Curs 13 11.01.2022

Inelul de polinoame $K[X]$ (K corp comutativ)

- K corp (= inel în care orice element nenul e inversabil)
  K corp comutativ dacă e corp și $x\cdot y = y\cdot x$ $(\forall)$ $x,y\in K$.
  - $n\geq 2$ $(\mathbb{Z}_n,+,\cdot)$ e corp $\iff$ n e prim
  - exemple de corpuri comutative: $(\mathbb{Q},+,\cdot)$, $(\mathbb{R},+,\cdot)$, $(\mathbb{C},+,\cdot)$, $(\mathbb{Z}_p,+,\cdot)$

$$K[X] = \{ \underbrace{a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n}_{\text{polinom}} \mid a_0,\dots,a_n\in K,\ n\in\mathbb{N}\}$$

polinom (de grad n dacă $a_n\neq 0$) ; gradul pol. nul este $-\infty$.

$f(x) = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n$ $(\text{grad}(f)=n \iff a_n\neq 0)$. De. $a_n = 1$ atunci f s.n. polinom monic.

a_n – coef. dominant

Reamintesc $\text{grad}(f+g) \leq \max\{\text{grad}(f), \text{grad}(g)\}$
$\text{grad}(f\cdot g) \leq \text{grad}(f) + \text{grad}(g)$

În $K[X]$ avem $\text{grad}(f\cdot g) = \text{grad}(f) + \text{grad}(g)$.

$(K[X],+,\cdot)$ – inel com (e domeniu de integritate)

$+,\cdot$ – adunare și înm.a polinoamelor

Proprietăți ale lui $K[X]$ (sunt similare cu ale inelului $(\mathbb{Z},+,\cdot)$)

1. $K[X]$ e domeniu de integritate și $U(K[X]) = K\setminus\{0\}$

2. **Propoziție** Fie $f: K\to S$ un morfism de inele ($(S,+,\cdot)$ - inel com) și $b\in S$. Funcția $\tilde{f}: K[X]\to S$ definită:
$$\tilde{f}(a_0+a_1X+\dots+a_nX^n) = f(a_0)+f(a_1)\cdot b+\dots+f(a_n)\cdot b^n$$
este un morfism de inele.

Exemplu Fie $K=\mathbb{Q}$, $S=\mathbb{R}$ $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{R}$ $f(a)=a$ $(\forall)$ $a\in\mathbb{Q}$.
$b=\sqrt{2}$ $\tilde{f}:\mathbb{Q}[X]\to\mathbb{R}$ $\tilde{f}(a_0+a_1X+\dots+a_nX^n) = a_0+a_1\sqrt{2}+\dots+a_n(\sqrt{2})^n$
→ morfism de inele

3. **Teorema împărțirii cu rest** Fie $f(x), g(x)\in K[X]$ cu $g(x)\neq 0$.
Atunci există și sunt unice polinoamele $q(x), r(x)\in K[X]$ a.î.

$$f(x) = g(x)\cdot q(x) + r(x) \quad \text{cu} \quad \text{grad}(r(x)) < \text{grad}(g(x))$$

Exemplu Aplicați teorema împărțirii cu rest pentru polinoamele $f(x) = x^3-3x+2$, $g(x) = 2x+1$, $f(x), g(x) \in \mathbb{Q}[x]$.

$$\begin{array}{l|l}
x^3 - 3x + 2 & 2x+1 \\ \hline
-x^3 - \frac{1}{2}x^2 & \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{11}{8} \\ \hline
/\ -\frac{1}{2}x^2 - 3x + 2 & \\
+\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x & \\ \hline
/\ -\frac{11}{4}x + 2 & \\
+\frac{11}{4}x + \frac{11}{8} & \\ \hline
/\ \frac{27}{8} &
\end{array}$$

$$\underbrace{x^3-3x+2}_{f(x)} = \underbrace{(2x+1)}_{g(x)} \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{11}{8}\right)}_{q(x)} + \underbrace{\frac{27}{8}}_{r(x)}$$

$$(\text{grad}\, r(x) = 0 < 1 = \text{grad}(2x+1))$$

4) **Teorema lui Bézout** Fie $f(x) \in K[x]$ și $a \in K$. Atunci restul împărțirii lui $f(x)$ la $X-a$ este $f(a)$. În particular, a este rădăcină a lui f $\left(\overset{def}{\Longleftrightarrow} f(a) = 0\right) \Longleftrightarrow f(x) = (X-a)\cdot q(x)$ pentru un $q(x) \in K[x]$.
(vezi mai jos)

Dem T. împ. cu rest $\Rightarrow f(x) = (X-a)\cdot q(x) + r(x)$ cu $\text{grad}(r(x)) < \underbrace{\text{grad}(X-a)}_{1}$

$\Rightarrow r(x) = r \in K \qquad f(x) = (X-a)\cdot q(x) + r$

$X = a \rightsquigarrow f(a) = \underbrace{(a-a)}_{0}\cdot q(a) + r = r \Rightarrow$ ☒

Obs În exemplul anterior puteam calcula restul împărțirii lui $f(x) = x^3-3x+2$ la $g(x) = 2x+1$ astfel:

(Bézout) $\Rightarrow f(x) = g(x)\cdot q(x) + f\left(-\frac{1}{2}\right) \qquad f\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^3 - 3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) + 2 =$

$= -\frac{1}{8} + \frac{3}{2} + 2 = \frac{11}{8} + 2 = \frac{27}{8}$

Def 2) Fie $f(x) \in K[x]$, $b \in K$. b s.n. rădăcină a lui f dacă $f(b) = 0$.

1) Dacă $f(x) \in K[x]$ $f(x) = a_0 + a_1X + \ldots + a_nX^n$ (de exemplu $f(x) = 3+2x+x^3$) și K e subinel al lui S (de exemplu $K = \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} = S$), $b \in S$ (de ex

$b=\sqrt{2}\in\mathbb{R}$) atunci $f(b)=a_0+a_1b+\dots+a_nb^n$ s.n. valoarea polinomului $f(x)$ în b (de ex. $f(\sqrt{2})=3+2\sqrt{2}+\underbrace{(\sqrt{2})^3}_{2\sqrt{2}}=3+4\sqrt{2}$).

$\boxed{Q1}$ Dat un polinom neconstant $f(x)\in K[x]$ pot să-i aflu rădăcinile? Dar numărul lor?

Exemple 1) $f(x)=x^2+1\in\mathbb{R}[x]$. f nu are rădăcini reale

2) $f(x)=x^2-2\in\mathbb{R}[x]\Rightarrow f$ are rădăcinile reale $\sqrt{2},-\sqrt{2}$

3) $f(x)=(x-1)^2\in\mathbb{R}[x]\Rightarrow f$ are o rădăcină (pe 1) cu ordin de multiplicitate 2

4) $f(x)=(x-1)^3(x+2)\in\mathbb{R}[x]\Rightarrow f$ are ca rădăcini pe 1 și -2; 1 are ordin de multiplicitate 3, iar -2 are ordin de multiplicitate 1 (s.n. rădăcină simplă)

5. Un polinom nenul $f(x)\in K[x]$ are cel mult grad(f) rădăcini.

$\boxed{Q2}$ Ce legătură există între rădăcinile unui polinom și coeficienții polinomului?

6. Teoremă (Relațiile lui Viète) Fie $f(x)=a_0+a_1X+\dots+a_nX^n\in K[X]$ cu $a_n\neq 0$, $n\geq 1$. Presupunem că $f(x)$ are n rădăcini (nu neapărat distincte) $\alpha_1,\dots,\alpha_n\in K$. Atunci

$$f(x)=a(X-\alpha_1)\cdot\ldots\cdot(X-\alpha_n)$$

și au loc următoarele relații:

$$(*)\quad\begin{cases}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n=-\dfrac{a_{n-1}}{a_n}\\ \sum_{1\leq i<j\leq n}\alpha_i\alpha_j=\alpha_1\alpha_2+\dots+\alpha_1\alpha_n+\alpha_2\alpha_3+\dots+\alpha_2\alpha_n+\dots+\alpha_{n-1}\alpha_n=\dfrac{a_{n-2}}{a_n}\\ \dots\\ \alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n=(-1)^n\dfrac{a_0}{a_n}\end{cases}$$

Exemplu Polinomul $P(X) = 1\cdot X^3 + 3X + 1 \in \mathbb{C}[X]$ are 3 rădăcini complexe $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Calculați $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2$.

Din Viète $\Rightarrow$
$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = -\frac{0}{1} = 0 \\ \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3 = \frac{3}{1} = 3 \\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3 = -1 \cdot \frac{1}{1} = -1 \end{cases}$$

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)^2 - 2(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3) = 0 - 2\cdot 3 = -6 \Rightarrow$$

P are o rădăcină reală și 2 răd. complexe nereale

Combinând Q1 cu Q2 putem întreba dacă, dat un polinom neconstant $f(X) \in \mathbb{C}[X]$ îi pot determina rădăcinile "în funcție" de coeficienții săi?

- ⚁ DA pentru orice polinom de grad 2 (făcută în antichitate)
- ⚂ DA pentru orice polinom de grad 3 ("formulele lui Cardano" $\rightsquigarrow$ 1545)
- ⚃ DA pentru orice polinom de grad 4 (Ferrari $\rightarrow$ sec. 16)
- ⚄ NU pentru polinoame generale de grad ≥ 5 (Abel 1829 pe baza teoriei lui Galois)

Teorema fundamentală a algebrei (T.F.A) Orice polinom neconstant $f(X) \in \mathbb{C}[X]$ are exact grad(f) rădăcini. (din la început de secol 19)

Obs Dacă punem în loc de $\mathbb{C}$ pe $\mathbb{Q}$ sau $\mathbb{R}$ atunci enunțul nu mai e adevărat (vezi Ex 1 anterior)