Laborator 5

3.11.2021

A apărut și ca experiment la „Mith busters" cândva.

← **Exercițiu** („The Monty Hall problem")

La un show TV sunt 3 uși; în spatele uneia este o mașină, iar în spatele celorlalte sunt două capre. Doar moderatorul știe ce se află în spatele fiecărei uși.

Inițial, concurentul alege o ușă (fără ca aceasta să se deschidă). Apoi moderatorul deschide o ușă dintre cele două rămase, la întâmplare, dar în spatele căreia se află o capră.

Acum concurentul are opțiunea de a schimba ușa aleasă inițial cu cealaltă rămasă nedeschisă. Cum e mai bine să procedeze (ce strategie își crește șansele de câștig): să schimbe sau nu?

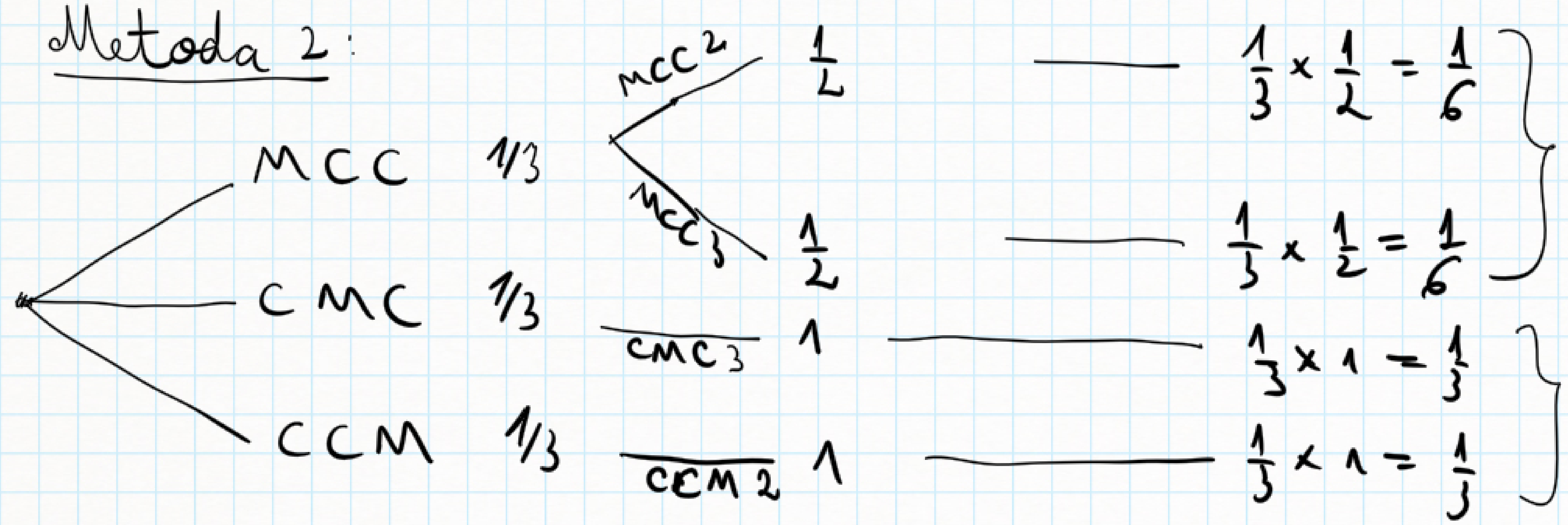
! Datorită simetriei, putem să pp. că jucătorul a ales ușa nr 1 (inițial).

$\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$

Metoda 1:

Ușa 1	Ușa 2	Ușa 3	Nu schimbăm	Schimbăm
M	C	C	✓	
C	M	C		✓
C	C	M		✓

Metoda 2:



„TRUCUL" (Bayes): $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$

Concluzia: Dacă rămânem cu ușa 1, șansa ca în spatele ei să fie o mașină este $\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$.
Dacă schimbăm ușa, atunci șansa să nimerim ușa cu mașina este egală cu $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3} > \frac{1}{3}$.
$\Rightarrow$ Dacă jucătorul își schimbă alegerea, atunci își crește șansele de câștig.

Metoda 3:

Notăm cu

U_i = evenimentul ca moderatorul să deschidă ușa i $\quad (i \in \{1, 2, 3\})$

m_i = evenimentul ca mașina să se afle în spatele ușii i

Acum, din contextul problemei rezultă că:

$\mathbb{P}(U_3 \mid m_1) = \mathbb{P}(U_2 \mid m_1) = \frac{1}{2}$

$\mathbb{P}(U_3 \mid m_2) = 1$, $\mathbb{P}(U_2 \mid m_3) = 1$ # jucătorul a ales ușa 1.

Ne interesează: $\boxed{\mathbb{P}(m_2 \mid U_3)}$ și $\mathbb{P}(m_3 \mid U_2)$.
Ne ocupăm de prima probabilitate condiționată, fiindcă cealaltă se calculează similar.

$$\mathbb{P}(m_2 \mid U_3) = \frac{\mathbb{P}(U_3 \mid m_2) \cdot \mathbb{P}(m_2)}{\mathbb{P}(U_3)} = \frac{\mathbb{P}(U_3 \mid m_2) \cdot \mathbb{P}(m_2)}{\mathbb{P}(U_3 \mid m_1) \cdot \mathbb{P}(m_1) + \mathbb{P}(U_3 \mid m_2) \cdot \mathbb{P}(m_2) + \mathbb{P}(U_3 \mid m_3) \cdot \mathbb{P}(m_3)} =$$

$$= \frac{1 \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{6} + \frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{3}}{3/6} = \frac{1/3}{1/2} = \boxed{\frac{2}{3}}$$

! A se vedea script R pentru simularea jocului.

<u>Aplicația 2</u>: ruina jucătorului

O persoană vrea să își cumpere un obiect care costă N unități monetare (u.m.). Se știe că aceasta a economisit k u.m., cu $0 < k < N$, iar restul încearcă să-l câștige jucând un joc de noroc. Regulile jocului sunt următoarele:

- jucătorul aruncă o monedă echilibrată
- dacă apare H, atunci persoana câștigă 1 u.m.; altfel, plătește 1 u.m.
- jocul continuă până când se realizează unul dintre evenimentele:
  - sau jucătorul pierde toți banii și ajunge în ruină (0 u.m.)
  - sau jucătorul câștigă suma necesară, de N u.m.

Care este probabilitatea ca jucătorul să ajungă la faliment?

Soluție:

Notăm cu:

A_k = evenimentul ca jucătorul care are capitalul inițial k să sfârșească jocul ruinat

$p_k = P(A_k)$

Din regulile jocului este clar pentru moment că:

$p_0 = 1$, $p_N = 0$ — cazurile extreme

TRUC Considerăm B = evenimentul ca la PRIMA aruncare să pice H.

Din formula probabilității totale obținem că:

$$P(A_k) = P(A_k | B) \cdot \underbrace{P(B)}_{=1/2} + P(A_k | B^c) \cdot \underbrace{P(B^c)}_{=1/2}$$

$$\Rightarrow \quad p_k = \underbrace{\mathbb{P}(A_k \mid B)}\cdot \frac{1}{2} + \underbrace{\mathbb{P}(A_k \mid B^c)}\cdot \frac{1}{2} \qquad (*)$$

Dar dacă la <u>prima</u> aruncare apare H, atunci este ca și cum am începe din nou jocul, cu capitalul inițial $k+1$. Consecutiv, $\mathbb{P}(A_k \mid B) = \mathbb{P}(A_{k+1}) \overset{not}{=} p_{k+1}$. Similar, dacă la prima aruncare apare T, atunci capitalul devine $k-1$, deci avem $\mathbb{P}(A_k \mid B^c) = \mathbb{P}(A_{k-1}) = p_{k-1}$.

Relația $(*)$ devine acum:

$$p_k = p_{k+1}\cdot \frac{1}{2} + p_{k-1}\cdot\frac{1}{2}, \qquad k \geq 1$$

Observăm că: $\quad p_k - p_{k-1} = p_{k+1} - p_k, \quad k \geq 1,$

deci $(p_k)_k$ este o progresie aritmetică cu rația $r = p_k - p_{k-1}$. Așadar, putem scrie:

$$p_k = p_0 + k\cdot r, \qquad k \geq 1$$

$$p_k = 1 + k\cdot \underset{?}{r}$$

Mai știm că $p_N = 0$

$$\Rightarrow \quad 1 + N\cdot r = 0$$

$$\Rightarrow \quad r = -\frac{1}{N}$$

În concluzie, $\boxed{p_k = 1 - \frac{k}{N}}$.

*A se vedea script R pt. simulare joc & altele. ▢

Aplicația 3: jocul de loto

Să presupunem că la extragerea loto de duminică seara au fost selectate 6 numere câștigătoare: 31, 7, 17, 15, 10, 42, iar toți cei $10^5 = 100.000$ de locuitori ai unui orășel și-au cumpărat un bilet. O persoană pierde dacă a nimerit cel mult 2 din cele 6 numere extrase.

Care este probabilitatea ca o persoană să piardă?

Soluție:

Pentru $k \in \{0, 1, \dots, 6\}$, notăm cu A_k evenimentul ca jucătorul să fi nimerit exact k numere din cele 6 câștigătoare.

Obs: [E similar cu exc. cu bile albe & bile negre; putem gândi că cele 6 nr câștigătoare sunt bile albe, de pildă.

Avem că:

→ cele k nr. (nimerite) dintre cele 6 nr câștigătoare pot fi alese în C_6^k moduri $\left\{ \binom{6}{k} \overset{not}{=} C_6^k \right.$

→ celelalte $6-k$ nr. pot fi alese în $C_{49-6}^{6-k} = C_{43}^{6-k}$.

Prin urmare, $\boxed{\mathbb{P}(A_k) = \dfrac{C_6^k \cdot C_{43}^{6-k}}{C_{49}^6}}$, $\forall k \in \{0, 1, \dots, 6\}$.

Deci probabilitatea ca o persoană să piardă (i.e. să nimerească doar 0, 1 sau 2 nr. din cele 6 câștigătoare) este:

$$P(A_0 \cup A_1 \cup A_2) \underset{\text{ev. disjuncte}}{=} P(A_0) + P(A_1) + P(A_2) = \frac{C_6^0 \cdot C_{43}^6 + C_6^1 \cdot C_{43}^5 + C_6^2 \cdot C_{43}^4}{C_{49}^6} \approx 0.9813625.$$

A se vedea codul R.

! A se vedea script R pt. frecvența relativă.