5}{27} e^3 - \dfrac{1}{9}\right)$.

728. *Lungimile curbelor care au ecuațiile:*

a) $y = x^{3/2}$, $0 \leqslant x \leqslant 4$.

R. $\dfrac{8}{27}(10\sqrt{10} - 1)$.

b) $y = \sqrt{2px}$, $0 \leqslant x \leqslant x_0$.

R. $2\sqrt{x_0\left(x_0 + \dfrac{p}{2}\right)} + p \ln \dfrac{\sqrt{x_0} + \sqrt{x_0 + \dfrac{p}{2}}}{\sqrt{\dfrac{p}{2}}}$.

729. *Volumul obținut prin rotirea curbei cu ecuația* $y = \sin x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$,

a) *în jurul axei* Ox **R.** $\dfrac{\pi^2}{2}$.

b) *în jurul axei* Oy. **R.** $2\pi^2$.

730. *Ariile suprafețelor obținute prin rotirea curbelor care au ecuațiile:*

a) $f(x) = x\sqrt{\dfrac{x}{a}}$, $0 \leqslant x \leqslant a$, *în jurul axei* Ox.

R. $\dfrac{4\pi a^2}{243}\left(21\sqrt{13} + 2\ln\dfrac{3 + \sqrt{13}}{2}\right)$.

b) $f(x) = a \cos \dfrac{\pi x}{2b}$ $(|x| \leqslant b)$ *în jurul axei* Ox

R. $2\pi\sqrt{\pi^2 \cdot a^2 + 4b^2} + \dfrac{8b^2}{\pi} \ln \dfrac{\pi a + \sqrt{\pi^2 a^2 + 4b^2}}{2b}$.

c) $f(x) = \operatorname{tg} x$, $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{4}$, *în jurul axei* Ox.

R. $\pi\left[(\sqrt{5} - \sqrt{2}) + \ln \dfrac{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{5}-1)}{2}\right]$.

731. *Să se calculeze coordonatele centrului de greutate al figurii mărginite de curba care are ecuația* $y = \sin x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$, *și axa* Ox.

R. $x_G = \dfrac{\pi}{2}$, $y_G = \dfrac{\pi}{8}$

732. *Să se calculeze coordonatele centrului de greutate pentru figura mărginită de curba închisă care are ecuația* $y^2 = ax^3 - x^4$.

R. $x_G = \frac{5}{8}$, $y_G = 0$.

6.3. Metode de calcul aproximativ al integralei definite

Dintre metodele mai importante pentru calculul aproximativ al integralelor cităm următoarele:

Metoda dreptunghiurilor. Fie $f:[a, b] \to R$ o funcție derivabilă pe $[a, b]$ cu derivata mărginită și d o diviziune a intervalului $[a, b]$ în n intervale parțiale egale prin punctele $x_i = a + ih$, $h = \frac{b-a}{n}$, $i = 0, 1, \ldots, n$. Atunci

$$\int_a^b f(x)\,dx = h[f(a) + f(x_1) + \ldots + f(x_{n-1})] + R_n(x),$$

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{M'(b-a)^2}{n}, \text{ unde } M' = \sup_{x\in[a,b]} |f'(x)|.$$

Metoda trapezelor. Dacă $f: [a, b] \to R$ are derivata f'' integrabilă și d este diviziunea definită anterior, atunci

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{2n}\{f(a) + f(b) + 2[f(x_1) + \ldots + f(x_{n-1})]\} + R_n(x),$$

unde $|R_n(x)| \leqslant \frac{M''(b-a)^3}{12n^2}$ cu $M'' = \sup\limits_{x\in[a,b]} |f''(x)|$.

Formula lui Simpson. Fie $f[a, b] \to R$ avînd derivata de ordinul al patrulea mărginită și d diviziunea intervalului $[a, b]$ în $2n$ intervale parțiale egale prin punctele $x_i = a + ih$, $h = \frac{b-a}{2n}$, $i = 0, 1, \ldots, 2n$. Atunci

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{(b-a)^3}{6n}\{f(a) + f(b) + 4[f(x_1) + f(x_3) + \ldots$$

$$\ldots + f(x_{2n-1})] + 2[f(x_2) + f(x_4) + \ldots + f(x_{2n-2})] + R_n(x),$$

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{M^{IV}(b-a)^5}{2880\,n^4}, \text{ unde } M^{IV} = \sup_{x\in[a,b]} |f^{IV}(x)|.$$

733. *Să se calculeze valoarea aproximativă a numărului* π.

Putem calcula valoarea aproximativă a numărului π pornind de la integrale ale căror valori, calculate după formula lui Leibniz — Newton, sînt egale cu numărul π. Astfel de integrale sînt:

$$4\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \pi, \quad 4\int_0^1 \sqrt{1-x^2} = \pi, \quad 2\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pi,$$

$$\frac{4}{a^2}\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \pi.$$

În cele ce urmează vom calcula valoarea numărului π folosind prima dintre integralele citate.

a) *Metoda trapezelor.* Fie integrala

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4} \quad \text{și} \quad f(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Avem

$$f''(x) = \frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}, \quad f'''(x) = \frac{24(-x^3+x)}{(1+x^2)^4}.$$

Deoarece $f'''(x)$ se anulează în punctul $x = 1$ schimbîndu-și semnul de la plus la minus, rezultă că în acest punct $f'''(x)$ admite un maxim, singurul în intervalul de integrare. Atunci:

$$M'' = \sup_{x\in[0,1]} \frac{6x^2-2}{(1+x^2)^5} = \frac{1}{2}.$$

Prin urmare, luînd în formula trapezelor, de exemplu $n = 10$, eroarea maximă este

$$\frac{M''(b-a)^3}{12n^2} = \frac{1}{2\cdot 1\,200} = 0{,}0004166.$$

Efectuînd calculele, obținem:

$$\begin{aligned}
a = x_0 &= 0; & f(a) &= 1\\
x_1 &= 0{,}1; & f(x_1) &= 0{,}990099\\
x_2 &= 0{,}2; & f(x_2) &= 0{,}961538\\
x_3 &= 0{,}3; & f(x_3) &= 0{,}917431\\
x_4 &= 0{,}4; & f(x_4) &= 0{,}862068\\
x_5 &= 0{,}5; & f(x_5) &= 0{,}800000
\end{aligned}$$

$$x_6 = 0{,}6; \qquad f(x_6) = 0{,}735294$$
$$x_7 = 0{,}7; \qquad f(x_7) = 0{,}671140$$
$$x_8 = 0{,}8; \qquad f(x_8) = 0{,}609756$$
$$x_9 = 0{,}9; \qquad f(x_9) = 0{,}552486$$
$$x_{10} = 1; \qquad f(1) = 0{,}5.$$

Aplicăm formula trapezelor şi deducem

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} \approx 0{,}1\left(\frac{0{,}5}{2} + 7{,}099812\right) = 0{,}7849812.$$

Dacă luăm în considerare şi eroarea, găsim $\frac{\pi}{4} \approx 0{,}7853978$, de unde $\pi \approx 3{,}1415912$.

b) *Calculul aproximativ al numărului π prin formula lui Simpson.* Aplicînd această formulă integralei $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}$ pentru $2n = 10$, obţinem

$$\frac{\pi}{4} = \frac{0{,}1}{3}[1 + 0{,}5 + 4(0{,}990099 + 0{,}917431 + 0{,}800000 + 0{,}671140 + 0{,}552486) + 2(0{,}961538 + 0{,}862068 + 0{,}735294 + 0{,}609756)] + R_n(x) = 0{,}785398 + R_n(x);$$

deducem

$$\pi \approx 3{,}141592.$$

Să evaluăm eroarea maximă. Avem:

$$f^{\mathrm{IV}}(x) = \frac{24(5x^4 - 10x^2 + 1)}{(1+x^2)^5}$$
$$f^{\mathrm{V}}(x) = \frac{240(-3x^5 + 10x^3 - 3x)}{(1+x^2)^6}.$$

Rădăcinile derivatei $f^{\mathrm{V}}(x)$ sînt date de ecuaţia $3x^5 + 10x^3 - 3x = 0$ care are rădăcinile

$$x_1 = 0, \quad x_2 = -\frac{\sqrt{3}}{3}, \quad x_3 = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad x_4 = -\sqrt{3}, \quad x_5 = \sqrt{3}.$$

Întrucît $f^{\mathrm{V}}(x)$ se anulează în $x = 0$ schimbînd semnul de la plus la minus, rezultă că $f^{\mathrm{IV}}(x)$ are valoarea maximă în intervalul $[0, 1]$ pentru $x = 0$;

$$M^{\mathrm{IV}} = \sup_{x\in[0,1]} |f^{\mathrm{IV}}(x)| = 24 \quad \text{şi} \quad |R_n(x)| \leqslant \frac{24}{2880\cdot 10^4} = 0{,}0000008.$$

O b s e r v a ţ i e. Dacă se cerea dinainte să se calculeze valoarea lui $\frac{\pi}{4}$ cu cel puţin şase zecimale exacte (deci $|R_n(x)| \leqslant 0{,}0000001$), aveam pentru n:

$$n^4 \geqslant \frac{M}{2\,880\cdot 0{,}0000001} = \frac{24}{2\,880\cdot 0{,}0000001},$$
$$n^4 \geqslant 83\,330, \quad n \geqslant 10.$$

Exerciţii propuse spre rezolvare

734. *Aplicînd metoda dreptunghiurilor* ($n = 12$), *să se calculeze valoarea aproximativă a integralei*

$$\int_0^{2\pi} x \sin x \,\mathrm{d}x$$

şi să se compare rezultatul obţinut cu valoarea exactă.

R. $-6{,}2832$.

735. *Pornind de la integralele*

$$4\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \pi, \qquad 2\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \pi,$$

să se calculeze valoarea aproximativă a numărului π şi apoi să se evalueze erorile.

736. *Folosind metoda trapezelor, să se calculeze valoarea aproximativă şi erorile pentru următoarele integrale:*

a) $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^3}$, $n = 12$. **R.** 0,83566.

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \frac{1}{4}\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$, $n = 6$. **R.** 1,4675.

737. *Cu ajutorul formulei lui Simpson să se calculeze valoarea aproximativă a următoarelor integrale:*

a) $\int_1^9 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x$, $n = 4$. **R.** 17,333.

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}\, dx,\ n = 10.$ **R.** 1,37039.

c) $\int_0^1 \frac{x dx}{\ln(1+x)}$. **R.** 0,2288.

738. *Să se calculeze* $\int_0^1 e^{x^2}\, dx$ *cu o aproximaţie de* 0,001.

R. 1,463.

739. *Să se calculeze* $\int_0^1 (e^x - 1) \ln \frac{1}{x}\, dx$ *cu o aproximaţie de* 10^{-4}.

R. 0,3179.

7. ŞIRURI DE FUNCŢII

Fie şirul $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x) \ldots$ de funcţii definite pe un acelaşi interval I cu valori reale.

Şirul $(f_n)_{n\in N}$ de funcţii este *simplu convergent* în intervalul I către funcţia $f : I \to R$ dacă, oricare ar fi $\varepsilon>0$ şi oricare ar fi $x\in I$ există rangul $N(\varepsilon, x)$ astfel încît oricare ar fi $n>N(\varepsilon, x)$ să avem $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$.

Şirul $(f_n)_{n\in N}$ de funcţii $f_n : I\to R$ *converge uniform* în intervalul I către funcţia $f: I\to R$ dacă, oricare ar fi $\varepsilon>0$, există rangul $N(\varepsilon)$ astfel încît oricare ar fi $x\in I$ şi oricare ar fi $n>N(\varepsilon)$ să avem $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Şirul de funcţii $(f_n)_{n\in N}, f_n : I\to R$, *converge uniform* în intervalul I către funcţia $f : I\to R$ dacă şi numai dacă oricare ar fi $\varepsilon>0$, există rangul $N(\varepsilon)$ astfel încît, oricare ar fi $x\in I$ şi oricare ar fi numerele naturale m, n cu $m>N(\varepsilon)$ şi $n>(\varepsilon)$, să avem $|f_n(x)-f_m(x)| <\varepsilon$, oricare ar fi numărul natural p *(criteriul lui Cauchy)*.

Teorema 1. Fie $(f_n)_{n\in N}$ un şir uniform convergent pe mulţimea $A\subset R$ către funcţia f. Dacă toate funcţiile f_n sînt continue într-un punct $a\in A$, atunci şi funcţia limită f este continuă în punctul a.

Teorema 2. Fie I un interval mărginit şi $(f_n)_{n\in N}$ un şir de funcţii derivabile, definite pe I. Dacă:

a) există un punct $x_0\in I$ astfel încît şirul $(f_n(x_0))_{n\in N}$ să fie convergent

b) există o funcţie g definită pe I astfel încît $(f_n')_{n\in N}$ converge uniform pe I către g,

atunci există o funcţie $f : I\to R$, astfel încît:

(i) (f_n) converge uniform către f pe I

(ii) f este derivabilă pe I şi derivata sa pe I este g.

Teorema 3. Dacă (f_n) este un şir de funcţii continue, uniform convergent pe un interval $[a, b]$ către o funcţie f, atunci

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx.$$

740. *Să se arate că șirul de funcții*

$$f_n(x) = x^n(1 - x^n),\ 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

este simplu convergent, însă nu este uniform convergent pe $[0,1]$.

Șirul este convergent. Într-adevăr, dacă $0 \leqslant x < 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$, iar $f_n(1) = 0$ oricare ar fi n. Deci șirul de funcții converge pe segmentul $0 \leqslant x \leqslant 1$ către funcția continuă $f(x) \equiv 0$. Vom arăta că șirul nu este uniform convergent. Dacă șirul ar fi uniform convergent, ar însemna că oricare ar fi $\varepsilon > 0$ există rangul $N(\varepsilon)$, astfel încît oricare ar fi $x \in [0, 1]$ și oricare ar fi $n > N$ să avem $|f_n(x)| < \varepsilon$. Vom arăta că această afirmație nu este exactă. Într-adevăr, fie $\varepsilon = \frac{1}{4}$ și punctul $x_n = \frac{1}{\sqrt[n]{2}}$, n arbitrar; $f_n(x_n) = \frac{1}{4}$ oricare ar fi n. Deci oricare ar fi $\varepsilon < \frac{1}{4}$, inegalitatea $f_n(x) > \varepsilon$ are loc cel puțin într-un punct din intervalul $[0,1]$ oricare ar fi n.

Acest exemplu dovedește că reciproca teoremei 1 enunțate în introducerea capitolului nu este adevărată.

741. *Fie șirul de funcții* $(f_n)_{n\in N}$ *definite în intervalul* I, *continue sau discontinue în acest interval și fie* $a, b \in I$. *Dacă:*

1) *funcțiile* f_n *sînt monotone pe segmentul* $[a, b]$
2) *șirul* (f_n) *converge pe segmentul* $[a, b]$ *către o funcție* f *continuă pe* $[a, b]$,

atunci $(f_n)_{n\in N}$ *converge uniform pe* $[a, b]$ *către* f.

Se verifică ușor că funcția limită f este monotonă pe $[a, b]$. O vom presupune monoton crescătoare. De asemenea este uniform continuă pe $[a, b]$. Rezultă că se poate descompune segmentul $[a, b]$ în segmente $[x_{\nu-1}, x_\nu]$, $\nu = 1, \ldots, n$, $x_1 = a$, $x_n = b$, astfel încît $f(x_\nu) - f(x_{\nu-1}) < \frac{\varepsilon}{2}$.

De asemenea $\varepsilon > 0$ fiind dat, există rangul $N(\varepsilon)$ astfel ca pentru $n > N(\varepsilon)$, să avem

$$f(x_\nu) - \frac{\varepsilon}{2} < f_n(x_\nu) < f(x_\nu) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Fie x un punct arbitrar: $x_{\nu-1} \leqslant x \leqslant x_\nu$. Atunci

$$f(x_\nu) - \frac{\varepsilon}{2} < f_n(x_{\nu-1}) \leqslant f_n(x) \leqslant f_n(x_\nu) < f(x_\nu) + \frac{\varepsilon}{2}$$

și

$$-\varepsilon < f(x_\nu) - f(x) - \frac{\varepsilon}{2} < f_n(x) - f(x) < f(x_\nu) - f(x) + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

sau

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \text{ pentru } n > N(\varepsilon).$$

742. *Fie șirul de funcții* $(f_n(x))_{n\in N}$, $f_n : I \to R$. *Dacă*

1) $|f_n(x) - f(x)| < a_n$ *pentru* $x \in I$
2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$,

atunci șirul $(f_n(x))_{n\in N}$ *converge uniform pe* I *către funcția* $f(x)$.

Într-adevăr, $\lim a_n = 0$ înseamnă că oricare ar fi $\varepsilon > 0$, există rangul $N(\varepsilon)$ astfel încît îndată ce $n > N(\varepsilon)$ să avem $a_n < \varepsilon$.

Deci $|f_n(x) - f(x)| < a_n < \varepsilon$, oricare ar fi $x \in I$, îndată ce $n > N(\varepsilon)$, de unde rezultă convergența uniformă a șirului dat.

743. *Să se arate că șirul*

$f_n(x) = \sqrt{(n^2+1)\sin^2\frac{\pi}{n} + nx} - \sqrt{nx}$, $1 < x < \infty$, *este uniform convergent.*

Avem

$$0 \leqslant f_n(x) \leqslant \frac{(n^2+1)\sin^2\frac{\pi}{n}}{\sqrt{(n^2+1)\sin^2\frac{\pi}{n} + nx} + \sqrt{nx}} < \frac{(n^2+1)\frac{\pi^2}{n^2}}{2\sqrt{n}} <$$

$$< \frac{2\pi^2}{2\sqrt{n}} = \frac{\pi^2}{\sqrt{n}} < \varepsilon,$$

oricare ar fi $x > 1$ și $n > N(\varepsilon) = E\left(\frac{\pi^4}{\varepsilon^2}\right)$ (am ținut seama de inegalitățile $\sin^2\frac{\pi}{n} < \frac{\pi^2}{n}$, $(n^2+1)\sin^2\frac{\pi}{n} > 0$, $x > 1$.

Rezultă în baza exercițiului 742 că șirul dat converge uniform către funcția $f(x) \equiv 0$.

Să se cerceteze convergenta uniformă a următoarelor șiruri:

744. $f_n(x) = \frac{1}{e^{nx}n}$, $0 \leqslant x < \infty$.

Dacă $0 \leqslant x < \infty$, $e^{nx} \geqslant 1$, $0 < f_n(x) < \frac{1}{n} < \varepsilon$, dacă $n > E\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$. Deci şirul dat converge uniform către funcţia $f(x) \equiv 0$.

745. $f_n(x) = \frac{x}{n^2 + x^4}$, $1 \leqslant x < \infty$.

Avem

$$0 < f_n(x) \leqslant \frac{x^2}{n^2 + n^4} = \frac{2nx^2}{n^2 + n^4} \cdot \frac{1}{2n} < \frac{1}{2n} < \varepsilon \text{ dacă } n > E\left(\frac{1}{2\varepsilon}\right)$$

(am ţinut seama de inegalitatea $2nx^2 \leqslant n^2 + x^4$). Rezultă că şirul dat converge uniform către funcţia $f(x) \equiv 0$.

746. $f_n(x) = \frac{x}{x+n}$, $0 < x < \infty$.

Observăm că $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$. Şirul de funcţii considerat nu este însă uniform convergent. Dacă şirul dat ar converge uniform către funcţia $f(x) \equiv 0$, ar însemna că oricare ar fi $\varepsilon > 0$, ar exista rangul $N(\varepsilon)$ astfel încît pentru orice $n > N(\varepsilon)$ să avem $f_n(x) < \varepsilon$, oricare ar fi $x \in (0, \infty)$.

Fie $\varepsilon = \frac{1}{2}$ şi punctul $x_n = n$, $x_n \in (0, \infty)$. Avem $f_n(x_n) = = \frac{1}{2}$, oricare ar fi n. Deci oricare ar fi $\varepsilon < \frac{1}{2}$, inegalitatea $f_n(x) > \varepsilon$ are loc, oricare ar fi n, cel puţin într-un punct $x_n \in (0, \infty)$. Prin urmare şirul considerat nu converge uniform către funcţia $f(x) \equiv 0$.

747. $f(x) = \frac{x}{x+n}$, $3 \leqslant x \leqslant 4$.

Dacă $3 \leqslant x \leqslant 4$, atunci

$$0 < f_n(x) \leqslant \frac{4}{3+n} < \frac{4}{n} < \varepsilon$$

pentru $n > E\left(\frac{4}{\varepsilon}\right)$; deci şirul converge uniform către funcţia $f(x) \equiv 0$.

748. *Să se arate că şirul*

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos kx}{k(k+1)}, \quad -\infty < x < \infty,$$

este uniform convergent şi limita sa este o funcţie continuă.

Aplicînd criteriul lui Cauchy, obţinem

$$|f_n(x) - f_{n+p}(x)| = \left| \frac{\cos(n+1)x}{(n+1)(n+2)} + \frac{\cos(n+2)x}{(n+2)(n+3)} + \dots \right.$$
$$\left. \dots + \frac{\cos(n+p)x}{(n+p)(n+p+1)} \right| < \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \dots$$
$$\dots + \frac{1}{(n+p)(n+p+1)} < \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+p+1} < \frac{1}{n+1} < \varepsilon,$$

dacă $n > E\left(\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\right)$, oricare ar fi $x \in (-\infty, \infty)$.

Funcţiile f_n fiind continue iar şirul fiind uniform convergent, limita şirului este o funcţie continuă.

749. *Să se arate că şirul*

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} 2^k \sin \frac{1}{3^k x}, \quad 0 < x < \infty,$$

nu este uniform convergent.

Dacă şirul ar converge uniform în intervalul considerat, ar însemna că pentru orice $\varepsilon > 0$, există $N(\varepsilon)$, astfel încît pentru orice $x \in (0, \infty)$ şi pentru orice $n > N(\varepsilon)$, să avem $|f_{2n}(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ sau

$$\left| 2^{n+1} \sin \frac{1}{3^{n+1}x} + 2^{n+2} \sin \frac{1}{3^{n+2}x} + \dots + 2^{2n} \sin \frac{1}{3^{2n}x} \right| < \varepsilon.$$

Fie $\varepsilon = \frac{1}{2}$ şi punctul $x_n = \frac{2}{3^{2n+1}\pi} \in (0, \infty)$. Avem

$$\sin \frac{1}{3^{n+1}x_n} = \sin 3^n \frac{\pi}{2} = (-1)^n$$

$$\sin \frac{1}{3^{n+2}x_n} = \sin 3^{n-1} \frac{\pi}{2} = (-1)^{n-1}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\sin \frac{1}{3^{2n}x_n} = \sin 3\frac{\pi}{2} = -1.$$

Deci

$$|f_{2n}(x_n) - f_n(x_n)| = |2^{n+1}(-1)^n + 2^{n+2}(-1)^{n-1} +$$

$$+ \ldots + 2^{2n}(-1)^1| = 2^{n+1}|1 - 2 + 4 + \ldots + (-1)^{n-1}2^{n-1}| > \frac{1}{2}$$

oricare ar fi n.

750. *În cele ce urmează dăm un exemplu de funcție continuă pe întreaga axă reală care nu are derivată în nici un punct. Exemplul*) se datorește lui Weierstrass.*

Să se arate că șirul

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} b^k \cos(a^k \pi x), \; -\infty < x < \infty, \; 0 < b < 1,$$

(a număr natural impar) este convergent și are ca limită funcția $f(x)$ care

a) *este continuă*

b) *nu este derivabilă în nici un punct dacă* $ab > 1 + \frac{3\pi}{2}$.

a) Avem

$$|f_{n+p} - f_n(x)| = |b^{n+1}\cos(a^{n+1}\pi x) + b^{n+2}\cos(a^{n+2}\pi x) +$$

$$+ \ldots + b^{n+p}\cos(a^{n+p}\pi x)| \leqslant b^{n+1} + b^{n+2} + \ldots + b^{n+p} =$$

$$= b^{n+1}(1 + b + \ldots + b^{p-1}) < \frac{b^{n+1}}{1-b} < \varepsilon,$$

dacă $n > E\left(\frac{\ln \varepsilon(1-b)}{\ln b} - 1\right)$, oricare ar fi $x \in (-\infty, \infty)$.

Șirul de funcții continue $(f_n)_{n \in N}$ fiind uniform convergent, el converge către o funcție continuă, fie aceasta $f(x)$, $-\infty < x < \infty$.

b) Să considerăm raportul

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

unde

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} b^k \cos(a^k \pi x),$$

$$f(x+h) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{b} b^k \cos[a^k \pi(x+h)].$$

*) Exemplul este reprodus după acad. *Miron Nicolescu*, Analiză matematică, vol. II, Editura Tehnică, București, 1958, p. 360.

Deducem

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} b^k[\cos a^k\pi(x+h) - \cos a^k \pi x]}{h}.$$

Fie $n > m$, unde m este un număr natural dat. Avem

$$\sum_{k=1}^{n} b^k[\cos a^k \pi(x+h) - \cos a^k \pi x] =$$

$$= \sum_{k=0}^{m-1} b^k[\cos a^k \pi(x+h) - \cos a^k \pi x] +$$

$$+ \sum_{k=m}^{n} b^k[\cos a^k \pi(x+h) - \cos a^k \pi x].$$

Deci

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = S_m(x) + R_m(x), \text{ unde am notat:}$$

$$S_m(x) = \frac{1}{h}\sum_{k=0}^{m-1} b^k[\cos a^k \pi(x+h) - \cos a^k \pi x].$$

$$R_m(x) = \frac{1}{h}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=m}^{n} b^k[\cos a^k \pi(x+h) - \cos a^k \pi x].$$

Deducem

$$|\cos a^n \pi(x+h) - \cos a^n \pi x| = 2\left|\sin\frac{a^n \pi h}{2}\cos a^n \pi\frac{2x+h}{2}\right| \leqslant$$

$$\leqslant a^n \pi |h|.$$

Prin urmare

$$|S_m(x)| \leqslant \pi \sum_{k=0}^{m-1} a^k b^k = \pi\frac{a^m b^m - 1}{ab - 1} < \pi\frac{a^m b^m}{ab - 1}.$$

Fie α_m întregul cel mai apropiat de $a^m x$. Rezultă $a^m x = \alpha_m + \xi_m$, unde $|\xi_m| \leqslant \frac{1}{2}$. Luăm $h = \frac{l_m - \xi_m}{a^m}$, cu $l_m = \pm 1$.

Evident, h are semnul lui l_m și $|h| < \frac{3}{2a^m}$.

Apoi

$$a^n \pi(x+h) = a^{n-m} a^m(x+h)\pi = a^{n-m}\pi(\alpha_m + l_m).$$

Produsul $a^{n-m}(\alpha_m + l_m)$ are paritatea lui $\alpha_m + 1$, deci

$$\cos a^n \pi(x+h) = (-1)^{\alpha_m+1}.$$

De asemenea, ţinînd seama că $a^{n-m}\alpha_m$ este de aceeaşi paritate cu α_m, din şirul de egalităţi

$$\cos a^n \pi x = \cos (a^{n-m} a^m \pi x) = \cos a^{n-m} \pi(\xi_m + \alpha_m) =$$

$$= \cos (a^{n-m} \alpha_m \pi) \cos (a^{n-m} \xi_m \pi),$$

deducem

$$\cos (a^n \pi x) = (-1)^{\alpha_m} \cos (a^{n-m} \xi_m \pi).$$

În definitiv,

$$R_m(x) = \frac{(-1)^{\alpha_m+1}}{h} \sum_m^{\infty} b^k[1 + \cos (a^{k-m} \xi_m \pi)],$$

de unde

$$|R_m(x)| > \frac{b^m}{h} > \frac{2}{3} a^m b^m.$$

Deci

$$\left|\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right| > |R_m| - |S_m| > \frac{2}{3} a^m b^m \frac{ab - 1 - \frac{3\pi}{2}}{ab - 1}.$$

Evident, dacă $ab > 1 + \frac{3\pi}{2}$, membrul întîi tinde către infinit.

751. *Să se arate că şirul*

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kx}{k^3}, \; -\infty < x < \infty,$$

este convergent, iar limita sa este o funcţie continuă cu derivata continuă.

Şirul $(f_n)_{n\in N}$ de funcţii continue converge uniform pe $(-\infty, \infty)$. Într-adevăr,

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| = \left|\frac{\sin (n+1) x}{(n+1)^3} + \frac{\sin (n+2) x}{(n+2)^3} + \ldots\right.$$

$$\left.\ldots + \frac{\sin (n+p) x}{(n+p)^3}\right| \leqslant \frac{1}{(n+1)^3} + \frac{1}{(n+2)^3} + \ldots + \frac{1}{(n+p)^3} + \ldots$$

Însă

$$\frac{1}{(n+k)^3} < \frac{1}{(n+k)^2} < \frac{1}{(n+k-1)(n+k)} = \frac{1}{n+k-1} - \frac{1}{n+k}.$$

Deci

$$\left|f_{n+p}(x) - f_n(x)\right| < \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n} < \varepsilon \text{ pentru } n > N\left(\frac{1}{\varepsilon}\right).$$

Aşadar şirul de funcţii continue $(f_n)_{n\in N}$ converge uniform. Fie f limita şirului. Funcţia f este continuă.

Analog se arată că şirul

$$f_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos kx}{k^2}$$

este uniform convergent, deci

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos kx}{k^2}.$$

752. *Să se arate că şirul*

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \operatorname{arctg} x^n$$

converge uniform dar

$$[\lim_{n\to\infty} f_n(x)]'_{x=1} \neq \lim_{n\to\infty} f_n'(1).$$

Din inegalitatea

$$|f_n(x)| = \left|\frac{1}{n} \operatorname{arctg} x^n\right| < \frac{\pi}{2n} < \varepsilon, \text{ dacă } n > E\left(\frac{\pi}{2\varepsilon}\right),$$

deducem că şirul de funcţii dat converge uniform pe $(-\infty, \infty)$ către funcţia $f(x) \equiv 0$; deci şi $[\lim_{n\to\infty} f_n(x)]' = 0$. Pe de altă parte $f_n'(1) = \frac{1}{2}$, prin urmare $\lim_{n\to\infty} f_n'(1) = \frac{1}{2}$.

Rezultatul obţinut se datoreşte faptului că şirul derivatelor nu converge uniform pe $(-\infty, \infty)$ către $\frac{1}{2}$ (propunem cititorului verificarea acestei afirmaţii).

753. *Să se arate că şirul*

$$f_n(x) = nx\, e^{-nx^2},\ 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

converge, însă

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x \neq \int_0^1 \lim_{n\to 1} f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

Evident, şirul converge către funcţia $f(x) \equiv 0,\ x \in [0, 1]$. De asemenea

$$\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 nx\, e^{-nx^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}e^{-nx^2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2e^n};$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \text{ şi } \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Rezultatul se explică prin faptul că şirul nu este uniform convergent.

Într-adevăr, fie $\varepsilon = \frac{1}{4}$ şi punctul $x_n = \frac{1}{n}$; funcţia $f_n(x_n) = e^{-\frac{1}{n}} \to 1$. Deci începînd de la rangul $N(\varepsilon)$ toţi termenii şirului verifică inegalitatea

$$1 - \frac{1}{4} < f_n(x) < 1 + \frac{1}{4}.$$

754. *Să se arate că şirul*

$$f_n(x) = \frac{nx}{1 + n^2 x^2},\ 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

converge neuniform pe $[0,1]$, *însă*

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

Avem

$$\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2n}\int_0^1 \frac{2n^2 x}{1 + n^2 x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\ln(1 + n^2 x^2)}{2n}\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{\ln(1 + n^2)}{2n} \text{ şi } \lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = 0;$$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \text{ şi } \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Lăsăm pe seama cititorului verificarea convergenţei neuniforme a şirului.

Exerciţii propuse spre rezolvare

755. *Să se arate că şirul*

$$f_n(x) = \frac{x^n}{1 + x^{2n}},\ 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

converge către o funcţie continuă, dar nu este uniform convergent.

756. *Să se arate că şirul de funcţii*

$$f_n(x) = \frac{x^n}{(1 + x^{2n})^n},\ 1 \leqslant x \leqslant \infty$$

?

este uniform convergent.

757. *Să se arate că şirul de funcţii*

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{e^{kx}}{k},\ 0 \leqslant x < \infty$$

nu este uniform convergent.

758. *Să se găsească exemple de şiruri* $(f_n)_{n\in N}$ *de funcţii discontinue care să conveargă uniform către o funcţie continuă.*

759. *Să se arate că şirul*

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{n^2}{\sqrt{n!}}[x^k + x^{-k}],\ \frac{1}{2} \leqslant |x| \leqslant 2,$$

converge uniform.

760. *Fie* $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$ *mulţimea numerelor raţionale de pe segmentul* $[0, 1]$ *şi fie şirul de funcţii* $(f_n)_{n\in N}$, $f_n\colon [0, 1] \to R$, *definit în modul următor*

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{pentru } x = r_k,\ k = 1, 2, \ldots, n \\ 0, & \text{pentru } x \neq r_k,\ k \neq 1, 2, \ldots, n. \end{cases}$$

Să se arate că şirul nu converge uniform către limita sa. Este integrabilă funcţia limită a şirului?

761. *Să se calculeze* $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$, *dacă*

$$f_n(x) = x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^{n+1}}{n + 1},\ 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}.$$

Pe baza rezultatului obținut, să se calculeze

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 2^2}+\frac{1}{3\cdot 2^3}+\ldots+\frac{1}{(n+1)2^{n+1}}\right).$$

R. $\ln\frac{1}{1-x}$; $\ln 2$.

762. *Să se arate că șirul*

$$f_n(x) = nx(1-x),\ x \in [0, 1],\ n = 1, 2, \ldots$$

converge neuniform pe $[0,1]$, *însă*

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

8. FUNCȚII DE MAI MULTE VARIABILE

8.1. Inegalități în două variabile

Exerciții rezolvate

763. *Să se figureze mulțimea punctelor din plan care satisfac următoarele relații:*

a) $|x-1| \leqslant 1,\ |y| \leqslant 1.$

Inegalitățile date se mai pot scrie astfel

$$\begin{aligned}-1 &\leqslant x-1 \leqslant 1\\ -1 &\leqslant y \leqslant 1\end{aligned}\quad \text{sau} \quad \begin{aligned}0 &\leqslant x \leqslant 2\\ -1 &\leqslant y \leqslant 1.\end{aligned}$$

Ele sînt satisfăcute în punctele situate în interiorul și pe frontiera pătratului hașurat din fig. 43.

b) $|x-1| + |y| = 1.$

Dacă $x > 1$, $y > 0$, atunci $|x-1| = x-1$, $|y| = y$ și egalitatea se scrie $x - 1 + y = 1$ sau $x + y = 2$.

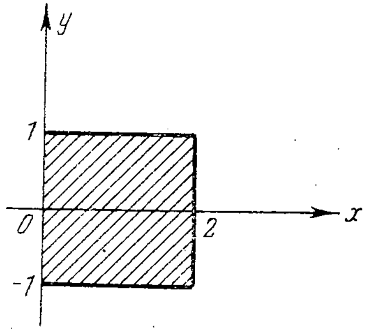

Fig. 43

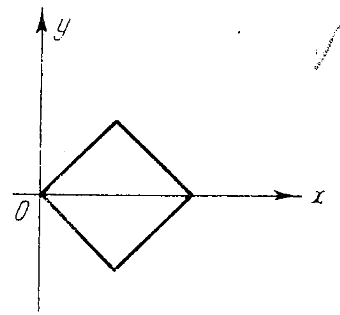

Fig. 44

Dacă $x > 1$, $y < 0$, atunci $|x - 1| = x - 1$, $|y| = -y$ şi egalitatea se scrie $x - 1 - y = 1$ sau $x - y = 2$.

Dacă $x < 1$, $y > 0$ atunci $|x - 1| = 1 - x$, $|y| = y$ şi avem $1 - x + y = 1$ sau $x = y$.

Dacă $x < 1$, $y < 0$, atunci $|x - 1| = 1 - x$, $|y| = -y$ şi egalitatea se scrie

$$1 - x - y = 1 \text{ sau } x = -y.$$

Reunind cazurile enumerate se deduce că relaţia $|x - 1| + |y| = 1$ are loc pe conturul pătratului din fig. 44.

c) $\dfrac{|y-1|}{|x|} > 3$, $x \neq 0$.

Dacă $x > 0$, $y > 1$, inegalitatea devine $\dfrac{y-1}{x} > 3$ sau $y > 3x + 1$.

În cazul $x > 0$, $y < 1$, avem $\dfrac{1-y}{x} > 3$ sau $y < 1 - 3x$.

Dacă $x < 0$, $y > 1$, avem $\dfrac{y-1}{-x} > 3$ sau $y - 3x > 1$.

În sfîrşit, cazul $x < 0$, $y < 1$ ne conduce la inegalitatea $\dfrac{1-y}{-x} > 3$ sau $y < 1 + 3x$. Figurînd regiunile obţinute în cazurile enunţate, deducem că mulţimea punctelor care satisfac inegalitatea se găsesc în porţiunea haşurată din fig. 45, fără axa Oy.

d) $E\left(\dfrac{y}{x^2}\right) = 1$, $x \neq 0$.

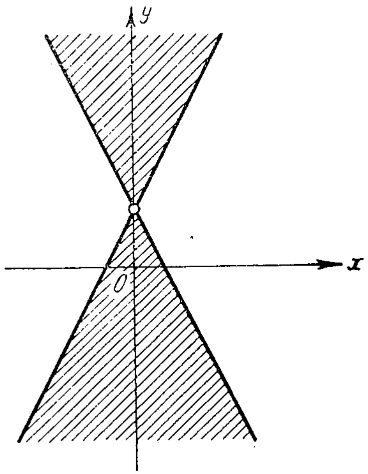

Fig. 45

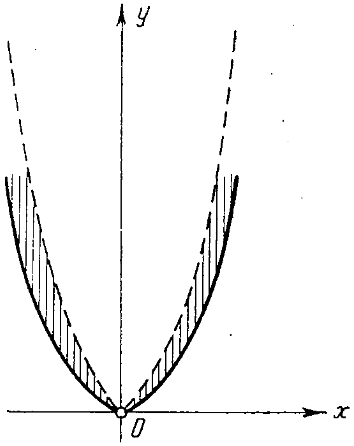

Fig. 46

Conform definiţiei, $E\left(\dfrac{y}{x^2}\right) = 1$, dacă $1 \leqslant \dfrac{y}{x^2} < 2$ sau $x^2 \leqslant y < 2x^2$. Aceste inegalităţi sînt satisfăcute de mulţimea punctelor situate între parabolele care au ecuaţiile $y = x^2$, $y = 2x^2$ şi pe prima parabolă, exceptînd originea (fig. 46).

e) $E(x + y) = 0$.

Ţinînd seama de definiţie, $E(x + y) = 0$ dacă $0 \leqslant x + y < 1$. Inegalitatea $x + y < 1$ este satisfăcută de mulţimea punctelor situate dedesubtul dreptei care are ecuaţia $x + y = 1$, iar inegalitatea $x + y \geqslant 0$ este satisfăcută de mulţimea punctelor situate deasupra bisectoarei de ecuaţie $y = -x$ şi pe bisectoare. Intersecţia celor două mulţimi este porţiunea haşurată din fig. 47.

f) $E\left(\dfrac{y}{x}\right) = 3$, $x \neq 0$.

Egalitatea $E\left(\dfrac{y}{x}\right) = 3$ este echivalentă cu $3 \leqslant \dfrac{y}{x} < 4$, $x = 0$. Dacă $x > 0$, înmulţind inegalitatea cu x obţinem $3x \leqslant y < 4x$. Dacă $x < 0$, prin înmulţire sensul inegalităţii se schimbă şi deducem $4x < y \leqslant 3x$. Figurînd în plan mulţimile obţinute, obţinem porţiunea haşurată din fig. 48 (exceptînd originea).

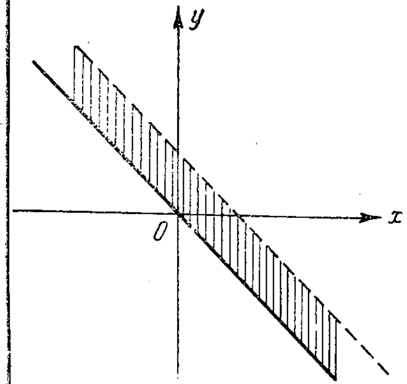

Fig. 47

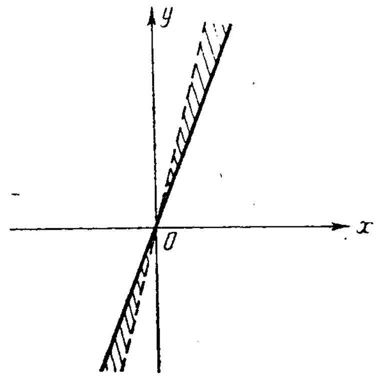

Fig. 48

Exerciţii propuse spre rezolvare

764. *Să se figureze mulţimea punctelor din plan care satisfac următoarele inegalităţi:*

a) $x^2 + y^2 \leqslant 4$, $y \geqslant x^2$.

b) $y \geqslant |x|$, $y \leqslant 1$.

c) $|x| \geqslant 1,\ |y| \geqslant 1,\ |x| \leqslant 2,\ |y| \leqslant 2.$

d) $\left|\dfrac{y}{x}\right| \geqslant 1,\ |y| \leqslant 1,\ x \neq 0.$

e) $y \leqslant x^2,\ |x| \leqslant 2.$

f) $E\left(\dfrac{3y}{4x}\right) = 2,\ x \neq 0.$

g) $E(x^2 + y^2) = 2,\ y^2 \leqslant x.$

h) $E(x^2 + 4y^2) = 2.$

8.2. Limite. Continuitate

Fie mulțimea $E \subset R^n$, $x_0(x_0^1, x_0^2, \ldots, x_0^n)$ un punct de acumulare pentru E și funcția reală $f : E \to R$.

Se spune că l (număr finit sau infinit) este *limita* funcției f în punctul $x_0(x_0^1, x_0^2, \ldots, x_0^n)$, dacă pentru orice vecinătate U a lui l (în R) există o vecinătate V a lui x_0 (în R^n), astfel încît oricare ar fi $x(x^1, x^2, \ldots, x^n) \in V \subset E$, $x \neq x_0$, să avem $f(x) \in U$. Scriem

$$l = \lim_{x \to x_0} f(x) \text{ (sau } f(x) \to l \text{ cînd } x \to x_0).$$

Propozițiile următoare dau definiții echivalente ale limitei:

1) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ dacă și numai dacă pentru orice șir $x_k(x_k^1, x_k^2, \ldots, x_k^n) \to x_0$, $x_k \in E$, $x_k \neq x_0$, avem $f(x_k) \to l$.

2) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ dacă și numai dacă pentru orice număr $\varepsilon > 0$ există un număr $\delta(\varepsilon) > 0$, astfel încît oricare ar fi $x(x^1, x^2, \ldots, x^n) \in E$, $x \neq x_0$, cu $\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} (x^i - x_0^i)^2} < \delta(\varepsilon)$, să avem $|f(x) - l| < \varepsilon$.

Pentru o funcție de două variabile $f(x,y)$, limita sa în punctul (x_0, y_0) se scrie $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = l$. Se spune că aceasta este limita funcției cînd x și y tind independent (dar simultan) către x_0 respectiv y_0. În acest caz, propoziția (2) se poate transcrie astfel: $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = l$ dacă și numai dacă, pentru orice număr $\varepsilon > 0$ există un număr $\delta(\varepsilon)$, astfel încît oricare ar fi $(x, y) \neq (x_0, y_0)$ din E cu $|x - x_0| < \delta(\varepsilon)$ și $|y - y_0| < \delta(\varepsilon)$ să avem $|f(x, y) - l| < \varepsilon$.

Fie funcția $f : E \to R^1$, $E \subset R^n$ și x_0 un punct din E.

Se spune că funcția f este *continuă* în punctul x_0 dacă pentru orice vecinătate U a lui $f(x_0)$ există o vecinătate V a lui x_0, astfel încît oricare ar fi $x \in V \cap E$, să avem $f(x) \in U$.

Următoarele propoziții dau definiții echivalente ale continuității:

1) funcția f este continuă în punctul x_0 dacă și numai dacă pentru orice șir $x_p \to x_0$, $x_p \in E$, avem $f(x_p) \to f(x_0)$;

2) funcția f este continuă în x_0 dacă și numai dacă pentru orice număr $\varepsilon > 0$ există un număr $\delta(\varepsilon) > 0$, astfel încît oricare ar fi $x \in E$ cu $\sqrt{\sum (x^i - x_0^i)^2} < \delta(\varepsilon)$, să avem $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$;

3) funcția f este continuă în punctul $x_0(x_0^1, x_0^2, \ldots, x_0^n) \in E$ dacă și numai dacă pentru orice număr $\varepsilon > 0$ există un număr $\delta(\varepsilon) > 0$, astfel încît oricare ar fi punctul $x(x^1, x^2, \ldots, x^n) \in E$ cu $|x^1 - x_0^1| < \delta$, $|x^2 - x_0^2| < \delta, \ldots, |x^n - x_0^n| < \delta$ să avem

$$|f(x^1, x^2, \ldots, x^n) - f(x_0^1, x_0^2, \ldots, x_0^n)| < \varepsilon.$$

Exerciții rezolvate

Folosind definiția să se demonstreze că:

765. $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ y \to 4}} (2x + 3y) = 16.$

Vom arăta că pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta(\varepsilon)$, astfel ca pentru orice x și y care satisfac inegalitățile $|x - 2| < \delta(\varepsilon)$, $|y - 4| < \delta(\varepsilon)$ să avem $|16 - 2x - 3y| < \varepsilon$.

Într-adevăr, avem

$$|16 - 2x - 3y| = |4 - 2x + 12 - 3y| \leqslant |4 - 2x| + |12 - 3y| = 2|2 - x| + 3|4 - y|.$$

Fie $\varepsilon > 0$ un număr arbitrar. Luînd $\delta(\varepsilon) = \dfrac{\varepsilon}{6}$ pentru orice x și y care satisfac inegalitățile $|2 - x| < \dfrac{\varepsilon}{6}$, $|4 - y| < \dfrac{\varepsilon}{6}$, deducem $|16 - 2x - 3y| < 2\dfrac{\varepsilon}{6} + 3\dfrac{\varepsilon}{6} = \dfrac{5\varepsilon}{6} < \varepsilon$.

766. $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 2}} \frac{x}{y} = 1.$

Avem

$$\left|\frac{x}{y} - 1\right| = \left|\frac{x-y}{y}\right| = \frac{1}{|y|}[|x-2-(y-2)|] <$$
$$< \frac{1}{|y|}(|x-2| + |y-2|).$$

Fie $\varepsilon > 0$ arbitrar și δ un număr supus condiției de a fi mai mic decît 1 și decît $\frac{\varepsilon}{2}$. Din inegalitatea $|y-2| < \delta < 1$ obținem $1 < y < 3$ sau $|y| > 1$, de unde $\frac{1}{|y|} < 1$. Deci $\left|\frac{x}{y} - 1\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$ pentru orice x și y care satisfac inegalitățile $|x-2| < \delta$, $|y-2| < \delta$.

767. $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ y\to\infty}} \frac{xy-1}{y+1} = 3.$

Vom arăta că pentru orice $\varepsilon > 0$, există $\delta(\varepsilon)$ și există $M(\varepsilon)$, astfel ca oricare ar fi x și y verificînd relațiile $|x-3| < \delta$, $|y| > M$ să avem $\left|\frac{xy-1}{y+1} - 3\right| < \varepsilon$.

Însă

$$\left|\frac{xy-1}{y+1} - 3\right| = \left|\frac{y(x-3)-4}{y+1}\right| \leqslant \frac{|y||x-3|}{|y+1|} + \frac{4}{|y+1|}.$$

Dacă $y > 0$, atunci $\frac{|y|}{|y+1|} = \frac{y}{y+1} < 1$ și $\frac{1}{|y+1|} =$

$$= \frac{1}{y+1} < \frac{1}{y}.$$

Deci

$$\left|\frac{xy-1}{y+1} - 3\right| < |x+3| + \frac{4}{y}.$$

Așadar fiind dat $\varepsilon > 0$ arbitrar, este suficient să alegem $\delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{5}$, $M(\varepsilon) = \frac{5}{\varepsilon}$ pentru ca din inegalitățile $|x-3| < \frac{\varepsilon}{5}$, $|y| > \frac{5}{\varepsilon} = M$ să rezulte

$$\left|\frac{xy-1}{y+1} - 3\right| < \frac{\varepsilon}{5} + \frac{4\varepsilon}{5} = \varepsilon.$$

768. *Să se arate că funcția*

$$f(x, y) = \frac{x+y}{x-y}$$

definită pentru $x \neq y$ nu are limită în origine.

Vom arăta că pentru șiruri diferite $P_n(x_n, y_n) \to 0(0, 0)$, $x_n \neq y_n$, obținem limite diferite.

Fie șirul $P_n\left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right)$. Observăm că punctele $P_n\left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right)$ sînt situate pe dreapta de ecuație $y = 2x$ și $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = 0(0, 0)$. Avem $f(x_n, y_n) = 3$, oricare ar fi n, deci și $\lim f(x_n, y_n) = 3$.

Fie acum șirul $P_n\left(\frac{1}{n}, -\frac{1}{n}\right)$. Punctele P_n sînt situate pe dreapta de ecuație $y = -x$. Oricare ar fi n, $f(x_n, y_n) = 0$, deci și $\lim f(x_n, y_n) = 0$.

O b s e r v a ț i e. Putem arăta că oricare ar fi numărul real k, există un șir $P_n(x_n, y_n)$, astfel ca $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = k$.

Pentru aceasta se consideră șirul $P_n\left(\frac{1}{n}, \frac{\alpha}{n}\right)$ și se determină constanta $\alpha \neq 1$ astfel încît $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}, \frac{\alpha}{n}\right) = k$. Însă oricare ar fi n, $f\left(\frac{1}{n}, \frac{\alpha}{n}\right) = \frac{1+\alpha}{\alpha-1}$ și condiția

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}, \frac{\alpha}{n}\right) = k$$

este echivalentă cu $\frac{1+\alpha}{1-\alpha} = k$, de unde $\alpha = \frac{k-1}{k+1}$. Obținem astfel șirul de puncte $P_n\left(\frac{1}{n}, \frac{k-1}{k+1} \cdot \frac{1}{n}\right)$ situate pe dreapta de ecuație $y = \frac{k-1}{k+1}x$, astfel ca $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = k$.

769. *Să se arate că funcția $f(x, y) = \frac{y^2+2x}{y^2-2x}$ definită pentru $y^2 \neq 2x$ nu are limită în origine.*

Ca și în exercițiul 768 vom arăta că pentru șiruri diferite $P_n(x_n, y_n)$, astfel ca $\lim\limits_{n\to\infty} P_n(x_n, y_n) = 0\ (0, 0)$, obținem limite diferite.

Fie șirul $P_n\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ ale cărui puncte sînt situate pe parabola de ecuație $y^2 = x$. Evident, $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = 0(0,0)$ și $f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = -3$ oricare ar fi n. Deci $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = -3$.

Dacă însă considerăm şirul $P_n\left(\frac{1}{n}, \frac{2}{\sqrt{n}}\right)$, ale cărui puncte sînt situate pe parabola de ecuaţie $y^2 = 4x$, obţinem $f\left(\frac{1}{n}, \frac{2}{\sqrt{n}}\right) = 3$ oricare ar fi n, deci $\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}, \frac{2}{\sqrt{n}}\right) = 3$.

770. *Să se demonstreze că* $\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y) = 0$, *dacă* $f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{|x| + |y|}$, $|x| + |y| \neq 0$.

Ţinem seama de inegalităţile

$$0 < \frac{x^2 + y^2}{|x| + |y|} < \frac{x^2 + y^2 + 2|x||y|}{|x| + |y|} = \frac{(|x| + |y|)^2}{|x| + |y|} < |x| + |y|.$$

Deoarece $\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (|x| + |y|) = 0$, atunci şi $\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2 + y^2}{|x| + |y|} = 0$.

771. *Să se calculeze*

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy}{\sqrt{xy + 1} - 1}.$$

Sîntem în cazul de excepţie $\frac{0}{0}$. Transformăm funcţia, a cărei limită vrem s-o calculăm, astfel

$$\frac{xy}{\sqrt{xy + 1} - 1} = xy\,\frac{(\sqrt{xy + 1} + 1)}{xy}.$$

Obţinem

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy}{\sqrt{xy + 1} - 1} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (\sqrt{xy + 1} + 1) = 2.$$

772. $\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}} \frac{\sin xy}{x}$.

Avem $\frac{\sin xy}{x} = \frac{\sin xy}{xy}\, y$. Ţinînd seama că $\lim_{x\to 0} \frac{\sin xy}{xy} = 1$, obţinem $\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}} \frac{\sin xy}{x} = 2$.

773. *Să se arate că funcţia*

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y^3}{x^2 + y^2}, & \text{dacă } x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & \text{dacă } x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

este continuă în tot planul.

Aplicînd teoremele generale, observăm că funcţia este continuă în orice punct în care $x^2 + y^2 \neq 0$, adică în orice punct diferit de origine. Rămîne de verificat numai continuitatea în origine, ceea ce revine la a arăta că

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2 y^3}{x^2 + y^2} = 0.$$

Într-adevăr, avem $\left|\frac{x^2 y^3}{x^2 + y^2}\right| = \frac{|x|\,|y|}{x^2 + y^2}\,|x|\,y^2$. Dezvoltînd inegalitatea $(|x| - |y|)^2 \geqslant 0$, obţinem $x^2 + y^2 \geqslant 2|x||y|$. Deci

$$\left|\frac{x^2 y^3}{x^2 + y^2}\right| = \frac{2|x|\,|y|}{x^2 + y^2}\cdot\frac{1}{2}\,|x|\,y^2 < \frac{1}{2}\,|x|\,y^2.$$

Deoarece

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{1}{2}\,|x|\,y^2 = 0, \text{ rezultă că } \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \left|\frac{x^2 y^3}{x^2 + y^2}\right| = 0, \text{ deci}$$

$$\text{şi } \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2 y^3}{x^2 + y^2} = 0.$$

774. *Să se arate că funcţia*

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x^3 + y^3)}{x^2 + y^2}, & \textit{dacă } x^2 + y^2 \neq 0. \\ 0, & \textit{dacă } x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

este continuă în origine

Să arătăm că $\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = 0$, adică

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\sin(x^3 + y^3)}{x^2 + y^2} = 0.$$

Dacă $x^3 + y^3 = 0$, ceea ce are loc numai dacă $x + y = 0$, atunci $\sin(x^3 + y^3) = 0$, deci $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2} = 0$.

Dacă $x^3 + y^3 \neq 0$, putem scrie

$$\frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2} = \frac{\sin(x^3+y^3)}{x^3+y^3}\cdot\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}.$$

Însă

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\sin(x^3+y^3)}{x^3+y^3} = 1, \quad \left|\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\right| \leqslant \frac{|x^3|+|y^3|}{x^2+y^2} =$$

$$= \frac{(|x|+|y|)(x^2+y^2-|x||y|)}{x^2+y^2}.$$

Ținînd seama de inegalitățile $-|x||y| < |x||y| < 2|x||y| < x^2+y^2$, avem $\frac{|x^3|+|y^3|}{x^2+y^2} < 2(|x|+|y|)$; deci $\left|\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\right| < 2(|x|+|y|)$.

Deoarece $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(|x|+|y|) = 0$, rezultă că $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = 0$ și prin urmare $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = 0$.

Așadar $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2} = 0$.

Exerciții propuse spre rezolvare

Folosind definiția să se arate că:

775. $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 4}} (2xy + x) = 18$.

776. $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}} \frac{x^2}{y} = \frac{1}{2}$.

777. $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 2}} \frac{x^2}{xy+1} = \frac{4}{5}$.

Să se cerceteze existența limitei pentru următoarele funcții în punctul specificat în dreptul fiecăreia.

778. $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ *în punctul* $O(0,0)$. **R.** Nu există.

779. $f(x, y) = \frac{x^2y^2}{x^4 + y^4}$ *în punctul* $O(0,0)$. **R.** Nu există.

780. $f(x, y) = \frac{x^2y^3}{x^4 + y^4}$ *în punctul* $O(0,0)$.

R. Există și este egală cu zero.

781. $f(x, y) = \frac{(x+y)\operatorname{tg}(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}$ în punctul $O(0,0)$.

R. Există și este egală cu zero.

Să se cerceteze continuitatea următoarelor funcții:

782. $f(x, y) = \begin{cases} \frac{1-\sqrt{1-x^2-y^2}}{x^2+y^2}, & \textit{dacă } x^2+y^2 \neq 0,\\ 0, & \textit{dacă } x^2+y^2 = 0.\end{cases}$

R. Nu este continuă.

783. $f(x, y) = \begin{cases} \frac{1-\cos(x^3+y^3)}{x^2+y^2}, & \textit{dacă } x^2+y^2 \neq 0,\\ 0, & \textit{dacă } x^2+y^2 = 0.\end{cases}$

R. Este continuă.

784. $f(x, y) = \begin{cases} (1+xy)^{\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}}, & \textit{dacă } x > 0 \textit{ și } y > 0,\\ 1, & \textit{dacă } x = 0 \textit{ sau } y = 0.\end{cases}$

R. Este continuă.

8.3. Derivate parțiale. Diferențiale

Fie $f(x, y)$ o funcție reală de două variabile, definită pe o mulțime $E \subset R^2$ și fie (x_0, y_0) un punct interior mulțimii E.

Funcția $f(x, y)$ are în punctul (x_0, y_0) derivată parțială în raport cu variabila x, dacă există

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x, y) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}$$

și aceasta este finită. Limita însăși se numește *derivata parțială* în raport cu x a funcției $f(x, y)$ în punctul (x_0, y_0) și se notează $f'_x(x_0, y_0)$ sau $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}$.

Se definește în mod asemănător derivata parțială în raport cu y a funcției $f(x, y)$ în punctul (x_0, y_0), notată $f'_y(x_0, y_0)$ sau $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}$.

Funcția $f(x, y)$ are derivată parțială în raport cu x (respectiv cu y) pe o mulțime $A \supset E$, dacă are derivată parțială în raport cu x (respectiv cu y) în fiecare punct $(x, y) \in A$.

Funcția $f(x, y)$ este diferențiabilă în punctul (x_0, y_0) dacă există două numere reale λ și μ și o funcție $\omega(x,y)$ definită pe E, continuă în (x_0, y_0) și nulă în acest punct:

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} \omega(x, y) = \omega(x_0, y_0) = 0,$$

astfel încît pentru orice punct $(x, y) \in E$ să avem egalitatea $f(x, y) - f(x_0, y_0) = \lambda(x - x_0) + \mu(y - y_0) + \omega(x, y)\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$.

Proprietăți. 1) Dacă funcția f este diferențiabilă în punctul (x_0, y_0), atunci ea are derivate parțiale în (x_0, y_0) și

$$f'_x(x_0,y_0) = \lambda, \quad f'_y(x_0, y_0) = \mu.$$

Egalitatea de definiție a diferențiabilității se scrie

$$f(x,y) - f(x_0,y_0) = f'_x(x_0,y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0,y_0)(y - y_0) + \omega(x, y)\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}.$$

2) Dacă funcția f este diferențiabilă în (x_0, y_0), atunci ea este continuă în acest punct.

3) Dacă funcția f are derivate parțiale f'_x și f'_y într-o vecinătate V a lui (x_0, y_0) și dacă aceste derivate parțiale sînt continue în (x_0, y_0), atunci funcția f este diferențiabilă în (x_0, y_0).

Funcția liniară de două variabile $f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0,y_0)(y - y_0)$ se numește *diferențiala* funcției $f(x,y)$ în punctul (x_0, y_0) și se notează

$$df(x_0, y_0, x, y) = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Relația de aproximare a creșterii funcției se scrie

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) \approx df(x_0, y_0, x, y).$$

Diferențiala funcției f se mai notează

$$\boxed{df(x, y) = f'_x(x, y)\,dx + f'_y(x, y)\,dy.}$$

Dacă există derivatele parțiale ale funcțiilor f'_x și f'_y, ele se numesc derivate parțiale de ordinul al doilea și se notează astfel

$$\begin{cases} f''_{x^2} = (f'_x)'_x = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \\ f''_{xy} = (f'_x)'_y = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \\ f''_{yx} = (f'_y)'_x = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \\ f''_{y^2} = (f'_y)'_y = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}. \end{cases}$$

Următoarele două criterii dau condiții suficiente pentru egalitatea derivatelor parțiale mixte:

Criteriul lui Schwarz. Dacă funcția $f(x,y)$ are derivate parțiale mixte de ordinul al doilea f''_{xy} și f''_{yx} într-o vecinătate V a unui punct $(x_0, y_0) \in E$ și dacă f''_{yx} și f''_{xy} sînt continue în (x_0, y_0), atunci

$$f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0).$$

Criteriul lui Young. Dacă funcția f are derivate parțiale de ordinul întîi f'_x și f'_y într-o vecinătate V a lui (x_0,y_0) și dacă f'_x și f'_y sînt diferențiabile în (x_0, y_0), atunci derivatele parțiale mixte de ordinul al doilea există în (x_0, y_0) și sînt egale în acest punct:

$$f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0).$$

Fie $E \subset R^n$ și $F \subset R^m$. Dacă $u_1(x_1, \ldots, x_n)$, $u_2(x_1, \ldots, x_n), \ldots, u_m(x_1, \ldots, x_n)$ sînt m funcții reale de n variabile, definite pe mulțimea E, diferențiabile în punctul $x^0(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ astfel încît

$$(u_1(x_1^0, \ldots, x_n^0), u_2(x_1^0, \ldots, x_n^0), \ldots, u_m(x_1^0, \ldots, x_n^0)) \in F$$

și dacă $\varphi(u_1,u_2, \ldots, u_m)$ este o funcție reală de m variabile, definită pe F și diferențiabilă în punctul $(u_1^0, \ldots, u_m^0)$, $u_i^0 = u_i(x_1^0, \ldots, x_n^0)$, atunci funcția compusă:

$$f(x_1,x_2, \ldots, x_n) = \varphi(u_1(x_1, \ldots, x_n), u_2(x_1, \ldots, x_n), \ldots, u_m(x_1, \ldots, x_n))$$

este diferențiabilă în $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ și $df(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) =$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial\varphi(u_1^0, u_2^0, \ldots, u_m^0)}{\partial u_j} \times \frac{\partial u_j(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)}{\partial x_i}\right)(x_i - x_i^0) =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial\varphi(u_1^0, u_2^0, \dots, u_m^0)}{\partial u_j} \cdot du_j(x_1^0; x_2^0, \dots x_n^0),$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1^0, \dots, x_n^0) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial\varphi}{\partial u_j}(u_1^0, \dots, u_m^0)\frac{\partial u_j}{\partial x_i}(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0).$$

Aceste formule se mai scriu sub următoarea formă, incompletă, dar mai uşor de reţinut:

$$df = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial\varphi}{\partial u_j}\cdot\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)dx_i = \sum_{j=1}^{m}\frac{\partial\varphi}{\partial u_j}\,du_j$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{m}\frac{\partial\varphi}{\partial u_j}\cdot\frac{\partial u_j}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Exerciţii rezolvate

785. *Fie*

$$f(x, y) = \sqrt{\sin^2 x + \sin^2 y}.$$

Pornind de la definiţie, să se calculeze

$$\frac{\partial f\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)}{\partial x} \text{ şi } \frac{\partial f\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)}{\partial y}.$$

Conform definiţiei avem

$$\frac{\partial f\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)}{\partial x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{f(x, 0) - f\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)}{x - \frac{\pi}{4}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{\sin^2 x} - \sqrt{\sin^2\frac{\pi}{4}}}{x - \frac{\pi}{4}} =$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{|\sin x| - \sin\frac{\pi}{4}}{x - \frac{\pi}{4}}.$$

Însă pentru valorile lui x din primul cadran, $\sin x > 0$, şi $|\sin x| = \sin x$. Deci

$$\frac{\partial f\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)}{\partial x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x - \sin\frac{\pi}{4}}{x - \frac{\pi}{4}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{2\sin\frac{x - \frac{\pi}{4}}{2}\cos\frac{x + \frac{\pi}{4}}{2}}{x - \frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

În mod analog

$$\frac{\partial f\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)}{\partial y} = \lim_{y\to\frac{\pi}{4}}\frac{f\left(\frac{\pi}{4}, y\right) - f\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)}{y - \frac{\pi}{4}} =$$

$$= \lim_{y\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{\frac{1}{2} + \sin^2 y} - 1}{y - \frac{\pi}{4}} = \lim_{y\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^2 y - \frac{1}{2}}{\left(y - \frac{\pi}{4}\right)\left(\sqrt{\frac{1}{2} + \sin^2 y} + 1\right)} =$$

$$= \lim_{y\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin y + \frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{\frac{1}{2} + \sin^2 y} + 1} \cdot \lim_{y\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin y - \sin\frac{\pi}{4}}{y - \frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}.$$

786. *Pentru funcţia*

$$f(x, y) = \ln(1 + x + y^2)$$

să se calculeze, pornind de la definiţie, $\frac{\partial f(1, 1)}{\partial x}$.

Avem

$$\frac{\partial f(1, 1)}{\partial x} = \lim_{x\to 1}\frac{f(x, 1) - f(1, 1)}{x - 1} = \lim_{x\to 1}\frac{\ln(2 + x) - \ln 3}{x - 1} =$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{\ln\frac{2 + x}{3}}{x - 1} = \frac{1}{3}\lim_{x\to 1}\frac{\ln\left(1 + \frac{x - 1}{3}\right)}{\frac{x - 1}{3}} = \frac{1}{3}.$$

787. *Fie*

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & \textit{dacă } x = 0 \textit{ sau } y = 0, \\ 1, & \textit{dacă } x \neq 0 \textit{ şi } y \neq 0. \end{cases}$$

a) *Să se studieze continuitatea funcţiei în origine.*

b) *Să se calculeze* $\frac{\partial f(0,0)}{\partial x}$ *şi* $\frac{\partial f(0,0)}{\partial y}$.

a) Constatăm uşor că funcţia nu este continuă în origine. Într-adevăr, oricare ar fi şirul $P_n(x_n, y_n)$, $x_n, y_n \neq 0$, avem $f(x_n, y_n) \equiv 1$, iar $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y) = 1 \neq f(0,0)$.

b) $\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x,0) - f(0,0)}{x}$. Însă $f(x,0) = 0$ și $f(0,0) = 0$.

Deci $\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial x} = 0$.

Analog, $\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial y} = \lim\limits_{y \to 0} \dfrac{f(0,y) - f(0,0)}{y} = 0$.

Acest exemplu ne permite să tragem concluzia că nu orice funcție care admite derivate parțiale de ordinul întîi în raport cu toate variabilele, într-un punct, este continuă în acel punct.

788. *Pornind de la definiție, să se calculeze*

$$\frac{\partial^2 f(1,1)}{\partial y \partial x}, \ \textit{dacă}\ f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}.$$

Avem

$$\frac{\partial^2 f(1,1)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(1,1) = \lim_{y \to 1} \frac{\dfrac{\partial f(1,y)}{\partial x} - \dfrac{\partial f(1,1)}{\partial x}}{y-1}.$$

Însă:

$$\frac{\partial f(1,y)}{\partial x} = \lim_{x \to 1} \frac{f(x,y) - f(1,y)}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x^2+y^2} - \sqrt{1+y^2}}{x-1} =$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{(x-1)\left(\sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{1+y^2}\right)} = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}},$$

$$\frac{\partial f(1,1)}{\partial x} = \lim_{x \to 1} \frac{f(x,1) - f(1,1)}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{2}}{x-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Deci

$$\frac{\partial^2 f(1,1)}{\partial y \partial x} = \lim_{x \to 1} \frac{\dfrac{1}{\sqrt{1+y^2}} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}}{y-1} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

789. *Pentru funcția* $f(x,y) = xy \ln x$, $x \neq 0$, $-\infty < y < \infty$, *să se arate, pornind de la definiție, că*

$$\frac{\partial^2 f(1,1)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f(1,1)}{\partial y \partial x}.$$

Avem

$$\frac{\partial^2 f(1,1)}{\partial y \partial x} = \lim_{y \to 1} \frac{\dfrac{\partial f(1,y)}{\partial x} - \dfrac{\partial f(1,1)}{\partial x}}{y-1}.$$

Însă

$$\frac{\partial f(1,y)}{\partial x} = \lim_{x \to 1} \frac{f(x,y) - f(1,y)}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{xy \ln x}{x-1} = y \lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1} = y,$$

$$\frac{\partial f(1,1)}{\partial x} = \lim_{x \to 1} \frac{f(x,1) - f(1,1)}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{x \ln x}{x-1} = 1;$$

deci

$$\frac{\partial^2 f(1,1)}{\partial y \partial x} = \lim_{y \to 1} \frac{y-1}{y-1} = 1.$$

În mod analog,

$$\frac{\partial^2 f(1,1)}{\partial x \partial y} = \lim_{x \to 1} \frac{\dfrac{\partial f(x,1)}{\partial y} - \dfrac{\partial f(1,1)}{\partial y}}{x-1}.$$

Dar

$$\frac{\partial f(x,1)}{\partial y} = \lim_{y \to 1} \frac{f(x,y) - f(x,1)}{y-1} = \lim_{y \to 1} \frac{xy \ln x - x \ln x}{y-1} = x \ln x,$$

$$\frac{\partial f(1,1)}{\partial y} = \lim_{y \to 1} \frac{f(1,y) - f(1,1)}{y-1} = 0.$$

Deci

$$\frac{\partial^2 f(1,1)}{\partial x \partial y} = \lim_{x \to 1} \frac{x \ln x}{x-1} = 1.$$

Folosind formulele obișnuite, să se calculeze derivatele parțiale în raport cu toate variabilele care intervin, pentru funcțiile următoare:

790. $f(x,y) = \ln\left(x + \dfrac{y}{2x}\right)$, $x \neq 0$, $x + \dfrac{y}{2x} > 0$.

Pentru a calcula $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}$, derivăm funcția în raport cu x, presupunînd y constant. Deci

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{1}{x + \dfrac{y}{2x}}\left(1 - \frac{y}{2x^2}\right) = \frac{2x^2 - y}{(2x^2+y)\,x}.$$

Analog, pentru a calcula $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$, derivăm funcția în raport cu y, presupunînd x constant; obținem

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{1}{x+\frac{y}{2x}}\cdot\frac{1}{2x} = \frac{1}{2x^2+y}.$$

791. $f(x,y) = 2^{\frac{x}{y}}$, $y \neq 0$.

Deducem

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2^{\frac{x}{y}}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{y}\right) = 2^{\frac{x}{y}}\cdot\frac{1}{y}\cdot \ln 2,$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 2^{\frac{x}{y}}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{y}\right) = -2^{\frac{x}{y}}\frac{x}{y^2}\cdot \ln 2.$$

792. $f(x,y) = x^y$, $x > 0$.

Avem

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = yx^{y-1}, \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = x^y \ln x.$$

793. $f(x,y) = (1+xy)^y$, $1+xy > 0$.

Deducem

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = y(1+xy)^{y-1}\frac{\partial}{\partial x}(1+xy) = y^2(1+xy)^{y-1},$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = (1+xy)^y\left[\ln(1+xy)+\frac{xy}{1+xy}\right].$$

794. $f(x,y) = (1+\log_y x)^3$, $x>0$, $y>0$, $y\neq 1$.

Funcția dată se poate transforma în modul următor Notăm $z(x,y) = \log_y x$. Avem $y^z = x$. Luînd în ambii membri logaritmul în baza e, obținem $z \ln y = \ln x$

sau

$$\log_y x = \frac{\ln x}{\ln y}; \text{ deci } f(x,y) = \left(1+\frac{\ln x}{\ln y}\right)^3 \text{ și } \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} =$$

$$= 3\left(1+\frac{\ln x}{\ln y}\right)^2\frac{1}{x\ln y}, \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = -3\left(1+\frac{\ln x}{\ln y}\right)^2\frac{\ln x}{y(\ln y)^2}.$$

795. $f(x,y,z) = x^{y^z}$, $x>0$, $y>0$.

Avem

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = y^z x^{y^z-1}, \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = x^{y^z}\ln x\frac{\partial}{\partial y}(y^z) =$$

$$= zy^{z-1}x^{y^z}\ln x, \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial z} = x^{y^z}\frac{\partial}{\partial z}(y^z)\ln x = x^{y^z}y^z\ln x\ln y.$$

796. *Să se calculeze* $\frac{\partial^3 f(x,y)}{\partial y\partial x^2}$, *dacă* $f(x,y) = \operatorname{arctg} xy$.

Conform definiției, $\frac{\partial^3 f(x,y)}{\partial y\,\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}\right]$.

Însă

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{y}{1+x^2y^2}, \quad \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right] =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{y}{1+x^2y^2}\right] = -\frac{2xy^3}{(1+x^2y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^3 f(x,y)}{\partial y\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}\right] = \frac{\partial}{\partial y}\left[-\frac{2xy^3}{(1+x^2y^2)^2}\right] =$$

$$= -2x\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{y^3}{(1+x^2y^2)^2}\right] =$$

$$= -2x\frac{3y^2(1+x^2y^2)^2 - 4(1+x^2y^2)x^2y^4}{(1+x^2y^2)^4} =$$

$$= -2x\frac{3y^2-x^2y^4}{(1+x^2y^2)^3}.$$

797. *Să se calculeze* $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y\partial x}$ *pentru* $f(x,y) = \arcsin\frac{x}{y}$, $|x|<|y|$.
$y\neq 0$

Deducem

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right], \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{y^2}}}\cdot\frac{1}{y} = \frac{|y|}{\sqrt{y^2-x^2}}\cdot\frac{1}{y}$$

Deci

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{y^2 - x^2}}, & \text{dacă } y > 0 \\ -\dfrac{1}{\sqrt{y^2 - x^2}}, & \text{dacă } y < 0, \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y\, \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\right] = \begin{cases} \dfrac{-x^2}{\sqrt{y^2 - x^2}(y^2 - x^2)}, & \text{dacă } y > 0 \\ \dfrac{x^2}{\sqrt{y^2 - x^2}\,(y^2 - x^2)}, & \text{dacă } y < 0. \end{cases}$$

798. *Pentru funcția* $f(x, y) = \dfrac{x + y}{x - y}$, $x \neq y$, *să se calculeze*

$$\frac{\partial^{m+n} f(x, y)}{\partial y^n\, \partial x^m}.$$

Prin definiție,

$$\frac{\partial^{m+n} f(x, y)}{\partial y^n\, \partial x^m} = \frac{\partial^n}{\partial y^n}\left[\frac{\partial^m f(x, y)}{\partial x^m}\right].$$

Deci

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = -\frac{2y}{(x - y)^2}, \quad \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} = 2y\,\frac{2(x - y)}{(x - y)^4} = 2 \cdot 2!\,\frac{y}{(x - y)^3},$$

$$\frac{\partial^3 f(x, y)}{\partial x^3} = -2 \cdot 3!\; y\,\frac{1}{(x - y)^4}.$$

Folosind metoda inducției, vom arăta că $\dfrac{\partial^n f(x, y)}{\partial x^n} = (-1)^n\, 2n!\,\dfrac{y}{(x - y)^{n+1}}$, oricare ar fi n.

Pentru aceasta, vom dovedi că, presupunînd adevărată relația

$$\frac{\partial^n f(x, y)}{\partial x^n} = (-1)^n 2\,\frac{n!\,y}{(x - y)^{n+1}},$$

rezultă

$$\frac{\partial^{n+1} f(x, y)}{\partial x^{n+1}} = (-1)^{n+1} 2\,\frac{(n + 1)!\,y}{(x - y)^{n+2}}.$$

Fie $\dfrac{\partial^n f(x, y)}{\partial x^n} = (-1)^n 2\,\dfrac{n!\,y}{(x - y)^{n+1}}$. Vom avea

$$\frac{\partial^{n+1} f(x, y)}{\partial x^{n+1}} = (-1)^n 2n!\,y\,\frac{-(n + 1)(x - y)^n}{(x - y)^{2n+2}} =$$

$$= (-1)^{n+1}\, 2(n + 1)!\,\frac{y}{(x - y)^{n+2}}.$$

Deoarece relația dată este verificată pentru $n = 1, 2, 3$, rezultă că ea are loc oricare ar fi n. Deci

$$\frac{\partial^m f(x, y)}{\partial x^m} = (-1)^m\, 2\,\frac{m!\,y}{(x - y)^{m+1}},$$

$$\frac{\partial^{m+1} f(x, y)}{\partial y\, \partial x^m} = \frac{\partial}{\partial y}\left[(-1)^m 2m!\,\frac{y}{(x - y)^{m+1}}\right] =$$

$$= (-1)^m 2m!\,\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{y}{(x - y)^{m+1}}\right] = (-1)^m 2m!\,\frac{x + my}{(x - y)^{m+2}},$$

$$\frac{\partial^{m+2} f(x, y)}{\partial y^2\, \partial x^m} = 2(-1)^m\,(m + 1)!\,\frac{2x + my}{(x - y)^{m+3}}.$$

Folosind metoda inducției ca mai înainte, putem arăta că

$$\frac{\partial^{m+n} f(x, y)}{\partial y^n\, \partial x^m} = \frac{(-1)^m 2 \cdot (m + n - 1)!\,(nx + my)}{(x - y)^{m+n+1}}.$$

799. *Pornind de la definiție, să se arate că funcția*

$$f(x, y) = (x - 1)^2 + y^2$$

este diferențiabilă în punctul $A\ (1, 1)$.

Va trebui să arătăm că are loc egalitatea

$$f(x, y) - f(1, 1) = \frac{\partial f(1, 1)}{\partial x}(x - 1) + \frac{\partial f(1, 1)}{\partial y}(y - 1) + $$
$$+ \rho(X, A)\omega(x, y) \qquad (1)$$

cu $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \omega(x, y) = 0$ și $\rho(X, A) = \sqrt{(x - 1)^2 + (y - 1)^2}$.

Deoarece $\dfrac{\partial f(1, 1)}{\partial x} = 0$, $\dfrac{\partial f(1, 1)}{\partial y} = 2$ și $f(1, 1) = 1$, egalitatea (1) devine

$$(x - 1)^2 + y^2 - 1 = 2(y - 1) + \sqrt{(x - 1)^2 + (y - 1)^2}\,\omega(x, y)$$

cu $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \omega(x, y) = 0$ sau

$$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = \sqrt{(x - 1)^2 + (y - 1)^2}\,\omega(x, y).$$

De aici deducem

$$\omega(x, y) = \sqrt{(x - 1)^2 + (y - 1)^2} \text{ și } \lim_{\substack{x \to 1 \\ y \to 1}} \sqrt{(x - 1)^2 + (y - 1)^2} = 0.$$

800. *Să se arate că funcția*

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, \text{ dacă } x = 0 \text{ sau } y = 0 \\ 1, \text{ dacă } x \neq 0 \text{ și } y \neq 0 \end{cases}$$

nu este diferențiabilă în origine.

Dacă funcția ar fi diferențiabilă în origine, ar trebui să avem egalitatea

$$f(x, y) - f(0, 0) = \frac{\partial f(0, 0)}{\partial x}(x - 0) + \frac{\partial f(0, 0)}{\partial y}(y - 0) + \\ + \sqrt{x^2 + y^2}\,\omega(x, y) \qquad (1)$$

cu $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \omega(x, y) = 0$. Să presupunem $x \neq 0$ și $y \neq 0$. În exercițiul 784 am stabilit că $\frac{\partial f(0, 0)}{\partial x} = 0$ și $\frac{\partial f(0, 0)}{\partial y} = 0$. Deoarece $f(x, y) = 1$, egalitatea (1) devine

$$1 = \sqrt{x^2 + y^2}\,\omega(x, y).$$

Însă membrul drept tinde către zero cînd x și y tind către zero, ceea ce contrazice însăși egalitatea.

Pentru a arăta că funcția dată nu este diferențiabilă în origine, putem raționa și în modul următor: dacă funcția ar fi diferențiabilă în origine, ar trebui să fie și continuă, ceea ce am văzut (exercițiul 784) că nu este adevărat.

801. *Este funcția* $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ *diferențiabilă în origine?*

Dacă funcția ar fi diferențiabilă în origine, conform unei teoreme enunțate la începutul paragrafului, ar trebui să admită derivate parțiale în acest punct. Însă

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{\sqrt{x^2}}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{|x|}{x} = 1$$

și

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{\sqrt{x^2}}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{|x|}{x} = -1.$$

Analog procedăm pentru $\frac{\partial f(0, 0)}{\partial y}$. În origine, funcția nu admite derivate parțiale, deci nu este diferențiabilă.

802. *Să se arate că în origine funcția*

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{dacă } x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & \text{dacă } x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

este continuă, admite derivate parțiale, însă nu este diferențiabilă.

Din inegalitățile $0 < \frac{|xy|}{\sqrt{x^2 + y^2}} < \frac{|xy|}{\sqrt{y^2}} < |x|$, deducem că $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$, de unde rezultă continuitatea funcției în origine.

Deducem derivatele parțiale pornind de la definiție; obținem

$$\frac{\partial f(0, 0)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f(0, 0)}{\partial y} = 0.$$

Să arătăm că funcția nu este diferențiabilă în origine. Dacă ar fi diferențiabilă în origine, ar avea loc egalitatea

$$f(x, y) - f(0, 0) = \frac{\partial f(0, 0)}{\partial x}(x - 0) + \frac{\partial f(0, 0)}{\partial y}(y - 0) + \\ + \sqrt{x^2 + y^2}\,\omega(x, y)$$

cu $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \omega(x, y) = 0$ sau, ținînd seama de rezultatele precedente,

$$\frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \sqrt{x^2 + y^2}\,\omega(x, y); \text{ de unde } \omega(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}.$$

Însă, constatăm ușor că $\frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ nu are limită în origine, deci funcția nu poate fi diferențiabilă în acest punct.

Din acest exemplu, precum și din cel precedent, reiese că nu orice funcție care admite într-un punct derivate parțiale în raport cu toate variabilele este diferențiabilă în acel punct.

803. *Să se arate că în origine funcția*

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2)\sin\frac{1}{x^2 + y^2}, & \text{dacă } x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & \text{dacă } x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

este continuă, admite derivate parțiale discontinue, însă este diferențiabilă.

Funcţia este continuă în origine. Într-adevăr

$$\left|\sin\frac{1}{x^2+y^2}\right| \leqslant 1, \quad \left|(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}\right| \leqslant x^2+y^2$$

şi, deoarece $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (x^2+y^2) = 0$, rezultă că

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2} = 0.$$

Să calculăm derivatele parţiale:

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x^2}}{x} = 0, \quad \frac{\partial f(0,0)}{\partial y} = \lim_{y\to 0}\frac{y^2\sin\frac{1}{y^2}}{y} = 0$$

şi

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2x\sin\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}, \quad x^2+y^2 \neq 0$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 2y\sin\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2y}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}, \quad x^2+y^2 \neq 0.$$

Observăm că $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ şi $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ nu au limite în origine şi deci nu sînt continue.

Să arătăm că funcţia este diferenţiabilă în origine. Într-adevăr

$$f(x,y) - f(0,0) = (x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2} = \sqrt{x^2+y^2}\,\omega(x,y)$$

$$\text{cu } \omega(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}\sin\frac{1}{x^2+y^2},$$

$$\text{iar } \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\omega(x,y) = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\sqrt{x^2+y^2}\sin\frac{1}{x^2+y^2} = 0.$$

Acest exemplu dovedeşte că condiţia exprimată prin proprietatea (3) nu este necesară.

304. *Fie*

$$f(x,y) = \begin{cases} y^2\ln\left(1+\frac{x^2}{y^2}\right), & y \neq 0 \\ 0, & y = 0. \end{cases}$$

Să se arate că deşi nu sînt satisfăcute criteriile lui Joung şi Schwarz, totuşi $\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y\partial x}$.

Acest exemplu, dat de I. Barbălat*), ilustrează afirmaţia făcută la începutul capitolului asupra faptului că condiţiile care intervin în cele două criterii nu sînt necesare, ci numai suficiente.

Vom arăta în primul rînd că funcţia este continuă în tot planul. Este suficient să verificăm această afirmaţie numai în punctul $(x_0, 0)$. În acest scop, folosim inegalitatea $\ln\alpha < \alpha$, valabilă pentru orice $\alpha > 1$. Avem

$$\ln\left(1+\frac{x^2}{y^2}\right) = 2\ln\sqrt{1+\frac{x^2}{y^2}} < 2\sqrt{1+\frac{x^2}{y^2}}.$$

Deci

$$0 < y^2\ln\left(1+\frac{x^2}{y^2}\right) < 2y^2\sqrt{1+\frac{x^2}{y^2}}.$$

Însă $\lim\limits_{\substack{y\to 0\\ x\to x_0}} y^2\sqrt{\frac{x^2+y^2}{y^2}} = 0$. Prin urmare

$$\lim_{\substack{y\to 0\\ x\to x_0}} y^2\ln\left(1+\frac{x^2}{y^2}\right) = f(x,0) = 0.$$

Funcţia admite derivate parţiale:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[y^2\ln\left(1+\frac{x^2}{y^2}\right)\right] = \frac{2y^2x}{x^2+y^2}, \text{ dacă } y \neq 0$$

$$\frac{\partial f(x,0)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f(0,0)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[y^2\ln\left(1+\frac{x^2}{y^2}\right)\right] =$$

$$= 2y\ln\left(1+\frac{x^2}{y^2}\right) - \frac{2x^2y}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial f(x,0)}{\partial y} = \lim_{y\to 0}\frac{y^2\ln\left(1+\frac{x^2}{y^2}\right)}{y} = \lim_{y\to 0} y\ln\left(1+\frac{x^2}{y^2}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial y} = 0.$$

*) Gazeta Matematică şi Fizică, seria A, 1949, vol. I (55), p. 48—52.

Prin urmare

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \begin{cases} \dfrac{2xy^2}{x^2+y^2}, & \text{dacă } y \neq 0 \\ 0, & \text{dacă } y = 0, \end{cases}$$

care, se constată ușor, este continuă în tot planul.

Apoi

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \begin{cases} 2y \ln\left(1+\dfrac{x^2}{y^2}\right) - \dfrac{2x^2y}{x^2+y^2}, & y \neq 0 \\ 0 & , y = 0. \end{cases}$$

Se stabilește ușor că $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ y\to 0}} \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 0$, ceea ce dovedește continuitatea acestei funcții.

Deducem

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y\, \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2xy^2}{x^2+y^2}\right) = \frac{4x^3y}{(x^2+y^2)^2}, \text{ dacă } y \neq 0$$

$$\frac{\partial^2 f(x,0)}{\partial y\, \partial x} = \lim_{y\to 0} \frac{\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} - \dfrac{\partial f(x,0)}{\partial x}}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{\dfrac{2xy^2}{x^2+y^2}}{y} = 0, \; x \neq 0.$$

$$\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y\, \partial x} = \lim_{y\to 0} \frac{\dfrac{\partial f(0,y)}{\partial x} - \dfrac{\partial f(0,0)}{\partial x}}{y} = 0.$$

Așadar

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y\, \partial x} = \begin{cases} \dfrac{4\, x^3y}{(x^2+y^2)^2}, & y \neq 0 \\ 0, & y = 0. \end{cases}$$

Verificăm ușor că această funcție nu este continuă în origine. Într-adevăr, considerînd șirul $\left(\frac{1}{n}, \frac{k}{n}\right)$, $k \neq 0$, care, evident, tinde către punctul 0 (0,0), obținem

$$\frac{\partial^2 f\left(\frac{1}{n}, \frac{k}{n}\right)}{\partial y\, \partial x} = \frac{4k}{(1+k^2)^2}, \text{ deci } \lim_{n\to\infty} \frac{\partial^2 f\left(\frac{1}{n}, \frac{k}{n}\right)}{\partial y\, \partial x} \neq 0.$$

Prin urmare criteriul lui Schwarz nu este satisfăcut. Totuși,

$$\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x\, \partial y} = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{\partial f(x,0)}{\partial y} - \dfrac{\partial f(0,0)}{\partial y}}{x} = 0.$$

Deci

$$\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y\, \partial x} = 0.$$

Să arătăm că nici criteriul lui Joung nu este satisfăcut. Pentru aceasta vom arăta că funcțiile $\frac{\partial f}{\partial x}$ și $\frac{\partial f}{\partial y}$ nu sînt diferențiabile în origine. Dacă, de exemplu, $\frac{\partial f}{\partial x}$ ar fi diferențiabilă în origine, am avea egalitatea

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial f(0,0)}{\partial x} = \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x^2}(x-0) + \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y\, \partial x}(y-0) + \omega(x,y)\sqrt{x^2+y^2}$$

cu $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ y\to 0}} \omega(x,y) = 0$ sau $\frac{2xy^2}{x^2+y^2} = \omega(x,y)\sqrt{x^2+y^2}$. Deducem

$$\omega(x,y) = \frac{2xy^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Însă funcția $\frac{2xy^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}$ nu are limită în origiue, ceea ce dovedim dacă considerăm din nou șirul $P_n\left(\frac{1}{n}, \frac{k}{n}\right)$.

Analog stabilim că dacă funcția $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ ar fi diferențiabilă în origine, am avea egalitatea

$$2y \ln\left(1+\frac{x^2}{y^2}\right) - \frac{2x^2y}{x^2+y^2} = \omega(x,y)\sqrt{x^2+y^2}$$

sau

$$\omega(x,y) = \frac{2y}{\sqrt{x^2+y^2}}\left[\ln\left(1+\frac{x^2}{y^2}\right) - \frac{x^2}{x^2+y^2}\right]. \tag{1}$$

Arătăm uşor că membrul drept al egalităţii (1) tinde la zero cînd x şi y tind la zero.

805. *Cunoscîndu-se regulile obişnuite de diferenţiere, să se calculeze diferenţialele de ordinul întîi şi al doilea pentru următoarele funcţii:*

a) $f(x, y) = \cos xy$.

Deoarece funcţia admite derivate parţiale de orice ordin continue în tot planul, admite diferenţiale de orice ordin. Însă

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = -y \sin xy, \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = -x \sin xy.$$

Deci

$$df(x, y) = -\sin xy\,[y\,dx + x\,dy].$$

Apoi

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(-y \sin xy) = -y^2 \cos xy, \quad \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial y}(-x \sin xy) = -x^2 \cos xy,$$

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(-x \sin xy) = -xy \cos xy;$$

prin urmare

$$d^2 f(x,y) = -\cos xy\,(y^2 dx^2 + 2xy\,dx\,dy + x^2\,dy^2)$$

b) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Am văzut în exerciţiul 801 că în origine funcţia nu este diferenţiabilă. În orice alt punct, funcţia admite derivate parţiale continue.

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

deci este diferenţiabilă şi avem

$$df(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}[x\,dx + y\,dy].$$

Mai departe,

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = \frac{y^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = \frac{x^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = -\frac{xy}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}.$$

Deoarece derivatele parţiale de ordinul al doilea sînt continue în tot planul exceptînd originea, rezultă că în orice punct diferit de origine diferenţiala a doua există şi este

$$d^2 f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}(y^2\,dx^2 - 2xy\,dx\,dy + x^2\,dy^2).$$

806. *Fie funcţia*

$$f(x,y) = e^{ax+by}.$$

Să se calculeze $d^n f(x,y)$.

Avem

$$d^n f(x,y) = \frac{\partial^n f(x,y)}{\partial x^n}dx^n + n\frac{\partial^n f(x,y)}{\partial x^{n-1}\partial y}dx^{n-1}\,dy +$$

$$+\frac{n(n-1)}{2}\cdot\frac{\partial^n f(x,y)}{\partial x^{n-2}\partial y^2}dx^{n-2}\,dy^2 + \ldots +$$

$$+\frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{p!}\cdot\frac{\partial^n f(x,y)}{\partial x^{n-p}\partial y^p}dx^{n-p}\,dy^p + \ldots + \frac{\partial^n f(x,y)}{\partial y^n}dy^n.$$

În cazul funcţiei noastre, rezultă

$$\frac{\partial^n f(x,y)}{\partial x^{n-p}\partial y^p} = a^{n-p}\, b^p\, e^{ax+by},$$

deci

$$d^n f(x,y) = e^{ax+by}(a^n dx^n + n a^{n-1} b\, dx^{n-1}\,dy + \ldots + b^n dy^n) =$$

$$= e^{ax+by}(a\,dx + b\,dy)^n.$$

807. *Să se calculeze valoarea aproximativă pentru* $(e + 0{,}1)^{\ln(1,2)}$.

Avem

$$f(x,y) - f(x_0, y_0) \approx \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}(y - y_0). \quad (1)$$

Scriem relația (1) pentru funcția $f(x, y) = x^{\ln y}$, $x > 0$, $y > 0$, notînd $x = e + 0{,}1$, $y = 1{,}2$, $x_0 = e$, $y_0 = 1$.

Găsim

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \ln y x^{\ln y - 1}, \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = x^{\ln y} \ln x \cdot \frac{1}{y}$$

$$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x} = 0, \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y} = e^{\ln 1} \ln e = 1$$

și obținem

$$(e + 0{,}1)^{\ln(1,2)} - e^{\ln 1} \approx 1\ (1{,}2 - 1)$$

$$(e + 0{,}1)^{\ln(1,2)} \approx 1 + 1{,}2 - 1 = 1{,}2.$$

Aplicînd formula de derivare a funcțiilor compuse, să se calculeze $\frac{\mathrm{d}f(a)}{\mathrm{d}x}$, $f(x) = \varphi[u(x), v(x)]$ *în cazurile următoare:*

808. $\varphi(u, v) = u + uv$, $u(x) = \cos x$, $v(x) = \sin x$, $a = \frac{\pi}{4}$.

Avem

$$\frac{\mathrm{d}f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial\varphi(c, d)}{\partial u} u'(a) + \frac{\partial\varphi(c, d)}{\partial v} v'(a)$$

$$c = u\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2},\ d = v\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$u'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2},\ v'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{\partial\varphi(c, d)}{\partial u} = \frac{\partial\varphi\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\partial u} = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\frac{\partial\varphi(c, d)}{\partial v} = \frac{\partial\varphi\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\partial v} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Deci

$$\frac{\mathrm{d}f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\mathrm{d}x} = \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

809. $\varphi(u, v) = e^{u-2v}$, $u(x) = x^2$, $v(x) = x^2 - 2$, $a = 2$.

Deducem

$$u'(2) = 4,\ v'(2) = 4,\ u(2) = 4,\ v(2) = 2$$

$$\frac{\mathrm{d}f(2)}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial\varphi(4,2)}{\partial u} u'(2) + \frac{\partial\varphi(4,2)}{\partial v} v'(2).$$

Însă

$$\frac{\partial\varphi(4,2)}{\partial u} = e^{4-4} = 1, \frac{\partial\varphi(4,2)}{\partial v} = -2e^{4-2\cdot 2} = -2.$$

Deci

$$\frac{\mathrm{d}f(2)}{\mathrm{d}x} = 4 + (-2)\cdot 4 = -4.$$

810. *Fie* $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x|y|}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{dacă } x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & \text{dacă } x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$

Să se arate că:

1) *funcția admite derivate parțiale în origine,*

2) *funcția nu este diferențiabilă în origine,*

3) *prin aplicarea formală a formulei de derivare a funcțiilor compuse funcției* $F(t) = f(x(t), y(t))$ *cu* $x(t) = t$, $y(t) = t$, *se obține un rezultat fals. Să se explice acest fapt.*

1) Găsim

$$\frac{\partial f(0, 0)}{\partial x} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{0 - 0}{x} = 0$$

$$\frac{\partial f(0, 0)}{\partial y} = \lim_{y\to 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{0 - 0}{y} = 0.$$

2) Deducem

$$f(x, y) - f(0, 0) = \frac{x|y|}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \frac{x|y|}{x^2 + y^2}.$$

Însă funcția $\omega(x, y) = \frac{x|y|}{x^2 + y^2}$ nu are limita în origine.

Într-adevăr, dacă variabilele x și y tind către origine pe dreapta $y = mx$, obținem

$$\omega(x, mx) = \frac{x\,|mx|}{x^2(1+m^2)} = \begin{cases} \dfrac{|m|}{1+m^2}, & \text{dacă } x > 0 \\[2mm] -\dfrac{|m|}{1+m^2}, & \text{dacă } x < 0 \end{cases}$$

și $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \omega(x, mx) = \dfrac{|m|}{1+m^2}$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \omega(x, mx) = -\dfrac{|m|}{1+m^2}$.

3) Luînd $x = y = t$, avem

$$F(t) = \frac{t\,|t|}{\sqrt{2t^2}} = \frac{t}{\sqrt{2}}, \quad F'(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

oricare ar fi t; deci

$$F'(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}. \tag{1}$$

Pe de altă parte, folosind formula de derivare a funcțiilor compuse, obținem

$$\frac{dF(0)}{dt} = \frac{\partial f(0, 0)}{\partial x}\, x'(0) + \frac{\partial f(0, 0)}{\partial y}\, y'(0) = 0\cdot 1 + 0\cdot 1 = 0,$$

ceea ce contrazice rezultatul (1).

Rezultatul fals se datorește faptului că funcția dată nu este diferențiabilă în origine.

811. *Să se arate că următoarele funcții verifică identitățile scrise în dreptul fiecăreia:*

a) $f(x,y) = \operatorname{arctg}(x^2+y^2)$, $y\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} - x\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 0$.

Notăm $u(x, y) = x^2 + y^2$. În acest caz,

$$f(x, y) = \operatorname{arctg} u(x,y)$$

și

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \frac{d \operatorname{arctg} u(x, y)}{du}\cdot\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \frac{1}{1+u^2(x,y)}\,2y = \frac{2y}{1+(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \frac{d \operatorname{arctg} u(x, y)}{du}\cdot\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = \frac{1}{1+u^2(x,y)}\,2x = \frac{2x}{1+(x^2+y^2)^2}.$$

Înlocuind în relația dată, obținem

$$y\,\frac{2x}{1+(x^2+y^2)^2} - x\,\frac{2y}{1+(x^2+y^2)^2} = 0.$$

b) $f(x,y) = \dfrac{y^2}{3x} + \varphi(x, y)$, $x^2\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial x} - xy\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial y} + y^2 = 0$.

Funcția φ este o funcție de produsul xy, derivabilă. Notăm $u(x, y) = xy$. În acest caz,

$$\varphi(xy) = \varphi(u(x,y)).$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = -\frac{y^2}{3x^2} + \varphi'_u(u)\cdot\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{y^2}{3x^2} + \varphi'(xy)y,$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \frac{2y}{3x} + \varphi'(x, y)\,x.$$

Înlocuind în relația dată, constatăm că aceasta se verifică.

812. *Fie*

$$z = f(\xi, \eta),\ \xi = xy,\ \eta = \frac{x}{y}.$$

Să se calculeze $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

Avem

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial \xi}\,y + \frac{\partial f}{\partial \eta}\cdot\frac{1}{y},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\right)y + \frac{\partial f}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial \eta}\right)\cdot\frac{1}{y} - \frac{\partial f}{\partial \eta}\cdot\frac{1}{y^2}.$$

Însă

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\right) = \frac{\partial}{\partial \xi}\cdot\left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\right)\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\right)\frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2}\,x - \frac{\partial^2 f}{\partial \eta\,\partial \xi}\cdot\frac{x}{y^2},$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial \eta}\right) = \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial f}{\partial \eta}\right)\cdot\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial f}{\partial \eta}\right)\frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial \xi\,\partial \eta}\,x - \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}\cdot\frac{x}{y^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = xy\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} - \frac{x}{y}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial \eta\,\partial \xi} + \frac{\partial f}{\partial \xi} + \frac{x}{y}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial \xi\,\partial \eta} - \frac{x}{y^3}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} - \frac{\partial f}{\partial \eta}\cdot\frac{1}{y^2}.$$

813. *Pornind de la definiţie, să se calculeze:*

a) $\frac{\partial f(4,1)}{\partial x}$ *şi* $\frac{\partial f(4,1)}{\partial y}$, *dacă* $f(x, y) = \ln(x - y^2)$, $x > y^2$.

R. $\frac{1}{3}$, $-\frac{2}{3}$.

b) $\frac{\partial f\left(1, \frac{\pi}{2}\right)}{\partial x}$, *dacă* $f(x, y) = e^{\sin xy}$. **R.** 0.

c) $\frac{\partial^2 f(-2,2)}{\partial x \partial y}$, *dacă* $f(x, y) = \sqrt[3]{x^2 y}$. **R.** $\frac{1}{9}$.

d) $\frac{\partial^2 f\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)}{\partial x \partial y}$, *dacă* $f(x, y) = x \sin(x + y)$. **R.** $\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$.

814. *Fie*

$$f(x, y) = \begin{cases} xy\,\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

Să se arate că $\frac{\partial^2 f(0, 0)}{\partial x \partial y} \neq \frac{\partial^2 f(0, 0)}{\partial y \partial x}$.

815. *Să se calculeze derivatele parţiale de ordinul întîi şi al doilea pentru următoarele funcţii:*

a) $f(x, y) = x^5 + 3xy \sin(x + y) + y^5$.

b) $f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $x^2 + y^2 \neq 0$.

c) $f(x, y) = x^2 y^2 \ln(x^4 + y^4)$, $x^4 + y^4 \neq 0$.

d) $f(x, y) = \arcsin \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, $x^2 + y^2 \leqslant 1$.

e) $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}\, e^{xz}$.

f) $f(x, y, z) = y^{x^z}$, $x > 0$, $y > 0$.

g) $f(x, y, z) = 2^{2x^{2y}}$, $x > 0$.

816. *Dacă*

$$f(x, y) = x\varphi(x^2 + y^2),$$

unde φ *este o funcţie cu derivata de ordinul al doilea continuă, să se calculeze:*

a) $\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2}$.

R. $\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} = 6x\varphi'(x^2 + y^2) + 4x^3 \varphi''(x^2 + y^2)$.

b) $\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y}$.

R. $\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} = 2y\varphi'(x^2 + y^2) + 4x^2 y \varphi''(x^2 + y^2)$.

c) $\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2}$.

R. $\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} = 2x\varphi'(x^2 + y^2) + 4xy^2 \varphi''(x^2 + y^2)$.

817. *Fie* $f(x, y) = xy\varphi\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)$, *unde* φ *este o funcţie derivabilă. Să se calculeze* $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$ şi $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$.

R. $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = y\varphi\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) + \frac{xy^3}{(x^2 + y^2)^{3/2}}\varphi'\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)$

$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = x\varphi\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) + \frac{x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}}\varphi'\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)$.

818. *Să se calculeze*

a) $\frac{\partial^{p+q} f(x, y)}{\partial x^p \partial y^q}$, *dacă* $f(x, y) = \frac{1}{y(1 + x)}$, $x \neq -1$, $y \neq 0$.

R. $(-1)^{p+q} \frac{p!\,q!}{(1 + x)^{p+1} y^{q+1}}$

b) $\dfrac{\partial^{p+q} f(x, y)}{\partial x^p \partial y^q}$, *dacă* $f(x, y) = \ln (x + y)$, $x + y > 0$.

R. $\dfrac{(p + q - 1)!}{(x + y)^{p+q}}$.

819. *Fie* $z = f(\xi, \eta)$, $\xi = x^2 + y^2$, $\eta = xy$.

Să se calculeze $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

820. *Pentru următoarele funcţii să se calculeze diferenţialele indicate în dreptul fiecăreia:*

a) $f(x, y) = x^2y^2$; $df(x, y)$.

b) $f(x, y) = \frac{1}{2} \ln (x^2 + y^2)$; $df(x, y)$, $d^2f(x, y)$.

c) $f(x, y) = \sin (x^2 + y^2)$; $d^2f(x, y)$.

d) $f(x, y) = \ln (x^x + y^y)$; $d^2f(x, y)$.

e) $f(x, y) = x^3e^{xyz}$; $d^3f(x, y)$.

8.4. Formula lui Taylor

Fie $f(x, y)$ o funcţie reală de două variabile definită pe o mulţime $E \subset R^2$ şi un punct interior $(a, b) \in E$; se presupune că funcţia f este diferenţiabilă de n ori în punctul (a, b). Polinomul $T_n(x, y)$ de două variabile, de gradul n, definit pe E în modul următor

$$T_n(x, y) = f(a, b) + \frac{1}{1!}\left[\frac{\partial f(a, b)}{\partial x}(x - a) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial f(a, b)}{\partial y}(y - b)\right] + \frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 f(a, b)}{\partial x^2}(x - a)^2 + \right.$$

$$\left. + 2\frac{\partial^2 f(a, b)}{\partial x \partial y}(x - a)(y - b) + \frac{\partial^2 f(a, b)}{\partial y^2}(y - b)^2\right] + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{n} C_n^i \frac{\partial^n f(a, b)}{\partial x^{n-i} \partial y^i}(x - a)^{n-i}(y - b)^i$$

se numeşte *polinomul lui Taylor de gradul n ataşat funcţiei* $f(x, y)$ *în punctul* (a, b).

Dacă pentru fiecare $(x, y) \in E$ se notează

$$R_n(x, y) = f(x, y) - T_n(x, y),$$

atunci egalitatea

$$f(x, y) = R_n(x, y) + T_n(x, y)$$

se numeşte *formula lui Taylor de ordinul n corespunzătoare funcţiei* $f(x,y)$ în punctul (a,b).

Dacă funcţia $f(x,y)$ are derivate parţiale de ordinul n continue într-o vecinătate V a lui (a,b), atunci

$$R_n(x, y) = \frac{1}{n!}\,\omega(x, y)\,\rho^n(x, y),\ \rho(x, y) = \sqrt{(x - y)^2 + (y - b)^2},$$

unde funcţia $\omega(x, y)$ este continuă în (a, b) şi nulă în acest punct:

$$\lim_{\substack{x \to a \\ y \to b}} \omega(x, y) = \omega(a, b) = 0.$$

Exerciţii rezolvate

821. *Pentru funcţia*

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

să se scrie polinomul lui Taylor de gradul al treilea în punctul $(1, 1)$.

Avem

$$T_3(x, y) = f(1, 1) + \frac{1}{1!}\left[\frac{\partial f(1, 1)}{\partial x}(x - 1) + \frac{\partial f(1, 1)}{\partial y}(y - 1)\right] +$$

$$+ \frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 f(1, 1)}{\partial x^2}(x - 1)^2 + 2\frac{\partial^2 f(1, 1)}{\partial x \partial y}(x - 1)(y - 1) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial^2 f(1, 1)}{\partial y^2}(y - 1)^2\right] + \frac{1}{3!}\left[\frac{\partial^3 f(1, 1)}{\partial x^3}(x - 1)^3 + \right.$$

$$3\frac{\partial^3 f(1,1)}{\partial x^2\partial y}(x-1)^2(y-1)+3\frac{\partial^3 f(1,1)}{\partial x\partial y^2}(x-1)(y-1)^2+$$

$$+\frac{\partial^3 f(1,1)}{\partial y^3}(y-1)^3\Big].$$

...lculînd succesiv derivatele parţiale, obţinem

$$\ldots=\frac{1}{\sqrt{2}},\quad \frac{\partial f(1,1)}{\partial y}=\frac{1}{\sqrt{2}},\quad \frac{\partial^2 f(1,1)}{\partial x^2}=\frac{1}{2\sqrt{2}},\quad \frac{\partial^2 f(1,1)}{\partial y^2}=\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$\frac{\partial^2 f(1,1)}{\partial x\partial y}=\frac{1}{2\sqrt{2}},\quad \frac{\partial^3 f(1,1)}{\partial x^3}=\frac{\partial^3 f(1,1)}{\partial y^3}=-\frac{3}{4\sqrt{2}},$$

$$\frac{\partial^3 f(1,1)}{\partial x^2\partial y}=\frac{\partial^3 f(1,1)}{\partial y^2\partial x}=\frac{1}{4\sqrt{2}}.$$

...ci

$$T_3(x,y)=\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}(x+y-2)+\frac{1}{2!\,2\sqrt{2}}\times$$

$$[(x-1)^2+2(x-1)(y-1)+(y-1)^2]-\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{4\sqrt{2}}\times$$

$$\ldots-1)^3+(y-1)(x-1)^2+(y-1)^2(x-1)^2+(y-1)^{\ldots}$$

...*. Pentru funcţia*

$$f(x,y)=x^y,\ x>0,\ y>0,$$

... ...crie polinomul lui Taylor de gradul al treilea în punc... (1, 1). Să se deducă valoarea aproximativă pentru (1,1; 1,2).

...m

$$\ldots=1,\quad \frac{\partial f(1,1)}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial^2 f(1,1)}{\partial x^2}=0,\quad \frac{\partial^2 f(1,1)}{\partial x\partial y}=1,\quad \frac{\partial^2 f(1,1)}{\partial y^2}=\ldots$$

$$\frac{\partial^3 f(1,1)}{\partial x^3}=0,\quad \frac{\partial^3 f(1,1)}{\partial x^2\partial y}=1,\quad \frac{\partial^3 f(1,1)}{\partial x\partial y^2}=0,\quad \frac{\partial^3 f(1,1)}{\partial y^3}=0.$$

De...i

$$T_3(x,y)=1+\frac{1}{1!}(x-1)+\frac{1}{2!}[2(x-1)(y-1)]+$$

$$+\frac{1}{2!}(x-1)^2(y-1).$$

Să punem $x=1{,}1$, $y=1{,}2$. Atunci

$$(1,1)^{1,2}\approx 1+0{,}1+0{,}1\times 0{,}2+\frac{1}{2!}(0{,}1)^2(0{,}2)=1{,}1021.$$

Exerciţii propuse spre rezolvare

823. *Să se scrie polinomul lui Taylor de gradul al treilea pe... ...ru funcţia*

$$f(x,y)=e^x\sin y,\ \text{în origine}.$$

R. $y+xy+\frac{1}{2}x^2y-\frac{1}{6}\ldots$

824. *Să se scrie polinomul lui Taylor de gradul n pentru func...*

$$f(x,y)=e^{x+y},\ \text{în punctul } (1,-1).$$

R. $\sum_{k=0}^{n}\sum_{p=0}^{n}\frac{(x-1)^k(y+1)^p}{k!\,p!},\ k+p\leqslant\ldots$

3.5. Extremele funcţiilor de două variabile

Fie dată funcţia f de variabilele x şi y definită pe mul...nea $A\subset R^2$.

Punctele de extrem ale funcţiei date sînt soluţii ale sis...mului

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=0. \quad (\ldots$$

Fie $M(x_0,y_0)$ un punct în care sînt verificate relaţiile (...) şi să notăm

$$\Delta=\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2}-\left[\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x\partial y}\right]^2.\ (\ast)$$

$$\Delta > 0 \text{ şi } \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} < 0 \text{ sau } \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2} < 0,$$

punctul $M(x_0, y_0)$ este un punct de maxim pentru funcţia dat

Dacă

$$\Delta > 0 \text{ şi } \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} > 0 \text{ sau } \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2} > 0,$$

punctul $M(x_0, y_0)$ este un punct de minim pentru funcţia f.

Dacă $\Delta < 0$, funcţia nu are extrem.

Dacă $\Delta = 0$, pentru a preciza natura punctului trebuie st diate derivatele parţiale de ordin superior.

Dacă se cere să se calculeze extremul funcţiei $z = f(x, y$ x şi y fiind legate între ele prin relaţia $\varphi(x, y) = 0$, se proc dează în modul următor.

Se caută extremul funcţiei

$$F(x, y) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y).$$

Constanta λ şi punctele de extrem se determină din sistem

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = 0, \quad \varphi(x, y) = 0.$$

Se cercetează apoi dacă soluţia x_0, y_0 astfel determinată re lizează extremul funcţiei $F(x, y)$.

Exerciţii rezolvate

Să se găsească extremele următoarelor funcţii:

825. $f(x, y) = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}$, $x > 0$, $y > 0$.

Conform teoriei generale, extremele funcţiei sînt soluţii al sistemului

Soluţia sistemului (1) este $x = 5$, $y = 2$. Avem

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} = \frac{100}{x^3}, \quad \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} = \frac{40}{y^3}, \quad \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} = 1,$$

$$\frac{\partial^2 f(5, 2)}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f(5, 2)}{\partial y^2} - \left[\frac{\partial^2 f(5, 2)}{\partial x \partial y}\right]^2 = 3.$$

Deoarece $\frac{\partial^2 f(5, 2)}{\partial x^2} > 0$, funcţia dată are un minim, valoare minimului fiind $f(5, 2) = 30$.

826. $f(x, y) = xy \ln(x^2 + y^2)$, $x^2 + y^2 \neq 0$.

Avem

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = y \ln(x^2 + y^2) + \frac{2x^2 y}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} =$$

$$= x \ln(x^2 + y^2) + \frac{2xy^2}{x^2 + y^2}.$$

Rezolvăm sistemul

$$y \ln(x^2 + y^2) + \frac{2x^2 y}{x^2 + y^2} = 0, \quad x \ln(x^2 + y^2) + \frac{2xy^2}{x^2 + y^2} = 0.$$

Din prima ecuaţie obţinem $y = 0$ sau $\ln(x^2 + y^2) + \frac{2x^2}{x^2 + y^2} =$

ar din a doua ecuaţie obţinem $x = 0$ sau $\ln(x^2 + y^2) + \frac{2y^2}{x^2 + y^2} =$

Avem următoarele posibilităţi:

1) $y = 0$ şi $\ln(x^2 + y^2) + \frac{2y^2}{x^2 + y^2} = 0$, din care obţine

$$\ln x^2 = 0; \; x = \pm 1.$$

2) $x = 0$ şi $\ln(x^2 + y^2) + \frac{2x^2}{x^2 + y^2} = 0$, din care obţine

$$\ln y^2 = 0;\ y = \pm 1.$$

3) $\ln (x^2 + y^2) + \dfrac{2x^2}{x^2 + y^2} = 0,$

$$\ln (x^2 + y^2) + \frac{2y^2}{x^2 + y^2} = 0.$$

Scăzînd a doua ecuație din prima, deducem $x^2 - y^2 =$ $x = \pm y$. Introducînd într-una din ecuații, găsim $\ln 2x^2 = -$ de unde $2x^2 = e^{-1}$, $x^2 = \dfrac{1}{2e}$, $x = \pm \sqrt{\dfrac{1}{2e}}$.

În acest caz, sîntem conduși la următoarele rezultate:

$$x = \pm \sqrt{\frac{1}{2e}} \text{ și } y = \pm \sqrt{\frac{1}{2e}},$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{1}{2e}} \text{ și } y = \mp \sqrt{\frac{1}{2e}}.$$

Pentru a cerceta comportarea funcției date pentru soluț astfel determinate, vom calcula în prealabil derivatele de ordi al doilea ale funcției. Avem

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} = \frac{2xy}{x^2 + y^2}\left[1 + \frac{2y^2}{(x^2 + y^2)^2}\right], \quad \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} = \frac{2xy}{x^2 + y^2} \times$$

$$\times \left[1 + \frac{2y^2}{(x^2 + y^2)^2}\right], \quad \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} = \ln (x^2 + y^2) + 2\frac{x^4 + y^4}{(x^2 + y^2)^2}.$$

În punctele $x = 0$, $y = \pm 1$, obținem

$$\frac{\partial^2 f(0, \pm 1)}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 f(0, \pm 1)}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 f(0, \pm 1)}{\partial x \partial y} = 2.$$

Prin urmare $\Delta < 0$ și funcția nu are extrem.

Rezultate analoge se obțin în punctele $y = 0$, $x = \pm 1$.

Să cercetăm comportarea funcției în punctul $x = y = \dfrac{1}{\sqrt{2e}}$.

Deducem

$$\frac{\partial^2 f\left(\frac{1}{\sqrt{2e}}, \frac{1}{\sqrt{2e}}\right)}{\partial x^2} = \ln \frac{1}{e} + 1 = 0.$$

Deci $\Delta = (1 + e)^2 > 0$.

Deoarece $\dfrac{\partial^2 f\left(\frac{1}{\sqrt{2e}}, \frac{1}{\sqrt{2e}}\right)}{\partial x^2} > 0$, rezultă că în punctul $x = y = \dfrac{1}{\sqrt{2e}}$ funcția are un minim, valoarea minimului fiind $-\dfrac{1}{2e}$.

Rezultate analoge se obțin și în punctul $x = y = -\dfrac{1}{\sqrt{2e}}$.

În sfîrșit, pentru cazul $x = \dfrac{1}{\sqrt{2e}}$, $y = -\dfrac{1}{\sqrt{2e}}$ găsim

$$\frac{\partial^2 f\left(\frac{1}{\sqrt{2e}}, -\frac{1}{\sqrt{2e}}\right)}{\partial x^2} = -(1 + e), \quad \frac{\partial^2 f\left(\frac{1}{\sqrt{2e}}, -\frac{1}{\sqrt{2e}}\right)}{\partial y^2} =$$

$$= -(1 + e), \quad \frac{\partial^2 f\left(\frac{1}{\sqrt{2e}}, -\frac{1}{\sqrt{2e}}\right)}{\partial x \partial y} = 0.$$

Rezultă că în punctul $x = \dfrac{1}{\sqrt{2e}}$, $y = -\dfrac{1}{\sqrt{2e}}$, funcția are un maxim. Valoarea maximului este $\dfrac{1}{2e}$.

827. *Să se calculeze extremele funcției* $f(x, y) = x^2 + y^2$ *cu condiția* $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$.

Avem

$$F(x, y) = x^2 + y^2 + \lambda\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1\right),$$

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = 2x + \frac{\lambda}{a}, \quad \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = 2y + \frac{\lambda}{b}.$$

Soluția sistemului $\dfrac{\partial F(x, y)}{\partial x} = 0$, $\dfrac{\partial F(x, y)}{\partial y} = 0$ este

$$x = -\frac{\lambda}{2a}, \quad y = -\frac{\lambda}{2b}. \tag{1}$$

Introducînd valorile (1) în ecuația $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, obținem

$$\lambda = \frac{-2a^2b^2}{a^2 + b^2}.$$

Deoarece $\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial y^2} = 2$, rezultă că în punctul $x = \frac{ab^2}{a^2 + b^2}$, $y = \frac{a^2 b}{a^2 + b^2}$ funcția dată are un extrem, valoarea extremului fiind $\frac{a^2b^2}{a^2 + b^2}$.

Exerciții propuse spre rezolvare

Să se găsească extremele următoarelor funcții:

828. $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$.

R. Funcția are un minim în punctul $x = 1$, $y = 1$, valoarea minimului fiind -1.

829. $f(x, y) = \sin x \sin y \sin (x + y)\ (0 \leqslant x \leqslant \pi, 0 \leqslant y \leqslant \pi)$.

R. Funcția are un minim în punctul $x = y = \frac{2\pi}{3}$, valoarea minimului fiind $-\frac{3\sqrt{3}}{8}$, și un maxim în punctul $x = y = \frac{\pi}{3}$, valoarea maximului fiind $\frac{3\sqrt{3}}{8}$.

830. $f(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ *pentru* $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{a^2}$.

R. Funcția are un minim în punctul $(-a\sqrt{2}, -a\sqrt{2})$, valoarea minimului fiind $-\frac{\sqrt{2}}{a}$, și un maxim în punctul $(a\sqrt{2}, a\sqrt{2})$, valoarea maximului fiind $\frac{\sqrt{2}}{a}$.

BIBLIOGRAFIE

Acad. *Miron Nicolescu*, Analiza matematică, vol. I, București, Editura Tehnică, 1957.

Acad. *Miron Nicolescu*, Analiza matematică, vol. II, București, Editura Tehnică, 1958.

Acad. *M. Nicolescu, N. Dinculeanu, S. Marcus*, Manual de analiză matematică, vol. I, București, Editura Didactică și Pedagogică, 1962.

Miron Nicolescu, Analiză matematică, vol. II, București, Editura Academiei R.P.R., 1953.

B.P. Demidovici, Culegere de probleme și exerciții de analiză matematică (traducere din limba rusă), București, Editura Tehnică, 1956.

Берман Г.К. Сборник задач по курсу математического анализа, Издание шестое, Государственное издательство технико-теоретической литературы, Москва, 1956.

Н.А. Давыдов, П.П. Коровкин, В.Н. Никольский, Сборник задач по математическому анализу, Учпедгиз, Москва, 1953.

Lebesque H., Leçon sur l'integration et la recherche des fonctions primitives, Deuxième édition, Paris, Gauthier-Villars, 1928.

М.К. Гребенча и С.И. Новоселов, Курс математического анализа, том. 1, Учпедгиз, Москва, 1953.

Г. Полия и Г. Сеге, Задачи и теоремы из анализа, издание второе, Государственное издательство технико-теоретической литературы, Москва, 1956.

N. Bourbaki, Derivée et l'intégration, Paris, Hermann, 1947.

69
24
45

1983
45
38