S1

Punctaj seminar : 50p — 25p test; 25p activitate + prezența

examen scris : 60p

Cum scriem demonstrații?

① Nu demonstrăm decât adevăr! (pt. a demonstra că o propoziție p e falsă, vom demonstra că e adevărată contrara ei $\neg p$!)

p	$\neg p$	$\neg(\neg p)$
0	1	0
1	0	1

$\neg\neg p \equiv p$ echivalente logic

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$	$\neg(p \vee q)$
0	0	0	0	1
0	1	1	0	0
1	0	1	0	0
1	1	1	1	0

$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$
$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$ } Regulile lui de Morgan

// def. lui $p \vee q$ prin tabela de adevăr

$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

$p \to q \overset{def}{=} \neg p \vee q$ // p implică q / dacă p atunci q

Obs $\neg(p \to q) \equiv p \wedge \neg q$

r: dacă $\underbrace{\text{vrei cu adevărat}}_{p}$, $\underbrace{\text{poți}}_{q}$.

$r \equiv p \to q$
$\neg r \equiv p \wedge \neg q$
$\neg r$: vrei cu adevărat ~~și~~ dar nu poți.

$\boxed{Ex}$ $P(x)$: $x \in \mathbb{Z}$, $2x+3=7$ predicat

$2.0+3=7$ F
$2.1+3=7$ F
$2.2+3=7$ A
...

$x \in \mathbb{Z}$ $3x+1=7$
$3.0+1=7$ F
$3.1+1=7$ F
$3.2+1=7$ A

. Există măcar o valoare $x \in \mathbb{Z}$ pt. care $P(x)$ e adev.

$\exists x\ P(x)$
$\exists x \in \mathbb{Z}\ 2x+3=7$ } notații — Adevăr ⇒ propoziție

$\exists x \in \mathbb{Z}\ 3x+1=7$

. Pentru orice valoare $x \in \mathbb{Z}$ $P(x)$ e adev.

$\forall x\ P(x)$
$\forall x \in \mathbb{Z}\ 2x+3=7$ } notații — Fals ⇒ propoziție

$\forall x \in \mathbb{Z}\ 3x+1=7$

$\forall, \exists$ cuantificatori logici

$\neg(\exists x\ P(x)) \equiv \forall x\ \neg P(x)$
$\neg(\forall x\ P(x)) \equiv \exists x\ \neg P(x)$

$\forall a \in \mathbb{R}\ \exists b \in \mathbb{Q}\ a^2+b \geq 5$

$\neg($ — " — $) \Rightarrow \exists a \in \mathbb{R}\ \forall b \in \mathbb{Q}\ a^2+b<5$

r: $\exists u \in \mathbb{Q}\ \exists v \in \mathbb{Q}\ 2u-5v>4$

$\neg r$: $\exists u \in \mathbb{Q}\ \forall v \in \mathbb{Q}\ 2u-5v \leq 4$

② În scrierea demonstrațiilor trebuie să mergem, folosind implicații, de la <u>ce știm</u> la <u>ce vrem să arătăm</u>.

$\boxed{2012}$

Exp. Arătați că $\forall x \in \mathbb{R}$ $x^6 \geq 8x^3 - 20$.

Dem. Fie $x \in \mathbb{R}$. Atunci $(x^3-4)^2 \geq 0 \Rightarrow x^6 - 8x^3 + 16 \geq 0 \Rightarrow x^6 \geq 8x^3 - 16 \geq 8x^3 - 20$ □

$\forall x \in \mathbb{R}$ $x^{10} \geq 6x^5 - 17$; $(x^5-3)^2 \geq 0 \Rightarrow x^{10} - 6x^5 + 9 \geq 0$
$x^{10} \geq 6x^5 - 9 \geq 6x^5 - 17$ □

APARENTĂ excepție: Metoda reducerii la absurd

(presupunem că e falsă concluzia, după niște raționamente, ajungem la contradicție cu ipoteza)

Exp Arătați că scăderea nr. reale nu admite elem. neutru.

Dem. Pp. că are elem. neutru.

Fie elem. e. At. $e - 0 = 0 \Rightarrow e = 0$
$e - 1 = 1 \Rightarrow e = 2$ $\Big\} \Rightarrow 0 = 2$ abs

// la pg. 114 o rez. diferită

Rămâne că scăderea nr. reale nu admite elem. neutru. □

$\neg q \to \neg p \equiv \neg(\neg q) \vee \neg p \equiv q \vee \neg p \equiv \neg p \vee q \equiv p \to q$

③ Dacă vrem să demonstrăm o propoziție de tipul $\exists x\ P(x)$ considerăm o valoare (admisibilă) convenabilă („LUĂM") pt x și facem demonstrația cu ea.

Exp

1) Arătați că $\exists x \in \mathbb{Z}$ ai $x^2 + 48x = -407$

Dem Luăm $x = -11$

$x^2 + 48x = 121 - 528 = -407$ □

$\exists x \in \mathbb{Q}$ ai $x^2 = 40x - 319$

Luăm $x = 11$

$x^2 = 121 = 440 - 319 = 40x - 319$

2) Dem. că $\exists x \in \mathbb{Q}$ și $\exists y \in \mathbb{Q}$ $2x + y > 3$

Dem $x = 1, y = 2$

$2x + y = 2 \cdot 1 + 2 = 4 > 3$ □

$\exists x \in \mathbb{R}$ $\exists y \in \mathbb{R}$, $x^2 + 5y > 14$

Luăm $x = 10$ $y = 5$

$x^2 + 5y = 100 + 5 \cdot 5 = 125 > 14$

④ Dacă vrem să demonstrăm o propoziție de tipul $\forall x\ P(x)$ considerăm o valoare (admisibilă) arbitrară („FIE") pt. x și facem demonstrația folosind proprietățile generale ale variabilelor de tipul lui x.

Exp GO TO 2012

~~TEMĂ~~ $x \in \mathbb{Q}$ $y \in \mathbb{Q}$ $3x + 5y = 4$

$\exists x \in \mathbb{Q}$ $\exists y \in \mathbb{Q}$ $3x + 5y = 4$ A

$x \in \mathbb{Q}$ $y \in \mathbb{Q}$ $3x + 4y = 5$

$\exists x \in \mathbb{Q}$ $\exists y \in \mathbb{Q}$ $3x + 4y = 5$ A

⑤ Dacă într-un enunț apar mai mulți cuantificatori, îi abordăm conform regulilor ③ și ④ în ordinea în care apar

Dem Luăm $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{2}$

$3x + 5y = 3 \cdot \frac{1}{2} + 5 \cdot \frac{1}{2} = 4$ □

Luăm $x = 0$, $y = \frac{5}{4}$

$3x + 4y = 3 \cdot 0 + 4 \cdot \frac{5}{4} = 5$ □

. $\forall x \in \mathbb{Q}$ $\exists y \in \mathbb{Q}$ $3x + 5y = 4$ A

Fie $x \in \mathbb{Q}$. Luăm $y = \frac{4-3x}{5}$

$3x + 5y = 3x + 5 \cdot \frac{4-3x}{5} = 4$ □

. $\forall x \in \mathbb{Q}$ $\exists y \in \mathbb{Q}$ $3x + 4y = 5$ A

Fie $x \in \mathbb{Q}$. Luăm $y = \frac{5-3x}{4}$

$3x + 4y = 3x + 4 \cdot \frac{5-3x}{4} = 5$ □

⑥ . $\exists x \in \mathbb{Q}$ $\forall y \in \mathbb{Q}$ $3x + 5y = 4$ F

Fie $x \in \mathbb{Q}$. Luăm $y = -\frac{3x}{5}$

$3x + 5y = 3x + 5 \cdot \left(-\frac{3x}{5}\right) = 0 \neq 4$ □

. $\exists x \in \mathbb{Q}$ $\forall y \in \mathbb{Q}$ $3x + 4y = 5$ F

Fie $x \in \mathbb{Q}$. Luăm $y = -\frac{3x}{4}$

$3x + 4y = 3x + 4\left(-\frac{3x}{4}\right) = 0 \neq 5$

$\boxed{\text{TEMĂ}}$ 1) $\forall x \in \mathbb{Q}$ $\forall y \in \mathbb{Q}$ $3x + 5y = 4$

2) $x \in \mathbb{R}$. $y \in \mathbb{R}$ $x^2 - 3y \geq 2012$

– toate combinațiile de cuantificatori
– ghiciți val. de adevăr
– demonstrați!

1) $\forall x \in \mathbb{Q}$ $\forall y \in \mathbb{Q}$ $3x + 4y = 5$

2) $2x^2 + 3y^2 \leq 2012$

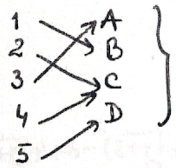
$\boxed{\text{Temă}}$ S144

$(\forall x\ \exists y\ \ x + y = 0) \neq (\exists y\ \forall x\ \ x + y = 0)$

$\forall$ și $\exists$ nu comută între ei!

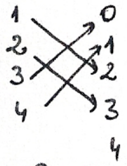
Cursul de lingvistică al lui Alan.

S2'

(α) 

nu e inj.

Def. O funcție s.n. injectivă dacă duce (orice două) valori diferite în valori diferite.

(α) 

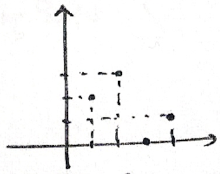
inj., nu e surj.

Def O fct. s.n. surjectivă dacă își umple codomeniul.

$\boxed{*}$ $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2+4x+1, & x \geq -2 \\ x-1, & x < -2 \end{cases}$ (β) $\boxed{\text{Temă}}$ S1 144

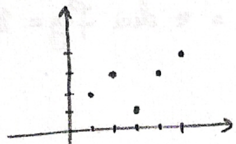
$g(x) = \begin{cases} x^2+4x+1, & x < -2 \\ x-1, & x \geq -2 \end{cases}$ $\boxed{\text{Temă}}$ S2 143

~~$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1^2+4x_1+1 = x_2^2+4x_2+1$~~



repr. fct. (α)

Obs O fct. $f: D \to E$ este surj. $\Leftrightarrow$ orice orizontală prin puncte din codomeniu taie graficul.

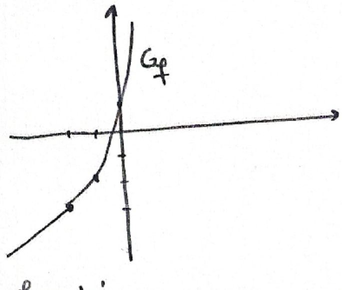


repr. fct. (α)

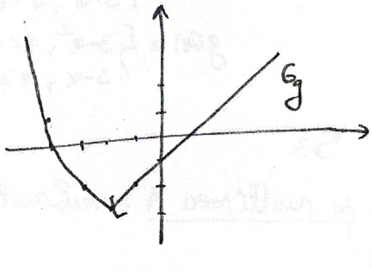
Obs O fct. $f: D \to E$ este inj $\Leftrightarrow$ orice orizontală taie graficul lui f cel mult o dată.

St. fct. (β): $f(1) = 6$, $f(0) = 1$, $f(-1) = -2$, $f(-2) = -3$

x	-4	-3	-2	-1	0
x^2+4x+1	1	-2	-3	-2	1



$\left.\begin{array}{l} f \text{ inj.} \\ f \text{ surj.} \end{array}\right\} \not\Rightarrow f \text{ bij.}$



g nu e inj
g nu e surj.

• f e inj:

$\forall x_1, x_2 \in \text{dom} f$, $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

Fie $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 \neq x_2$. St. a fixa ideile presupunem $x_1 < x_2$.

I $x_1 < x_2 < -2$. Atunci $x_1 - 1 < x_2 - 1$, deci $f(x_1) \neq f(x_2)$

II $x_1 < -2 \leq x_2$ $\left.\begin{array}{l} f(x_1) = x_1 - 1 < -3 \\ f(x_2) = (x_2+2)^2 - 3 \geq -3 \end{array}\right\} \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

III $-2 \leq x_1 < x_2 \Rightarrow 0 \leq x_1 + 2 < x_2 + 2 \Rightarrow (x_1+2)^2 < (x_2+2)^2 \Rightarrow x_1^2 + 4x_1 + 1 < x_2^2 + 4x_2 + 1 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

! St. funcții pe ramuri $\left\{\begin{array}{l} x_{1,2} \in \text{dom} f \\ x_1 \neq x_2 \end{array}\right. \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$! St. funcții cu „formulă" $\left\{ f(x_1) = f(x_2) \atop x_1 = x_2 \right.$

Dem.

„$\subseteq$" Fie $x \in 3\mathbb{Z} \cap (4\mathbb{Z}+1) \Rightarrow x \in 3\mathbb{Z}$ și $x \in 4\mathbb{Z}+1$ $\Rightarrow$ $\exists\, k, l \in \mathbb{Z}$ ai $x = 3k \wedge x = 4l+1$.

De aici $3k = 4l+1$ deci $\exists\, m \in \mathbb{Z}$ $l = 3m+2$ (calculați cazurile duc la contradicție!)

Rezultă $x = 4(3m+2)+1 = 12m+9$

„$\supseteq$" Fie $x \in 12\mathbb{Z}+9$.

$\exists\, k \in \mathbb{Z}$ $x = 12k+9 = 3(4k+3) \in 3\mathbb{Z}$

$= 4(3k+2)+1 \in 4\mathbb{Z}+1$

Deci $x = 3\mathbb{Z} \cap 4\mathbb{Z}+1$. □

$\boxed{\text{TEMĂ}}$

1) $A = \{-1, 0, \ldots, 2, \ldots, 5\}$

$B = \{-3, 3\}$

$C = \mathbb{N}$

$D = \mathbb{Q}$

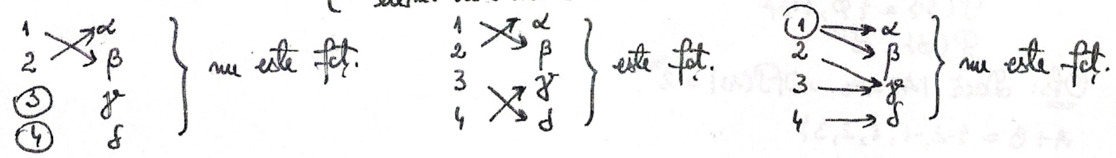
Efectuați $M * N$ unde $M, N \in \{A, B, C, D\}$, $* \in \{+, -, \cdot\}$.

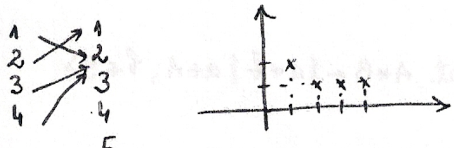
2) $A = 2\mathbb{Z}$, $B = 5\mathbb{Z}-3$, $C = 8\mathbb{Z}+4$, $D = 7-3\mathbb{Z}$

Efectuați $M \cap N$, $M, N \in \{A, B, C, D\}$.

Funcție = triplet format din { – 2 mulțimi < prima s.m. DOMENIU (de definiție); a 2-a s.m. CODOMENIU sau DOMENIU de valori; – o lege care asociază fiecărui elem. din domeniu un unic elem. din codomeniu. }

Ex:

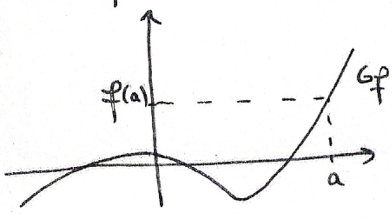




$G_f = \{(1,2), (2,1), (3,2), (4,2)\}$

În gen., dată fiind $f: A \to B$, prin graficul lui f înțelegem mulțimea

$G_f = \{(a,b) \mid b = f(a)\} \subset A \times B$.



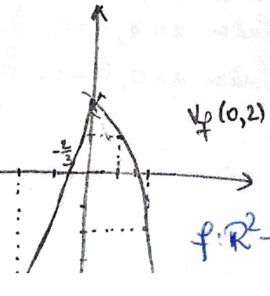
0 → 0
1 → 1
1 → 2
2 → 3
⋮ ⋮
2010 → 2011
2011 → 2012

$\Longleftrightarrow$ $f: \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 2011\} \to \{a \in \mathbb{N} \mid a < 2013\}$

f(orice ~~elem.) = acel~~ elem. $+1$

$\Downarrow$ $f(a) = a+1$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 3x+2, & x<0 \\ 2-x^2, & x \geq 0 \end{cases}$



$\boxed{\text{TEMĂ}}$ 143 51

3) Reprezentați grafic $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |3 - x^2|$.

4) Alcătuiți un desen care să reprez. sugestiv

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x+y$

• f e surj.

$\forall y \in$ codom. $\exists x \in$ domf a.î. $f(x) = y$

Fie $y \in \mathbb{R}$ $\xrightarrow{y<-3}$ Luăm $x = y+1 < -2 \Rightarrow f(x) = x-1 = y$

$y \geq 3$ Luăm $x = -2 + \sqrt{y+3} \geq -2 \Rightarrow f(x) = x^2 + 4x + 1 = (-2+\sqrt{y+3})^2 - 8 + 4\sqrt{y+3} + 1$
$= \cancel{4} - \cancel{4\sqrt{y+3}} + y + \cancel{3} - \cancel{8} + \cancel{4\sqrt{y+3}} + \cancel{1} = y$

• g nu e inj.

$\exists x_1, x_2 \in$ dom $x_1 \neq x_2$ $g(x_1) = g(x_2)$?

$x_1 = -3$, $x_2 = -1$

$g(x_1) = -2 = g(x_2)$

• g nu e surj.

Luăm $y = -4$. Fie $x \in \mathbb{R}$. $\exists y \in$ codom $\forall x \in$ dom $g(x) \neq y$?

$\xrightarrow{x \geq -2}$ $g(x) = x - 1 \geq -3 > -4 = y \Rightarrow g(x) \neq y$

$\xrightarrow{x < -2}$ $g(x) = x^2 + 4x + 1 = (x+2)^2 - 3 \geq -3 > -4 = y \Rightarrow g(x) \neq y$

$\boxed{*}$ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2+5, & x \leq 0 \\ 5-x, & x > 0 \end{cases}$ f^{-1} (temă) S2 144

$\begin{cases} a^2+5 = y \Rightarrow a^2 = y-5 \Rightarrow \\ \Rightarrow a = \pm\sqrt{y-5};\ a \leq 0 \\ 5-a = y \Rightarrow -a = y-5 \\ \Rightarrow a = -y+5;\ a > 0 \end{cases}$

$f(f^{-1}(x)) = x$

$(f^{-1}(x))^2 + 5 = x$ și $5 - f^{-1}(x) = x$

$f^{-1}(x) = 5 - x$

$f^{-1}(x) = \pm\sqrt{x-5}$

Luăm $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \begin{cases} \sqrt{x-5}, & x \geq 5 \\ 5-x, & x < 5 \end{cases}$

$f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \begin{cases} g^2(x) + 5, & g(x) \leq 0 \\ 5 - g(x), & g(x) > 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} (-\sqrt{x-5})^2 + 5, & -\sqrt{x-5} \leq 0,\ x \geq 5 \Rightarrow x \in [5, \infty) \\ (5-x)^2 + 5, & 5 - x \leq 0,\ x < 5 \Rightarrow x \in \emptyset \\ 5 - (-\sqrt{x-5}), & -\sqrt{x-5} > 0,\ x \geq 5 \Rightarrow x \in \emptyset \\ 5 - (5-x), & 5 - x > 0,\ x < 5 \Rightarrow x \in (-\infty, 5) \end{cases}$ $\Rightarrow \begin{cases} x, & x \geq 5 \\ x, & x < 5 \end{cases} = x$ deci $f \circ g = 1_{\mathbb{R}}$

Analog $g \circ f = 1_{\mathbb{R}}$. $\boxed{\text{TEMĂ}}$ $\Rightarrow g = f^{-1}$

$\boxed{*}$ $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 3 - x^2, & x \geq 0 \\ 3 - x, & x < 0 \end{cases}$ inj + surj. (temă) S144

$g(x) = \begin{cases} 3 - x^2, & x < 0 \\ 3 - x, & x \geq 0 \end{cases}$

S3

Relații pe mulțimea A = submulțime a lui $A \times A$

Exemple:

1) Pe $\mathbb{R}$ $x \rho y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}$
2) Pe $M = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ $a \sim b \Leftrightarrow a - b \div 3$
3) Pe $\mathbb{C}$ $z R w \Leftrightarrow |z| = |w|$
4) Pe $\mathbb{C}^*$ $z \approx w \Leftrightarrow \arg z = \arg w$
5) Pe mulțimea oamenilor $A \nabla B \Leftrightarrow A$ rudă cu B
6) Pe mulțimea dreptelor din plan $a \mathcal{P} b \Leftrightarrow a \parallel b$
7) ——— " ——— $\Leftrightarrow a \perp b$
8) Pe $\mathbb{N}$ $m \delta n \Leftrightarrow m \mid n$
9) Pe $\mathbb{Z}$ $m \mathcal{E} n \Leftrightarrow m \mid n$ nu e antisim $7 \mid -7 \wedge -7 \mid 7$ dar $7 \neq -7$

S2 143, 144

• f e surj.

$\forall y \in$ codom. $\exists x \in$ dom f aî $f(x)=y$

Fie $y \in \mathbb{R}$ $\xrightarrow{y<-3}$ Luăm $x = y+1 < -2 \Rightarrow f(x) = x-1 = y$

$y \geq -3 \rightarrow$ Luăm $x = -2+\sqrt{y+3} \geq -2 \Rightarrow f(x) = x^2+4x+1 = (-2+\sqrt{y+3})^2 - 8 + 4\sqrt{y+3} + 1$
$= \cancel{4} - \cancel{4\sqrt{y+3}} + y + \cancel{3} - \cancel{8} + \cancel{4\sqrt{y+3}} + \cancel{1} = y$

• g nu e inj.

$\exists x_1, x_2 \in$ dom $x_1 \neq x_2$ $g(x_1) = g(x_2)$?

$x_1 = -3$, $x_2 = -1$

$g(x_1) = -2 = g(x_2)$

• g nu e surj.

Luăm $y = -4$. Fie $x \in \mathbb{R}$. $\exists y \in$ codom $\forall x \in$ dom $g(x) \neq y$?

$\xrightarrow{x \geq -2}$ $g(x) = x-1 \geq -3 > -4 = y \Rightarrow g(x) \neq y$

$\xrightarrow{x<-2}$ $g(x) = x^2+4x+1 = (x+2)^2 - 3 \geq -3 > -4 = y \Rightarrow g(x) \neq y$

$\boxed{\ast}$ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2+5, & x \leq 0 \\ 5-x, & x > 0 \end{cases}$ f^{-1} (temă) S2 144

$\begin{cases} x^2+5 = y \Rightarrow x^2 = y-5 \Rightarrow \\ \Rightarrow x = \pm\sqrt{y-5};\ x \leq 0 \\ 5-x = y \Rightarrow -x = y-5 \\ \Rightarrow x = -y+5;\ x > 0 \end{cases}$

$f(f^{-1}(x)) = x$

$(f^{-1}(x))^2 + 5 = x$ și $5 - f^{-1}(x) = x$

$f^{-1}(x) = \pm\sqrt{x-5}$ $\quad f^{-1}(x) = 5-x$

Luăm $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \begin{cases} \sqrt{x-5}, & x \geq 5 \\ 5-x, & x < 5 \end{cases}$

$f \circ g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \begin{cases} g^2(x)+5, & g(x) \leq 0 \\ 5-g(x), & g(x) > 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} (-\sqrt{x-5})^2+5, & \begin{matrix}-\sqrt{x-5} \leq 0 \\ x \geq 5\end{matrix} \Leftrightarrow x \in [5, \infty) \\ (5-x)^2+5, & \begin{matrix}5-x \leq 0 \\ x < 5\end{matrix} \Leftrightarrow x \in \emptyset \\ 5-(-\sqrt{x-5}), & \begin{matrix}-\sqrt{x-5} > 0 \\ x \geq 5\end{matrix} \Leftrightarrow x \in \emptyset \\ 5-(5-x), & \begin{matrix}5-x > 0 \\ x < 5\end{matrix} \Leftrightarrow x \in (-\infty, 5) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x, & x \geq 5 \\ x, & x < 5 \end{cases} = x \text{ deci } f \circ g = 1_{\mathbb{R}}$$

Analog $g \circ f = 1_{\mathbb{R}}$. $\boxed{\text{TEMĂ}}$ $\Rightarrow g = f^{-1}$

$\boxed{\ast}$ $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 3-x^2, & x \geq 0 \\ 3-x, & x < 0 \end{cases}$ inj+surj. (temă) S144

$g(x) = \begin{cases} 3-x^2, & x < 0 \\ 3-x, & x \geq 0 \end{cases}$

S3

Relații pe mulțimea A = submulțime a lui $A \times A$

Exemple:

1) Pe $\mathbb{R}$ $x \rho y \Leftrightarrow x-y \in \mathbb{Z}$
2) Pe $M = \{-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4\}$ $a \sim b \Leftrightarrow a-b \vdots 3$
3) Pe $\mathbb{C}$ $z R w \Leftrightarrow |z| = |w|$
4) Pe $\mathbb{C}^*$ $z \approx w \Leftrightarrow \arg z = \arg w$
5) Pe mulțimea oamenilor $A \mathcal{V} B \Leftrightarrow A$ văr cu B
6) Pe mulțimea dreptelor din plan $a \mathcal{P} b \Leftrightarrow a \parallel b$
7) —— " —— $\Leftrightarrow a \perp b$
8) Pe $\mathbb{N}$ $m \delta n \Leftrightarrow m | n$
9) Pe $\mathbb{Z}$ $m \mathcal{E} n \Leftrightarrow m | n$ nu e antisim $7 | -7 \wedge -7 | 7$ dar $7 \neq -7$

S2 143, 144

Relația R pe mulțimea A s.n. :
- Reflexivă dacă $\forall a \in A$ aRa.
  (dacă relația noastră este $R \subseteq A \times A$, $\alpha R \beta \Leftrightarrow (\alpha,\beta) \in R$)
- Simetrică dacă $\forall a,b \in A$ $aRb \Rightarrow bRa$.
- Asimetrică dacă $\forall a,b \in A$, $\cancel{a \neq b} \Rightarrow aRb \Rightarrow b\not{R}a$.
- Antisimetrică dacă $\forall a,b \in A$ aRb și $bRa \Rightarrow a=b$. sau $\forall a,b \in A$, $a \neq b$ $aRb \Rightarrow b\not{R}a$
- Ireflexivă dacă $\forall a \in A$ $a\not{R}a$.
- Tranzitivă dacă $\forall a,b,c \in A$ aRb și $bRc \Rightarrow aRc$. Dacă o rel. este refl., sim. și tranz. s.n. rel. de echivalență.

8) refl: Fie $n \in N$ $n|n \Rightarrow n \delta n$
antisim.: $\exists a,b$ a.î. $a\delta b$ și $b \delta a$ nu e sim., nici asim.
$1 \delta 2$ și $2 \delta 1$

1) tranz. Fie $a,b,c \in \mathbb{R}$ aî $a\rho b$ și $b \rho c$. Atunci $a-b \in \mathbb{Z} \wedge b-c \in \mathbb{Z}$.
Deci $a-c = (a-b)+(b-c) \in \mathbb{Z}$. Rezultă $a\rho c$.
Prin urmare ρ e tranz.

Fie ρ o rel. de echivalență pe mulțimea A. Fie $a \in A$.
$\hat{a} \overset{not}{=} \{b \in A \mid b \rho a\}$ clasa lui a în raport cu ρ.

Def. Mulțimea factor (cât) $\frac{A}{\rho}$ este mulțimea claselor de echivalență ale elementelor lui A în raport cu ρ.

Exemple Pt. relația de la 2) $a-b \,\vdots\, 3 \Leftrightarrow a \sim b$.
Fie $a \in M$. $a-a=0 \,\vdots\, 3 \Rightarrow a \sim a$ deci $\sim$ este reflexivă (R)
Fie $a,b \in M$ aî. $a \sim b \Rightarrow a-b \,\vdots\, 3 \Rightarrow b-a \,\vdots\, 3 \Rightarrow b \sim a$ deci $\sim$ este simetrică (S)
Fie $a,b,c \in M$ aî. $a \sim b$ și $b \sim c$ atunci $a-b \,\vdots\, 3$ și

$$\frac{b-c \,\vdots\, 3}{(a-b)+(b-c) = a-c \,\vdots\, 3} \oplus \Rightarrow a \sim c$$ deci $\sim$ este tranzitivă (T)

Din (R), (S), (T) $\Rightarrow$ „$\sim$" este relație de echivalență.

$\hat{-5} = \{-5,-2,1,4\}$ $\quad \boxed{\hat{a} = \hat{b} \Leftrightarrow a \sim b}$ Formula magică!
$\hat{-4} = \{-4,-1,2\}$ $\quad \hat{-5} = \hat{-2} \Leftrightarrow -5 \sim -2$
$\hat{-3} = \{-3,0,3\}$
$\hat{-2} = \{-5,-2,1,4\}$
$\hat{-1} = \{-4,-1,2\}$

reprezentant este elem. al unei clase.

$\frac{M}{\sim} = \{\{-5,-2,1,4\},\{-4,-1,2\},\{-3,0,3\}\}$

$\{-2 \quad -4 \quad -3\}$
$\{1 \quad -1 \quad 0\}$
$\{4 \quad 2 \quad 3\}$
SCIR sisteme complete și independente de reprezentanți

Pt. relația 1) $\hat{a} = \mathbb{Z}+\alpha$

$\boxed{\text{TEMĂ}}$ Pe mulțimea $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| < 6\}$ introducem $a \rho b \Leftrightarrow 4 \mid a-b$.
S2 143 144
1) Arătați că e rel. de echiv.
2) Descrieți A/ρ.
3) Scrieți 3 SCIR.

1) Fie $a \in A$. $|a|<6$ ~~$a-a=0 \,\vdots\, 4$~~ $4|0 \Rightarrow 4|a-a \Rightarrow a\rho a \Rightarrow \rho$ este reflexivă
Fie $a,b \in A$ aî $a\rho b \Rightarrow 4|a-b \Rightarrow 4|b-a \Rightarrow b\rho a \Rightarrow \rho$ este simetrică
Fie $a,b,c \in A$ aî $a\rho b$ și $b\rho c$ atunci $4|a-b$ și

$$\frac{4|b-c}{4|(a-b)+(b-c)} \oplus \Rightarrow a\rho c \Rightarrow \rho \text{ este tranzitivă}$$

$\Rightarrow \rho$ rel. de echiv.

2) $\hat{0} = \{a \in \mathbb{Z} \mid a = 4k, k \in \mathbb{Z}\}$
$\hat{1} = \{a \in \mathbb{Z} \mid a = 4k+1, k \in \mathbb{Z}\}$ cu rundului < 6
$\hat{2} = \{a \in \mathbb{Z} \mid a = 4k+2, k \in \mathbb{Z}\}$
$\hat{3} = \{a \in \mathbb{Z} \mid a = 4k+3, k \in \mathbb{Z}\}$

$\hat{0} = \{0, 4, -4\}$ $\quad A/_{\rho} = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}\}$
$\hat{1} = \{1, 5, -3\}$
$\hat{2} = \{2, -2\}$ $\quad A = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$
$\hat{3} = \{3, -1, -5\}$

$a \rho b \Leftrightarrow 4 \mid a-b$
$A = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$

$\hat{0} = \{0, 4, -4\}$
$\hat{1} = \{1, -3\}$
$\hat{2} = \{-2, 2\}$
$\hat{3} = \{-1, 3\}$

3) $\{0 \quad 1 \quad 2 \quad 3\}$ SCIR

S3'

10) Fie $n \in \mathbb{Z}^*$. Pe $\mathbb{Z}$ definim $x \rho_n y \Leftrightarrow n \mid x-y$.
Fie $a \in \mathbb{Z}$. Evident $n \mid 0 = a-a$, deci $a \rho a$, deci ρ_n reflexivă.
Fie $a, b \in \mathbb{Z}$ ai $a \rho_n b \Rightarrow n \mid a-b \Rightarrow n \mid b-a \Rightarrow b \rho_n a \Rightarrow \rho_n$ simetrică.
Fie $a, b, c \in \mathbb{Z}$ ai $a \rho_n b$ și $b \rho_n c \Rightarrow n \mid a-b$ și $n \mid b-c \Rightarrow n \mid a-b+b-c \Rightarrow a \rho_n c \Rightarrow \rho_n$ tranzitivă.
Prin urmare ρ este rel. de echiv.
Considerăm $n=3$.

$\hat{0} = \{\dots, -6, -3, 0, 3, 6, \dots\} = 3\mathbb{Z}$
$\hat{1} = \{\dots, -5, -2, 1, 4, 7, \dots\} = 3\mathbb{Z}+1$
$\hat{2} = \{\dots, -4, -1, 2, 5, 8, \dots\} = 3\mathbb{Z}+2$
$\mathbb{Z}/_{\rho} = \{3\mathbb{Z}, 3\mathbb{Z}+1, 3\mathbb{Z}+2\} = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}\}$
$(3\mathbb{Z}+1) + (3\mathbb{Z}+2) = \{\dots, -12, -9, -6, -3, 0, 3, 6, 9, \dots\} = 3\mathbb{Z}$
„$\Rightarrow$" Fie $x \in (3\mathbb{Z}+1) + (3\mathbb{Z}+2)$. At. $\exists k \in \mathbb{Z}$, $\exists n \in \mathbb{Z}$ ai $x = (3k+1) + (3n+2)$
$\Rightarrow x = 3(k+n+1) \in 3\mathbb{Z}$
„$\Leftarrow$" Fie $x \in 3\mathbb{Z} \Rightarrow \exists q \in \mathbb{Z}$ $x = 3q \Rightarrow x = (3q+1) + (-1) \in 3\mathbb{Z}+1 + (3\mathbb{Z}+2)$ $\square$

Se poate arăta că:

+	$3\mathbb{Z}$	$3\mathbb{Z}+1$	$3\mathbb{Z}+2$
$3\mathbb{Z}$	$3\mathbb{Z}$	$3\mathbb{Z}+1$	$3\mathbb{Z}+2$
$3\mathbb{Z}+1$	$3\mathbb{Z}+1$	$3\mathbb{Z}+2$	$3\mathbb{Z}$
$3\mathbb{Z}+2$	$3\mathbb{Z}+2$	$3\mathbb{Z}$	$3\mathbb{Z}+1$

În general (pentru $n \in \mathbb{N}^*$) se arată cu considerații similare că:
$\mathbb{Z}/_{\rho_n} = \{\underset{\hat{0}}{n\mathbb{Z}}, \underset{\hat{1}}{n\mathbb{Z}+1}, \dots, \underset{\widehat{n-1}}{n\mathbb{Z}+n-1}\}$ și că $\quad \hat{a} + \hat{b} = \widehat{a+b} = \widehat{\text{restul împ. lui } (a+b)/n}$
$\hat{a} \cdot \hat{b} = \widehat{a \cdot b} = \widehat{\text{restul împ. lui } (a \cdot b)/n}$

<u>Def.</u> $\mathbb{Z}_n = \dfrac{\mathbb{Z}}{\rho_n}$

$f: \mathbb{Z}_5 \to \mathbb{Z}$, $f(\hat{a}) = 2a-3$ Greșit!
<u>Obs.</u> Când urmează să definim o fct. pe o mulțime factor, iar în expresia sa folosim <u>reprezentanți</u> (adică le scoatem căciula) at. trebuie să verificăm corecta ei definire.

$g: \mathbb{Z}_5 \to \mathbb{Z}_5$, $g(\hat{a}) = \hat{2}\hat{a} - \hat{3}$ e corect def.
$g(\hat{a}) = \widehat{2a-3}$

$\boxed{\text{TEMĂ}}$ Studiați corecta def. a funcțiilor:
1. $f: \mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Q}$, $f(\hat{x}) = \frac{x}{3}$
2. $g: \mathbb{Z}_{12} \to \mathbb{Z}_{12}$, $g(\hat{u}) = \widehat{7u+4}$
3. $h: \mathbb{Z}_{12} \to \mathbb{Z}_6$, $h(\hat{v}) = \bar{v}$
4. $k: \mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_{12}$, $k(\bar{w}) = \hat{w}$

<u>Lege de compoziție</u> (op. binară pe mulțimea M) = o fct. $\varphi: M \times M \to M$, $\varphi((x,y)) \stackrel{def}{=} x \varphi y$
Cons. o mulțime M cu 5 elemente.
a) Câte legi de compoz. putem defini pe M? $\quad 5^{25}$ $\quad$ c) Câte au e.n.? ~~$9 \cdot 5^{16}$~~ 5^{17}
b) Câte din ele sunt comutative? ~~15~~ 5^{15}

	a	b	c	d	e
a	cv_1	cv_2	cv_3	cv_4	cv_5
b	cv_2	cv_6	cv_7	cv_8	cv_9
c	cv_3	cv_7	cv_{10}	cv_{11}	cv_{12}
d	*	*	*	cv_{13}	cv_{14}
e	*	*	*	*	cv_{15}

$\boxed{\text{TEMĂ}}$ Aceeași pb. pt. $|M| =$ a) 7; b) n. 143

$\boxed{*}$ Pe $\mathbb{Q}$ considerăm legea $a \triangledown b = ab + 12a + 12b + 132$
$= (a+12)(b+12) - 12$

Asociativitate:

Fie $a, b, c \in \mathbb{Q}$.

$(a \triangledown b) \triangledown c = [(a+12)(b+12)-12] \triangledown c$
$= (a+12)(b+12)(c+12) - 12 \quad (1)$

$a \triangledown (b \triangledown c) = a \triangledown [(b+12)(c+12)-12]$
$= (a+12)(b+12)(c+12) - 12 \quad (2)$

Din (1) și (2) $\Rightarrow (a \triangledown b) \triangledown c = a \triangledown (b \triangledown c)$. Deci „$\triangledown$" este asoc.

Comutativitate:

Fie $a, b \in \mathbb{Q}$.

$a \triangledown b = (a+12)(b+12) - 12 = (b+12)(a+12) - 12 = b \triangledown a$. Deci „$\triangledown$" este comut.

Element neutru:

Luăm $e = -11$. Fie $a \in \mathbb{Q}$.

$a \triangledown e = (a+12)(-11+12) - 12 = a$

$e \triangledown a = (-11+12)(a+12) - 12 = a$

Deci $e = -11$ este e.n. pt. „$\triangledown$".

$0 \triangledown e = 0 \Rightarrow 12e + 132 = 0$

Dacă „$\circ$" este o lege cu e.n. e pe M, atunci:

- $y \in M$ s.n. <u>simetric al lui $x \in M$ în raport cu „$\circ$"</u> dacă $x \circ y = y \circ x = e$.
- $x \in M$ s.n. <u>simetrizabil</u> dacă admite simetric.

$\boxed{\text{Pb. suplimentară}}$

1. Dați exemplu de element care are mai mult de un simetric.
2. (a) Dați exemplu de element nesim. care să aibă exact 5 simetrici la stânga. 144, 143
   (b) Dați exemplu de element nesim. care să aibă exact 5 simetrici la dreapta.

$x \in M$

x', x''

$\underbrace{\boxed{x' \circ x}}_{e} \circ x'' = x''$

$x' \circ \underbrace{\boxed{x \circ x''}}_{e} = x'$

$a \triangledown b = e$

$(a+12)(b+12) - 12 = -11$

$b = -12 + \dfrac{1}{a+12}$

La legea „$\triangledown$":

Fie $a \in \mathbb{Q} \setminus \{-12\}$. $b = -12 + \dfrac{1}{a+12}$

$a \triangledown b = (a+12)\left(\cancel{-12} + \dfrac{1}{a+12} + \cancel{12}\right) - 12 = -11$

„$\triangledown$" comut. $\Rightarrow b \triangledown a = -11 \Rightarrow b$ este simetricul lui a în rap. cu „$\triangledown$" deci a este simetrizabil.

Pp. că -12 e simetrizabil. Fie b simetricul său. Atunci

$b \triangledown (-12) = -11 \Rightarrow (b+12)(-12+12) - 12 = -11 \Rightarrow -12 = -11$ Abs.

Rămâne că -12 nu e simetrizabil.

$\boxed{*}$ Luăm $a=0, b=0, c=1$.

$$\left.\begin{array}{l} a-(b-c) = 0-(0-1)=1 \\ (a-b)-c = (0-0)-1 = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow a-(b-c) \neq (a-b)-c.$$ Deci scăderea nu este asociativă.

$\boxed{\text{TEMĂ}}$ Pe $\mathbb{R}$, $x \Delta y = 2x-5y$. Studiați asoc., com., e.n.

S4

$\boxed{*}$ Fie $(G,\cdot)$ un grup abelian și X o mulțime nevidă și $\mathcal{F}$ mulțimea funcțiilor $: X \to G$. 144

Pe $\mathcal{F}$ definim operația „$*$" astfel:

$(f*g)(x) = f(x)\cdot g(x)$.

Ce structură are $\mathcal{F}$ în raport cu „$*$"?

. Fie $f,g,h \in \mathcal{F}$, $x \in X$.

$(f*g*h)(x) = f(x)\cdot(g*h)(x) = f(x)(g(x)\cdot h(x)) = (f(x)\cdot g(x))\cdot h(x) = (f*g)(x)\cdot h(x) = ((f*g)*h)(x)$

Deci $f*(g*h) = (f*g)*h$. Prin urmare „$*$" e asociativă. (A)

. Fie $f,g \in \mathcal{F}$, $x \in X$.

$(f*g)(x) = f(x)\cdot g(x) = g(x)\cdot f(x) = (g*f)(x)$

Deci $f*g = g*f$. Prin urmare „$*$" e comutativă. (C)

. Luăm $E: X \to G$, $E(x) = e$.
elem. neutru din G

Fie $f \in \mathcal{F}$ și $x \in X$.

$(E*f)(x) = E(x)\cdot f(x) = e\cdot f(x) = f(x)$.

Deci $E*f = f$. Fiind comut., $f*E = f$. Deci E este elem. neutru pt. „$*$". (E.N.)

. Fie $f \in \mathcal{F}$, $g: X \to G$, $g(x) = (f(x))^{-1}$
simetricul lui $f(x)$ din $(G,\cdot)$

Fie $x \in X$.

$(f*g)(x) = f(x)\cdot g(x) = f(x)\cdot(f(x))^{-1} = e = E(x)$

Deci $f*g = E$ (1)

Cum „$*$" e comut. $g*f = E$ (2)

Din (1) și (2) $\Rightarrow$ g este simetrica lui f în raport cu „$*$".

Cum f a fost aleasă arbitrar, toate elementele lui $\mathcal{F}$ sunt simetrice în raport cu „$*$". ~~ES~~ (ES)

Din (A), (C), (E.N.), (E.S.) $\Rightarrow$ $(\mathcal{F}, *)$ grup abelian.

$\boxed{*}$ Pe $\mathbb{Q}$ definim $x \nabla y = 2x-3y$. 1) Asoc.? 2) Comut.? 3) E.N.?

1) $x=y=0$, $z=1$

$$\left.\begin{array}{l} (x\nabla y)\nabla z = 0\nabla 1 = -3 \\ x\nabla(y\nabla z) = 0\nabla -3 = -9 \end{array}\right| \Rightarrow (x\nabla y)\nabla z \neq x\nabla(y\nabla z) \Rightarrow$$ „∇" nu e asoc.

2) $$\left.\begin{array}{l} 1\nabla 2 = -4 \\ 2\nabla 1 = 1 \end{array}\right| \Rightarrow 1\nabla 2 \neq 2\nabla 1 \Rightarrow$$ „∇" nu e comut.

3) Pp. că „∇" admite E.N.

Fie elem. neutru e. Atunci $$\left.\begin{array}{l} e\nabla 0 = 0 \\ e\nabla 1 = 1 \end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{l} 2e = 0 \Rightarrow e = 0 \\ 2e-3 = 1 \Rightarrow e = 2 \end{array}$$ abs.

Rămâne deci că „∇" nu are E.N.

$\boxed{*}$ Ce structuri formează:

$(\mathbb{N},+)$, $(\mathbb{N},\cdot)$, $(\mathbb{N}^*,+)$, $(\mathbb{N}^*,\cdot)$

$(\mathbb{Z},+)$, $(\mathbb{Z},\cdot)$, $(\mathbb{Z}^*,+)$, $(\mathbb{Z}^*,\cdot)$, $(\mathbb{Z}_-,+)$, $(\mathbb{Z}_-^*,+)$, $(\mathbb{Z}_-^*,\cdot)$

$(\mathbb{Q},+)$, $(\mathbb{Q},\cdot)$, $(\mathbb{Q}^*,+)$, $(\mathbb{Q}^*,\cdot)$, $(\mathbb{Q}_+^*,+)$, $(\mathbb{Q}_+^*,\cdot)$, $(\mathbb{Q}_-,+)$, $(\mathbb{Q}_-,\cdot)$ nu sunt bine def. deci nu sunt structuri ~~struct~~

$(\mathbb{R},+)$, $(\mathbb{R},\cdot)$, $(\mathbb{R}_+,+)$, $(\mathbb{R}_+,\cdot)$, $(\mathbb{R}_+^*,+)$, $(\mathbb{R}_+^*,\cdot)$, $(\mathbb{R}_-,+)$, $(\mathbb{R}_-,\cdot)$

$(\mathbb{C},+)$, $(\mathbb{C},\cdot)$, $(\mathbb{C}^*,+)$, $(\mathbb{C}^*,\cdot)$?

Intuiția:

· Morfism între 2 structuri (de același tip) = funcție care „se poartă frumos cu structura".

$f:(S_1,\circ)\to(S_2,\square)$ s.n. morfism de semigrupuri dacă $\forall x,y\in S_1$ $f(x\circ y)=f(x)\square f(y)$.

Presupunem că $(\mathbb{Z},\cdot)$ este izomorf cu $(\mathbb{N}^*,\cdot)$.

$(\mathbb{Z},\cdot)\xrightarrow{\varphi}(\mathbb{N}^*,\cdot)$

$\alpha\overset{not}{=}\varphi(0)$

$\beta\overset{not}{=}\varphi(2)$

Obs: φ inj., deci $\alpha\neq\beta$.

Atunci $\alpha=\varphi(0)=\varphi(0.2)=\varphi(0).\varphi(2)=\alpha.\beta$ deci $\beta=1=\varphi(1)$, $\beta=\varphi(2)$ ↯

$\boxed{\text{TEMĂ}}$ Luați structurile 2 câte 2 și verificați dacă sunt izo. 14)

S4'

S.n. semigrup, o lege asociativă. S.n. monoid, un semigrup care admite E.N.

Fie M un monoid. Notăm cu $U(M)=\{x\in M\mid x \text{ este simetrizabil}\}$.

Fie $x,y\in U(M)$. Atunci

$(xy)(y'x')=x(yy')x'=xx'=e$

$(y'x')(xy)=y'(x'x)y=y'y=e$

Deci $xy\in U(M)$ și $(xy)^{-1}=y'x'$.

Atunci legea de pe M induce o lege de compoziție pe U(M) în raport cu care U(M) are o structură de grup.

$\mathcal{F}_A=\{f:A\to A\}$

$U(\mathcal{F}_A)=\{f:A\to A\mid f \text{ e bijectivă}\}$

$(U(\mathcal{F}_A),\circ)$ grup

$\shortparallel$

$S(A)$ grupul simetric al lui A

În $\mathbb{Z}_n$ $\boxed{\hat{x}=\hat{y}\iff x-y\,\vdots\, n}$

$\mathbb{Z}_4$:

1)

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

2)

·	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	0	1

· E.N. este cel care copiază linia de control

1) 0 = E.N.

2) 1 = E.N.

· comut.: simetrie față de diag. principală

1) comut.

2) comut.

· 1) $1'=3$, $2'=2$, $3'=1$, $0'=0$ $(\mathbb{Z}_4,+)$ gr. abelian

2) $3'=3$, $1'=1$ $(\mathbb{Z}_4,\cdot)$ monoid comutativ

simetrizabil: caut pe linia elementului E.N.

$U(\mathbb{Z}_4,\cdot)=\{1,3\}$

$U((\mathbb{Z}_n,\cdot))=\{\hat{a}\in\mathbb{Z}_n\mid (a,n)=1\}$

Dem.

$\hat{a}\in U(\mathbb{Z}_n)\iff\exists\, b\in\mathbb{Z}_n$ a.î. $\hat{a}\hat{b}=\hat{1}\iff\exists\, b\in\mathbb{Z}$ aî $n\mid ab-1\iff\exists\, b,t\in\mathbb{Z}$ aî $ab-1=nt\iff$

$\iff\exists\, b,t\in\mathbb{Z}$ aî $ab=nt+1\iff(a,n)=1$ □

$|U(\mathbb{Z}_n,\cdot)|\overset{not}{=}\varphi(n)$ indicatorul lui Euler

Dacă $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_n^{\alpha_n}$, atunci $\varphi(n) = (p_1^{\alpha_1} - p_1^{\alpha_1 - 1}) \cdots (p_n^{\alpha_n} - p_n^{\alpha_n - 1})$
$= n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_n}\right)$

$400 = 2^4 \cdot 5^2$

$\varphi(400) = (2^4 - 2^3)(5^2 - 5) = 8 \cdot 20 = 160$

Fie G un grup și $H \subset G$, $H \neq \emptyset$. Spunem că <u>H este subgrup al lui G</u> dacă: $\underset{H \leq G}{}$

1) $\forall x, y \in H \Rightarrow xy \in H$
2) $\forall x \in H, x' \in H$ (x' este simetricul din G)

H subgrup din $G \Leftrightarrow \forall x, y \in H, xy' \in H$.

☒ $M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{R}) \right\}$ este grup față de „·". $\boxed{\text{Temă}}$ 154

<u>Obs</u>: $M \neq 0$, $M \subset GL_2(\mathbb{R})$

Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M$

$AB = \begin{pmatrix} 1 & a+b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Dacă luăm $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ constatăm că $AA_1 = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$A_1 A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ deci $A_1 = A^{-1}$, deci $M \leq GL_2(\mathbb{R})$. Prin urmare $(M, \cdot)$ este și el grup.

GL_n = grupul matricilor $M_n(\mathbb{R})$, cu prop. că sunt inversabile.

$GL_n = \{ M \in M_n(\mathbb{R}) \mid M$ e inversabilă $\}$

<u>Obs</u>: G este subgrup al lui G
{element neutru} subgrup al lui G

. Subgrupurile lui $\mathbb{Z}$ sunt cele de forma $n\mathbb{Z}$, cu $n \in \mathbb{Z}$ și numai ele. $\boxed{\text{Temă}}$ 154

. Subgrupurile lui $\mathbb{Z}_n$ sunt cele de forma $\hat{d}\mathbb{Z}_n$ cu $d \mid n$ și numai ele.

Fie $f: G \to G'$ un morfism de grupuri. Atunci:

1) Dacă $H \leq G$, atunci $f(H) \leq G'$ $\boxed{\text{Temă}}$ 143

<u>Dem</u> $y_1, y_2 \in f(H) \Rightarrow \exists x_1, x_2 \in H$ ai $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2) \Rightarrow$
$\Rightarrow y_1 y_2 = f(x_1 x_2) \in f(H)$
$y \in f(H) \Rightarrow \exists x \in H$ ai $y = f(x)$
$\Downarrow$
$x^{-1} \in H \Rightarrow y^{-1} = (f(x))^{-1} = f(x^{-1}) \in f(H)$ □

2) Dacă $K \leq G'$, atunci $f^{-1}(K) \leq G$ $\boxed{\text{TEMĂ}}$

$\ker f = \{ x \in G \mid f(x) =$ elem. neutru din $G' \}$

<u>Teoremă</u> (de corespondență pt. subgrupuri)

Dat fiind morfismul surjectiv de grupuri $f: G \to G'$, asocierile:

$H \to f(H)$
$f^{-1}(K) \to K$ dau corespondențe (bijective și) inverse una celeilalte de la mulțimea

$\{ H \leq G \mid H \supset \ker f \}$ la $\{ K \mid K \leq G' \}$.

<u>Exemplu</u> $\pi: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n$, $\pi(x) = \hat{x}$

se citește de la dr. la stg!

$n\mathbb{Z} = \ker \pi \subset d\mathbb{Z} = \pi^{-1}(H) \longleftarrow H \leq \mathbb{Z}_n$

$\Downarrow$
$d \mid n$

$d\mathbb{Z} \longrightarrow \hat{d}\mathbb{Z}_n$ $\quad$ //

$\ker \pi = \{ a \in \mathbb{Z} \mid \pi(a) = \hat{0} \} = \{ a \in \mathbb{Z} \mid n \mid a \} = n\mathbb{Z}$

$n\mathbb{Z} \subset d\mathbb{Z} \Rightarrow n \in d\mathbb{Z} \Rightarrow d \mid n$

$\{ \dots, -2d, -d, 0, d, 2d, \dots \} \xrightarrow{\pi} \{ \dots, \widehat{-2d}, \widehat{-d}, \hat{0}, \hat{d}, \widehat{2d}, \hat{1} \cdot \hat{d}, \hat{2} \cdot \hat{d}, \dots \} = \hat{d}\mathbb{Z}_n$

$\boxed{\text{TEMĂ}}$ - Enumerați subgrupurile lui $\mathbb{Z}_{18}$.
• $|U(\mathbb{Z}_{300}, \cdot)| = ?$

(culese din T. Dumitrescu)

(28) 1) Câte operații se pot defini pe o mulțime cu n elemente și câte dintre ele sunt com., resp. cu elem. neutru.

(37) 3) Descrieți endomorfismele monoizilor $(\mathbb{N},+)$, $(\mathbb{N},\max)$ și morfismele dintre ei.

(38) 4) Găsiți un morfism injectiv de monoizi $f:(\mathbb{N},\max)\to(\mathcal{P}(\mathbb{N}),\cup)$

(39) 5) Arătați că monoizii multiplicativi $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ și $\mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$ nu sunt izo.

(36) 2) Arătați că $\forall$ doi dintre monoizii comutativi $(\mathbb{N},+)$, $(\mathbb{N},\max)$ și $(\mathbb{N},\text{cmmmc})$ sunt neizo.

1) Calculăm în câte moduri putem completa o tablă $n\times n$.
Sunt n^{n^2} operații dintre care
$n^{n(n+1)/2}$ sunt com. deoarece elem. sub diag. sunt deja precizate
$n^{(n-1)^2+1}$ care au E.N. deoarece linia și coloana E.N. sunt unic det. și E.N. poate fi oricare din cele n elem.

2) Fie $a,b\geq 1$. At. $a+a\neq a$ dar $\max(a,a)=a$ și $\text{cmmmc}(a,a)=a$, deci
$(\mathbb{N},+)\not\cong(\mathbb{N},\max)$
$(\mathbb{N},+)\not\cong(\mathbb{N},\text{cmmmc})$
În plus, $\max(a,b)\in\{a,b\}$, dar $\text{cmmmc}(2,3)=6$ deci $(\mathbb{N},\max)\not\cong(\mathbb{N},\text{cmmmc})$

3) Dacă M este monoid, morfismele $(\mathbb{N},+)\to M$ au forma $n\mapsto a^n$, a fixat (cf. unei thm.)
Endomorfismele lui $(\mathbb{N},\max)$ sunt funcții crescătoare.
Singurul morfism $f:(\mathbb{N},\max)\to(\mathbb{N},+)$ este cel nul, deoarece $x\leq y \Rightarrow$ $\boxed{\text{Temă}}$ 153 $f(x)=0$ $f(x\leq y)=f(x)+f(y)\Rightarrow$
$\Rightarrow f(y)=f(x)+f(y)$.

4) $f(n)=\{1,2,\dots,n\}$
$m\leq n$ $f(m)=\{1,\dots,m\}$
$m\geq n$ $f(n)=\{1,\dots,n\}$
$f(\max(m,n))=f(m)\cup f(n)$ O.K.

$A^2-\text{Tr}A\cdot A+\det A=0$
din ec. caract.

5) Fie $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ cu $A^3=0$ $\Rightarrow$ $|A|=0$ apoi $A^2=(a+d)A$ și $(a+d)A^2=0$ $\Rightarrow A^2=0$

$\exists\, B\in\mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$ cu $B^3=0$ și $B^2\neq 0$. De exp. $B=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$ $\boxed{\text{Temă}}$ 145

$\mathbb{Z}_6$ S5

+	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	0
2	2	3	4	5	0	1
3	3	4	5	0	1	2
4	4	5	0	4	2	3
5	5	0	1	2	3	4

// trebuie puse căciulițe pt. corectitudine!

Subgrupul generat de submulțimea M a grupului G este cel mai mic subgrup al lui G care conține pe M.

$\langle M \rangle = \bigcap_{M \subset K \leq G} K$, K subgrup

$\langle 2 \rangle = \{2, 4, 0\}$

$\langle 3 \rangle = \{3, 0\}$

$\langle 4 \rangle = \{4, 2, 0\}$

$\langle 1 \rangle = \{1, 2, 3, 4, 5, 0\}$

$\langle 5 \rangle = \{5, 4, 3, 2, 1, 0\}$

$\langle 0 \rangle = \{0\}$

Dacă $G = \langle M \rangle$ se spune că M este un sistem de generatori pt G sau că M generează G.

$M \subset G$, $M \neq \emptyset$ $\langle M \rangle = \{y \in G \mid y = a_1^{\varepsilon_1} \dots a_n^{\varepsilon_n}, a_i \in M, \varepsilon_i = \pm 1, n \in \mathbb{N}\}$

în scriere aditivă: $y = \sum_{i=1}^{n} k_i a_i$, $k_i \in \mathbb{Z}$, $a_i \in M$, $n \in \mathbb{N}$

$\langle a \rangle = \{a^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$

aditiv $\{na \mid n \in \mathbb{Z}\}$ $0, a, 2a = a+a, -a, -2a = -a-a \dots$

Def Ordinul unui element al unui grup este ordinul subgrupului generat de acesta. (nr. de elemente)

ord 2 = 3

ord 3 = 2

ord 4 = 3

ord 1 = 6

ord 5 = 6

ord 0 = 1

ord $\hat{24}$ = ? în $(\mathbb{Z}_{400}, +)$

$\text{cmmdc}(x, y) \overset{not}{=} (x, y) \overset{not}{=} \text{GCD}(x, y)$

$\text{cmmmc}(x, y) \overset{not}{=} [x, y] \overset{not}{=} \text{LCD}(x, y)$

Proprietăți ale ordinului

1) $\text{ord}(x^k) = \dfrac{\text{ord}(x)}{(k, \text{ord}(x))}$ în $(G, \cdot)$ și $\text{ord}(k \cdot x) = \dfrac{\text{ord}(x)}{(k, \text{ord}(x))}$ în grupul $(G, +)$

2) Dacă $x, y \in G$, $xy = yx$ și $(\text{ord}\, x, \text{ord}\, y) = 1$, atunci $\text{ord}(xy) = \text{ord}\, x \cdot \text{ord}\, y$

3) $\text{ord}_{G_1 \times G_2}(x_1, x_2) = [\text{ord}_{G_1} x_1, \text{ord}_{G_2} x_2]$

I $\text{ord}_{\mathbb{Z}_{400}} \hat{24} = \text{ord}_{\mathbb{Z}_{400}} (24 \cdot \hat{1}) = \dfrac{\text{ord}\, \hat{1}}{(24, \text{ord}\, \hat{1})} = \dfrac{400}{(24, 400)} = \dfrac{400}{8} = 50$

II Determinați elementele de ordin 50 din $(\mathbb{Z}_{400}, +)$.

Fie $\hat{x} \in \mathbb{Z}_{400}$ cu $\text{ord}\, \hat{x} = 50$. Atunci

$\hat{x} = x \cdot \hat{1} \Rightarrow \dfrac{400}{(400, x)} = \dfrac{\text{ord}\, \hat{1}}{(\text{ord}\, \hat{1}, x)} = \text{ord}(x \cdot \hat{1}) = \text{ord}(\hat{x}) = 50 \Rightarrow (400, x) = 8$. $\exists$ deci $t \in \{0, 1, \dots, 49\}$

$(t, 50) = 1$ a.î. $x = 8t$.

Așadar elementele cerute sunt: $\{\hat{8}, \hat{24}, \hat{56}, \hat{72}, \hat{88}, \hat{104}, \hat{136}, \hat{152}, \hat{168}, \hat{184}, \dots\}$

$t=1$ $t=3$ $t=7$ $t=9$ $t=11$ $t=13$ $t=17$ $t=19$ $t=21$ $t=23$

Temă

III Determinați $\text{ord}_{\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{20}} (\hat{4}, \overline{12}) = [\text{ord}_{\mathbb{Z}_6} \hat{4}, \text{ord}_{\mathbb{Z}_{20}} \overline{12}] = [3, 5] = 15$

$\overline{12}$

$\overline{12} + \overline{12} = \overline{4}$

$\overline{12} + \overline{4} = \overline{16}$

$\overline{12} + \overline{16} = \overline{8}$

$\overline{12} + \overline{8} = \overline{0}$

IV Determinați elementele de ordin 12 din $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6$.

Fie $(x, y) \in \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6$.

$$\left.\begin{array}{l} \text{ord}(x, y) = 12 \iff [\text{ord}_{\mathbb{Z}_4} x, \text{ord}_{\mathbb{Z}_6} y] = 12 \\ \text{ord}_{\mathbb{Z}_4} x \mid 4 \quad \text{ord} \in \{0, 2, 4\} \\ \text{ord}_{\mathbb{Z}_6} y \mid 6 \quad \text{ord} \in \{0, 3, 6\} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{ord}_{\mathbb{Z}_4} x = 4, \text{ord}_{\mathbb{Z}_6} y = 3 \\ \text{sau} \\ \text{ord}_{\mathbb{Z}_4} x = 4, \text{ord}_{\mathbb{Z}_6} y = 6 \end{array}$$

$ord_{\mathbb{Z}_4} x = 4,\ x \in \{1,3\}$

$ord_{\mathbb{Z}_6} y = 3,\ y \in \{4,2\}$

$ord_{\mathbb{Z}_6} y = 6,\ y \in \{1,5\}$

Deci elementele cerute sunt

$\{(\hat{1},\bar{4}), (\hat{1},\bar{2}), (\hat{1},\bar{1}), (\hat{1},\bar{5}), (\hat{3},\bar{4}), (\hat{3},\bar{2}), (\hat{3},\bar{1}), (\hat{3},\bar{5})\}$

$\mathbb{Z}_4$: $ord\, 1 = 3$ deoarece $\langle 1\rangle = \{1,2,3,0\}$
$ord\, 2 = 2$ $\langle 2\rangle = \{2,0\}$
$ord\, 3 = 4$ $\langle 3\rangle = \{3,2,1,0\}$
$ord\, 0 = 1$ $\langle 0\rangle = \{0\}$

$\mathbb{Z}_6$: $ord\, 1 = 6$
$ord\, 2 = 3$
$ord\, 3 = 2$
$ord\, 4 = 3$
$ord\, 5 = 6$
$ord\, 0 = 1$

Def Grupul G s.n. finit generat dacă admite un sistem finit de generatori.

Def Grupul G s.n. ciclic dacă admite măcar un sistem de generatori format dintr-un ~~sing~~ singur element.

Thm (de structură pt. grupurile ciclice)
- Orice grup ciclic cu n elemente este izomorf cu $\mathbb{Z}_n$.
- Orice grup ciclic infinit este izomorf cu $\mathbb{Z}$. // $\mathbb{Z}$ ciclic $\Rightarrow$ $\mathbb{Z}$ finit generat

$\langle -1\rangle$ = $\langle 1\rangle$ = $\mathbb{Z}$

Este $(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}, +)$ ciclic? Dar finit generat?

DA! $\{(0,1),(1,0)\}$ este sistem de generatori pt. $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$

$(a,b) = (a,0)+(0,b) = (1)$

Dacă $a,b\in\mathbb{N}$ $(1) = \underbrace{(1,0)+(1,0)+\ldots+(1,0)}_{a \text{ ori}} + \underbrace{(0,1)+(0,1)+\ldots+(0,1)}_{b \text{ ori}}$

Pp. că e ciclic. At. $\exists\, a,b\in\mathbb{Z}$ a.î. $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z} = \langle (a,b)\rangle$. At. $\exists\, m,n\in\mathbb{Z}$ a.î.

$\left.\begin{array}{l}(1,0) = m(a,b)\\ (0,1) = n(a,b)\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} ma=1\\ mb=0\\ nb=1\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} b=0\\ nb=1\end{array}\right\} \Rightarrow 0=1$ contradicție

Rămâne că $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ nu e ciclic.

Fie G grup și $x\in G$. $\langle x\rangle = \{x, x^2, x^3, \ldots\} \supset \{x^k \mid k\in\mathbb{Z}\}$

$\boxed{\text{TEMĂ}}$ Este $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_6$ ciclic? Dar $\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_5$? Dar $\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_6$?

(143) $\boxed{\text{Temă}}$ (155)

Definim

$\varphi: \mathbb{Z}_{mn} \to \mathbb{Z}_m\times\mathbb{Z}_n,\ \varphi(\hat{a}) = (\bar{a}, \mathring{a})$

Dacă $\hat{a} = \hat{b}$ $m.n \mid a-b$ $\to$ $m\mid a-b \Rightarrow \bar{a}=\bar{b}$; $n\mid a-b \Rightarrow \mathring{a} = \mathring{b}$

În $\mathbb{Z}_k$ $\hat{a}=\hat{b} \iff k\mid a-b$.

Deci φ e corect definită.

Pp. $(m,n)=1$. Fie $a,b\in\mathbb{Z}$ a.î. $\varphi(\hat{a}) = \varphi(\hat{b}) \Rightarrow (\bar{a},\mathring{a}) = (\bar{b},\mathring{b}) \Rightarrow \begin{cases}\bar{a}=\bar{b}\\ \mathring{a}=\mathring{b}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m\mid a-b\\ n\mid a-b\end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow m.n\mid a-b \Rightarrow \hat{a}=\hat{b} \Rightarrow \varphi$ injectivă $\Rightarrow |\mathrm{Im}\,\varphi| = |\mathbb{Z}_{m.n}| \iff$

$|\mathrm{Im}\,\varphi| = m.n = |\mathbb{Z}_m\times\mathbb{Z}_n| \Rightarrow \mathrm{Im}\,\varphi = \mathbb{Z}_m\times\mathbb{Z}_n \Rightarrow$

$\Rightarrow \varphi$ surjectivă $\Rightarrow \varphi$ bijectivă.

Luăm $\hat{a},\hat{b}\in\mathbb{Z}_{m.n}$. $\varphi(\hat{a}+\hat{b}) = \varphi(\widehat{a+b}) = (\overline{a+b}, \mathring{\overline{a+b}}) = (\bar{a}+\bar{b}, \mathring{a}+\mathring{b}) = (\bar{a},\mathring{a}) + (\bar{b},\mathring{b}) =$
$= \varphi(\hat{a}) + \varphi(\hat{b})$

Deci $\left.\begin{array}{l}\varphi \text{ morfism de grupuri}\\ \varphi \text{ bijectivă}\end{array}\right\} \Rightarrow \varphi$ izomorfism

Dacă $\mathbb{Z}_{mn} \simeq \mathbb{Z}_m\times\mathbb{Z}_n$, atunci $\mathbb{Z}_m\times\mathbb{Z}_n$ conține elemente de ordinul $m.n$.

(P) $\mathbb{Z}_{mn} \simeq \mathbb{Z}_m\times\mathbb{Z}_n \iff (m,n)=1$

S51

$$S_3 = \{ \underset{e}{\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}}, \underset{a}{\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}}, \underset{b}{\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}}, \underset{c}{\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}}, \underset{d}{\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}}, \underset{f}{\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}} \}$$

tramp (a), tramp (b), tramp (f)

$\circ$	e	a	b	c	d	f
e	e	a	b	c	d	f
a	a	e	d	f	b	c
b	b	c	e	a	f	d
c	c	b	f	d	e	a
d	d	f	a	e	c	b
f	f	d	c	b	a	e

$$ab = \begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix} = d$$

$$ac = \begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix} = f$$

$$ad = \begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix} = b$$

$$ca = \begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix} = b$$

$$cb = \begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix} = f$$

$$c\cdot c = \begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix} = d$$

$$c\cdot d = \begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix} = e$$

$$c\cdot f = \begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix} = a$$

Subgrupuri : $\{e\}, S_3$

Subgrupul generat de :

$\langle a\rangle = \{a, e\}$

$\langle b\rangle = \{b, e\}$

$\langle c\rangle = \{c, d, e\}$

$\langle d\rangle = \{d, c, e\}$

$\langle f\rangle = \{e, f\}$

$\langle e\rangle = \{e\}$

$\langle a,b\rangle = \{e, a, b, ab, a^{-1}b, ab^{-1}, a^{-1}b^{-1}\}$
$= \{e, a, b, d\}$

$ad = b$
$bd = f \notin \langle a,b\rangle$

i.e. $\langle M\rangle$ = { forme date } dar mulțimea ~~fm~~ forma date $\not\Rightarrow$ subgrup

$\Longrightarrow S_3$ nu este ciclic.
S_3 este finit generat (o transpo. și un ciclu)

$$\begin{tikzcd}
 & & S_3 \arrow[dll, dash] \arrow[dl, dash] \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] & \\
\{e,a\} & \{e,b\} & \{e,c,d\} & \{e,f\} \\
 & & \{e\} \arrow[ull, dash] \arrow[ul, dash] \arrow[u, dash] \arrow[ur, dash] &
\end{tikzcd}$$

$\boxed{*}$ $Ha \overset{not}{=} \{e,a\}$

$G = S_3$

$(G/Ha)_s = ?$

$(G/Ha)_d = ?$

$(G/Ha)_s = \{ \overset{\hat{e}}{\{e,a\}}, \overset{\hat{b}}{\{b,c\}}, \overset{\hat{d}}{\{d,f\}} \}$

$(G/Ha)_d = \{ \overset{\hat{e}}{\{e,a\}}, \overset{\hat{b}}{\{b,d\}}, \overset{\hat{c}}{\{c,f\}} \}$

$\hat{a}_s = \{ y \in G \mid x \equiv_s y \pmod H \} = xH$

$\hat{a}_d = \{ y \in G \mid x \equiv_d y \pmod H \} = Hx$

$x \equiv_s y \pmod H \iff x^{-1}y \in H$ (congr. la stg.)

$x \equiv_d y \pmod H \iff xy^{-1} \in H$ (congr. la dr.)

$(G/H)_s = \{ \hat{a}_s \mid a \in G \} = \{ aH \mid a \in G \}$

$(G/H)_d = \{ \hat{a}_d \mid a \in G \} = \{ Hx \mid a \in G \}$

la stânga	la dreapta
$\hat{e} = \{e, a\}$	$\hat{e} = \{e, a\}$
$\hat{b} = \{b, c\}$	$\hat{b} = \{b, d\}$
$\hat{d} = \{d, f\}$	$\hat{c} = \{c, f\}$
$\hat{x}_s = \{y \mid x^{-1}y \in H\}$	$\hat{x}_d = Hx$

$= \{y \mid x^{-1}y = h, h \in H\}$
$= \{y \mid y = xh, h \in H\}$
$= \{xh \mid h \in H\}$
$= xH$

(*) Dacă considerăm $H_c = \{e, c, d\}$, avem $(S_3/H_c)_s = \{\underset{\overset{not}{=}\,\hat{c}}{\{e,c,d\}}, \underset{\overset{not}{=}\,\hat{a}}{\{a,b,f\}}\}$ și $(S_3/H_c)_d = \{\{e,c,d\}, \{a,b,f\}\}$ deci $(S_3/H_c)_s = (S_3/H_c)_d$

$\{e,a\} \cdot \{b,c\} = \{b, c, d, f\}$
$\{e,c,d\} \cdot \{e,c,d\} = \{e,c,d\}$
$\{e,c,d\} \cdot \{a,b,f\} = \{a,b,f\}$
$\{a,b,f\} \cdot \{e,c,d\} = \{a,b,f\}$
$\{a,b,f\} \cdot \{a,b,f\} = \{e,d,c\}$

	$(\hat{c})$ $\{e,c,d\}$	$(\hat{a})$ $\{a,b,f\}$
$(\hat{c})$ $\{e,c,d\}$	$\{e,c,d\}$ $(\hat{c})$	$\{a,b,f\}$ $(\hat{a})$
$(\hat{a})$ $\{a,b,f\}$	$\{a,b,f\}$ $(\hat{a})$	$\{e,c,d\}$ $(\hat{c})$

Presupunem $(G/H)_s = (G/H)_d$. Atunci $xH \in (G/H)_s = (G/H)_d$.

$(G/H)_d = \{Ha \mid a \in G\}$ $\quad Ha, Hb \in (G/H)_d$ fie coincid, fie sunt disjuncte $\Rightarrow xH = Hx$.

pe (G/H) constatăm că $(xH)(yH) = (Hx)(yH) = HxyH = xyH\cdot H = xyH$.

$\forall x \in G \quad xHx^{-1} = H$

Dacă $\forall x \in G$ $\forall h \in H$ $xhx^{-1} \in H$, atunci H se numește subgrup normal și se notează $H \trianglelefteq G$.

Dacă $H \trianglelefteq G$, at. grupul factor G/H are:
- mulțimea subiacentă $(G/H)_s$
- legea $\hat{x} \cdot \hat{y} = \widehat{xy}$

Obs În G/H $\hat{x} = \hat{y} \Leftrightarrow x^{-1}y \in H$.

$|G:H| \overset{not}{=} |(G/H)_s|$ indicele lui H în G

(*) $D_n = \{1, \rho, \rho^2, \dots, \rho^{n-1}, \sigma, \rho\sigma, \rho^2\sigma, \dots, \rho^{n-1}\sigma\}$ $\qquad n=3 \Rightarrow$ are $2n$ elem. $1, \rho, \rho^2, \sigma, \rho\sigma, \rho^2\sigma$

$\rho^n = 1$
$\sigma^2 = 1$
$\sigma\rho = \rho^{n-1}\sigma$

$D_4 = \{1, \rho, \rho^2, \rho^3, \sigma, \rho\sigma, \rho^2\sigma, \rho^3\sigma\}$
$\rho^4 = \sigma^2 = 1$
$\sigma\rho = \rho^3\sigma$

$\sigma\rho^2 = \sigma\rho\rho = \rho^3\sigma\rho = \rho^3\rho^3\sigma = \rho^2\sigma$
$\sigma\rho^3 = \sigma\rho^2\rho = \rho^2\sigma\rho = \rho^2\rho^3\sigma = \rho\sigma$

$\circ$	1	ρ	ρ^2	ρ^3	σ	$\rho\sigma$	$\rho^2\sigma$	$\rho^3\sigma$
1	1	ρ	ρ^2	ρ^3	σ	$\rho\sigma$	$\rho^2\sigma$	$\rho^3\sigma$
ρ	ρ	ρ^2	ρ^3	1	$\rho\sigma$	$\rho^2\sigma$	$\rho^3\sigma$	σ
ρ^2	ρ^2	ρ^3	1	ρ	$\rho^2\sigma$	$\rho^3\sigma$	σ	$\rho\sigma$
ρ^3	ρ^3	1	ρ	ρ^2	$\rho^3\sigma$	σ	$\rho\sigma$	$\rho^2\sigma$
σ	σ	$\rho^3\sigma$	$\rho^2\sigma$	$\rho\sigma$	1	ρ^3	ρ^2	ρ
$\rho\sigma$	$\rho\sigma$	σ	$\rho^3\sigma$	$\rho^2\sigma$	ρ	1	ρ^3	ρ^2
$\rho^2\sigma$	$\rho^2\sigma$	$\rho\sigma$	σ	$\rho^3\sigma$	ρ^2	ρ	1	ρ^3
$\rho^3\sigma$	$\rho^3\sigma$	$\rho^2\sigma$	$\rho\sigma$	σ	ρ^3	ρ^2	ρ	1

Subgrupurile:

$\langle 1\rangle = \{1\}$

$\langle \rho\rangle = \{1, \rho, \rho^2, \rho^3\}$

$\langle \rho^2\rangle = \{1, \rho^2\}$

$\langle \rho^3\rangle = \{1, \rho, \rho^2, \rho^3\}$

$\langle \sigma\rangle = \{1, \sigma\}$

$\langle \rho\sigma\rangle = \{1, \rho\sigma\}$

$\langle \rho^2\sigma\rangle = \{1, \rho^2\sigma\}$

$\langle \rho^3\sigma\rangle = \{1, \rho^3\sigma\}$

$\langle \rho^2, \sigma\rangle = \{1, \rho^2, \sigma, \rho^2\sigma\}$

$\langle \rho^2, \rho\sigma\rangle = \{1, \rho^2, \rho\sigma, \rho^3\sigma\}$

conține $(\rho^3)^{\varepsilon_1} (\sigma)^{\varepsilon_2}$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \{-1, 1\}$

$\langle \rho^3, \sigma\rangle = \{1, \rho^3, (\rho^3)^{-1}, \sigma, \sigma^{-1}, \rho^3\sigma, (\rho^3)^{-1}\sigma, \rho^3\sigma^{-1}, (\rho^3)^{-1}\sigma^{-1}\}$

$= \{1, \rho^3, \rho, \sigma, \cancel{\sigma}, \rho^3\sigma, \rho\sigma, \cancel{\rho^3\sigma}, \cancel{\rho\sigma}\}$ nu e grup

pt că $6 \nmid 8$ și $\rho^3\sigma \cdot \rho\sigma = \rho^2 \notin \langle \rho^3, \sigma\rangle$

$|G| = |H| \cdot |G:H| \Rightarrow |G:H| = \dfrac{|G|}{|H|}$ dacă $|G|, |H|$ finite // Thm. lui Lagrange

Laticea subgrupurilor

D_4 normal (de la D-zeu)

$\{1, \rho^2, \sigma, \rho^2\sigma\}$ $\{1, \rho, \rho^2, \rho^3\}$ $\{1, \rho^2, \rho\sigma, \rho^3\sigma\}$ normale că au indice 2

$\{1, \sigma\}$ $\{1, \rho^2\sigma\}$ $\{1, \rho^2\}$ $\{1, \rho\sigma\}$ $\{1, \rho^3\sigma\}$

$\{1\}$

$\rho\{1, \sigma\} = \{\rho, \rho\sigma\}$

$\{1, \sigma\}\rho = \{\rho, \rho^3\sigma\}$ $\neq$

D_4

$\{1, \rho^2, \sigma, \rho^2\sigma\}$ $\{1, \rho, \rho^2, \rho^3\}$ $\{1, \rho^2, \rho\sigma, \rho^3\sigma\}$

$\{1, \rho^2\}$

$\{1\}$

$\boxed{\text{TEMA}}$ Descrieți grupul factor al lui D_4 în raport cu $\{1, \rho^2, \sigma, \rho^2\sigma\}$ și în raport cu $\{1, \rho^2\}$

$\boxed{\text{Vernă}}$ 141, 143

Temă

1. Dați exemplu de element care are mai mult de un simetric.

$\Delta: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $a \Delta b = a + 2|b|$, $a,b \in \mathbb{R}$

Fie $a = -2$

$\left.\begin{array}{l} a \Delta a_1^{-1} = -2 + 2 \cdot |1| = 0 \\ a \Delta a_2^{-1} = -2 + 2 \cdot |-1| = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow a_1^{-1} \neq a_2^{-1}$ simetrici ai lui a

2. a) Dați exemplu de element nesimetric care să aibă exact 5 simetrici la stânga.

$\Delta: A^2 \to \mathbb{R}$, $a \Delta b = a + [b]$

sim. $\stackrel{not}{=}$ simetrizabil

$A = \{0, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}\}$

Fie $a = 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 0 \Delta b = 0 + [b] = [b] = 0 \\ b \Delta 0 = b + [0] = b = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow b = 0$ este sim. și la stânga și la ~~dreap~~ dreapta

însă $b \in \{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}\}$ este sim. ~~de~~ doar la stg.

b) Dați exemplu de element nesimetric care să aibă exact 5 simetrici la dreapta

$\Delta: A^2 \to \mathbb{R}$, $a \Delta b = [a] + b$

Fie $a = 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 0 \Delta b = [0] + b = b = 0 \\ b \Delta 0 = [b] + 0 = [b] = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow b = 0$ este sim. și la stânga și la ~~dre~~ dreapta

însă $b \in \{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}\}$ este sim. doar la dr.

S6

$\boxed{1*}$ Arătați că $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \underset{izomorf}{\simeq} S^1 = (\{z \in \mathbb{C}^* \mid |z| = 1\}, \cdot)$

$S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ cercul unitate / sferă unidimensională

$S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ sfera unitate

$S^3 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1\}$

...

$S^{n-1} = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 1\}$

Fie $z_1, z_2 \in S^1 \Rightarrow |z_1| = 1$, $|z_2| = 1 \Rightarrow |z_2^{-1}| = 1$

Atunci $|z_1 z_2^{-1}| = |z_1| \cdot |z_2^{-1}| = 1 \Rightarrow z_1 z_2^{-1} \in S^1$

Prin urmare, $S^1 \leq (\mathbb{C}^*, \cdot)$, deci $(S^1, \cdot)$ e grup abelian

Vom aplica teorema fundamentală de izomorfism pt. grupuri:

Fie G, G' grupuri și $u: G \to G'$ un morfism de grupuri. Atunci:

$$G/_{\mathrm{Ker}\, u} \simeq \mathrm{Im}\, u$$

$\mathrm{Ker}\, u = \{g \in G \mid u(g) = e'\}$

Luăm $u: \mathbb{R} \to \mathbb{C}^*$, $u(x) = \cos(2\pi x) + i \sin(2\pi x)$

$(\mathbb{R}, +)$ grup ; $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ grup

Fie $x, y \in \mathbb{R}$

$u(x+y) = \cos 2\pi(x+y) + i \sin 2\pi(x+y)$

$= (\cos 2\pi x + i \sin 2\pi x)(\cos 2\pi y + i \sin 2\pi y)$

$= u(x) u(y)$, deci u e morfism de grupuri

Fie $x \in \mathbb{R}$. $x \in \operatorname{Ker} u \iff u(x) = 1$ (elem. neutru din $\mathbb{C}^*$) $\iff \cos 2\pi x + i \sin 2\pi x = 1 \iff$

$\begin{cases} \cos 2\pi x = 1 \\ \sin 2\pi x = 0 \end{cases} \iff x \in \{k \mid k \in \mathbb{Z}\} \iff x \in \mathbb{Z}$

Deci $\operatorname{Ker} u = \mathbb{Z}$.

Fie $y \in \operatorname{Im} u$. Atunci $\exists\, x \in \mathbb{R}, u(x) = y \Rightarrow$

$|y| = |u(x)| = |\cos 2\pi x + i \sin 2\pi x| = \sqrt{\cos^2 2\pi x + \sin^2 2\pi x} = 1$, deci $y \in S^1$.

Fie $y \in S^1$. Atunci $|y| = 1$, deci $y \underset{\uparrow}{=} \cos(\arg y) + i \sin(\arg y)$

din forma trigonometrică a nr. complexe

$y = u\left(\frac{\arg y}{2\pi}\right)$, deci $y \in \operatorname{Im} u$.

Prin urmare, $\operatorname{Im} u = S^1$.

Aplicând T.F.I.G., $\frac{\mathbb{R}}{\operatorname{Ker} u} \simeq \operatorname{Im} u$, adică $\frac{\mathbb{R}}{\mathbb{Z}} \simeq S^1$

$\boxed{\text{Temă}}$ a) Arătați că $\frac{\mathbb{C}^*}{\mathbb{R}^*_+} \simeq S^1$

b) —"— $\frac{\mathbb{C}^*}{S^1} \simeq \mathbb{R}^*_+$

$\boxed{*}$ $u : \mathbb{Z} \to G = \langle g \rangle = \{g^0, g^1, \dots\}$, $u(n) = g^n$

$\operatorname{Im} u = G$

$\operatorname{Ker} u = \{n \in \mathbb{Z} \mid g^n = 1\} = t\mathbb{Z}$

$\mathbb{Z}/_{\operatorname{Ker} u} \simeq \operatorname{Im} u \iff \mathbb{Z}_n \simeq G$

$\boxed{*}$ $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $u(x, y) = x$ $\boxed{\text{Temă}}$ 144, 143

Fie $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$

$u((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) = u((x_1 + x_2, y_1 + y_2)) = x_1 + x_2 = u(x_1, y_1) + u(x_2, y_2)$

Deci u e morfism de grupuri.

$\operatorname{Ker} u = \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\} = \{0\} \times \mathbb{R}$

$\operatorname{Im} u = \mathbb{R}$ (căci dacă $\alpha \in \mathbb{R}$ e arbitrar, α este $u(\alpha, 0)$)

Conform T.F.I.G. :

$$\frac{\mathbb{R} \times \mathbb{R}}{\{0\} \times \mathbb{R}} \simeq \mathbb{R} \qquad \widehat{(x, y)} \longmapsto x$$

$\boxed{*}$ $u : G \to G'$

$G/_{\operatorname{Ker} u} \overset{\bar{u}}{\simeq} G'$, $\bar{u}(\hat{x}) = u(x)$

$\boxed{\text{Temă}}$ Arătați că dacă $H_1 \trianglelefteq G_1$ și $H_2 \trianglelefteq G_2$, atunci $H_1 \times H_2 \trianglelefteq G_1 \times G_2$ și $\frac{G_1 \times G_2}{H_1 \times H_2} \simeq \frac{G_1}{H_1} \times \frac{G_2}{H_2}$

<u>Obs</u> $\frac{G}{\{e\}} \simeq G$, $\frac{G}{G} \simeq \{e\}$

$\boxed{*}$ Fie $f \in \operatorname{End}(\mathbb{Z})$

$f(0) = 0$

$f(1) \overset{\text{not}}{=} \alpha$

$f(2) = f(1+1) = f(1) + f(1) = 2f(1) = 2\alpha$

Inductiv, $f(n) = n\alpha$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Fie $n \in \mathbb{Z}_-$

$$f(0)=0 = f(n+(-n)) = f(n) + \underbrace{f(\underbrace{-n}_{\in \mathbb{N}})}_{=-n\alpha} = f(n) - n\alpha \Rightarrow f(n) = n\alpha \qquad (*)$$

Deci $f = f_\alpha$, unde $f_\alpha : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f_\alpha(t) = \alpha t$

Concluzie: $\mathrm{End}_{grp}(\mathbb{Z}) = \{ f_\alpha \mid \alpha \in \mathbb{Z} \}$, unde $f_\alpha : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f_\alpha(t) = \alpha t$

$\boxed{*}$ $\mathrm{Hom}_{grp}(\mathbb{Z}, \mathbb{Q}) = ?$

Cu calcule de tip $(*)$, $\mathrm{Hom}_{grp}(\mathbb{Z}, \mathbb{Q}) = \{ f_\alpha \mid \alpha \in \mathbb{Q} \}$, unde $f_\alpha : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$, $f_\alpha(t) = \alpha t$

$\boxed{*}$ $\mathrm{Hom}_{grp}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}) = ?$

Fie $f \in \mathrm{Hom}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z})$

$f(1) \overset{not}{=} \alpha$. Pp. $\alpha \neq 0$, $\alpha > 0$

$$\left.\begin{array}{l} f(\underbrace{\tfrac{1}{2\alpha} + \tfrac{1}{2\alpha} + \dots + \tfrac{1}{2\alpha}}_{2\alpha \text{ ori}}) = f(1) = \alpha \\ \quad \| \\ \underbrace{f(\tfrac{1}{2\alpha}) + \dots + f(\tfrac{1}{2\alpha})}_{2\alpha \text{ ori}} = 2\alpha\, f(\tfrac{1}{2\alpha}) \end{array}\right\} \Rightarrow \underbrace{2 f(\tfrac{1}{2\alpha})}_{par} = 1 \ \lightning$$

Deci $\mathrm{Hom}_{grp}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}) = \{0\}$

$0 : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}$, $0(x) = 0$

$\boxed{*}$ $\mathrm{Hom}_{grp}(\mathbb{Z}_5, \mathbb{Q}) = ?$

Fie $f \in \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_5, \mathbb{Q})$

$f(\hat{1}) \overset{not}{=} \alpha$

$0 = f(\hat{0}) = f(\hat{5}) = f(\hat{1}+\hat{1}+\hat{1}+\hat{1}+\hat{1}) = f(\hat{1})+f(\hat{1})+f(\hat{1})+f(\hat{1})+f(\hat{1}) = 5f(\hat{1}) = 5\alpha \Rightarrow \alpha = 0$

Pt. $\hat{a} \in \mathbb{Z}_5$ $f(\hat{a}) = a f(\hat{1}) = a \cdot \alpha = 0$

$\mathrm{Hom}_{grp}(\mathbb{Z}_5, \mathbb{Q}) = \{0\}$

$\boxed{\text{Temă}}$ $\mathrm{Hom}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}_p) = ?$

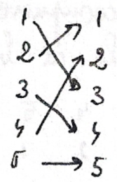
$\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_6, \mathbb{Z}) = ?$

§6'

Permutări

pt. $n \in \mathbb{N}^*$ $S_n \overset{not}{=}$ mulțimea permutărilor mulțimii $\{1, \dots, n\}$, i.e. a bijecțiilor $\sigma : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$.

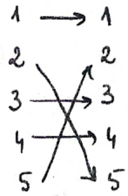
Folosim notația $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ pt. σ



$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 1 & 3 & 4 & 2 & 7 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 1 & 6 & 5 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 5 & 7 & 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 1 & 5 & 7 & 4 & 6 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 1 & 7 & 5 & 3 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$ // citim permutarea inițială de jos în sus!



transpoziție

$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 1 & 5 & 3 & 4 & 2\end{pmatrix} \overset{not}{=} (2\,5)$

Orice permutare din S_n se poate scrie ca produs de transpoziții.

$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7\\ 5 & 1 & 3 & 4 & 2 & 7 & 6\end{pmatrix} = (1\,5)(5\,2)(6\,7)$

$\underbrace{\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7\\ 6 & 5 & 7 & 2 & 1 & 4 & 3\end{pmatrix}}_{\sigma} = (1\,6)(6\,4)(4\,2)(2\,5)(3\,7)$

$= \underbrace{\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7\\ 1 & 5 & 7 & 2 & 6 & 4 & 3\end{pmatrix}}_{\sigma_1}(1\,5)$

$= \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7\\ 1 & 2 & 7 & 5 & 6 & 4 & 3\end{pmatrix}(2\,4)(1\,5)$

$= \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7\\ 1 & 2 & 3 & 5 & 6 & 4 & 7\end{pmatrix}(3\,7)(2\,4)(1\,5)$

$= \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7\\ 1 & 2 & 3 & 6 & 5 & 4 & 7\end{pmatrix}(4\,5)(3\,7)(2\,4)(1\,5)$

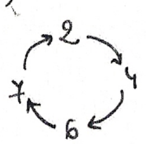
$= (4\,6)(4\,5)(3\,7)(2\,4)(1\,5)$

// $\sigma = \sigma_1(1\,5) \Rightarrow \sigma(1\,5) = \sigma_1$

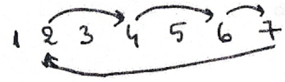
Teoremă. Orice permutare din S_n se scrie în mod unic (abstracție făcând de ordinea factorilor) ca produs de cicli disjuncți.

Ce-i aia ciclu în S_n?

Așa ceva:



$(2\,4\,6\,7) \overset{not}{=} \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7\\ 1 & 4 & 3 & 6 & 5 & 7 & 2\end{pmatrix}$



$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7\\ 1 & 4 & 3 & 6 & 5 & 7 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7\\ 1 & 4 & 3 & 6 & 5 & 7 & 2\end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7\\ 1 & 6 & 3 & 7 & 5 & 2 & 4\end{pmatrix}$

$(4\,7)(2\,6)$

$(2\,4\,6\,7)^3 = (2\,7\,6\,4)$

$(2\,4\,6\,7)^2 = (2\,6)(4\,7)$

Cum descompunem permutările în cicli disjuncți?

R: Simplu ca bună ziua!

$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7\\ 6 & 5 & 7 & 2 & 1 & 4 & 3\end{pmatrix} = (1\,6\,4\,2\,5)(3\,7)$

$= (1\,6)(6\,4)(4\,2)(2\,5)(3\,7)$

$(2\,7)(7\,3)(3\,5)(5\,1) = (1\,2\,7\,3\,5) = (2\,7\,3\,5\,1)$

Analog $(i_1\, i_2 \dots i_k) = (i_1 i_2)(i_2 i_3)\cdots(i_{k-1}\, i_k)$

Obs. Ordinul oricărui ciclu este egal cu lungimea sa.

Propr. Ordinul permutării σ din S_n este cel mai mic multiplu comun al lungimilor ciclilor disjuncți din descompunerea lui σ.

Def. Signatura permutării $\sigma \in S_n$ este numărul $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{inv\,\sigma}$, unde $inv\,\sigma$ = nr. de inversiuni ale lui σ.

Obs. $\varepsilon(\sigma) \in \{-1, 1\}$

Def. σ s.n. pară dacă $\varepsilon(\sigma) = 1$ ($inv\,\sigma$ este par).
σ s.n. impară dacă $\varepsilon(\sigma) = -1$ ($inv\,\sigma$ este impar).

Cum calculăm $\varepsilon(\sigma)$? Determinăm $inv\,\sigma$.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 5 & 1 & 3 & 8 & 4 & 11 & 10 & 7 & 6 & 2 & 9 \end{pmatrix} = (1\ 5\ 4\ 8\ 7\ 10\ 2)(6\ 11\ 9)$$

$$= (1\ 5)(5\ 4)(4\ 8)(8\ 7)(7\ 10)(10\ 2)(6\ 11)(11\ 9)$$

$$\Rightarrow \varepsilon(\sigma) = (-1)^8 = 1$$

Prop. $\forall\, \sigma, \tau \in S_n \quad \varepsilon(\sigma\tau) = \varepsilon(\sigma) \cdot \varepsilon(\tau)$.

$ord(\sigma) = [7, 3] = 21$

$\sigma^{2011} = ?$

$2011 = 21 \cdot 95 + 16$

$$\sigma^{2011} = (\sigma^{21})^{95} \cdot \sigma^{16} = e^{95} \cdot \sigma^{16} = \sigma^{16}$$

$$= (1\ 5\ 4\ 8\ 7\ 10\ 2)^{16}(6\ 11\ 9)^{16}$$

$$= (1\ 5\ 4\ 8\ 7\ 10\ 2)^{2}(6\ 11\ 9)$$

$$= (1\ 4\ 7\ 2\ 5\ 8\ 10)(6\ 11\ 9)$$

$\boxed{\text{Temă}}$ $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 \\ 5 & 6 & 4 & 2 & 9 & 3 & 12 & 7 & 10 & 1 & 11 & 8 & 15 & 16 & 13 & 17 & 14 \end{pmatrix} \in S_{17}$

- Descompuneți σ în produs de transpoziții și în produs de cicli disjuncți.
- Determinați σ^5, σ^{-1}, $\varepsilon(\sigma)$, $ord(\sigma)$, σ^{2011}.

$(1\ 2)(1\ 3)(1\ 2) = (2\ 3)$

$(1\ i)(1\ j)(1\ i) = (i\ j)$

$\Rightarrow S_n = \langle (1\ 2), (1\ 3), \ldots, (1\ n) \rangle$

$\boxed{\text{Temă}}$. Arătați că S_n este generat de urm. transp.:

$S_n = \langle (1\ 2), (2\ 3), \ldots, (n-1\ n) \rangle$

- $S_n = \langle (1\ 2), (1\ 2\ 3 \ldots n) \rangle$

$\boxed{\text{Pb. supl.}}$ $\exists\ \tau_1, \ldots, \tau_k$ transpoziții în S_n, $k < n-1$ ai $S_n = \langle \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_k \rangle$?

S7

① Fie pe $\mathbb{C}$ o relație binară : $x \rho y \iff x-y \in \mathbb{R}$

a) ρ rel. de echiv.

- refl.

Fie $z \in \mathbb{C}$. $z-z=0 \in \mathbb{R} \Rightarrow z \rho z$. Deci ρ e (R).

- sim.

Fie $z, w \in \mathbb{C}$ ai $z \rho w$. Atunci $z-w \in \mathbb{R} \Rightarrow w-z=-(z-w) \in \mathbb{R} \Rightarrow w \rho z$.

Deci ρ e (S).

- tranz.

Fie $z, w, u \in \mathbb{C}$ cu $z \rho w$ și $w \rho u$. Atunci

$$\begin{array}{l} z-w \in \mathbb{R} \\ \underline{w-u \in \mathbb{R}} \; + \\ z-u=(z-w)+(w-u) \in \mathbb{R} \end{array}$$

Deci ρ este (T).

Din (R), (S) și (T) obț. că ρ este rel. de echiv.

b) Să se explicteze $\hat{z}, z \in \mathbb{C}$.

$\hat{0} = \mathbb{R}$

$\hat{1} = \mathbb{R}$

$\hat{i} = \mathbb{R}+i = \{\alpha+i \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$

$\widehat{3+i} = \mathbb{R}+i$

$\widehat{1+3i} = \mathbb{R}+3i$

Obs. $\forall z \in \mathbb{C}$, $\hat{z} = \mathbb{R} + i \cdot \operatorname{Im} z$

c) S.C.I.R. pt. ρ

$\mathbb{R}i = \{bi \mid b \in \mathbb{R}\} = \{\hat{0}, \hat{i}, \widehat{2i}, \widehat{3i}, \dots\}$

② $(\mathbb{C}/_{\mathbb{R}}, +) \simeq (\mathbb{R}, +)$

TFIG: Fie $f: G \to G'$ morfism de grupuri. Atunci $G/_{\operatorname{Ker} f} \simeq \operatorname{Im} f$.

Considerăm $f: \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, $f(x+iy)=y$

Fie $z_1 = x_1+iy_1$, $z_2 = x_2+iy_2 \in \mathbb{C}$

Atunci $f(z_1+z_2) = f((x_1+x_2)+i(y_1+y_2)) = y_1+y_2 = f(z_1)+f(z_2)$

Deci f e morfism de grupuri.

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker} f &= \{x+iy \in \mathbb{C} \mid f(x+iy)=0\} \\ &= \{x+iy \in \mathbb{C} \mid y=0\} \\ &= \mathbb{R} \end{aligned}$$

$\operatorname{Im} f \subset \mathbb{R}$. Fie $y \in \mathbb{R}$. Atunci $y = f(iy) \in \operatorname{Im} f$. Deci $\mathbb{R} \subseteq \operatorname{Im} f$. Prin urmare $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}$.

Conform TFIG $\Rightarrow (\mathbb{C}/_{\mathbb{R}}, +) \simeq (\mathbb{R}, +)$

③ $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 5 & 3 & 2 & 4 & 6 & 1 & 10 & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \in S_{10}$

a) Să se descompună în produs de cicli disjuncți.

$\sigma = (1\ 5\ 6)(2\ 3)(4)(7\ 10\ 9\ 8)$

b) Să se descompună în produs de transpoziții.

$\sigma = (1\,6)(1\,5)(2\,3)(7\,8)(7\,9)(7\,10)$

$= (1\,5)(5\,6)(2\,3)(7\,10)(10\,9)(9\,8)$

c) $\operatorname{ord}\sigma = ?$

$\operatorname{ord}\sigma = [3,2,4] = 12$ // c.m.m.m.c dintre lungimile ciclilor

d) $\sigma^{-1} = ?$

$\sigma^{147} = ?$

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 6 & 3 & 2 & 4 & 1 & 5 & 8 & 9 & 10 & 7 \end{pmatrix}$$

$\operatorname{ord}(\sigma) = 12 \Rightarrow \sigma^{12} =$ elem. neutru

$\sigma^{147} = \sigma^{12\cdot 12+3} = (\sigma^{12})^{12}\cdot\sigma^3 = e^{12}\cdot\sigma^3 = \sigma^3 = (2\,3)(7\,8\,9\,10)$

pt. σ^k numărăm din k în k pe fiecare ciclu

$(1\,5\,6)$ 1 merge în 1
5 —"— 5
6 —"— 6

$(2\,3)$ 2 merge în 3
3 —"— 2

Analog şi pt. $(7\,10\,9\,8)$.

(4) $f: \mathbb{Q} \to \mathbb{C}^*$, $f(\frac{m}{n}) = \cos 2\pi\frac{m}{n} + i\sin 2\pi\frac{m}{n}$

$U_\infty = \{z \in \mathbb{C}^* \mid \exists\, n \in \mathbb{N}^*$ ai $z^n = 1\}$. $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \simeq U_\infty$.

a) f morfism de grupuri

Fie $\frac{m}{n}, \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$

$f(\frac{m}{n}+\frac{p}{q}) = \cos 2\pi(\frac{m}{n}+\frac{p}{q}) + i\sin 2\pi(\frac{m}{n}+\frac{p}{q})$

$f(\frac{m}{n})\cdot f(\frac{p}{q}) = (\cos 2\pi\frac{m}{n} + i\sin 2\pi\frac{m}{n})(\cos 2\pi\frac{p}{q} + i\sin 2\pi\frac{p}{q})$

$= \cos 2\pi(\frac{m}{n}+\frac{p}{q}) + i\sin 2\pi(\frac{m}{n}+\frac{p}{q})$

$\Rightarrow f(\frac{m}{n}+\frac{p}{q}) = f(\frac{m}{n})\cdot f(\frac{p}{q})$

Deci f e morfism de grupuri între $(\mathbb{Q},+)$ şi $(\mathbb{C}^*,\cdot)$.

b) Determinați $\operatorname{Ker} f$ şi $\operatorname{Im} f$.

Fie $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$. $\frac{m}{n} \in \operatorname{Ker} f \Leftrightarrow f(\frac{m}{n}) = 1 \Leftrightarrow \cos 2\pi\frac{m}{n} + i\sin 2\pi\frac{m}{n} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases}\cos 2\pi\frac{m}{n} = 1 \\ \sin 2\pi\frac{m}{n} = 0\end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\pi\frac{m}{n} \in \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \Leftrightarrow \frac{m}{n} \in \{k \mid k \in \mathbb{Z}\} \Leftrightarrow \frac{m}{n} \in \mathbb{Z}$.

Prin urmare, $\operatorname{Ker} f = \mathbb{Z}$.

$\operatorname{Im} f \subset \mathbb{C}^*$.

Fie $z = f(\frac{m}{n}) \in \operatorname{Im} f$. Atunci $z^n = (\cos 2\pi\frac{m}{n} + i\sin 2\pi\frac{m}{n})^n = \cos 2\pi m + i\sin 2\pi m$ $\overset{\wedge}{=}$ $m \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow z \in U_\infty$. Deci $\operatorname{Im} f \subset U_\infty$. (1)

Fie $z \in U_\infty$. Atunci $\exists\, n \in \mathbb{N}^*$ ai $z^n = 1$. Dar ecuația binomă $z^n = 1$ are soluția $\{\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n} \mid k \in \{0,1,\dots,n-1\}\}$. Conform ei, $\exists\, k \in \{0,1,\dots,n-1\}$ ai $z = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n} = f(\frac{k}{n}) \in \operatorname{Im} f$. Deci $U_\infty \subset \operatorname{Im} f$. (2)

Din (1) şi (2) $\Leftrightarrow \operatorname{Im} f = U_\infty$.

c) $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \simeq U_\infty$

Conform T.F.I.G. $\mathbb{Q}/_{\mathrm{Ker} f} \simeq \mathrm{Im} f$, $\mathrm{Ker} f = \mathbb{Z}$, $\mathrm{Im} f = U_\infty \Rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \simeq U_\infty$.

(5) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 5 & 9 & 1 & 2 & 8 & 10 & 6 & 3 & 4 & 7 & 11 \end{pmatrix}$

a) produs de cicli disjuncți

$\sigma = (1\ 5\ 8\ 3)(2\ 9\ 4)(6\ 10\ 7)(11)$

b) produs de transpoziții

$\sigma = (1\ 3)(1\ 8)(1\ 5)(2\ 4)(2\ 9)(6\ 7)(6\ 10)$

c) $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{inv(\sigma)} = (-1)^{21}$ $\quad$ $inv(\sigma)$ = nr. inversiuni

$= (-1)^7$ = nr. transp. din descomp.

$= -1$

$ord(\sigma) = [4, 3, 3] = 12$

d) $x^2 = \sigma$

Pp. că are soluții. $\varepsilon(x^2) = 1 \neq \varepsilon(\sigma) = -1$ $\lightning$

(6) $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$ nu e ciclic.

Un element generează tot grupul $\Rightarrow$ grupul e ciclic.

Pp. că e ciclic $\Rightarrow \exists\ (a, \hat{b}) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$ ai $\langle (a, \hat{b}) \rangle = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$

$\downarrow$

orice element din $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$ este multiplu de $(a, \hat{b})$

Considerăm $(1, \hat{0})$ și $(0, \hat{1})$ din $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$. $\Rightarrow \exists\ \alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ ai $\begin{cases} (1, \hat{0}) = \alpha \cdot (a, \hat{b}) \\ (0, \hat{1}) = \beta \cdot (a, \hat{b}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = \alpha a \\ 0 = \beta a \\ \hat{1} = \beta \hat{b} \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow 0 \cdot \alpha = \beta \underbrace{a \alpha}_{1} \Rightarrow \begin{matrix} \beta = 0 \\ \hat{1} = \beta \hat{b} \end{matrix} \Bigg| \Rightarrow \hat{1} = \hat{0}$ $\lightning \Rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$ nu e ciclic.

(7) $ord_{\mathbb{Z}_{350}} \widehat{25} = ?$

$ord_{\mathbb{Z}_{350}} \widehat{25} = ord_{\mathbb{Z}_{350}} (25 \cdot \hat{1}) = \dfrac{ord_{\mathbb{Z}_{350}} \hat{1}}{(25, ord_{\mathbb{Z}_{350}} \hat{1})} = \dfrac{350}{(25, 350)} = \dfrac{350}{25} = 14$

$ord(x^k) = \dfrac{ord\, x}{(k, ord\, x)}$; $ord(k \cdot x) = \dfrac{ord\, x}{(k, ord\, x)}$

(8) Fie $(\hat{x}, \bar{y}) \in \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6$ ai $ord(\hat{x}, \bar{y}) = 12$. $(\hat{x}, \bar{y}) = ?$

$ord(\hat{x}, \bar{y}) = 12 \Leftrightarrow [\underbrace{ord\, \hat{x}}_{\text{divide } 4}, \underbrace{ord\, \bar{y}}_{\text{divide } 6}] = 12 \Leftrightarrow \begin{cases} ord\, \hat{x} = 4,\ ord\, \bar{y} = 3 \\ \text{sau} \\ ord\, \hat{x} = 4,\ ord\, \bar{y} = 6 \end{cases} \Leftrightarrow$

$(\hat{x}, \bar{y}) \in \{(\hat{1}, \bar{2}), (\hat{1}, \bar{4}), (\hat{3}, \bar{2}), (\hat{3}, \bar{4}), (\hat{1}, \bar{1}), (\hat{1}, \bar{5}), (\hat{3}, \bar{1}), (\hat{3}, \bar{5})\}$

(9) $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ nu e ciclic.

Pp. că este. Fie $\alpha \in \mathbb{C}^*$ ai $\mathbb{C}^* = \langle \alpha \rangle$.

Dacă $|\alpha| = 1$, cum $\exists\ n \in \mathbb{Z}$ ai $\alpha^n = 2 \Rightarrow |\alpha|^n = |2| \Rightarrow 1 = 2$ $\lightning$

Dacă $|\alpha| \neq 1$, $\exists\ n \in \mathbb{Z}$ ai $|\alpha \sqrt{|\alpha|}| = \alpha^n \Rightarrow |\alpha| \sqrt{|\alpha|} = |\alpha|^n \Rightarrow |\alpha|^{\frac{3}{2}} = |\alpha|^n \Rightarrow$

$\Rightarrow n = \frac{3}{2}$ $\lightning$.