IX

K. Teleman

M. Florescu
D. Moraru

C. Rădulescu
E. Stătescu

Matematică

manual pentru clasa a IX-a

Geometrie și trigonometrie

Editura didactică și pedagogică,
București, 1980

K. Teleman

M. Florescu
D. Moraru

C. Rădulescu
E. Stătescu

IX

Matematică

manual pentru clasa a IX-a

Geometrie şi trigonometrie

Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti manualul a fost revizuit pe baza programei școlare aprobate de Ministerul Educației și Învățămîntului cu nr. 39490/1978.

Referenți: prof. univ. CABIRIA ANDREIAN
prof. univ. ION CUCULESCU
dr. ALEXANDRU BREZULEANU
dr. HOREA BANEA

Indicații generale

S-a căutat ca obiecte diferite să fie notate diferit, pentru a se evita confuzii. Astfel se face deosebire, în formulări și prin notații, între dreapta definită de două puncte, între segmentele închis și deschis avînd aceste puncte ca extremități și între distanța dintre aceleași puncte (care este egală prin definiție cu lungimea segmentelor menționate).

Printr-o formulare de tipul: „Fie A, B două puncte..." subînțelegem că punctele A și B sînt distincte (deoarece altfel nu am avea *două* puncte). Uneori, cînd vrem să subliniem faptul că o anumită formulare are sens numai dacă punctele A, B sînt distincte, folosim și adjectivul „distincte".

Elevii sînt îndemnați să rețină axiomele, teoremele și formulele încadrate în chenare, după ce au înțeles bine sensul acestora. Se va acorda o atenție deosebită definițiilor, care trebuie de asemenea să fie bine însușite.

Se recomandă ca elevii să învețe corect demonstrațiile teoremelor cuprinse în manual. Menționăm că nu toate proprietățile demonstrate au fost intitulate teoreme.

Unele demonstrații bazate pe raționamente logice pot fi înlocuite, din motive metodologice, prin demonstrații practice. Acestea se vor face prin desene sau modele îngrijit executate. Se recomandă ca demonstrațiile practice să însoțească și unele demonstrații logice.

Recomandăm ca elevii să citească un număr cît mai mare de paragrafe din manual, pe baza indicațiilor date de tovarășii profesori. Verificarea și consolidarea cunoștințelor însușite prin lectura manualului se va face prin rezolvări de exerciții și dialog.

Redactor: prof. EUGENIA PANTELIMON
Tehnoredactor: ILINCA PROSAN
Grafician copertă: N. SÎRBU
Desenator: C. HĂLCESCU

Introducere

Primele cercetări de geometrie, consemnate în documente, datează de patru mii de ani și erau destinate măsurătorilor de teren, construcțiilor și calculelor astronomice.

Una din primele cărți de geometrie, rămasă din acea perioadă, este semnată de matematicianul egiptean Ahmes. Cartea tratează despre dreptunghiuri, triunghiuri isoscele, trapeze isoscele și unghiuri. *Ahmes* a considerat că aria unui cerc de rază R poate fi aproximată prin aria unui pătrat de latură $\frac{16R}{9}$, ceea ce conduce la o aproximare a numărului π egală cu 3,160...

Matematicienii egipteni știau că un triunghi cu laturile de 3, 4 și 5 unități este dreptunghic și foloseau acest triunghi pentru a construi drepte perpendiculare și, în particular, pentru fixarea direcției Est-Vest.

Rezultatele cu caracter experimental ale egiptenilor au fost preluate de matematicienii greci, care au elaborat primele teorii matematice bazate pe demonstrații.

Astfel *Thales din Milet* (640 î.e.n.—548 î.e.n.) a fost unul dintre primii matematicieni greci care au făcut cunoscută matematica egipteană, lărgind și adîncind cuceririle acesteia.

Pitagora (580 î.e.n.—500 î.e.n.) a întemeiat o școală celebră la Croton. În cadrul acestei școli, au fost puse bazele matematicii abstracte, care au rămas valabile pînă astăzi. Școala lui Pitagora a arătat necesitatea demonstrațiilor. Tot școala lui Pitagora a rezolvat problema împărțirii unui segment la medie și extremă rație (diviziunea de aur). Problema revine la a găsi un punct C pe segmentul $|AB|$, astfel ca $\frac{|AB|}{|CB|} = \frac{|CB|}{|AC|}$. Rezolvarea problemei a permis calcularea lungimii laturii unui pentagon regulat înscris într-un cerc de rază R. A se vedea exercițiul 2, p. 64.

Unul din continuatorii școlii lui Pitagora, *Aristarc* (310 î.e.n.—230 î.e.n.) a formulat concepția heliocentrică privind sistemul nostru solar.

După anul 500 î.e.n., centrul cercetărilor matematice grecești a fost Atena.

Eudoxus și Teetet, contemporani cu *Platon*, au pus bazele teoriei mărimilor și a rapoartelor, deosebind mărimile comensurabile de cele incomensurabile, plecînd de la raportul dintre o catetă și ipotenuza unui triunghi dreptunghic isoscel.

Platon (428 î.e.n.—348 î.e.n.) a avut numeroși elevi și a înființat o Academie. Unul din elevii săi, *Aristotel* (384 î.e.n.—322 î.e.n.) a pus bazele logicii. La Academia lui Platon s-a introdus necesitatea *diorismului*, adică a cercetării condițiilor, în care o anumită problemă admite soluții. În acest fel, au fost eliminate generalizările lipsite de sens.

Epoca de aur a geometriei antice este perioada în care au trăit *Euclid*, *Arhimede* și *Apollonius*.

Euclid (300 î.e.n.) s-a format la Atena, la şcoala înfiinţată de Platon. El este foarte des citat şi astăzi, datorită postulatului care-i poartă numele.

Euclid a întemeiat o şcoală în Alexandria şi este celebru prin *Elementele* sale, constînd din 13 cărţi, ce conţin rezultate de geometrie şi aritmetică. La începutul Elementelor sînt date definiţiile, axiomele şi postulatele. Scopul lucrării este de a ordona şi demonstra teoremele descoperite de predecesorii săi. Aici a fost iniţiată tradiţia de a indica sfîrşitul unei demonstraţii prin cuvintele: *ceea ce era de demonstrat.*

Prima carte din Elementele lui Euclid tratează despre congruenţa triunghiurilor, linii paralele, paralelograme, egalitatea ariilor, terminîndu-se cu teorema lui Pitagora.

A doua carte se referă la descompunerea unui pătrat în sume de pătrate şi dreptunghiuri.

În cartea a treia se dau proprietăţile legate de cerc. În cartea a patra se tratează despre poligoane înscrise şi circumscrise unui cerc, despre poligoane regulate şi în particular, despre pentagonul regulat. Cartea a cincea se referă la proporţii şi dezvoltă teoria generală a mărimilor, după Eudoxus.

Cărţile VI, XI, XIII se referă la probleme de geometrie în spaţiu.

Arhimede (287 î.e.n.—212 î.e.n.) şi *Apollonius* din *Perg* (262—200 î.e.n.) s-au format la şcoala lui Euclid.

Spre deosebire de predecesorii săi, Arhimede a fost preocupat de aplicaţiile practice ale geometriei. Lui i se datoreşte obţinerea unei bune aproximări a numărului π. Considerînd lungimea unui cerc ca limită a perimetrelor poligoanelor regulate înscrise şi circumscrise acelui cerc, a obţinut pentru raportul π dintre lungimea cercului şi diametru inegalităţile:

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{10}{70}.$$

Apollonius a lăsat un tratat important privind teoria conicelor (elipse, hiperbole şi parabole).

După campaniile lui Alexandru cel Mare, grecii au luat cunoştinţă de descoperirile matematicienilor chaldeeni din domeniul Astronomiei. *Hypsikles* (130 î.e.n.) a utilizat sistemul sexagesimal de măsurare a unghiurilor.

Menelaus, care a trăit în jurul anului 100 e.n., a elaborat o trigonometrie sferică extinzînd la triunghiuri sferice teoremele de congruenţă ale triunghiurilor din plan. Este celebru prin rezultatele sale asupra transversalelor într-un triunghi.

Claudius Ptolomeu (140 e.n.) a introdus împărţirea gradelor sexagesimale în minute şi secunde.

Ptolomeu a dat pentru π o aproximare mai bună decît Arhimede, anume

$$3 + \frac{8}{60} + \frac{30}{3\,600} \approx 3{,}141666...$$

De asemenea, el a întocmit table pentru calculul corzilor ce subîntind arce de la $1/2°—90°$ şi a dezvoltat un model pentru descrierea mişcării planetelor din sistemul nostru solar. În acest model, numit sistemul geocentric, planetele se mişcă pe cercuri mobile, ale căror centre descriu cercuri cu centrul în centrul Pămîntului. Sistemul geocentric a fost înlocuit, 14 secole mai tîrziu, prin cel heliocentric, de către Copernic.

Pappus din Alexandria (300 e.n.) a introdus rapoartele anarmonice, patrulaterele complete şi a formulat unele probleme de loc geometric, pe care le-a rezolvat mai tîrziu Descartes.

O contribuţie importantă la dezvoltarea matematicii aplicative au avut-o *matematicienii indieni*. Astfel lor li se datoreşte introducerea funcţiei sinus, care asociază unui arc de cerc jumătate din coarda subîntinsă de dublul arcului. Indienii au descoperit metode ingenioase de calcul.

Matematica greacă şi indiană a fost preluată, începînd din anul 760, *de arabi*, odată cu întemeierea califatului *din Bagdad*. Astfel arabii au tradus un tratat de astronomie indiană, datînd din sec. 5 e.n., Elementele lui Euclid şi Almagestul — opera de bază a lui Ptolomeu.

Muhammed ibn Musa Alchwarizmi a scris, în jurul anului 820, prima carte de algebră.

Albattami (850—926) a completat tablele lui Ptolomeu şi a introdus funcţiile tg şi ctg. A descoperit teorema sinusului într-un triunghi şi a demonstrat formula $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$.

Abul Wafa (940—998) a dezvoltat cercetările lui Pappus relative la construcţii geometrice. Ideile lui Wafa au fost utilizate şi extinse de *Leonardo da Vinci*, *Tartaglia* (1501—1557) şi în Germania de *Albrecht Dürer*.

Odată cu înfiinţarea universităţilor din Europa la Pisa, Paris, Praga (1348), Viena (1365), Heidelberg (1386), Köln (1388), Erfurt (1398), pe continentul nostru au început să fie elaborate numeroase lucrări de matematici superioare. În paralel cu cristalizarea noţiunilor de număr şi elaborarea unor tehnici de calcul, au fost reconsiderate şi lărgite cunoştinţele geometrice.

François Viète (1540—1603) a considerat probleme de construcţii geometrice, care nu se pot rezolva cu ajutorul riglei şi a compasului, deci care corespund la ecuaţii de grad mai mare decît 2. El a obţinut teorema lui Pitagora generalizată şi lui i se datoreşte principiul dualităţii în geometrie, care a avut consecinţe fundamentale pentru dezvoltarea matematicii moderne.

Nicolaus Copernic (1473—1543) începe celebra sa carte *„De revolutionibus orbium coelestium"*, în care fundamentează modelul heliocentric, cu o expunere a trigonometriei.

Girard Desargues (1598—1662) este fondatorul geometriei descriptive şi al geometriei proiective. A considerat dreptele paralele ca drepte concurente la infinit şi a dezvoltat proprietăţile birapoartelor armonice. Deşi a urmărit atît probleme practice cît şi teoretice ideile lui au rămas mult timp izolate, fiind puse în umbră de apariţia geometriei analitice a lui Descartes.

René Descartes (Cartesius, 1596—1650) a creat metoda geometriei analitice în lucrarea *„Géometrie"* apărută în 1637. A mai lăsat lucrări de filozofie, fizică şi matematică.

Descartes a reluat o metodă a lui Apollonius, care definea punctele unei elipse arătînd că ordonata unui punct de pe curbă depinde de abscisa acelui punct. Descartes a utilizat formalismul algebric. El folosea pentru abscisa x denumirea de *segment*, iar ordonata y o numea *aplicata prin ordine*. Descartes a arătat că o curbă este definită de o ecuaţie, care leagă între ele mărimile x, y. Denumirile de abscisă şi ordonată au fost folosite încă de Apollonius. Termenul de *coordonată* a fost folosit prima oară de *Leibniz* în 1692.

Descartes a aplicat metoda coordonatelor la problemele de loc geometric puse de *Pappus* şi a studiat diferite curbe plane, cum ar fi parabola, cicloida, foliumul lui Descartes, spirala logaritmică etc.

Blaise Pascal (1623—1662), unul din creatorii calculului integral, a aprofundat cercetările lui Descartes, cu ajutorul cărora a obţinut teorema care-i poartă numele (teorema hexagonului înscris într-o conică).

Giovanni Ceva a publicat în anul 1678 lucrarea „De lineis rectis".

Wilhelm Leibniz (1646—1716) a introdus termenul de *funcţie*.

Robert Simson (1687—1768) şi *Matthew Stewart* (1717—1785) au continuat cercetările lui Ceva asupra transversalelor.

L. Euler (1707—1783) are lucrări privind toate domeniile matematicii. A elaborat o teorie a mişcării planetelor şi cometelor.

D. Hilbert (1862—1943) are de asemenea cercetări asupra tuturor domeniilor matematicii. A elaborat în cartea „Grundlagen der Geometrie" prima axiomatizare a geometriei euclidiene, conformă cu exigenţele ştiinţei moderne.

Geometria euclidiană este astăzi un domeniu încheiat, atenția matematicienilor fiind acuma îndreptată spre alte geometrii, care ar putea fi utilizate pentru o mai bună înțelegere a proprietăților spațiului în care trăim, ținînd seama de cele mai noi descoperiri ale științei.

La noi în țară, un rol de seamă a jucat publicarea de către *Gh. Lazăr* a primei cărți de trigonometrie. Începînd de la sfîrșitul secolului trecut, s-au remarcat matematicienii de prestigiu *Spiru Haret*, *Gh. Țițeica* și *D. Pompeiu*, care au elaborat lucrări originale de un înalt nivel științific, în diferite domenii ale matematicii, între care și geometria. Acestora trebuie să adăugăm numele lui *Traian Lalescu*, care a adus de asemenea o contribuție importantă la dezvoltarea științei mondiale și care a contribuit la întemeierea unei școli românești de geometrie.

Gh. Țițeica (1873–1939) este renumit pentru cercetările sale în domeniul geometriei diferențiale, lăsînd lucrări privind anumite clase de suprafețe, care-i poartă numele, și de asemenea asupra unor figuri geometrice mai complicate, numite congruențe și rețele în spații cu mai multe dimensiuni. Țițeica s-a ocupat de geometria elementară, lăsînd o culegere apreciată de exerciții de geometrie sintetică.

D. Pompeiu (1873–1954) a publicat lucrări importante de analiză matematică și numeroase note de matematici elementare. Teorema sa, potrivit căreia segmentele care unesc vîrfurile unui triunghi echilateral cu un punct din planul acelui triunghi sînt congruente cu laturile unui triunghi eventual degenerat, a dat naștere la o serie de articole remarcabile din domeniul geometriei elementare și analitice.

Dan Barbilian (1895–1961) a fost un elev al lui Gh. Țițeica, de la care a preluat o gîndire geometrică caracterizată prin profunzime și eleganță. La aceste calități el a adăugat un spirit axiomatic, care l-a îndreptat spre fundamentele matematicii. A lăsat lucrări importante de geometrie superioară, de algebră și de teoria numerelor. Cursurile sale de geometrie axiomatică și de algebră modernă au avut un rol de seamă în formarea unei școli matematice temeinice în țara noastră.

Traian Lalescu (1881–1929) este renumit pentru o monografie asupra ecuațiilor integrale, citată și astăzi, deși a fost publicată prima dată în anul 1911. El a scris un curs magistral de geometrie analitică, o monografie asupra geometriei triunghiului și o frumoasă culegere de probleme de geometrie descriptivă.

Geometria se dezvoltă astăzi, în țara noastră, la nivelul științei mondiale.

Un merit deosebit revine regretatului profesor *Gh. Vrănceanu* (1900–1979), care a lăsat o operă științifică de mare valoare, dedicată geometriei diferențiale moderne. Această operă se referă la teoria spațiilor neolonome, la teoria grupurilor de transformări și la teoria relativității. Cursul său de geometrie analitică, proiectivă și diferențială și tratatul de geometrie diferențială au contribuit la formarea unui mare număr de matematicieni români. Gh. Vrănceanu a fost preocupat în mod deosebit de problemele învățămîntului nostru, insistînd asupra necesității elaborării unor manuale accesibile celor mai mulți elevi.

Generațiile viitoare au datoria să cunoască și să dezvolte realizările matematicienilor români.

Notații folosite

Dreapta ce trece prin punctele A și B $(A \neq B)$: AB sau BA.

Triunghiul cu vîrfurile A, B, C : ABC

Punctul A aparține dreptei d : $A \in d$.

Punctul A este intersecția dreptelor d, d' $(d \neq d')$: $\{A\} = d \cap d'$.

Segmentul deschis de extremitățile A, B $(A \neq B)$: $|AB| = |BA|$.

Segmentul închis de extremități A, $B (A \neq B)$: $[AB] = [BA]$.

Semidreapta limitată de punctul A și conținînd punctul B : $|AB$.

Semiplanul limitat de dreapta d și conținînd punctul A : $|dA$.

Semispațiul limitat de planul p și conținînd punctul A : $|pA$.

Unghiul avînd ca laturi semidreptele h, k: $\widehat{hk} = \widehat{kh}$.

Unghiul avînd ca laturi semidreptele $|AB$, $|AC$: $\widehat{BAC}$ sau $\widehat{CAB}$.

Unghiul diedru avînd ca fețe semiplanele u, v: $\widehat{uv}$ sau $\widehat{vu}$.

Unghiul triedru format din semidreptele a, b, c: $\widehat{abc}$.

Segmentul $|AB|$ este congruent cu segmentul $|CD|$: $|AB| \equiv |CD|$.

Unghiul $\widehat{hk}$ este congruent cu unghiul $\widehat{rs}$: $\widehat{hk} \equiv \widehat{rs}$.

Triunghiul ABC este congruent cu triunghiul $A'B'C'$: $ABC \equiv A'B'C'$.

Figura F este congruentă cu figura F' : $F \equiv F'$.

Unghiurile triunghiului ABC : $\hat{A} = \widehat{BAC}$, $\hat{B} = \widehat{ABC}$, $\hat{C} = \widehat{ACB}$.

Segmentul etalon: m.

Lungimea segmentelor $|AB|$, $[AB]$: $\overline{AB} = \overline{BA}$ (dacă etalonul este fixat).

Distanța dintre punctele A, B : $d(A, B)$ (dacă etalonul este fixat).

Vectorul legat cu originea A şi extremitatea B : $\overrightarrow{AB}$.

Vectorul $\overrightarrow{AB}$ este echipolent cu vectorul $\overrightarrow{CD}$:$\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$.

Norma vectorului $\overrightarrow{AB} = \vec{v}$: $\|\overrightarrow{AB}\| = \|\vec{v}\|$ ($\|\overrightarrow{AB}\| = d(A, B)$).

Produsul scalar al vectorilor $\vec{u}$, $\vec{v}$: $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

Produsul vectorial al vectorilor $\vec{u}$, $\vec{v}$: $\vec{u} \times \vec{v}$.

Locul geometric al punctelor care au proprietățile P, P', P'', ...: $\{M;\ M$ are proprietățile $P, P', P'', ...\}$.

Măsura unghiului $\widehat{hk}$: măs $\widehat{hk}$ (de fiecare dată se va specifica dacă este vorba de măsura în grade sau în radiani).

Cercul de centru O şi rază R (într-un plan fixat):$C(O,R)$.

Figurile F, F' coincid: $F = F'$.

Unghiuri drepte: dr.

Dreapta reală: **R**.

Mulțimea numerelor întregi: **Z**.

Capitolul I

Geometrie euclidiană plană

(segmente, semidrepte, unghiuri, poligoane)

Acest capitol cuprinde o serie de rezultate pe care elevii le-au întîlnit în clasele anterioare, dar puse într-o ordine şi formulare adesea diferite de cele din manualele precedente. Dintre acestea, unele rezultate sînt intitulate teoreme şi ele trebuie reținute. Celelalte propoziții, necesare pentru deducerea teoremelor, dar mai puțin importante, au fost date pentru a asigura construcția logică a materialului, dar nu se recomandă memorarea lor. Lectura lor este necesară, pentru ca elevii să le poată folosi în raționamente. Este indicat ca elevii să se familiarizeze cu aceste proprietăți, fie făcînd demonstrații, fie prin construcții grafice.

1. Proprietățile figurilor plane

Prin figură înțelegem o mulțime de puncte, drepte, segmente, semiplane, semidrepte, cercuri etc. Unele figuri mai simple conțin numai o parte din aceste elemente. Cele mai simple figuri sînt cele formate din cîte un singur punct, după care urmează figurile formate din cîte două puncte, trei puncte ş.a.m.d.

Elementele unei figuri se notează prin litere, eventual marcate prin unul sau două accente.

Proprietățile figurilor geometrice se exprimă prin propoziții formate fiecare din două părți: *ipoteza* şi *concluzia*. Ipoteza cuprinde descrierea tipului de figuri la care se referă proprietatea respectivă şi anumite particularități care trebuie impuse acestor figuri. Concluzia conține una sau mai multe particularități ale acestor figuri, care se manifestă la orice figură care îndeplineşte condițiile exprimate în ipoteză.

Exemplu. Proprietatea „prin două puncte distincte trece o dreaptă unică" se referă la figurile formate din cîte două puncte, care au particularitatea de a fi distincte. Aceasta este ipoteza. Concluzia afirmă că, pentru astfel de figuri, există cîte o singură dreaptă care să le conțină.

Proprietățile mai simple se împart în cinci grupe: proprietăți de incidență, proprietăți de ordonare, proprietăți de congruență, proprietăți de continuitate şi proprietăți de paralelism. Proprietățile mai complicate fac să intervină două sau mai multe proprietăți din grupe diferite.

2. Axiomele sau postulatele geometriei euclidiene plane

Euclid definește *punctul* ca o entitate indivizibilă, *linia* ca o lungime fără lărgime, *suprafața* ca entitate avînd lungime și lărgime, iar *solidul* ca entitate avînd lungime, lărgime și grosime. Aceste definiții nu sînt riguros științifice, dar au calitatea de a fixa noțiunile de bază, prin proprietăți intuitive, care permit purtarea unui dialog.

Corpurile solide au caracter mai intuitiv decît punctele sau liniile și suprafețele. Dacă am admite ca date solidele, am putea defini suprafețele ca limite ale solidelor, liniile ca limite ale suprafețelor și punctele ca limite ale liniilor. Liniile drepte sînt linii particulare, anume ele pot fi considerate ca poziții limită ale unor fire foarte bine întinse. Noțiunea de *linie dreaptă*, care apare în *Elementele* lui Euclid, corespunde noțiunii de *segment*.

Euclid a completat definițiile precedente printr-un sistem de 5 propoziții, pe care le-a admis ca adevărate și pe care le-a numit *postulate*:

1. *Între două puncte se poate duce o linie dreaptă.*
2. *Orice linie dreaptă poate fi prelungită nelimitat.*
3. *Se poate descrie un cerc de centru dat și de rază dată.*
4. *Toate unghiurile drepte sînt congruente între ele.*
5. *Dacă o linie dreaptă, care intersectează alte două linii drepte, formează, de o aceeași parte a sa, două unghiuri interne avînd suma mai mică decît două unghiuri drepte, cele două linii menționate se vor intersecta, dacă sînt prelungite, de partea în care suma unghiurilor este mai mică decît două unghiuri drepte.*

În aceste enunțuri apar termenii de prelungire nelimitată, parte a unei drepte, congruență a două unghiuri și cerc. Pentru aceste noțiuni, Euclid a dat explicații intuitive, dar vagi din punct de vedere științific. De exemplu, noțiunea de congruență, la Euclid, se definește prin posibilitatea de a suprapune o figură peste alta, de exemplu un unghi peste alt unghi sau un segment peste alt segment.

Noțiunile fundamentale ale geometriei sînt acelea de *punct*, *dreaptă*, *plan* și *spațiu*, la care se adaugă relațiile de *ordonare* între punctele unei drepte și de *congruență* între două segmente sau între două unghiuri. Aceste noțiuni au caracter intuitiv, ele fiind extrase din experiențe ce au fost efectuate de oameni de-a lungul multor milenii. Prin Spațiu înțelegem Spațiul în care trăim, care se numește uneori Univers sau Cosmos sau Spațiu fizic. Ansamblul științelor Naturii studiază proprietățile acestui Spațiu. Geometria, ca știință a Naturii, urmărește anumite proprietăți ale acestui Spațiu, neglijînd aspectele fizice, chimice, biologice și geologice și are drept obiect de studiu proprietățile corpurilor rigide (nedeformabile), care au forme mai simple. Geometria experimentală studiază proprietățile corpurilor de dimensiuni direct perceptibile și măsurabile cu ajutorul instrumentelor obișnuite (riglă gradată, raportor, goniometru etc.). Geometria experimentală nu studiază

părți ale materiei, care au dimensiuni subatomice sau planetare. Măsurarea mărimilor de acest fel se face în mod indirect, pe baza unor ipoteze fizice sau chimice, și a unei abstractizări a geometriei experimentale, numită *geometria euclidiană* și *definită prin sistemul de axiome dat de Hilbert*. Sistemul de axiome dat de Hilbert va fi predat în clasa a X-a, deoarece se referă la geometria în spațiu.

3. Proprietăți de incidență ale punctelor și dreptelor dintr-un plan

Vom admite, fără demonstrații, următoarele proprietăți:

1. **Prin două puncte distincte trece o dreaptă și numai una.**
2. **Orice dreaptă conține cel puțin două puncte.**
3. **În orice plan, există trei puncte care nu sînt situate pe o aceeași dreaptă.**

Cu ajutorul proprietăților indicate, putem demonstra că:

Două drepte distincte dintr-un plan au cel mult un punct comun.

Într-adevăr, dacă ultima afirmație n-ar fi adevărată, atunci ar exista două drepte d și d' astfel încît intersecția $d \cap d'$ conține cel puțin două puncte. Dar proprietatea 1 arată că prin două puncte distincte trece o singură dreaptă. Deci intersecția $d \cap d'$ conține cel mult un punct.

Observație. Metoda folosită în această demonstrație este metoda reducerii la absurd, care constă în a arăta că negarea unei proprietăți, pe care vrem s-o demonstrăm, conduce la o contradicție cu una sau mai multe proprietăți admise sau demonstrate anterior.

Exercițiu

Folosind metoda reducerii la absurd, demonstrați următoarele proprietăți:

a. *Dacă A este un punct al unei drepte d, atunci dreapta d conține cel puțin un punct diferit de A.*

b. *Dacă d este o dreaptă dintr-un plan p, atunci planul p conține cel puțin un punct nesituat pe dreapta d.*

c. *Dacă A și B sînt două puncte distincte dintr-un plan p, atunci planul p conține cel puțin un punct C, astfel ca punctele A, B, C să fie necoliniare.*

d. *Dacă A, B, C sînt trei puncte necoliniare, atunci dreptele AB, BC, CA sînt distincte două cîte două.*

4. Proprietăți de ordonare

Dacă A, B, C sînt trei puncte necoliniare, atunci nici unul dintre aceste puncte nu se găsește între celelalte două.

Dacă A, B, C sînt trei puncte distincte coliniare, atunci unul din aceste puncte se va găsi între celelalte două. În figura I.1, punctul B se găsește între A și C, dar C nu se găsește între A și B.

Fig. I.1

Fenomenele de eclipsă sînt legate de situația exprimată prin cuvîntul „între". De exemplu, eclipsele totale de Soare se produc atunci cînd Luna se găsește între Pămînt și Soare, iar eclipsele totale de Lună se produc atunci cînd Pămîntul se găsește între Soare și Lună. Aceste fenomene se produc cu o periodicitate de 18 ani și 11 zile. Cunoașterea acestei perioade, numită de vechii chaldeeni „saros", a avut o mare importanță pentru dezvoltarea științei despre Spațiul cosmic, deci și pentru dezvoltarea geometriei. Thales cunoștea perioada eclipselor totale de Soare și, pe baza acesteia, a putut anticipa eclipsa ce s-a produs în anul 584 i.e.n. și care a căpătat numele de eclipsa lui Thales.

Vom admite fără demonstrații următoarele proprietăți, numite proprietăți de ordonare:

1. **Dacă punctul B se găsește între punctele A și C, atunci punctele A, B, C sînt coliniare și distincte, și B se găsește între C și A** (fig. I.1).

2. **Dacă A, B sînt două puncte distincte, atunci există cel puțin un punct C astfel ca B să se găsească între A și C** (fig. I.1).

3. **Dacă punctul B se găsește între A și C, atunci A nu se găsește între C și B** (fig. I.1).

4. *(axioma lui Pasch)*. **Dacă A, B, C sînt trei puncte necoliniare și dacă d este o dreaptă situată în același plan cu aceste puncte, astfel încît d trece printr-un punct situat între C și B, dar nu trece prin nici unul din punctele A, B, C și nu trece prin nici un punct situat între A și C, atunci dreapta d trece printr-un punct situat între A și B** (fig. I.2).

5. *Fiind date trei puncte distincte și coliniare A, B, C, astfel încît A nu este între B și C, iar C nu este între A și B, cu siguranță punctul B se va găsi între A și C* (fig. I.1).

6. *Dacă A, B, C sînt trei puncte necoliniare și dacă L, M, N sînt trei puncte astfel încît L este între B și C, M este între C și A și N este între A și B, punctele L, M, N nu pot fi coliniare* (fig. I.3).

7. *Fiind date două puncte distincte A și B, există cel puțin un punct M situat între A și B* (fig. I.4).

8. *Dacă A, B, C, D sînt puncte astfel încît B este între A și C și C este între B și D, punctele B, C se vor găsi între A și D* (fig. I.5).

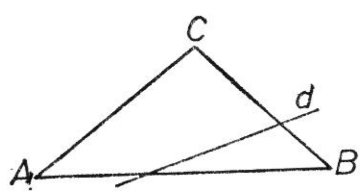

Fig. I.2

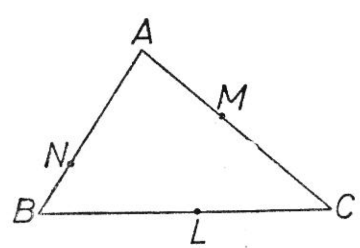

Fig. I.3

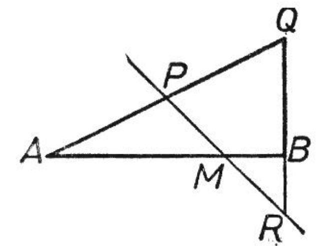

Fig. I.4

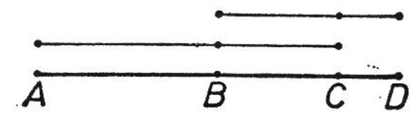

Fig. I.5

9. *Dacă C este între D și A și dacă B este între A și C, atunci B este între A și D, iar C este între B și D* (fig. I.6).

Dacă A și B sînt două puncte distincte, notăm prin $|AB|$ mulțimea punctelor situate între A și B și vom spune că $|AB|$ este *segmentul deschis* limitat de punctele A, B. Avem (fig. I.7):

$$|AB| = |BA|, \quad |AB| \subset AB, \quad A \notin |AB|, \quad B \notin |AB|.$$

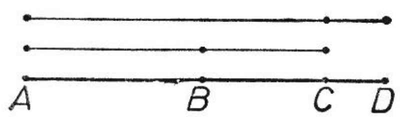

Fig. I.6

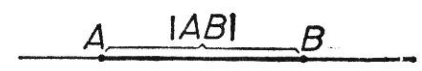

Fig. I.7

Punctelor A, B li se poate asocia și mulțimea $|AB| \cup \{A, B\}$, care va fi notată $[AB]$ și va fi numită *segmentul închis* limitat de punctele A, B. Avem $[AB] \subset AB$, $A \in [AB]$, $B \in [AB]$, $|AB| \subset [AB]$.

Trei puncte necoliniare, luate într-o anumită ordine, definesc un *triunghi*. Fiind date punctele A, B, C, în ordinea scrisă, necoliniare, triunghiul definit de aceste puncte va fi notat ABC. Punctele A, B, C se numesc *vîrfurile* triunghiului ABC, iar segmentele $|AB|$, $|BC|$, $|CA|$ se numesc *laturile* triunghiului ABC (fig. I.8):

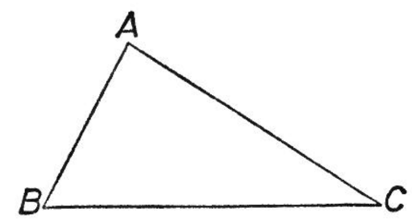

Fig. I.8

Exerciții

1. *Fiind dat un punct A, să se arate că există puncte B, C astfel ca $B \in |AC|$.*
2. *Fie ABC un triunghi și fie punctele $M \in |AB|$, $N \in |AC|$. Să se arate că segmentele $|BN|$, $|CM|$ au un punct comun.*
3. *Ce putem spune despre trei puncte distincte A, B, C, dacă știm că $A \notin |BC|$, $B \notin |CA|$ și $C \notin |AB|$? Dar dacă știm că cele trei puncte sînt coliniare și că $A \notin |BC|$ și $C \notin |AB|$?*

4. *Reformulați axioma lui Pasch, utilizînd noțiunea de triunghi și aceea de latură a unui triunghi.*
(R. Dacă o dreaptă d din planul unui triunghi ABC trece printr-un punct al laturii $|BC|$, dar nu trece prin nici unul din vîrfurile A, B, C și dacă d nu trece prin nici un punct al laturii $|AB|$, atunci dreapta d trece printr-un punct al laturii $|AC|$.)

5. Semidrepte și semiplane

Proprietatea fundamentală 1. Fie O un punct pe o dreaptă d. Există atunci două și numai două mulțimi d' și d'' astfel încît să avem (fig. I.9):

a. $d' \cup d'' = d - \{O\}$.

b. **Dacă** $A \in d'$, $B \in d'$, $C \in d''$ și $D \in d''$, **atunci**
$O \notin |AB|$, $O \notin |CD|$, $O \in |AC|$.

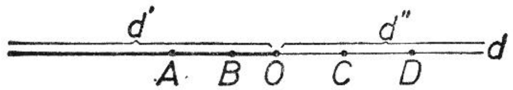

Fig. I.9

Această proprietate se demonstrează plecînd de la observația că dreapta d conține cel puțin un punct P diferit de O și că d mai conține cel puțin un punct Q, astfel încît să avem $O \in |PQ|$.

Să definim atunci mulțimile:

(1) $$d' = \{M \in d;\ O \in |QM|\},\quad d'' = \{N \in d;\ O \in |PN|\}.$$

În clasa a X-a, se va arăta că mulțimile d' și d'' îndeplinesc condițiile a și b și că d', d'' sînt singurele mulțimi care îndeplinesc aceste condiții.

Definiție. Mulțimile d', d'', care îndeplinesc condițiile a și b din proprietatea fundamentală 1, și care pot fi definite prin formule de forma (1), se numesc semidreptele limitate de punctul O pe dreapta d.

Dacă notăm prin s una din semidreptele d', d'', spunem că O este *originea* semidreptei s, iar d este *suportul* semidreptei s. Două semidrepte, care au același suport și aceeași origine, se numesc *opuse*.

O semidreaptă este complet definită prin originea sa și printr-un punct oarecare aparținînd semidreptei. Dacă semidreapta s are originea O și dacă s conține un punct A, scriem $s = |OA$.

Originea unei semidrepte s nu aparține acelei semidrepte, datorită condiției a. Deci dacă $s = |OA$, atunci $A \neq O$ și $|OA \subset OA$.

Exerciții

1. Fie $s = |OA = |OB$. *Să se arate că* $|OA \subset OA$ *și că dacă* $A \neq B$, *atunci* $|AB| \subset s$.
2. *Dacă* A, B *sînt puncte distincte, atunci* $|AB| = (|AB\rangle \cap (|BA\rangle$ *și* $AB = (|AB\rangle \cup (|BA\rangle$.

Proprietatea fundamentală 2. Fie d o dreaptă într-un plan p. Există atunci două și numai două mulțimi p' și p'' astfel încît să avem (fig. I.10)

a'. $p' \cup p'' = p - d$.

b'. **Dacă** $A \in p'$, $B \in p'$, $C \in p''$ și $D \in p''$, **atunci**
$|AB| \cap d = \emptyset$, $|CD| \cap d = \emptyset$, $|AC| \cap d \neq \emptyset$.

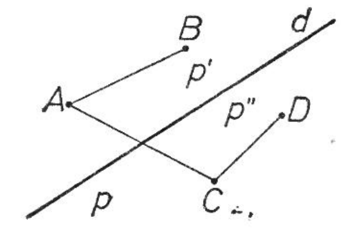

Fig. I.10

Demonstrația se face observînd că există în planul p cel puțin un punct $P \notin d$. Alegînd apoi în mod arbitrar un punct $O \in d$ și apoi un punct Q astfel ca $O \in |PQ|$, vom putea defini mulțimile

(2) $$p' = \{M \in p;\ |QM| \cap d \neq \emptyset\},\quad p'' = \{N \in p;\ |PN| \cap d \neq \emptyset\}.$$

În manualul de clasa a X-a, se va arăta că aceste mulțimi sînt singurele mulțimi, care verifică condițiile a' și b'.

Definiție. Mulțimile p', p'' care verifică condițiile a' și b' se numesc semiplanele limitate de dreapta d în planul p. Dreapta d se va numi frontieră a fiecăreia din mulțimile p', p''. Vom mai spune că două semiplane, avînd aceeași frontieră și incluse în același plan, sînt opuse.

Pentru a defini un semiplan, este suficient să indicăm frontiera sa și unul din punctele sale. Semiplanul avînd ca frontieră dreapta d și care conține punctul A, va fi notat $|dA$.

Nici un semiplan nu-și conține frontiera.

Exerciții

1. *Fie d, d' două drepte conținute într-un plan p și concurente într-un punct O. Fie p', p'' semiplanele limitate de dreapta d în planul p. Să se arate că mulțimile $d' \cap p'$, $d' \cap p''$ reprezintă semidreptele limitate de punctul O pe dreapta d'.*
2. *Fie d și a două drepte disjuncte situate într-un plan p și fie $A \in a$. Să se arate că $a \subset |dA$.*
3. *Fie semiplanul $S = |dA$ și semidreapta $s = |OA$, unde $O \in d$. Să se arate că $s \subset S$.*
4. *Fie A, B două puncte situate pe o semidreaptă s și într-un semiplan S. Să se arate că $|AB| \subset s$ și $|AB| \subset S$.*

6. Unghiuri

Un *unghi* este o pereche de semidrepte avînd aceeași origine (fig. I.11).

Unghiul format din semidreptele h, k va fi notat $\widehat{hk}$. Originea comună a semidreptelor h, k se numește *vîrful* unghiului $\widehat{hk}$, iar semidreptele h, k se numesc *laturile* acestui unghi.

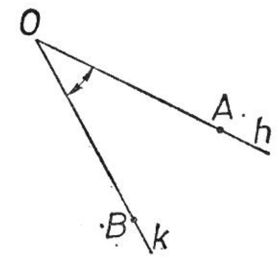

Fig. I.11

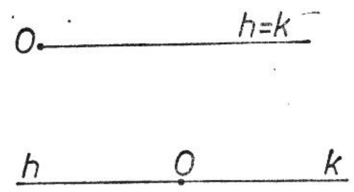

Fig. I.12

Dacă avem punctele $A \in h$ şi $B \in k$, vom mai nota unghiul $\widehat{hk}$ prin $\widehat{AOB}$, unde O este vîrful unghiului $\widehat{hk}$ (fig. I.11).

Dacă $h = k$, spunem că $\widehat{hk}$ este un *unghi nul*, iar dacă h şi k sînt semidrepte opuse, spunem că $\widehat{hk}$ este un *unghi alungit*. (fig. I.12). Un unghi care nu este nici nul, nici alungit, se numeşte *unghi propriu*. Să considerăm un unghi propriu $\widehat{hk}$. Fie a, b suporţii laturilor h şi k ale unghiului $\widehat{hk}$, astfel ca $h \subset a$ şi $k \subset b$. Semidreapta h se găseşte într-un acelaşi semiplan H limitat de dreapta b, iar k se găseşte într-un semiplan K, limitat de dreapta a. Intersecţia $H \cap K$ a celor două semiplane este o mulţime de puncte numită *interiorul unghiului propriu* $\widehat{hk}$. Această mulţime va fi notată Int $\widehat{hk}$ (fig. I.13).

Avem pentru orice unghi, $\widehat{hk} = \widehat{kh}$ şi pentru orice unghi propriu,

$$\text{Int } \widehat{hk} = \text{Int } \widehat{kh}.$$

Două unghiuri proprii care au acelaşi vîrf, o latură comună şi interioarele disjuncte, se numesc unghiuri *adiacente* (fig. I.14).

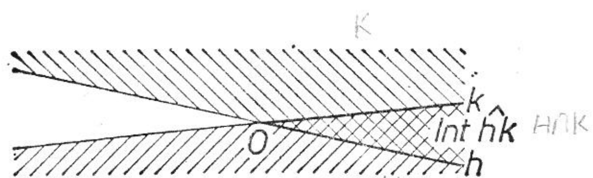

Fig. I.13

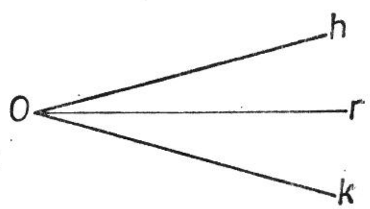

Fig. I.14

Două unghiuri adiacente, care au laturile necomune opuse, se numesc unghiuri *suplementare* (fig. I.15).

Două unghiuri care au acelaşi vîrf şi care au laturile opuse două cîte două, se numesc unghiuri *opuse la vîrf* (fig. I.16).

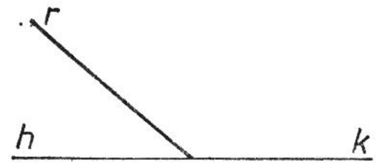

Fig. I.15

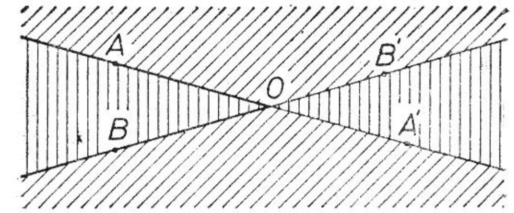

Fig. I.16

Exemple

1. Fie punctele A, B, A', B', O astfel ca $O \in |AA'| \cap |BB'|$. În acest caz, unghiurile $\widehat{AOB}$, $\widehat{BOA'}$ sînt suplementare, iar unghiurile $\widehat{AOB}$, $\widehat{A'OB'}$ sînt opuse la vîrf (fig. I.16).

2. Fie ABC un triunghi. Unghiurile $\hat{A} = \widehat{BAC} = \widehat{CAB}$, $\hat{B} = \widehat{ABC} = \widehat{CBA}$ şi $\hat{C} = \widehat{ACB} = \widehat{BCA}$ se numesc *unghiurile triunghiului* ABC, iar suplementele acestor unghiuri se numesc *unghiurile exterioare* ale triunghiului ABC.

3. Intersecţia interioarelor unghiurilor triunghiului ABC este egală cu intersecţia a trei semiplane, limitate de dreptele AB, BC, CA şi conţinînd vîrfurile C, respectiv A, B. Această intersecţie se numeşte *interiorul* triunghiului ABC şi se notează Int ABC (fig. I.17).

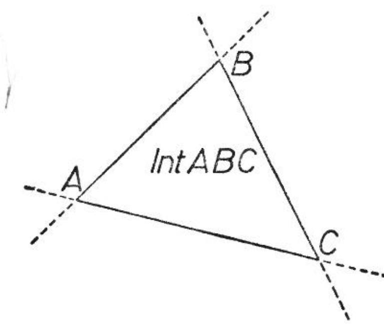

Fig. I.17

Definiţie. **Se numeşte mulţime convexă orice mulţime M de puncte, care are următoarea proprietate: dacă A, B sînt două puncte distincte ale mulţimii M, atunci M conţine toate punctele segmentului $|AB|$.**

O mulţime formată dintr-un singur punct este convexă, deoarece pentru o astfel de mulţime nu se pune nici o condiţie.

O mulţime formată din două puncte distincte nu este niciodată convexă, deoarece o astfel de mulţime nu conţine nici un punct al segmentului deschis limitat de punctele care o formează. În general, o mulţime finită conţinînd $n > 1$ puncte, nu poate fi convexă.

Planele, dreptele, semidreptele, segmentele deschise sau închise, semiplanele, interiorul unui unghi propriu, interiorul unui triunghi sînt mulţimi convexe. Orice intersecţie de mulţimi convexe este o mulţime convexă.

Exerciții

1. *Să se arate că două unghiuri opuse la vîrf au un suplement comun.*

2. *Să se arate că interioarele celor patru unghiuri formate de două drepte distincte și concurente sînt disjuncte două cîte două.*

3. *Fie* $\widehat{hk}$ *un unghi propriu și fie punctele* $A \in h$, $B \in k$. *Să se arate că* $|AB| \subset Int\,\widehat{hk}$.

4. *Fie* O *un punct pe latura* $|BC|$ *a triunghiului* ABC *și fie* s *o semidreaptă cu originea* O *și conținută în interiorul unghiului* $\widehat{AOC}$. *Să se arate că* $s \cap |AC| \neq \emptyset$ *și că* $s \cap |AB| = \emptyset$

5. *Să considerăm un plan* p, *o dreaptă* $d \subset p$ *și un punct* $O \in d$. *Să se arate că mulțimile* $p - d$, $p - \{O\}$, $d - \{O\}$ *nu sînt convexe.*

6. *Fie* ABC *un triunghi în planul* p. *Să se arate că mulțimile* $p - |AB|$, $p - \mathrm{Int}\,ABC$ nu sînt convexe.

7. *Fie* O *un punct interior triunghiului* ABC *și fie* d *o dreaptă în planul triunghiului* ABC, *astfel ca* $O \in d$. *Să se arate că intersecția* $d \cap Int\ ABC$ *este un segment.*

7. Proprietăți de congruență

Am arătat că figurile sînt mulțimi de puncte, de segmente, de drepte, de semidrepte, de semiplane, sau de alte mulțimi ce pot fi definite cu ajutorul acestora. De exemplu, un segment este o mulțime de puncte, un unghi este o mulțime formată din două semidrepte; putem considera o mulțime de segmente, care va fi de asemenea o figură, sau o mulțime de unghiuri etc.

Două mulțimi se consideră egale, dacă și numai dacă ele sînt formate din aceleași elemente. Dacă mulțimile A, B sînt egale, se scrie $A = B$. Dacă mulțimile M, N diferă cel puțin printr-un element, deci dacă există $x \in M$ astfel ca $x \notin N$, sau dacă există $y \in N$ astfel ca $y \notin M$, atunci spunem că mulțimile M, N nu sînt egale sau că ele sînt distincte și scriem $M \neq N$.

În matematica modernă, aproape toate obiectele studiate sînt mulțimi. Prin urmare, dacă vrem să ne încadrăm în matematica modernă, trebuie să folosim cuvîntul egal atunci și numai atunci cînd ne referim la mulțimi egale, și să folosim semnul „=" numai în aceste situații.

Cărțile mai vechi de geometrie foloseau termenul de egalitate pentru a desemna figuri ce au aceeași mărime sau care se pot suprapune una peste cealaltă, fără a deforma vreuna din ele. Astăzi, ne referim la această situație, relativă la anumite perechi de figuri, spunînd că figurile sînt *congruente*. Dacă figurile F, F' sînt congruente, scriem

$$F \equiv F'.$$

Două segmente desenate pe o foaie de hîrtie cu ajutorul unei rigle gradate și avînd fiecare lungimea de 1 cm sînt congruente. Un segment de 1 cm nu este congruent cu nici un segment avînd mai puțin de 1 cm sau mai mult de 1 cm. Două unghiuri de 30° sînt congruente

Pentru a explica termenul de congruență am dat exemple din geometria experimentală. În geometria abstractă, care nu folosește nici rigle, nici raportoare, congruența se introduce prin cinci proprietăți, care o caracterizează și anume:

1. Fie s o semidreaptă cu originea O și fie $|AB|$ un segment. Există pe semidreapta s un singur punct M, astfel ca segmentul $|OM|$ să fie congruent cu segmentul $|AB|$ (fig. I.18).

Notație. Dacă un segment $|A'B'|$ este congruent cu un segment $|AB|$, se va scrie $|A'B'| \equiv |AB|$.

Definiție. Se numește relație de echivalență într-o mulțime M orice mulțime $\mathcal{R}$ de perechi de elemente din M astfel încît să fie verificate următoarele proprietăți:

1) **Dacă x este un element oarecare din mulțimea M, atunci $(x, x) \in \mathcal{R}$.** Această proprietate se exprimă spunînd că orice element al mulțimii M este echivalent cu el însuși.

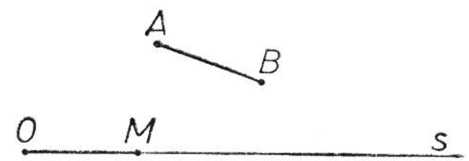

Fig. I.18

Proprietatea 1) este proprietatea de reflexivitate.

2) **Dacă x, y sînt elemente ale mulțimii M astfel ca $(x, y) \in \mathcal{R}$, atunci avem și $(y, x) \in \mathcal{R}$.**

Deci, dacă x este echivalent cu y, atunci și y este echivalent cu x.

Proprietatea 2) este proprietatea de simetrie.

3) **Dacă x, y, z sînt elemente ale mulțimii M, astfel ca $(x, y) \in \mathcal{R}$, și $(y, x) \in \mathcal{R}$, atunci avem și $(x, z) \in \mathcal{R}$.**

Deci, dacă x este echivalent cu y și dacă y este echivalent cu z, atunci x este echivalent cu z.

Proprietatea 3) este proprietatea de tranzitivitate.

Una din cele mai importante proprietăți ale figurilor în general, și ale segmentelor în particular, constă în faptul că *relația de congruență a segmentelor este o relație de echivalență.*

2. Dacă $|AB|$, $|A'B'|$, $|A''B''|$ sînt trei segmente astfel ca $|AB| \equiv |A'B'|$ și $|A'B'| \equiv |A''B''|$, atunci avem $|AB| \equiv |AB|$, $|A'B'| \equiv |AB|$ și $|AB| \equiv |A''B''|$, (fig. I.19).

3. Dacă avem șase puncte A, B, C, A', B', C' astfel ca B' se găsește între A' și C', B se găsește între A și C și $|AB| \equiv |A'B'|$, $|BC| \equiv |B'C'|$, atunci $|AC| \equiv |A'C'|$ (fig. I.20).

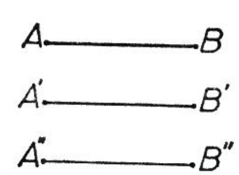

Fig. I.19

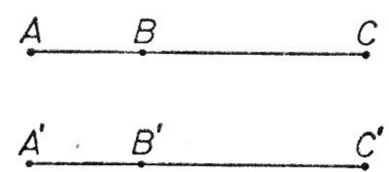

Fig. I.20

4. Fiind date un unghi propriu $\widehat{hk}$ şi o semidreaptă s într-un plan p şi notînd prin p' unul din semiplanele limitate de suportul lui s în planul p, există o singură semidreaptă t în semiplanul p' astfel ca s şi t să formeze un unghi congruent cu unghiul $\widehat{hk}$. Orice unghi este congruent cu el însuşi.

Dacă $\widehat{hk} \equiv \widehat{h'k'}$, atunci $\widehat{h'k'} \equiv \widehat{hk}$.

Notaţie. Pentru a exprima că unghiul $\widehat{st}$ este congruent cu unghiul $\widehat{hk}$, vom scrie $\widehat{st} \equiv \widehat{hk}$.

5. Fiind date două triunghiuri ABC, $A'B'C'$ astfel ca $\hat{A} \equiv \widehat{A'}$, $|AB| \equiv |A'B'|$ şi $|AC| \equiv |A'C'|$, avem şi $\hat{B} \equiv \widehat{B'}$, (fig I. 21).

Proprietatea de congruenţă 1 se numeşte uneori *axioma de purtare congruentă a segmentelor.* Proprietatea de congruenţă 3 se numeşte *axioma de adunare a segmentelor.* Proprietatea 4 se numeşte uneori *axioma de purtare congruentă a unghiurilor.*

Definiţie. **Fie $|AB|$, $|CD|$ două segmente şi fie P, Q, R trei puncte astfel ca punctul Q să se găsească între punctele P, R şi să avem $|AB| \equiv |PQ|$, $|CD| \equiv |QR|$** (fig. I.22).
Se spune atunci că segmentul $|PR|$ reprezintă suma segmentelor $|AB|$ şi $|CD|$ şi se scrie $|PR| \equiv |AB| + |CD|$.

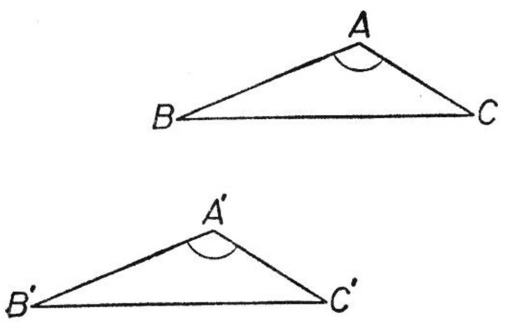

Fig. I.21

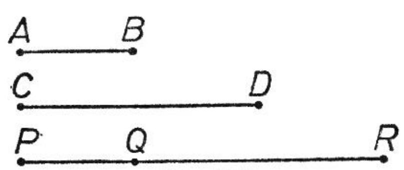

Fig. I.22

Dacă segmentele $|PR|$, $|P'R'|$ reprezintă fiecare suma segmentelor $|AB|$, $|CD|$, atunci $|PR| \equiv |P'R'|$.

Definiţie. **Fie $\widehat{hk}$, $\widehat{mn}$ două unghiuri şi fie r, s, t trei semidrepte cu aceeaşi origine, astfel ca $\widehat{rt}$ să fie unghi propriu şi s să fie conţinută în interiorul unghiului $\widehat{rt}$ şi astfel ca $\widehat{rs} \equiv \widehat{hk}$ şi $\widehat{st} \equiv \widehat{mn}$. Se spune atunci că unghiul $\widehat{rt}$ reprezintă suma unghiurilor $\widehat{hk}$, $\widehat{mn}$** (fig. I.23) **şi se scrie $\widehat{rt} \equiv \widehat{hk} + \widehat{mn}$.**

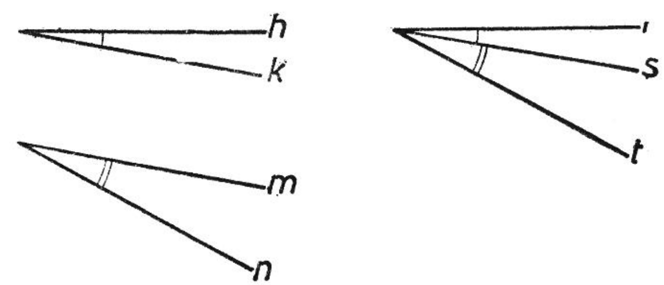

Fig. I.23

Observaţie importantă. Pentru oricare două segmente $|AB|$, $|CD|$ există segmente care reprezintă suma segmentelor $|AB|$, $|CD|$, dar nu orice pereche de unghiuri $\widehat{hk}$, $\widehat{mn}$ admite o sumă. De exemplu, un unghi alungit nu poate fi adunat cu un unghi nenul.

Convenim să spunem că un unghi oarecare $\widehat{hk}$ reprezintă suma unghiului $\widehat{hk}$ cu un unghi nul. Vom mai conveni să spunem că suma a două unghiuri suplementare este un unghi alungit. Dacă unghiul $\widehat{hk}$ reprezintă suma unghiurilor $\widehat{hm}$, $\widehat{mk}$ şi dacă m, m' sînt semidrepte opuse, atunci unghiurile $\widehat{hm'}$, $\widehat{m'k}$ admit o sumă numai dacă $\widehat{hk}$ este alungit.

Următoarele relaţii sînt incompatibile:

$$B \in |AC|, \; C' \in |A'B'|, \; |AB| \equiv |A'B'|, \; |AC| \equiv |A'C'|.$$

Definiţie. **Fie $|AB|$, $|CD|$ două segmente şi fie s o semidreaptă cu originea O. Considerăm punctele P, Q pe semidreapta s, astfel ca $|OP| \equiv |AB|$, $|OQ| = |CD|$** (fig. I.24).
Dacă $P \in |OQ|$, vom spune că segmentul $|AB|$ este mai mic decît segmentul $|CD|$, relativ la semidreapta s, sau că segmentul $|CD|$ este mai mare decît segmentul $|AB|$ relativ la s.

Dacă avem două segmente $|AB|$ şi $|CD|$ şi două semidrepte s, s' şi dacă $|AB|$ este mai mic decit $|CD|$ relativ la s, atunci $|AB|$ este mai mic decît $|CD|$ şi relativ la s'.

Definiţie. **Fiind date două segmente $|AB|$, $|CD|$, vom spune că $|AB|$ este mai mic decît $|CD|$ sau că $|CD|$ este mai mare decît $|AB|$, şi vom scrie $|AB| < |CD|$ sau $|CD| > |AB|$, dacă $|AB|$ este mai mic decît $|CD|$ relativ la o semidreaptă arbitrară s.**

Fiind date două segmente $|AB|$, $|CD|$, este adevărată una şi numai una din relaţiile

$$|AB| \equiv |CD|, \; |AB| < |CD|, \; |AB| > |CD|.$$

Fiind date trei segmente $|AB|$, $|CD|$, $|EF|$ astfel ca $|AB| < |CD|$ şi $|CD| < |EF|$, avem $|AB| < |EF|$.

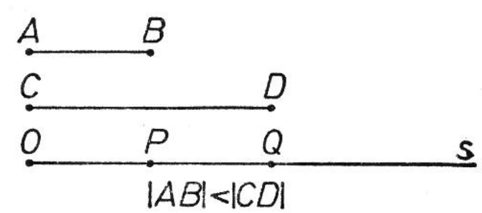

Fig. I.24

Relația de comparare a segmentelor este o relație tranzitivă. Relația $|AB| \lessdot |CD|$ nu este nici reflexivă, nici simetrică.

Să reținem că:

Fie date două segmente $|AB|$, $|CD|$; dacă fixăm o semidreaptă s, cu originea într-un punct O, suma celor două segmente se reprezintă printr-un segment $|OM|$, unde $M \in s$. Două segmente care reprezintă suma a două segmente date sînt congruente între ele.

Fiind date două segmente $|AB|$, $|CD|$, ele pot fi comparate astfel: alegem o semidreaptă s, cu originea O și luăm punctele $M \in s$, $N \in s$ astfel ca $|OM| \equiv |AB|$, $|ON| \equiv |CD|$. În acest caz, dacă $M \in |ON|$ spunem că $|AB|$ este mai mic decît $|CD|$. Această regulă de comparare nu depinde de alegerea semidreptei s.

Exerciții

1. *Să se arate că dacă segmentul $|OP|$ reprezintă suma segmentelor $|AB|$, $|CD|$, atunci $|OP|$ reprezintă și suma segmentelor $|CD|$, $|AB|$ (adunarea segmentelor este comutativă).*

(*Indicație.* Se construiește suma $|CD| + |AB|$ alegînd ca semidreaptă ajutătoare semidreapta $|PO$.)

2. *Să se arate că dacă segmentul $|OS|$ reprezintă suma*

$$(|AB| + |CD|) + |EF|,$$

atunci $|OS|$ reprezintă și suma

$$|AB| + (|CD| + |EF|)$$

(adunarea segmentelor este asociativă).

3. *Să se arate că dacă segmentul $|AB|$ este mai mic decît segmentul $|CD|$, atunci există un segment $|EF|$ astfel încît $|CD|$ reprezintă suma segmentelor $|AB|$ și $|EF|$.*

4. *Fie ABC, $A'B'C'$ două triunghiuri astfel ca*

$$\hat{A} \equiv \hat{A'},\ |AB| \equiv |A'B'|,\ |AC| \equiv |A'C'|.$$

Să se arate că $\hat{C} \equiv \widehat{C'}$.

8. Teoremele de congruență a două triunghiuri

Definiție. **Se spune că două triunghiuri ABC, $A'B'C'$ sînt congruente, dacă avem**

$$\hat{A} \equiv \hat{A'}, \hat{B} \equiv \hat{B'},\ \hat{C} \equiv \hat{C'},\ |AB| \equiv |A'B'|,\ |BC| \equiv |B'C'|,$$
$$|AC| \equiv |A'C'|.$$

În acest caz, notăm: $ABC \equiv A'B'C'$.

Teorema I de congruență. Relațiile

$$\hat{A} \equiv \hat{A'},\ |AB| \equiv |A'B'|,$$
$$|AC| \equiv |A'C'|$$

implică congruența triunghiurilor ABC, $A'B'C'$ (fig. I.25).

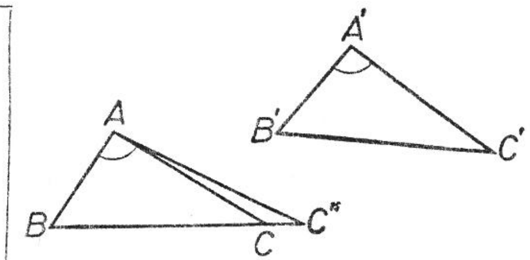

Fig. I.25

Demonstrație. Pe semidreapta $|BC$ se consideră un punct C'' astfel ca $|BC''| \equiv |B'C'|$. Proprietatea 5 de congruență dă $\hat{B} \equiv \widehat{B'}$. Aplicînd aceeași proprietate triunghiurilor BAC'', $B'A'C'$ deducem $\widehat{BAC''} = \widehat{B'A'C'}$. Dar $\widehat{BAC} \equiv \widehat{B'A'C'}$. Din unicitatea purtării congruente a unghiurilor (proprietatea 4) rezultă $|AC'' = |AC$, deci $C'' = C$ și atunci $|BC| \equiv |B'C'|$.

Din proprietatea 5 de congruență deducem apoi $\hat{C} \equiv \hat{C'}$. Deci triunghiurile ABC, $A'B'C'$ sînt congruente.

Teorema unghiurilor suplementare. Fie unghiurile $\widehat{hk}$, $\widehat{km}$, $\widehat{h'k'}$, $\widehat{k'm'}$ astfel că $\widehat{hk}$ este un suplement al unghiului $\widehat{km}$, $\widehat{h'k'}$ este un suplement al unghiului $\widehat{k'm'}$ și $\widehat{hk} \equiv \widehat{h'k'}$. În aceste condiții, avem $\widehat{km} \equiv \widehat{k'm'}$.

Demonstrație. Alegem pe semidreptele h, k, m, h', k', m' punctele A respectiv B, C, A', B', C' astfel încît avem $|OA| \equiv |O'A'|$, $|OB| \equiv |O'B'|$, $|OC| \equiv |O'C'|$, unde O și O' sînt originile semidreptelor h respectiv h' (fig. I.26). Din ipoteze rezultă $O \in |AC|$, $O' \in |A'C'|$. Din teorema I de congruență rezultă $|AB| \equiv |A'B'|$, $\hat{A} \equiv \hat{A'}$, iar din proprietatea 3 de congruență deducem că $|AC| \equiv |A'C'|$. Aplicînd teorema I de congruență triunghiurilor ABC, $A'B'C'$, deducem $|BC| \equiv |B'C'|$ și $\widehat{ACB} \equiv \widehat{A'C'B'}$. Apoi din triunghiurile BOC, $B'O'C'$ deducem $\widehat{BOC} \equiv \widehat{B'O'C'}$, deci $\widehat{km} \equiv \widehat{k'm'}$. Deci am arătat că două unghiuri congruente au suplemente congruente.

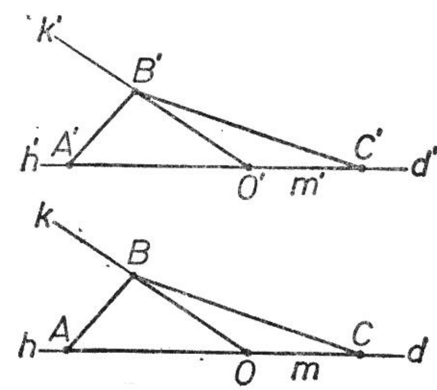

Fig. I.26

Reciproca teoremei unghiurilor suplementare. Fie $\widehat{hk}$, $\widehat{km}$ două unghiuri suplementare și fie h', k', m' trei semidrepte cu aceeași origine și astfel că $\widehat{h'k'} \equiv \widehat{hk}$, Int $\widehat{h'k'} \cap$ Int $\widehat{k'm'} = \emptyset$ *și $\widehat{km} \equiv \widehat{k'm'}$; atunci semidreptele k', m' sînt în prelungire, deci unghiurile $\widehat{h'k'}$, $\widehat{k'm'}$ sînt suplementare.*

Demonstrație. Prin reducere la absurd, folosind teorema unghiurilor suplementare și proprietatea 4 de congruență, care asigură unicitatea purtării congruente a unghiurilor.

T e o r e m a   u n g h i u r i l o r   o p u s e. Dacă avem cinci puncte O, A, A', B, B' astfel ca $O \in |AA'|$ și $O \in |BB'|$, atunci $\widehat{AOB} \equiv \widehat{A'OB'}$ (fig. 1.27).

Într-adevăr, cele două unghiuri au un suplement comun, anume unghiul $\widehat{AOB'}$. Din ultima teoremă rezultă $\widehat{AOB} \equiv \widehat{A'OB'}$.

T e o r e m a   1   a   t r i u n g h i u l u i   i s o s c e l. Dacă un triunghi ABC are $|AB| \equiv |AC|$, atunci $\hat{B} \equiv \hat{C}$.

Demonstrație. Se aplică teorema 1 de congruență triunghiurilor ABC și ACB și se ține seama că $\widehat{BAC} = \widehat{CAB}$, deci $\widehat{BAC} \equiv \widehat{CAB}$ (fig. I.28).

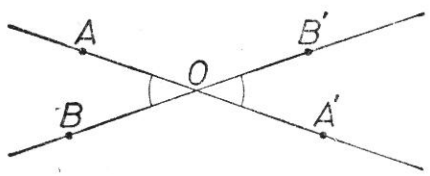

Fig. I.27

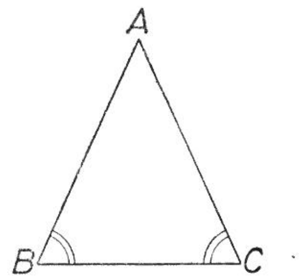

Fig. I.28

T e o r e m a   II   d e   c o n g r u e n ț ă. Dacă două triunghiuri ABC, $A'B'C'$ au

$$|BC| \equiv |B'C'|, \quad \hat{B} \equiv \hat{B'}, \quad \hat{C} \equiv \hat{C'},$$

atunci cele două triunghiuri sînt congruente (fig. I.29).

Demonstrație. Pe semidreapta $|BA$ luăm acel punct A'', pentru care $|BA''| \equiv |B'A'|$. Aplicînd teorema I de congruență triunghiurilor $A''BC$, $A'B'C'$ obținem $\widehat{BCA''} \equiv \widehat{B'C'A'}$. Dar avem și $\widehat{BCA} \equiv \widehat{B'C'A'}$. Din proprietatea 4 de congruență deducem $|CA'' = |CA$, deci avem $A'' = A$ și $|AB| \equiv |B'A'|$. Putem acum aplica teorema I de congruență triunghiurilor ABC, $A'B'C'$.

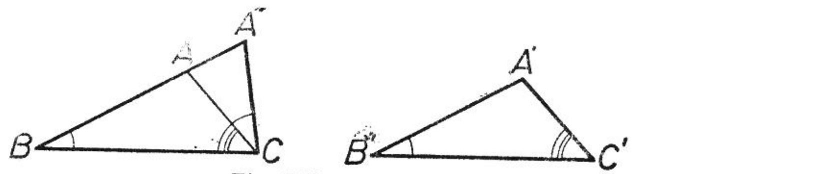

Fig. I.29

T e o r e m a   2   a   t r i u n g h i u l u i   i s o s c e l. Dacă un triunghi ABC are $\hat{B} \equiv \hat{C}$, atunci $|AB| \equiv |AC|$.

Demonstrație. Se aplică teorema II de congruență triunghiurilor ABC, ACB și se folosește faptul că avem, prin definiție, $|BC| = |CD|$, deci $|BC| \equiv |CB|$.

T e o r e m a   t r i u n g h i u r i l o r   s i m e t r i c e. Fie A, B, C, C' patru puncte într-un plan p, astfel ca $|CA| \equiv |C'A|$ și $|CB| \equiv |C'B|$ și astfel ca punctele C și C' să se găsească în semiplane opuse față de dreapta AB. Atunci triunghiurile ABC, ABC' sînt congruente.

Demonstrație. Punctele C, C' fiind în semiplane opuse față de AB, segmentul $|CC'|$ are un punct comun cu dreapta AB; fie O acest punct. Sînt posibile mai multe cazuri:

a) $O = A$. Triunghiul BCC' este isoscel, avînd $|BC| \equiv |BC'|$; deci $\widehat{BCC'} \equiv \widehat{BC'C}$. Triunghiurile ABC, ABC' sînt congruente în virtutea teoremei I de congruență a triunghiurilor (fig. I.30).

b) $O = B$. Demonstrație analoagă.

c) $O \in |AB|$. Considerînd triunghiurile isoscele ACC', BCC', deducem

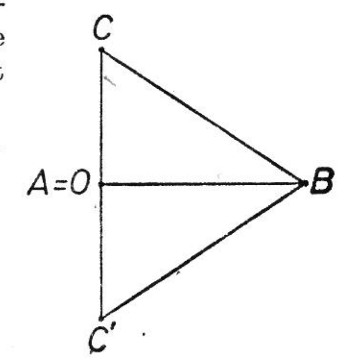

Fig. I.30

$$\widehat{ACC'} \equiv \widehat{AC'C}, \qquad \widehat{BCC'} \equiv \widehat{BC'C} \tag{1}$$

și avem prin urmare $\widehat{ACB} \equiv \widehat{AC'B}$. Din teorema I de congruență a triunghiurilor, deducem că triunghiurile ABC, ABC' sînt congruente (fig. I.31).

d) $A \in |OB|$. Deducem ca la punctul c) relațiile (1); considerind diferențele unghiurilor ce apar în aceste relații, deducem $\widehat{ACB} \equiv \widehat{AC'B}$. Deci avem, și în acest caz, $\widehat{ABC} \equiv \widehat{ABC'}$ (fig. I.31).

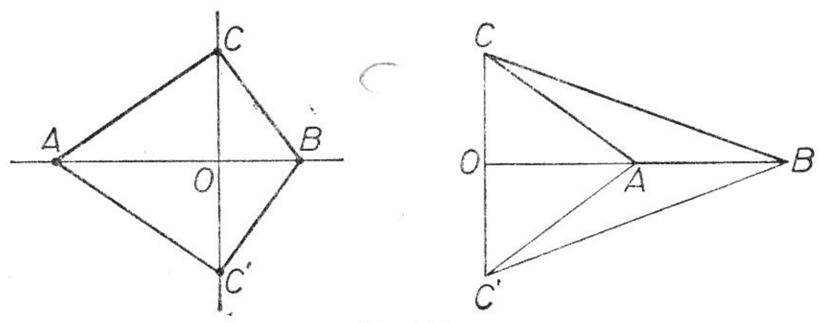

Fig. I.31

Teorema III de congruență. **Dacă două triunghiuri ABC, $A'B'C'$ au $|AB| \equiv |A'B'|$, $|AC| \equiv |A'C'|$ și $|BC| \equiv |B'C'|$, atunci cele două triunghiuri sînt congruente.**

Demonstrație. În semiplanul limitat de dreapta BC și conținînd punctul A, se consideră punctul A'' astfel ca $\widehat{BCA''} \equiv \widehat{B'C'A'}$ și $|CA''| \equiv |C'A'|$ (fig. I.32). În semiplanul opus lui A față de BC se ia apoi punctul A''', astfel ca $\widehat{BCA'''} \equiv \widehat{B'C'A'}$ și $|CA'''| \equiv |C'A'|$. Din teorema I de congruență deducem relațiile $|A''B| \equiv |A'''B| \equiv |A'B'| \equiv |AB|$. Aplicînd teorema triunghiurilor simetrice triunghiurilor ABC, $A'''BC$ și apoi triunghiurilor $A''BC$, $A'''BC$, obținem congruențele $\widehat{BCA} \equiv \widehat{BCA'''}$, $\widehat{BCA''} \equiv \widehat{BCA'''}$. Din proprietatea de congruență 4 rezultă atunci $CA'' = CA$ deci avem $A'' = A$. Din felul în care a fost ales A'' deducem că $\widehat{BCA} \equiv \widehat{B'C'A'}$. Sîntem în condițiile de aplicabilitate a teoremei I de congruență, din care rezultă ABC congruent cu $A'B'C'$.

Exerciții

1. Să se arate că dacă un triunghi ABC are $\hat{B} \not\equiv \hat{C}$, atunci $|AB| \not\equiv |AC|$.

2. Fie $|AB|$, $|A'B'|$ două segmente congruente și fie punctele $C \in |AB|$, $C' \in |A'B'|$ astfel ca $|AC| \equiv |A'C'|$. Să se arate că $|BC| \equiv |B'C'|$.

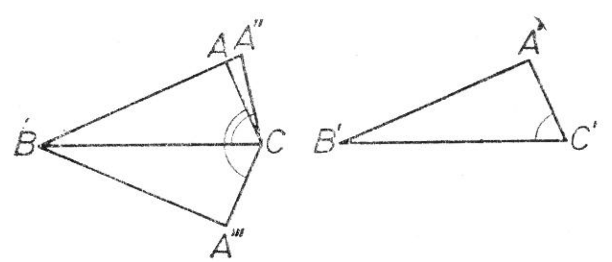

Fig. I.32

3. Fie OAB, $O'A'B'$ două triunghiuri congruente și fie punctele $C \in |AB|$, $C' \in |A'B'|$ astfel ca $|AC| \equiv |A'C'|$. Să se arate că $\widehat{AOC} \equiv \widehat{A'O'C'}$ și $\widehat{BOC} \equiv \widehat{B'O'C'}$. Să se arate apoi că $|OC| \in |O'C'|$.

4. Fie OAB, $O'A'B'$ două triunghiuri congruente și fie punctele $C \in |AB|$, $C' \equiv \mathrm{Int}\,\widehat{A'O'B'}$, astfel ca $|OC| \equiv |O'C'|$ și $\widehat{AOC} \equiv \widehat{A'O'C'}$. Să se arate că $C' \in |A'B'|$.

5. Fie $\widehat{hk}$, $\widehat{km}$ și $\widehat{h'k'}$, $\widehat{k'm'}$ două perechi de unghiuri adiacente, astfel ca $\widehat{hk} \equiv \widehat{h'k'}$ și $\widehat{km} \equiv \widehat{k'm'}$, $k \subset \mathrm{Int}\,\widehat{hm}$, $k' \subset \mathrm{Int}\,\widehat{h'm'}$. Să se arate că $\widehat{hm} \equiv \widehat{h'm'}$.

6. Să se arate că dacă două unghiuri $\widehat{rs}$, $\widehat{r's'}$ reprezintă suma altor două unghiuri $\widehat{hk}$, $\widehat{km}$, atunci $\widehat{rs} \equiv \widehat{r's'}$.

7. Fie $\widehat{hk}$, $\widehat{km}$ și $\widehat{h'k'}$, $\widehat{k'm'}$ două perechi de unghiuri adiacente, astfel ca $\widehat{hk} \equiv \widehat{h'k'}$, $\widehat{hm} \equiv \widehat{h'm'}$ și $k \subset \mathrm{Int}\,\widehat{hm}$, $k' \subset \mathrm{Int}\,\widehat{h'm'}$. Să se arate că avem $\widehat{km} \equiv \widehat{k'm'}$.

8. Să se dea o interpretare proprietății conținute în exercițiul precedent, folosind noțiunea de diferență a două unghiuri.

9. Fie OAB, $O'A'B'$ două triunghiuri congruente și fie punctele $C \in |AB$, $C' \in |A'B'$ astfel ca $\widehat{AOC} \equiv \widehat{A'O'C'}$. Să se arate că dacă $C \in |AB|$, atunci $C' \in |A'B'|$.

10. Fie r, s, h, k patru semidrepte cu aceeași origine O, astfel ca r și s să fie opuse și situate pe o dreaptă d, iar h și k să fie de o aceeași parte a dreptei d, într-un plan p. Să se arate că dacă h nu este interioară unghiului $\widehat{rk}$, atunci: h este interioară unghiului $\widehat{sk}$, r și h se găsesc în semiplane opuse față de suportul lui k și k este interioară unghiului $\widehat{rh}$.

(*Indicație.* Se consideră puncte $A \in r$, $B \in h$, $C \in s$ și se arată că există punctele $D \in k \cap |AB|$ și $E \in h \cap |CD|$).

9. Compararea unghiurilor

Definiție. Fie $\widehat{pq}$, $\widehat{rs}$ două unghiuri proprii și fie, într-un plan P, o dreaptă d, un punct $O \in d$, o semidreaptă $t \subset d$ cu originea O și un semiplan P', limitat de dreapta d. Pentru a compara unghiurile $\widehat{pq}$, $\widehat{rs}$, vom construi semidreptele, m, n, cu originea O, astfel ca (fig. I.33):

$$m \subset P', \quad n \subset P', \quad \widehat{tm} \equiv \widehat{pq}, \quad \widehat{tn} \equiv \widehat{rs}.$$

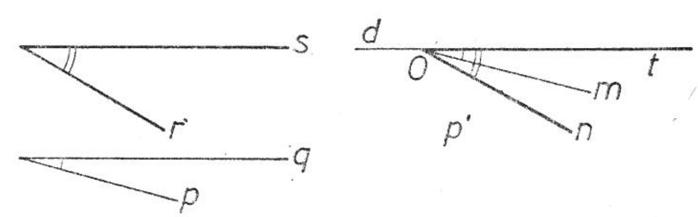

Fig. I.33

Sînt atunci posibile trei cazuri:

a) $m = n$; b) $m \subset \text{Int}\ \widehat{tn}$; c) $n \subset \text{Int}\ \widehat{tm}$.

Dacă $m = n$, avem $\widehat{pq} \equiv \widehat{rs}$; dacă $m \subset \text{Int}\ \widehat{tn}$, vom spune că unghiul $\widehat{pq}$ este *mai mic* decît unghiul $\widehat{rs}$, sau că unghiul $\widehat{rs}$ este *mai mare* decît unghiul $\widehat{pq}$, şi vom scrie $\widehat{pq} < \widehat{rs}$ sau $\widehat{rs} > \widehat{pq}$. Cazul c) se obţine din cazul b), permutînd între ele unghiurile $\widehat{pq}$, $\widehat{rs}$ şi semidreptele m, n. Deci, dacă sîntem în cazul c), vom spune că unghiul $\widehat{pq}$ este mai mare decît unghiul $\widehat{rs}$, sau că unghiul $\widehat{rs}$ este mai mic decît unghiul $\widehat{pq}$.

Regula de comparare a unghiurilor dată mai sus depinde, în aparenţă, de alegerea semidreptei t şi a semiplanului P'. Să presupunem că alegem altfel aceste elemente, luînd o altă semidreaptă t', cu originea într-un punct O', şi apoi un semiplan P'', limitat de suportul semidreptei t'. Să presupunem apoi că, prin această alegere, obţinem semidreptele m', n' avînd originea O' şi astfel ca $m' \subset P''$, $n' \subset P''$, $\widehat{t'm'} \equiv \widehat{pq}$, $\widehat{t'n'} \equiv \widehat{rs}$. Vom avea atunci $\widehat{t'm'} \equiv \widehat{tm}$, $\widehat{t'n'} \equiv \widehat{tn}$. Dacă $m = n$, atunci $m' = n'$. Dacă $m \subset \text{Int}\ \widehat{tn}$, atunci $m' \subset \text{Int}\ \widehat{t'n'}$, iar dacă $n \subset \text{Int}\ \widehat{tm}$, atunci $n' \subset \text{Int}\ \widehat{t'm'}$.

Rezultă că *regula de comparare a unghiurilor nu depinde de alegerea elementelor auxiliare t şi P'*.

Exerciţii

1. *Fie $\widehat{hk}$, $\widehat{rs}$ două unghiuri proprii. Să se arate că este adevărată una şi numai una din relaţiile*

$$\widehat{hk} \equiv \widehat{rs};\quad \widehat{hk} < \widehat{rs};\quad \widehat{hk} > \widehat{rs}.$$

2. *Fie $\widehat{hk}$, $\widehat{pq}$, $\widehat{rs}$ trei unghiuri proprii astfel ca $\widehat{hk} < \widehat{pq}$ şi $\widehat{pq} < \widehat{rs}$. Să se arate că $\widehat{hk} < \widehat{rs}$.*

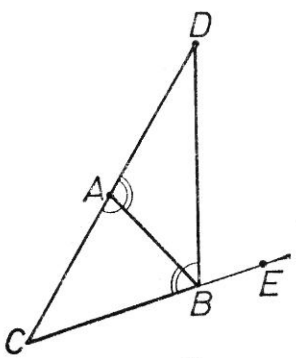

Fig. I.34

T e o r e m a I a u n g h i u l u i e x t e r i o r. Dacă ABC este un triunghi, orice suplement al unghiului $\hat{B}$ este mai mare decît unghiul $\hat{A}$ (fig. I.34).

Altfel exprimat: în orice triunghi, fiecare unghi exterior este mai mare decît oricare din unghiurile interioare neadiacente acelui unghi exterior.

Demonstraţie. Fie E un punct astfel ca $B \in |CE|$ şi fie D acel punct de pe dreapta CA, pentru care avem

$$A \in |CD|, \qquad |AD| \equiv |BC|.$$

Să presupunem prin absurd că am avea $\widehat{ABE} \equiv \widehat{BAC}$, (fig. I.34). Din teorema unghiurilor suplementare rezultă $\widehat{CBA} \equiv \widehat{BAD}$. Teorema I de congruenţă arată că triunghiurile ABC, BAD sînt congruente. Avem atunci $\widehat{ABD} \equiv \widehat{BAC} \equiv \widehat{ABE}$. Dar punctele D, E sînt de aceeaşi parte a dreptei AB. Din proprietatea 4 de congruenţă, care arată unicitatea purtării congruente a unghiurilor, rezultă $BD = BE$, ceea ce nu este posibil, deoarece punctele A, B, C, nu sînt coliniare. Deci nu putem presupune că $\widehat{ABE} \equiv \widehat{BAC}$. Cazul $\widehat{ABE} < \hat{A}$ (fig. I.35) se elimină considerînd punctul $C' \in |CB|$ astfel ca $\widehat{C'AB} \equiv \widehat{ABE}$. Am avea atunci în ABC', situaţia discutată anterior.

Fie A, B, C, D patru puncte distincte într-un plan, astfel ca punctele C, D să se găsească în semiplane opuse faţă de dreapta AB şi astfel încît să avem $\widehat{ABC} \equiv \widehat{BAD}$. În acest caz, dreptele AD, BC sînt nesecante (fig. I.36).

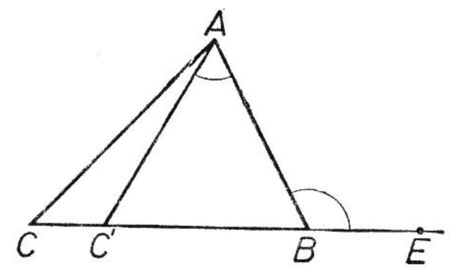

Fig. I.35

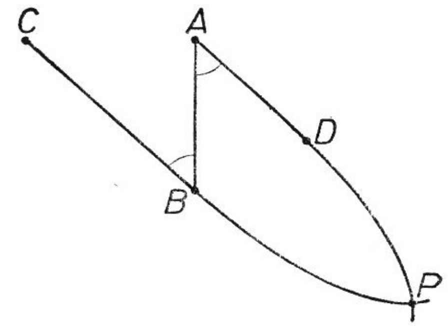

Fig. I.36

Demonstraţie. Presupunem prin absurd că dreptele AD, BC ar avea un punct comun P. Dacă P este de aceeaşi parte cu D faţă de AB, atunci obţinem un triunghi ABP, care are unghiul exterior $\widehat{ABC}$ congruent cu unghiul interior neadiacent $\widehat{BAP}$. Dacă P este de aceeaşi parte cu C faţă de AB, obţinem o situaţie similară în triunghiul ABP, care va avea unghiul exterior $\widehat{BAD}$ congruent cu $\widehat{ABC}$. În ambele cazuri, am ajuns la o contradicţie.

Reamintim următoarea

D e f i n i ţ i e. Două drepte d, d' situate într-un acelaşi plan şi care nu au nici un punct comun, se numesc drepte paralele.

Notaţie. Dacă dreptele d, d' sînt paralele, se scrie $d \parallel d'$.

Observație. Două drepte paralele sînt în mod necesar distincte.

Aplicație. Proprietatea precedentă ne permite *să construim o dreaptă d, care să treacă printr-un punct dat A și care să fie paralelă cu o dreaptă d', care nu trece prin A.* Construcția este următoarea:

Alegem două puncte B, C pe dreapta d' și apoi considerăm acea semidreaptă s, care are originea A, care este situată în semiplanul opus semiplanului limitat de dreapta AB și care conține punctul C și mai cerem pentru s să verifice relația $\widehat{DAB} \equiv \widehat{ABC}$, pentru $D \in s$.

Deci am demonstrat proprietatea]

Fiind date o dreaptă d' și un punct A nesituat pe d', există cel puțin o dreaptă d, paralelă cu d' și conținînd punctul A.

Teorema IV de congruență. Dacă triunghiurile ABC, $A'B'C'$ au $|BC| \equiv |B'C'|$, $\hat{B} \equiv \hat{B'}$ și $\hat{A} \equiv \hat{A'}$, atunci cele două triunghiuri sînt congruente.

Demonstrație. Considerăm punctul A'' de pe semidreapta $|BA$, astfel ca $|BA''| \equiv |B'A'|$. Triunghiurile $A''BC$, $A'B'C'$ sînt atunci congruente, în baza teoremei I de congruență. Rezultă $\widehat{BA''C} \equiv \widehat{B'A'C'}$. Comparînd cu relația $\widehat{BAC} \equiv \widehat{B'A'C'}$, admisă în enunț, deducem că $\widehat{BAC} \equiv \widehat{BA''C}$. Din teorema unghiului exterior deducem că $A = A''$. Deci avem $|BA| \equiv |B'A'|$ și putem acum să aplicăm teorema I de congruență triunghiurilor ABC, $A'B'C'$.

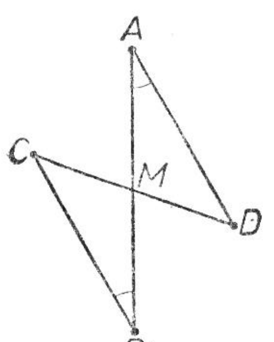

Fig. 1.37

Observație. Dacă se admite postulatul lui Euclid, care va fi reamintit în paginile următoare, teorema IV de congruență se reduce la teorema II de congruență, deoarece suma unghiurilor unui triunghi este congruentă cu suma a două unghiuri drepte.

Orice segment $|AB|$ conține un punct M astfel ca $|AM| \equiv |MB|$. Punctul M este unic determinat prin această condiție.

Demonstrație. Se consideră două puncte C, D, situate în semiplane opuse față de dreapta AB și astfel ca $\widehat{BAD} \equiv \widehat{ABC}$ și $|AD| \equiv |BC|$. Punctul căutat M este dat de formula $\{M\} = AB \cap CD$ (fig. 1.37). M se numește *mijlocul* segmentului $|AB|$.

Exerciții

1. Fie A, B, C, D *patru puncte într-un plan, astfel ca* $\widehat{CBA} \equiv \widehat{DAB}$ *și* $|BC| \equiv |AD|$ *și astfel ca punctele C, D să se găsească în semiplane opuse față de dreapta AB. Să se arate că segmentele $|AB|$, $|CD|$ au un punct comun.*

Indicație. Din ipoteză rezultă $|CD| \cap AB = \emptyset$. Fie $O \in |CD| \cap AB$. Folosind teorema unghiului exterior, se vor exclude relațiile $A \in |OB|$, $B \in |OA|$, astfel încît va rezulta $O \in |AB|$.

2. *Păstrînd notațiile din exercițiul precedent, să se arate că punctul $O \in |AB| \cap |CD|$ are proprietatea $|OA| \equiv |OB|$.*

(*Indicație.* Se va utiliza teorema a IV-a de congruență.)

3. *Fie $|AB|$ un segment. Să se arate că există un punct $M \in |AB|$ astfel ca $|MA| \equiv |MB|$.*

(*Indicație.* Se construiesc puncte C, D astfel încît să fie verificate condițiile din exercițiul 1.)

4. *Fie A, B două puncte pe o dreaptă d. Să se arate că, dacă un punct $M \in d$ are proprietatea $|MA| \equiv |MB|$, atunci $M \in |AB|$.*

5. *Am arătat că se numește* **mijloc** *al unui segment $|AB|$ un punct $M \in |AB|$ astfel ca $|MA| \equiv |MB|$. Să se arate că orice segment are un mijloc unic.*

(*Indicație.* Existența unui mijloc este arătată de exercițiul 3. Pentru unicitatea mijlocului, se procedează prin reducere la absurd.)

6. *Fie M mijlocul unui segment $|AB|$ și fie P, Q mijloacele segmentelor $|AM|$, $|BM|$. Să se arate că M este mijlocul segmentului $|PQ|$.*

7. *Fie $|AB|$ un segment. Să se arate că există un segment $|EF|$ astfel încît $|AB|$ să reprezinte suma a 64 de segmente congruente cu $|EF|$. Să se generalizeze apoi acest exercițiu.*

8. *Fie ABC, $A'B'C'$ două triunghiuri congruente și fie M, N, P, M', N', P' mijloacele segmentelor $|BC|$, $|CA|$, $|AB|$, $|B'C'|$, $|C'A'|$, $|A'B'|$, respectiv. Să se arate că triunghiurile MNP, $M'N'P'$ sînt congruente.*

(*Indicație.* Se va arăta că dacă M, M' sînt mijloacele a două segmente congruente $|AB|$, $|A'B'|$ atunci segmentele $|AM|$, $|A'M'|$ sînt de asemenea segmente congruente.)

10. Inegalități într-un triunghi

1. *În orice triunghi, la latura mai mare se opune unghiul mai mare. Deci dacă ABC este un triunghi, atunci avem $|AB| < |BC|$ dacă și numai dacă $\hat{C} < \hat{A}$.*

Demonstrație. Presupunem că $|BC| > |AB|$ și arătăm că $\hat{A} > \hat{C}$.

Fie punctul $A' \in |BC|$ astfel ca $|BA'| \equiv |BA|$ (fig. I.38). Triunghiul BAA' este isoscel, avînd $|BA| \equiv |BA'|$. Deci $\widehat{BAA'} \equiv \widehat{BA'A}$. Semidreapta $|AA'$ este interioară unghiului $\hat{A}$, deoarece $A' \in |BC|$. Rezultă $\widehat{BAA'} < \hat{A}$.

Din teorema unghiului exterior, $\widehat{BA'A} > \widehat{BCA} = \hat{C}$. Deci avem

$$\hat{A} > \widehat{BAA'} \equiv \widehat{BA'A} > \hat{C}$$

și atunci $\hat{A} > \hat{C}$.

Reciproc, dacă $\hat{A} > \hat{C}$, atunci trebuie să avem $|BC| > |AB|$, deoarece în caz contrar am avea $|BC| \equiv |AB|$ sau $|BC| < |AB|$ și am deduce $\hat{A} \equiv \hat{C}$ sau $\hat{A} < \hat{C}$.

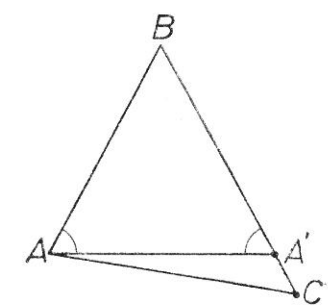

Fig. I.38

2. *În orice triunghi, suma a două laturi este mai mare decît latura a treia. Deci, dacă ABC este un triunghi, atunci* (fig. I.39)

$$|BA| + |AC| > |BC|.$$

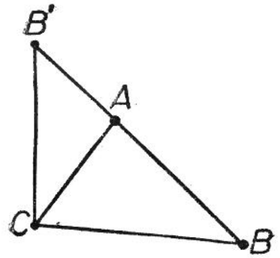

Fig. I.39

Demonstrație. Să considerăm punctul B' pentru care $A \in |BB'|$ și $|AB'| \equiv |AC|$. Atunci segmentul $|BB'|$ reprezintă suma segmentelor $|BA|$, $|AC|$. Inegalitatea din enunț este echivalentă cu relația $|BB'| > |BC|$ sau cu

$$\widehat{BCB'} > \widehat{BB'C}.$$

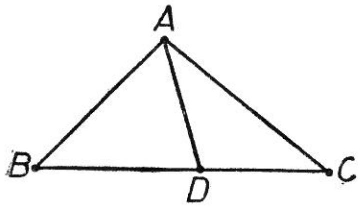

Fig. I.40

Dar $\widehat{BB'C} = \widehat{AB'C} \equiv \widehat{ACB'}$, deoarece triunghiul $AB'C$ este isoscel; apoi avem $\widehat{ACB'} > \widehat{BCB'}$, deoarece semidreapta $|CA$ este interioară unghiului $\widehat{BCB'}$. Rezultă deci că avem $\widehat{BCB'} > \widehat{BB'C}$.

3. *Dacă în triunghiul ABC avem $|AB| \leqslant |AC|$ și dacă $D \in |BC|$, atunci $|AD| < |AC|$* (fig. I.40).

Demonstrație. Din propoziția 1, ținînd seama că $|AB| \leqslant |AC|$, rezultă că avem (fig. I.40)

$$\hat{C} \leqslant \widehat{ABC},$$

iar din teorema unghiului exterior, deducem $\widehat{ADC} > \widehat{ABC}$. Ultimele două inegalități implică relația $\widehat{ADC} > \hat{C}$. Propoziția 1. dă în sfîrșit $|AD| < |AC|$.

Aplicație

Fie ABC un triunghi echilateral și fie M un punct interior triunghiului ABC. În acest caz, avem inegalitățile

$$|MA| + |MB| > |MC|, \quad |MB| + |MC| > |MA|,$$
$$|MC| + |MA| > |MB| \quad \text{(fig. I.41).}$$

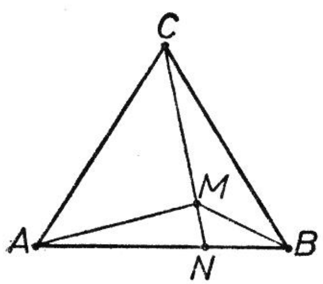

Fig. I.41

Demonstrație. Semidreapta $|CM$ intersectează latura $|AB|$ într-un punct N și avem $|CM| < |CN| < |CA| \equiv |AB|$, deci $|CM| < |AB|$. Dar $|AB| < |MA| + |MB|$, deci $|CM| < |AM| + |BM|$. Celelalte două inegalități din enunț se demonstrează în același fel.

11. Unghiuri drepte

Fie $\widehat{hk}$ un unghi propriu cu vîrful O și fie punctele $A \in h$, $B \in k$ astfel ca $|OA| \equiv |OB|$. Să notăm prin M mijlocul segmentului $|AB|$ (fig. I.42). Din teorema a III-a de congruență a triunghiurilor rezultă că triunghiurile OAM, OBM sînt congruente. În particular, avem $\widehat{OMA} \equiv \widehat{OMB}$. Să observăm că unghiurile $\widehat{OMA}$, $\widehat{OMB}$ sînt suplementare și congruente.

Definiție. **Se numește unghi drept orice unghi, care este congruent cu un suplement al său** (fig. I.43).

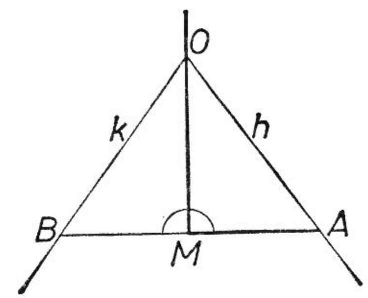

Fig. I.42

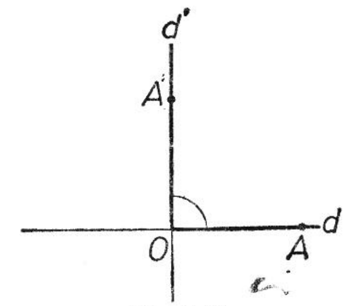

Fig. I.43

Construcția precedentă arată că:

Există unghiuri drepte.

Din teorema unghiurilor suplementare și din teorema unghiurilor opuse rezultă că:

Opusul unui unghi drept și suplementele unui unghi drept sînt unghiuri drepte.

Definiție. **Fie d, d' două drepte concurente într-un punct O. Se spune că dreptele d, d' sînt perpendiculare, sau ortogonale dacă cele patru semidrepte limitate de punctul O pe dreptele d, d' formează patru unghiuri drepte.**

Exemplu. Dacă $\widehat{AOA'}$ este un unghi drept, atunci dreptele OA, OA' sînt perpendiculare. Dacă dreptele d, d' sînt perpendiculare, scriem $d \perp d'$.

Fie $\widehat{pq}$, $\widehat{qr}$ și $\widehat{p'q'}$, $\widehat{q'r'}$ două perechi de unghiuri suplementare astfel ca $\widehat{pq} \equiv \widehat{p'q'}$. Din teorema unghiurilor suplementare rezultă $\widehat{qr} \equiv \widehat{q'r'}$. Dacă $\widehat{pq}$ este un unghi drept, atunci avem

$$\widehat{pq} \equiv \widehat{qr} \equiv \widehat{q'r'}, \quad \widehat{pq} \equiv \widehat{p'q'},$$

deci $\widehat{q'r'} \equiv \widehat{p'q'}$. Rezultă că $\widehat{p'q'} \equiv \widehat{q'r'}$ sînt unghiuri drepte. Deci:

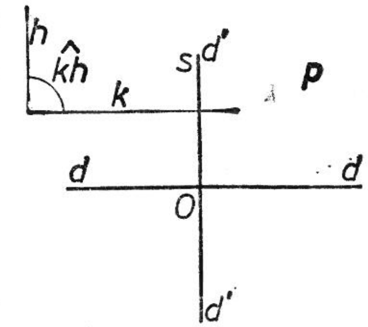

Fig. I.44

Orice unghi congruent cu un unghi drept este unghi drept.

Fie $\widehat{pq}$, $\widehat{qr}$ două unghiuri drepte suplementare cu originea O și fie s o semidreaptă cu aceeași origine O, situată în același semiplan cu semidreapta q față de suportul semidreptei p. Presupunem că avem $s \neq q$. Sînt atunci posibile două cazuri: sau $s \subset \operatorname{Int} \widehat{pq}$, sau $s \subset \operatorname{Int} \widehat{rq}$. În primul caz, avem

$$\widehat{ps} < \widehat{pq} \equiv \widehat{qr} < \widehat{rs},$$

deci $\widehat{ps} < \widehat{rs}$. Dar unghiurile $\widehat{ps}$, $\widehat{rs}$ sînt suplementare. Deci, în cazul $s \subset \operatorname{Int} \widehat{pq}$, unghiul $\widehat{ps}$ nu este drept. La fel se arată că, nici, în cazul $s \subset \operatorname{Int} \widehat{rq}$, unghiul $\widehat{ps}$ nu este drept.

Rezultă că *dacă d, d', d'' sînt drepte coplanare și concurente într-un punct O, astfel încît d' și d'' sînt perpendiculare pe d, atunci $d' = d''$.*

Aplicații

1. *Existența unei perpendiculare, ce trece printr-un punct O, pe o dreaptă ce conține punctul O (într-un plan dat).*

Fie O un punct, d o dreaptă și p un plan, astfel ca $O \in d \subset p$. Vrem să arătăm că există o dreaptă d', astfel ca $O \in d' \subset p$ și d' să fie perpendiculară pe d. În acest scop, construim, într-un mod oarecare, un unghi drept $\widehat{hk}$ și construim apoi o semidreaptă s, cu originea O, astfel ca $s \subset p$ și astfel ca s să formeze, împreună cu una din semidreptele limitate de O pe d, un unghi congruent cu unghiul $\widehat{hk}$. În acest caz, unghiul format de s cu oricare din semidreptele limitate de O pe d va fi drept, deci suportul d' al lui s va fi o dreaptă perpendiculară pe d. Din $s \subset p$, $s \subset d'$ rezultă $O \in d' \subset p$.

2. *Existența unei perpendiculare ce trece printr-un punct O, pe o dreaptă ce nu conține punctul O (într-un plan dat).*

Fie date, într-un plan p, o dreaptă d și un punct $O \notin d$. Vom arăta că există o dreaptă d' în planul p, perpendiculară pe d și astfel ca $O \in d'$. Fie A, B două puncte oarecare pe d. Construim punctul Q, în semiplanul opus lui O față de d, astfel ca $\widehat{OAB} \equiv \widehat{QAB}$ și $|OA| \equiv |QA|$. Dreapta d intersectează segmentul $|OQ|$ într-un punct M, astfel încît triunghiurile OAM, QAM sînt congruente. Unghiurile $\widehat{OMA}$, $\widehat{QMA}$ fiind suplementare, rezultă că aceste unghiuri sînt și suplementare și congruente, deci sînt unghiuri drepte. Deci dreapta OQ este perpendiculară pe dreapta d. Avem $OQ \subset p$, deoarece $O \in p$ și $Q \in p$.

Notație. Dacă dreptele d, d' sînt perpendiculare, scriem $d \perp d'$.

Reamintim următoarele definiții:

Se numește *unghi obtuz* orice unghi mai mare decît un unghi drept.

Se numește *unghi ascuțit* orice unghi mai mic decît un unghi drept.

Se numește *triunghi dreptunghic* orice *triunghi*, care are un unghi drept. Latura opusă unghiului drept într-un triunghi dreptunghic se numește *ipotenuză*, iar celelalte două laturi se numesc *catete*.

Exerciții

1. *Orice triunghi are cel puțin două unghiuri ascuțite.*

2. *Un triunghi nu poate avea două unghiuri drepte.*

3. *Dacă d, d', d'' sînt drepte situate într-un plan p, astfel ca d' și d'' să fie perpendiculare pe d, atunci dreptele d', d'' sînt fie paralele, fie confundate.*

4. *Dacă triunghiul ABC este dreptunghic în A, atunci unghiurile $\hat{B}$, $\hat{C}$ sînt ascuțite.*

5. *În orice triunghi dreptunghic, catetele sînt mai mici decît ipotenuza.*

6. *Fie ABC un triunghi și fie punctul $A' \in BC$ astfel ca $AA' \perp BC$. Să se arate că dacă $A' \in |BC|$, atunci unghiurile $\hat{B}$, $\hat{C}$ sînt ascuțite; reciproc, dacă unghiurile $\hat{B}$, $\hat{C}$ sînt ascuțite, atunci $A' \in |BC|$.*

7. *Fie ABC un triunghi și fie $A' \in BC$ astfel ca $AA' \perp BC$. Ce relație de ordine există între punctele A', B și C, dacă unghiul $\hat{B}$ este obtuz?*

8. *Fie A, B, C, D patru puncte într-un plan, astfel ca $|BC| \equiv |AD|$ și $AD \perp AB$, $BC \perp AB$. Fie M mijlocul segmentului $|AB|$. Să se arate că:*

a) $\widehat{AMD} \equiv \widehat{CMB}$.

b) *Perpendiculara dusă prin M pe AB trece prin mijlocul N al segmentului $|CD|$.*

c) $\widehat{MDN} \equiv \widehat{MCN}$, $\widehat{ADC} \equiv \widehat{BCD}$.

d) *Dacă unghiul $\widehat{ADC}$ este drept, atunci și unghiul $\widehat{BCD}$ este drept.*

9. *Fie A, B, C, D patru puncte într-un plan p, astfel ca $AB \perp AD$, $AB \perp BC$, $CD \perp AD$ și $CD \perp BC$. Fie M mijlocul segmentului $|AB|$ și fie d dreapta dusă prin M, perpendiculară pe AB și conținută în planul p. Să se arate că:*

a) *Dreapta d intersectează segmentul $|CD|$ într-un punct N.*

b) *Triunghiurile AMN, BMN sînt congruente.*

c) *Unghiurile $\widehat{DAN}$, $\widehat{CBN}$ sînt congruente.*

d) *Triunghiurile ADN, BCN sînt congruente.*

e) $|AD| \equiv |BC|$.

f) $|AB| \equiv |CD|$.

12. Locuri geometrice

În geometria elementară, o mulțime de puncte caracterizate printr-o proprietate geometrică P se numește uneori *loc geometric*. Pentru a arăta că locul geometric al punctelor dintr-un plan p, care au proprietatea P, este o anumită mulțime M, trebuie să demonstrăm că:

1. Orice punct al mulțimii M are proprietatea P.
2. Orice punct din planul p, care are proprietatea P, aparține mulțimii M.

Enunțul 2 este echivalent cu:

2'. Dacă un punct Q din planul p nu aparţine mulţimii M, atunci Q nu are proprietatea P.

Vom da acuma un exemplu de determinare a unui loc geometric.

Fiind date două puncte distincte A, B într-un plan p, locul geometric al punctelor M din planul p, pentru care $|MA| \equiv |MB|$, este o dreaptă perpendiculară pe dreapta AB, trecînd prin mijlocul segmentului $|AB|$.

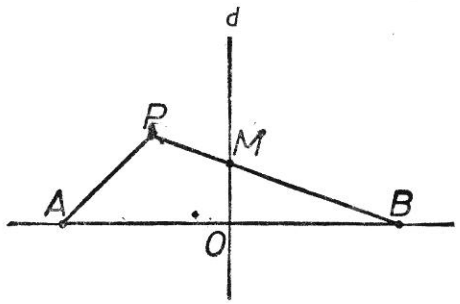

Fig. I.45

Demonstraţie. Fie O mijlocul segmentului $|AB|$ şi fie d perpendiculara dusă prin O pe dreapta AB. Dacă $M \in d$, considerînd triunghiurile dreptunghice OAM, OBM, arătăm că aceste triunghiuri sînt congruente şi deducem $|MA| \equiv |MB|$.

Fie acuma un punct $P \notin d$ (fig. I.45). Punctul P se va găsi în unul din semiplanele limitate de dreapta d. Pentru a fixa ideile, să presupunem că P se află în acelaşi semiplan cu A faţă de d. Atunci există punctul de intersecţie $M \in d \cap |BP|$. În triunghiul PAB avem

$$\widehat{PBA} \equiv \widehat{MBA} \equiv \widehat{MAB} < \widehat{PAB},$$

deci $|PB| > |PA|$.

În mod analog, se arată că orice punct Q, situat de aceeaşi parte cu B, faţă de dreapta d, verifică relaţia $|QA| > |QB|$. Rezultă că punctele dreptei d sînt singurele puncte din planul p, pentru care $|MA| \equiv |MB|$.

Definiţie. **Dreapta d, care trece prin mijlocul segmentului $|AB|$ şi care este perpendiculară pe dreapta AB, se numeşte mediatoarea segmentului $|AB|$. Dacă d este mediatoarea segmentului $|AB|$, se spune că A, B sînt puncte simetrice faţă de dreapta d.**

Definiţie. **Fie $\widehat{hk}$ un unghi propriu. Se numeşte bisectoare a unghiului $\widehat{hk}$ o semidreaptă avînd originea în vîrful unghiului $\widehat{hk}$, interioară acestui unghi şi care face unghiuri congruente cu semidreptele h, k** (fig. I.46).

Exerciţii

1. *Fie $\widehat{hk}$ un unghi propriu şi fie punctele $A \in h$, $B \in k$ astfel ca $|OA| \equiv |OB|$, O fiind vîrful unghiului $\widehat{hk}$. Fie M mijlocul segmentului $|AB|$. Atunci semidreapta $|OM$ este o bisectoare a unghiului $\widehat{hk}$* (fig. I.47).

(*Indicaţie.* Se observă că se formează triunghiurile dreptunghice congruente MOA, MOB, din care rezultă $\widehat{MOA} \equiv \widehat{MOB}$.)

2. *Orice unghi propriu are o singură bisectoare.*

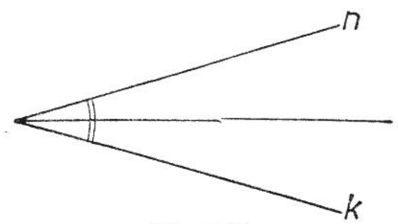

Fig. I.46

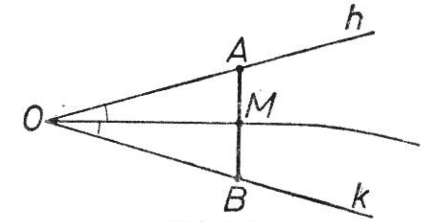

Fig. I.47

Fie b bisectoarea unghiului propriu $\widehat{hk}$ şi fie d, d' dreptele ce conţin semidreptele h, respectiv k. Fie punctele $M \in b$, $A \in d$, $B \in d'$ astfel ca $MA \perp d$ şi $MB \perp d'$. Atunci avem $|MA| \equiv |MB|$ şi $A \in h$, $B \in k$ (fig. I.48).

Demonstraţie. Unghiul $\widehat{bh}$ este ascuţit, fiind jumătatea unui unghi propriu. Fie A' un punct pe semidreapta opusă lui h. Atunci din teorema unghiului exterior aplicată triunghiului MOA' deducem $\widehat{MA'O} < \widehat{bh}$, deci şi $\widehat{MA'O}$ este un unghi ascuţit. Deci dreapta MA' nu poate fi perpendiculară pe dreapta d. Avem deci $A \in h$.

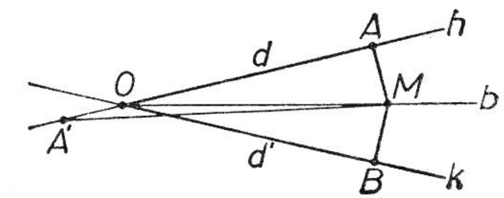

Fig. I.48

La fel se arată că $B \in k$.

Congruenţa $|MA| \equiv |MB|$ se demonstrează considerînd triunghiurile dreptunghice şi congruente AOM, BOM. Congruenţa acestor triunghiuri se obţine din teorema IV de congruenţă.

Vom reţine proprietatea astfel demonstrată sub forma:

Orice punct M situat pe bisectoarea unui unghi $\widehat{hk}$ este egal depărtat de laturile h, k ale acelui unghi.

Bisectoarele a două unghiuri opuse sînt în prelungire, iar bisectoarele a două unghiuri suplementare sînt perpendiculare.

Demonstraţie. Fie punctele O, A, A', B, B', M, M', M'' astfel ca

$\{O\} = |AA'| \cap |BB'| \cap |MM'|$, $\widehat{AOM} \equiv \widehat{BOM}$, $\widehat{AOM''} \equiv \widehat{B'OM}$ (fig. I.49).

Din teorema unghiurilor opuse rezultă că semidreapta $|OM'$ este bisectoarea unghiului $\widehat{A'OB'}$. De asemenea rezultă că avem $\widehat{MOA} \equiv \widehat{M'OB'}$. Ţinînd seama că avem şi $\widehat{AOM} \equiv \widehat{B'OM}$, deducem că $\widehat{MOM''} \equiv \widehat{M''OM'}$, deci dreptele OM'', OM sînt perpendiculare.

Fie A, B, C, D patru puncte astfel ca $AB \perp BC$ şi $C \in |BD|$. În aceste condiţii, avem $|AD| > |AC|$ (fig. I 50).

Demonstraţie. În triunghiul ACD avem $\widehat{ACD} > \widehat{ADC}$, deoarece $\widehat{ACD}$ este un unghi obtuz, iar $\widehat{ADC}$ este un unghi ascuţit. Deducem inegalitatea cerută.

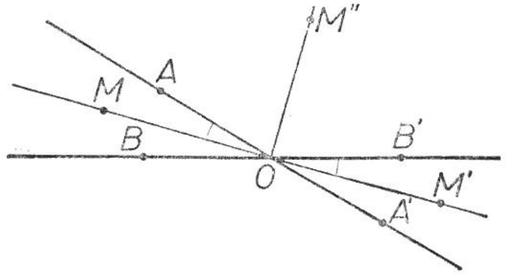

Fig. I.49

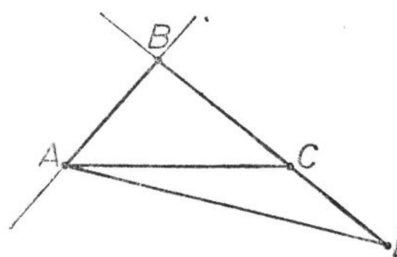

Fig. I.50

Dacă ABC, $A'B'C'$ sînt două triunghiuri dreptunghice în A și A', astfel ca $|AB| \equiv |A'B'|$ și $|BC| \equiv |B'C'|$, deci dacă cele două triunghiuri au două catete și ipotenuzele respectiv congruente, atunci ele sînt congruente (fig. I.51).

Demonstrație. Luăm pe semidreapta $|AC$ punctul C'' astfel ca $|AC''| \equiv |A'C'|$. Avem atunci $|BC''| \equiv |B'C'| \equiv |BC|$, deci $|BC''| \equiv |BC|$, $C'' = C$.

Fie $\widehat{hk}$ un unghi propriu cu vîrful O și fie I un punct interior unghiului $\widehat{hk}$. Considerăm punctele $A \in h$, $B \in k$ astfel ca $IA \perp h$, $IB \perp k$. Dacă $|IA| \equiv |IB|$, atunci $|OI$ este bisectoarea unghiului $\widehat{hk}$.

Demonstrație. Triunghiurile AOI, BOI sînt în condițiile proprietății precedente, deci avem $\widehat{AOI} \equiv \widehat{BOI}$. Prin urmare, $|OI$ este bisectoarea unghiului $\widehat{AOB} = \widehat{hk}$ (fig. I.52).

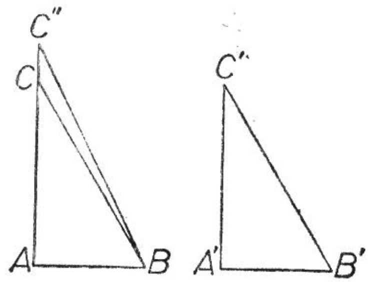

Fig. I.51

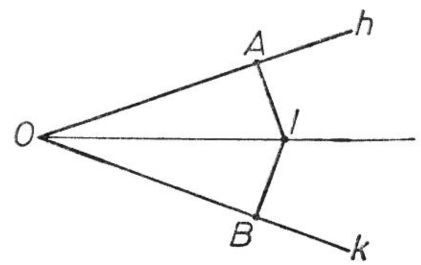

Fig. I.52

Bisectoarea unui unghi este locul geometric al punctelor I din interiorul unghiului, care sînt egal depărtate de laturile acelui unghi.

13. Postulatul lui Euclid

Am arătat că prin orice punct exterior unei drepte d se poate duce cel puțin o dreaptă paralelă la dreapta d.

Proprietățile enumerate pînă acuma nu sînt suficiente pentru a demonstra pe baza lor, că printr-un punct A trece o singură paralelă la o dreaptă d ce nu trece prin A. Demonstrarea unicității unei astfel de paralele a constituit mult timp o problemă centrală a matematicii. Rezolvarea definitivă a acestei probleme a fost dată în secolul trecut, prin cercetările lui *I.* Bolyai, N. Lobacevski, C. Gauss și B. Riemann.

Problema fusese formulată de geometrii Greciei antice, care au recunoscut imposibilitatea demonstrării unicității unei paralele printr-un punct la o dreaptă. Cel care a formulat corect problema și a arătat necesitatea introducerii unei axiome a fost Euclid.

După Euclid, un mare număr de matematicieni au încercat să demonstreze unicitatea paralelei printr-un punct la o dreaptă, dar astăzi știm că o astfel de demonstrație nu poate fi dată.

Vom admite deci, fără demonstrație:

Postulatul lui Euclid. Fiind date un punct A și o dreaptă d, care nu trece prin A, există o singură paralelă la dreapta d, care să treacă prin punctul A (fig. I.53).

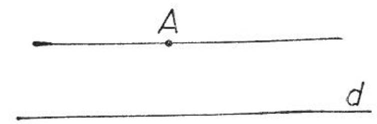

Fig. I.53

O primă consecință a postulatului lui Euclid este proprietatea următoare: *Dacă dreptele d', d'' sînt distincte și dacă fiecare din aceste drepte este paralelă cu o a treia dreaptă d, atunci d' este paralelă cu d''* (fig. I.54).

(*Indicație.* Se demonstrează prin reducere la absurd.)

Teorema unghiurilor corespondente și a unghiurilor alterne interne. Fie A, B, C, D, E, F **puncte distincte, astfel ca dreptele** AC, BD **să fie paralele, ca punctele** C, D **să fie în semiplane opuse față de dreapta** AB **și** $A \in |CF|$, $A \in |BE|$.

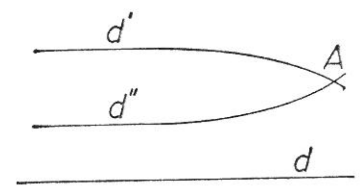

Fig. I.54

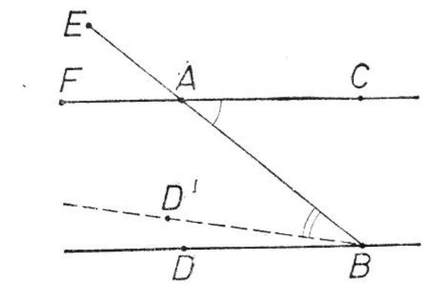

Fig. I.55

Avem atunci:

$$\widehat{EAF} \equiv \widehat{CAB} \equiv \widehat{DBA} \text{ (fig. I.55).}$$

Demonstrația se face prin reducere la absurd, folosind postulatul lui Euclid. Anume construim unghiul $\widehat{D'BA}$ astfel ca D' să fie de aceeași parte cu D față de AB și astfel ca $\widehat{D'BA} \equiv \widehat{CAB}$. Dreapta BD' va fi paralelă cu AC, deci va coincide cu BD.

Exerciţii

ÎMPORTANT !

1. *Fie A, B, C, D patru puncte distincte astfel ca $AC \parallel BD$ şi $AD \parallel BC$. Avem atunci* $|AC| \equiv |BD|$, $|AD| \equiv |BC|$ (fig. I.56).

2. *Dacă avem patru puncte distincte A, B, C, D astfel ca $AC \parallel BD$, $|AC| \equiv |BD|$* şi *astfel ca A, D să se găsească de aceeaşi parte a dreptei BC, atunci $AD \parallel BC$ şi $|AD| \equiv |BC|$.*

Indicaţie. Avem $D \in \text{Int}\, \widehat{ACB}$, $|AB| \cap CD \neq \emptyset$, $\widehat{ACD} \equiv \widehat{CDB}$, $ACD \equiv BDC$.

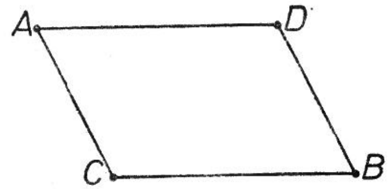

Fig. I.56

3. *Fiind date patru puncte A, B, C, D astfel încît $A \neq B$ şi C, D se găsesc în acelaşi semiplan faţă de dreapta AB şi astfel încît $\widehat{CAB} + \widehat{DBA}$ să fie un unghi mai mic decît un unghi alungit, semidreptele $|AC$ şi $|BD$ au un punct comun* (fig. I.57).

Indicaţie. Prin reducere la absurd.

4. *Fie $ABCD$ un paralelogram, avînd $AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$. Avem* (fig. I.58).

$$\widehat{CBA} \equiv \widehat{CDA}, \ |AB| \equiv |CD|, \ |AD| \equiv |BC|.$$

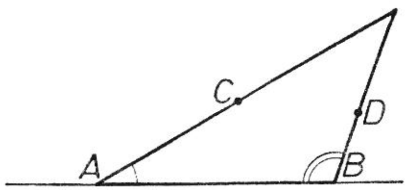

Fig. I. 57

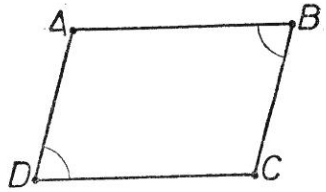

Fig. I.58

5. (*Teorema a doua a unghiului exterior.*) *În orice triunghi ABC, suplementul unui unghi este congruent cu suma celorlalte două unghiuri ale triunghiului.*

Astfel, în figura I.59, $\widehat{CAD} \equiv \widehat{ACB} + \widehat{ABC}$.

6. *Într-un triunghi oarecare, orice unghi exterior este congruent cu suma unghiurilor interioare neadiacente.*

7. *Suma unghiurilor interioare ale oricărui triunghi este congruentă cu un unghi alungit, sau cu suma a două unghiuri drepte.*

8. *Dacă două triunghiuri ABC, $A'B'C'$ au $\hat{A} \equiv \hat{A}''$, $\hat{B} \equiv \hat{B}''$, atunci $\hat{C} \equiv \hat{C}''$* (fig. I.60).

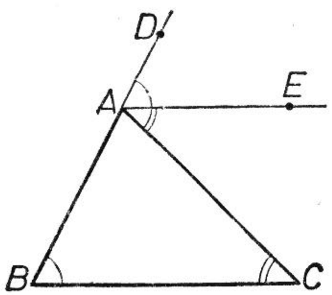

Fig. I.59

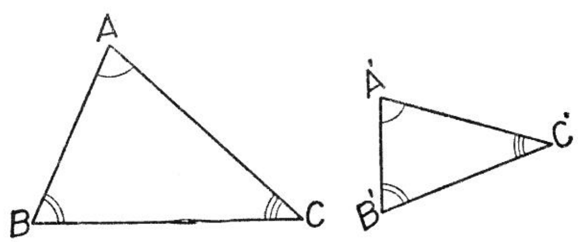

Fig. I.60

Teorema lui Thales restrînsă. *Fie d, d' două drepte distincte într-un plan şi fie punctele $A \in d$, $B \in d$, $C \in d$, $A' \in d'$, $B' \in d'$, $C' \in d'$ astfel ca $B \neq B'$, $C \neq C'$, $A \neq A'$, $AA' \parallel BB'$, $B \in |AC|$, $|AB| \equiv |BC|$.*

În aceste condiţii, avem $CC' \parallel BB'$ dacă şi numai dacă B' este mijlocul segmentului $|A'C'|$.

Demonstraţie. Să presupunem că $BB' \parallel CC' \parallel AA'$ (fig. I.61).

Ipotezele din enunţ arată că B este mijlocul segmentului $|AC|$. Să ducem prin punctele A', B' paralelele la dreapta d şi să notăm prin P, respectiv Q punctele în care aceste paralele intersectează dreapta BB', respectiv dreapta CC'. Din exerciţiul 4, pag. 40, deducem că triunghiurile $A'PB'$, $B'QC'$ sînt congruente, deci $|A'B'| \equiv |B'C'|$. Dreapta AA' fiind paralelă cu BB', punctele A, A' se găsesc în acelaşi semiplan faţă de dreapta BB'. La fel, punctele C, C' se găsesc într-un acelaşi semiplan faţă de BB'. Dar A, C se găsesc în semiplane opuse faţă de BB', deoarece $B \in |AC|$.

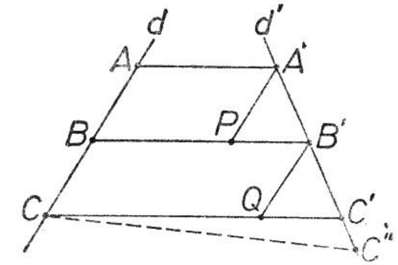

Fig. I.61

Relaţiile $B' \in |A'C'|$, $|A'B'| \equiv |B'C'|$ arată că B' este mijlocul segmentului $|A'C'|$.

Reciproc, să presupunem acuma că B' este mijlocul segmentului $|A'C'|$ şi să ducem dreapta d'', paralelă cu BB' şi trecînd prin punctul C. Dreapta d'' va intersecta dreapta d' într-un punct C'' astfel încît B' este mijlocul segmentului $|A'C''|$. Aceasta înseamnă că $B' \in |A'C''|$ şi $|A'B'| \equiv |B'C''|$. Dar şi punctul C' are aceste proprietăţi, adică $B' \in |A'C'|$ şi $|A'B'| \equiv |B'C'|$. Rezultă $C' = C''$, deci $CC' \parallel BB'$. Teorema este demonstrată.

Exerciţii

1. *Fie ABC, $A'B'C'$ două triunghiuri astfel ca $AB \parallel A'B'$, $|AB| \equiv |A'B'|$, $AC \parallel A'C'$ şi $BC \parallel B'C'$. Să se arate că cele două triunghiuri sînt congruente şi că dreptele AA', BB', CC' sînt paralele.*

2. *Să se reformuleze teorema lui Thales restrînsă, considerînd cazurile: $A = A'$; $B = B'$; $C = C'$.*

3. *Fiind dat un segment $|PQ|$, şi un număr natural $n > 1$, să se arate că există un segment $|AB|$, astfel ca $|PQ|$ să fie congruent cu suma $|AB| + |AB| + \ldots + |AB|$, conţinînd n segmente egale cu $|AB|$.*

4. *Să se arate că dacă a, b, a', b' sînt drepte astfel încît $a \perp a'$, $b \perp b'$, $a \cap b \neq \emptyset$, $a \neq b$, atunci $a' \cap b' \neq \emptyset$ şi $a' \neq b'$.*

Linii remarcabile într-un triunghi

1. Fie ABC un triunghi într-un plan p. Mediatoarele segmentelor $|AB|$, $|BC|$, $|CA|$ se numesc *mediatoarele* triunghiului ABC.

Teoremă. Mediatoarele unui triunghi oarecare sînt concurente.

Demonstrație. Fie p, q, r mediatoarele segmentelor $|BC|$, $|CA|$, $|AB|$ (fig. I.62). Dreptele p, q sînt secante, deoarece dacă p și q ar fi paralele, punctele A, C, B ar fi coliniare, ceea ce nu este adevărat, deoarece ABC este un triunghi. Fie atunci O punctul de intersecție al dreptelor p, q. Aceste drepte fiind mediatoarele segmentelor $|BC|$, $|AC|$, avem $|OA| \equiv |OC|$, $|OB| \equiv \equiv |OC|$, deci $|OA| \equiv |OB|$. Rezultă că O se află pe mediatoarea segmentului $|AB|$, deci $O \in r$. Deci $p \cap q \cap r = \{O\}$.

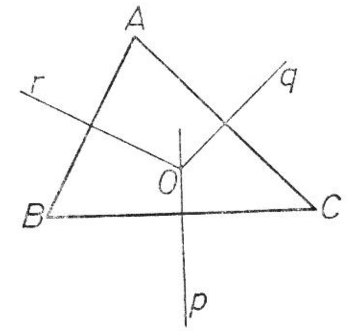

Fig. I.62

Reținem că punctul de intersecție O al mediatoarelor triunghiului ABC are proprietatea

$$|OA| \equiv |OB| \equiv |OC|.$$

2. Să considerăm acuma bisectoarele l, m, n ale unghiurilor $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ ale triunghiului ABC. Semidreptele l, m, n se numesc *bisectoarele* interioare sau bisectoarele triunghiului ABC (fig. I.63).

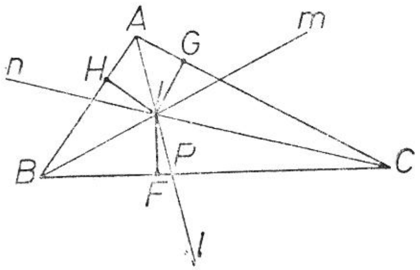

Fig. I.63

Teoremă. Bisectoarele unui triunghi oarecare sînt concurente.

Demonstrație. Bisectoarea l a unghiului $\hat{A}$ intersectează segmentul $|BC|$ într-un punct P, (fig. I.63) deoarece l este interioară unghiului $\hat{A}$ și segmentul $|BC|$ are extremitățile pe laturile unghiului $\hat{A}$. Apoi bisectoarea m a unghiului $\hat{B}$ intersectează segmentul $|AP|$ într-un punct I, din motive asemănătoare. Fie F, G, H picioarele perpendicularelor duse din I pe dreptele BC, CA, AB. Deci $F \in BC$, $G \in CA$, $H \in AB$ și $IF \perp BC$, $IG \perp CA$, $IH \perp AB$. Dintr-o proprietate cunoscută a bisectoarei unui unghi rezultă $|IH| \equiv |IG|$, $|IF| \equiv \equiv |IH|$, deci avem și $|IF| \equiv |IG|$. Punctul I este interior triunghiului ABC și avem $F \in |BC|$, $G \in |AC|$. Relațiile $|IF| \equiv |IG|$, $F \in |BC|$, $G \in |AG|$ arată că I se găsește pe bisectoarea unghiului $\hat{C}$, deci $\{I\} = = l \cap m \cap n$.

Exercițiu. Fie m', n' bisectoarele unghiurilor exterioare în B, C ale triunghiului ABC, și fie l bisectoarea unghiului $\hat{A}$. Dreptele l, m', n' sînt concurente.

Notă. În capitolul II se va arăta că punctul O de intersecție a mediatoarelor unui triunghi ABC este centrul cercului circumscris triunghiului ABC, iar punctul I de intersecție a bisectoarelor este centrul cercului înscris triunghiului ABC.

3. Fie ABC un triunghi. Notăm prin A' punctul în care perpendiculara dusă prin A pe dreapta BC intersectează dreapta BC. Dreapta AA' se numește *înălțimea* din A a triunghiului ABC, iar A' se numește piciorul acestei înălțimi.

Analog se definesc înălțimile BB', CC', avînd picioarele $B' \in AC$ respectiv $C' \in AB$. Folosind postulatul lui Euclid, se demonstrează:

Teoremă. Înălțimile AA', BB', CC' ale unui triunghi oarecare ABC sînt concurente (fig. I.64).

Demonstrație. Ducem prin punctele A, B, C paralelele u, respectiv v, w la dreptele BC, respectiv CA, AB. Notăm $\{A''\} = v \cap w$, $\{B''\} = u \cap w$, $\{C''\} = u \cap v$. Se formează paralelogramele $ABCB''$, $ACBC''$, $ABA''C$, din care rezultă $|AB''| \equiv |BC| \equiv |AC''|$, $|C''B| \equiv |AC| \equiv |A''B|$, $|A''C| \equiv \equiv |AB| \equiv |B''C|$. Rezultă deci că A, B, C sînt mijloacele laturilor $|B''C''|$, $|C''A''|$, $|A''B''|$ și atunci înălțimile AA', BB', CC' apar ca mediatoare ale triunghiului $A''B''C''$. Deci dreptele AA', BB', CC' sînt concurente.

Punctul de intersecție a înălțimilor unui triunghi se numește *ortocentru* al acelui triunghi și se notează de obicei prin H.

4. Să considerăm acuma mijloacele A'', B'', C'' ale segmentelor $|BC|$, $|CA|$, $|AB|$. Vom arăta că segmentele $|AA''|$, $|BB''|$, $|CC''|$ au un punct comun (fig. I.65).

Fie D mijlocul segmentului $|AB''|$. Din teorema lui Thales restrînsă rezultă că dreapta $C''D$ este paralelă cu BB''. Semidreapta $|BB''$ este interioară unghiului $\hat{B}$, deci intersectează segmentul $|AA''|$ într-un punct G. Dreapta AA'' va intersecta, din motive asemănătoare, segmentul $|BB''|$,

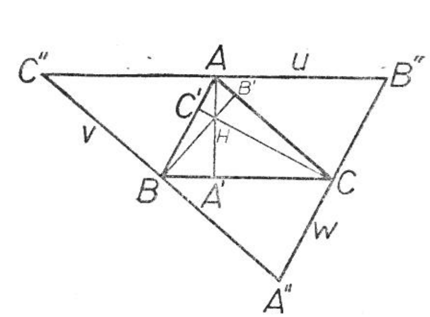

Fig. I.64

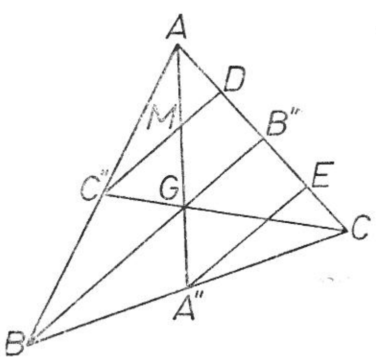

Fig. I.65

într-un punct, care nu poate fi decît G. Dreapta $C''D$ intersectează segmentul $|AG|$ într-un punct M, care este mijlocul segmentului $|AG|$. Fie E mijlocul segmentului $|B''C|$. Avem $|AD| \equiv |DB''| \equiv |B''E| \equiv |EC|$. Din teorema lui Thales restrînsă rezultă $|AM| \equiv |MG| \equiv |GA''|$; deci G împarte segmentul $|AA''|$ în raportul $|GA| / |A''G| = 2$, adică $|GA| \equiv 2 \cdot |A''G|$.

Procedînd în același fel, vom arăta că segmentul $|CC''|$ intersectează segmentul $|AA''|$ într-un punct, care împarte segmentul $|AA''|$ în același raport 2. Dar există un singur punct cu această proprietate. Deci segmentul $|CC''|$ conține punctul G. Aceasta înseamnă că

$$\{G\} = |AA''| \cap |BB''| \cap |CC''|.$$

Deci am demonstrat următoarea:

Teoremă. Segmentele care unesc vîrfurile unui triunghi oarecare cu mijloacele laturilor opuse au un punct comun.

Dreptele AA'', BB'', CC'' se numesc *medianele* triunghiului ABC, iar punctul lor de intersecție G se numește *centrul de greutate* sau *baricentrul* acestui triunghi.

Denumirea este legată de proprietatea fizică următoare:

Dacă avem o placă triunghiulară omogenă cu vîrfurile A, B, C, și dacă suspendăm această placă, alegînd ca punct de suspensie punctul G, atunci placa capătă poziție orizontală.

Mai general, dacă se aplică în punctele A, B, C ale plăcii trei forțe egale, paralele și de același sens cu o forță $\vec{F}$, și dacă se aplică, în același timp, în G, forța $-3\vec{F}$, atunci efectul celor patru forțe este nul.

Punctul G împarte triunghiul ABC în 6 triunghiuri [illegible] [illegible]!

Exerciții

1. *Să se arate că un patrulater $ABCD$, care verifică una oarecare din următoarele proprietăți, este un paralelogram:*

a. *Orice două laturi opuse în patrulaterul $ABCD$ sînt congruente;*

b. *Orice două unghiuri opuse în patrulaterul $ABCD$ sînt congruente;*

c. *Orice două laturi opuse în patrulaterul $ABCD$ sînt paralele;*

d. *Unul din unghiurile patrulaterului $ABCD$ este congruent cu suplementele celor două unghiuri vecine lui;*

e. *Două laturi opuse ale patrulaterului $ABCD$ sînt paralele și congruente;*

f. *Diagonalele patrulaterului $ABCD$ au același mijloc.*

2. *Fie $ABCD$ un trapez, cu $AB \parallel CD$ și fie M, N mijloacele laturilor $|BC|$, $|AD|$. Să se arate că $NM \parallel AB$ și $2\,|NM| \equiv |AB| + |CD|$.*

14. Măsurarea segmentelor

Fiind date două segmente $v = |AB|$ și $m = |EF|$, spunem că v este un *multiplu* al segmentului m, dacă există un număr natural p, astfel ca v să reprezinte suma a p segmente congruente cu m. Scriem în acest caz

$$v \equiv p \cdot m$$

Figura I.66 ilustrează cazul $p = 5$.

Vom spune că segmentul $w = |CD|$ este un *submultiplu* al segmentului m, dacă există un număr natural q, astfel ca $m \equiv q \cdot w$. Scriem atunci

$$w \equiv \frac{1}{q} \cdot m.$$

Figura I.67 ilustrează cazul $q = 3$.

Dacă u și w sînt segmente astfel încît există numere naturale p, q cu proprietatea

$$u \equiv p\left(\frac{1}{q} \cdot w\right).$$

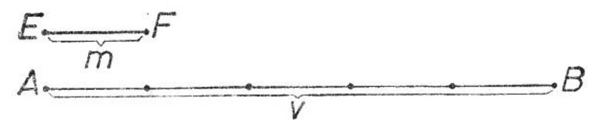

Fig. I.66

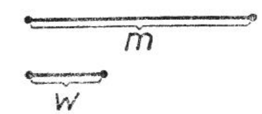

Fig. I.67

atunci spunem că segmentele u, w sînt *comensurabile* și scriem

(1) $$u \equiv \frac{p}{q} \cdot w \text{ sau } \frac{u}{w} = \frac{p}{q}.$$

Multiplii și submultiplii unui segment m sînt segmente comensurabile cu m.

Dacă sînt îndeplinite relațiile echivalente (1), spunem că u este congruent cu produsul dintre numărul rațional $\frac{p}{q}$ și segmentul w, sau că raportul dintre segmentul u și segmentul w este egal cu $\frac{p}{q}$. Vom mai spune că numărul $\frac{p}{q}$ reprezintă măsura segmentului u prin segmentul w sau că $\frac{p}{q}$ este *lungimea* segmentului u, măsurată cu ajutorul lui w.

Fiind dat un segment m, există segmente care nu sînt comensurabile cu m. De exemplu, *diagonala unui pătrat nu este comensurabilă cu laturile acelui pătrat.*

Ne propunem că definim raportul a două segmente arbitrare w și m. Acest raport va fi un număr rațional sau un număr real irațional.

Pentru a defini raportul unui segment w prin segmentul m, vom construi o *riglă gradată zecimal* (fig. I.68).

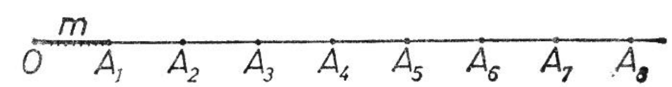

Fig. I.68

Fie s o semidreaptă avînd originea O. Pe semidreapta s construim punctele $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_p, A_{p+1}, \ldots$ astfel încît să avem

$$A_1 \in |OA_2|, \; A_2 \in |OA_3|, \ldots, A_p \in |OA_{p+1}|, \ldots$$

$$|OA_1| \equiv |A_1A_2| \equiv |A_2A_3| \equiv \ldots \equiv |A_pA_{p+1}| \equiv \ldots \equiv m.$$

Pentru orice punct $M \in |A_pA_{p+1}|$, spunem că p reprezintă *partea întreagă* a raportului dintre segmentul $|OM|$ și segmentul m.

Punctele $A_1, A_2, \ldots A_p, A_{p+1}, \ldots$ formează o *gradație de ordinul* 0 pe semidreapta s. Repetînd construcția făcută pentru a obține aceste puncte, dar considerînd, în locul segmentului m, un submultiplu $m_1 \equiv \frac{1}{10} m$, vom obține pe s o *gradație de ordinul* 1. În continuare, vom considera submultiplii zecimali succesivi $m_2 \equiv \frac{1}{10^2} m, \ldots, m_k \equiv \frac{1}{10^k} \cdot m, \ldots$ și vom defini pe s gradații de ordine 2, ..., k, ... Vom putea considera, pentru fiecare indice k, partea întreagă a raportului dintre $|OM|$ și segmentul m_k.

Dacă notăm prin p_k partea întreagă a raportului dintre segmentul $|OM|$ și segmentul m_k, avem

$$\frac{p}{1} \leqslant \frac{p_1}{10} \leqslant \frac{p_2}{10^2} \leqslant \frac{p_3}{10^3} \leqslant \ldots \leqslant \frac{p_k}{10^k} \leqslant \ldots$$

deoarece $m \equiv 10 \cdot m_1 \equiv 10^2 \cdot m_2 \equiv 10^3 \cdot m_3 \equiv \ldots \equiv 10^k \cdot m \ldots$ și deoarece trecerea de la o gradație la gradația următoare permite luarea în considerare a restului rămas, ceea ce implică $p_k \, m_k \geqslant p_{k-1} \equiv m_{k-1} \equiv$.

De exemplu, dacă m este un segment de un metru și dacă segmentul $|OM|$ are 3,213547 metri, atunci

$p = 3, \;\; p_1 = 32, \;\; p_2 = 321, \;\; p_3 = 3\,213, \;\; p_4 = 32\,135, \;\; p_5 = 321\,354,$
$p_6 = 3\,213\,547.$

Dacă segmentul $|OM|$ nu este comensurabil cu segmentul m, sau dacă $|OM|$ este congruent cu un segment de forma $\frac{p}{q} \cdot m$, unde p, q sînt numere naturale prime între ele, cu q divizibil prin 3 sau 7, atunci operația de măsurare a segmentului $|OM|$ prin m trebuie continuată la infinit, dacă vrem să obținem valoarea exactă a raportului lui $|OM|$ prin m.

Se spune că raportul $p_k/10^k$ reprezintă *aproximația de ordin k, prin lipsă*, a raportului $|OM|/m$.

Exercițiu. *Măsurînd un segment $|OM|$, s-au obținut valorile $p = 9$, $p_1 = 92$, $p_2 = 928$ $p_3 = 9284$, $p_4 = 92845$. Să se determine aproximația de ordinul 3, prin lipsă, a raportului $|OM|/m$.*

Din definiția raportului a două segmente rezultă următoarele proprietăți:

1. *Dacă u, v, w sînt segmente astfel încît w reprezintă suma segmentelor u și v, deci dacă $w \equiv u + v$, atunci avem, oricare ar fi segmentul m,*

$$\frac{u}{m} + \frac{v}{m} = \frac{w}{m}.$$

2. *Dacă u, u', m, m' sînt segmente astfel încît $u \equiv u'$ și $m \equiv m'$, atunci*

$$\frac{u}{m} = \frac{u'}{m'}.$$

3. *Oricare ar fi segmentul u, avem*

$$\frac{u}{u} = 1.$$

4. *Oricare ar fi segmentul u și oricare ar fi numărul real pozitiv x, există un segment w, astfel încît*

$$\frac{w}{u} = x.$$

Se spune atunci că w reprezintă produsul numărului x prin segmentul u și se scrie $w \equiv x \cdot u$.

5. *Dacă w, w' și u sînt segmente astfel încît $\frac{w}{u} = \frac{w'}{u}$, atunci $w \equiv w'$.*

6. *Oricare ar fi segmentele u, v, w, avem*

$$\frac{u}{v} \cdot \frac{v}{w} = \frac{u}{w}, \quad \frac{u}{v} \cdot \frac{v}{u} = 1, \quad \frac{u/w}{v/u} = \frac{u}{v}.$$

7. *Oricare ar fi segmentul u și oricare ar fi numerele reale pozitive x și y, avem*

$$x \cdot (y \cdot u) \equiv (xy) \cdot u, \;\; (x + y) \cdot u \equiv x \cdot u + y \cdot u.$$

Exerciții

1. *Dați exemple de perechi de segmente comensurabile.*

2. *Arătați că două segmente comensurabile cu al treilea sînt comensurabile între ele.*

3. *Fiind date segmentele $u = 3{,}5\,w$, $v \equiv 1{,}5\,w$, arătați că există un segment s, astfel încît u și v să fie congruente cu anumiți multipli întregi ai segmentului s. Indicați un segment s, care să fie congruent sau mai mare decît orice alt segment avînd proprietatea indicată.*

4. *Fiind date două segmente comensurabile u și v, arătați că există un segment s, astfel încît u si v să fie congruente cu anumiți multipli întregi ai segmentului s și s să fie multiplu întreg al oricărui segment s', care este un submultiplu comun al segmentelor u și v.*

5. *Fie A, B, C, D patru puncte astfel ca $B \in |AC|$ și $C \in |AD|$. Arătați că sînt adevărate următoarele inegalități:*

a) $\frac{|AB|}{|AD|} < 1, \; \frac{|AB|}{|BD|} < \frac{|AC|}{|CD|}, \; \frac{|AC|}{|AD|} > \frac{|BC|}{|BD|}.$

6. *Fiind dat un segment $|AB|$, să se construiască punctele M, N și P, aparținînd acestui segment, astfel încît să avem*

$$\frac{|AN|}{|BN|} = \frac{1}{3}, \quad \frac{|AN|}{|BM|} = \frac{3}{5}, \quad \frac{|AP|}{|BP|} = 7.$$

7. *Fie A, B, C, D puncte astfel ca $B \in |AD|$ și $C \in |AD|$. Să se arate că dacă $\frac{|AB|}{|BD|} = \frac{|AC|}{|CD|}$, atunci $B = C$.*

Aplicație. Fie u, v, w trei segmente și fie x, y, a, b patru numere reale astfel ca

$$v \equiv au \equiv yw, \quad u \equiv xw \equiv bv, \quad y = \frac{v}{w}, \quad a = \frac{v}{u}, \quad x = \frac{u}{w}, \quad b = \frac{u}{v}.$$

Avem atunci

$$v \equiv (ax)w \equiv (ab) \cdot v, \quad u \equiv (by) \cdot w$$

și rezultă că avem $y = ax$, $ab = 1$, $by = x$. Aceste relații arată că, *oricare ar fi segmentele* u, v, w, *avem:*

$$\frac{v}{u}\,\frac{u}{w} = \frac{v}{w}, \quad \frac{v}{u}\,\frac{u}{v} = 1, \quad \frac{v}{u} : \frac{w}{u} = \frac{v}{w}.$$

Aplicație. Fiind date un segment $|AB|$ *și un număr pozitiv* k, *există un singur punct* $M \in |AB|$ *astfel ca* $|MA| \equiv k \cdot |MB|$ *sau*

$$\frac{|MA|}{|MB|} = k.$$

Demonstrație. Să punem, pentru un punct $P \in |AB|$,

$$x = \frac{|PA|}{|AB|}, \quad y = \frac{|PB|}{|AB|}.$$

Avem atunci

$$x + y = 1, \quad \frac{x}{y} = \frac{|PA|}{|PB|}.$$

Rezultă că dacă alegem numerele x și y astfel ca să avem

$$x + y = 1, \quad x = ky,$$

și dacă luăm pentru M acel punct de pe segment $|AB|$, pentru care

$$|MA| \equiv x \cdot |AB|;$$

atunci vom avea $|MA| \equiv k \cdot |MB|$.

Exercițiu. *Fiind date două puncte distincte* A, B *și un număr real pozitiv* $k \neq 1$ *să se arate că există un singur punct* N *pe dreapta* AB, *dar exterior segmentului* $|AB|$, *astfel ca* $|NA| \equiv k \cdot |NB|$.

Elevii vor reține următoarea:

Teoremă fundamentală. **Fie $s = |OA$ o semidreaptă. Dacă asociem fiecărui număr real pozitiv x acel punct M al semidreptei s, pentru care avem $|OM| \equiv x \cdot |OA$, obținem o corespondență bijectivă de la mulțimea numerelor reale pozitive la mulțimea punctelor semidreptei s, astfel încît relațiile**

$$|OM| \equiv x \cdot |OA|, \quad |ON| \equiv y \cdot |OA|$$

implică

$$\frac{|OM|}{|ON|} = \frac{x}{y}.$$

15. Axiomele de continuitate (texte facultative).

Am văzut că segmentele pot fi adunate și pot fi comparate. Suma a două segmente este o *clasă* de segmente congruente. Dacă fixăm o semidreaptă s cu originea O, atunci putem asocia fiecărui segment $|AB|$ un singur segment $|OM|$ astfel ca $|OM| \equiv |AB|$ și $M \in s$. Suma a două segmente $|AB|$, $|CD|$ poate fi reprezentată în mod unic printr-un segment $|PO|$, unde $P \in s$. Rezultă că în mulțimea segmentelor $|OM|$, cu $M \in s$, se poate introduce o lege de compunere internă, considerînd adunarea segmentelor. De asemenea, în aceeași mulțime avem o relație de ordine. Aceste observații arată că există o analogie între segmente și numere. Dar știm că există mai multe feluri de numere. Astfel am întîlnit pînă acuma numere pozitive, numere negative, numere întregi, numere raționale, numere reale, numere complexe. În matematica superioară se construiesc și alte tipuri de numere. Se pune atunci întrebarea:

Care tip de numere prezintă o analogie mai strînsă cu segmentele și cît de departe merge această analogie?

În cadrul geometriei experimentale, răspunsul la această întrebare nu a fost încă dat, datorită aspectelor încă necunoscute privind structura materiei. Într-adevăr, concepția atomistă asupra materiei arată că un segment material nu poate fi divizat oricît de mult. Dar concepția atomistă este astăzi depășită, datorită descoperirii particulelor ce intră în componența atomilor.

Geometria joacă un rol de seamă, atît în cercetările privind structura materiei, cît și în aplicațiile tehnice, care folosesc segmente de mărimi perceptibile. În ambele cazuri, este necesară o abstractizare a noțiunii de segment, așa cum am mai subliniat. Cînd se compară însă segmentele cu numerele, gradul de abstractizare cere un efort mai mare, deoarece numerele sînt mai abstracte decît figurile. De aceea vă cerem și vouă o atenție mai mare.

Măsurarea distanțelor sau a lungimii segmentelor este o operație necesară în toate domeniile activității practice. Fizicianul și chimistul evaluează distanțe între atomii unei molecule sau între moleculele unui gaz sau ale unui corp solid. Inginerii măsoară grinzi, pereți, șosele, poduri, piesele unui aparat sau ale unei mașini. Astronomii măsoară distanțe între planete sau între stele sau galaxii. Fiecare din acești lucrători folosește o anumită unitate de măsură și fiecare dintre ei urmărește un anumit grad de precizie. Odată o unitate de măsură aleasă, apare necesitatea utilizării unităților fracționare, sau a *submultiplilor* acelei unități de măsură.

Să presupunem că un fizician vrea să exprime în ani lumină ststanța între doi atomi ai unei molecule. El va folosi fracții zecimale cu foarte multe cifre. În general numărul acestor cifre crește, dacă vom efectua operații cu numerele obținute. Vedem că numărul cifrelor ce compun o fracție zecimală nu poate fi limitat. Sîntem deci conduși a considera fracții zecimale cu un număr nelimitat de cifre. Astfel s-a ajuns la noțiunea de *număr real*, ca fracție zecimală cu o infinitate de zecimale, pentru a exprima *măsura* unui segment, raportat la un segment fix, ales ca unitate de măsură.

Reamintim că un *număr real pozitiv sau nul* este dat de o *sumă infinită* de forma

$$x = n + a_1 \cdot 10^{-1} + a_2 \cdot 10^{-2} + \dots + a_k \cdot 10^{-k} + \dots \tag{1}$$

unde n este un număr întreg pozitiv sau nul, iar $a_1, a_2, \dots, a_k, \dots$ sînt *cifre*, adică au fiecare una din valorile 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Dacă pentru o expresie (1) există un indice r astfel ca $a_r < 9$ și $a_s = 9$ pentru orice $s > r$, atunci se convine a se identifica expresia (1) cu numărul real

$$x = n + a_1 \cdot 10^{-1} + \dots + (a_r + 1) \cdot 10^{-r} + 0 \cdot 10^{-r-1} + 0 \cdot 10^{-r-2} + \dots \tag{2}$$

Suma (1) se reprezintă prin simbolul $n, a_1a_2\dots a_k\dots$ și se spune că n este partea întreagă a lui x, iar $a_1, a_2, \dots, a_k\dots$ sînt zecimalele numărului real x.

De asemenea, se convine să se identifice expresiile de forma

$$x = n + a_1 \cdot 10^{-1} + \ldots + a_k \cdot 10^{-k} + 0 \cdot 10^{-k-1} + 0 \cdot 10^{-k-2} + \ldots \tag{3}$$

cu numerele *raționale*

$$x = n + a_1 \cdot 10^{-1} + \ldots + a_k \cdot 10^{-k}. \tag{4}$$

Reamintim de asemenea că orice număr rațional poate fi reprezentat printr-o sumă de forma (1). Numerele a_k din această exprimare vor avea atunci o particularitate remarcabilă; există pentru fiecare număr rațional două numere naturale r, s astfel ca cifrele a_k din scrierea zecimală a acelui număr rațional au proprietatea de *periodicitate*:

$$\text{pentru } k > r,\ a_{k+s} = a_k. \tag{5}$$

De exemplu, $\frac{4}{7} = 0{,}571428571428\ldots$ are $r = 0$ și $s = 6$.

Reciproc, orice număr real (1) cu proprietatea (5) reprezintă scrierea zecimală a unui număr rațional. Exemplu: $0{,}12533\ldots3\ldots = \frac{376}{3\,000}$.

Numerele reale se adună și se înmulțesc, făcînd adunări și înmulțiri ale sumelor (1) corespunzătoare și grupînd termenii rezultați, în așa fel încît să obținem sume de forma (1). Exemple: $0{,}11\ldots1\ldots + 0{,}33\ldots3\ldots = 0{,}44\ldots$; $3 \times 0{,}33\ldots3\ldots = 1$.

Orice număr real poate fi aproximat prin numere raționale, cu o precizie oricît de mare vrem. De exemplu, dacă aproximăm numărul real (1) prin suma primilor săi $k + 1$ termeni, atunci eroarea făcută este mai mică decît 10^{-k} și eroarea se face *prin lipsă*. Dacă se ia însă suma primilor $k + 1$ termeni, la care se adaugă 10^{-k}, atunci se obține o aproximare cu o eroare de cel mult 10^{-k} *prin adaus*.

Ne propunem acuma să folosim numerele reale pentru a defini *raportul a două segmente* și *produsul unui număr real cu un segment*. Aceste operații ne vor permite să stabilim o corespondență bijectivă între mulțimea numerelor reale pozitive și mulțimea punctelor semidreptei s, astfel ca ordonarea numerelor reale să corespundă ordonării segmentelor de pe s, avînd o extremitate în originea semidreptei s.

Proprietățile date pînă acuma nu sînt suficiente pentru a obține aceste construcții. Numerele reale au două proprietăți importante:

1. *Fiind date două numere reale pozitive x și a, există un număr natural n, astfel ca să avem $x < na$.*

2. *Fiind date două șiruri de numere reale $(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ $(y_1, y_2, y_3, \ldots)$ astfel ca*

$$x_1 < x_2 < \ldots x_h < x_{h+1} < \ldots < y_{h+1} < y_h < \ldots < y_2 < y_1,$$

există cel puțin un număr a astfel ca să avem

$$x_i < a < y_j$$

pentru orice indici i și j. Numărul a, ce verifică această condiție, este unic, dacă diferențele $y_k - x_k$ tind către zero, deci dacă aceste diferențe devin mai mici decît orice număr pozitiv dat, cînd k este ales suficient de mare.

Aceste proprietăți sînt consecințe ale definiției numerelor reale.

Proprietățile geometrice analoage acestor proprietăți ale numerelor reale se exprimă prin următoarele axiome, numite *axiomele de continuitate*:

Axioma lui Arhimede. Dacă A, P sînt două puncte ale unei semidrepte s, cu originea O, există pe s o mulțime finită de puncte $\{A_2, A_3, \ldots, A_k\}$ astfel încît să fie verificate proprietățile (fig. I.69):

$$A \in |OA_2|,\ A_2 \in |OA_3|, \ldots,\ A_i \in |OA_{i+1}|, \ldots, A_{k-1} \in |OA_k|,$$
$$|OA| \equiv |AA_2| \equiv |A_2A_3| \equiv \ldots \equiv |A_iA_{i+1}| \equiv \ldots \equiv |A_{k-1}A_k|,\ P \in |OA_k|.$$

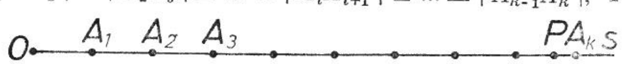

Fig. I.69

Axioma lui Arhimede mai poate fi formulată în modul următor:

Fiind date pe semidreapta s două puncte A, P, există cel puțin un număr natural k, astfel ca să avem $|OP| < k\,|OA|$.

Axioma lui Cantor-Dedekind. Fiind date pe o dreaptă d două șiruri de puncte $A_1, A_2, \ldots A_i, A_{i+1}, \ldots$ și $B_1, B_2, \ldots B_i, B_{i+1}, \ldots$ astfel ca, pentru orice indice i, segmentul $[A_{i+1}B_{i+1}]$ să fie conținut în segmentul $[A_iB_i]$, există cel puțin un punct P, situat pe fiecare din segmentele $[A_1B_1], [A_2B_2], \ldots [A_iB_i], [A_{i+1}B_{i+1}], \ldots$ (fig. I.70).

Fig. I.70

Fiind dat un punct A_1 pe semidreapta s, avînd originea O, să asociem lui A_1 șirul de puncte $A_2, A_3, \ldots, A_n, \ldots$ aparținînd lui s și definite prin relațiile (6), (fig. I.71).

Fig. I.71

$$\begin{aligned} &A = A_1 \in |OA_2|,\ A_n \in |A_{n-1}A_{n+1}|,\ n = 2, 3, \ldots \\ &|OA_1| \equiv |A_1A_2| \equiv |A_2A_3| \equiv \ldots \equiv |A_{n-1}A_n| \equiv \ldots \end{aligned} \tag{6}$$

În acest caz, segmentul $|OA_n|$ reprezintă suma a n segmente congruente cu segmentul $|OA|$. Vom scrie

$$|OA_n| \equiv n \cdot |OA| \tag{7}$$

și vom spune că $|OA_n|$ este *produsul* dintre numărul natural n și segmentul $|OA|$.

Fie k un număr natural. Folosind teorema lui Thales restrînsă, se poate defini punctul B_k de pe semidreapta s, pentru care (fig. I.72)

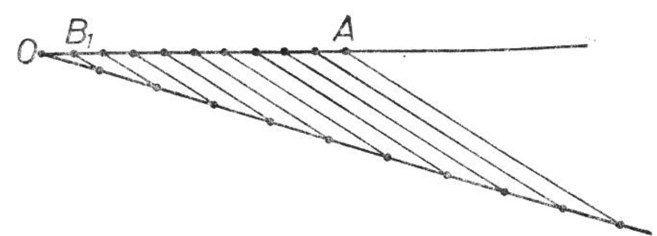

Fig. I.72

$$|OA| = 10^k \cdot |OB_k|. \tag{8}$$

Vom spune că $|OB_k|$ reprezintă *cîtul* împărțirii segmentului $|OA|$ prin 10^k sau *produsul* dintre numărul rațional 10^{-k} și segmentul $|OA|$. Vom scrie

$$|OB_k| = 10^{-k} \cdot |OA|.$$

Să considerăm *segmentele semiinchise*

$$[A_nA_{n+1}| = |A_nA_{n+1}| \cup \{A_n\},\ n = 1, 2, \ldots,$$

unde $A_1 = A$. Din formulele (6) rezultă că mulțimile $[A_nA_{n+1}|$ sînt disjuncte două cîte două și că avem egalitatea

$$[OA_n| = |OA| \cup [AA_2| \cup [A_2A_3| \cup \ldots \cup [A_{n-1}A_n| \tag{9}$$

pentru orice număr natural n.

Dacă P este un punct oarecare al semidreptei s, axioma lui Arhimede ne asigură că există cel puțin un număr natural n, astfel ca $P \in |OA_{n+1}|$. Dacă n este cel mai mic număr natural cu această proprietate, vom avea

$$P \in [A_nA_{n+1}],$$

unde convenim să notăm

$$A_0 = O, \; A_1 = A.$$

Punctul P fiind un punct arbitrar pe semidreapta s, rezultă că avem egalitatea de mulțimi

(11) $$s = |A_0A_1| \cup [A_1A_2| \cup [A_2A_3| \cup \ldots \cup [A_iA_{i+1}| \cup \ldots$$

și această egalitate este adevărată pentru orice punct $A \in s$, cu condiția să definim punctele A_i prin formulele arătate anterior.

Dacă $P \in [A_n\,A_{n+1}|$, vom spune că segmentul $|A_0A_1|$ se cuprinde de n ori în segmentul $|A_0P|$; n este un număr întreg pozitiv sau nul. Dacă $P = A_n$ putem scrie

$$|A_0P| \equiv |A_0A_n| \equiv n \cdot |A_0A_1|.$$

Dacă $P \in |A_nA_{n+1}|$, avem

(12) $$|A_0P| \equiv |A_0A_n| + |A_nP| \equiv n \cdot |A_0A_1| + |A_nP|,$$

unde

(13) $$|A_nP| < |A_0A_1|.$$

Fie $P_1 \in |A_0A_1|$ acel punct al segmentului $|A_0A_1|$, pentru care avem

(14) $$|A_0P_1| \equiv |A_nP| \text{ (fig. 1.73).}$$

Demonstrație foarte importantă ce arată că un număr poate fi reprezentat pe o dreaptă.

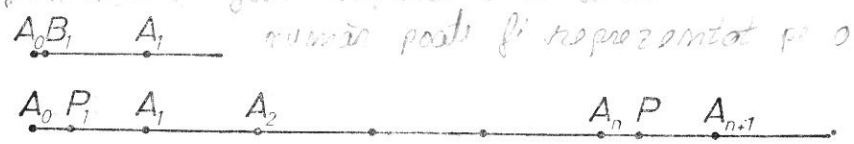

Fig. 1.73

Să presupunem că segmentul $|A_0B_1|$ se cuprinde de a_1 ori în segmentul $|A_0P_1|$, deci că avem

(15) $$|A_0P_1| \geqslant a_1 \cdot |A_0B_1|, \quad |A_0P_1| < (a_1 + 1) \cdot |A_0B_1|.$$

Folosind formula

(16) $$|A_0B_1| \equiv 10^{-1} \cdot |A_0A_1|$$

și formula (12), vom putea scrie

(17) $$|A_0P| \equiv n \cdot |A_0A_1| + a_1 \cdot 10^{-1} \cdot |A_0A_1| + |A_0P_2|,$$

unde $|A_0P_2|$ este un segment mai mic decît segmentul $|A_0B_1|$, sau este *segmentul nul*, reprezentat prin $|A_0A_0|$, dacă

(18) $$|A_0P| \equiv n \cdot |A_0A_1| + a_1 \cdot 10^{-1} \cdot |A_0A_1|.$$

Din relațiile (13), (14), (15) rezultă că a_1 este o cifră, deci că are una din valorile 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Să presupunem acuma că segmentul $|A_0B_2|$ se cuprinde de a_2 ori în segmentul $|A_0P_2|$. Vom avea atunci relațiile

$$|A_0P_2| \equiv a_2 \cdot |A_0B_2| + |A_0P_3|$$

$$0 \leqslant a_2 \leqslant 9, \quad |A_0P_3| < |A_0B_2|, \quad |A_0B_2| \equiv 10^{-2} \cdot |A_0A_1|.$$

Deducem din (17) relația

$$|A_0P| \equiv n \cdot |A_0A_1| + a_1 \cdot 10^{-1} \cdot |A_0A_1| + a_2 \cdot 10^{-2} \cdot |A_0A_1| + |A_0P_3|.$$

Putem scrie ultima relație sub forma

$$|A_0P| \equiv (n + a_1 \cdot 10^{-1} + a_2 \cdot 10^{-2}) \cdot |A_0A_1| + |A_0P_3|, \quad |A_0P_3| < |A_0B_2|.$$

Procedeul poate fi continuat, exprimînd segmentul $|A_0P_3|$ cu ajutorul segmentului $|A_0B_3|$ și al unui *rest* $|A_0P_4|$, care va fi mai mic decît segmentul $|A_0B_3|$. După k operații de acest fel, ajungem la o relație de forma

(19) $$|A_0P| \equiv (n + a_1 \cdot 10^{-1} + \ldots + a_k \cdot 10^{-k}) \cdot |A_0A_1| + |A_0P_{k+1}|,$$

unde $a_1, a_2, \ldots, a_k$ sînt cifre, iar $|A_0P_{k+1}|$ este un segment mai mic decît segmentul $|A_0B_k| \equiv 10^{-k} \cdot |A_0A_1|$, putînd fi segmentul nul, dacă nu apare rest după cele k operații.

Rezultă că, dacă punctul A este fixat pe semidreapta s, fiecărui punct $P \in s$ i se asociază un număr real,

(20) $$x = n + a_1 \cdot 10^{-1} + \ldots + a_k \cdot 10^{-k} + \ldots$$

astfel încît să avem, pentru orice număr natural k, o relație (19).

Definiție. **Se spune că numărul real x, definit prin (19 și 20) reprezintă, abscisa punctului P, față de punctul A, pe semidreapta s; x se mai numește raportul segmentului $|OP|$ prin segmentul $|OA|$ și se scrie $x = |OP| / |OA|$ sau $|OP| \equiv x \cdot |OA|$.**

Fie k cel mai mare număr întreg, pentru care avem

(21) $$10^k \cdot |A_0P| \leqslant |A_0A_1|.$$

Vom avea

$$|A_0P| \leqslant 10^{-k} \cdot |A_0A_1|, \quad |A_0P| > 10^{-k-1} \cdot |A_0A_1|.$$

Există un număr natural k, pentru care relația (21) nu este adevărată. Într-adevăr, din axioma lui Arhimede rezultă că, pentru N suficient de mare, avem $N |A_0P| > |A_0A_1|$.

Rezultă că abscisa (20) a punctului $P \in s$ are cel puțin un coeficient n sau a_k diferit de zero. Deci:

Abscisa oricărui punct P de pe semidreapta s este un număr real diferit de zero.

Fie P, Q două puncte pe semidreapta s, astfel ca $P \in |A_0Q|$ (fig. 1.74). Din axioma lui Arhimede deducem că există un indice k, astfel ca

$$10^k |PQ| > |A_0A_1| \text{ sau } |PQ| > 10^{-k} |A_0A_1|.$$

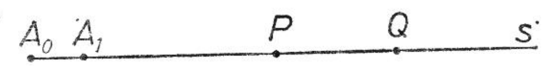

Fig. 1.74

Rezultă că dacă notăm prin x și y abscisele punctelor P, Q, atunci avem $x < y$. Deci am arătat că relația $P \in |A_0Q|$ implică $x < y$. Aceasta arată că:

Abscisele a două puncte distincte de pe o semidreaptă s sînt două numere reale pozitive distincte.

Reținem că punctul A_n are abscisa n, iar punctul B_k are abscisa 10^{-k}; în particular, $A_1 = A$ are abscisa 1, iar B_1 are abscisa 10^{-1}.

În acest fel, *am construit o aplicație injectivă de la mulțimea s la mulțimea numerelor reale pozitive.*

Se pune problema de a vedea dacă această aplicație este și surjectivă. Vom arăta că răspunsul este afirmativ.

Pentru a arăta că aplicația construită este surjectivă, trebuie să arătăm că fiecărui număr real pozitiv x i se poate asocia un punct M pe semidreapta s, astfel că x să fie abscisa lui M, deci astfel ca $|OM| \equiv x \cdot |OA|$.

Să presupunem că x are expresia (1). Pentru fiecare indice natural k, să notăm prin M_k punctul semidreptei s, care are proprietatea

(23) $$|OM_k| \equiv n \cdot |OA| + a_1 \cdot |OB_1| + a_2 \cdot |OB_2| + \dots + a_k \cdot |OB_k|.$$

Să considerăm apoi punctele $N_k \in s$, pentru care avem

(24) $$|ON_k| \equiv |OM_k| + |OB_k|.$$

Avem relațiile

$$|OM_k| \equiv |OM_{k-1}| + a_k \cdot |OB_k|,$$

$$|ON_k| \equiv |OM_k| + |OB_k| \equiv |OM_{k-1}| + (a_k + 1)\,|OB_k|$$

$$|ON_{k-1}| \equiv |OM_{k-1}| + |OB_{k-1}| \equiv |OM_{k-1}| + 10 \cdot |OB_k|.$$

Din aceste relații rezultă că avem, pentru orice număr natural k,

(25) $$|OM_{k-1}| \leqslant |OM_k| < |ON_k| \leqslant |ON_{k-1}|.$$

Avem de asemenea

(26) $$|M_kN_k| \equiv |OB_k| \equiv \cdot 10^{-k} \cdot |OA|.$$

Relațiile (25), (26) arată că punctele M_k, N_k sînt în condițiile aplicării axiomei lui Cantor-Dedekind. Aceasta înseamnă că există un unic punct M, comun tuturor segmentelor $[M_kN_k]$.

Fie u abscisa punctului M. Din relațiile

$$|OM_k| < |OM| < |ON_k|$$

deducem că avem, pentru orice indice k,

(27) $$x_k < u < x_k + 10^{-k},$$

unde am notat prin x_k abscisa punctului M_k, deci x_k este suma primilor $k + 1$ termeni din suma infinită (1). Formula (27) arată că $u = x$, deci abscisa punctului M este numărul dat x.

Figura 1.75 ilustrează cazul $n = 1$, $a_1 = 3$ și $a_2 = 8$.

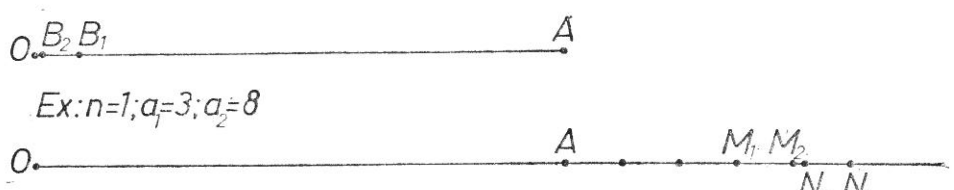

Fig. 1.75

În concluzie:

Dacă fixăm un punct A pe o semidreaptă s, avînd originea O, și dacă asociem fiecărui număr real pozitiv x acel punct $M \in s$, pentru care $|OM| \equiv x \cdot |OA|$ obținem o aplicație bijectivă de la mulțimea $\mathbb{R}_+^*$ a numerelor reale pozitive pe mulțimea s.

Proprietățile produsului unui număr real pozitiv cu un segment.

Dacă $u = |OA|$ este un segment și dacă m, n sînt numere naturale, avem

$$(m + n) \cdot u \equiv m \cdot u + n \cdot u, \quad (mn) \cdot u \equiv m \cdot (n \cdot u) \text{ (fig. I.76)}$$

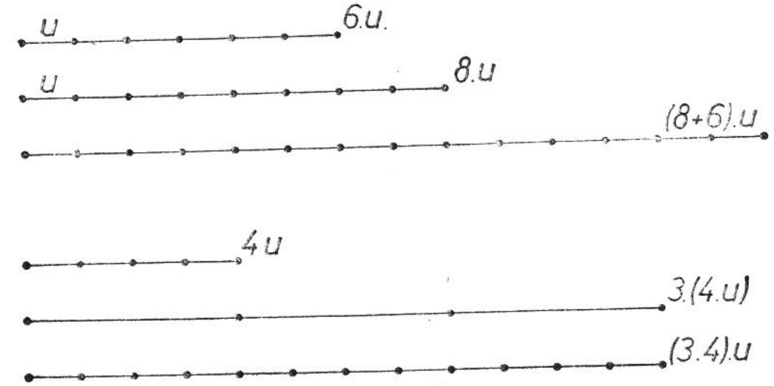

Fig. I.76

Fie $u_k = 10^{-k} \cdot u$ și fie k, r, s numere naturale. Putem scrie

$$(m \cdot 10^{-r} + n \cdot 10^{-s}) \cdot u \equiv (m \cdot 10^{-r} + n \cdot 10^{-s}) \cdot (10^{r+s} \cdot u_{r+s}) \equiv (m \cdot 10^s + n \cdot 10^r) \cdot u_{r+s} \equiv$$
$$\equiv m \cdot 10^s \cdot u_{r+s} + n \cdot 10^r \cdot u_{r+s} \equiv m \cdot u_r + n \cdot u_s \equiv m \cdot 10^{-r} \cdot u + n \cdot 10^{-s} \cdot u.$$

În mod analog se demonstrează că

$$(m \cdot 10^{-s} \cdot n \cdot 10^{-r}) \cdot u \equiv m \cdot 10^{-r} \cdot ((n \cdot 10^{-s}) \cdot u).$$

Combinînd aceste egalități, deducem că dacă x_k este un număr real avînd cel mult k zecimale nenule și dacă y_h este un număr real avînd cel mult h zecimale nenule, atunci

$$(x_k + y_h) \cdot u \equiv x_k \cdot u + y_h \cdot u, \quad (x_k \cdot y_h) \cdot u \equiv x_k \cdot (y_h \cdot u).$$

În general, se demonstrează următoarea

Teoremă. Pentru orice segment u și orice numere reale pozitive x, y avem

$$\boxed{(x + y) \cdot u \equiv x \cdot u + y \cdot u, \quad (xy) \cdot u \equiv x \cdot (y \cdot u).}$$

Demonstrația se face aproximînd numerele x, y prin numere x_k, y_h avînd k, respectiv h zecimale diferite de zero.

Fie $u = |OA|$, $v = |OB|$ și fie m un număr natural. Avem evident

$$m \cdot (u + v) \equiv m \cdot u + m \cdot v \text{ (fig. I.77).}$$

Procedînd cum s-a arătat mai sus, putem demonstra formula

(28) $$\boxed{x \cdot (u + v) \equiv x \cdot u + x \cdot v}$$

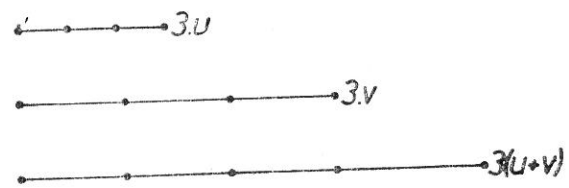

Fig. I.77

pentru orice număr x de forma $m \cdot 10^{-r}$. Formula se extinde apoi la cazul unui număr real pozitiv x arbitrar. Deci:

Teoremă. Pentru orice număr real pozitiv x şi pentru orice segmente u, v are loc egalitatea (28).

16. Măsurarea unghiurilor

Pentru a defini măsura unui unghi, vom folosi unghiul drept ca etalon, împărţirea unui unghi oarecare în două unghiuri congruente cu ajutorul bisectoarei şi scrierea numerelor reale sub forma

(1) $$x = x_0 + x_1 \cdot 2^{-1} + x_2 \cdot 2^{-2} + \dots + x_k \cdot 2^{-k} + \dots = (x_0, x_1 x_2 \dots)_2,$$

unde x_0 este un număr întreg, iar $x_1, x_2, \dots, x_k, \dots$ sînt egale fiecare cu 0 sau cu 1. Dacă x aparţine intervalului închis $[0, 1]$, atunci x_0 este de asemenea egal cu 0 sau cu 1. Scrierea (1) se numeşte *scriere binară* şi se deosebeşte de scrierea zecimală prin faptul că puterile negative ale lui 10 sînt înlocuite prin puterile negative ale lui 2. Exemplu: $\frac{1}{5} = (0,001100\dots)_2$.

Fie $D = \widehat{hk}$ un unghi drept şi fie m bisectoarea unghiului D. Se formează unghiurile $D_0 = \widehat{hm}$, $D_1 = \widehat{mk}$ (fig.I.78).

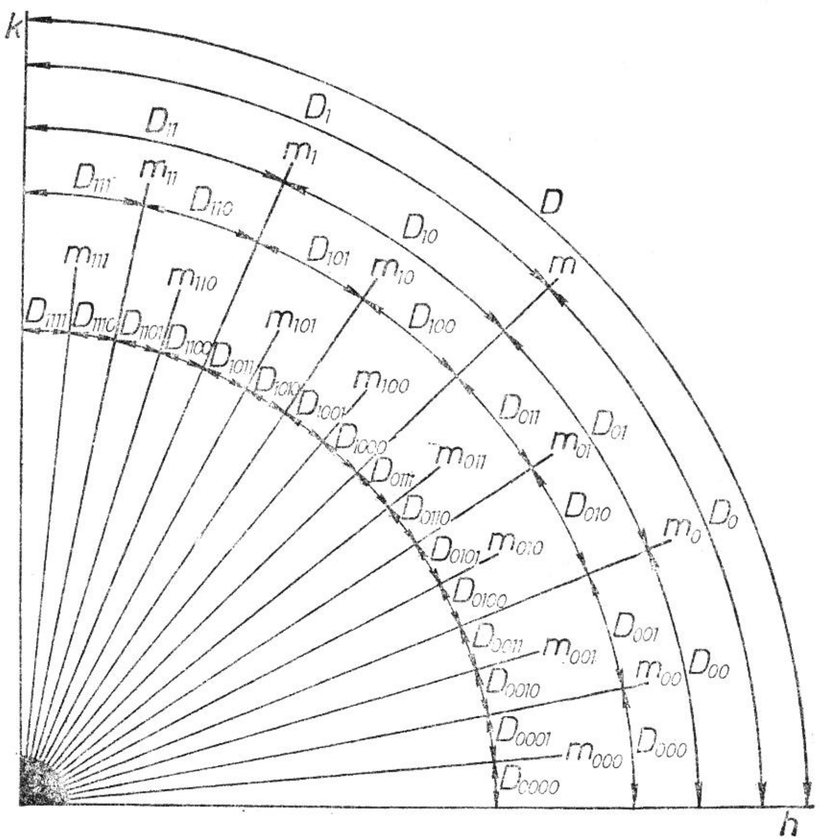

Fig. I.78

Fie m_0, m_1 bisectoarele unghiurilor D_0 respectiv D_1. Se formează unghiurile

$$D_{00} = \widehat{hm_0},\ D_{01} = \widehat{m_0 m},\ D_{10} = \widehat{mm_1},\ D_{11} = \widehat{m_1 k}.$$

Notăm prin m_{ij} bisectoarea unghiului D_{ij}, pentru $i, j = 0$ sau 1. Semidreapta m_{ij} este latură la două unghiuri: unul, conţinut în unghiul $\widehat{hm_{ij}}$, al doilea conţinut în unghiul $\widehat{m_{ij}k}$. Primul din aceste unghiuri va fi notat D_{ij0} iar al doilea va fi notat D_{ij1}. Continuînd acest procedeu, obţinem un sistem de unghiuri

$$D_{i_1 i_2 \dots i_r}; \qquad i_1, \dots, i_r \in \{0, 1\},$$

şi de semidrepte $m_{i_1 \dots i_{r-1}}$, astfel încît:

1. Unghiul D este congruent cu $2^r \cdot D_{i_1 \dots i_{r-1}}$, oricare ar fi indicii $i_1, \dots, i_r$.

2. $m_{i_1 \dots i_{r-1}}$ este bisectoarea unghiului $D_{i_1 \dots i_{r-1}}$ şi este latură la fiecare din unghiurile $D_{i_1 \dots i_{r-1} 0}$, $D_{i_1 \dots i_{r-1} 1}$.

3. Semidreapta $m_{j_1 \dots j_r}$ este interioară unghiului format de h şi de $m_{i_1 \dots i_r}$ dacă şi numai dacă există un număr natural $s \leqslant r$ astfel ca

(2) $$j_1 = i_1,\ j_2 = i_2,\ \dots,\ j_{s-1} = i_{s-1},\ j_s < i_s.$$

Această condiţie este echivalentă cu relaţia

$$i_1 \cdot 2^{-1} + i_2 \cdot 2^{-2} + \dots + i_r \cdot 2^{-r} > j_1 \cdot 2^{-1} + \dots + j_r \cdot 2^{-r}.$$

Numărul sistemelor de indicii $(j_1, \dots, j_r)$, care verifică relaţiile (2) este egal cu $i_s \cdot 2^{r-s}$, deoarece există i_s valori posibile pentru j_s şi cîte două valori posibile pentru fiecare din indicii $j_{s+1}, \dots, j_r$.

4. Unghiurile $D_{i_1 \dots i_r}$ sînt congruente între ele, pentru fiecare indice r fixat.

Exerciţii

1. *Să se completeze figura 1.78 cu semidreptele $m_{i_1 \dots i_r}$, unde $r \leqslant 6$. Să se noteze unghiurile formate din cîte două semidrepte succesive din semidreptele desenate.*

2. *Să se reprezinte pe figură unghiurile*

$$D_0,\ D_{00},\ D_{000},\ D_1,\ D_{10},\ D_{11},\ D_{111},\ D_{1111}.$$

Să ne propunem acum să măsurăm un unghi ascuţit dat $U = \widehat{hs}$, unde s este o semidreaptă interioară unghiului D.

Dacă $s = m$, punem măs $U = 2^{-1}$.

Dacă $s = m_0$, punem măs $U = 2^{-2}$.

Dacă $s = m_1$, punem măs $U = 2^{-1} + 2^{-2}$.

În general dacă

$$s = m_{i_1 \dots i_r}$$

punem

(3) $$\text{măs } \widehat{hm_{i_1 \dots i_r}} = i_1 \cdot 2^{-1} + i_2 \cdot 2^{-2} + \dots + i_r \cdot 2^{-r} + 2^{-r-1}.$$

Definiţia măsurii unghiului

(4) $$U_{i_1 \dots i_r} = \widehat{hm_{i_1 \dots i_r}}$$

ține seama de faptul că acest unghi reprezintă suma acelor unghiuri $D_{j_1 j_2 \dots j_r}$, pentru care indicii $j_1, \dots, j_r$ se găsesc în una din situațiile:

1. $j_1 < i_1$, $j_2 = 0$ sau 1, $j_3 = 0$ sau 1, ..., $j_r = 0$ sau 1 (fig. 1.79),

2. $j_1 = i_1$, $j_2 < i_2$, $j_3 = 0$ sau 1, ..., $j_r = 0$ sau 1 (fig. 1.80).

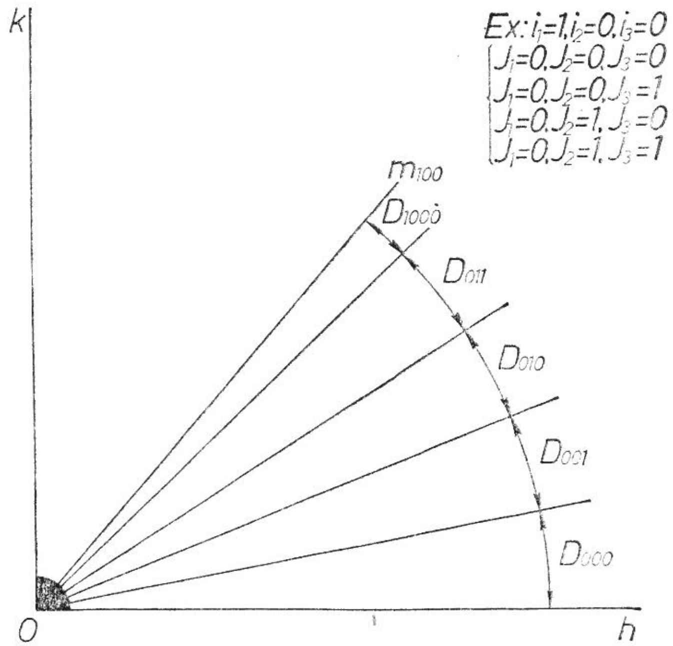

Fig. 1.79

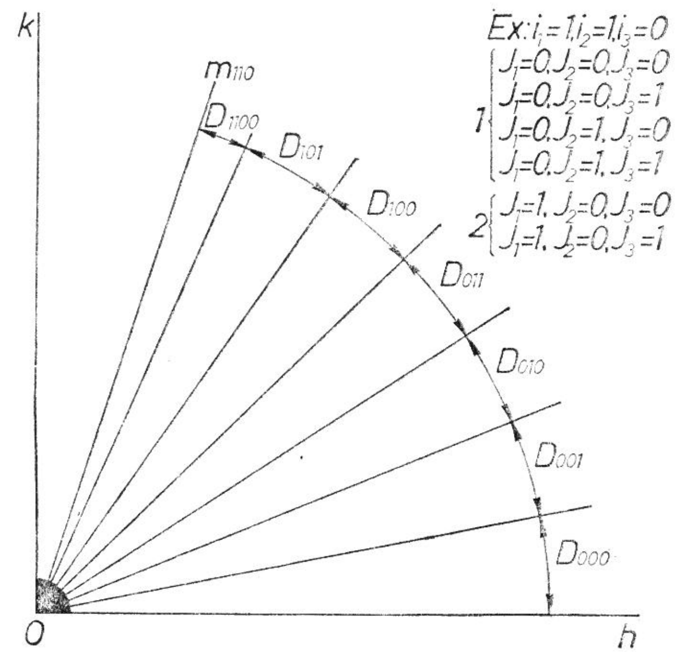

Fig. 1.80

3. $j_1 = i_1,\ j_2 = i_2,\ j_3 < i_3,\ j_4 = 0$ sau $1, \dots, j_r = 0$ sau $1,$

. . . .

$r - 1 \cdot j_1 = i_1,\ j_2 = i_2,\ \dots,\ j_{r-2} = i_{r-2}\ j_{r-1} < i_{r-1}\ j_r = 0$ sau $1,$

$r \cdot j_1 = i_1,\ j_2 = i_2,\ \dots,\ j_{r-1} = i_{r-1},\ j_r < i_r,$

și a unghiului $D_{i_1 \dots i_r 0}$. Avem $2^{r-k} i_k$ unghiuri de tipul k, pentru $k = 1, 2, \dots, r$, fiecare avînd măsura 2^{-r}; măsura unghiului $D_{i_1 \dots j_r 0}$ este 2^{-r-1}. Suma măsurilor acestor unghiur va fi

$$2^{-r}(i_1 \cdot 2^{r-1} + i_2 \cdot 2^{r-2} + \dots + i_{r-1}\, 2 + i_r) + 2^{-r-1}$$

deci coincide cu suma din (3).

Dacă $U = \widehat{hs}$ este un unghi arbitrar conținut în unghiul D, alegem, pentru fiecare indice r, acea bisectoare $m_{i_1} \dots i_r$, pentru care semidreapta s este interioară unghiului $U_{i_1} \dots i_r$ sau este o latură a acestui unghi și pentru care suma (3) are valoarea minimă. Punem atunci

$$\text{măs}_r(U) = i_1 \cdot 2^{-1} + i_2 \cdot 2^{-2} + \dots + i^r \cdot 2^-{}_r.$$

Numărul rațional măs$_r$ (U) va fi numit *aproximația de ordin r* a măsurii unghiului U. Cînd se trece de la aproximația de ordin r la aproximația de ordin $r + 1$, coeficienții $i_1, \dots, i_r$ rămîn neschimbați și se adaugă un termen

$$i_{r+1} \cdot 2^{-r-1},$$

unde i_{r+1} este 0 sau 1. Rezultă că prin considerarea aproximațiilor succesive ale măsurii unghiului U se obține un număr real bine determinat

$$i_1 \cdot 2^{-1} + i_2 \cdot 2^{-2} + \dots + i_r \cdot 2^{-r} + \dots$$

care va fi prin definiție *măsura unghiului* ascuțit U.

Dacă unghiul U este obtuz, considerăm unghiul $U_1 = 2^{-1} \cdot U$, obținut cu ajutorul bisectoarei lui U, și definim

$$\text{măs}\,U = 2 \cdot \text{măs}\,U_1.$$

Exerciții

1. *Să se arate care sînt măsurile următoarelor unghiuri:*

$$U_0,\ U_1,\ U_{00},\ U_{01},\ U_{10},\ U_{11},\ U_{010},\ U_{111},\ U_{1111}.$$

2. *Să se arate care din următoarele două unghiuri este mai mare decît celălalt*

$$D_{111} \text{ sau } D_0?$$

3. *Să se arate că dacă unghiul U reprezintă suma unghiurilor U', U", atunci* măsU = măsU' + măsU''.

4. *Să se arate că dacă* $U' < U$, *atunci* măs$U' <$ măsU.

În definiția măsurii unui unghi dată mai sus, am presupus că unghiul drept D are măsura 1.

În practică se folosesc însă alte moduri de măsurare a unghiurilor, care se deduc din definiția noastră prin înmulțire cu cîte un factor.

Astfel, pentru a obține măsura unui unghi în *radiani*, înmulțim numărul măsU prin $\pi/2$, ceea ce corespunde faptului că un unghi drept are $\pi/2$ radiani.

Pentru a obține măsura unui unghi U în *grade sexagesimale*, înmulțim numărul măsU prin 90, ceea ce corespunde faptului că măsura unghiului drept, în grade sexagesimale, este 90°.

Exerciţii

1. *Să se exprime în radiani şi apoi în grade sexagesimale măsurile următoarelor unghiuri:*

$$D_0,\ D_1,\ D_{010},\ U_{01},\ U_{101},\ U_{000},\ U_{11101}.$$

2. *Folosind identitatea*

$$1 - x^{n+1} = (1 - x)(1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n)$$

să se calculeze sumele

$$2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3} + \dots + 2^{-n},$$

$$4^{-1} + 4^{-2} + 4^{-3} + \dots + 4^{-n},$$

şi să se deducă scrierea binară a numerelor 1/3, 2/3, 4/3.

3. *Să se exprime măsura unui unghi al unui triunghi echilateral, în scriere binară, în radiani şi în grade sexagesimale.*

4. *Care este măsura în grade sexagesimale şi apoi în radiani, a unghiului D_0? Dar a unghiului U_{010}?*

Să se dea o formulă generală pentru măsurile unghiurilor $U_0, U_{00}, U_{000}, U_{0000}, \dots$ şi apoi pentru măsurile unghiurilor $U_1, U_{11}, U_{111}, U_{1111}, \dots$.

17. Teorema lui Thales

Să începem prin a demonstra următoarea:

Teoremă. Fie OAA' un triunghi şi fie $s = |OA$, $s' = |OA'$ laturile unghiului $\widehat{AOA'}$. Să presupunem că punctele $M \in s$, $M' \in s'$ sînt astfel încît

$$\frac{|OM|}{|OA|} = \frac{|OM'|}{|OA'|}.$$

În acest caz, dreptele AA', MM' sînt paralele (fig. I.81).

Demonstraţie. Fie x numărul real, pentru care avem $|OM| = x \cdot |OA|$. Ipoteza din enunţ arată că avem şi $|OM'| = x \cdot |OA'|$. Să presupunem că

$$x = n,\ a_1a_2a_3\dots a_k\dots$$

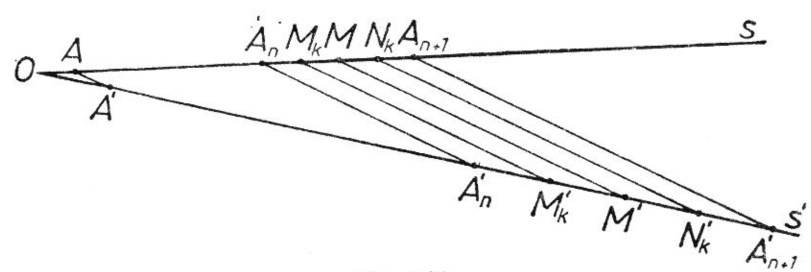

Fig. I.81

şi să notăm prin $x_k = n,\ a_1\dots a_k$ aproximarea zecimală prin lipsă, de ordinul k, a numărului x. Considerăm punctele $M_k \in s$, $M'_k \in s'$ date de

$$|OM_k| = x_k \cdot |OA|,\quad |OM'_k| = x_k \cdot |OA'|.$$

Fie apoi $y_k = x_k + 10^{-k}$ şi fie punctele $N_k \in s$, $N'_k \in s'$ date de

$$|ON_k| = y_k \cdot |OA|,\quad |ON'_k| = y_k \cdot |OA'|.$$

Din teorema lui Thales restrînsă rezultă că avem

$$M_kM'_k \parallel N_kN'_k \parallel AA',$$

oricare ar fi indicele $k = 1, 2, 3, \dots$. Pentru orice k avem

$$x_k \leqslant x < y_k,$$

deci

$$M \in [M_kN_k],\quad M' \in [M'_kN'_k].$$

Fie L_k banda închisă limitată de dreptele paralele $M_kM'_k$, $N_kN'_k$ şi fie M'' punctul de intersecţie al semidreptei s' cu paralela dusă prin M la AA'. Avem $M \in L_k$, deci $MM'' \subset L_k$, oricare ar fi k. Deci $M'' \in L_k \cap s' = [M'_kN'_k]$. Dar M' este singurul punct comun segmentelor $[M'_1N'_1], [M'_2N'_2], \dots, [M'_kN'_k], \dots$. Rezultă $M'' = M'$, deci $MM' \parallel AA'$.

Proprietatea demonstrată admite următoarea reciprocă:

Teoremă. Dacă M, M' sînt două puncte situate pe laturile unui unghi propriu $\widehat{AOA'}$, astfel ca $M \in |OA$, $M' \in |OA'$ şi astfel ca $MM' \parallel AA'$, atunci avem

$$\frac{|OM|}{|OA|} = \frac{|OM'|}{|OA'|}.$$

Demonstraţie. Fie $x = \frac{|OM|}{|OA|}$ şi fie punctul $M'' \in |OA'$ dat de relaţia $|OM''| = x \cdot |OA'|$. Avem atunci, potrivit proprietăţii precedente, $MM'' \parallel AA'$. Dar prin punctul M se poate duce o singură paralelă la dreapta AA'. Avem deci $MM'' = MM'$. Rezultă $\{M'\} = MM' \cap (|OA') = MM'' \cap (|OA') = \{M''\}$, deci $|OM'| = x \cdot |OA'|$, sau $\frac{|OM'|}{|OA'|} = x = \frac{|OM|}{|OA|}$.

Cele două proprietăţi pot fi strînse într-un singur enunţ, sub forma următoare.

Teorema lui Thales. Fie $\widehat{ss'}$ un unghi propriu cu vîrful O şi fie punctele distincte $A \in s$, $M \in s$, $A' \in s'$, $M' \in s'$. În aceste condiţii, dreptele AA' şi MM' sînt paralele dacă şi numai dacă rapoartele $\frac{|OM|}{|OA|}$, $\frac{|OM'|}{|OA'|}$ sînt egale.

Aceasta este una din teoremele cele mai importante ale matematicii, avînd numeroase aplicații. Să dăm o primă aplicație:

Teoremă. Fie ABC, $A'B'C'$ două triunghiuri astfel ca $\hat{A} \equiv \hat{A}'$, $\hat{B} \equiv \hat{B}'$, $\hat{C} \equiv \hat{C}'$. Atunci, (fig. I.82):

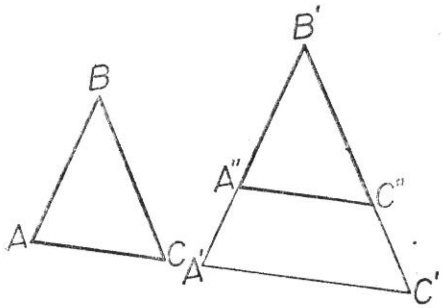

Fig. I.82

(1) $$\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|BC|}{|B'C'|} = \frac{|CA|}{|C'A'|}.$$

Demonstrație. Vom demonstra egalitatea primelor două rapoarte. În acest scop, considerăm punctele $A'' \in |B'A'$, $C'' \in |B'C'$ astfel ca $|B'A''| \equiv |BA|$ și $|B'C''| \equiv |BC|$. Triunghiurile BAC, $B'A''C''$ sînt congruente, în virtutea teoremei I de congruență.

Rezultă $\widehat{B'A''C''} \equiv \widehat{BAC} \equiv \widehat{B'A'C'}$, deci avem $A''C'' \parallel A'C'$. Din teorema lui Thales deducem

$$\frac{|A''B'|}{|A'B'|} = \frac{|B'C''|}{|B''C'|} \text{ sau } \frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|BC|}{|B'C'|}.$$

Egalitatea ultimelor două rapoarte din (1) se demonstrează în mod analog.

Corolar. În condițiile teoremei lui Thales, avem

$$\frac{|OM|}{|OA|} = \frac{|OM'|}{|OA'|} = \frac{|MM'|}{|AA'|}.$$

Demonstrație. Triunghiurile OMM', OAA' au unghiul $\hat{O}$ comun și $\hat{M} \equiv \hat{A}$, $\hat{M}' \equiv \hat{A}'$.

Teoremă. Fie ABC, $A'B'C'$ două triunghiuri astfel ca

$$\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|BC|}{|B'C'|} = \frac{|CA|}{|C'A'|}.$$

Avem atunci $\hat{A} \equiv \hat{A}'$, $\hat{B} \equiv \hat{B}'$, $\hat{C} \equiv \hat{C}'$ (fig. I.82).

Demonstrație. Considerăm punctele $A'' \in |B'A'$, $C'' \in |B'C'$ astfel ca

$$\frac{|A''B'|}{|A'B'|} = \frac{|C''B'|}{|C'B'|} = x,$$

unde x este valoarea comună a rapoartelor din enunț. Atunci vom avea

$$A''C'' \parallel A'C', \quad |A''B'| \equiv |AB|, \quad |B'C''| \equiv |BC|.$$

Din Corolar deducem

$$\frac{|A''C''|}{|A'C'|} = x,$$

deci $|A''C''| \equiv x \cdot |A'C'| \equiv |AC|$. Rezultă că triunghiurile ABC, $A''B'C''$ sînt congruente. Avem deci $\hat{B} \equiv \hat{B}'$, $\hat{A} \equiv \hat{A}'' \equiv \hat{A}'$, $\hat{C} \equiv \hat{C}'' \equiv \hat{C}'$.

Reamintim următoarea

Definiție. Două triunghiuri ABC, $A'B'C'$ se numesc asemenea, dacă $\widehat{A} \equiv \widehat{A'}$, $\widehat{B} \equiv \widehat{B'}$, $\widehat{C} \equiv \widehat{C'}$ și dacă $\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|BC|}{|B'C'|} = \frac{|CA|}{|C'A'|}$.

Din proprietățile demonstrate mai sus, desprindem următoarele *criterii de asemănare*:

I. *Pentru ca triunghiurile ABC, $A'B'C'$ să fie asemenea, este suficient să avem* $\hat{A} \equiv \hat{A}'$, $\hat{B} \equiv \hat{B}'$, $\hat{C} \equiv \hat{C}'$.

(Ținînd seama că suma unghiurilor unui triunghi este congruentă cu suma a două unghiuri drepte, va fi suficient ca două din cele trei relații de congruență de unghiuri să fie verificate.)

II. *Pentru ca triunghiurile ABC, $A'B'C'$ să fie asemenea, este suficient să avem* $\hat{A} \equiv \hat{A}'$ *și* $\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|AC|}{|A'C'|}$.

III. *Pentru ca triunghiurile ABC, $A'B'C'$ să fie asemenea, este suficient să avem* $\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|BC|}{|B'C'|} = \frac{|CA|}{|C'A'|}$.

Aplicație. Teorema bisectoarei. Fie AA', $A' \in |BC|$, bisectoarea unghiului $\widehat{A}$ în triunghiul ABC. Avem (fig. I.83)

(2) $$\frac{|A'B|}{|A'C|} = \frac{|AB|}{|AC|}.$$

Demonstrație. Paralela dusă prin punctul B la bisectoarea $|AA'$ intersectează dreapta AC într-un punct D astfel ca $A \in |CD|$. Din $AA' \parallel BD$ rezultă $\widehat{BDA} \equiv \widehat{A'AC}$.

Avem prin urmare $\widehat{ADB} \equiv \widehat{ABD} \equiv \frac{1}{2}\hat{A}$.

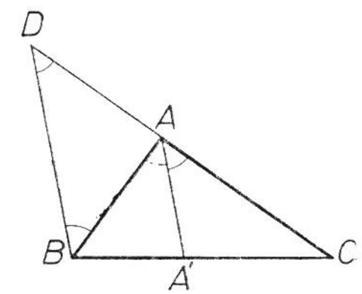

Fig. I.83

Din teorema a doua a triunghiului isoscel deducem $|AB| \equiv |AD|$. Aplicînd acum teorema lui Thales paralelelor AA', DB și semidreptelor $|CA$, $|CA'$ obținem

$$\frac{|A'B|}{|A'C|} = \frac{|AD|}{|AC|} = \frac{|AB|}{|AC|},$$

deci formula (2) este demonstrată.

Deci:

Bisectoarea $|AA'$ a triunghiului ABC împarte latura $|BC|$ într-un raport egal cu raportul laturilor $|AB|$, $|AC|$.

Exerciții

1. *Să presupunem că în triunghiul ABC avem $|AC| > |AB|$. Să se arate că bisectoarea celor două unghiuri suplementare unghiului $\hat{A}$ intersectează dreapta BC într-un punct A'' astfel ca $B \in |A''C|$ și*

$$(3)\qquad \frac{|A''B|}{|A''C|} = \frac{|AB|}{|AC|}.$$

(*Indicație*. Se va arăta că bisectoarea celor două unghiuri suplementare unghiului $\hat{A}$ nu este paralelă cu BC. Notînd cu A'' punctul de intersecție al dreptei BC cu această bisectoare, se va observa că $\widehat{AA'C} \equiv \hat{B} + \frac{\hat{A}}{2} > \hat{C} + \frac{\hat{A}}{2} \equiv \widehat{AA'B}$, deci unghiul $\widehat{AA'C}$ este obtuz. Triunghiul $AA'A''$ este dreptunghic în A, deci nu poate avea nici un unghi obtuz. Aceasta înseamnă că avem $B \in |A''C|$. Relația (3) se va demonstra ducînd paralela BD' la AA'', cu $D' \in |AC|$ și observînd că $|AD'| \equiv |AB|$.)

2. *Paralelele duse prin punctele B, C la bisectoarele AA', AA'' intersectează dreptele AC respectiv AB în punctele D, D' respectiv E, E', astfel ca $D' \in |AC$, $E' \in |AB$. Să se arate că triunghiurile ABC, ADE, $AD'E'$ sînt congruente cîte două și că $DED'E'$ este un paralelogram.*

Aplicație. **Teorema lui Menelaus.** *Fie ABC un triunghi și fie A', B', C' trei puncte coliniare distincte astfel ca $A' \in BC$, $B' \in CA$, $C' \in AB$. Avem atunci:*

$$\frac{|A'B|}{|A'C|}\cdot\frac{|B'C|}{|B'A|}\cdot\frac{|C'A|}{|C'B|} = 1.$$

Demonstrație. Considerăm perpendicularele AA'', BB'', CC'' duse din punctele A, B, C pe dreapta $A'B'C'$, și presupunem că A'', B'', C'' sînt pe această dreaptă. Din perechile de triunghiuri asemenea

$$(BB''C',\ AA''C'),\ (CC''B',\ AA''B'),\ (BB''A',\ CC''A')$$

deducem egalitățile

$$\frac{|A'B|}{|A'C|} = \frac{|BB''|}{|CC''|},\quad \frac{|B'C|}{|B'A|} = \frac{|CC''|}{|AA''|},\quad \frac{|C'A|}{|C'B|} = \frac{|AA''|}{|BB''|},$$

Înmulțind aceste relații membru cu membru, obținem relația indicată.

Exerciții

1. *Fie ABC, $A'B'C'$ două triunghiuri asemenea. În aceste triunghiuri, considerăm medianele $|AM|$, $|A'M'|$ și înălțimile AP, $A'P'$, unde $M \in |BC|$, $M' \in |B'C'|$, $P \in BC$, $P' \in B'C'$. Să se arate că următoarele paranteze conțin perechi de triunghiuri asemenea:*

$$(ABM,\ A'B'M'),\qquad (ABP,\ A'B'P').$$

2. *Fie $ABCDE$ un pentagon regulat, deci un pentagon avînd laturile congruente două cîte două și unghiurile $\widehat{ABC}$, $\widehat{BCD}$, $\widehat{CDE}$, $\widehat{DEA}$, $\widehat{EAB}$ de asemenea congruente două cîte două. Arătați că:*

a. $AD \parallel BC$, $AC \parallel DE$ și $AE \parallel BD$;

b. *Segmentele $|AC|$, $|BD|$ au un punct comun F, astfel încît $AFDE$ este un romb, deci un paralelogram cu laturile congruente două cîte două.*

c. $\dfrac{|DF|}{|BF|} = \dfrac{|AD|}{|BC|} = \dfrac{|BD|}{|AE|} = \dfrac{|BD|}{|FD|} = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$.

d. *Unghiul $\widehat{AED}$ are $108°$, iar $\widehat{FCD}$ are $72°$.*

3. *Fie ABC, $A'B'C'$ două triunghiuri astfel ca $AB \perp A'B'$, $BC \perp B'C'$ și $CA \perp C'A'$. Să se arate că cele două triunghiuri sînt asemenea.*

18. Linii poligonale și poligoane

Reamintim că numim *segment închis* orice mulțime care se obține adăugind unui segment $|AB|$ extremitățile A, B. Notăm $[AB] = |AB| \cup \{A, B\}$.

O *linie poligonală* cu n laturi este o mulțime de forma (fig. I.84):

$$L = [P_1\ P_2] \cup [P_2\ P_3] \cup \ldots \cup [P_n\ P_{n+1}].$$

Punctele $P_1 \ldots P_{n+1}$ se numesc *vîrfurile* liniei L, iar segmentele $|P_1\ P_2|$, $|P_2P_3|$, ..., $|P_nP_{n+1}|$ se numesc *laturile* liniei poligonale L.

O linie poligonală este definită prin vîrfurile sale și prin ordinea în care se succed aceste vîrfuri.

Perimetrul unei linii poligonale este prin definiție suma laturilor sale.

O linie poligonală L se numește *închisă*, dacă primul vîrf și ultimul vîrf coincid, (fig. I. 85, 86, 87).

O linie poligonală închisă se numește *simplu închisă*, dacă numărul laturilor este egal cu numărul vîrfurilor distincte din acea linie și dacă laturile liniei poligonale sînt disjuncte două cîte două. O linie poligonală simplu închisă se va numi *poligon*, (fig. I.85).

Un poligon va fi notat indicîndu-se vîrfurile sale, în ordinea dată, exceptînd ultimul vîrf P_{n+1}, care coincide cu primul. *Exemplu*: poligonul cu trei laturi $L = [AB] \cup [BC] \cup [CA]$ va fi notat ABC.

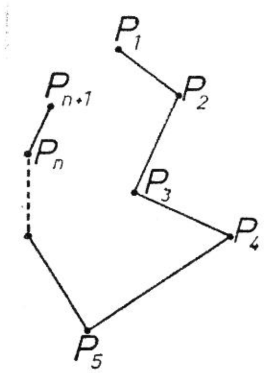

Fig. I.84

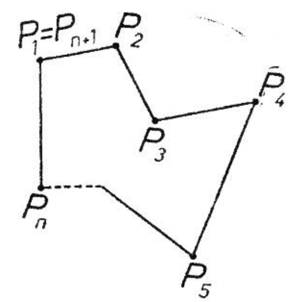

Fig. I.85

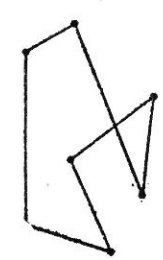

Fig. I.86

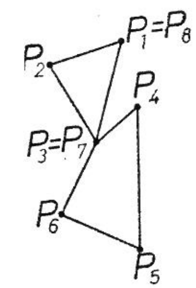

Fig. I.87

Exercițiu. *Să se arate că punctele A, B, C formează un triunghi dacă și numai dacă ele formează un poligon cu trei laturi (trilater).*

Poligoanele cu patru laturi vor fi numite *patrulatere.*

Un patrulater care are două laturi paralele se numește *trapez.* Oricare trei laturi ale unui trapez se găsesc de o aceeași parte a dreptei care conține a patra latură.

Definiție. Două poligoane avînd același număr de laturi, $P = P_1P_2... P_n$, $Q = Q_1Q_2...Q_n$ se numesc asemenea, dacă, oricare ar fi indicii distincți $i, j, k \in \{1, 2, ..., n\}$ avem

$$(1) \quad |P_iP_j| \equiv r \cdot |Q_iQ_j| \quad \text{și} \quad \widehat{P_iP_jP_k} \equiv \widehat{Q_iQ_jQ_k}.$$

r fiind un număr pozitiv.

Din teorema triunghiurilor asemenea rezultă că primele relații, care exprimă proporționalitatea lungimilor laturilor și diagonalelor celor două poligoane, constituie condiții suficiente de asemănare pentru cele două poligoane.

Dacă poligoanele P, Q verifică relațiile (1) cu $r = 1$, se spune că cele două poligoane sînt congruente.

Exercițiu. *Să se indice condițiile pe care trebuie să le îndeplinească patru puncte A, B, C, D dintr-un plan, pentru ca aceste puncte, considerate în ordinea indicată, să formeze un patrulater.*

Poligoanele cu cinci laturi se numesc *pentagoane.* Poligoanele cu șase laturi se numesc *hexagoane.*

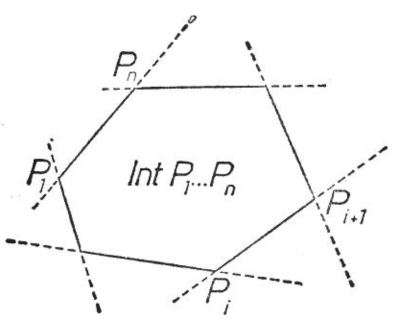

Fig. I.88

Un poligon $P_1P_2...P_n$ se numește *poligon convex,* dacă, pentru orice indice $i \in \{1, 2, ..., n\}$, toate vîrfurile P_j, cu $j \neq i$ și $i + 1$, se găsesc de aceeași parte a dreptei P_iP_{i+1} (pentru $i = n$, convenim să notăm $P_{n+1} = P_1$). *Interiorul* unui poligon convex este intersecția semiplanelor limitate de suporții laturilor poligonului și care conțin vîrfurile nesituate pe suporții indicați, (fig. I.88).

Trilaterele și trapezele sînt poligoane convexe.

Exerciții

1. *Să se arate că interiorul unui poligon convex este o mulțime convexă.*
2. *Să se deseneze poligoane convexe și poligoane care nu sînt convexe.*
3. *Să se arate că suma măsurilor în grade ale unghiurilor unui patrulater este de* 360°.

(*Indicație.* Unghiurile unui poligon convex sînt unghiurile $\widehat{P_{i-1}P_iP_{i+1}}$ definite de cîte trei vîrfuri consecutive ale poligonului. În cazul patrulaterului, se va considera separat cazul patrulaterului convex și cel al patrulaterului neconvex (concav) și se vor efectua descompuneri în triunghiuri.)

4. *Să se arate că suma măsurilor în grade ale unghiurilor unui poligon convex cu n laturi este de* $(n - 2) \cdot 180°$.

5. *Fie ABC un triunghi și fie* $M \in \text{Int } ABC$. *Să se arate că perimetrul triunghiului ABC este mai mare decît perimetrul triunghiului MBC.*

(*Indicație.* Se consideră punctul $B' \in |BM \cap |AC|$ și se arată că perimetrul $ABC >$ $>$ perimetrul $BB'C >$ perimetrul BMC.)

6. *Fie ABC un triunghi și fie punctele* $A' \in |BC|$, $B' \in |CA|$, $C' \in |AB|$. *Să se arate că perimetrul triunghiului ABC este mai mare decît perimetrul triunghiului A'B'C'.*

7. *Fie M un punct interior triunghiului ABC. Să se arate că*

$$\widehat{BMC} > \widehat{BAC} = \hat{A}.$$

(*Indicație.* Se aplică de două ori teorema unghiului exterior.)

8. *Fie A', B', C' trei puncte necoliniare situate în interiorul triunghiului ABC. Să se arate că perimetrul triunghiului ABC este mai mare decît perimetrul triunghiului A'B'C'.*

(*Indicație.* Prelungind laturile triunghiului $A'B'C'$, se obțin triunghiuri avînd vîrfurile în situațiile din exercițiile precedente.)

9. *Fie P, P' două poligoane convexe astfel ca* $\text{Int}P' \subset \text{Int}P$. *Să se arate că perimetrul poligonului P este mai mare decît perimetrul poligonului P'.*

(*Indicație.* Se prelungește o latură a poligonului P' pînă cînd latura prelungită intersectează poligonul P în două puncte M, N. Aceste puncte împart poligonul P în două poligoane Q, Q' astfel ca $\text{Int } P' \subset \text{Int } Q$ și P', Q au două laturi, una conținută în cealaltă. Se observă că perimetrul poligonului Q este mai mic decît perimetrul poligonului P. Problema se reduce la a arăta că perimetrul lui Q este mai mare decît perimetrul lui P'. Se continuă procedeul, considerînd celelalte laturi ale poligonului P'.)

10. *Fie* $|AB|$ *o latură a unui poligon convex P și fie* $|A'B'|$ *un segment astfel ca* $|AB| \subset |A'B'|$. *Să presupunem că P' este un poligon avînd* $|A'B'|$ *ca latură și astfel ca* $P' \cap P = [AB]$ *și laturile lui P și ale lui P', diferite de* $|AB|$ *și de* $|A'B'|$, *să se găsească de aceeași parte a dreptei* $AB = A'B'$. *Să se arate că perimetrul lui P' este mai mare decît perimetrul lui P.*

(*Indicație.* Se procedează ca în exercițiul precedent.)

11. *Fie ABCD un patrulater. Să se definească interiorul și exteriorul acestui patrulater și să se arate că dacă P este un punct interior, iar Q un punct exterior patrulaterului ABCD, atunci segmentul* $|PQ|$ *are cel puțin un punct comun cu (reuniunea laturilor) ABCD.*

(*Indicație.* Se va considera separat cazul patrulaterului convex și cel al patrulaterului neconvex. În ultimul caz, se descompune $ABCD$ în două triunghiuri și se consideră interioarele celor două triunghiuri, la care se adaugă latura comună.)

12. *Se poate defini interiorul unui poligon cu număr arbitrar de laturi?*

Răspunsul este afirmativ, dar demonstrația este complicată. Elevii vor descrie interioarele unor poligoane particulare și vor verifica că orice dreaptă care are un punct interior unui poligon intersectează cel puțin o latură a poligonului.

13. *Se dă un punct O în planul p. Să se construiască un poligon P, astfel ca O să nu fie interior lui P, dar orice semidreaptă dusă din O să intersecteze cel puțin o latură a lui P.*

(*Indicație.* Se va construi un poligon în formă de melc.)

14. *Care este numărul cel mai mic de laturi ce poate avea un poligon avînd proprietatea din exercițiul precedent?*

R. 6.

19. Funcțiile sinus și cosinus, definite pe mulțimea unghiurilor

Un unghi $\widehat{hk}$ se numește *ascuțit* dacă este mai mic decît un unghi drept și *obtuz*, dacă este mai mare decît un unghi drept. Un unghi este fie ascuțit, fie drept, fie obtuz.

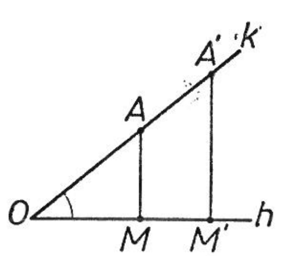

Fig. I. 89

Fie $\widehat{hk}$ un unghi ascuțit cu vîrful în punctul O și fie A un punct pe semidreapta k. Fie d dreapta ce conține semidreapta h și fie k' semidreapta opusă lui $h \subset d$. Să notăm prin M proiecția punctului A pe dreapta d, deci acel punct de pe d, pentru care avem $d \perp AM$ dacă $k \not\subset d$ și $M = A$ dacă $k \subset d$. Fie A' un al doilea punct pe k și fie M' proiecția lui A' pe d. Din teorema lui Thales rezultă egalitățile, (fig. I.89):

(1) $$\frac{|AM|}{|AO|} = \frac{|A'M'|}{|A'O|}, \quad \frac{|OM|}{|AO|} = \frac{|OM'|}{|A'O|}.$$

Aceste egalități arată că putem asocia fiecărui *unghi ascuțit* $\widehat{hk}$ două numere reale

(2) $$\sin \widehat{hk} = \frac{|AM|}{|AO|}, \quad \cos \widehat{hk} = \frac{|OM|}{|AO|}.$$

Aceste definiții au sens și în cazul în care $\widehat{hk}$ este un unghi nul, cînd $k = h$, sau în care $\widehat{hk}$ este un unghi drept, cînd $M = O$. Obținem

(3) $$\sin \widehat{hh} = 0, \ \cos \widehat{hh} = 1,$$

(4) $$\sin(\text{dr}) = 1, \ \cos(\text{dr}) = 0.$$

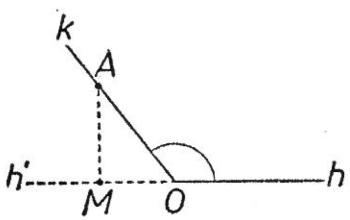

Fig. I.90

Dacă $\widehat{hk}$ este un unghi obtuz, punctul M aparține semidreptei h'. Definim *pentru unghiuri obtuze*, (fig. I.90):

(5) $$\sin \widehat{hk} = \frac{|AM|}{|AO|}, \quad \cos \widehat{hk} = -\frac{|OM|}{|OA|}.$$

Dacă $k = h'$, obținem

(6) $$\sin \widehat{hh'} = 0, \ \cos \widehat{hh'} = -1$$

Din definițiile date rezultă următoarele proprietăți, ce trebuie reținute:

Dacă $\widehat{hk} \equiv \widehat{h'k'}$, atunci

$$\sin \widehat{hk} = \sin \widehat{h'k'}, \ \cos \widehat{hk} = \cos \widehat{h'k'}.$$

Pentru orice unghi, avem

$$0 \leqslant \sin \widehat{hk} \leqslant 1, \ -1 \leqslant \cos \widehat{hk} \leqslant 1.$$

Cosinusul unui unghi ascuțit este pozitiv, iar cosinusul unui unghi obtuz este negativ.

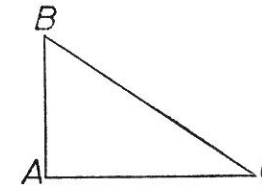

Fig. I.91

Dacă ABC este un triunghi dreptunghic în A, atunci avem (fig. I.91).

(7) $|AC| \equiv |BC| \cdot \cos \hat{C}$, $|AB| \equiv |BC| \cdot \sin \hat{C}$

și, în mod analog,

$|AC| \equiv |BC| \cdot \sin \hat{B}$, $|AB| \equiv |BC| \cdot \cos \hat{B}$.

Comparînd aceste formule, deducem relațiile

(8) $$\cos \hat{C} = \sin \hat{B}, \ \sin \hat{C} = \cos \hat{B}.$$

Din teorema 2 a unghiului exterior rezultă că, în orice triunghi dreptunghic ABC, cu unghiul drept în A, unghiurile $\hat{B}$, $\hat{C}$ sînt ascuțite și au ca sumă un unghi drept, deci sînt *complementare*.

Reciproc, *fiind date două unghiuri complementare, se poate construi un triunghi dreptunghic, avînd unghiurile ascuțite congruente cu unghiurile complementare date.* Deci:

Formulele (8) *sînt verificate de orice pereche de unghiuri ascuțite complementare.*

Formula (7) din stînga poate fi generalizată în modul următor:

Fie date un segment $|BC|$ și o dreaptă d coplanară cu BC. Fie B',C' proiecțiile punctelor B, C pe dreapta d. Presupunînd $C' \neq C$, să notăm prin C'' intersecția dreptei CC' cu paralela dusă prin B' la BC. Figura $BCC''B'$ este un paralelogram, deci $|BC| \equiv |B'C''|$. Din prima formulă (7) deducem (fig. I.92):

(9) $$|B'C'| \equiv |BC| \cdot \cos u, \ u = \widehat{C''B'C'}.$$

Unghiul u poate fi definit ca fiind *unghiul ascuțit* format de dreptele d, BC. Am obținut:

> **T e o r e m a p r o i e c ț i e i u n u i s e g m e n t. Proiecția unui segment $|BC|$ pe o dreaptă d este un segment congruent cu produsul dintre $|BC|$ și cosinusul unghiului ascuțit format de dreptele d, BC.**

Să revenim la cazul unui triunghi ABC, dreptunghic în A (fig. I.93). Unghiurile $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ fiind ascuțite, proiecția vîrfului A pe dreapta BC apar-

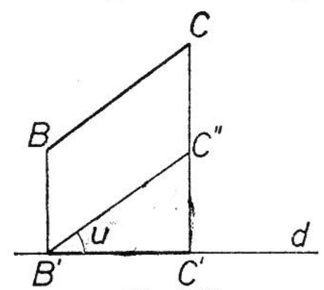

Fig. I.92

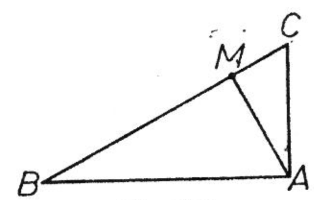

Fig. I.93

ține segmentului $|BC|$. Fie M această proiecție. Din formulele (8) deducem relațiile

$$\sin \hat{C} = \frac{|AB|}{|BC|} = \cos \hat{B} = \frac{|BM|}{|AB|}.$$

Facem convențiile următoare:

$$(\sin \hat{C})^2 = \sin^2 \hat{C},\ (\cos \hat{C})^2 = \cos^2 \hat{C}.$$

Cu aceste convenții, putem scrie

$$|BM| \equiv |AB| \cdot \sin \hat{C} \equiv |BC| \cdot \sin^2 \hat{C}.$$

În mod analog, obținem

$$|CM| \equiv |AC| \cdot \sin \hat{B} \equiv |BC| \cdot \sin^2 \hat{B} \equiv |BC| \cdot \cos^2 \hat{C}.$$

Adunînd ultimele relații membru cu membru, obținem

$$|BC| \equiv |BM| + |CM| \equiv |BC| \cdot (\sin^2 \hat{C} + \cos^2 \hat{C}),$$

și avem prin urmare următoarea *identitate fundamentală*

$$\sin^2 \hat{C} + \cos^2 \hat{C} = 1, \tag{10}$$

adevărată pentru *orice* unghi ascuțit $\hat{C}$.

Exercițiu. *Să se arate că relația (10) este adevărată pentru orice unghi, fie el nul, ascuțit, drept, obtuz sau alungit.*

Observație. Relația (10) se mai poate scrie sub forma

$$\left(\frac{|AB|}{|BC|}\right)^2 + \left(\frac{|AC|}{|BC|}\right)^2 = 1 \tag{11}$$

și constituie una din formulările posibile ale *teoremei lui Pitagora.*

Exerciții

1. *Fie ABC un triunghi echilateral. Să se calculeze* $\sin \hat{A}$ *și* $\cos \hat{A}$.
(*Indicație.* Se duce înălțimea $|AA'|$ și se observă că $|AB| \equiv 2|A'B|$).

2. *Fie ABC un triunghi dreptunghic isoscel. Să se calculeze* $\sin \hat{B}$ *și* $\cos \hat{B}$.

3. *Să se arate că dacă p, q sînt două numere reale astfel încît*

$$0 \leqslant p \leqslant 1,\ -1 \leqslant q \leqslant 1,\ p^2 + q^2 = 1,$$

atunci există un unghi $\widehat{hk}$ astfel ca

$$\sin \widehat{hk} = p \text{ și } \cos \widehat{hk} = q.$$

Să se arate apoi că orice unghi $\widehat{h'k'}$, pentru care

$$\sin \widehat{h'k'} = p \text{ și } \cos \widehat{h'k'} = q,$$

este congruent cu unghiul $\widehat{hk}$.

4. *Fie h, k, m trei semidrepte cu originea O, astfel ca m să aparțină interiorului unghiului $\widehat{hk}$ și $\widehat{mk}$ să fie un unghi drept. Să se exprime numerele* $\sin \widehat{hk}$, $\cos \widehat{hk}$ *în funcție de* $\sin \widehat{hm}$ *și de* $\cos \widehat{mh}$.

5. *Fie $ABCD$ un patrat ($AB \perp BC \perp CD \perp DA$, $|AB| \equiv |BC|$). Să considerăm punctele $P \in |AB|$, $Q \in |BC|$, $R \in |CD|$, $S \in |DA|$, astfel ca $|AP| \equiv |BQ| \equiv |CR| \equiv |DS|$. Să se arate că $PQRS$ este un patrat și că triunghiurile ASP, BPQ, CQR, DRS sînt congruente între ele.*

6. *Din exercițiul anterior să se deducă o relație între ariile patratelor construite pe laturile unui triunghi dreptunghic.*

7. *Folosind exercițiul 2 de la p. 64, să se arate că* $\cos 72° = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

Tabelul următor indică valorile aproximative, cu trei zecimale exacte, ale funcțiilor sinus, cosinus, tangentă și cotangentă, pentru toate unghiurile, ale căror măsuri în grade sexagesimale se exprimă prin numere întregi, de la 0° la 90°.

Funcțiile secantă, tangentă, cotangentă și cosecantă se definesc prin formulele

$$\sec x = \frac{1}{\cos x},\ \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x},\ \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x},\ \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x},$$

presupunînd $\cos x \neq 0$, respectiv $\sin x \neq 0$.

În tabel se ține seama de faptul că sinusul unui unghi ascuțit este egal cu cosinusul unghiului complementar. Denumirile din prima linie corespund unghiurilor indicate în prima coloană, iar denumirile din ultima linie corespund unghiurilor indicate în ultima coloană.

x°	Sin	Tg	Ctg	Cos	90°-x°
0	0,000	0,000		1,000	90
1	0,017	0,017	57,290	1,000	89
2	0,035	0,035	28,636	0,999	88
3	0,052	0,052	19,081	0,999	87
4	0,070	0,070	14,301	0,998	86
5	0,087	0,087	11,430	0,996	85
6	0,105	0,105	9,514	0,995	84
7	0,122	0,123	8,144	0,993	83
8	0,139	0,141	7,115	0,990	82
9	0,156	0,158	6,314	0,988	81
10	0,174	0,176	5,671	0,985	80
11	0,191	0,194	5,145	0,982	79
12	0,208	0,213	4,705	0,978	78
	Cos	Ctg.	Tg.	Sin.	

$x°$	Sin	Tg	Ctg	Cos	$90°$-$x°$
13	0,225	0,231	4,331	0,974	77
14	0,242	0,249	4,011	0,970	76
15	0,259	0,268	3,732	0,966	75
16	0,276	0,287	3,487	0,961	74
17	0,292	0,306	3,271	0,956	73
18	0,309	0,325	3,078	0,951	72
19	0,326	0,344	2,904	0,946	71
20	0,342	0,364	2,747	0,940	70
21	0,358	0,384	2,605	0,934	69
22	0,375	0,404	2,475	0,927	68
23	0,391	0,424	2,356	0,921	67
24	0,407	0,445	2,246	0,914	66
25	0,423	0,466	2,145	0,906	65
26	0,438	0,488	2,050	0,899	64
27	0,454	0,510	1,963	0,891	63
28	0,469	0,532	1,881	0,883	62
29	0,485	0,554	1,804	0,875	61
30	0,500	0,577	1,732	0,866	60
31	0,515	0,601	1,664	0,857	59
32	0,530	0,625	1,600	0,848	58
33	0,545	0,649	1,540	0,839	57
34	0,559	0,675	1,483	0,829	56
35	0,574	0,700	1,428	0,819	55
36	0,588	0,727	1,376	0,809	54
37	0,602	0,754	1,327	0,799	53
38	0,616	0,781	1,280	0,788	52
39	0,629	0,810	1,235	0,777	51
40	0,643	0,839	1,192	0,766	50
41	0,656	0,869	1,150	0,755	49
42	0,669	0,900	1,111	0,743	48
43	0,682	0,933	1,072	0,731	47
44	0,695	0,966	1,036	0,719	46
45	0,707	1,000	1,000	0,707	45
	Cos.	Ctg.	Tg.	Sin.	

Să reținem *că sinusurile a două unghiuri suplementare sînt egale, iar cosinusurile a două unghiuri suplementare sînt egale în valoare absolută, dar de semne contrare.*

Am arătat că două unghiuri congruente au sinusurile egale și cosinusurile egale; două unghiuri sînt congruente dacă și numai dacă au măsurile egale, oricare ar fi sistemul de măsurare, în grade sau în radiani.

Aceste proprietăți ne permit să reprezentăm sinusul și cosinusul unui unghi sub forma sin $n°$ sau sin x, respectiv cos $n°$ sau cos x, dacă acel unghi are n grade sau x radiani.

Pentru a da unele exemple, să indicăm valorile exacte ale funcțiilor sinus și cosinus, pentru unele unghiuri ce apar mai des în aplicații.

măsura în grade	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$135°$	$150°$	$180°$
măsura în radiani	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
valoarea funcției sinus	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
valoarea funcției cosinus	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1

Dacă notăm prin U mulțimea unghiurilor, putem scrie

$$\sin\colon U \to [0,1] = \{a \in \mathbf{R};\ 0 \leqslant a \leqslant 1\},$$
$$\cos\colon U \to [-1,1] = \{b \in \mathbf{R},\ -1 \leqslant b \leqslant 1\}.$$

Exerciții

1. *Să se indice valorile aproximative, cu o zecimală exactă, ale numerelor reale* sin u *și* cos u *pentru unghiurile* u *avînd* $15°$, $40°$, $55°$, $70°$, $85°$, $110°$, *și* $\pi/10$, $3\pi/8$, $3\pi/10$, $4\pi/5$ *și* $5\pi/8$ *radiani.*

(*Indicație.* Se vor efectua construcții grafice, folosind rigla și raportorul.)

2. *Știind că* u *și* v *sînt două unghiuri complementare, să se exprime* sin v *și* cos v *cu ajutorul numerelor* sin u *și* cos u.

3. *Să se indice interpretările geometrice ale funcțiilor tangentă și cotangentă.*

Observație. Funcțiile sinus și cosinus se numesc *funcții trigonometrice* deoarece au apărut la rezolvarea unor probleme de calcul al unghiurilor și laturilor unui triunghi, dat prin anumite elemente ale sale. Tot funcții trigonometrice sînt funcțiile tangentă, cotangentă, secantă, cosecantă.

20. Relații metrice

În acest paragraf, vom presupune că a fost ales un segment *etalon*, pe care-l vom nota m. Figurile pe care le vom studia vor fi figuri plane. Proprietățile acestor figuri, ale căror formulări necesită considerarea etalonului m se numesc *proprietăți metrice.*

Ca prim exemplu de proprietate metrică, să considerăm un triunghi dreptunghic ABC, cu unghiul drept în A, şi să presupunem că avem

$$|BC| \equiv a \cdot m, \quad |AC| \equiv b \cdot m, \quad |AB| \equiv c.m,$$

unde a, b, c sînt numere reale pozitive.

Din relaţiile demonstrate în paragraful precedent deducem

$$|AC| \equiv b \cdot m \equiv |BC| \cdot \cos \widehat{C} \equiv a \cos \widehat{C} \cdot m,$$

$$|AB| \equiv c \cdot m \equiv |BC| \cdot \sin \widehat{C} \equiv a \sin \widehat{C} \cdot m.$$

Aceste formule conduc la egalităţile

(1) $$b = a \cos \widehat{C}, \; c = a \sin \widehat{C},$$

(2) $$b^2 + c^2 = a^2.$$

Ultima relaţie constituie *formularea uzuală a teoremei lui Pitagora.*

Exerciţii

1. *Să se demonstreze, folosind notaţiile indicate, următoarele egalităţi:*

$$b = a \sin \widehat{B}, \; c = a \cos \widehat{B}.$$

2. *Fie A' proiecţia vîrfului unghiului drept pe ipotenuza BC. Fie h, b', c' numerele reale pozitive, pentru care avem*

$$|AA'| \equiv h \cdot m, \quad |BA'| \equiv c' \cdot m, \quad |CA'| \equiv b' \cdot m.$$

Să se arate că avem

$$h^2 = b'c', \; b^2 = ab', \; c^2 = ac'.$$

D e f i n i ţ i e. **Fie A, B două puncte distincte şi fie d numărul real pozitiv, pentru care avem $|AB| \equiv d \cdot m$. Vom spune atunci că d este lungimea segmentului $|AB|$ şi de asemenea distanţa dintre punctele A, B, exprimate cu ajutorul etalonului, sau mai simplu, lungimea segmentului $|AB|$, respectiv distanţa dintre punctele A, B.**

Potrivit definiţiei date, lungimile şi distanţele sînt numere reale pozitive, dar vom ţine seama că aceste numere urmează a fi înmulţite cu segmentul etalon m, pentru a obţine mărimea segmentului $|AB|$, a cărui lungime se consideră.

Dacă $A = B$, distanţa dintre A şi B este prin definiţie 0.

În general, distanţa dintre punctele A, B, cînd etalonul a fost fixat, va fi notată $d(A, B)$. Dacă $A \neq B$, atunci

$$|AB| \equiv d(A, B) \cdot m.$$

Prin *mărimea* unui segment înţelegem mulţimea formată din toate segmentele congruente cu acel segment.

Dacă avem două segmente u, v, notînd prin x raportul lor şi prin a, b lungimile lor, vom avea

$$u \equiv x \cdot v, \; u \equiv a \cdot m, \; v \equiv b \cdot m,$$

deci $a \cdot m \equiv x \cdot (b \cdot m) \equiv (bx) \cdot m$. Rezultă $a = bx$ sau $x = \frac{a}{b}$. Am arătat că:

Raportul a două segmente este egal cu raportul lungimilor celor două segmente.

T e o r e m ă. **Funcţia distanţă d, care asociază fiecărei perechi de puncte A, B distanţa $d(A, B)$ dintre aceste puncte, are proprietăţile:**

a) $d(A, B) = 0$ **dacă şi numai dacă** $A = B$.

b) $d(A, B) = d(B, A)$, **oricare ar fi punctele** A, B.

c) $d(A, B) + d(B, C) \geqslant d(A, C)$, **oricare ar fi punctele** A, B, C.

Primele două relaţii se deduc din definiţia funcţiei d. Pentru a demonstra ultima proprietate, se consideră separat cazurile $A \in |BC|$, $B \in |AC|$, $C \in |AB|$, $A = B$, $B = C$, $C = A$ şi cazul în care A, B, C sînt necoliniare. Primele din aceste cazuri sînt uşor de tratat. Să presupunem că punctele A, B, C formează un triunghi. Avem atunci $|AB| + |BC| \geqslant |AC|$, deci $d(A, B) + d(B, C) \geqslant d(A, C)$.

Avem $d(A, B) + d(B, C) = d(A, C)$ dacă şi numai dacă $B \in [AC]$.

Problemă rezolvată. Fie $a = d(B, C)$, $b = d(C, A)$, $c = (A, B)$ lungimile laturilor unui triunghi şi fie $|AA'$ bisectoarea unghiului $\widehat{A}$ cu $A' \in |BC|$. Notînd $x = d(B, A')$ şi $y = d(C, A')$, să se calculeze x şi y în funcţie de a, b, c.

Rezolvare. Din teorema bisectoarei, rezultă

$$\frac{x}{y} = \frac{c}{b}.$$

şi din relaţia $A' \in |BC|$ rezultă $x + y = a$. Rezolvînd sistemul celor două ecuaţii în x şi y, obţinem

$$x = \frac{ac}{b+c}, \; y = \frac{ab}{b+c}.$$

Exerciţii

1. *Să se determine x şi y în cazul $a = 21$ cm, $b = 16$ cm, $c = 14$ cm.*

2. *Dacă $|AA''$, $A'' \in BC$ este o bisectoare exterioară a triunghiului ABC, să se calculeze lungimile segmentelor $|A''B|$, $|A''C|$ în funcţie de lungimile laturilor triunghiului ABC.*

A p l i c a ţ i i. **1.** Fie ABC un triunghi cu unghiurile $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ ascuţite şi fie A' punctul de pe dreapta BC, pentru care $AA' \perp BC$. Să notăm $a = d(B, C)$, $b = d(C, A)$, $c = d(A, B)$, $h = d(A, A')$, $u = d(A', B)$, $v = d(A', C)$. Avem $A' \in |BC|$, deci $a = u + v$. Din teorema lui Pitagora rezultă

$$b^2 = h^2 + v^2, \; c^2 = h^2 + u^2,$$

deci $b^2 - c^2 = v^2 - u^2 = (v + u)(v - u) = a(v - u)$. Comparînd cu relația $a^2 = a(v + u)$, deducem $2av = a^2 + b^2 - c^2$. Deci avem formula

$$d(A', C) = v = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a},$$

care dă distanța de la punctul A' la vîrful C, în funcție de lungimile laturilor triunghiului ABC.

2. Fie a, b, c trei numere reale pozitive, astfel ca

$$c \leqslant b \leqslant a < b + c. \tag{3}$$

Vom arăta că există un triunghi, avînd ca lungimi ale laturilor numerele a, b, c.

Demonstrație. Considerăm un segment $|BC|$ de lungime a și fie, pe acest segment, punctul A' astfel ca $d(A', C) = (a^2 + b^2 - c^2)/2a$. Un astfel de punct există, deoarece avem $b^2 - c^2 < a^2$, deci $a^2 + b^2 - c^2 < 2a^2$, $v = (a^2 + b^2 - c^2)/2a < a$. Avem apoi $a < b + c$, deci $a - b < c$, $(a - b)^2 < c^2$, deci $2ab > a^2 + b^2 - c^2$, sau $b > v$. Aceasta înseamnă că există un număr real pozitiv h astfel ca să avem $h^2 = b^2 - v^2$. Fie A un punct pe perpendiculara dusă prin A' la BC, astfel ca $d(A, A') = h$. În triunghiul ABC avem $d(B, C) = a$, $d(A, C) = \sqrt{(h^2 + v^2)} = b$, $d(A, B)^2 = h^2 + (a - v)^2 = b^2 - v^2 + (a - v)^2 = b^2 + a^2 - 2av = c^2$, deci $d(A, B) = c$. Deci triunghiul ABC îndeplinește condițiile cerute.

Observație. Fiind date trei numere reale pozitive, aceste numere pot fi notate cu literele a, b, c astfel încît să fie verificate inegalitățile $c \leqslant b \leqslant a$. Dacă cele trei numere reprezintă lungimile laturilor unui triunghi, vom avea și $a < b + c$.

Exerciții

1. *Să presupunem că lungimile laturilor triunghiului ABC au valorile $a = 7$, $b = 5$, $c = 4$. Să se calculeze lungimea înălțimii $|AA'|$, $A' \in BC$, și lungimile segmentelor $|A'B|$, $|A'C|$.*

2. *Fie ABC un triunghi avînd unghiul $\hat{B}$ obtuz și fie $A' \in BC$ astfel ca $AA' \perp BC$. Să se arate că $B \in |A'C|$ și să se calculeze lungimile segmentelor $|AA'|$, $|A'B|$, $|A'C|$ în funcție de lungimea laturilor triunghiului ABC. Caz particular: $d(A, C) = 7.d(A, B) = 3$, $d(B, C) = 5$.*

3. *Se consideră un triunghi avînd lungimile laturilor*

$$a = d(B, C),\ b = d(C, A),\ c = d(A, B).$$

Să se arate că unghiul $\widehat{ABC}$ este obtuz dacă și numai dacă $b^2 > c^2 + a^2$.

4. *Fie A_1, A_2, ..., A_n un șir de n puncte într-un plan. Să se arate că are loc inegalitatea*

$$d(A_1, A_n) \leqslant d(A_1, A_2) + d(A_2, A_3) + \dots + d(A_{n-1}, A_n).$$

5. *Fie AA', BB', CC', înălțimile triunghiului ABC, cu $A' \in BC$, $B' \in CA$ și $C' \in AB$. Să se arate că*

$$d(A, A')d(B, C) = d(B, B')d(C, A) = d(C, C')d(A, B),$$

6. *Fie s, s' două semidrepte cu originea O și fie punctele A, B pe s și A', B' pe s' astfel ca $d(O,A)\ d(O,B) = d(O,A')\ d(O,B')$. Să se arate că triunghiurile OAB' și $OA'B$ sînt asemenea.*

7. *Pe laturile unghiului propriu $\widehat{hk}$, avînd originea O, se iau punctele $A \in h$, $A' \in h$, $B \in k$, $B' \in k$ astfel ca $A \neq A'$, $|OA| \equiv |OB|$ și $|OA'| \equiv |OB'|$. Să se arate că punctul de intersecție al dreptelor AB', $A'B$ aparține bisectoarei unghiului $\widehat{hk}$.*

8. *Fie AD bisectoarea unghiului $\hat{A}$ în triunghiul ABC, cu $D \in |BC|$. Perpendicularele din B și C pe AD intersectează dreptele AC și AB în punctele E și F. Să se demonstreze că triunghiurile ABC, AEF sînt congruente și că $D \in EF$.*

9. *Se consideră triunghiul ABC și triunghiurile echilaterale $AB'C$, $A'BC$ exterioare lui ABC. Să se arate că $|AA'| \equiv |BB'|$ și că măsurile unghiurilor formate de dreptele AA', BB' sînt egale cu 60° și 120°. Extindeți aceste proprietăți, considerînd cazul în care punctele A, B, C sînt coliniare.*

10. *Pe laturile pătratului $ABCD$ se iau punctele $J \in |AB|$, $E \in |BC|$, $F \in |CD|$, $G \in |DA|$ astfel ca $|AJ| \equiv |BE| \equiv |CF| \equiv |DG|$. Să se arate că $JEFG$ este un pătrat. Extindeți proprietatea, considerînd puncte exterioare laturilor pătratului.*

11. *Arătați că dacă triunghiurile ABC, $A'B'C'$ au $|AB| \equiv |A'B'|$, $|AC| \equiv |A'C'|$ și dacă mediana din A în triunghiul ABC este congruentă cu mediana din A' în triunghiul $A'B'C'$, atunci cele două triunghiuri sînt congruente.*

12. *În triunghiul ABC, unghiurile $\hat{B}$, $\hat{C}$ au măsurile de 70° respectiv de 60°. Fie BB', CC' înălțimi și BD bisectoare în triunghiul ABC. Să se determine unghiurile triunghiului determinat de dreptele BB', CC', BD.* **R.** 5°, 50°, 125°.

13. *Să se determine unghiurile triunghiului determinat de bisectoarele exterioare ale unui triunghi ABC, cunoscînd unghiurile lui ABC. Caz particular: măs $\hat{B} = 70°$, măs $\hat{C} = 60°$.*

$$\textbf{R.}\ \mathrm{dr} - \frac{\hat{A}}{2},\ \mathrm{dr} - \frac{\hat{B}}{2},\ \mathrm{dr} - \frac{\hat{C}}{2};\ 55°;\ 60°;\ 65°.$$

14. *Să se determine măsurile unghiurilor unui patrulater convex, știind că ele sînt proporționale cu numerele 3, 4, 6, 11.* **R.** 45°, 60°, 90°, 165°.

15. *Suma măsurilor în grade ale unghiurilor unui poligon convex este egală cu 2 880°. Cîte laturi are acel poligon?* **R.** 18.

16. *Să se arate că dacă unul din unghiurile unui patrulater convex este egal cu media aritmetică a celorlalte trei unghiuri, atunci acel unghi este drept.*

17. *În paralelogramul $ABCD$ notăm prin M mijlocul lui $|CD|$ și cu N mijlocul lui $|AB|$. Arătați că AM și CN taie diagonala $|BD|$ în trei segmente congruente.*

18. *Diagonalele unui trapez $ABCD$, $AB \parallel CD$, se întîlnesc în punctul O. Paralela la AB dusă prin O taie laturile $|AD|$, $|BC|$ în punctele $E \in |AD|$, $F \in |BC|$. Arătați că $|OE| \equiv |OF|$ și*

$$\frac{|AB|}{|OE|} = 1 + \frac{|AB|}{|CD|}.$$

Arătați de asemenea că punctul O, punctul de intersecție al dreptelor AD, BC și mijloacele laturilor $|AB|$, $|CD|$ sînt patru puncte coliniare.

19. *Se consideră un romb $ABCD$ și un punct $F \in |BC|$. Fie $E \in DF \cap AB$ și fie H, G mijloacele segmentelor $|DF|$, $|EF|$. Să se arate că*

$$\frac{|BF|}{|CF|} = \frac{|BE|}{|AD|}, \quad \frac{|BC|}{|CH|} = \frac{|BE|}{|BG|}.$$

20. *Să se arate că dacă triunghiul ABC are unghiul $\hat{A}$ drept și dacă $|AD|$ este înălțime în acest triunghi, atunci $2|AD| \equiv |BC| \sin 2\hat{B} \equiv |BC| \sin 2\hat{C}$. Caz particular: $\hat{B}$ este a șasea parte dintr-un unghi drept.*

(*Indicație*. Se consideră simetricul punctului C față de A. În cazul particular indicat, se obține $4|AD| = |BC|$.)

21. *În triunghiul ABC, notăm prin D mijlocul laturii $|AB|$ și considerăm punctul E astfel ca $|CE| \equiv |AD|$ și $C \in |BE|$. Fie $F \in DE \cap AC$. Arătați că*

$$\frac{|DF|}{|FE|} = \frac{|BC|}{|AB|},$$

(*Indicație*. Se aplică teorema lui Menelaus.)

22. *În triunghiul ABC, avem $d(B, C) = 3$ dm, $d(A, B) = d(A, C) = 11{,}5$ dm; se consideră punctele $M \in |BC|$, $E \in |AC|$ astfel ca $|BM| \equiv |MC|$ și ME este bisectoarea unghiului $\widehat{AMC}$. Să se calculeze $d(A, E)$.* R. $\dfrac{23\sqrt{130}}{3 + 2\sqrt{130}}$

23. *Fie ABC un triunghi și $M \in |AC|$. Bisectoarele unghiurilor $\widehat{AMB}$, $\widehat{CMB}$ intersectează laturile $|AB|$ respectiv $|BC|$ în punctele P, Q. Avem PQ paralelă cu AC dacă și numai dacă M este mijlocul lui $|AC|$.*

24. *Dacă două dreptunghiuri au bazele și înălțimile proporționale, atunci ele sînt asemenea.*

25. *Fie $ABCD$, $A'B'C'D'$ două trapeze astfel ca $AB \parallel CD$, $A'B' \parallel C'D'$ și*

$$\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|CD|}{|C'D'|} = \frac{|AD|}{|A'D'|}, \quad \widehat{CDA} \equiv \widehat{C'D'A'}.$$

Să se arate că cele două trapeze sînt asemenea, deci că au laturile proporționale și unghiurile congruente două cîte două.

26. *Dacă două pentagoane convexe $ABCDE$, $A'B'C'D'E'$ au laturile proporționale și dacă două unghiuri consecutive $\hat{A}$, $\hat{B}$ sînt congruente respectiv cu unghiurile $\hat{A}'$, $\hat{B}'$, atunci cele două pentagoane sînt asemenea.*

27. *Pe o hartă întocmită la scara* 1/10 000, *un teren este reprezentat printr-un patrulater cu laturile de* 1,7 dm; 2,1 dm; 2,2 dm *și* 1,9 dm. *Aflați perimetrul acelui teren.*
R. 7,9 km.

28. *Dacă lungimile laturilor unui triunghi, notate prin a, b, c, verifică relația $b^3 + bc^2 + ca^2 = a^2b + b^2c + c^3$, atunci acel triunghi este fie isoscel, fie dreptunghic.*

29. *Dacă două triunghiuri au medianele congruente două cîte două, atunci cele două triunghiuri sînt congruente.*

30. *În triunghiul ABC cu laturile de lungimi $a = 4$ cm, $b = 5$ cm, $c = 6$ cm, să se ducă două paralele la latura $|BC|$, astfel ca aceste paralele să împartă triunghiul în trei arii egale. Să se calculeze rapoartele în care aceste paralele împart latura $|AB|$.*

R. $\dfrac{|AE|}{|EB|} = \dfrac{\sqrt{3} + 1}{2}, \dfrac{|AF|}{|FB|} = 2 + \sqrt{6}.$

31. *Într-un hexagon regulat se unesc mijloacele laturilor consecutive, și se formează un nou hexagon. Să se determine raportul ariilor celor două hexagoane.* R. $\dfrac{3}{4}$.

21. Coordonate pe o dreaptă și într-un plan

1. Fie O, A două puncte pe o dreaptă d, astfel ca segmentul $|OA|$ să fie congruent cu segmentul m, care a fost ales ca etalon. Notăm prin d' semidreapta $|OA$ și prin d'' semidreapta opusă lui d'. Fie $A' \in d''$ punctul pentru care $|OA'| \equiv m$. Vom spune că tripletul (d, O, A) constituie o *axă*, d fiind *dreapta suport*, O *originea*, iar A *punctul unitate* al acestei axe.

Am arătat cum putem asocia fiecărui punct $M \in d'$ un număr real x, astfel ca $|OM| \equiv x\,|OA| \equiv x \cdot m$. Asociind punctelor $M \in d'$ numerele pozitive x, prin această regulă, am obținut o corespondență bijectivă între punctele semidreptei d' și mulțimea numerelor reale pozitive.

Urmînd o metodă descoperită de Descartes, putem stabili o corespondență bijectivă între mulțimea tuturor punctelor dreptei d și mulțimea tuturor numerelor reale. Această corespondență se obține asociind punctelor de pe d' numere reale pozitive, așa cum s-a arătat, punctului O numărul real zero și punctelor N de pe semidreapta d'' numere negative, astfel ca lui $N \in d''$ să i se asocieze un număr $x' < 0$ cu proprietatea

$$|ON| \equiv (-x') \cdot m.$$

Dacă unui punct $P \in d$ i s-a asociat numărul real x, scriem $P(x)$ și citim: Punctul P are abscisa x pe axa (d, O, A) sau mai scurt: punctul P de abscisă x (dacă axa este subînțeleasă).

Teoremă. Dacă avem pe o axă punctele $P(x)$, $P'(x')$, atunci distanța $d(P, P')$ este dată de formula

$$d(P, P') = |x - x'|. \tag{1}$$

Demonstrație. Trebuie să distingem cazurile: $P = P'$; $P = O$; $P' = O$; $P \in |OP'|$; $P' \in |OP|$; $O \in |PP'|$. În fiecare din aceste cazuri, egalitatea (1) este o consecință a felului în care am asociat fiecărui punct $P \in d$ abscisa sa.

Teoremă. Dacă avem pe o axă punctele $P(x)$, $P'(x')$, $P''(x'')$, atunci relația $P' \in |PP''|$ are loc în unul din următoarele cazuri și numai în aceste cazuri: a) $x < x' < x''$ sau b) $x'' < x' < x$.

Demonstrație. Relația $P' \in |PP''|$ este echivalentă cu formula

$$d(P, P'') = d(P, P') + d(P', P''), \ P \neq P' \neq P''.$$

Aplicînd teorema precedentă, această formulă va fi echivalentă cu

$$|x'' - x| = |x' - x| + |x'' - x'|, \ x \neq x' \neq x'',$$

care are loc dacă și numai dacă diferențele $x' - x$, $x'' - x'$ au același semn. Dacă cele două diferențe sînt pozitive, sîntem în cazul a), iar dacă diferențele sînt negative, sîntem în cazul *b*).

Exerciții

Fie P, Q două puncte distincte pe o axă (d, O, A) și fie p, q abscisele lor. Să se determine abscisa punctului $M \in |PQ|$, care împarte segmentul $|PQ|$ în medie și extremă rație, deci pentru care avem

$$\frac{|MQ|}{|MP|} = \frac{|PQ|}{|MQ|}.$$

2. *Fie OAB un triunghi dreptunghic isoscel într-un plan p, astfel ca $|OA| \equiv |OB| \equiv m$. Considerăm axele*

$$X = (OA, O, A), \ Y = (OB, O, B).$$

Vom spune că X, Y constituie un *sistem de axe carteziene ortogonale* în planul p. Un astfel de sistem permite să asociem fiecărui punct M din planul p două numere reale x și y, astfel încît corespondența

$$M \to (x, y)$$

să fie bijectivă. Pentru a defini numerele x și y, procedăm astfel:

Considerăm punctele $M' \in OA$ și $M'' \in OB$ astfel ca paralelele duse prin M' și M'' la OB respectiv OA să treacă prin M. Fie x abscisa lui M' pe axa X și fie y abscisa lui M'' pe axa Y. Atunci x și y vor fi numerele asociate lui M; aceste numere se numesc *coordonatele* punctului M față de axele carteziene ortogonale X și Y. Numărul x se mai numește *abscisa* lui M, iar y se mai numește *ordonata* lui M față de axele X, Y.

Exerciții

1. *Să notăm prin A' și B' simetricele punctelor A, B față de punctul O. Să presupunem că un punct $M \in p$ are coordonatele x și y față de sistemul de axe (X, Y). Să se arate că:* $M \in OA \Leftrightarrow y = 0$; $M \in OB \Leftrightarrow x = 0$; $M \in |OA \Leftrightarrow y = 0$ și $x > 0$.

$M \in \mathrm{Int}\widehat{AOB} \Leftrightarrow x > 0$ *și* $y > 0$; $M \Leftrightarrow \mathrm{Int}\widehat{A'OB'} \Leftrightarrow x < 0$ și $y < 0$.

Notație. Scrierea $M(x, y)$ exprimă faptul că M este punctul de coordonate x și y, dintr-un plan p, în care a fost ales un sistem de axe carteziene ortogonale.

2. *Fiind date punctele $M(x, y)$ și $M'(x', y')$ să se arate că*

$$d(M, M') = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}.$$

(*Indicație.* Se formează un triunghi dreptunghic cu ipotenuza $|MM'|$.)

3. *Să se calculeze distanța dintre punctele $M(3, 2)$ și $M'(-1, 7)$.*

4. *Să se determine condițiile pe care trebuie să le verifice coordonatele x, y ale unui punct $M \in p$, pentru ca să avem*

$$\mathrm{d}(M, P) = \mathrm{d}(M, Q)$$

știind că $P(u, v)$ și $Q(u', v')$. Caz particular: $P(0, 1)$, $Q(-6, 8)$.

5. *Folosind faptul că orice dreaptă poate fi considerată ca mediatoare a cel puțin un segment, să se arate că, oricare ar fi dreapta $d \subset p$, putem găsi trei numere reale a, b, c astfel ca*

$$d = \{M(x, y);\ ax + by + c = 0\}.$$

• **Locul geometric definit de o ecuație de forma $ax + by + c = 0$.** Vom studia locul geometric al punctelor $P(x, y)$, care verifică o ecuație de forma

$$ax + by + c = 0, \tag{1}$$

examinînd toate cazurile posibile referitor la coeficienții a, b, c.

Cazul $a = b = c = 0$. În acest caz, toate punctele planului verifică ecuația (1), deci locul căutat este întreg planul.

Cazul $a = b = 0 \neq c$. În acest caz, nici un punct al planului nu verifică ecuația (1), deci locul geometric căutat este mulțimea vidă.

Cazul $a = 0 \neq b$. Ecuația (1) se scrie $by + c = 0$ sau

$$y = -\frac{c}{b}$$

și definește o dreaptă paralelă cu axa OA, deci cu axa absciselor. Dacă $c = 0$, se obține chiar ecuația axei absciselor.

Cazul $a \neq 0 = b$. Ecuația (1) se scrie $ax + c = 0$ sau

$$x = -\frac{c}{a}$$

și definește o dreaptă paralelă cu axa ordonatelor. Pentru $c = 0$ se obține chiar axa ordonatelor.

Cazul $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c = 0$. Ecuația (1) se poate scrie

$$y = mx, \ m = -\frac{a}{b}, \tag{2}$$

sau

$$\frac{x}{-b} = \frac{y}{a}. \tag{3}$$

Ecuația (2) definește o dreaptă care trece prin originea O și prin punctul $M(1, m)$. Dacă notăm prin A punctul de coordonate 1 și 0, triunghiul OMA este dreptunghic în A și avem tg $\widehat{AOM} = |\, m \,|$. Se spune că m este coeficientul unghiular al dreptei definită de ecuația (2).

Cazul $b \neq 0$. Ecuația (1) se poate scrie sub forma

$$y = mx + n,\ m = -\frac{a}{b},\ n = -\frac{c}{b} \tag{4}$$

sau

$$\frac{x}{1} = \frac{y-n}{m}. \tag{5}$$

Dacă $n \neq 0$, ecuația (4) definește o dreaptă, care este paralelă cu dreapta definită de ecuația (2), deoarece intersectînd cele două drepte, obținem mulțimea vidă. Se spune că ecuația (4) definește o dreaptă de coeficient unghiular m. Această dreaptă trece prin punctul $P(0, n)$ și prin punctul $Q(1, m + n)$.

În rezumat, *o ecuație de forma (1) definește întreg planul dacă $a = b = c = 0$, mulțimea vidă dacă $a = b = 0 \neq c$ și o dreaptă în toate celelalte cazuri.*

Exerciții

A. *Să se reprezinte grafic dreptele definite de ecuațiile:*

1. $x + y + 1 = 0$;	**2.** $2x - 3y - 5 = 0$;
3. $3x + 4 = 0$;	**4.** $4y + 3 = 0$;
5. $2x - 7y = 0$;	**6.** $y - 2x - 1 = 0$;
7. $y = x + 1$;	**8.** $y = 8x$;
9. $y = 4x - 4$;	**10.** $y = 2$.

B. **1.** *Să se arate că ecuațiile*

$$y = mx + n,\ y = -\frac{1}{m}x + p \tag{1}$$

au o soluție comună unică:

$$x_0 = \frac{m(p-n)}{m^2+1},\quad y_0 = \frac{m^2p + n}{m^2+1}. \tag{2}$$

2. *Se consideră punctele $A(u, mu + n)$, $B(\varphi, -\frac{1}{m}\varphi + p)$, $M(x_0, y_0)$, unde x_0 și y_0 sînt dați de (2). Să se arate că*

$$d(A, M)^2 + d(B, M)^2 = d(A, B)^2. \tag{3}$$

3. *Din exercițiul precedent să se deducă că ecuațiile (1) reprezintă două drepte perpendiculare, avînd punctul comun $M(x_0, y_0)$.*

4. *Să se deducă din ex. 3 că orice ecuație de forma $y = mx + n$ reprezintă o dreaptă, oricare ar fi coeficienții m și n, reali.*

5. *Să se arate că ecuațiile*

$$y = mx + n,\ y = m'x + n' \tag{4}$$

reprezintă două drepte paralele dacă și numai dacă $m = m'$ și $n \neq n'$.

6. *Să se arate că ecuațiile (4) reprezintă două drepte perpendiculare dacă și numai dacă*

$$mm' + 1 = 0.$$

7. *Fie $M_0(x_0, y_0)$, $M_1(x_1, y_1)$ două puncte distincte și fie k un număr real diferit de 1. Considerăm punctul $P(x', y')$ de coordonate*

$$x' = \frac{x_0 - kx_1}{1-k},\quad y' = \frac{y_0 - ky_1}{1-k}. \tag{6}$$

Să se arate că:

$$d(M_0, P) = \left|\frac{k}{1-k}\right| d(M_0, M_1),\ d(M_1, P) = \left|\frac{1}{1-k}\right| d(M_0, M_1). \tag{7}$$

și să se deducă implicațiile:

$k < 0 \Rightarrow d(M_0, P) + d(P, M_1) = d(M_0, M_1),\ P \in |\, M_0M_1 \,|$.

$0 < k < 1 \Rightarrow d(M_1, P) - d(P, M_0) = d(M_0, M_1),\ M_0 \in |\, M_1P \,|$.

$k > 1 \Rightarrow d(M_0, P) - d(P, M_1) = d(M_0, M_1, M_1 \in |\, M_0P \,|$.

8. *Să se arate că, oricare ar fi numărul real $k \neq 1$, formulele (6) definesc coordonatele unui punct P situat pe dreapta M_0M_1, astfel încît*

$$d(M_0, P) = |\, k \,|\, d(M_1, P). \tag{8}$$

Deci punctul P împarte segmentul $|\, M_0M_1 \,|$ în raportul $|\, k \,|$.

Definiție. Dacă o dreaptă d este definită printr-o ecuație de forma $y = mx + n$, se spune că m reprezintă coeficientul unghiular al dreptei d.

22. Aplicații practice

1. Determinarea raportului distanțelor de la Pămînt la Lună și Soare

Prima determinare a acestui raport a fost făcută de Aristarch, care a măsurat unghiul $\widehat{SPL}$ într-un moment în care Luna se vede luminată nu-

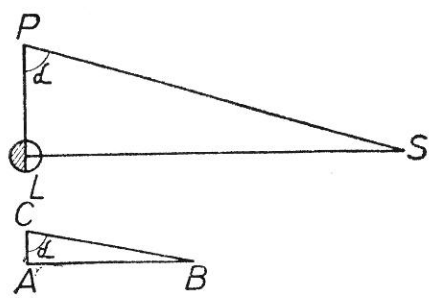

Fig. I.94

mai jumătate (în primul pătrar, 7 zile după luna nouă, sau în ultimul pătrar, 14 zile după primul pătrar).

Considerînd un triunghi dreptunghic ABC, avînd $\hat{C} \equiv \widehat{SPL}$, vom avea (fig. I.94)

$$\frac{|SP|}{|PL|} = \frac{|CB|}{|AC|} = \frac{1}{\cos \widehat{SPL}}$$

2. Măsurarea înălțimii unui edificiu cu ajutorul umbrei lăsate de razele solare

Să presupunem că vrem să măsurăm înălțimea unui edificiu $[AB]$ cu ajutorul umbrei $[AM]$ lăsate de razele solare. În acest scop, utilizăm un stîlp vertical $[CD]$ de înălțime cunoscută, care lasă umbra $[CN]$. Razele solare fac cu suprafața pămîntului unghiuri congruente între ele. Se formează deci două triunghiuri dreptunghice asemenea ABM și CDN, din care deducem (fig. I.95)

$$\frac{|AB|}{|CD|} = \frac{|AM|}{|CN|},$$

deci avem

$$|AB| \equiv \frac{|AM|}{|CN|} \cdot |CD|.$$

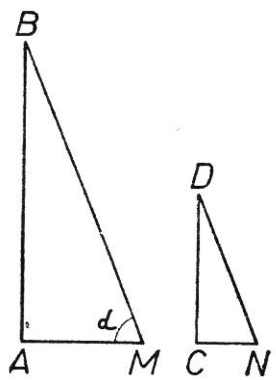

Fig. I.95

Segmentele $|AM|$, $|CN|$ pot fi calculate prin măsurători și deducem mărimea înălțimii $[AB]$.

Această metodă a fost folosită de *Thales* pentru calcularea înălțimii piramidelor.

3. Măsurarea razei Pămîntului

Fie A și S două puncte pe un meridian C al suprafeței Pămîntului. Dacă S se găsește pe Tropicul nordic, va exista un moment al anului (21 iunie, ora 12) în care razele solare cad în S exact pe direcția razei $|OS|$, deci vertical. Dacă, la același moment, razele Soarelui fac cu verticala lui A un unghi de $\alpha°$,

atunci unghiul $\widehat{AOS}$ va avea aceeași măsură de $\alpha°$. Cunoscînd distanța D de la A la S, vom putea calcula raza R a Pămîntului din formula (fig. I.96)

$$\frac{\alpha}{360} = \frac{D}{2\pi R}$$

sau

$$2\pi R = \frac{360}{\alpha} D.$$

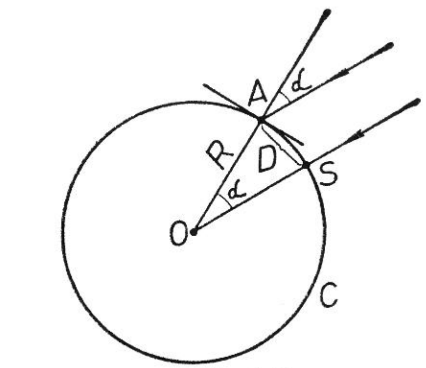

Fig. I.96

Eratostene a utilizat această metodă, considerînd orașele *Alexandria* (A) și *Syene (Assuan)* (S). Avînd prin măsurători $\alpha° = 7°12'$ și $D = 5\,000$ stadii, a obținut $2\pi R = 250\,000$ stadii. Un stadiu egiptean fiind de 157,5 m, aceasta dă $2\pi R = 39\,375$ km, valoare foarte apropiată de cea adevărată: 40 009 152 m.

În același timp, *Eratostene* a determinat poziția tropicelor, ca fiind la latitudinea de 23°51'20", făcînd o eroare de numai 24'.

Menționăm că astăzi orașul Assuan, fostul Syene, nu se mai găsește pe Tropic.

4. Determinarea distanței de la Pămînt la Soare

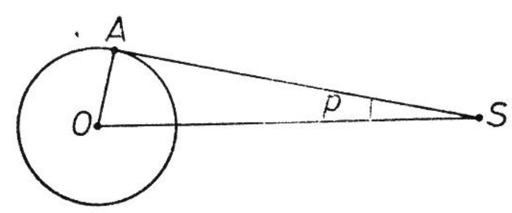

Fig. I.97

Fie A un punct pe suprafața Pămîntului. Dacă se cunoaște unghiul p făcut de linia orizontului AS cu dreapta OS, care unește centrul Pămîntului cu Soarele, putem calcula distanța $d(O, S)$ din formula (fig. I.97)

$$|OS| \equiv \frac{|OA|}{\sin p}.$$

Unghiul p, numit *paralaxă orizontală*, este de aproximativ 8", 780 și se obține

$$d(O, S) = 149\,500\,000 \text{ km}.$$

5. Efectul Doppler

Un mobil M se deplasează pe o dreaptă cu viteză constantă v emițînd cîte un semnal sonor la intervale de timp de T secunde. Se întreabă la ce intervale T' sînt recepționate semnalele în punctul fix O, cunoscînd viteza sunetului $V = 340$ m/s și admițînd că O este pe dreapta pe care se deplasează M.

Răspuns. La momentul $t_n = nT$, mobilul se va găsi la distanța $d(O, M_n) = a + nTv$, unde am notat cu a distanța $d(O, M)$ la momentul $t = 0$ (fig. I. 98). Semnalul emis la momentul t_n va ajunge în punctul O la momentul $t'_n = t_n + \frac{a + nTv}{V}$. Semnalul emis la momentul t_{n+1} va ajunge în punctul O la momentul $t'_{n+1} = t_{n+1} + \frac{a + (n+1)Tv}{V}$.

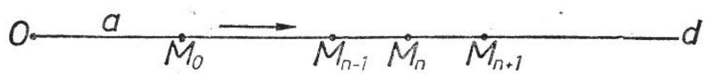

Fig. I.98

Avem

$$T' = t'_{n+1} - t'_n = T + \frac{Tv}{V} = T\frac{V+v}{V} = T\frac{v+340}{340} = T\left(1 + \frac{v}{340}\right).$$

Dacă M se depărtează de O, $(v > 0)$ avem $T' > T$, iar dacă M se apropie de M, $(v < 0)$, avem $T' < T$. Dacă $v = -340$ m/s, toate semnalele vor fi recepționate în același moment.

Exerciții

1. *Să se arate că semiplanele limitate de dreapta $d: ax + by + c = 0$ sînt definite de formulele $p' = \{M(x, y);\ ax + by + c < 0\}$ și $p'' = \{M(x, y);\ ax + by + c > 0\}$.*

2. *Să se arate că punctele $M(x, y)$, care verifică un sistem de inecuații liniare*

$$ax + by + c \geqslant 0,\quad a'x + b'y + c' \geqslant 0,\quad a''x + b''y + c'' > 0,\ \ldots$$

formează o mulțime convexă.

3. *Să se arate că interiorul unui triunghi poate fi definit printr-un sistem de trei inecuații liniare. Să se scrie aceste inecuații în cazul în care vîrfurile triunghiului sînt $A(1, -8)$, $B(-2, 3)$ și $C(1, 1)$.*

4. *Să se arate că proiecția interiorului unui triunghi pe o dreaptă este un segment.*

5. *Trei centrale electrice situate în orașele A, B, C furnizează curent electric la prețul de $(ad + b)$ lei/kw unde a, b sînt constante pozitive date, iar d reprezintă distanța de la centrala respectivă la consumator. Să se indice pe o figură zonele deservite de fiecare din cele trei centrale, în condițiile în care consumatorii caută să obțină curentul electric la prețul minim.*

6. *Se va trata aceeași problemă, presupunînd că sînt disponibile patru centrale electrice, în patru orașe A, B, C, D. Cazuri particulare: $ABCD$ este un pătrat, un paralelogram sau un trapez.*

7. *Un călător dorește să pătrundă în interiorul unui teren, împrejmuit de un hotar avînd forma unui poligon. Cum își va alege punctul de acces, astfel încît, mergînd în linie dreaptă, să parcurgă drumul minim pînă la hotar?*

Capitolul II — Cercul

1. Definiții

Vom presupune, ca și în capitolele precedente, că a fost ales un segment etalon m, cu ajutorul căruia asociem fiecărui segment $|AB|$ raportul $|AB|/m$, ce va fi numit *lungimea*, în unități m, a segmentului $|AB|$, sau mai simplu, lungimea segmentului $|AB|$. Lungimea unui segment este un număr real pozitiv, care poate fi notat $\overline{AB}$.

Fiind date două puncte A, B, *distanța* între aceste puncte, în unități m, este numărul real 0 dacă $A = B$ și numărul pozitiv $\overline{AB}$, dacă $A \neq B$. Distanța între punctele A, B va fi notată $d(A, B)$.

Toate figurile considerate sînt luate într-un plan fixat.

Definiție. **Fie O un punct și R un număr pozitiv. Se numește cerc de centru O și rază R locul geometric (mulțimea) al punctelor M, pentru care $d(O, M) = R$. Notînd prin $C(O, R)$ acest loc geometric,** avem deci (fig. II.1)

$$C(O,R) = \{M;\ d(O, M) = R\}.$$

Interiorul cercului $C(O, R)$ este mulțimea (fig. II.2)

$$\text{int } C(O, R) = \{P;\ d(O, P) < R\},$$

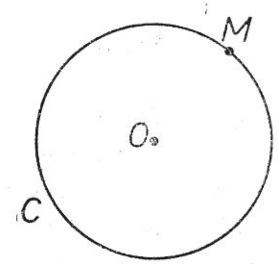

Fig. II.1

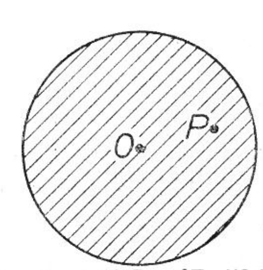

Fig. II.2

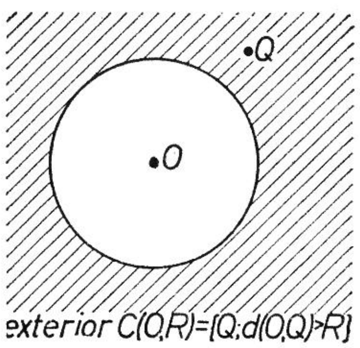

Fig. II.3

iar *exteriorul* cercului $C(O, R)$ (fig. II.3) este definit prin formula

$$\text{ext } C(O, R) = \{Q;\ d(O, Q) > R\}.$$

Discul de centru O și rază R este mulțimea

$$D(O, R) = \{A;\ d(O, A) \leqslant R\} = \\ = \text{int } C(O, R) \cup C(O, R).$$

Din axioma de purtare congruentă a segmentelor rezultă că:

Orice dreaptă d, care trece prin punctul O, intersectează cercul $C(O, R)$ în două puncte A, B astfel ca O să fie mijlocul segmentului $|AB|$ (fig. II.4).

Rezultă că *cercul $C(O, R)$ este o figură simetrică față de centrul O.*

Dacă o dreaptă d trece prin centrul cercului $C(O, R)$ și taie acest cerc în punctele A, B, se spune că segmentul $|AB|$ este *diametrul* determinat de dreapta d în cercul $C(O, R)$.

Orice punct al segmentului $|AB|$ este un punct interior cercului $C(O, R)$, deoarece pentru $Q \in |AB|$, avem $d(O, Q) < d(O, A) = d(O, B) = R$.

Fie Q un punct pe diametrul $|AB|$ și fie d' perpendiculara ridicată în Q pe dreapta $d = AB$ (fig. II.5). Pe dreapta d' există două puncte M, N

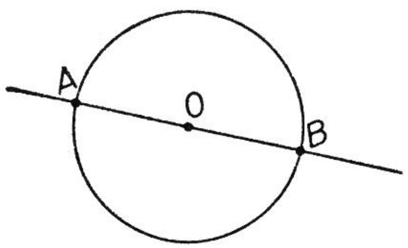

Fig. II.4

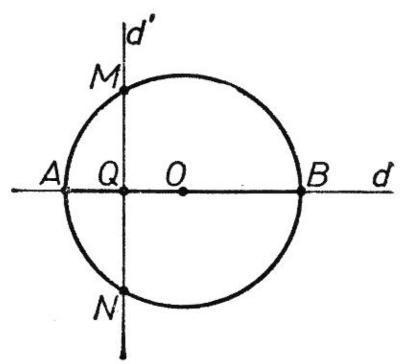

Fig. II.5

astfel ca $d(Q, M) = d(Q, N) = \sqrt{R^2 - d(O, Q)^2}$ și $Q \in |MN|$. Vom avea, aplicînd teorema lui Pitagora, $d(O, M) = d(O, N) = R$, deci punctele M, N aparțin cercului $C(O, R)$. Punctele M, N sînt simetrice față de dreapta d. Cînd punctul Q descrie diametrul $|AB|$, punctele M, N descriu cercul $C(O, R)$, exceptînd punctele A, B. Deci punctele cercului $C(O, R)$ se împart în perechi de puncte simetrice față de diametrul $|AB|$, cu excepția punctelor A, B, care sînt fiecare propriul său simetric față de AB.

Teoremă. Interiorul unui cerc este o mulțime convexă.

Demonstrație. Trebuie să demonstrăm că, dacă A, B sînt două puncte interioare cercului $C = C(O, R)$ (fig. II.6) atunci pentru orice punct $Q \in |AB|$ avem $Q \in \text{int } C$. Deci trebuie să demonstrăm implicația

$$d(O, A) < R,\ d(O, B) < R.$$
$$Q \in |AB| \Rightarrow d(O, Q) < R.$$

Dar la pag. 32 am demonstrat că segmentul care unește un vîrf al unui triunghi cu un punct situat pe latura opusă acelui vîrf este mai mic decît cea mai mare din laturile ce pornesc din vîrful considerat. Implicația precedentă este deci dovedită.

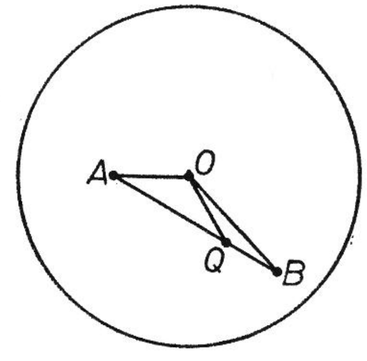

Fig. II.6

Intersecția unei drepte cu un cerc

Vom presupune cercul $C = C(O, R)$ fixat și vom studia intersecția unei drepte d cu cercul C, considerînd toate cazurile posibile.

Dacă dreapta d trece prin centrul O, intersecția $d \cap C$ este formată din două puncte simetrice față de punctul O (fig. II.4).

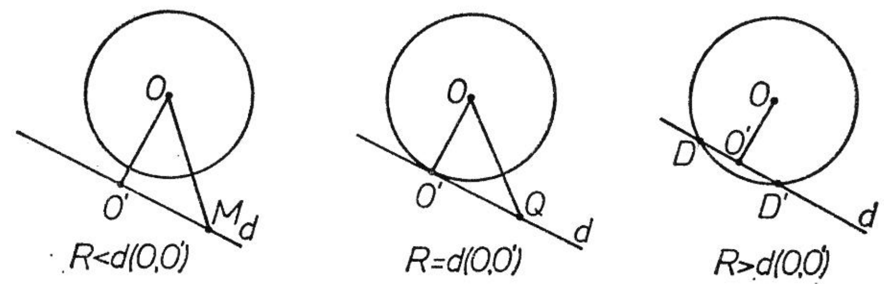

Fig. II.7

Să presupunem atunci că d nu trece prin O și să notăm prin O' proiecția ortogonală a punctului O pe dreapta d. Dreapta $d' = OO'$ este atunci perpendiculară pe d. Pentru un punct oarecare $M \in d$ avem $d(O, M) = \sqrt{d(O, O')^2 + d(O', M)^2} \geqslant d(O, O')$.

Rezultă că dacă $d(O, O') > R$, atunci toate punctele dreptei d sînt exterioare cercului C și intersecția $C \cap d$ este vidă (fig. II.7).

Dacă $d(O, O') = R$, O' aparține cercului C și, pentru orice punct $Q \in d$ diferit de O', avem $d(O, Q) > R$, deci $Q \notin C$. Aceasta înseamnă că, în cazul

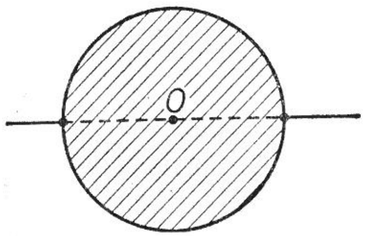

Fig. II.8

$d(O, O') = R$, O' este unicul punct comun dreptei d și cercului C. Se spune că dreapta d este *tangentă* în O' cercului C.

Dacă $d(O, O') < R$, există două puncte D, D' pe dreapta d astfel ca $d(O', D) = d(O', D') = \sqrt{R^2 - d(O, O')^2}$, $O' \in |DD'|$. Punctele D, D' sînt punctele ce formează intersecția $d \cap C$ (fig. II.7).

În rezumat:

Un cerc și o dreaptă pot avea cel mult două puncte comune. Dacă dreapta d are un singur punct comun cu cercul C, atunci d este tangentă la C într-un punct O' și este perpendiculară pe dreapta ce unește punctul O' cu centrul cercului C.

Dacă o dreaptă d intersectează cercul C în două puncte distincte, se spune că d este o *secantă* la C.

Arce și corzi într-un cerc

Fie cercul $C = C(O, R)$ și dreapta d trecînd prin două puncte A, B ale cercului C, deci astfel ca $d \cap C = \{A, B\}$. Vom presupune că O nu aparține dreptei d, deci că $|AB|$ nu este un diametru, și că $A \neq B$. Vom extinde în primul rînd o proprietate verificată pentru un diametru (fig. II.9):

Dacă A, B sînt două puncte distincte ale unui cerc C, atunci

(1) $$|AB| = AB \cap \operatorname{int} C.$$

Demonstrație. Trebuie să demonstrăm incluziunile.

(1′) $$|AB| \subset \operatorname{int} C \cap d, \quad \operatorname{int} C \cap d \subset |AB|, \; d = AB.$$

Dacă $P \in |AB|$ (fig. II.10) și dacă notăm prin O' mijlocul segmentului $|AB|$, avem $d(O', P) < d(O', A) = d(O', B)$, deci $d(O, P) = \sqrt{d(O, O')^2 + d(O', P)^2} < \sqrt{d(O, O')^2 + d(O', A)^2} = d(O, A) = R$, deci $P \in \operatorname{int} C$. Avem de asemenea $P \in AB$, deci în definitiv $P \in \operatorname{int} C \cap d$.

Reciproc, dacă $P \in \operatorname{int} C \cap d$, atunci $d(O', P) = \sqrt{d(O, P)^2 - d(O, O')^2} < \sqrt{R^2 - d(O, O')^2} = d(O', A)$, deci $P \in |AB|$.

În general, un segment $|AB|$, avînd capetele A, B pe un cerc C, se numește *coardă* în cercul C. Vom considera în acest paragraf numai corzi, care nu sînt diametri.

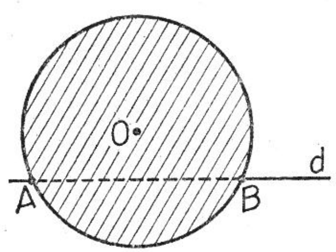

Fig. II.9

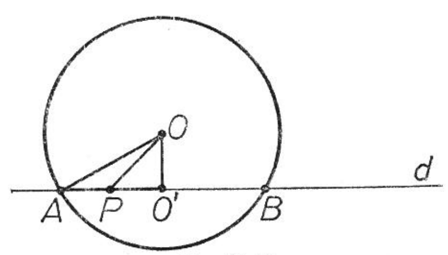

Fig. II.10

SAU ... SCURT:
$0 < d(O,[AB]) < R$ – condiția ca $[AB]$ să aparțină int C

Din considerațiile făcute anterior rezultă că *proiecția centrului cercului C pe o coardă $|AB|$ este mijlocul acestei corzi.*

Din teorema I de congruență rezultă că:

Dacă $|AB|$, $|A'B'|$ sînt două corzi în cercul C, atunci relația $\widehat{AOB} \equiv \widehat{A'OB'}$ implică $d(A, B) = d(A', B')$ (fig. II. 11).

Din teorema III de congruență rezultă proprietatea reciprocă:

Dacă $d(A, B) = d(A', B')$, atunci $\widehat{AOB} \equiv \widehat{A'OB'}$.

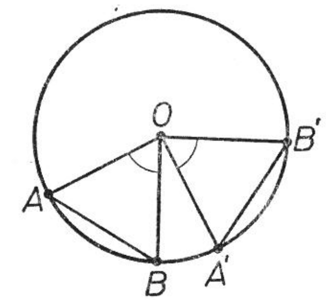

Fig. II.11

Fie d dreapta ce conține coarda $|AB|$ în cercul C, astfel ca $O \notin d$. Fie S' semiplanul limitat de d și care conține punctul O și fie S'' semiplanul opus. Mulțimile

$$C' = S' \cap C, \quad C'' = S'' \cap C$$

se numesc *arcele* limitate de punctele A, B pe cercul [illegible] se numește *arcul mare*, iar C'' *arcul mic*, avînd capetele A, B (fig. II.12).

Fie M un punct situat pe arcul mic C'' (fig. II.13). Atunci punctele O, M sînt în semiplane opuse față de AB, deci segmentul $|OM|$ are un punct comun

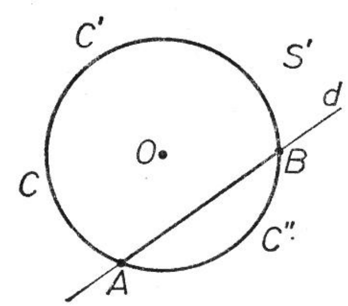

Fig. II.12

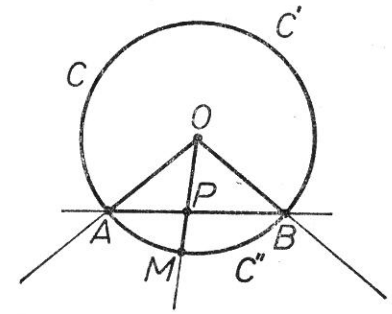

Fig. II.13

P cu dreapta d. Punctul P este interior cercului C și aparține dreptei AB, deci $P \in AB \cap \operatorname{int} C = |AB|$. Punctele A, B fiind situate pe laturile unghiului $\widehat{AOB}$, rezultă că P este un punct interior unghiului $\widehat{AOB}$. Deci:

Punctele arcului mic C'' aparțin interiorului unghiului $\widehat{AOB}$.

Reciproc, dacă M este un punct pe cercul C, interior unghiului $\widehat{AOB}$, atunci semidreapta $|OM$ intersectează segmentul $|AB|$ într-un punct P și $d(O, P) < d(O, M) = R$, deci $P \in |OM|$; aceasta înseamnă că M este în semiplanul opus punctului O față de dreapta AB, deci $M \in S''$. Dar $M \in C$, deci $M \in S'' \cap C = C''$. Deci:

Punctele cercului C, interioare unghiului $\widehat{AOB}$, aparțin arcului mic C''.

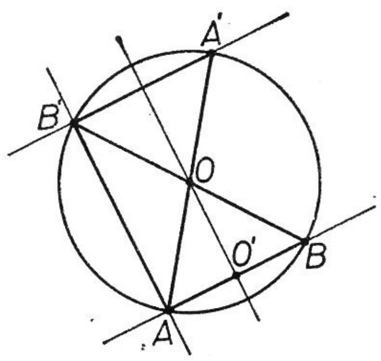

Fig. II.14

Teoremă. **Dacă $|AB|$ este o coardă în cercul C, astfel ca $O \notin AB$ și dacă A', B' sînt simetricele punctelor A, B față de centrul O, atunci avem $AB' \perp AB$ și $A'B' \parallel AB$ (fig. II.14).**

Demonstrație. Fie O' mijlocul segmentului $|AB|$. Din teorema lui Thales restrînsă rezultă $AB' \parallel OO'$. Dar $OO' \perp AB$, deci $AB' \perp AB$. La fel se arată că $AB' \perp A'B'$ și rezultă $A'B' \parallel AB$.

Punctele A', B' aparțin semiplanului S', deci arcului mare C'.

2. Unghiuri înscrise într-un cerc

Fie $|AB|$ o coardă în cercul C, de centru O, astfel ca $O \notin AB$. Notăm prin C', respectiv C'' arcul mare și arcul mic definite de punctele A, B pe cercul C.

Teoremă. **Dacă $M \in C'$, atunci $2\widehat{AMB} \equiv \widehat{AOB}$ și $\widehat{AMB}$ este un unghi ascuțit.**

Demonstrație. Fie M' simetricul punctului M față de centrul O. Distingem mai multe cazuri:

1. $M' = A$. Aplicînd teorema 2 a unghiului exterior triunghiului isoscel MOB, obținem $\widehat{AOB} = \widehat{M'OB} \equiv 2\widehat{OMB} = 2\widehat{AMB}$ (fig. II.15).

Cazul $M' = B$ se tratează în același fel.

2. $M' \in C''$. În acest caz, punctele M, M' sînt în semiplane opuse față de dreapta AB, deci segmentul $|MM'|$ are un punct comun P cu dreapta AB (fig. II.16). Punctul P este interior cercului C, deci aparține segmentului

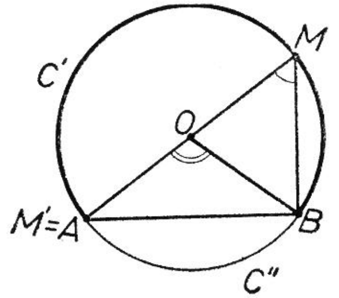

Fig. II.15

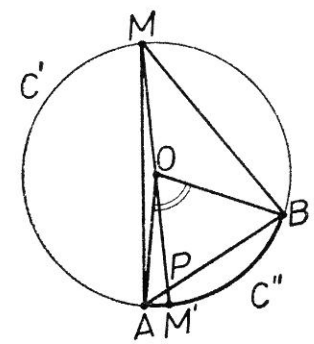

Fig. II.16

$|AB| = AB \cap \text{int } C$. Rezultă că semidreapta $|MP = |MM'$ este interioară unghiului $\widehat{AMB}$ și atunci $\widehat{AMB} \equiv \widehat{AMM'} + \widehat{M'MB}$.

Rezultă $2\widehat{AMB} \equiv 2\widehat{AMM'} + 2\widehat{M'MB} \equiv \widehat{AOM'} + \widehat{M'OB} = \widehat{AOB}$.

3. $M' \in C'$. În acest caz, punctele M, M' sînt în același semiplan față de dreapta AB, deci segmentul $|MM'|$ nu intersectează dreapta AB(fig.II.17). Atunci nici segmentul $|AB|$ nu intersectează dreapta MM', deoarece un punct din intersecția $|AB| \cap MM'$ fiind interior cercului C, va fi pe segmentele $|AB|$, $|MM'|$, deci s-ar găsi în $|MM'| \cap AB$. Rezultă că semidreptele $|MA$, $|MB$ sînt de aceeași parte a dreptei MM'. Atunci fie $|MB$ este interioară unghiului $\widehat{AMM'}$, fie $|MA$ este interioară unghiului $\widehat{BMM'}$. În primul caz, avem $\widehat{AMM'} \equiv \widehat{AMB} + \widehat{BMM'}$, deci $\widehat{AMB} \equiv \widehat{AMM'} - \widehat{BMM'}$, $2\widehat{AMB} \equiv 2\widehat{AMM'} - 2\widehat{BMM'} \equiv \widehat{AOM'} - \widehat{BOM'} \equiv \widehat{AOB}$. Al doilea caz, se obține din primul, schimbînd A cu B.

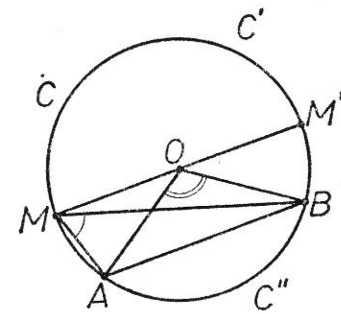

Fig. II.17

Teorema este demonstrată.

Corolar. **Dacă M, P sînt două puncte oarecare pe arcul mare limitat de punctele A, B pe cercul C, atunci $\widehat{AMB} \equiv \widehat{APB}$, și $\widehat{AMB}$ este un unghi ascuțit.**

Teoremă. **Dacă N este un punct pe arcul mic C'', limitat de punctele A, B pe cercul C, atunci, pentru orice punct $M \in C'$, avem**

(2) $$\widehat{ANB} + \widehat{AMB} \equiv \textit{unghi alungit} \quad \text{(fig. II.18).}$$

Demonstrație. Este suficient să demonstrăm formula (2) pentru o alegere particulară a punctului M pe arcul C'. Să luăm $M = N'$, simetricul lui N față de centrul O. Segmentele $|NN'|$, $|AB|$ au un punct comun P și avem (fig. II.19).

$$\widehat{ANB} \equiv \widehat{ANN'} + \widehat{N'NB}, \quad \widehat{AMB} = \widehat{AN'B} \equiv \widehat{AN'N} + \widehat{NN'B}.$$

În triunghiurile dreptunghice ANN', BNN' avem $\widehat{AN'N} + \widehat{ANN'} \equiv \text{dr}$, $\widehat{BN'N} + \widehat{BNN'} \equiv \text{dr}$, unde dr este un unghi drept. Rezultă

$$\widehat{ANB} + \widehat{AN'B} \equiv 2 \text{ dr} = \text{unghi alungit.}$$

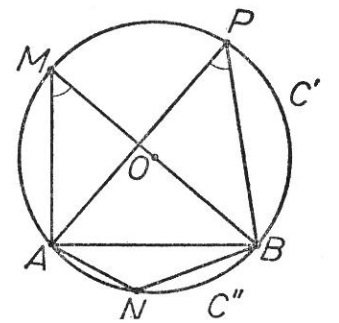

Fig. II.18

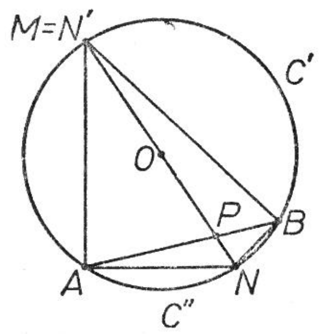

Fig. II.19

Formula (2) este acuma o consecință a corolarului precedent.

Din formula (2) rezultă următorul

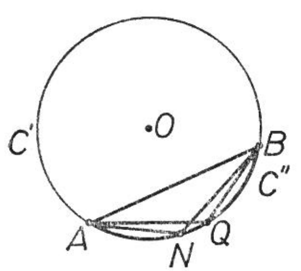

Fig. II.20

Corolar. Dacă N, Q sînt două puncte arbitrare pe arcul mic C'', limitat de punctele A, B pe cercul C, atunci $\widehat{ANB} \equiv \widehat{AQB}$ și $\widehat{ANB}$ este un unghi obtuz (fig. II.20).

Tangenta t la cercul C într-un punct $A \in C$ poate fi considerată ca o poziție limită a unei secante la cerc, duse prin punctul A. Teorema următoare este o completare a teoremelor date anterior.

Teoremă. Fie t tangenta în punctul $A \in C$ la cercul C și fie s semidreapta $t \cap S''$, unde S'' este semiplanul limitat de secanta AB, opus punctului O. Dacă $B \in C$, avem $\widehat{2sh} \equiv \widehat{AOB}$, unde $h = |AB$.

Demonstrație. Unghiul $\widehat{sh}$ este complementul unghiului $\widehat{OAB}$, deci $\widehat{2sh} \equiv 2\text{dr} - \widehat{2OAB} \equiv \widehat{AOB}$ (fig. II.21).

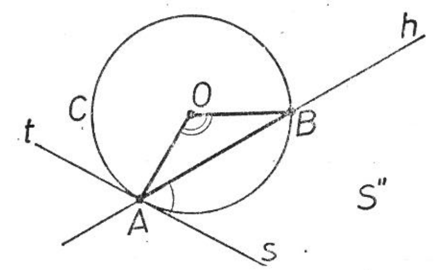

Fig. II.21

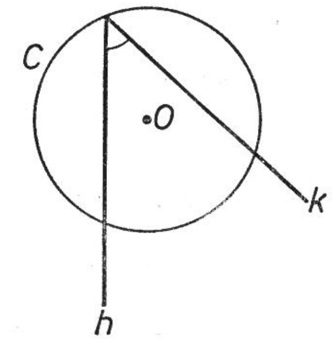

Fig. II.22

Definiție. Un unghi $\widehat{hk}$, avînd vîrful pe cercul C și astfel ca laturile h, k să intersecteze cercul C, se numește unghi înscris în cercul C (fig. II.22).

Primele două teoreme demonstrate în acest paragraf exprimă proprietăți ale unghiurilor înscrise într-un cerc.

Exerciții

1. *Fie $ABCD$ un dreptunghi înscris în cercul K. Să se arate că $|AC|$ este un diametru în cercul K. Fie M un punct pe arcul mic $\overset{\frown}{BC}$. Să se arate că proiecția punctului M pe dreapta AB este un punct exterior segmentului $|AB|$.*

2. *Fie ABC un triunghi cu toate unghiurile ascuțite, înscris în cercul K și fie M un punct pe arcul mic $\overset{\frown}{BC}$. Fie A' punctul diametral opus lui A în cercul K. Să se arate că $A' \in \overset{\frown}{BC}$. Apoi să se arate că dacă $M \in \overset{\frown}{A'B}$, atunci proiecția lui M pe dreapta AB este exterioară segmentului $|AB|$, iar proiecția punctului M pe dreapta AC aparține segmentului $|AC|$.*

3. *Să se examineze pozițiile punctelor considerate în exercițiul 3, în cazul în care unul din unghiurile $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ este obtuz.*

3. Măsura unui arc de cerc

$\frac{L_c}{d} = \pi$

Se știe că lungimea unui cerc de rază R, este $2\pi R$, unde π este un număr real, ale cărui prime zecimale sînt date de *formula lui Ludolf*:

$$\pi = 3{,}14159265358979323846264338327950288\ldots$$

Aproximările numărului π se obțin considerînd poligoane regulate convexe, înscrise într-un cerc de rază 1, și avînd numărul laturilor de forma 2^k, unde k este un număr întreg mai mare decît 1.

Exerciţii

1. *Dacă un poligon regulat înscris într-un cerc de rază 1 are latura de lungime x, atunci poligonul regulat cu număr dublu de laturi va avea lungimile laturilor egale cu*

$$\sqrt{2-\sqrt{4-x^2}}.$$

(Indicaţie. Se aplică teorema lui Pitagora.*)*

2. *Această formulă permite să calculăm lungimile laturilor poligoanelor convexe regulate, înscrise într-un cerc de rază 1 şi avînd 4, 8, 16, 32, 64, ... laturi. Se obţin succesiv lungimile*

$$\sqrt{2},\ \sqrt{2-\sqrt{2}},\ \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}},\ \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}},$$

$$\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}},\ \ldots$$

Semiperimetrele acestor poligoane au valorile aproximative

2,8284271; 3,0614674; 3,1214451;
3,1365485; 3,1403311.

Pentru poligonul regulat cu 2^{15} laturi, semiperimetrul are valoarea aproximativă 3,1415926.

Doi diametri perpendiculari ai unui cerc de rază 1 împart circumferinţa cercului în patru arce congruente, care au aceeaşi lungime, egală cu $\pi/2$. Dacă împărţim circumferinţa cercului în 2^k arce egale, luînd $k = 2, 3, 4, \ldots$, obţinem diviziuni ale circumferinţei în arce de lungimi $\pi \cdot 2^{-k+1}$; aceste arce pot fi utilizate ca etalon pentru calculul aproximativ al unui arc de cerc arbitrar. Considerînd aproximări din ce în ce mai bune, se obţin valori din ce în ce mai apropiate de lungimea exactă a arcului considerat. Lungimea exactă este un număr real pozitiv.

4. Măsura unghiulară a unui arc de cerc

Reamintim că unghiurile se măsoară în grade sexagesimale, în radiani sau în unghiuri drepte. Uneori, se folosesc *gradele centezimale*, un unghi drept avînd 100 grade centezimale. Oricare ar fi sistemul de măsurare, două unghiuri au aceeaşi măsură dacă şi numai dacă sînt congruente.

Exerciţii

1. *Să se indice măsura în grade sexagesimale a unui unghi de un radian.*

R. $\dfrac{180^\circ}{\pi} \cong 57{,}30^\circ$.

2. *Să se exprime măsura în radiani a unui unghi de 1 grad sexagesimal.*

R. $\dfrac{\pi}{180} \cong 0{,}0175$.

3. *Care este eroarea care se face dacă se calculează lungimea unui cerc de rază egală cu distanţa ce o parcurge lumina în 8,75 ani (distanţa de la Pămînt la steaua Sirius, cea mai strălucitoare) dacă se ia pentru π valoarea aproximativă dată de formula lui Ludolf?*

R. 10^{-15} mm.

Atunci cînd sistemul de măsurare a unghiurilor nu este fixat, notăm prin măs $\widehat{hk}$ măsura unghiului $\widehat{hk}$.

Fiind date două puncte distincte A, B pe un cerc C de centru O, ştim că punctele A, B împart cercul C în două arce, care sînt congruente dacă $|AB|$ este un diametru; dacă $|AB|$ nu este un diametru, dintre cele două arce distingem arcul mare şi arcul mic (fig. II.23). În general, fiecare din arcele limitate de punctele A, B pe cercul C se notează indicînd un punct al arcului. Astfel, dacă M este un punct pe cercul C, diferit de A şi de B, notăm prin $\overset{\frown}{AMB}$ arcul limitat de A şi B şi conţinînd punctul M.

Arcul mic limitat de punctele A, B este intersecţia cercului C cu interiorul unghiului $\widehat{AOB}$. Notînd prin M un punct pe arcul mic, definim *măsura unghiulară* a arcului $\overset{\frown}{AMB}$ prin formula

(1) $$\text{măs } \overset{\frown}{AMB} = \text{măs } \widehat{AOB}.$$

Dacă N este un punct situat pe arcul mare limitat de A şi B, definim măsura unghiulară a arcului $\overset{\frown}{ANB}$ punînd

(2) $$\text{măs } \overset{\frown}{ANB} = 4 \text{ măs dr} - \text{măs } \overset{\frown}{AMB},$$

unde dr este un unghi drept (fig. II.24).

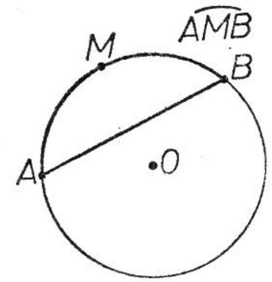

Fig. II.23

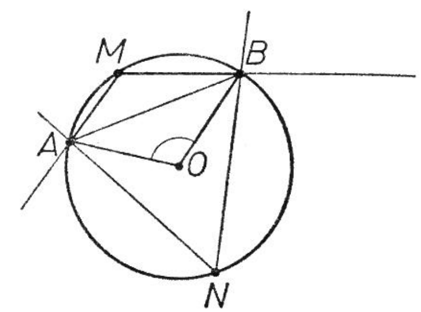

Fig. II.24

Dacă $|AB|$ este un diametru în cercul C, definim

(3) $$\text{măs } \overset{\frown}{ANB} = \text{măs } \overset{\frown}{AMB} = 2 \text{ măs dr}.$$

În orice din cazuri, avem

(4) $$\text{măs } \overset{\frown}{AMB} + \text{măs } \overset{\frown}{ANB} = 4 \text{ măs dr}.$$

Reamintim că, în grade sexagesimale, avem măs dr $= 90^\circ$, iar în radiani, măs dr $= \pi/2$.

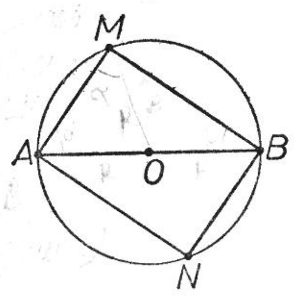

Fig. II.25

Folosind măsura unghiulară a unui arc de cerc, putem formula teorema stabilită în paragraful 2 sub forma următoare:

> **T e o r e m ă. Dacă A, B, M, N sînt patru puncte distincte pe un cerc C astfel ca M şi N se găsesc în semiplane opuse faţă de dreapta AB, atunci**
>
> $$2 \text{ măs } \widehat{AMB} = \text{măs } \widehat{ANB}$$

Dacă $|AB|$ este un diametru, avem (fig. II.25)

$$\text{măs } \widehat{AMB} = \text{măs dr.}$$

5. Unghiuri cu vîrful exterior unui cerc

D e f i n i ţ i e. Numim unghi exterior unui cerc C, orice unghi $\widehat{hk}$, avînd vîrful în exteriorul cercului C şi astfel ca laturile h, k să fie secante sau tangente cercului C.

Ne propunem să demonstrăm acum o teoremă care exprimă măsura unui unghi exterior cu ajutorul măsurilor unghiulare ale arcelor definite de laturile unghiului pe cercul C.

> **T e o r e m ă. Fie A un punct exterior cercului C şi fie B, D, E, F, M, N puncte pe cercul C astfel ca**
>
> $B \in |AF|$, $D \in |AE|$, $|AM| \cap |EF| \neq \emptyset$, $N \in |AM|$ (fig. II.26).
>
> **În aceste condiţii, avem**
>
> $$2 \text{ măs } \widehat{EAF} = \text{măs } \widehat{EMF} - \text{măs } \widehat{BND}.$$

Demonstraţie. Aplicînd teorema a doua a unghiului exterior triunghiului ADF, obţinem

$$\text{măs } \widehat{FAE} = \text{măs } \widehat{FDE} - \text{măs } \widehat{AFD}.$$

Aplicînd în continuare ultima teoremă stabilită în paragraful precedent, avem

$$2 \text{ măs } \widehat{FAE} = 2 \text{ măs } \widehat{EDE} - 2 \text{ măs } \widehat{AFD} = \text{măs } \widehat{EMF} - \text{măs } \widehat{BND}$$

(fig. II.27).

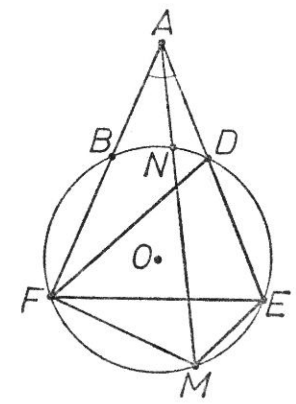

Fig. II.26

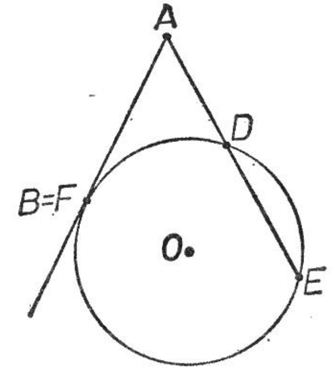

Fig. II.27

Observaţie. Teorema rămîne adevărată dacă $B = F$ sau $D = E$, deci atunci cînd una sau alta (sau amîndouă) din laturile unghiului $\widehat{EAF}$ este (sînt) tangente cercului C.

6. Unghiuri cu vîrful interior unui cerc

D e f i n i ţ i e. Un unghi cu vîrful în interiorul cercului C se numeşte unghi interior acestui cerc.

> **T e o r e m ă Fie $\widehat{hk}$ un unghi interior cercului C, avînd vîrful în punctul A. Fie B, D, E, F, M, N puncte pe cercul C astfel ca**
>
> $B \in h$, $D \in k$, $A \in |BF|$, $A \in |DE|$, $M \in int\ \widehat{hk}$, $A \in |MN|$.
>
> **În aceste condiţii, avem**
>
> $$2 \text{ măs } \widehat{hk} = \text{măs } \widehat{BMD} + \text{măs } \widehat{ENF} \text{ (fig. II.28).}$$

Demonstraţie. Aplicăm teorema a doua a unghiului exterior triunghiului ABE. Obţinem

$$2 \text{ măs } \widehat{hk} = 2 \text{ măs } \widehat{BAD} = 2 \text{ măs } \widehat{EBF} +$$

$$+ 2 \text{ măs } \widehat{BED} = \text{măs } \widehat{ENF} + \text{măs } \widehat{BMD}.$$

A p l i c a ţ i e

Fie C, C_1 două cercuri avînd aceeaşi rază R şi o coardă comună $|AB|$. Fie M, M_1 două puncte situate pe cele două cercuri şi simetrice faţă de dreapta AB (fig. II.29). Să considerăm arcele $a = \widehat{AMB}$, $b = \widehat{AM_1B}$, $a' = C - a - \{A, B\}$, $b' = C_1 - b - \{A, B\}$.

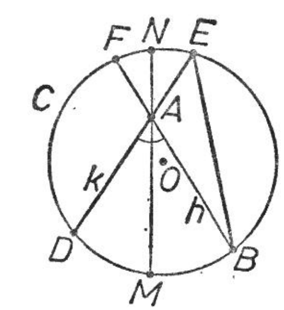

Fig. II.28

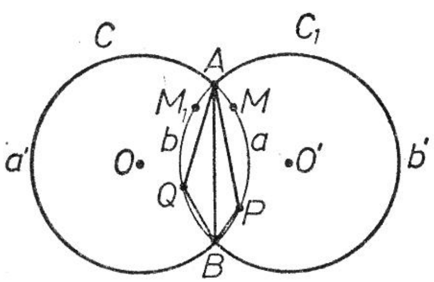

Fig. II.29

Pentru orice punct $P \in a$ și pentru orice punct $Q \in b$ avem $\widehat{APB} \equiv \widehat{AQB}$, deoarece $2\text{măs}\,\widehat{APB} = 2\text{măs}\,\widehat{AQB} = \text{măs}\,a' = \text{măs}\,b'$.

Arcele a, b se găsesc în semiplane opuse față de dreapta AB. Fie S un punct situat în același semiplan cu arcul a. Dacă S este exterior cercului C, avem

$$2\text{măs}\,\widehat{ASB} < \text{măs}\,a'$$

iar dacă S este interior cercului C, avem

$$2\text{măs}\,\widehat{ASB} > \text{măs}\,a'.$$

Concluzii asemănătoare se pot deduce pentru punctele situate în același semiplan cu b. Notînd prin α măsura unghiulară a arcului a', putem enunța următoarea proprietate:

Fiind dat un arc de cerc a', avînd capetele A, B, locul geometric al punctelor P din plan, pentru care $\text{măs}\,\widehat{APB} = \frac{1}{2}\,\text{măs}\,a'$, este format din două arce de cerc, simetrice față de dreapta AB și avînd capetele în punctele A, B, unul din aceste arce fiind pe același cerc cu arcul a'.

Arcele a, b, care formează locul geometric indicat, se numesc *arce capabile de unghiul* $\widehat{AMB}$ și limitate de punctele A, B.

Construcția unui arc capabil de un unghi dat

Pentru a construi un arc capabil de un unghi dat $\widehat{hk}$ și avînd capetele date A, B, construim un unghi congruent cu $\widehat{hk}$, avînd vîrful în punctul A și avînd semidreapta $|AB$ drept una din laturi (fig. II.30). A doua latură m a acestui unghi va fi tangentă unui cerc C, care conține un arc capabil de unghiul $\widehat{hk}$. Centrul cercului C va fi punctul de intersecție al mediatoarei segmentului $|AB|$ cu perpendiculara în A pe dreapta ce conține semidreapta m.

Dacă $\widehat{hk}$ este un unghi drept, locul geometric la care ne-am referit este ormat din cercul de diametru $|AB|$, din ca re am scos punctele A, B.

Puterea unui punct față de un cerc

Tot ca aplicație la teoremele referitoare la unghiuri, demonstrate anterior, putem rezolva următoarea problemă:

Fie A, B, A', B' patru puncte pe un cerc C, astfel ca dreptele AB, $A'B'$ să se intersecteze într-un punct P (fig. II.31). Să se demonstreze că

(1) $d(P, A) \cdot d(P, B) = d(P, A') \cdot d(P, B')$.

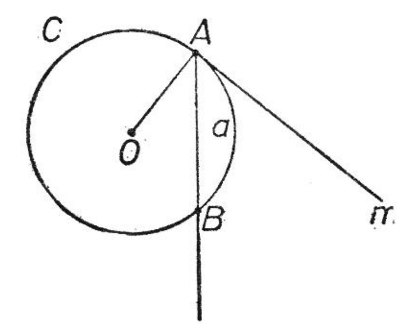

Fig. II.30

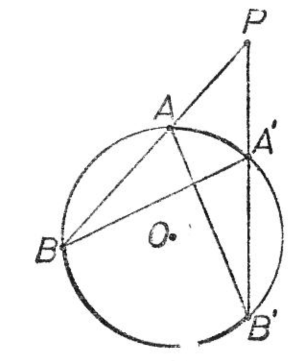

Fig. II.31

Rezolvare. Triunghiurile PAB', $PA'B$ sînt asemenea, avînd unghiul din P comun și $\widehat{PBA'} \equiv \widehat{PB'A}$. Din teorema triunghiurilor asemenea deducem

$$\frac{d(P,A)}{d(P,B')} = \frac{d(P,A')}{d(P,B)}$$

și relația (1) se obține imediat.

Formula (1) poate fi reținută în modul următor:

Dacă o secantă variabilă trece printr-un punct fix P și intersectează un cerc C în punctele A, B, produsul $d(P, A) \cdot d(P, B)$ este constant.

Valoarea constantă a produsului $d(P, A) \cdot d(P, B)$, cînd secanta PAB se rotește în jurul punctului P, se numește *puterea* punctului P față de cercul C.

Puterea unui punct P față de un cerc C, de centru O și rază R, poate fi ușor calculată, dacă se mai cunoaște distanța $d = d(O, P)$.

Dacă $d > R$, punctul P este exterior cercului C. Fie A, B punctele de intersecție ale dreptei OP cu cercul C, astfel ca $A \in |OP|$. Avem $d(P, A) = d - R$, $d(P, B) = d + R$, deci puterea punctului P față de cercul C va fi numărul

$$p(P, C) = (d - R)(d + R) = d^2 - R^2.$$

Dacă $d < R$, P este un punct interior cercului C. Dacă $PO \cap C = \{A, B\}$ și $P \in |OA|$, atunci avem $d(P, A) = R - d$, $d(P, B) = R + d$, deci

$$p(P, C) = R^2 - d^2.$$

Pentru punctele situate pe cerc, puterea p este zero.

Centrul O are puterea R^2.

Uneori puterea unui punct dată de un cerc se consideră cu semn, pentru a distinge cazul în care P este punct exterior de cazul în care P este interior. Anume se definește *puterea cu semn* a punctului P față de cercul C prin formula

$$\bar{p}(P, C) = d(P,A) \cdot d(P,B) \cos \widehat{APB},$$

unde A, B sînt punctele de intersecție ale unei drepte duse prin P cu cercul C. Pentru puncte exterioare avem

$$\bar{p}(P, C) = d^2 - R^2 > 0$$

iar pentru puncte interioare, $\bar{p} = -p$, deci,

$$\bar{p}(P, C) = d^2 - R^2 < 0.$$

Deci puterea cu semn este dată de o aceeași formulă, independent de poziția punctului P, dar semnul ei este pozitiv pentru punctele exterioare cercului C și este negativă pentru punctele interioare.

Exercițiu. *Dacă P este exterior cercului C, să notăm prin r numărul $p(P, C) = \sqrt{d^2 - R^2}$. Să se arate că cercul $C' = C(P, r)$ intersectează cercul C în două puncte T, T' și că dreptele PT, PT' sînt tangente cercului C.*

7. Poziția relativă a două cercuri

Fie $C = C(O, R)$, $C' = C(O', R')$ două cercuri. Notăm $c = d(O, O')$. Dacă $O \neq O'$, dreapta OO' se numește *linia centrelor* cercurilor C, C'.

Teoremă. Două cercuri distincte au cel mult două puncte comune.

Demonstrație (prin reducere la absurd). Presupunem că cercurile C, C' au trei puncte distincte A, B, D în comun. Aceste puncte nu pot fi coliniare, deoarece o dreaptă poate avea în comun cu un cerc cel mult două puncte. Deci punctele A, B, D formează un triunghi. Punctele O, O' trebuie să se găsească pe mediatoarele laturilor triunghiului ABD. Dar aceste mediatoare au un singur punct comun, deoarece două drepte distincte neparalele au exact un punct comun. Deci $O = O'$. Apoi $R = d(O, A) = d(O', A) = R'$. Deci $C = C'$, contrar ipotezei. Rezultă că cercurile C, C' nu pot avea trei puncte distincte în comun.

Dacă două cercuri distincte C, C' au două puncte comune A, B, se spune că C, C' sînt *cercuri secante*. Fiind date două puncte distincte A, B, orice cerc ce conține aceste puncte are centrul pe mediatoarea segmentului $|AB|$. Reciproc, orice punct al acestei mediatoare este centrul unui cerc ce trece prin A și B.

Dacă două cercuri distincte $C = C(O, R)$, $C' = C(O', R')$ au două puncte comune A, B, aceste puncte nu se află pe linia centrelor OO', deci punctele O, O', A formează un triunghi (fig. II.32). Lungimile laturilor acestui triunghi sînt $R = d(O, A)$, $R' = d(O', A)$, $c = d(O, O')$. Rezultă că avem, dacă $R > R'$,

(1) $$0 \leqslant R - R' < c < R + R'.$$

Reciproc, dacă numerele R, R' c verifică inegalitățile (1), atunci cercurile C, C' de centre O, O' situate la distanța c și de raze R, R' sînt secante (vezi Aplicația 2, p. 76).

Exercițiu. *Să se arate că linia centrelor a două cercuri secante este perpendiculară pe coarda comună.*

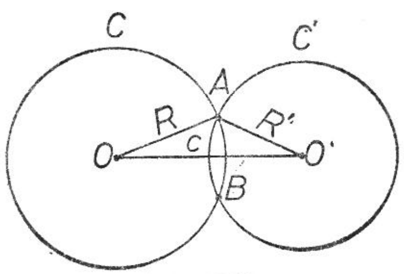

Fig. II.32

Două cercuri, care au un singur punct comun, se numesc *cercuri tangente*.

Dacă două cercuri distincte $C = C(O, R)$, $C' = C(O', R')$ au un punct comun A, atunci $O \neq O'$ și simetricul punctului A față de dreapta OO' este deasemenea punct comun celor două cercuri. Dacă C, C' sînt cercuri tangente, trebuie să avem $A \in OO'$. Deci:

Dacă două cercuri distincte C, C' sînt tangente, atunci punctul lor comun aparține liniei centrelor. Perpendiculara în punctul comun pe linia centrelor este tangentă comună cercurilor C, C'.

Fie A punctul comun cercurilor tangente C, C'. Sînt posibile trei cazuri:

1. $A \in |OO'|$. Atunci O, O' se găsesc în semiplane opuse față de tangenta comună t (fig. II.33). Pentru un punct P interior lui C avem $d(O, P) < R = d(O, A)$, deci P este în același semiplan cu O față de t. Aceeași proprietate este adevărată pentru orice punct $P \in C$ diferit de A. De asemenea, punctele interioare lui C' și punctele de pe C', diferite de A, sînt în același semiplan cu O' față de tangenta comună t. Se spune că cercurile C, C' sînt *tangente exterior*.

2. $O \in |AO'|$. Pentru orice punct P, interior lui C sau situat pe C și distinct de A, avem $d(O', P) < d(O, O') + d(O, P) \leqslant c + R = R'$, deci P este interior cercului C'. Se spune că cercurile C, C' sînt *tangente interior*, cu C interior (fig. II.34).

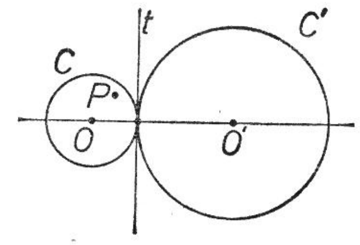

Fig. II.33

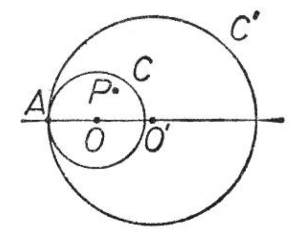

Fig. II.34

3. $O' \in |AO|$. Acest caz este analog cazului precedent, obținîndu-se din acela permutînd cercurile C, C' între ele. Cele două cercuri sînt de asemenea tangente interior, dar cu C' interior.

Pentru două cercuri tangente exterior avem $c = R + R'$, iar pentru două cercuri tangente interior, $c = |R - R'|$.

Rezultă că dacă două cercuri $C = C(O, R)$, $C' = C(O', R')$, cu $c = d(O, O')$, au unul sau două puncte comune, atunci avem

(2) $$|R - R'| \leqslant c \leqslant R + R'.$$

Dacă cercurile $C = C(O, R)$, $C' = C(O', R')$ n-au nici un punct comun, atunci avem fie $c > R + R'$, fie $c < |R - R'|$.

Să presupunem că cercurile C, C' sînt astfel încît $c > R + R'$ (fig. II.35). În acest caz, pentru orice punct $P \in C'$, vom avea $d(O, P) > d(O, O') - d(O', P) = c - R' > R$, deci P este exterior cercului C. Deci toate punctele cercului C' sînt exterioare cercului C. La fel se arată că toate punctele cercului C sînt exterioare cercului C'. De aceea se spune că, în cazul $c > R + R'$, cercurile C, C' sînt *exterioare*.

Dacă $c < |R - R'|$, sînt posibile două cazuri:

1. $R > R'$, $c < R - R'$. În acest caz, $c < R$, deci $d(O, O') < R$, deci O' este punct interior cercului C. Pentru orice punct $P \in C'$ avem $d(O, P) <$

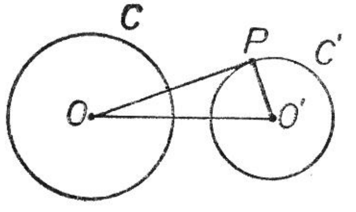

Fig. II.35

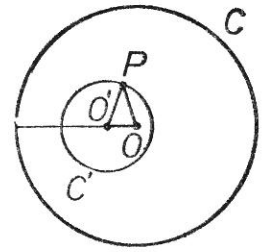

Fig. II.36

$< d(O, O') + d(O', P) = c + R' < R$; deci orice punct al cercului C' este interior cercului C. Se spune că cercul C' este *interior* cercului C (fig. II.36).

2. $R' > R$, $c < R' - R$. Procedînd ca în cazul precedent, arătăm că toate punctele cercului C sînt interioare cercului C', deci că cercul C este interior cercului C'.

În rezumat, putem alcătui următorul tablou, care ilustrează pozițiile relative posibile a două cercuri, în funcție de parametrii R, R', c:

Cercuri secante: $|R - R'| < c < R + R'$.

Cercuri tangente interior: $c = R - R'$ sau $c = R' - R$.

Cercuri tangente exterior: $c = R + R'$.

Cercuri exterioare: $c > R + R'$.

Cercul C' este interior cercului C: $c < R - R'$, $R' < R$.

Pentru două cercuri concentrice avem $c = 0$, deci unul din cele două cercuri va fi interior celuilalt.

Unghiul a două cercuri

Fie C, C' două cercuri secante în punctele A, B. Triunghiurile AOO', BOO' sînt congruente, deci au $\widehat{OAO'} \equiv \widehat{OBO'}$ (fig. II.37).

Să notăm prin D, D' punctele în care tangentele t, t', duse în punctul A la cercul C, respectiv C', intersectează linia centrelor OO'. Dreptele BD, BD' sînt atunci tangente în B cercurilor C, C' și avem $\widehat{DAD'} \equiv \widehat{DBD'}$. Se spune că $\widehat{DAD'}$ sau $\widehat{DBD'}$ reprezintă *unghiul* sub care se taie cercurile C, C'.

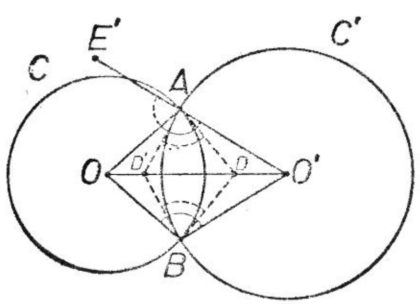

Fig. II.37

Fie E' un punct astfel ca $A \in |O'E'|$. Din relațiile $t \perp OA$, $t' \perp O'A$ rezultă că avem $\widehat{DAD'} \equiv \widehat{OAE'}$, sau $\widehat{DAD'} \equiv \widehat{OAO'}$. Rezultă că:

Unghiul sub care se taie două cercuri este congruent cu unghiul format de semidreptele $|AO$, $|AO'$, care pleacă din punctul comun A și conțin centrele O, O', sau cu suplementul acestui unghi.

Definiție. Două cercuri ortogonale sînt două cercuri care se taie sub un unghi drept.

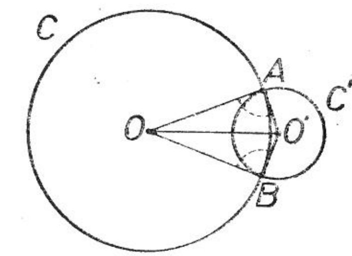

Fig. II.38

Rezultă că dacă C, C' sînt două cercuri ortogonale, atunci ele au două puncte comune A, B și tangentele în aceste puncte la C și la C' sînt perpendiculare (fig. II.38). Aceasta înseamnă că OA este tangentă la cercul C', iar $O'A$ este tangentă la cercul C, și că triunghiul AOO' este dreptunghic în A. Prin urmare, pentru două cercuri ortogonale $C = C(O, R)$, $C' = C(O', R')$, avem

$$d(O, O')^2 = R^2 + R'^2.$$

Reciproc, dacă ultima relație este îndeplinită, triunghiul AOO' este dreptunghic în A și cercurile C, C' sînt ortogonale.

Să mai observăm că dacă cercurile C, C' sînt ortogonale, atunci puterea centrului O' al cercului C' față de C este egală cu pătratul razei R' a cercului C', deci $p(O', C) = R'^2$. De asemenea, avem $p(O, C') = R^2$.

Exercițiu. *Fie C, C' două cercuri ortogonale și fie M, N, M', N' punctele în care linia centrelor OO' intersectează aceste cercuri. Presupunem că $M, N \in C$ și că $M' \in |MN|$. Să se arate că $d(O, M')\, d(O, N') = d(O, M)^2$ și că*

$$\frac{d(M', M)}{d(M', N)} = \frac{d(N', M)}{d(N', N)}.$$

(*Indicație.* Pentru prima relație, se consideră puterea punctului O față de C'. A doua relație se obține pe cale algebrică din prima.)

8. Axa radicală a două cercuri

Propoziție ajutătoare. Fiind date în plan două puncte fixe A și B, locul geometric al punctelor P din plan, astfel încît $d(P, A)^2 - d(P, B)^2 = k$, o constantă dată, este o dreaptă perpendiculară pe dreapta AB, ($A \neq B$).

Demonstrație. Fie P un punct al locului geometric căutat și fie T proiecția lui P pe dreapta AB (fig. II.39). Aplicînd teorema lui Pitagora triunghiurile dreptunghice TAP, TBP obținem:

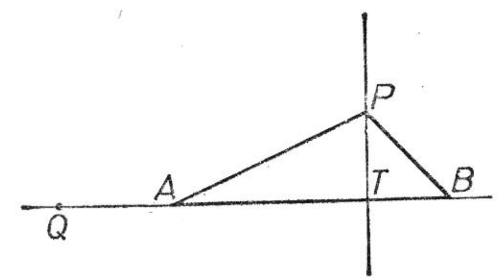

Fig. II.39

$d(P, A)^2 = d(P, T)^2 + d(A, T)^2$, $d(P, B)^2 = d(P, T)^2 + d(B, T)^2$, deci $d(P, A)^2 - d(P, B)^2 = d(A, T)^2 - d(B, T)^2$. P va fi un punct al locului dacă și numai dacă $d(P, A)^2 - d(P, B)^2 = k$, deci dacă și numai dacă $d(A, T)^2 - d(B, T)^2 = k$. Dacă alegem pe dreapta AB un punct Q

ca origine și dacă punctele A, B, T au abscisele a, b, t, ultima condiție se poate scrie sub forma

$$(t - a)^2 - (t - b)^2 = k$$

sau $2(b - a)t = k + b^2 - a^2$. Punctele A, B fiind distincte, avem $b \neq a$, deci $t = (k + b^2 - a^2)/2(b - a)$. Rezultă că punctul T este unic determinat; punctele locului geometric căutat sînt punctele P, care au acest punct T ca proiecție ortogonală pe dreapta AB. Deci locul geometric căutat este dreapta perpendiculară pe dreapta AB și trecînd prin T.

Exercițiu. *Să se demonstreze că diagonalele unui patrulater sînt perpendiculare dacă și numai dacă suma pătratelor a două laturi opuse este egală cu suma pătratelor celorlalte două laturi.*

Să demonstrăm acuma următoarea teoremă:

Teoremă. Fiind date două cercuri $C = C(O, R)$, $C' = C(O', R')$, de centre diferite, locul geometric al punctelor P, care au puteri cu semn egale față de C și C', este o dreaptă perpendiculară pe linia centrelor OO'.

Demonstrație. Fie P un punct al locului. Puterile lui P față de cercurile C, C' au expresiile (fig. II.40):

$$\bar{p}(P, C) = d(O, P)^2 - R^2, \quad \bar{p}(P, C') = d(O', P)^2 - R'^2.$$

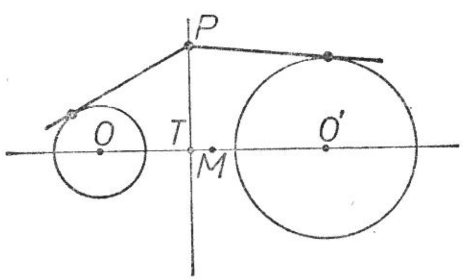

Fig. II.40

Condiția ca P să aparțină locului geometric considerat se scrie

$$d(O, P)^2 - R^2 = d(O', P)^2 - R'^2$$

sau

$$d(P, O)^2 - d(O', P)^2 = R^2 - R'^2.$$

Deci sîntem în condițiile aplicării propoziției precedente, unde trebuie să facem $A = O$, $B = O'$ și $k = R^2 - R'^2$. Rezultă că locul geometric al punctelor P, care au proprietatea indicată, este o dreaptă perpendiculară pe linia centrelor OO'. Dacă notăm prin T intersecția locului cu dreapta OO' și dacă presupunem că, față de un sistem de coordonate ales pe dreapta OO', punctele O, O', T au abscisele respectiv a, a', t, atunci avem

$$t = \frac{R^2 - R'^2 + a'^2 - a^2}{2(a' - a)}.$$

Dacă, alegem drept origine a absciselor mijlocul M al segmentului $|OO'|$, atunci $a' = -a$ și expresia lui t devine

$$t = \frac{R'^2 - R^2}{4a}.$$

unde $2 \, |a| = d(O, O')$.

Definiție. Locul geometric al punctelor care au puteri egale față de două cercuri, se numește axa radicală a celor două cercuri (Gaultier — 1813).

Reținem că axa radicală este definită numai în cazul, în care centrele cercurilor considerate sînt distincte.

Observații. **1.** Fiind date două cercuri concentrice distincte, nu există nici un punct care să aibă puteri egale față de cele două cercuri.

2. Două cercuri secante au ca axă radicală secanta comună, deoarece fiecare din punctele comune celor două cercuri are puterea egală cu zero față de fiecare cerc.

3. Axa radicală a două cercuri tangente este tangenta comună, deoarece punctul de tangență are puterea egală cu zero față de fiecare cerc și deoarece tangenta comună este perpendiculară pe linia centrelor.

4. Fiind date trei cercuri cu centrele necoliniare, există un unic punct, numit *centrul radical*, ca reare puterile egale față de cele trei cercuri; într-adevăr, notînd prin C, C', C'' cele trei cercuri, axa radicală a cercurilor C, C' intersectează axa radicală a cercurilor C, C'' într-un punct P, care are puteri egale față de cercurile C, C', C''. Punctul P va aparține și axei radicale a cercurilor C', C''.

5. Din formula care dă abscisa punctului T, în care axa radicală intersectează linia centrelor, anume $t = -(R^2 - R'^2)/4a$, rezultă că t are același semn cu a' dacă $R > R'$; acesta este cazul, în care axa radicală este mai apropiată de O' decît de O.

6. Dacă $R > R'$, și $a > 0$ și dacă cercurile sînt exterioare, avem $R + R' < 2a$, deci $|t| < (R - R')/2 < (R + R')/2 < a$. Aceasta înseamnă că axa radicală a două cercuri exterioare intersectează linia centrelor într-un punct situat pe segmentul $|OO'|$.

7. Dacă cercul C este interior cercului C', avem $R < R'$. În acest caz, axa radicală a cercurilor, C, C' este exterioară celor două cercuri.

Aplicație.

Ne propunem să rezolvăm următoarea problemă:

Fiind date două puncte distincte A, B, să se determine locul geometric L, al punctelor P, pentru care raportul $d(P, A) / d(P, B)$ este egal cu un număr pozitiv dat k, $k \neq 1$.

Rezolvare. Fie M, N punctele dreptei AB, pentru care avem $M \in |AB|$, $N \in |AB|$ și

$$|MA| \equiv k\,|MB|, \quad |NA| \equiv k\,|NB| \quad \text{(fig. II.41)}.$$

Dacă P este un punct al locului geometric căutat L, PM și PN sînt bisectoarele unghiului $\widehat{APB}$, respectiv al suplementului acestui unghi, deci punctul P se află pe cercul C de diametru $|MN|$, deoarece unghiul $\widehat{MPN}$ este drept. Deci avem $L \subset C$.

Vom arăta că avem și incluziunea inversă $C \subset L$. Va rezulta atunci că $L = C$.

Pentru a arăta că orice punct de pe cercul C este un punct al locului geometric L, este suficient să arătăm că orice dreaptă d, dusă prin punctul M, intersectează locul L cel puțin într-un punct P (fig. II.42).

Punctul $P \in d \cap L$ este ușor de aflat: considerăm simetricul B' al punctului B față de dreapta

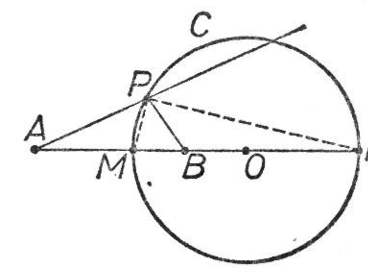

Fig. II.41

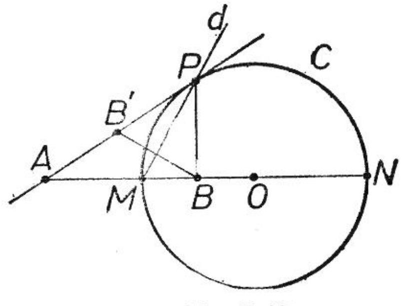

Fig. II.42

d şi punem $\{P\} = AB' \cap d$. Dreapta PM este bisectoarea unghiului $\widehat{APB}$ şi rezultă

$$\frac{d(P,\ A)}{d(P,\ B)} = \frac{d(M,\ A)}{d(M,\ B)} = k,$$

deci $P \in L$.

Datorită faptului că orice dreaptă dusă prin M intersectează locul geometric L într-un punct P şi punctul P trebuind să aparţină mulţimii $L \subset C$, rezultă că orice punct $P \in C$ este un punct al lui L, deci $L = C$.

Aplicaţie. Fie A', A'', B', B'', C', C'' *picioarele bisectoarelor interioare şi exterioare ale triunghiului* ABC *şi fie* C_A, C_B, C_C *cercurile de diametre* $|A'A''|$, $|B'B''|$, $|C'C''|$. *Să arătăm că aceste cercuri au două puncte comune. (Teorema lui Apollonius)* (fig. II.43).

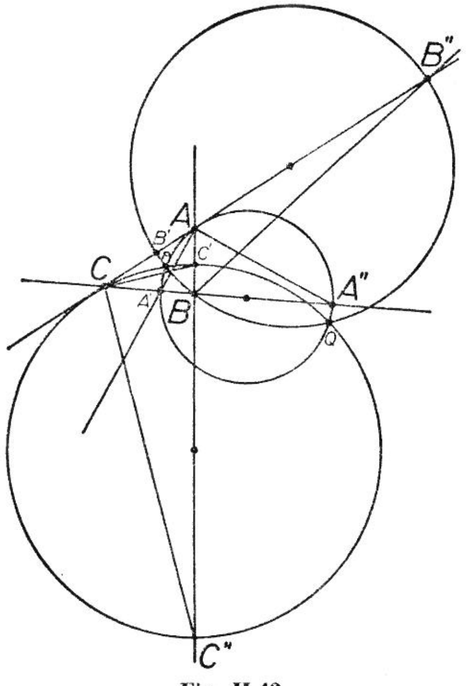

Fig. II.43

Demonstraţie. Fie $|AB|$ cea mai mică din laturile triunghiului ABC. În acest caz avem $B \in |A'A''|$ şi $A \in |B'B''|$. Cercul C_B va trece prin punctul B şi va avea A ca punct interior iar cercul C_A va trece prin A şi va avea B ca punct interior. Rezultă că cele două cercuri sînt secante în două puncte P, Q. Pentru aceste puncte avem

$$\frac{d(P,\ B)}{d(P,\ C)} = \frac{d(A,\ B)}{d(A,\ C)} = \frac{d(Q,\ B)}{d(Q,\ C)},$$

$$\frac{d(P,\ A)}{d(P,\ C)} = \frac{d(B,\ A)}{d(B,\ C)} = \frac{d(Q,\ A)}{d(Q,\ C)}$$

deci

$$\frac{d(P,\ A)}{d(P,\ B)} = \frac{d(Q,\ A)}{d(Q,\ B)} = \frac{d(C,\ A)}{d(C,\ B)}.$$

Ultimele relaţii arată că avem $P \in C_C$ şi $Q \in C_C$, deci cercurile C_A, C_B, C_C, au punctele P, Q comune.

O consecinţă imediată a acestui rezultat este că centrele cercurilor C_A, C_B, C_C, deci mijloacele segmentelor $|A'A''|$, $|B'B''|$, $|C'C''|$ sînt trei puncte coliniare, situate pe mediatoarea segmentului $|PQ|$.

Notă. Cercurile C_A, C_B, C_C se numesc *cercurile lui Apollonius* ale triunghiului ABC.

Exerciţii

1. *Fie* A, B, C *trei puncte necoliniare. Să se arate că există un unic cerc* K, *care să conţină aceste puncte.*

(*Indicaţie.* Punctul de intersecţie al mediatoarelor triunghiului ABC este egal depărtat de punctele A, B, C, deci este centrul unui cerc ce conţine aceste puncte, numit *cercul circumscris* triunghiului ABC.)

2. *Fiind date trei puncte necoliniare, să se arate că există patru cercuri, tangente fiecăreia din dreptele* AB, BC, CA.

(*Indicaţie.* Bisectoarele interioare şi exterioare ale triunghiului ABC sînt concurente trei cîte trei în patru puncte I, I_A, I_B, I_C; fiecare din aceste puncte este egal depărtat de dreptele AB, BC, CA, deci este centrul unui cerc tangent acestor drepte. Presupunînd că am notat prin I punctul de intersecţie al bisectoarelor unghiurilor interioare, I va fi interior triunghiului ABC şi cercul cu centrul I şi tangent dreptelor AB, BC, CA va avea toate punctele interioare triunghiului ABC. Acest cerc se numeşte *cercul înscris* triunghiului ABC, iar celelalte trei cercuri tangente se numesc *cercurile exînscrise* triunghiului ABC.)

3. *Să se arate că, într-un cerc, o coardă nu poate fi mai mare decît un diametru.*

4. *Fiind dat un cerc* C *şi un punct* A *în planul său, nesituat pe* C, *să se ducă prin* A *o dreaptă* d *astfel ca* d *să intersecteze interiorul cercului* C *după o coardă de lungime minimă sau maximă. Discuţie.*

5. *Fiind date într-un plan un cerc* C *şi un punct* A, *să se determine locul geometric al mijloacelor coardelor determinate de cercul* C *pe dreptele ce trec prin* A.

6. *Să se determine locul geometric al mijloacelor coardelor* $|AB|$ *avînd capetele pe un cerc dat şi lungimile egale cu un număr dat. Discuţie.*

7. *Fie* C, C' *două cercuri ortogonale, avînd centrele* O, O' *şi secante în punctele* A, B. *Fie* M *un punct pe cercul de diametru* $|OO'|$. *Să se arate că suma puterilor cu semn ale punctului* M *faţă de cercurile* C, C' *este egală cu* 0.

8. *Fie* O *centrul cercului circumscris triunghiului* ABC. *Să se arate că* $\sin \frac{\widehat{BOC}}{2} = \sin \widehat{A}$.

(*Indicaţie.* Fie $\widehat{A}$, fie suplementul său, este congruent cu $\frac{\widehat{BOC}}{2}$. Dar două unghiuri suplementare au sinusurile egale, prin definiţie.)

9. *Fie* a, b, c, R *lungimile laturilor triunghiului* ABC *şi raza cercului circumscris acestui triunghi. Să se demonstreze că*

$$\frac{a}{\sin \widehat{A}} = \frac{b}{\sin \widehat{B}} = \frac{c}{\sin \widehat{C}} = 2R.$$

(*Indicaţie.* Se consideră triunghiurile dreptunghice formate de centrul cercului circumscris, cîte un vîrf şi mijlocul unei laturi ce pleacă din acest vîrf. Apoi se aplică definiţia sinusului unui unghi şi exerciţiul precedent.)

10. *Fie* A', B', C', H *picioarele înălţimilor triunghiului* ABC *şi ortocentrul acestui triunghi. Să se arate că* H *se găseşte pe fiecare din cercurile circumscrise triunghiurilor* $AB'C'$, $BC'A'$, $CA'B'$ *şi că dreptele* AB, BC, CA, AA', BB', CC' *sînt bisectoarele unghiurilor interioare şi exterioare triunghiului* $A'B'C'$.

(*Indicaţie.* Se vor considera separat cazul unui triunghi ABC cu toate unghiurile ascuţite şi al unui triunghi cu un unghi obtuz. În fiecare din aceste cazuri, se vor aplica proprietăţile unghiurilor înscrise într-un cerc şi arcelor capabile de un unghi dat.)

11. *Fie* $P_1P_2...P_n$ *un poligon regulat cu* n *laturi, deci un poligon în care avem, pentru orice indice* i, $|P_{i-1}P_i| \equiv |P_iP_{i+1}|$ *şi* $\widehat{P_{i-1}P_iP_{i+1}} \equiv \widehat{P_iP_{i+1}P_{i+2}}$, *unde convenim ca* $P_{n+1} = P_i$. *Să se arate că există două cercuri concentrice* C, C', *astfel ca* C *să conţină toate vîrfurile acestui poligon, iar* C' *să fie tangent fiecăreia din dreptele* P_iP_{i+1}.

(*Indicație.* Se va observa că triunghiurile $P_{i-1}P_iP_{i+1}$ sînt isoscele și congruente două cîte două. Se va deduce că mediatoarele laturilor $|P_iP_{i+1}|$ trec printr-un punct comun O, care este egal depărtat de punctele P_i și este de asemenea egal depărtat de dreptele P_iP_{i+1})

Observație. Cercurile C, C' se numesc *cercul circumscris* respectiv *cercul înscris* poligonului $P_1P_2...P_n$.

12. *Să se arate că dacă A,B,C,D sînt patru puncte pe un cerc, atunci* $|AB|\cap CD = AB\cap|CD| = |AB|\cap|CD|$.

9. Patrulatere inscriptibile

Fiind dat un cerc K, se numește patrulater înscris în cercul K orice patrulater $ABCD$ care are vîrfurile A, B, C, D pe cercul K. Un patrulater $ABCD$ se numește *inscriptibil*, dacă există un cerc K astfel ca $ABCD$ să fie înscris în K, (fig. II.44).

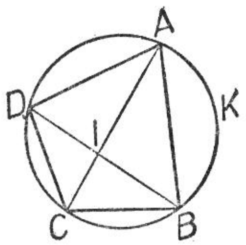

Fig. II.44

Reamintim că un patrulater este o linie poligonală închisă, formată din patru laturi care sînt disjuncte două cîte două.

Dacă $ABCD$ este un patrulater înscris în cercul K, atunci punctele C, D sînt de aceeași parte a dreptei AB, deoarece dacă C, D ar fi în semiplane opuse față de AB, atunci am avea $|AB|\cap|CD| = AB\cap|CD| \neq \emptyset$, ceea ce nu este posibil, deoarece $|AB|$, $|CD|$ sînt două laturi ale unui patrulater. La fel se arată că A, D sînt de aceeași parte a dreptei BC, că A, B sînt de aceeași parte a dreptei CD și că B, C sînt de aceeași parte a dreptei AD. Rezultă că:

Orice patrulater inscriptibil este convex.

Să demonstrăm.

Teorema 1. Într-un patrulater inscriptibil, suma a două unghiuri opuse este un unghi alungit.

Demonstrație. Într-un patrulater convex $ABCD$, diagonalele $|AC|$, $|BD|$ au un punct comun I. Rezultă că punctele A, C sînt în semiplane opuse față de dreapta BD. Dacă $ABCD$ este înscris într-un cerc K, punctele A, C se vor găsi pe cîte unul din cele două arce limitate pe cercul K de coarda $|BD|$. Din proprietățile unghiurilor înscrise într-un cerc, rezultă

$$\widehat{BAD} + \widehat{BCD} \equiv 2 \text{ dr},$$

unde dr desemnează un unghi drept.

Teorema 2. Într-un patrulater inscriptibil, unghiul format de o diagonală cu o latură este congruent cu unghiul format de cealaltă diagonală cu latura opusă.

Demonstrație. Punctele C și D fiind de aceeași parte a coardei $|AB|$, din proprietățile unghiurilor înscrise într-un cerc rezultă

$$\widehat{ACB} \equiv \widehat{ADB}.$$

Exercițiu. *Să se arate că, într-un patrulater inscriptibil, fiecare unghi este congruent cu suplementul unghiului opus.*

Reciproca teoremei 1. Dacă în patrulaterul convex $ABCD$ suma a două unghiuri opuse este un unghi alungit, atunci acel patrulater este inscriptibil.

Demonstrație. Fiind dat unghiul $\widehat{BAD}$, știm că locul geometric al punctelor C, pentru care unghiul $\widehat{BCD}$ este congruent cu suplementul unghiului $\widehat{BAD}$, este format din două arce de cerc simetrice față de dreapta BD, unul din aceste arce fiind situat pe cercul K, ce conține punctele A, B, D, și în semiplanul opus lui A față de BD. Dacă $ABCD$ este patrulater, punctele A, C trebuie să fie în semiplanele opuse față de BD, deci C se găsește pe arcul limitat de punctele B, D și opus arcului $\overset{\frown}{BAD}$. Deci $ABCD$ este un patrulater înscris cercului K.

Exercițiu. *Dacă într-un patrulater convex un unghi este congruent cu suplementul unghiului opus, atunci acel patrulater este inscriptibil.*

Reciproca teoremei 2. Dacă într-un patrulater convex unghiul format de o diagonală cu o latură este congruent cu unghiul format de cealaltă diagonală cu latura opusă, atunci acel patrulater este inscriptibil.

Demonstrație. Din ipoteză, $\widehat{ABD} \equiv \widehat{ACB}$ și C, D se găsesc de aceeași parte a dreptei AB. Rezultă că D se găsește pe arcul de cerc $\overset{\frown}{ACB}$ și deci $ABCD$ este un patrulater inscriptibil.

1. *Să se construiască un patrulater $ABCD$ astfel ca $\widehat{ACB} \equiv \widehat{ADB}$ și totuși $ABCD$ să nu fie inscriptibil.*

2. *Să se construiască un patrulater $ABCD$ astfel cu unghiul $\widehat{ADC}$ să fie congruent cu suplementul unghiului $\widehat{ABC}$ și totuși $ABCD$ să nu fie inscriptibil.*

3. *Să se arate că dreptunghiurile, trapezele isoscele și în particular pătratele sînt patrulatere înscriptibile.*

10. Mişcarea circulară uniformă

Fie C un cerc de centru O şi rază R. Să presupunem că un punct se mişcă pe acest cerc, astfel încît poziţia lui pe cerc este o funcţie de timpul t. Să notăm prin F această funcţie. Atunci, pentru fiecare valoare a lui t, $F(t)$ este un punct pe cercul C.

Se spune că funcţia $F : \mathbf{R} \to C$ defineşte o mişcare circulară. Această mişcare se numeşte uniformă, dacă este îndeplinită următoarea condiţie:

Fiind date patru momente t_1, t_2, t_1', t_2' astfel ca $t_1' - t_2' = t_2 - t_1$, dacă notăm $M_1 = F(t_1)$, $M_2 = F(t_2)$, $M_1' = F(t_1)$, $M_2' = F(t_2)$, avem (fig. II.45)

$$\widehat{M_1OM_2} \equiv \widehat{M_1'OM_2'}.$$

Se mai spune în acest caz că punctul $M = F(t)$ are o mişcare de rotaţie în jurul punctului O. Dacă presupunem că $| t_2 - t_1 |$ este unitatea de măsură u a timpului, unghiul $\widehat{M_1OM_2}$ se numeşte *viteza de rotaţie* sau *viteza unghiulară* a punctului M.

Viteza unghiulară fiind presupusă dată, sînt posibile două mişcări cu această viteză, cele două mişcări diferind prin *sensul de rotaţie*.

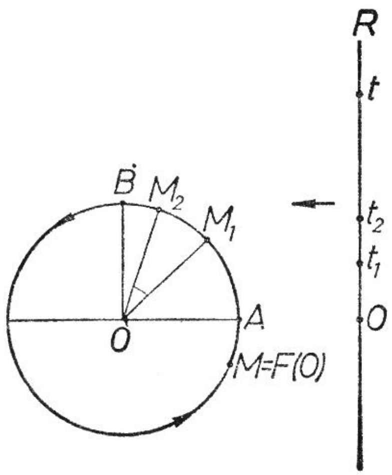

Fig. II.45

Exerciţiu. *Fie M, N două puncte, care se mişcă pe două cercuri concentrice cu aceeaşi viteză unghiulară şi în acelaşi sens. Să se arate că distanţa $d(M, N)$ este constantă.*

Fie $M_0 = F(0)$ poziţia pe care o are punctul $M = F(t)$ la momentul $t = 0$ (fig. II.45). Lungimea cercului C fiind finită şi egală cu $2\pi R$, punctul M va reveni în poziţia M_0 după o perioadă de timp $T = 2\pi/\alpha$, unde α este viteza unghiulară a mişcării. Numărul $T = 2\pi/\alpha$ se numeşte *perioada mişcării circulare considerate*. Mişcarea fiind uniformă, vom avea $F(t + T) = F(t)$, oricare ar fi $t \in \mathbf{R}$. Dacă viteza unghiulară α este de un radian în unitatea de timp, deci dacă $\alpha = 1$ radian/u, atunci $T = 2\pi \times$ unitatea de timp.

Exerciţii

1. *Locul geometric al punctelor care au puterea faţă de un cerc dat, egală cu un număr dat, este un cerc sau un punct sau mulţimea vidă.*

2. *Fie C, C' două cercuri exterioare. Locul geometric al centrelor cercurilor ortogonale cu fiecare din cercurile C, C' este axa radicală a cercurilor C, C'.*

(Se ţine seama că dacă C, C'' sînt două cercuri ortogonale, atunci puterea centrului cercului C'' faţă de cercul C este egală cu pătratul razei cercului C''.)

3. *Fie pe un cerc C punctul fix A şi un punct mobil M. Fie d perpendiculara în M pe dreapta AM şi fie punctele $L \in d$, $L' \in d$ astfel ca unghiurile $\widehat{LAM}$, $\widehat{L'AM}$ să fie congruente cu un unghi fix α. Se cere locul geometric al punctelor L, L'.*

(Se observă că dreapta d trece prin punctul B diametral opus lui A pe cercul C şi că unghiurile $\widehat{ALB}$, $\widehat{AL'B}$ sînt congruente cu două unghiuri constante. Locurile geometrice căutate sînt formate de arce de cercuri avînd capetele A, B).

4. *Se dă un punct fix A şi o dreaptă fixă d, astfel ca $A \notin d$. Se cere locul geometric al punctelor N, astfel ca produsul $\overline{AN} \cdot \overline{AM}$ să fie egal cu un număr dat k, unde $\{M\} = | AN \cap d$, $k > 0$.*

(Se consideră dreapta $AP \perp d$, $P \in d$ şi punctul $Q \in | AP$ astfel ca $\overline{AP} \cdot \overline{AQ} = k$. Locul geometric căutat este cercul de diametru $| AQ |$.)

5. *Fie A, B, C, M patru puncte distincte pe un cerc K. Notăm prin P, Q, R proiecţiile punctului M pe dreptele BC, CA, AB. Să se arate că punctele P, Q, R sînt coliniare (teorema lui Simson). Se va presupune că $C \in | BP |$, $Q \in | AC |$.*

(Se observă că patrulaterele $AMQR$, $CPMQ$ sînt inscriptibile. Dacă se presupune că M este pe arcul subîntins de coarda $| AC |$, avem $Q \in | AC |$. Se deduce că măs $\widehat{RQM}$ + măs $\widehat{MQP} = 180°$, deci punctele R, Q, P sînt coliniare.)

6. *Fie $| AB |$, $| CD |$ două coarde perpendiculare în cercul K, avînd punctul comun M şi netrecînd prin centrul cercului K. Presupunînd $| MA | > | MB |$ şi $| MC | > | MD |$ să se arate că există un patrulater cu vîrfurile pe K şi cu laturile congruente cu $| AB |$, $| CD |$, $| MA | - | MB |$, $| MC | - | MD |$.*

(M. Chiriţă, G. Nagy).

(*Indicaţie.* Se construiesc dreptunghiurile $CDC'D'$ şi $ABA'B'$ înscrise în cercul K şi se observă că

$$| MA | - | MB | \equiv | CD' |, \ | MC | - | MD | \equiv | A'B |.)$$

11. Aplicaţii practice

1. *Două mobile M, M' se rotesc pe două cercuri tangente exterior, cu aceeaşi viteză unghiulară şi în acelaşi sens, plecînd din punctul comun* (fig. II.46).

a. *Să se arate că dreapta MM' trece mereu prin punctul de contact al celor două cercuri.*

b. *Să se exprime distanţa $d(M, M')$ în funcţie de viteza unghiulară ω şi de timpul t, scurs de la momentul iniţial.*

2. *Două roţi se rotesc fiecare în jurul axei sale, astfel încît ele se ating fără să alunece una faţă de alta* (fig. II.47).

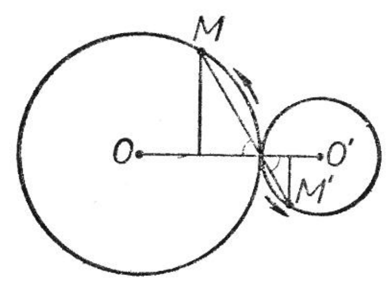

Fig. II.46

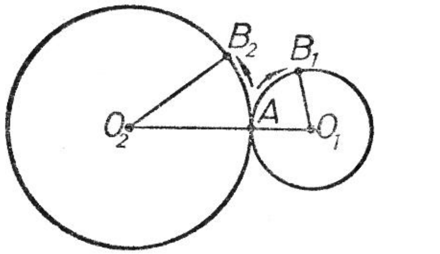

Fig. II.47

8

Să se arate că raportul vitezelor unghiulare ale celor două rotații este egal cu inversul raportului razelor celor două roți.

Soluție. Alunecarea fiind exclusă, dacă la un moment dat t_0 roțile au punctul comun A, iar dacă la momentul t_1 acest punct ajunge pe prima roată în poziția B_1 iar pe a doua roată în poziția B_2, avem lungimea $\widehat{AB_1}$ = lungimea $\widehat{AB_2}$.

Dar avem măs $\widehat{AO_2B_2} = (t_1 - t_0)\omega_2$; măs $\widehat{AO_1B_1} = (t_1 - t_0)\omega_1$; deci din formula $\frac{l}{2\pi R} = \frac{\alpha}{2\pi}$ deducem: lungimea $\widehat{AB_1} = R_1(t_1 - t_0)\,\omega_1$, lungimea $\widehat{AB_2} = R_2(t_1 - t_0)\omega_2$; rezultă

$$R_1\omega_1 = R_2\omega_2.$$

Această relație este utilizată la *angrenaje*. Dacă roțile sînt tangente exterior, rotațiile lor au sensuri opuse, iar dacă roțile sînt tangente interior, rotațiile sînt de același sens.

La *angrenaje cilindrice* se folosesc roți dințate. Dacă roata de rază R_1 are n_1 dinți, iar cea de rază R_2 are n_2 dinți, distanța între axele a doi dinți consecutivi fiind aceeași la cele două roți, trebuie să avem

$$\frac{2\pi R_1}{n_1} = \frac{2\pi R_2}{n_2}, \text{ deci } \frac{R_1}{n_1} = \frac{R_2}{n_2}.$$

Exerciții

1. *Să se arate că dacă două roți de raze R_1 și R_2 sînt depărtate și dacă mișcarea uneia este transmisă la cealaltă cu ajutorul unei curele, atunci vitezele unghiulare ale roților sînt invers proporționale cu razele, deci $R_1\omega_1 = R_2\omega_2$.*

2. *Să presupunem că o roată de rază R se rostogolește pe o tijă dreaptă fără să alunece nici un moment* (fig. II.48).

Să se arate că dacă un punt A al roții a ajuns, după un interval de timp t, în poziția B', astfel ca unghiul vectorilor $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{O'B'}$ să fie de $\alpha°$, atunci punctul de contact M ajunge, în același interval de timp, în poziția M', astfel ca

$$d(M, M') = \frac{2\pi R\alpha}{360}.$$

Să se deducă că viteza lui M este egală cu produsul razei R cu viteza unghiulară de rotație a roții în jurul axei sale.

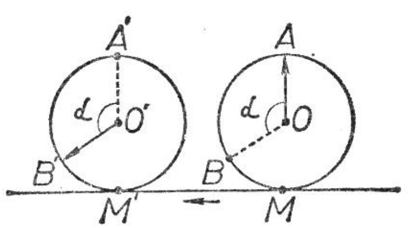

Fig. II.48

3. *Să presupunem că două puncte A_1, A_2 se deplasează pe două cercuri C_1, C_2, de centre O_1 și O_2 și de raze egale, astfel încît $d(A_1, A_2) = d(O_1, O_2)$.*

Să se arate că A_1 și A_2 au vitezele egale. Se va considera cazul în care $O_1A_1A_2O_2$ este un paralelogram și acela în care $A_1O_1A_2O_2$ este trapez isoscel (fig. II.49, *a*, 49, *b*).

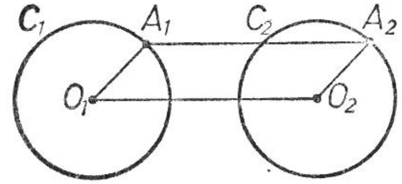

Fig. II.49, a

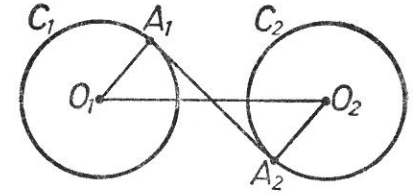

Fig. II.49, b

4. *Un cerc C_1 se rostogolește fără alunecare pe un cerc C, de rază dublă, în interiorul acestuia* (fig. II.50). *Arătați că fiecare punct M al cercului C_1 descrie un diametru al cercului C. Exprimați segmentul $|OM|$ în funcție de viteza unghiulară cu care se rotește linia centrelor OO_1 și de timpul t.*

(*Indicație.* Fie A punctul de tangență la un moment t și fie $M \in |OP|$, $P \in C$. Arcele $\widehat{AM}$, $\widehat{AP}$ au lungimi egale, deci, la un moment t punctul M va coincide cu punctul de tangență P. În intervalul $t' - t$, raza $|OO_1$ se rotește cu unghiul $\widehat{AOP}$, iar M parcurge distanța $d(M, P)$. Avem

$$|OM| \equiv |OA| \cdot \cos \widehat{AOP} \equiv |OA| \cdot \cos(t' - t)\omega.)$$

5. *Două mobile, M_1, M_2 se rotesc pe două cercuri cu centrul O, cu vitezele unghiulare constante ω_1, ω_2, în același sens. Știind că la momentul $t = t_0$ unghiul $\widehat{M_1OM_2}$ are măsura α, să se determine momentele*

$$t_1, t_2, \ldots$$

în care mobilele M_1, M_2 se vor găsi pe o aceeași semidreaptă cu originea O (fig. II.51).

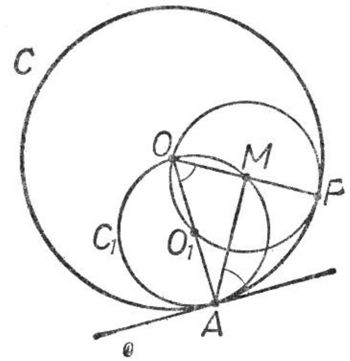

Fig. II.50

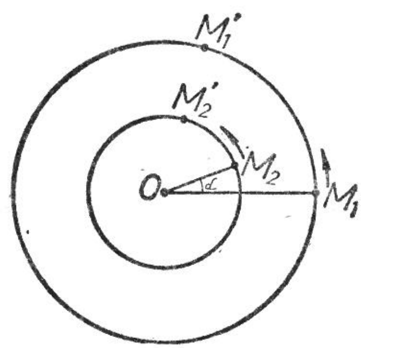

Fig. II.51

Soluție. După momentul T, punctele M_1, M_2 se vor găsi pe aceeași semidreaptă, dacă există un număr întreg k, astfel încît să avem

$$\alpha + T\omega_2 = T\omega_1 - 2k\pi$$

sau dacă

$$T = \frac{\alpha + 2k\pi}{\omega_1 - \omega_2}.$$

Deci punctele M_1 și M_2 se vor găsi pe cîte o aceeași semidreaptă $|OM$ la momentele

$$t_k = t_0 + T_k = t_0 + \frac{\alpha}{\omega_1 - \omega_2} + \frac{2k\pi}{\omega_1 - \omega_2}.$$

Dacă M_1, M_2 sînt acele unui ceasornic, avem pentru $t_0 = 0$,

$$\alpha = 0, \omega_1 = \frac{2\pi}{60}\text{min}^{-1}; \quad \omega_2 = \frac{2\pi}{720}\text{min}^{-1},$$

$$T_k = \frac{k}{\frac{1}{60} - \frac{1}{720}}\text{min} = \frac{k}{\frac{660}{60 \cdot 720}}\text{min} = \frac{720k}{11}\text{ minute,}$$

deci acele se întîlnesc la intervale de $\frac{720}{11}$ minute $= 1$ oră $+ \frac{60}{11}$ minute.

Exerciții

1. *Păstrînd notațiile, să se determine momentele t_1, t_2, ... în care mobilele M_1, M_2 sînt astfel încît $O \in |M_1M_2|$.*

2. *Să presupunem că aplicația $F : R \to C$ definește o mișcare circulară uniformă a unui mobil M, pe cercul C, astfel încît punctul $M = F(t)$ să parcurgă acest cerc, o dată, în 2π secunde. Fie $A = F(O)$ poziția punctului M la momentul $t = 0$. Să se demonstreze următoarele proprietăți ale aplicației F :*

1) *Oricare ar fi momentul t, avem $F(t = F(t + 2\pi)$;*

2) *Dacă $B = F\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $A' = F(\pi)$, $B' = F\left(\frac{3\pi}{2}\right)$, atunci unghiurile $\widehat{AOB}$, $\widehat{A'OB}$, $\widehat{A'OB'}$ și $\widehat{B'OA}$ sînt drepte, O fiind centrul cercului O.*

3) *Oricare ar fi momentul t, punctele $F(t)$ și $F(t + \pi)$ sînt simetrice față de centrul O.*

4) *Dacă $t \in [-\pi, \pi]$, atunci măsura în radiani a unghiului $\widehat{AOF(t)}$ este egală cu $|t|$.*

5) *Oricare ar fi momentul t, punctele $F(t)$ și $F(\pi - t)$ sînt simetrice față de dreapta OB, iar punctele $F(t)$ și $F(-t)$ sînt simetrice față de dreapta OA.*

3. *Folosind regula de trecere de la măsura unui unghi în radiani la măsura sa în grade sexagesimale și utilizînd tabelul de la pagina 71, să determine poziția aproximativă a punctului $F(t)$ pentru $t = 1$, $t = 2$, ..., $t = 10$.*

Capitolul **III**

Elemente de trigonometrie plană

1. Vectori

Se numește *vector legat* sau *vector* o pereche ordonată de puncte, deci o mulțime formată din două puncte, dintre care unul este numit *origine*, iar al doilea *extremitate*. Vectorul avînd originea A și extremitatea B va fi notat $\overrightarrow{AB}$. Termenul vector vine de la cuvîntul latinesc „vehere", care înseamnă „a merge". Cînd ne referim la vectorul $\overrightarrow{AB}$ ne putem gîndi la un mobil, care se deplasează, mergînd din punctul A în punctul B (fig. III.1). De aceea un vector $\overrightarrow{AB}$ se reprezintă printr-o săgeată de la punctul A la punctul B.

Fig. III.1

Doi vectori $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A'B'}$ sînt egali dacă și numai dacă $A = A'$, și $B = B'$.

Un vector, a cărui origine coincide cu extremitatea sa, se numește *vector nul*. Fiecare punct A definește vectorul nul $\overrightarrow{AA}$.

Dacă $\overrightarrow{AB}$ este un vector nenul, punctele A și B sînt distincte și definesc o dreaptă, care se numește *suportul* vectorului $\overrightarrow{AB}$ (fig. III.2).

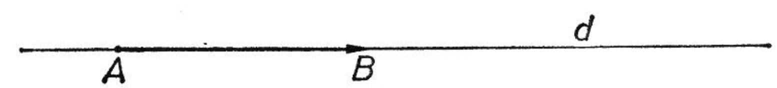

Fig. III.2

Doi vectori care sînt nenuli și au același suport, se numesc *vectori coliniari* (fig. III.3).

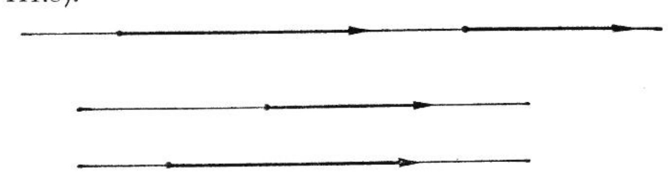
Fig. III.3

Doi vectori nenuli, care au suporţii paraleli, se numesc *vectori paraleli*.

Uneori, un vector se notează printr-o singură literă, deasupra căreia se pune o săgeată. De exemplu, putem scrie $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$. Pentru a exprima că $\vec{u}$ este un vector nul, scriem $\vec{u} \in \vec{0}$, $\vec{0}$ fiind mulţimea vectorilor nuli.

D e f i n i ţ i e. **Fie $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A'B'}$ doi vectori nenuli şi paraleli. Spunem că vectorii consideraţi sînt echipolenţi, dacă figura $ABB'A'$ este un paralelogram, deci dacă $AB \parallel A'B'$ şi dacă $AA' \parallel BB'$ (fig. III.4).**

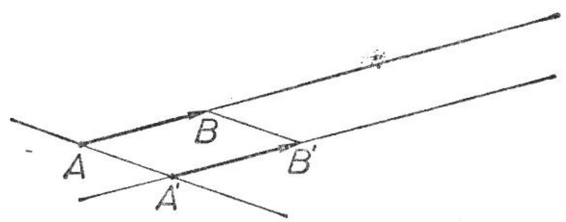

Fig. III.4

D e f i n i ţ i e. **Vom spune că doi vectori nenuli şi paraleli au acelaşi sens, dacă extremităţile lor se găsesc de o aceeaşi parte a dreptei definite de originile lor.**

Deci vectorii nenuli şi paraleli $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ sînt de acelaşi sens, dacă punctele B, D se găsesc de aceeaşi parte a dreptei AC.

Definiţiile date pierd orice semnificaţie, dacă vectorii $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A'B'}$ respectiv $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{CD}$ sînt coliniari. Totuşi, putem defini echipolenţa, respectiv relaţia de a avea acelaşi sens şi pentru vectori coliniari, dacă procedăm în modul următor: alegem un punct O, exterior dreptei d, care conţine vectorii $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A'B'}$, $\overrightarrow{CD}$ şi considerăm paralelogramul $OABP$, care are latura $|OP|$ paralelă cu d. Vom spune că vectorii coliniari $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A'B'}$ sînt echipolenţi, dacă vectorii paraleli $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{A'B'}$ sînt echipolenţi; vectorii coliniari $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ se zic de acelaşi sens, dacă vectorii paraleli $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{CD}$ sînt de acelaşi sens, (fig. III.5).

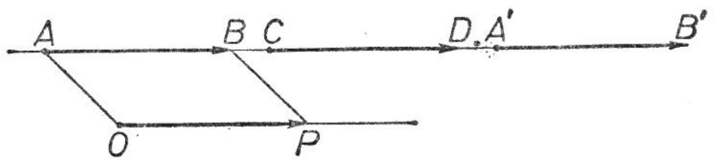

Fig. III.5

Exerciţii

1. *Să se arate că relaţia de echipolenţă a vectorilor este relaţie de echivalenţă, deci că este reflexivă, simetrică şi tranzitivă.*

2. *Să se arate că relaţia exprimată prin cuvintele „au acelaşi sens" este o relaţie de echivalenţă.*

3. *Să se arate că definiţiile echipolenţei şi relaţiei privind sensul a doi vectori nenuli şi coliniari nu depind de alegerea punctului O.*

Doi vectori nuli se consideră totdeauna echipolenţi. Pentru a exprima că vectorii $\vec{u}$, $\vec{v}$ sînt echipolenţi, scriem $\vec{u} \sim \vec{v}$.

Fie $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ doi vectori necoliniari şi fie O un punct oarecare. Să considerăm punctele M şi N astfel ca $\overrightarrow{OM} \sim \overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{ON} \sim \overrightarrow{CD}$. Se formează astfel unghiul $\widehat{MON}$ (fig. III.6), despre care vom spune că *reprezintă unghiul vectorilor* $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$. Dacă se consideră alte puncte O', M', N' astfel ca $\overrightarrow{O'M'} \sim \overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{O'N'} \sim \overrightarrow{CD}$, atunci $\widehat{M'O'N'} \equiv \widehat{MON}$, deci *două unghiuri, care reprezintă unghiul a doi vectori nenuli, sînt congruente.*

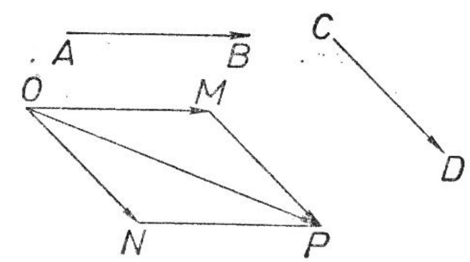

Fig. III.6

Să completăm construcţia efectuată anterior, considerînd paralelogramele $MONP$, $M'O'N'P'$. Avem

$$\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{OM} \sim \overrightarrow{O'M'},\ \overrightarrow{CD} \sim \overrightarrow{ON} \sim \overrightarrow{O'N'},\ \overrightarrow{OP} \sim \overrightarrow{O'P'}. \tag{1}$$

Vom spune că vectorul $\overrightarrow{OP}$ *reprezintă suma* în O a vectorilor $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ şi vom scrie

$$\boxed{\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} \text{ (în } O) \text{ sau } \overrightarrow{OP} \sim \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}}$$

Potrivit acestei definiţii, avem

$$\overrightarrow{O'P'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} \text{ (în } O'),\ \overrightarrow{O'P'} \sim \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}.$$

Ultima formulă (1) arată că *doi vectori, care reprezintă suma altor doi vectori, în două puncte oarecare, sînt echipolenţi.* Deci $\overrightarrow{OP} \sim \overrightarrow{O'P'}$.

Din proprietăţile paralelogramului rezultă formulele (fig. III.6).

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} \text{ (în } O) = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MP} \text{ (în } O) = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OM} \text{ (în } O) =$$
$$= \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NP} \text{ (în } O).$$

Avem prin urmare, pentru orice doi vectori, $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{CD}$, şi pentru orice punct O, proprietatea de *comutativitate*

$$\boxed{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} \text{ (în } O) = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AB} \text{ (în } O).}$$

Pentru a obţine suma în A a vectorilor $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, putem proceda în modul următor: considerăm punctul P, astfel ca $\overrightarrow{BP} \sim \overrightarrow{CD}$; atunci

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} \text{ (în } A) = \overrightarrow{AP}.$$

Fie vectorii $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$ şi $\vec{w} = \overrightarrow{EF}$. Să alegem un punct oarecare O şi să construim punctele M, N, P astfel ca $\overrightarrow{OM} \sim \vec{u}$, $\overrightarrow{MN} \sim \vec{v}$ şi $\overrightarrow{NP} \sim \vec{w}$. Avem atunci (fig. III.7).

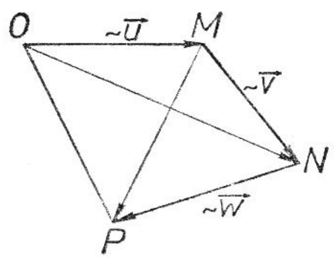

Fig. III.7

$$\overrightarrow{ON} = \vec{u} + \vec{v} \text{ (în } O), \quad \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{ON} + \vec{w} \text{ (în } O) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} \text{ (în } O).$$

$$\overrightarrow{MP} = \vec{v} + \vec{w} \text{ (în } M), \quad \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MP} \text{ (în } O) = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) \text{ (în } O).$$

Rezultă că *adunarea vectorilor într-un punct are proprietatea de asociativitate*

$$\boxed{(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} \text{ (în } O) = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) \text{ (în } O).}$$

Exerciţiu. *Se consideră vectorii* $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{A'B'}$, $\overrightarrow{CD} \sim \overrightarrow{C'D'}$ *şi un punct O. Arătaţi că*

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} \text{ (în } O) = \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{C'D'} \text{ (în } O).$$

Fie m segmentul etalon, ales ca unitate de măsurare a lungimii segmentelor şi a distanţelor între puncte. Am notat prin $d(A, B)$ distanţa dintre punctele A, B. Dacă $A \neq B$, $d(A, B)$ coincide cu lungimea segmentului $|AB|$, iar dacă $A = B$, avem prin definiţie $d(A, B) = 0$.

Definiţie. După fixarea segmentului etalon, definim norma unui vector $\overrightarrow{AB}$ prin formula

$$\boxed{\|\overrightarrow{AB}\| = d(A, B).}$$

Deci norma unui vector este egală cu distanţa dintre originea şi extremitatea acelui vector.

În particular, *vectorii nuli au norma egală cu 0*. Reciproc, *dacă un vector $\vec{v}$ are norma $\|\vec{v}\|$ egală cu 0, atunci vectorul $\vec{v}$ este nul*. Un vector de normă 1 se numeşte *versor*.

Exerciţiu. *Arătaţi că doi vectori echipolenţi au normele egale.*

Fiind dat un vector $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$, vom spune că vectorul $\vec{v}' = \overrightarrow{BA}$ este un *opus* al vectorului $\vec{v}$, deoarece avem, oricare ar fi punctul O,

$$\vec{v} + \vec{v}' \text{(în } O) = \overrightarrow{OO}.$$

În general, vom numi *vector opus* vectorului $\vec{v}$, orice vector echipolent cu vectorul $\vec{v}'$.

Definim *diferenţa* a doi vectori $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ şi $\vec{w} = \overrightarrow{CD}$, într-un punct O, prin formula

$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} \text{ (în } O) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} \text{ (în } O).$$

Dacă notăm $\vec{u} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}$ (în O), atunci avem $\vec{u} + \overrightarrow{CD}$ (în A) $= \overrightarrow{AB}$. Oricare ar fi punctele L, M, N, avem

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{LN} - \overrightarrow{LM} \text{ (în } M),$$

deoarece $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{LM}$ (în L) $= \overrightarrow{LM} + \overrightarrow{MN}$ (în L) $= \overrightarrow{LN}$.

Dacă se completează figura LMN la un paralelogram $LMNP$, avem

$$\overrightarrow{LM} + \overrightarrow{LP} \text{ (în } L) = \overrightarrow{LN}, \quad \overrightarrow{LP} - \overrightarrow{LM} \text{ (în } M) = \overrightarrow{MP}$$

şi rezultă că cei doi vectori diagonali $\overrightarrow{LN}$, $\overrightarrow{MP}$ dau suma şi diferenţa vectorilor $\overrightarrow{LM}$, $\overrightarrow{LP}$, pe care am construit paralelogramul $LMNP$. (fig. III.8).

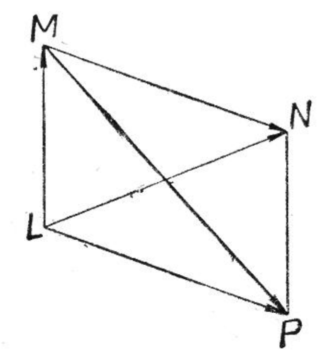

Fig. III.8

Fiind dat un vector $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ şi un număr real x, definim *produsul* $x \cdot \vec{v}$ în modul următor:

Dacă $B = A$ sau dacă $x = 0$, $x \cdot \vec{v}$ este vectorul nul $\overrightarrow{AA}$.

Dacă $B \neq A$ şi dacă $x > 0$, $x \cdot \vec{v}$ va fi acel vector $\overrightarrow{AB'}$, pentru care

$$B' \in |AB, \quad |AB'| \equiv x \cdot |AB|.$$

Dacă $B \neq A$ şi dacă $x < 0$, atunci $x \cdot \vec{v}$ va fi acel vector $\overrightarrow{AB''}$, pentru care

$$A \in |BB''|, \quad |AB''| \equiv (-x) \cdot |AB|.$$

În particular, avem $1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$ şi $(-1)\ \vec{v}$ este un opus al vectorului $\vec{v}$. Oricare ar fi numerele reale x şi y şi pentru orice vector v, avem

$$(2) \qquad \boxed{x \cdot (y \cdot \vec{v}) = (xy) \cdot \vec{v}.}$$

Ultima formulă se stabilește observînd că cei doi membri reprezintă vectori avînd aceeași origine, aceeași dreaptă suport (dacă cei doi vectori sînt nenuli); în plus, cei doi vectori au același sens, oricare ar fi semnele lui x și y și ei au de asemenea aceeași normă $|xy| \cdot \|\vec{v}\|$.

Să arătăm că, *oricare ar fi vectorii* $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ *și* $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$ *și oricare ar fi numărul real* x, *avem*

(3) $$\boxed{x \cdot (\vec{u} + \vec{v}) \sim x \cdot \vec{u} + x \cdot \vec{v}.}$$

Pentru demonstrație, să considerăm un punct O și să construim punctele M, N astfel ca $\overrightarrow{OM} \sim \vec{u}$ și $\overrightarrow{ON} \sim \vec{v}$. Fie apoi punctele M', N' pentru care

$$\overrightarrow{OM'} \sim x \cdot \vec{u}, \overrightarrow{ON'} \sim x \cdot \vec{v}.$$

Să presupunem că vectorii $\vec{u}$ și $\vec{v}$ sînt nenuli și necoliniari. Atunci $M \neq O$

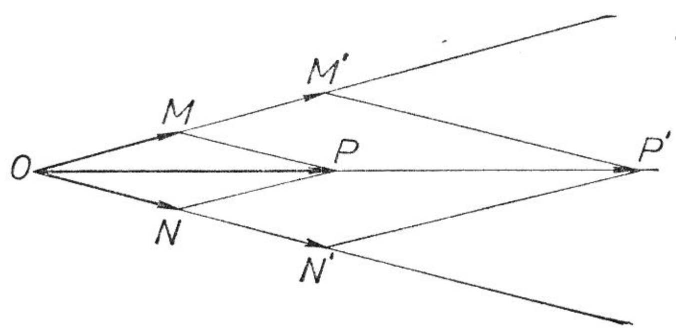

Fig. III.9

și $N \neq O$ și avem $M' \in OM$, $N' \in ON$. Dacă definim punctele P, P' prin formulele (fig. III.9).

$$\overrightarrow{OP} \sim \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}, \overrightarrow{OP'} \sim x \cdot \overrightarrow{OP},$$

din teorema lui Thales deducem relațiile

$$MN \parallel M'N', \ M'P' \parallel MP \parallel ON, \ N'P' \parallel NP \parallel OM,$$

$$\overrightarrow{M'P'} \sim x \cdot \overrightarrow{MP} \sim x \cdot \overrightarrow{ON}, \ \overrightarrow{N'P'} \sim x \cdot \overrightarrow{NP} \sim x \cdot \overrightarrow{OM},$$

deci avem

$$\overrightarrow{OP'} \sim x \cdot \overrightarrow{OP}, \ \overrightarrow{OP'} \sim \overrightarrow{OM'} + \overrightarrow{ON'} \sim x \cdot \overrightarrow{OM} + x \cdot \overrightarrow{ON}$$

sau

$$\overrightarrow{OP'} \sim x \cdot (\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}) \sim x \cdot \overrightarrow{OM} + x \cdot \overrightarrow{ON}.$$

Dacă unul din vectorii $\vec{u}$, $\vec{v}$ este nul, relația (3) este evidentă.

Dacă vectorii $\vec{u}$ și $\vec{v}$ sînt nenuli dar coliniari, există un număr real r astfel

ca $\vec{v} \sim r \cdot \vec{u}$. În acest caz, avem $\vec{u} + \vec{v} \sim (1 + r)\vec{u}$, $x \cdot (\vec{u} + \vec{v}) \sim x(1 + r) \cdot \vec{u}$, $x \cdot \vec{u} + x \cdot \vec{v} \sim x \cdot \vec{u} + xr \cdot \vec{u} \sim (x + xr) \cdot \vec{u} = x(1 + r) \cdot \vec{u}$, deci și în acest caz, relația (3) este adevărată.

Produsul scalar a doi vectori

Fie $\vec{u}$ și $\vec{v}$ doi vectori. Definim **produsul scalar** $\vec{u} \cdot \vec{v}$ al acestor vectori prin formula

$$\boxed{\begin{array}{l} \vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \cos \widehat{\vec{u}\vec{v}}, \text{ dacă } \vec{u} \notin \vec{0} \text{ și } \vec{v} \notin \vec{0}. \\ \vec{u} \cdot \vec{v} = 0, \text{ dacă } \vec{u} \in \vec{0} \text{ sau } \vec{v} \in \vec{0}. \end{array}}$$

Din această definiție deducem următoarele proprietăți:

Produsul scalar a doi vectori este simetric, deci $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$.

Produsul scalar a doi vectori nu se schimbă, dacă înlocuim cei doi vectori prin doi vectori echipolenți lor. Deci $\vec{u'} \sim \vec{u}$ și $\vec{v'} \sim \vec{v}$ implică $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u'} \cdot \vec{v'}$.

Produsul scalar a doi vectori este nul fie în cazul în care unul cel puțin din cei doi vectori este nul, fie în cazul în care cei doi vectori sînt nenuli și perpendiculari.

Produsul scalar a doi vectori, care fac un unghi ascuțit, este pozitiv.

Produsul scalar a doi vectori, care fac un unghi obtuz, este negativ.

Unghiul a doi vectori nenuli $\vec{u}$ și $\vec{v}$ poate fi calculat din formula

$$\boxed{\cos \widehat{\vec{u}\vec{v}} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}}$$

Din inegalitatea $|\cos \widehat{\vec{u}\vec{v}}| \leqslant 1$, deducem *inegalitatea lui Schwartz-Cauchy-Buniakowski*:

$$\boxed{|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leqslant \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|.}$$

Dacă vectorii $\vec{u}$, $\vec{v}$ sînt nenuli și paraleli sau coliniari, avem $\cos \widehat{\vec{u}\vec{v}} = \pm 1$.

Mai precis, dacă vectorii $\vec{u}$, $\vec{v}$ au același sens, atunci $\cos \widehat{\vec{u}\vec{v}} = 1$ și rezultă $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|$. În particular, $\vec{u} \cdot \vec{u} = \vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$, deci:

Produsul scalar al unui vector cu el însuși este egal cu pătratul normei acelui vector.

Dacă vectorii $\vec{u}$, $\vec{v}$ sînt de sensuri opuse, avem $\cos \widehat{\vec{u}\vec{v}} = -1$ și

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = - \| \vec{u} \| \cdot \| \vec{v} \|.$$

Dacă vectorii $\vec{u}$, $\vec{v}$ sînt nenuli, necoliniari și neparaleli, atunci $-1 < \cos \widehat{\vec{u}\vec{v}} < 1$ și rezultă $| \vec{u} \cdot \vec{v} | < \| \vec{u} \| \cdot \| \vec{v} \|$.

Dacă $\vec{u}$ și $\vec{v}$ sînt vectori nenuli și dacă x este un număr pozitiv, atunci unghiul vectorilor $\vec{u}$, $\vec{v}$ este egal cu unghiul vectorilor $x \cdot \vec{u}$, $\vec{v}$, deoarece înmulțirea vectorului $\vec{u}$ cu un număr pozitiv dă un vector de același sens cu $\vec{u}$. Rezultă că, pentru $x > 0$, avem

$$(x \cdot \vec{u}) \cdot \vec{v} = x \| \vec{u} \| \cdot \| \vec{v} \| \cos \widehat{\vec{u}\vec{v}} = x(\| \vec{u} \| \cdot \| \vec{v} \| \cdot \cos \widehat{\vec{u}\vec{v}}) = x(\vec{u} \cdot \vec{v}).$$

Dacă $x < 0$, atunci unghiul vectorilor $x \cdot \vec{u}$ și $\vec{v}$ se reprezintă prin suplementul unghiului vectorilor $\vec{u}$, $\vec{v}$, deoarece vectorul $x \cdot \vec{u}$ are sensul opus lui $\vec{u}$. Rezultă, pentru $x < 0$, $\cos \widehat{(x\vec{u})\vec{v}} = - \cos \widehat{\vec{u}\vec{v}}$, deci

$$(x \cdot \vec{u}) \cdot \vec{v} = \| x \cdot \vec{u} \| \cdot \| \vec{v} \| (-\cos \widehat{\vec{u}\vec{v}}) = (-x) \| \vec{u} \| \cdot \| \vec{v} \| (-\cos \widehat{\vec{u}\vec{v}}) = x \cdot (\vec{u} \cdot \vec{v}).$$

Deci *avem, pentru orice doi vectori nenuli și orice număr real nenul* x,

$$\boxed{(x\vec{u}) \cdot \vec{v} = x \cdot (\vec{u} \cdot \vec{v}).} \tag{4}$$

Această relație este evident verificată și în cazul în care unul din vectorii $\vec{u}$, $\vec{v}$ sau numărul x este nul. Deci formula (4) este generală.

Exerciții

1. *Să se arate că, oricare ar fi punctele O, A, B, C, D într-un plan, avem*

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} \ (\text{în } O) = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB} \ (\text{în } O),$$
$$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} \ (\text{în } O) = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} \ (\text{în } O).$$

2. *Se dau punctele A, B, C, D. Să se construiască vectorii* $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CB}$ *(în D),* $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DA}$ *(în A),* $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$ *(în B),* $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$ *(în C).*

3. *Se dau punctele A, B, C, M astfel ca* $\overrightarrow{BM} \sim \overrightarrow{MC}$. *Să se construiască vectorii* $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ *(în M),* $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{MA}$ *(în A),* $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{MA}$ *(în M),*

$$\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CM} \ (\text{în } C).$$

4. *Se dau punctele A, B, C, I, J astfel ca* $\overrightarrow{CI} \sim \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CJ} \sim \overrightarrow{BA}$. *Să se arate că punctele C, I, J sînt coliniare.*

5. *Fie M, N, G mijloacele segmentelor* $|AB|$, $|CD|$, $|MN|$ *dintr-un același plan. Să se arate că, oricare ar fi punctul O din acest plan,*

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} \ (\text{în } O) = 2\overrightarrow{OM}, \ \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} \ (\text{în } O) = 4\overrightarrow{OG}.$$

6. *Fiind date patru puncte A, B, C, D într-un plan, să se arate că există un punct P astfel ca* $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} \in \vec{0}$.

7. *Fiind date două puncte A, B să se arate dacă există punctele P, Q, R, S care verifică relațiile*

$$\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} \ (\text{în } A) = 2\overrightarrow{AB}, \ \overrightarrow{QA} - \overrightarrow{QB} \ (\text{în } A) = -\overrightarrow{AB}, \ \overrightarrow{RA} - \overrightarrow{RB} \ (\text{în } A) = \overrightarrow{AB},$$
$$2\overrightarrow{SA} - 3\overrightarrow{SB} \ (\text{în } A) = \overrightarrow{AB}.$$

În enunțurile următoare, $\vec{i}$, $\vec{j}$ *reprezintă doi versori ortogonali, avînd originea într-un punct O. Dacă P este un punct în planul vectorilor* $\vec{i}$, $\vec{j}$, *notația* $P(x, y)$ *va însemna că x și y sînt componentele vectorului de poziție* $\overrightarrow{OP}$ *față de axele avînd* $\vec{i}$ *și* $\vec{j}$ *ca versori, deci* $\overrightarrow{OP} \sim x\vec{i} + y\vec{j}$.

8. *Se dau punctele* $A(2, 2)$, $B(-3, -1)$, $C(3, -2)$.

a) *Notind prin I mijlocul segmentului* $|AB|$, *să se determine componentele vectorului* $\overrightarrow{OI}$ *față de* $\vec{i}$ *și* $\vec{j}$.

b) *Fie M, N punctele de pe dreapta AB pentru care* $\overrightarrow{MB} = -4\overrightarrow{MA}$ *și* $\overrightarrow{NB} = 4\overrightarrow{NA}$. *Să se arate că*

$$5\overrightarrow{OM} = 4\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}, \ 3\overrightarrow{ON} = 4\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}.$$

c) *Fie G punctul de pe dreapta CI, pentru care* $\overrightarrow{GC} = -2\overrightarrow{GI}$. *Să se arate că* $3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OC} + 2\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$. *Să se calculeze componentele vectorului* $\overrightarrow{OG}$.

9. *Se dau punctele* $A(-1, 2)$, $B(3, 1)$, $C(-2, -2)$. *Fie I, J punctele care verifică relațiile* $3\overrightarrow{IA} + 5\overrightarrow{IB} \in \vec{0}$, $3\overrightarrow{JA} - 5\overrightarrow{JB} \in \vec{0}$. *Să se arate că* $8\overrightarrow{OI} = 3\overrightarrow{OA} + 5\overrightarrow{OB}$ *și* $-2\overrightarrow{OJ} = 3\overrightarrow{OA} - 5\overrightarrow{OB}$. *Să se determine componentele vectorilor* $\overrightarrow{OI}$, $\overrightarrow{OJ}$.

10. *Să se calculeze normele vectorilor* $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$ *și produsele scalare* $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$ *luînd pentru A, B, C punctele definite prin formulele:*

a) $A(0, -2)$, $B(-2, -1)$, $C(2, 2)$,
b) $A(2, 3)$, $B(4, 1)$, $C(-1, 2)$,
c) $A(2, 3)$, $B(-4, 0)$, $C(0, 3)$,
d) $A(8, 0)$, $B(1, -2)$, $C(-3, 4)$.

demonstrația cosinusului
[illegible] în plan xOy!

11. *Fiind date patru puncte A, B, C, D într-un plan, notăm prin I, J, K, L mijloacele segmentelor* $|AB|$, *respectiv* $|CD|$, $|AD|$, $|BC|$.

a) *Să se arate că* $|IJ|$ și $|KL|$ *au același mijloc.*

b) *Ce fel de patrulater este figura ILJK, dacă ABCD este un patrulater?*

c) *Cum sînt punctele I, J, K, L în cazul în care figura ABCD este un patrulater?*

d) *Să se arate că, oricare ar fi punctele A, B, C, D în planul p, avem* $\overrightarrow{IL} \sim \overrightarrow{KJ}$ *și* $\overrightarrow{IK} \sim \overrightarrow{LJ}$.

12. *Fie ABC un triunghi echilateral cu laturile de lungime egală cu unitatea. Să se calculeze produsul scalar* $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

13. *Fie ABC un triunghi echilateral cu laturile de lungime 1 și fie AA', înălțimea din A a acestui triunghi,* $A' \in BC$. *Să se calculeze produsele scalare* $\overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA'} \cdot \overrightarrow{BA}$.

14. Fie ABCD un pătrat cu laturile de lungime 1. Să se calculeze produsul scalar $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.

15. Fie A, B, C trei vîrfuri consecutive ale unui hexagon convex regulat de laturi congruente ca etalonul m. Să se calculeze produsele scalare $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$.

2. Funcții trigonometrice

Fie într-un plan p triunghiul dreptunghic isoscel OAB, avînd $OA \perp OB$ și $|OA| \equiv |OB| = m$, unde m este segmentul etalon.

Să considerăm vectorii $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$. Avem $\vec{a}^2 = \vec{b}^2 = 1$ și $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$.

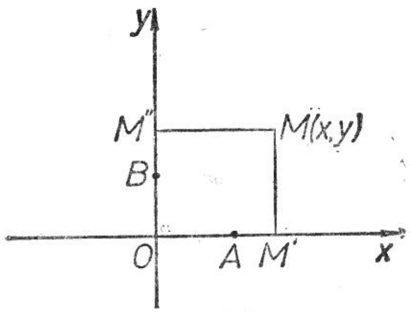

Fig. III.10

Spunem că vectorii $\vec{a}$ și $\vec{b}$ formează un *reper ortonormat* în planul p.

Dacă M este un punct oarecare din planul p, notăm prin M' proiecția ortogonală a lui M pe dreapta OA, iar prin M'' notăm proiecția ortogonală punctului M pe dreapta OB. Există un cuplu unic de numere reale (x, y), astfel încît să avem (fig. III.10):

(1) $\overrightarrow{OM'} = x\cdot\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OM''} = y\cdot\overrightarrow{OB}$.

Numerele x și y se numesc *coordonatele punctului* M față de reperul format de vectorii $\vec{a}, \vec{b}$; se spune că x este *abscisa* lui M, iar y este *ordonata* lui M față de reperul $(\vec{a}, \vec{b})$. Se scrie, dacă reperul $(\vec{a}, \vec{b})$ este fixat, $M(x, y)$ pentru a exprima că punctul M are coordonatele x și y.

Pentru orice cuplu (x, y) de numere reale, există un singur punct M în planul p, astfel ca x să fie abscisa lui M, iar y să fie ordonata lui M. Punctul M este dat de formula

(2) $\overrightarrow{OM} = x\cdot\vec{a} + y\cdot\vec{b}$ (în O).

Formulele (1) și (2) stabilesc o aplicație bijectivă $\mathscr{C}$ de la mulțimea $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ a cuplurilor de numere reale la mulțimea punctelor din planul p, deci $\mathscr{C}: \mathbf{R}\times\mathbf{R} \to p$.

Considerînd semnele coordonatelor x și y, putem împărți planul p în patru cadrane, care coincid cu interioarele celor patru unghiuri drepte formate de dreptele OA, OB (fig. III.11), anume:

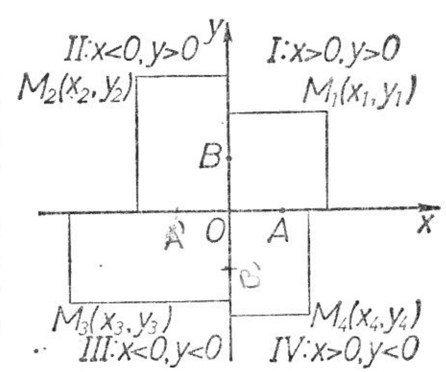

Fig. III.11

Cadranul I $= \{M(x, y);\ x > 0,\ y > 0\}$

Cadranul II $= \{M(x, y);\ x < 0,\ y > 0\}$
Cadranul III $= \{M(x, y);\ x < 0,\ y < 0\}$
Cadranul IV $= \{M(x, y);\ x > 0,\ y < 0\}$.

Planul p este egal, ca mulțime de puncte, cu reuniunea acestor patru cadrane și a dreptelor OA, OB. Avem $O(0, 0)$, $A(1, 0)$, $B(0, 1)$. Vom mai considera punctele $A'(-1, 0) \in OA$ și $B'(0, -1) \in OB$. Punctele A, A', B, B' se găsesc pe cercul de centru O și de rază 1, care va fi numit *cercul unitate* sau *cercul trigonometric* din planul p. Inegalitățile $y > 0$ și $y < 0$ definesc semiplanele limitate de dreapta OA în planul p; aceste semiplane vor fi numite *semiplanul superior* respectiv *semiplanul inferior* din planul p.

În primul capitol al acestui manual, am introdus funcțiile sinus și cosinus definite pe *mulțimea unghiurilor*. Vom defini acum funcții asemănătoare, dar definite pe *mulțimea numerelor reale*. Trecerea de la primul tip de funcții la tipul de funcții pe care le vom introduce acuma se face înlocuind fiecare unghi prin măsura sa în radiani. Dar noile funcții vor fi definite pe toată axa reală $\mathbf{R}$, deși măsura în radiani a unui unghi nu poate depăși numărul π, care corespunde unghiurilor alungite. Pentru a obține o *prelungire* a funcțiilor sinus și cosinus, în afara intervalului $[0, \pi]$, vom construi o aplicație surjectivă F, de la axa reală $\mathbf{R}$ la cercul trigonometric C, avînd raza 1 și centrul în originea unui reper ortonormat $(\vec{a}, \vec{b})$ fixat într-un plan p).

Aplicația

$$F : R \to C$$

este definită prin următoarele proprietăți (fig. III.12):

1) $F(t + 2\pi) = F(t), \forall t \in \mathbf{R}$.

2) Dacă $t \in (0, \pi)$, **punctul** $F(t)$ **va fi acel punct al cercului** C, **situat în semiplanul superior și astfel ca măsura în radiani a unghiului** $\widehat{F(t)OA}$ **să fie egală cu** t.

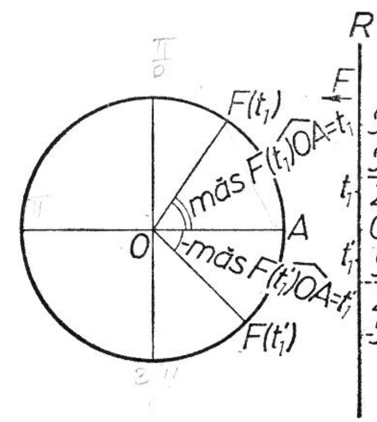

Fig. III.12

3) Punem apoi $F(0) = A$ **și** $F(\pi) = A'$ (fig. III.13).

4) Dacă $t \in (-\pi, 0)$, $F(t)$ **va fi acel punct al cercului** C, **situat în semiplanul inferior și pentru care măsura în radiani a unghiului** $\widehat{F(t)OA}$ **este egală cu** $-t$.

5) Punem $F(-\pi) = F(\pi) = A'$.

Potrivit acestei definiții, vom avea (fig. III.13)

$$F\left(\frac{\pi}{2}\right) = B,\quad F\left(\frac{3\pi}{2}\right) = B'.$$

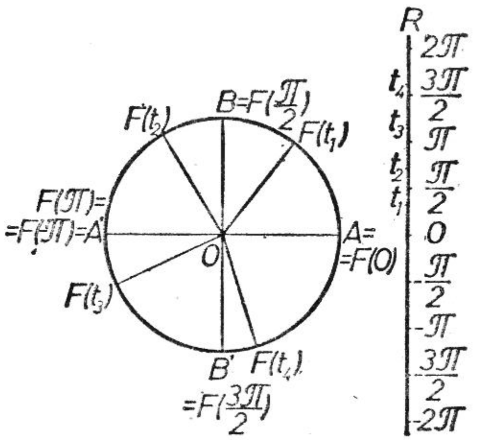

Fig. III.13

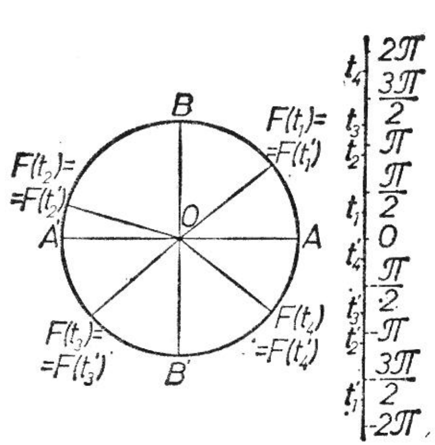

Fig. III.14

Dacă t este un număr real arbitrar, există un număr întreg k, astfel încît să avem $t + 2k\pi \in [0,\ 2\pi)$ şi numărul k este determinat în mod unic prin această proprietate.

Dacă t este un număr pozitiv sau nul, să notăm prin k partea întreagă a raportului $t/2\pi$ şi prin r diferenţa $t - 2k\pi$. Vom avea atunci

$$t = 2k\pi + r,\ r \in [0,\ 2\pi),\ k \in \mathbf{Z},\ k \geqslant 0.$$

Dacă t este un număr negativ, considerăm numărul pozitiv $-t$ şi scriem acest număr sub forma de mai sus:

$$-t = 2k\pi + r,\ r \in [0,\ 2\pi),\ k \in \mathbf{Z},\ k \geqslant 0.$$

Vom avea atunci

$$t = -2k\pi - r = 2k'\pi + r',$$

unde,

$$k' = -k - 1,\ r' = 2\pi - r \in (0,\ 2\pi].$$

Rezultă că *orice număr real t poate fi scris sub forma*

(1) $$t = 2k\pi + r,\ k \in \mathbf{Z},\ r \in [0,\ 2\pi).$$

Din condiţia 1) rezultă $F(t) = F(r)$.

Exerciţii:

1. *Să se scrie sub forma (1) numerele* 100, 200, ..., 1 000.

2. *Fie T, t două numere reale astfel ca $T > 0$. Să se arate că există o singură pereche de numere $k \in \mathbf{Z}$, $r \in [0,\ T)$ astfel ca să avem*

$$t = kT + r.$$

3. *Să se arate că funcţia $F : \mathbf{R} \to C$ construită mai sus are următoarele proprietăţi:*

1°. $F(0) = A,\quad F\left(\frac{\pi}{2}\right) = B,\quad F(\pi) = F(-\pi) = A',\quad F\left(\frac{3\pi}{2}\right) = B'.$

2°. *Aplicaţia F este periodică de perioadă 2π, adică avem $F(t + 2\pi) = F(t)$, pentru orice număr real t şi $0 < |t - t'| < 2\pi$ implică $F(t) \neq F(t')$.*

3°. *Dacă $|t| < \pi$, atunci punctul $M = F(t)$ este astfel încît măsura în radiani a unghiului $\widehat{MOA}$ este egală cu $|t|$.*

4°. *Dacă t, t' sînt două numere reale astfel ca $|t - t'| < \pi$, atunci punctele $M = F(t)$, $M' = F(t')$ sînt astfel încît măsura în radiani a unghiului $\widehat{MOM'}$ este egală cu $|t - t'|$, (fig. III.15).*

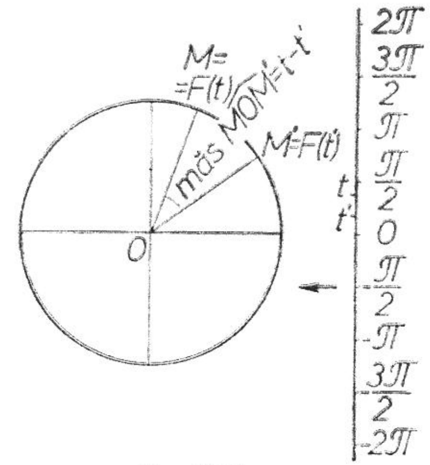

Fig. III.15

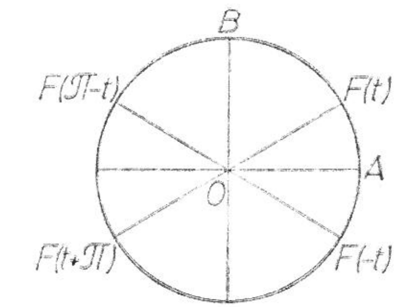

Fig. III.16

5°. *Oricare ar fi $t \in R$, avem:*

— punctele $F(t)$, $F(\pi + t)$ sînt simetrice faţă de punctul O, (fig. III.16).

— punctele $F(t)$, $F(\pi - t)$ sînt simetrice faţă de dreapta OB.

— punctele $F(t)$, $F(-t)$ sînt simetrice faţă de dreapta OA.

(*Indicaţie.* Pentru a verifica aceste proprietăţi, putem presupune că $t \in [0,\ 2\pi]$, deoarece scăzînd din t un multiplu întreg convenabil de 2π, putem ajunge la această situaţie)

Aplicaţia F este surjectivă, dar nu este injectivă, deoarece F este o aplicaţie periodică. Se spune că F constituie *aplicaţia de acoperire universală* a cercului C; prin această aplicaţie, cercul C este acoperit de o infinitate de ori de dreapta reală; dacă J este un interval de lungime mai mică decît 2π, inclus în $\mathbf{R}$, atunci imaginea lui J prin F este un arc de cerc avînd aceeaşi lungime cu J. Deci restricţiile $F \mid J$ ale aplicaţiei F, la intervale J, de lungimi mai mici decît 2π, sînt aplicaţii injective. Se spune că aceste intervale J sînt *intervale de injectivitate* ale aplicaţiei F.

Cu ajutorul aplicaţiei $F : \mathbf{R} \to C$ vom defini acum funcţiile (fig. III.17)

$$\cos : \mathbf{R} \to [-1,\ 1] \subset \mathbf{R},$$
$$\sin : \mathbf{R} \to [-1,\ 1] \subset \mathbf{R}$$

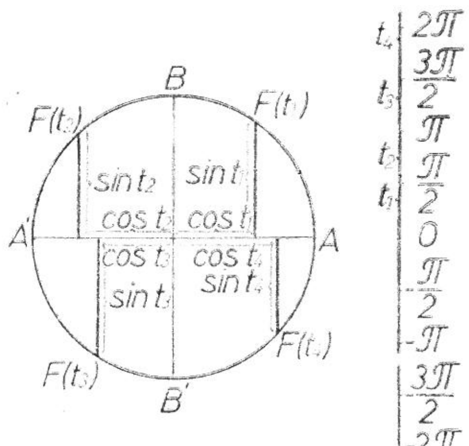

Fig. III.17

punînd

(1) $$\overrightarrow{OF(t)} = \cos t \cdot \vec{a} + \sin t \cdot \vec{b}.$$

D e f i n i ț i e. **Pentru fiecare număr $t \in \mathbf{R}$, numărul $\cos t$ este abscisa punctului $F(t)$, iar $\sin t$ este ordonata acestui punct.**

Din relația $F(t) \in C$ rezultă că avem, oricare ar fi $t \in \mathbf{R}$,

(2) $$\cos^2 t + \sin^2 t = 1.$$

Proprietățile aplicației F arată că avem

(3) $$\cos 0 = 1,\ \sin 0 = 0,\ \cos\frac{\pi}{2} = 0,\ \sin\frac{\pi}{2} = 1,$$

$$\cos\pi = -1,\ \sin\pi = 0,\ \cos\frac{3\pi}{2} = 0,\ \sin\frac{3\pi}{2} = -1.$$

Proprietatea 1) arată că *funcțiile sinus și cosinus sînt periodice cu perioada* 2π, deci avem, oricare ar fi $t \in \mathbf{R}$.

(4) $$\cos(t + 2\pi) = \cos t,\ \sin(t + 2\pi) = \sin t.$$

Proprietatea 2) arată că **sinusul unui unghi cu vîrful în punctul O este egal cu sinusul numărului real t, care este egal cu lungimea arcului dat de intersecția interiorului acelui unghi cu cercul C.** O proprietate analoagă se poate arăta pentru funcția cosinus.

Proprietățile de la punctul 5°, pag. 129, pot fi explicitate sub forma:

(5) $\cos(t + \pi) = -\cos t,\ \sin(t + \pi) = -\sin t$, (fig. III.18).

(6) $\cos(\pi - t) = -\cos t,\ \sin(\pi - t) = \sin t$, (fig. III.19).

(7) $\cos(-t) = \cos(t),\ \sin(-t) = -\sin t$, (fig. III.20).

Să mai reținem următoarele consecințe imediate ale definițiilor date:

Mulțimea numerelor $t \in \mathbf{R}$, pentru care $\cos t = -1$, este formată din numerele $\pi + 2k\pi$, unde $k \in \mathbf{Z}$.

Mulțimea numerelor $t \in \mathbf{R}$, pentru care $\cos t = 0$, este formată din numerele $\frac{\pi}{2} + k\pi$, unde $k \in \mathbf{Z}$.

Mulțimea numerelor $t \in \mathbf{R}$, pentru care cost $t = 1$, este formată din numerele de forma $2k\pi$, unde $k \in \mathbf{Z}$.

Am definit aplicația $F : \mathbf{R} \to C$ astfel ca, pentru orice $t \in (0, \pi)$, măsura în radiani a unghiului $\widehat{AOF(t)}$ să fie egală cu t. Din felul în care am definit

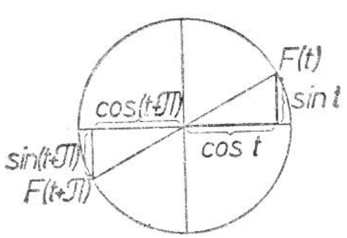

Fig. III.18

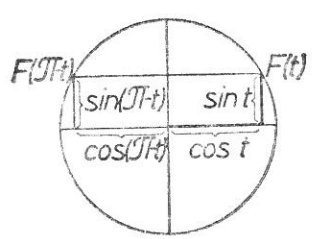

Fig. III.19

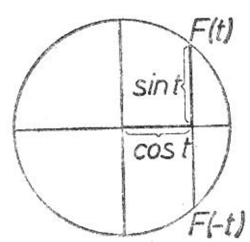

Fig. III.20

funcțiile sinus și cosinus, odată pe mulțimea unghiurilor, și apoi pe dreapta reală, deducem că, pentru $t \in [0, \pi]$, avem

$$\cos\widehat{AOF(t)} = \cos t,\ \sin\widehat{AOF(t)} = \sin t.$$

Aceste relații permit să calculăm, pe cale geometrică, valorile funcțiilor sinus și cosinus.

De exemplu, dacă avem un triunghi echilateral PQR și dacă notăm prin M mijlocul laturii $|QR|$, atunci triunghiul PQM este dreptunghic și, considerînd măsurile în radiani ale unghiurilor indicate, avem (fig. III.21)

$$\text{măs}\ \widehat{PQM} = \frac{\pi}{3},\ \text{măs}\ \widehat{QPM} = \frac{\pi}{6}.$$

Pe de altă parte, dacă notăm prin a lungimea laturii $|PQ|$, atunci

$$d(P, Q) = a,\ d(M, P) = \frac{\sqrt{3}}{2}a,\ d(Q, M) = \frac{1}{2}a,$$

$$\sin\widehat{PQM} = \cos\widehat{QPM} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\sin\widehat{QPM} = \cos\widehat{PQM} = \frac{1}{2}.$$

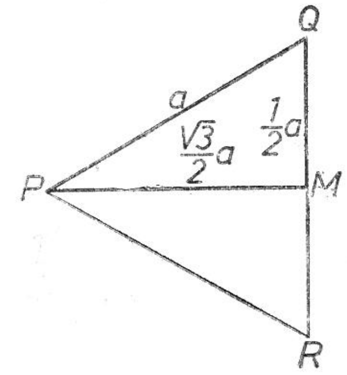

Fig. III.21

Rezultă formulele

$$\cos\frac{\pi}{3} = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2},\ \cos\frac{\pi}{6} = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Să considerăm acuma un triunghi dreptunghic isoscel LMN, avînd unghiul $\hat{L}$ drept și $|LM| = |LN|$. În acest caz (fig. III.22),

$$\text{măs}\ \widehat{LMN} = \text{măs}\ \widehat{LNM} = \frac{\pi}{4},$$

$$|MN| = \sqrt{2}\,|LM| = \sqrt{2}\,|LN|$$

și deducem

$$\cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

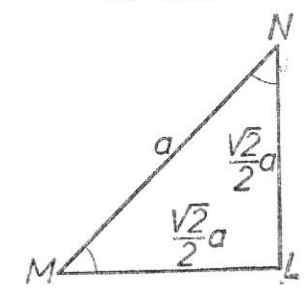

Fig. III.22

Exercițiu. *Să se calculeze valorile funcțiilor sinus și cosinus corespunzătoare valorilor* $t = -\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{6}$.

Să observăm că, dacă numărul t parcurge axa reală $\mathbf{R}$ de la $-\infty$ la $+\infty$, atunci punctul $F(t)$ descrie cercul C în sensul indicat de săgeată (fig. III.23). Dacă t parcurge semiaxa pozitivă $\mathbf{R}_+$, plecînd din O, $F(t)$ va merge de la A la B, apoi la A', la B', venind din nou în A **și repetînd acest traseu de o infinitate de ori.**

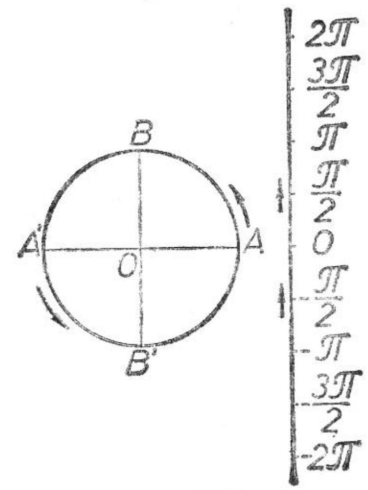

Fig. III.23

Funcția F, deci și funcțiile sinus și cosinus, sînt definite pe $\mathbf{R}$. Am arătat că $\sin(-t) = -\sin t$, deci *funcția sinus este o funcție impară*. Avem $\cos(-t) = \cos t$, deci *funcția cosinus este o funcție pară*.

Exemple.

$$\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\sin\frac{\pi}{2} = -1, \quad \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0,$$

$$\sin(-\pi) = -\sin\pi = 0, \quad \cos(-\pi) = \cos\pi = -1,$$

$$\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = -\sin\frac{3\pi}{2} = 1, \quad \cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0,$$

$$\sin(-2\pi) = -\sin(2\pi) = 0, \quad \cos(-2\pi) = \cos(2\pi) = 1.$$

Periodicitatea funcțiilor sinus și cosinus.

Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcție numerică definită pe toată axa reală și fie T un număr **pozitiv**. Se spune că T este o *perioadă* pentru funcția f dacă avem, pentru orice număr $t \in \mathbf{R}$,

$$f(t + T) = f(t);$$

dacă funcția f admite o perioadă T, se spune că f este o *funcție periodică* cu perioada T.

Am arătat că funcțiile sinus și cosinus sînt funcții periodice de perioadă $T = 2\pi$.

Dacă o funcție f este periodică de perioadă T, atunci f admite ca perioade fiecare multiplu întreg pozitiv de T, deoarece avem

$$f(t) = f(t + T) = f(t + 2T) = \ldots = f(t + pT) = \ldots, (p \in \mathbf{N}).$$

Dacă știm că o funcție f este periodică de perioadă $T > 0$, se pune problema de a ști dacă nu cumva f admite o perioadă T', pozitivă, și mai mică decît T, sau dacă f nu admite și alte perioade, în afară de multiplii întregi pozitivi ai perioadei T. Este util să reținem următoarele proprietăți:

1. *Funcțiile sinus și cosinus nu admit nici o perioadă mai mică decît* 2π.

2. *Dacă o funcție f admite o perioadă T, dar nu admite nici o perioadă mai mică decît T, atunci singurele perioade ale funcției f sînt multiplii întregi pozitivi ai perioadei T.*

Demonstrația proprietății 1. Să presupunem că funcția sinus ar admite o perioadă T', astfel ca $0 < T' < 2\pi$. Am avea atunci $\sin(t + T') = \sin t$, pentru orice $t \in \mathbf{R}$; în particular, am avea $\sin T' = \sin 0 = 0$. Dar singurul număr T', care satisface condițiile $0 < T' < 2\pi$, $\sin T' = 0$ este numărul π. Dar π nu este o perioadă pentru funcția sinus, deoarece $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \neq \neq \sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi\right) = -1$. Deci 2π *este cea mai mică perioadă a funcției sinus.*

Să presupunem că funcția cosinus ar admite o perioadă mai mică decît 2π. Fie T'' o astfel de perioadă. Am avea atunci $0 < T'' < 2\pi$ și $\cos(t + T'') = \cos t$, pentru orice $t \in \mathbf{R}$. În particular, $\cos T'' = \cos 0 = 1$. Dar nu există nici un număr real T'' astfel ca $0 < T'' < 2\pi$ și $\cos T'' = 1$. Deci *cea mai mică perioadă a funcției cosinus este tot* 2π.

Demonstrația proprietății 2. Să presupunem că T este cea mai mică perioadă a funcției f și fie T' o perioadă arbitrară a lui f. Avem atunci

$$f(t) = f(t + pT) = f(t + qT'),$$

oricare ar fi $t \in \mathbf{R}$ și oricare ar fi întregii pozitivi p și q.

Fie m cel mai mare număr întreg pozitiv, pentru care avem $mT < T'$. În acest caz, $T'' = T' - mT$ este un număr pozitiv mai mic decît T. Pentru orice număr real t, vom avea

$$f(t + T'') = f(t + T' - mT) = f(t - mT + T') = f(t - mT)$$

și rezultă

$$f(t) = f(t - mT + mT) = f(t - mT) = f(t + T''),$$

deci T'' este o perioadă a funcției f, dacă $T'' \neq 0$. Dar $T'' < T$ și f nu admite perioade mai mici decît T. Deci avem $T'' = 0$ și $T' = mT$. Deci orice perioadă a funcției f este un multiplu întreg pozitiv al perioadei minime T.

Aplicînd ultima proprietate funcțiilor sinus și cosinus, deducem că singurele perioade ale acestor funcții sînt multiplii întregi pozitivi ai numărului 2π.

Dacă o funcție $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ admite o perioadă minimă, se spune că această perioadă este *perioada principală* a funcției f.

Să observăm că dacă o funcție f admite perioada T, atunci avem, pentru orice $t \in \mathbf{R}$,

$$f(t - T) = f(t)$$

deoarece putem scrie $f(t) = f(t - T + T) = f(t - T)$. Avem prin urmare

$$f(t) = f(t \pm T) = f(t \pm 2T) = \ldots = f(t \pm pT) = \ldots,$$

deci pentru orice întreg n și pentru orice număr real t,

$$f(t + nT) = f(t) \quad (t \in \mathbf{R},\ n \in \mathbf{Z}).$$

Aplicînd această observație funcțiilor sinus și cosinus, putem scrie

$$\sin(t + 2n\pi) = \sin t, \quad \cos(t + 2n\pi) = \cos t.$$

În particular, să reținem formulele:

$$\sin(2n\pi) = 0, \quad \cos(2n\pi) = 1, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

A p l i c a ț i i. **1.** *Să se determine perioada principală a funcției*

$$f : \mathbf{R} \to [-1, 1],\ f(x) = \sin(2x) = \sin 2x.$$

Soluție. Din condiția de periodicitate $f(x + T) = f(x)$ deducem $\sin(2x + 2T) = \sin(2x)$; această condiție trebuie să fie îndeplinită pentru orice $x \in \mathbf{R}$. Punînd $2x = t$, deducem $\sin(t + 2T) = \sin t$; din proprietățile stabilite anterior deducem $2T = 2\pi$, sau $T = \pi$. Deci perioada principală a funcției date este π.

2. *Generalizare. Să determinăm perioada principală a funcției*

$$g : \mathbf{R} \to [-1, 1],\ g(x) = \sin(mx) = \sin mx,$$

unde m este un număr real diferit de zero.

Procedînd ca în cazul precedent, obținem condiția $\sin(mx + mT) = \sin(mx)$ sau $\sin(t + mT) = \sin t$, care trebuie să fie verificată pentru orice $t \in \mathbf{R}$. Cel mai mic număr pozitiv T, care verifică această condiție, este $T = 2\pi/m$.

3. *Ne propunem acum să determinăm perioada principală a funcției*

$$h : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ h(x) = \sin 4x + \cos 6x.$$

Dacă T este o perioadă pentru h, avem

$$\sin(4x + 4T) + \cos(6x + 6T) = \sin 4x + \cos 6x,\ x \in \mathbf{R}.$$

Luînd $x = 0$ și apoi $x = \frac{\pi}{2}$ obținem ecuațiile

$$\sin 4T + \cos 6T = 1,\ \sin 4T - \cos 6T = -1,$$

din care rezultă $\sin 4T = 0$ și $\cos 6T = 1$. Cel mai mic număr pozitiv care verifică aceste relații este $T = \pi$. Se verifică că π este într-adevăr o perioadă a funcției h și rezultă că π este perioada principală.

Exerciții

1. *Să se determine perioadele principale ale următoarelor funcții numerice, definite pe* $\mathbf{R}$:
$f(x) = \sin 3x - \cos 5x$, $g(x) = \sin 5x - \sin 7x$, $k(x) = \cos 10x - \cos 14x$.

2. *Să se arate că funcția* $h(x) = \sin x + \cos(\sqrt{2}\,x)$ *nu este periodică.*

Observație importantă. Dacă știm despre o funcție $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ că admite o perioadă T, pentru a studia comportarea funcției f va fi suficient a ne limita să studiem comportarea funcției f pe un interval oarecare de lungime T, deci pe un interval de forma $[a, a + T)$. Într-adevăr, oricare ar fi numărul t, există un întreg n astfel ca $t - nT$ să aparțină intervalului considerat și, în plus, $f(t) = f(t - nT)$. Dacă de exemplu vrem să determinăm valorile lui t pentru care avem $f(t) = 0$, va fi suficient să găsim valorile care verifică această condiție și care se găsesc în intervalul $[a, a + T)$. Orice altă valoare a lui t, pentru care $f(t) = 0$, se va obține dintr-una din valorile găsite în intervalul considerat, adăugînd multiplii întregi ai perioadei T.

În același mod, pentru a obține punctele t în care funcția f are o anumită valoare y, va fi suficient să determinăm punctele cu această proprietate, care aparțin intervalului considerat. În particular, putem afla în acest fel punctele t, pentru care $f(t)$ este o valoare de maxim sau de minim.

Exercițiu. *Să se determine valorile lui t pentru care funcția sinus are una din valorile* -1, $-\sqrt{3}/2$, $-1/2$, $-\sqrt{2}/2$, $1/2$, $\sqrt{2}/2$, $\sqrt{3}/2$, $1, 0$.

3. Formule de reducere la primul cadran

Folosind periodicitatea funcțiilor sinus și cosinus, am redus problema determinării valorilor acestor funcții la aceea a determinării valorilor restricțiilor funcțiilor sinus și cosinus la intervalul $[0, 2\pi)$.

Folosind proprietățile de simetrie ale aplicației $F : \mathbf{R} \to C$ și ținînd seama de faptul că punctul $F(t)$ are coordonatele $(\cos t, \sin t)$, putem reduce mai departe studiul valorilor funcțiilor sinus și cosinus (fig. III. 24) restrîngînd aceste funcții la intervalul $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$; pentru valorile lui t cuprinse în acest interval, punctul $F(t)$ se va găsi în primul cadran, dacă exceptăm valorile extreme 0 și $\pi/2$, care dau punctele $A(1, 0)$, $B(0, 1)$.

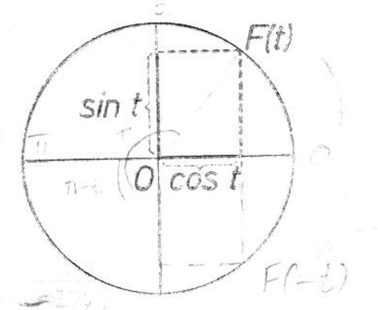

Fig. III. 24

Formula $\overrightarrow{OF(t + \pi)} = -\overrightarrow{OF(t)}$ permite să considerăm numai puncte t din intervalul $[0, \pi)$, care dau puncte $F(t)$ aparținînd primelor două cadrane, dacă exceptăm punctele A, B. Dacă $t \in [\pi, 2\pi)$, putem calcula $\cos t$ și $\sin t$ folosind relațiile

$$\cos t = -\cos(t - \pi),\ \sin t = -\sin(t - \pi),$$

în care $t - \pi \in [0, \pi)$. Mai departe, dacă avem un număr u în intervalul $[\pi/2, \pi)$, putem calcula numerele $\cos u$ și $\sin u$ din relațiile

$$\cos u = -\cos(\pi - u),\ \sin u = \sin(\pi - u),$$

în care $\pi - u \in (0, \pi/2]$.

Formulele

$$\cos t = \sin(\pi/2 - t),\ \sin t = \cos(\pi/2 - t)$$

FOARTE IMPORTANT

arată în sfîrșit că, pentru a cunoaște toate valorile funcțiilor sinus și cosinus, este suficient să cunoaștem valorile pe care le iau aceste funcții în punctele intervalului $[0, \pi/4]$. Primele 3 zecimale ale acestor valori se obțin din tabelul de la pag. 71–72, trecînd de la radiani la grade sexagesimale.

Aplicații. Din observațiile făcute anterior, deducem formulele

$$\sin\frac{\pi}{4} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\sin\frac{3\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4},\quad \cos\frac{3\pi}{4} = -\cos\frac{\pi}{4},$$

$$\sin\frac{5\pi}{4} = -\sin\frac{\pi}{4},\quad \cos\frac{5\pi}{4} = -\cos\frac{\pi}{4}$$

$$\sin\frac{7\pi}{4} = -\sin\frac{\pi}{4},\quad \cos\frac{7\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4}.$$

4. Reprezentarea grafică a funcției sinus

Să considerăm, într-un plan p, un reper ortonormat $(\vec{a}, \vec{b})$, format din vectorii unitari și ortogonali $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$. Fiecare punct P din planul p

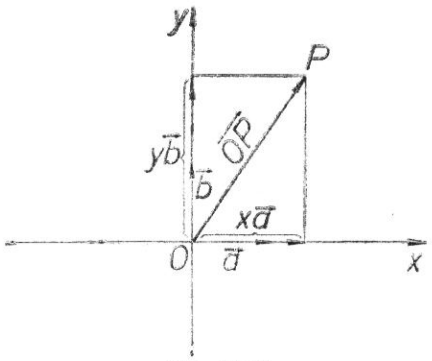

Fig. III.25

va fi determinat de un cuplu (x, y) de numere reale, astfel ca (fig. III.25)

$$\vec{OP} = x\vec{a} + y\vec{b}.$$

Ne propunem să trasăm locul geometric al punctelor P avînd coordonatele de forma $x = t$, $y = \sin t$; din aceste ecuații deducem $y = \sin x$. Acest loc geometric reprezintă graficul funcției sinus în planul p.

Să împărțim axa OA în intervale de lungimi egale cu 2π și avînd extremitățile în punctele $M_k\ (2k\pi, 0)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$, (fig. III.26).

Punctele M_k aparțin locului geometric considerat, deci graficului funcției sinus. Funcția sinus fiind periodică de perioadă 2π, graficul acestei funcții este format dintr-o infinitate de arce S avînd extremitățile în cîte două puncte

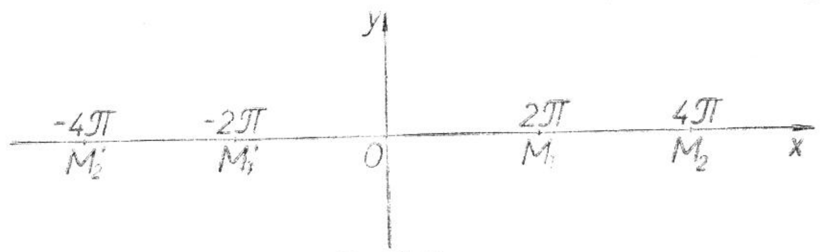

Fig. III.26

consecutive M_{k-1}, M_k. Arcul S_k constituie reprezentarea grafică a restricției funcției sinus la intervalul $[2(k-1)\pi, 2k\pi]$ și fiecare din arcele S_k se poate obține din arcul S_1 printr-o translație de-a lungul axei OA, anume prin translația

$$y' = y,\ x' = x + 2(k-1)\pi.$$

Deci arcele S_k sînt congruente două cîte două, în particular, ele sînt congruente cu arcul S_1.

Această observație arată că este suficient să trasăm graficul funcției sinus restrînsă la intervalul $[0, 2\pi]$, deci este suficient să trasăm arcul S_1.

Cînd x parcurge intervalul $[0, 2\pi]$, numărul $\sin x$ parcurge intervalul $[-1, 1]$ în ambele sensuri, după cum urmează (fig. III.27):

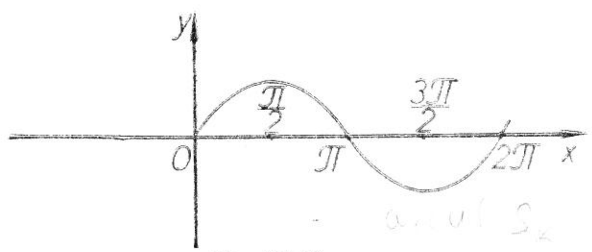

Fig. III.27

Pentru $x = 0$, $\sin x = 0$. **Cînd** x **parcurge** subintervalul $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, numărul $\sin x$ parcurge intervalul $[0, 1]$ crescînd de la 0 la 1. Pentru $x = \frac{\pi}{2}$, $\sin x$ are valoarea maximă 1. Cînd x trece în intervalul $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ funcția sinus devine descrescătoare, numărul $\sin x$ coborînd de la valoarea maximă 1 la valoarea 0. În intervalul următor $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$, funcția sinus continuă să descrească, valorile ei coborînd de la 0 la -1, care este valoarea minimă pe care poate s-o ia funcția sinus. De la această valoare minimă, numărul $\sin x$ începe să crească din nou, mergînd de la -1 la 0, ajungînd la 0 pentru $x = 2\pi$.

Figura III.28 reprezintă graficul funcției sinus prelungită în afara intervalului $[0, 2\pi]$. Ne putem imagina acum forma întregului grafic.

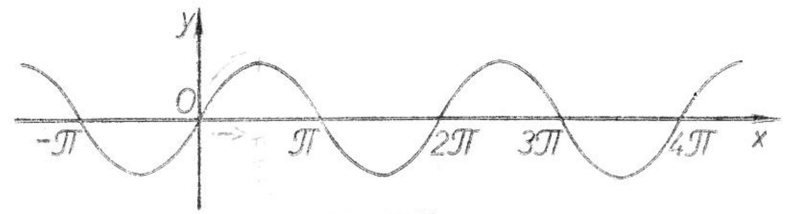

Fig. III.28

Intervale de monotonie. Din indicațiile date, rezultă că funcția sinus este strict crescătoare pe fiecare interval de forma $\left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$, unde $k \in \mathbf{Z}$. Dimpotrivă, funcția sinus este strict descrescătoare pe fiecare interval de forma $\left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right]$.

Aplicație. Să se afle semnul diferenței $\sin\frac{\pi}{9} - \sin\frac{\pi}{11}$.

Se observă că $\frac{\pi}{11} < \frac{\pi}{9}$ și că numerele $\frac{\pi}{11}$, $\frac{\pi}{9}$ aparțin intervalului $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, pe care funcția sinus este crescătoare. Avem deci $\sin\frac{\pi}{11} < \sin\frac{\pi}{9}$ și $\sin\frac{\pi}{9} - \sin\frac{\pi}{11} > 0$.

Semnul funcției sinus

Din observațiile făcute, deducem că funcția sinus este pozitivă pe fiecare interval deschis $(2k\pi, \pi + 2k\pi)$, unde $k \in \mathbf{Z}$, și că aceeași funcție este negativă pe fiecare interval deschis $(\pi + 2k\pi, 2(k+1)\pi)$.

A p l i c a ț i e. Să se afle semnul expresiei

$$E = \sin\frac{\pi}{9}\sin\frac{11\pi}{9}\sin\left(-\frac{8\pi}{7}\right)\sin\frac{23\pi}{7}\sin 3\ \sin 5.$$

Soluție. Avem $\frac{\pi}{9} \in (0, \pi)$, deci $\sin\frac{\pi}{9} > 0$; $\frac{11\pi}{9} \in (\pi, 2\pi)$, $\sin\frac{11\pi}{9} < 0$, $\sin\left(-\frac{8\pi}{7}\right) = -\sin\frac{8\pi}{7}$, $\frac{8\pi}{7} \in (\pi, 2\pi)$, $\sin\frac{8\pi}{7} < 0$; $\frac{23\pi}{7} \in (3\pi, 4\pi)$, $\sin\frac{23\pi}{7} < 0$; $3 \in (0, \pi)$, $\sin 3 > 0$; $5 \in (\pi, 2\pi)$, $\sin 5 < 0$.

Rezultă $E < 0$.

A p l i c a ț i e. Să se reprezinte grafic funcția $f : \mathbf{R} \to [-2, 2]$, $f(x) = 2\sin x$.

Soluție. Funcția f are aceeași perioadă și aceleași intervale de monotonie ca funcția sinus. Graficul lui f se obține din graficul funcției sinus printr-o *dilatare* în lungul axei OB. Graficul funcției f intersectează axa OA în punctele M_k $(k\pi, 0)$ și are punctele de maxim $L_k\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ 2\right)$ și punctele de minim $L'_k\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, -2\right)$, unde $k \in \mathbf{Z}$. Graficul funcției f este reprezentat în figura III.29.

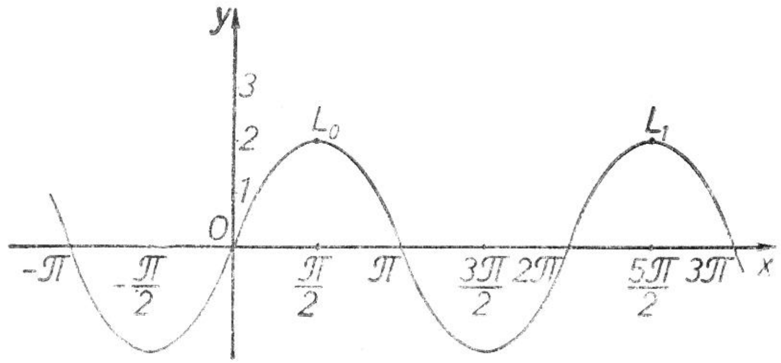

Fig. III.29

A p l i c a ț i e. Să se reprezinte grafic funcția $g : \mathbf{R} \to [-1, 1]$, $g(x) = \sin 2x$.

Soluție. Funcția g este periodică de perioadă π. Dacă $(x, y = \sin 2x)$ este un punct al graficului funcției g, atunci punctul $(2x, \sin 2x)$ va fi un punct al graficului funcției sinus. Deci graficul funcției g se obține din graficul funcției sinus efectuînd o *contracție* de-a lungul axei OA. Graficul funcției g intersectează axa OA în punctele $P_k\left(\frac{k\pi}{2}, 0\right)$, unde $k \in \mathbf{Z}$. Valoarea maximă a funcției g este 1 și este atinsă în punctele de abscise $\frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, iar valoarea

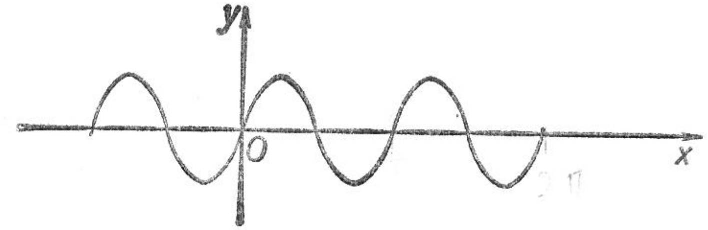

Fig. III.30

minimă este atinsă în punctele de abscise $-\frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. Reprezentarea grafică a funcției g este dată în figura III.30.

5. Reprezentarea grafică a funcției cosinus

Pentru orice număr real x avem $\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin x$. Rezultă că, din orice punct $(x, y = \cos x)$ al graficului funcției cosinus, se obține un punct al graficului funcției sinus, făcînd o translație de-a lungul axei OA, punînd $x' = x + \frac{\pi}{2}$, $y' = y$. Într-adevăr, dacă $y' = \sin x'$, atunci $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$. Deci putem obține graficul funcției cosinus, considerînd graficul funcției sinus și mutînd axa OB, paralel cu ea însăși, din punctul $O(0, 0)$ în punctul $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$. Figura III.31 reprezintă graficul funcției cosinus.

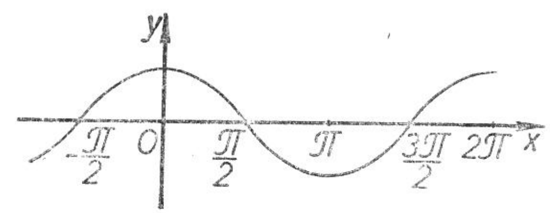

Fig. III.31

Acest grafic intersectează axa OA în punctele $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$; punctele de maxim au coordonatele $(2k\pi, 1)$, $k \in \mathbf{Z}$, iar punctele de minim au coordonatele $(2k\pi + \pi, -1)$.

Funcția cosinus este strict crescătoare pe fiecare interval de forma $[\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi]$, $k \in \mathbf{Z}$, și este strict descrescătoare pe fiecare interval de forma $[2k\pi, \pi + 2k\pi]$, $k \in \mathbf{Z}$.

A p l i c a ț i e. Să se stabilească semnele expresiilor

$$E_1 = \cos\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{5},\quad E_3 = \cos\frac{9\pi}{7} - \cos\frac{8\pi}{7}.$$

Soluţie. Avem $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{5} \in (0, \pi)$ şi $\frac{\pi}{5} < \frac{\pi}{4}$. Funcţia cosinus fiind descrescătoare pe intervalul $(0, \pi)$, avem $E_1 < 0$.

Pentru a doua expresie, observăm că $\frac{8\pi}{7} < \frac{9\pi}{7} \in (\pi, 2\pi)$; pe acest interval, funcţia cosinus este crescătoare, deci $E_2 > 0$.

Semnul funcţiei cosinus. Din reprezentarea grafică a funcţiei cosinus rezultă că această funcţie este pozitivă pe orice interval deschis de forma $\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$ şi că aceeaşi funcţie este negativă pe fiecare interval de forma $\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right)$, $k \in \mathbf{Z}$.

Exerciţiu. *Să se afle semnul numărului* cos 1 234.

6. Formule de adunare şi scădere

Fie u şi v două unghiuri ascuţite, astfel ca suma $u + v$ să fie reprezentată de asemenea prin unghiuri ascuţite. Să construim, într-un plan p, trei semidrepte h, k, m, cu aceeaşi origine, astfel ca acestea să formeze unghiurile adiacente $\widehat{hk} \equiv u$ şi $\widehat{km} \equiv v$. În acest caz, unghiurile $\widehat{hk}$, $\widehat{km}$, $\widehat{hm}$ vor fi unghiuri ascuţite şi semidreapta k va fi interioară unghiului $\widehat{hm}$, (fig. III. 32).

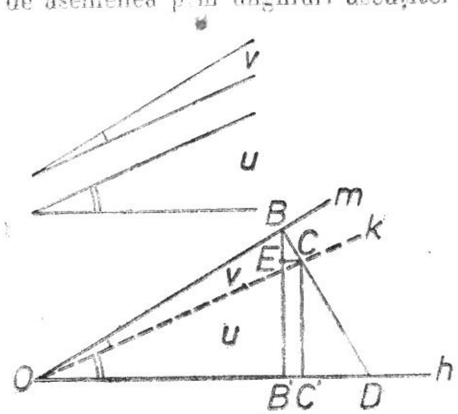

Fig. III.32

Să alegem un punct arbitrar $B \in m$ şi să construim punctele $C \in k$, $B' \in h$, $C' \in h$ astfel ca

(1) $BC \perp OC$, $CC' \perp OC'$, $BB' \perp OB'$.

Dreapta BC intersectează semidreapta h într-un punct D, astfel încît:

(2) $B' \in |OD|$, $B' \in |OC'|$, $C' \in |B'D|$.

Aplicînd de mai multe ori teorema proiecţiei, obţinem relaţiile

(3) $|OB'| = |OB| \cos\widehat{hm} = |OB| \cos(u + v)$,

(4) $|OC| = |OB| \cos\widehat{km} = |OB| \cos v$,

(5) $|OC'| = |OC| \cos\widehat{hk} = |OB| \cos v \cos u$,

(6) $|B'C'| = |BC| \cos\widehat{BDB'}$, $|BC| = |OB| \cos\widehat{OBC}$.

Din triunghiurile dreptunghice OCD şi OBC rezultă

$$\cos\widehat{BDB'} = \cos\widehat{BDO} = \sin\widehat{COD} = \sin u,$$

$$\cos\widehat{OBC} = \sin\widehat{COB} = \sin v,$$

astfel încît formulele (6) pot fi scrise sub forma

(7) $|B'C'| = |BC| \sin u = |OB| \sin v \sin u$.

Din relaţiile de ordonare (2) rezultă formula

$$|OC'| = |OB'| + |B'C'|$$

iar egalităţile (3), (5) şi (7) dau

(8) $|OB| \cos u \cos v = |OB| \cos(u + v) + |OB| \sin u \sin v$.

Avem deci egalitatea $\cos u \cos v = \cos(u + v) + \sin u \sin v$ sau

(9) $\boxed{\cos(u + v) = \cos u \cos v - \sin u \sin v}$.

Demonstraţia care ne-a condus la relaţia (9) este valabilă ori de cîte ori unghiurile u, v şi $u + v$ sînt ascuţite.

Dacă unghiurile u şi v sînt ascuţite, dar unghiul $u + v$ este obtuz, deci dacă avem situaţia din figura III.33, atunci vom avea $O \in |B'C'|$ şi, notînd prin w unghiul $\widehat{BOB'}$, care este suplementul unghiului $\widehat{hm} = \widehat{BOD}$, avem

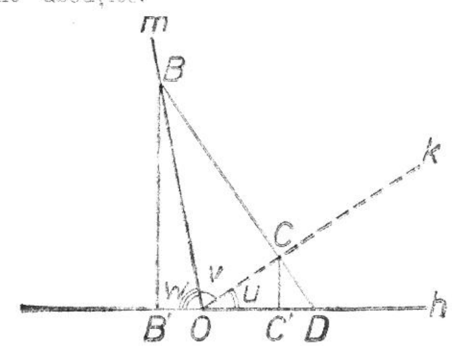

Fig. III.33

(10) $O \in |B'C'|$,

$\cos w = -\cos(u + v)$.

Aplicînd din nou, de mai multe ori teorema proiecţiei, vom avea

$$|OB'| = |OB| \cos w, \quad |OC'| = |OC| \cos u = |OB| \cos v \cos u,$$

$$|B'C'| = |BC| \cos\widehat{BDB'} = |OB| \sin v \sin u$$

şi rezultă egalitatea

$$|OB| \sin u \sin v = |OB'| + |OC'| = |OB| (\cos w + \cos u \cos v)$$

sau

$$\sin u \sin v = \cos w + \cos u \cos v.$$

Avem deci

$$\cos(u + v) = -\cos w = \cos u \cos v - \sin u \sin v$$

şi rezultă că egalitatea (9) este adevărată şi în cazul în care u şi v sînt unghiuri ascuţite, iar $u + v$ este unghi obtuz.

Dacă $u + v$ este un unghi drept, atunci $\cos(u + v) = 0$, $\cos u = \sin v$ şi $\cos v = \sin u$, astfel încît egalitatea (9) rămîne adevărată.

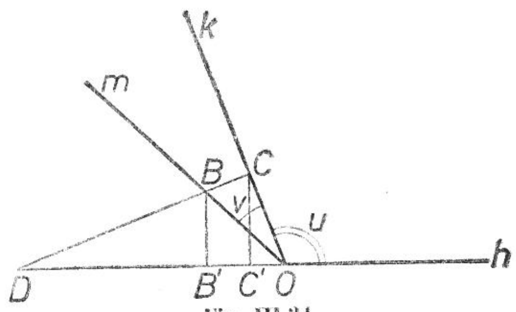

Fig. III.34

Dacă u şi v sînt unghiuri astfel încît u este obtuz sau drept şi dacă suma $u+v$ este definită, deci dacă sîntem în situaţia ilustrată în figura III.34, atunci vom avea relaţiile de ordonare

(11) $$C' \in |OB'|,\quad B' \in |OD|,\ C' \in |OD|.$$

Exerciţiu. *Să se demonstreze egalitatea* (9) *în condiţiile* (11).

Formula (9) este adevărată ori de cîte ori u şi v sînt unghiuri astfel încît suma $u+v$ este definită. Dacă $u+v$ este un unghi alungit, atunci unghiurile u şi v sînt suplementare şi avem

$$\cos u = -\cos v,\ \sin u = \sin v,\ \cos(u+v) = -1$$

astfel încît formula (9) este de asemenea adevărată.

Formula (9) permite calculul cosinusului sumei a două unghiuri, cunoscînd sinusurile şi cosinusurile celor două unghiuri.

Ne propunem să stabilim o formulă analoagă pentru sinusul sumei a două unghiuri.

Vom considera separat fiecare din cazurile pe care le-am distins anterior pentru calculul cosinusului sumei $u+v$.

În cazul figurii III.32, deci în cazul în care unghiurile u, v şi $u+v$ sînt ascuţite, avem

$$|BB'| = |OB|\sin(u+v),\quad |CC'| = |OC|\sin u = |OB|\cos v\sin u,$$
$$|BC| = |OB|\sin v.$$

Dacă notăm prin E proiecţia ortogonală a punctului C pe dreapta BB', vom avea $E \in |BB'|$ şi

$$|B'E| = |CC'|,\ |BB'| = |BE| + |B'E|,\ |BE| = |BC|\cos\widehat{CBE} = |BC|\cos u.$$

Rezultă formula

$$|OB|\sin(u+v) = |CC'| + |BE| = |OB|\sin u\cos v + |OB|\sin v\cos u$$

şi avem deci

(12) $$\boxed{\sin(u+v) = \sin u\cos v + \sin v\cos u}$$

Exerciţiu. *Să se demonstreze egalitatea* (12) *în cazurile în care unghiul u sau unghiul v este ascuţit şi în cazul în care unghiurile u, v sînt suplementare.*

Formula (12) este valabilă pentru orice unghiuri u şi v, pentru care suma este definită, şi permite calculul sinusului sumei $u+v$ în funcţie de sinusurile şi cosinusurile unghiurilor u şi v.

Să reţinem deci formulele

$$\boxed{\begin{aligned}\cos(u+v) &= \cos u\cos v - \sin u\sin v,\\ \sin(u+v) &= \sin u\cos v + \cos u\sin v.\end{aligned}}$$

adevărate pentru orice două unghiuri u şi v, pentru care suma $u+v$ este definită.

Aplicaţii. Am arătat că

$$\sin 30° = \frac{1}{2},\ \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2},\ \sin 45° = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Rezultă, folosind formulele scrise mai sus,

$$\sin 75° = \sin(30° + 45°) = \sin 30°\cos 45° + \sin 45°\cos 30° =$$
$$= \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4},$$

$$\cos 75° = \cos(30° + 45°) = \cos 30°\cos 45° - \sin 30°\sin 45° =$$
$$= \frac{\sqrt{3}\sqrt{2} - \sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

Pentru a da o altă aplicaţie, să observăm că din formula (9) rezultă, dacă presupunem $v = u =$ unghi ascuţit,

$$\cos 2u = \cos u\cos u - \sin u\sin u = \cos^2 u - \sin^2 u = 2\cos^2 u - 1.$$

Din ultima egalitate deducem formula (sin²u + cos²u = 1)

(14) $$\cos u = \sqrt{\frac{1+\cos 2u}{2}},\quad \left(u \leqslant \frac{\pi}{2}\right).$$

Am ţinut seama de faptul că, unghiul u fiind ascuţit, cosinusul său trebuie să fie pozitiv.

Să presupunem în ultima formulă că u este un unghi de 15°, deci că $2u$ este un unghi de 30°. În acest caz, vom avea $\cos 2u = \frac{\sqrt{3}}{2}$ şi formula (14) dă

$$\cos 15° = \frac{\sqrt{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$$

Exerciţii

1. *Să se calculeze* sin 15°. R. $\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$.

2. *Să se calculeze* cos (22°30′) *şi* sin (22°30′), *apoi* cos 7°30′, sin 7°30′.

Fie a şi b două numere reale. Ştim că există două numere întregi m şi n astfel ca numerele $a' = a - 2m\pi$, $b' = b - 2n\pi$ să aparţină intervalului $[0, 2\pi)$, deci astfel ca să avem

(1) $$a = a' + 2m\pi,\ 0 \leqslant a' < 2\pi,\ b = b' + 2n\pi,\ 0 \leqslant b' < 2\pi.$$

De exemplu, dacă a este un număr pozitiv, împărțim numărul a la 2π și notăm cu m partea întreagă a cîtului, iar prin a' restul. Dacă a este un număr negativ, $-a$ va fi pozitiv și avem o relație de forma $-a = a^* + 2h\pi$, unde $0 \leqslant a^* < 2\pi$ și $h \in \mathbf{Z}$, $h \geqslant 0$. Vom putea scrie atunci, dacă $a^* > 0$,

$$a = -a^* - 2h\pi = (2\pi - a^*) + 2m\pi, \quad m = -h - 1.$$

Deci relațiile (1) pot fi într-adevăr realizate.

Fiecare din numerele a', b' se va găsi într-unul din intervalele $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$, $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$, $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$. Aceasta înseamnă că există numere naturale p și q, cel mult egale cu 3, astfel ca să avem

(2) $$a'' = a' - p\,\frac{\pi}{2} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right);\; b'' = b' - q\,\frac{\pi}{2} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Din formulele (1) rezultă că avem

(3) $$\cos a = \cos a',\ \sin a = \sin a',\ \cos b = \cos b',\ \sin b = \sin b',$$

(4) $$\cos(a + b) = \cos(a' + b'),\ \sin(a + b) = \sin(a' + b').$$

Dacă în formulele (2) avem $p = q = 0$, atunci există unghiuri ascuțite u și v, astfel ca măsurile în radiani ale unghiurilor u, v, $u + v$ să fie egale cu numerele a', b', $a' + b'$. Avem atunci

(5) $$\cos a' = \cos u,\ \sin a' = \sin u,\ \cos b' = \cos v,\ \sin b' = \sin v,$$

(6) $$\cos(a' + b') = \cos(u + v),\ \sin(a' + b') = \sin(u + v).$$

Din formulele (3) — (6) și din formulele cunoscute pentru unghiuri deducem egalitățile

(7) $$\cos(a + b) = \cos a\ \cos\ b - \sin a\ \sin\ b,$$

(8) $$\sin(a + b) = \sin\ a\ \cos\ b + \cos\ a\ \sin\ b.$$

În cazul general, vom avea formulele analoage pentru a'' și b'', deoarece aceste numere aparțin intervalului $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$; deci putem scrie

(9) $$\cos(a'' + b'') = \cos a''\ \cos b'' - \sin a''\ \sin b'',$$

(10) $$\sin(a'' + b'') = \sin a''\ \cos b'' + \cos a''\ \sin b''.$$

Pentru a arăta că formulele (7) și (8) sînt generale, deci că sînt adevărate pentru orice valori date variabilelor a și b, este suficient să arătăm că:

Dacă formulele (7) și (8) sînt verificate de numerele a și b, atunci ele vor fi verificate și de numerele $a' = a + \frac{\pi}{2}$ și b.

Demonstrație. Ne vom sprijini pe identitățile generale

$$\sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = \cos t,\ \cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin t.$$

Avem, ținînd seama de aceste identități și de formulele (7) și (8),

$$\cos(a' + b) = \cos\left(a + b + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(a + b) = -\sin a\ \cos b - \cos a\ \sin b =$$
$$= \cos a'\ \cos b - \sin a'\ \sin b,$$

$$\sin(a' + b) = \sin\left(a + b + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(a + b) = \cos a\ \cos b - \sin a\ \sin b =$$
$$= \sin a'\ \cos b + \cos a'\ \sin b.$$

Rezultă că formulele (7) și (8) sînt verificate și de numerele a' și b. Repetînd raționamentul, vom arăta că aceste formule sînt verificate de fiecare din perechile de numere

$$(a'', b''), \left(a'' + \frac{\pi}{2}, b''\right), \left(a'' + 2\frac{\pi}{2}, b''\right), \left(a'' + 3\frac{\pi}{2}, b''\right),$$

$$\left(a'', b'' + \frac{\pi}{2}\right), \left(a'' + \frac{\pi}{2}, b'' + \frac{\pi}{2}\right), \left(a'' + \pi, b'' + \frac{\pi}{2}\right), \left(a'' + 3\frac{\pi}{2}, b'' + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$(a'', b'' + \pi), \left(a'' + \frac{\pi}{2}, b'' + \pi\right), (a'' + \pi, b'' + \pi), \left(a'' + 3\frac{\pi}{2}, b'' + \pi\right),$$

$$\left(a'', b'' + \frac{3\pi}{2}\right), \left(a'' + \frac{\pi}{2}, b'' + \frac{3\pi}{2}\right), \left(a'' + \pi, b'' + \frac{3\pi}{2}\right), \left(a'' + \frac{3\pi}{2}, b'' + \frac{3\pi}{2}\right).$$

În rezumat, putem enunța următorul rezultat fundamental:

Oricare ar fi numerele reale a și b, avem

(11) $$\boxed{\sin(a + b) = \sin a\ \cos b + \cos a\ \sin b.}$$

(12) $$\boxed{\cos(a + b) = \cos a\ \cos b - \sin a\ \sin b.}$$

Dacă în aceste identități punem $b = -b'$, obținem identitățile:

(13) $$\sin(a - b') = \sin a\ \cos b' - \cos a\ \sin b'.$$

(14) $$\cos(a - b') = \cos a\ \cos b' + \sin a\ \sin b'.$$

Aceste formule permit să se calculeze sinusurile și cosinusurile sumei și diferenței a două unghiuri, cunoscînd sinusurile și cosinusurile celor două unghiuri.

Aplicații. **1.** *Să se arate ce devin formulele precedente, cînd luăm:*

$$a = 0,\ a = \frac{\pi}{2},\ a = \pi,\ a = 2\pi$$

sau

$$b' = 0,\ b' = \frac{\pi}{2},\ b' = \pi,\ b' = 2\pi.$$

Soluție. Se obțin formulele cunoscute

$$\sin(-v) = -\sin v,\quad \cos(-v) = \cos v,\quad \sin\left(\frac{\pi}{2} \pm v\right) = \cos v,$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} \pm v\right) = \mp \sin v,\ \sin(\pi \pm v) = \mp \sin v,\ \cos(\pi \pm v) = -\cos v,$$

$$\sin(2\pi \pm v) = \pm \sin v,\ \cos(2\pi \pm v) = \cos v,$$

$$\sin\left(u-\frac{\pi}{2}\right)=-\cos u,\quad \cos\left(u-\frac{\pi}{2}\right)=\sin u,$$
$$\sin(u-\pi)=-\sin u,\quad \cos(u-\pi)=-\cos u,$$
$$\sin(u-2\pi)=\sin u,\quad \cos(u-2\pi)=\cos u.$$

2. *Să se calculeze* $\sin\frac{\pi}{12}$, $\cos\frac{\pi}{12}$, $\sin\frac{7\pi}{12}$ și $\cos\frac{7\pi}{12}$.

Soluție. Avem $\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}$, $\frac{7\pi}{12}=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}$, deci $\sin\frac{\pi}{12}=$

$$=\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}=$$
$$=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4},$$

$$\cos\frac{\pi}{12}=\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}=$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4},$$

$$\sin\frac{7\pi}{12}=\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}=$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4},$$

$$\cos\frac{7\pi}{12}=\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}=$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}.$$

3. *Să se arate că* $\sin(u+v)\cos u-\cos(u+v)\sin u=\sin v$ și $\cos(u+v)\cos u+\sin(u+v)\sin u=\cos v$.

Soluție. Avem $v=(u+v)-u$, $\sin v=\sin[(u+v)-u]$. Aplicînd formula (13), se obține prima relație. A doua relație se va obține aplicînd formula (14).

7. Funcțiile tangentă și cotangentă

Funcția tangentă. Să notăm prin M mulțimea numerelor reale de forma $\frac{\pi}{2}+k\pi$, unde $k\in\mathbf{Z}$. Pentru fiecare număr $x\notin M$, dreapta $OF(x)$ intersectează dreapta D, trecînd prin punctul $A(1, 0)$ și paralelă la OB, într-un punct T' (fig. III.35; 36) care are coordonatele de forma $(1, u)$. Punctul T depinde de x, deci u este o funcție de x. Această funcție este definită pe mulțimea $\mathbf{R}-M$ și are valori în $\mathbf{R}$. Se scrie $u=tg\ x$ și se spune că aplicația $x\to u$ este *funcția tangentă*. Avem deci

$$tg:\mathbf{R}-\mathbf{M}\to\mathbf{R},\quad M=\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi;\ k\in\mathbf{Z}\right\}.$$

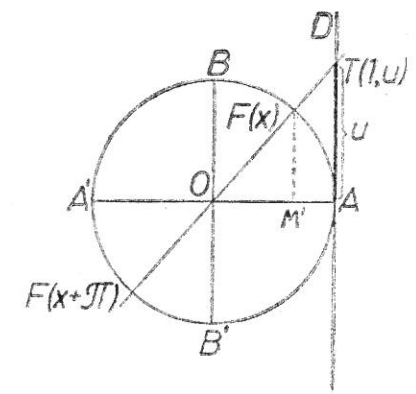

Fig. III.35

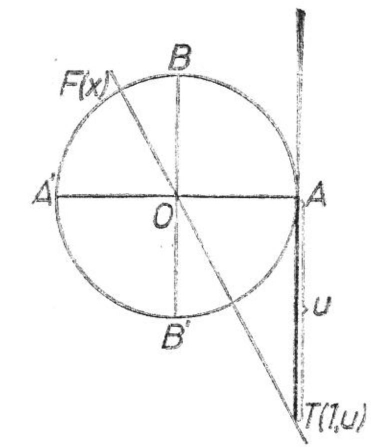

Fig. III.36

Funcția tangentă are valori pozitive cînd punctul $F(x)\in C$ se găsește fie în cadranul I, fie în cadranul III, deci $\operatorname{tg} x$ este un număr pozitiv dacă $\sin x$ și $\cos x$ au același semn. Funcția tangentă are valori negative pentru acei $x\in\mathbf{R}-M$, pentru care punctul $F(x)$ se găsește în unul din cadranele II sau IV, deci cînd $\sin x$ și $\cos x$ au semne contrare.

Din triunghiurile asemenea OAT și $OM'M$, unde $M=F(x)$ și $M'(\cos x, 0)$ este proiecția lui M pe axa OA, deducem, ținînd seama că $d(O, A)=1$, (fig. III.35)

$$\boxed{u=\operatorname{tg} x=\frac{\sin x}{\cos x}}\tag{1}$$

Formula (1) arată cum se exprimă funcția tangentă cu ajutorul funcțiilor sinus și cosinus. Observăm că valorile lui x, în care se anulează numitorul fracției $\frac{\sin x}{\cos x}$, sînt tocmai elementele mulțimii M, care a fost exclusă din definiția funcției tangentă.

Să notăm prin N mulțimea formată din punctele x, în care se anulează funcția sinus. Putem defini *funcția cotangentă*

$$\operatorname{ctg}:\mathbf{R}-N\to\mathbf{R},\quad N=\{k\pi;\ k\in\mathbf{Z}\}$$

punînd

$$\boxed{\operatorname{ctg} x=\frac{\cos x}{\sin x}}\tag{2}$$

Această funcție ia valori pozitive cînd $\sin x$ și $\cos x$ au același semn și ia valori negative, cînd $\sin x$ și $\cos x$ au semne contrare. Deci numerele $\operatorname{tg} x$ și $\operatorname{ctg} x$ au același semn, pentru orice $x\in\mathbf{R}-(M\cup N)$.

Interpretarea geometrică a funcției cotangentă, analoagă celei date pentru funcția tangentă, se poate obține considerînd punctul de intersecție T''

al dreptei OM, $M = F(x)$, cu paralela dusă prin punctul $B(0, 1)$ la axa OA. În acest caz, numărul ctg x este egal cu abscisa punctului T', (fig. III.37; 38).

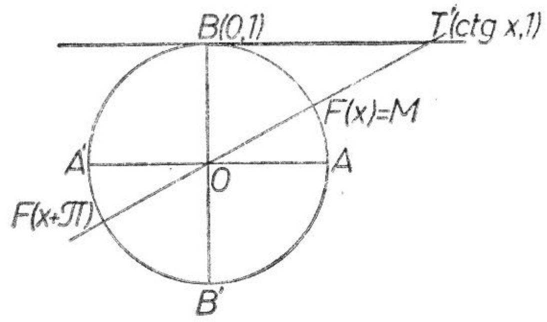

Fig. III.37

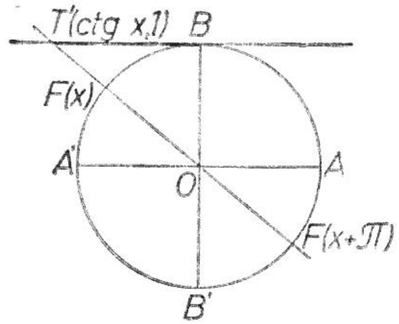

Fig. III.38

Domeniul de definiție al funcției tangentă este egal cu reuniunea intervalelor $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$. Notînd prin I_k intervalul $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$, $k \in \mathbf{Z}$, observăm că funcția tg crește de la $-\infty$ la $+\infty$, pe intervalul I_k.

Funcția tangentă se anulează în punctele, în care se anulează funcția sinus, deci în punctele mulțimii N.

Funcția cotangentă are ca domeniu de definiție reuniunea intervalelor $J_k = (k\pi, k\pi + \pi)$, $k \in \mathbf{Z}$. Pe fiecare interval J_k, funcția cotangentă descrește de la $+\infty$ la $-\infty$. Funcția cotangentă se anulează în punctele în care se anulează funcția cosinus, deci în punctele mulțimii M.

Reținem că funcțiile tangentă și cotangentă sînt astfel încît fiecare dintre ele se anulează pe mulțimea, pe care cealaltă funcție nu este definită.

În punctele în care ambele funcții, tangentă și cotangentă, sînt simultan definite, aceste funcții sînt legate prin relația

$$(3) \qquad \operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x = 1, \quad x \in \mathbf{R} - (M \cup N).$$

Din formulele (1) și (2) rezultă că fiecare din funcțiile tangentă și cotangentă este o funcție periodică, ce admite perioada 2π. Dar, pentru aceste funcții. 2π nu este perioada minimă. Într-adevăr, din relațiile

$$\sin(x + \pi) = -\sin x, \quad \cos(x + \pi) = -\cos x$$

rezultă că avem $\operatorname{tg}(x + \pi) = \operatorname{tg} x$ pentru orice $x \in \mathbf{R} - M$ și $\operatorname{ctg}(x + \pi) = \operatorname{ctg} x$, pentru orice $x \in \mathbf{R} - N$. **Deci funcțiile tg și ctg admit numărul π drept perioadă.**

Se pune problema de a decide dacă există perioade mai mici decît π pentru funcțiile tg și ctg. Dacă T este o perioadă a funcției tg, trebuie să avem $\operatorname{tg}(x + T) = \operatorname{tg} x$, pentru orice $x \in \mathbf{R} - M$; în particular, $\operatorname{tg} T = \operatorname{tg} 0 = 0$. Deci T trebuie să fie un multiplu întreg de π. Rezultă că *perioada minimă a funcției tangentă este π.*

Fie T o perioadă a funcției cotangentă. Va trebui să avem $\operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg}(x + T)$, pentru orice $x \in \mathbf{R} - N$. În particular, $\operatorname{ctg}\left(T + \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2} = 0$. Rezultă că T trebuie căutat printre numerele de forma $k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. Deci *perioada minimă a funcției cotangentă este tot π.*

Să observăm că, din moment ce funcția tangentă este crescătoare pe fiecare interval I_k, a cărui lungime este π, nu este posibil ca această funcție să admită perioade mai mici decît π. Aceeași observație este valabilă pentru funcția cotangentă.

Din proprietățile de periodicitate ale funcțiilor tg și ctg rezultă că graficele acestor funcții se obțin din graficele restricțiilor lor la intervalele I_k respectiv J_k, prin translații de-a lungul axei OA, de mărimi egale cu multiplii întregi de π. Figurile III.39 și III.40 dau reprezentările grafice ale funcțiilor tangentă și cotangentă.

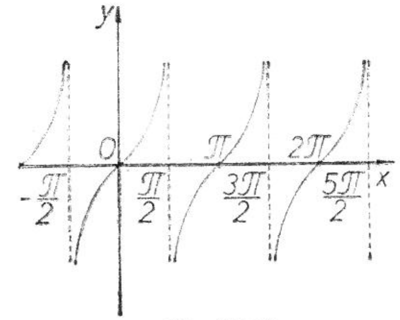

Fig. III.39

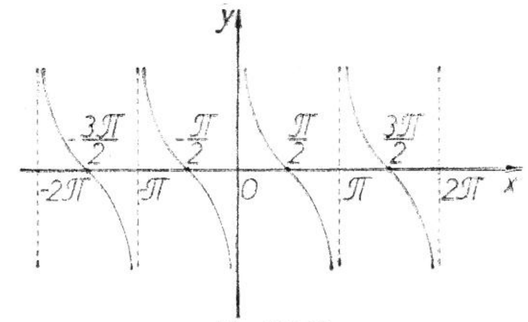

Fig. III.40

Se observă că funcția tangentă ia fiecare valoare reală y de o infinitate de ori, anume o dată în fiecare din intervalele I_k. De asemenea, funcția cotangentă ia orice valoare reală y, o dată în fiecare din intervalele J_k.

De asemenea, se poate observa că fiecare dreaptă d, definită de o ecuație de forma $y = mx + n$, intersectează graficul funcției tangentă într-o infinitate de puncte $P_h(x_h, y_h)$, unde $x_h \in I_h$. Punctele P_h reprezintă soluțiile sistemului de ecuații

$$y = mx + n, \quad y = \operatorname{tg} x$$

iar numerele x_h sînt soluțiile ecuației

$$(4) \qquad \operatorname{tg} x = mx + n.$$

Deci:

Ecuația (4) admite o infinitate de soluții x_k, $k \in \mathbf{Z}$, fiecare din aceste soluții fiind situată în intervalul $I_k = \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$.

Exercițiu. *Fiind date numerele reale m și n, să se precizeze numărul soluțiilor ecuației* $\operatorname{ctg} x = mx + n$.

Convenție generală. Ori de cîte ori vom considera o expresie în care apar funcțiile tangentă și cotangentă, sau amîndouă aceste funcții, sau în care apar fracții ce conțin funcțiile sinus, cosinus, tangentă și cotangentă, aplicate la una sau mai multe variabile, vom presupune că sînt excluse din considerații acele valori ale variabilelor, pentru care expresia nu are sens. În fiecare caz, elevii vor examina și vor determina mulțimea valorilor ce trebuie excluse.

Ne propunem să exprimăm numărul $tg(u+v)$ cu ajutorul numerelor $tg\ u$ și $tg\ v$. Avem, folosind formulele cunoscute,

$$tg(u+v)=\frac{\sin(u+v)}{\cos(u+v)}=\frac{\sin u\cos v+\cos u\sin v}{\cos u\cos v-\sin u\sin v}.$$

Împărțind numărătorul și numitorul ultimei fracții prin $\cos u\cos v$ respectiv prin $\sin u\sin v$, obținem formulele

$$\boxed{tg\,(u+v)=\frac{tg\,u+tg\,v}{1-tg\,u\,tg\,v}=\frac{ctg\,v+ctg\,u}{ctg\,u\,ctg\,v-1}}$$

Procedînd în mod analog, obținem formulele

$$\boxed{tg\,(u-v)=\frac{tg\,u-tg\,v}{1+tg\,u\,tg\,v}=\frac{ctg\,v-ctg\,u}{ctg\,u\,ctg\,v+1}}$$

$$ctg\,(u+v)=\frac{ctg\,u\,ctg\,v-1}{ctg\,u+ctg\,v}=\frac{1-tg\,u\,tg\,v}{tg\,u+tg\,v}$$

$$ctg\,(u-v)=\frac{ctg\,u\,ctg\,v+1}{ctg\,v-ctg\,u}=\frac{1+tg\,u\,tg\,v}{tg\,u-tg\,v}$$

Aplicații. **1.** *Să se arate că*

$$tg\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=ctg\ x,\quad ctg\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=tg\ x.$$

Soluție. Se aplică formula care dă $tg\,(u-v)$ în funcție de $ctg\ u$ și $ctg\ v$, apoi formula care dă $ctg\ (u-v)$ în funcție de $ctg\ u$ și $ctg\ v$.

2. *Să se calculeze* $tg\,\frac{\pi}{12}$.

Soluție. Observînd că $\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}$, obținem

$$tg\frac{\pi}{12}=tg\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{tg\frac{\pi}{3}-tg\frac{\pi}{4}}{1+tg\frac{\pi}{3}\,tg\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}.$$

Folosind valorile deduse anterior pentru anumite arce, putem întocmi următorul tabel de valori ale funcțiilor tangentă și cotangentă

x	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$tg\ x$		$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	
$ctg\ x$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$		$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

Valorile alese pentru x dau puncte $F(x)$ în cadranele IV și I. Pentru a trece la cadranele II și III, folosim formulele

$$tg(x+\pi)=tg\ x,\ ctg(x+\pi)=ctg\ x.$$

Folosind periodicitatea funcțiilor tg și ctg, putem completa tabelul făcînd să apară valorile lui x deduse din cele scrise prin adăugarea multiplilor întregi ai perioadei π.

Exerciții

Să se stabilească relațiile

1. $\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x+\cos x)$, $\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x-\sin x)$

2. $\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x-\sin x)$, $\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x+\sin x)$.

3. $tg\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}$.

4. *Să se exprime numerele* $\sin(u+v+w)$, $tg(u+v+w)$ *cu ajutorul valorilor funcțiilor sinus, cosinus și tangentă, corespunzătoare valorilor* u, v, w *date variabilei independente.*

Soluție. Avem, folosind formule cunoscute,

$\sin(u+v+w)=\sin(u+v)\cos w+\cos(u+v)\sin w=\sin u\cos v\cos w+\sin v\cos u\cos w+\sin w\cos u\cos v-\sin u\sin v\sin w.$

$\cos(u+v+w)=\cos(u+v)\cos w-\sin(u+v)\sin w=\cos u\cos v\cos w-\sin u\sin v\cos w-\sin u\sin w\cos v-\sin v\sin w\cos u.$

$$tg(u+v+w)=\frac{\sin(u+v+w)}{\cos(u+v+w)}=\frac{tg\,u+tg\,v+tg\,w-tg\,u\,tg\,v\,tg\,w}{1-tg\,u\,tg\,v-tg\,v\,tg\,w-tg\,w\,tg\,u}.$$

5. *Să se arate că dacă* $u+v+w=k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$, *atunci*

$$tg\,u+tg\,v+tg\,w=tg\,u\,tg\,v\,tg\,w.$$

Soluție. Se pune în primul membru al ultimei identități $tg\,(u+v+w)=0$.

6. *Să se exprime numerele* $\sin(u+v+w+t)$, $\cos(u+v+w+t)$ *cu ajutorul numerelor* $\sin u$, $\sin v$, $\sin w$, $\sin t$, $\cos u$, $\cos v$, $\cos w$, $\cos t$.

Dacă în formulele stabilite pentru calculul expresiilor $\sin(u+v)$, $\cos(u+v)$, $tg\,(u+v)$, $\sin(u+v+w)$, $\cos(u+v+w)$, $tg(u+v+w)$ ***punem*** $u=v=w=x$, ***obținem identitățile***

$$\sin 2x=2\sin x\cos x,\ \cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x,\ tg\,2x=\frac{2tg\,x}{1-tg^2x},$$

$$\sin 3x=\sin 2x\cos x+\cos 2x\sin x=2\sin x\cos^2x+\cos^2x\sin x-\sin^3x=3\sin x\cos^2x-\sin^3x,$$

$$\cos 3x=\cos 2x\cos x-\sin 2x\sin x=\cos^3x-\sin^2x\cos x-2\sin^2x\cos x=\cos^3x-3\sin^2x\cos x.$$

Dacă ținem seama de identitatea $\sin^2x+\cos^2x=1$, putem scrie

$$\cos 2x=2\cos^2x-1=1-2\sin^2x,\ \sin 3x=3\sin x-4\sin^3x,$$

$$\cos 3x=4\cos^3x-3\cos x.$$

Pentru tg $3x$ și ctg $3x$ se obțin formulele

$$\operatorname{tg} 3x = \frac{3\operatorname{tg}x - \operatorname{tg}^3x}{1 - 3\operatorname{tg}^2x}, \quad \operatorname{ctg} 3x = \frac{\operatorname{ctg}^3x - 3\operatorname{ctg} x}{3\operatorname{ctg}^2 x - 1}.$$

Formulele stabilite în acest fel permit calculul funcțiilor trigonometrice sinus, cosinus, tangentă și cotangentă, corespunzătoare multiplilor $2x$ și $3x$ ai argumentului x. Metoda folosită poate fi aplicată și pentru calculul valorilor corespunzătoare multiplilor $4x$, $5x$ etc., ca funcții de $\sin x$, $\cos x$ și $\operatorname{tg}x$.

Să observăm că avem, pentru orice număr x, pentru care $\cos x \neq 0$,

$$1 + \operatorname{tg}^2x = 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Folosind formulele stabilite pentru $\sin 2x$, $\cos 2x$ și $\operatorname{tg} 2x$, putem acuma să exprimăm numerele $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ și $\operatorname{ctg} x$, în funcție de $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$.

Într-adevăr, putem scrie, dacă $\cos \frac{x}{2} \neq 0$,

$$\sin x = \sin 2\frac{x}{2} = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = 2 \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} \cos^2 \frac{x}{2} = \frac{2\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}},$$

$$\cos x = \cos 2\frac{x}{2} = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = \cos^2 \frac{x}{2}\left(1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}\right) =$$

$$= \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}, \quad \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{2\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}.$$

Deci am demonstrat că:

*Dacă x este astfel încît $\cos \frac{x}{2} \neq 0$ și **dacă notăm** $m = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, **atunci***

$$\boxed{\sin x = \frac{2m}{1 + m^2}, \quad \cos x = \frac{1 - m^2}{1 + m^2}, \quad \operatorname{tg} x = \frac{2m}{1 - m^2}}.$$

Aceste formule arată că sinusul, cosinusul și tangenta unui număr x, pentru care $\cos \frac{x}{2} \neq 0$, pot fi exprimate prin funcții raționale de tangenta lui $\frac{x}{2}$.

Aplicații. 1. *Să se afle* $\sin x$ *și* $\cos x$ *știind că* $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{1}{3}$.

Soluție. Potrivit formulelor stabilite mai sus avem

$$\sin x = \frac{2}{3}\left(1 + \frac{1}{9}\right)^{-1} = 2 \cdot 3^{-1} \cdot 9 \cdot 10^{-1} = \frac{3}{5}.$$

$$\cos x = \left(1 - \frac{1}{9}\right)\left(1 + \frac{1}{9}\right)^{-1} = \frac{4}{5}.$$

2. *Să se afle numărul* $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ *știind că* $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \sqrt{2} - 1$.

Soluție. Să calculăm $\operatorname{tg} x$. Avem

$\operatorname{tg} x = 2(\sqrt{2} - 1)(1 - (\sqrt{2} - 1)^2)^{-1} = 1$. Singurul număr $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ pentru care $\operatorname{tg} x = 1$ este $x = \pi/4$.

8. Transformarea sumelor de două sinusuri sau de două cosinusuri în produse

Din formulele

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x$$
$$\sin(x - y) = \sin x \cos y - \sin y \cos x$$

deducem, adunînd membru cu membru,

$$\sin(x + y) + \sin(x - y) = 2 \sin x \cos y$$

și apoi, scăzînd membru cu membru,

$$\sin(x + y) - \sin(x - y) = 2 \sin y \cos x.$$

Dacă notăm

$$x + y = p, \quad x - y = q,$$

vom avea

$$x = \frac{p + q}{2}, \quad y = \frac{p - q}{2}$$

și formulele precedente devin

$$\boxed{\begin{aligned} \sin p + \sin q &= 2 \sin \frac{p + q}{2} \cos \frac{p - q}{2} \\ \sin p - \sin q &= 2 \sin \frac{p - q}{2} \cos \frac{p + q}{2} \end{aligned}}$$

În mod *analog, plecînd de la formulele cunoscute*

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y,$$
$$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

obținem, prin adunare și scădere membru cu membru,

$$\boxed{\begin{aligned} \cos(x + y) + \cos(x - y) &= 2 \cos x \cos y \\ \cos(x + y) - \cos(x - y) &= -2 \sin x \sin y \end{aligned}}$$

Făcînd notațiile indicate mai sus, obținem

$$\boxed{\begin{aligned} &\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p + q}{2} \cos \frac{p - q}{2} \\ &\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p - q}{2} \sin \frac{p - q}{2} = 2 \sin \frac{p - q}{2} \sin \frac{q - p}{2} \end{aligned}}$$

Aceste formule arată că sumele și diferențele a două sinusuri sau a două cosinusuri pot fi reprezentate prin produse de sinusuri și cosinusuri. Vom da unele exemple de aplicare a acestor formule. Menționăm că aceste formule sînt utile, dacă vrem să calculăm efectiv expresii trigonometrice cu ajutorul tablelor de logaritmi, care se studiază în cl. a X-a.

Aplicații. *Să se tranforme în produs suma*

$$E = \sin u + \sin 2u + \sin 3u.$$

Soluție. Avem

$$E = (\sin u + \sin 3u) + \sin 2u = 2 \sin 2u \cos u + \sin 2u =$$

$$= 2 \sin 2u \cdot \left(\cos u + \frac{1}{2}\right) = 2 \sin 2u \left(\cos u + \cos \frac{\pi}{3}\right) =$$

$$= 4 \sin 2u \cos \frac{u + \frac{\pi}{3}}{2} \cos \frac{u - \frac{\pi}{3}}{2}.$$

Aplicație. *Să se transforme în produse sumele:*

$$S = \sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x$$

$$S' = \sin x + \sin 3x + \sin 5x + \sin 7x,$$

$$S'' = \cos x + \cos 3x + \cos 5x + \cos 7x.$$

Soluție. Avem

$S = (\sin x + \sin 3x) + (\sin 2x + \sin 4x) = 2 \sin 2x \cos x + 2 \sin 3x \cos x =$
$= 2 \cos x (\sin 2x + \sin 3x) = 4 \cos x \sin \frac{5x}{2} \cos \frac{x}{2};$

$S' = (\sin x + \sin 7x) + (\sin 3x + \sin 5x) = 2 \sin 4x \cos 3x + 2 \sin 4x \cdot$
$\cdot \cos x = 2 \sin 4x (\cos 3x + \cos x) = 4 \sin 4x \cos 2x \cos x;$

$S'' = (\cos x + \cos 7x) + (\cos 3x + \cos 5x) = 2 \cos 4x \cos 3x +$
$+ 2 \cos 4x \cos x = 2 \cos 4x (\cos 3x + \cos x) = 4 \cos 4x \cos 2x \cos x.$

Observație. Din relațiile stabilite, deducem formula

$$\frac{S'}{S''} = \operatorname{tg} 4x.$$

Exerciții. *Să se transforme în produse următoarele sume:*

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x + \sin 5x + \sin 6x$$

$$\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x + \cos 5x + \cos 6x.$$

9. Identități condiționate

O identitate este o egalitate între două funcții de una sau mai multe variabile independente, care este verificată pentru orice valori date variabilelor independente, astfel încît cele două funcții să fie definite pentru aceste valori.

O egalitate între două funcții, care este verificată în cazul în care variabilele independente verifică o anumită condiție, se numește *identitate condiționată* (de acea condiție).

Exemple

1. Dacă $x + y = 0$, atunci $x^3 = -y^3$.

2. În Trigonometrie, se întîlnesc numeroase relații între liniile trigonometrice ale unghiurilor unui triunghi și care sînt consecințe ale relației măs $\hat{A}$ + măs $\hat{B}$ + măs $\hat{C} = \pi$. Aceste relații sînt deci identități condiționate.

3. Dacă $u + v + w = \pi$, atunci $\sin(u+v) = \sin w$, $\cos(u+v) = -\cos w$, și

$$\operatorname{tg} u + \operatorname{tg} v + \operatorname{tg} w = \operatorname{tg} u \operatorname{tg} v \operatorname{tg} w. \quad (1)$$

Observație. Oricare ar fi numărul întreg k, relația $u + v + w = k\pi$ implică relația (1).

4. Dacă $A + B + C = \pi$, atunci

$$\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}. \quad (2)$$

Demonstrație. Putem scrie pe rînd următoarele egalități:

$$(\sin A + \sin B) + \sin C = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} + \sin (A+B) =$$

$$= 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} + 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A+B}{2} =$$

$$= 2 \sin \frac{A+B}{2} \left(\cos \frac{A-B}{2} + \cos \frac{A+B}{2}\right) = 4 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2}.$$

Dacă ținem seama că $\frac{A+B}{2} + \frac{C}{2} = \frac{\pi}{2}$, obținem formula (2).

5. Dacă $A + B + C = \pi$, atunci

$$\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}. \quad (3)$$

Demonstrație. Avem, ținînd seama că $(A + B) + C = \pi$ și $\frac{A+B}{2} + \frac{C}{2} = \frac{\pi}{2}$, $(\cos A + \cos B) + \cos C = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} - \cos(A+B) = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} - 2 \cos^2 \frac{A+B}{2} + 1 =$

$$= 2 \cos \frac{A+B}{2} \left(\cos \frac{A-B}{2} - \cos \frac{A+B}{2}\right) + 1 = 1 + 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}.$$

6. Am demonstrat că, oricare ar fi numerele reale A, B, C, avem
$\sin(A + B + C) = \sin A \cos B \cos C + \sin B \cos C \cos A +$
$+ \sin C \cos A \cos B - \sin A \sin B \sin C,$
$\cos (A + B + C) = \cos A \cos B \cos C - \sin A \sin B \cos C -$
$- \sin B \sin C \cos A - \sin C \sin A \cos B.$

Dacă $A + B + C = \pi$, rezultă

$$\sin A \sin B \sin C = \sin A \cos B \cos C + \sin B \cos C \cos A + \sin C \cos A \cos B,$$

$$\cos A \cos B \cos C = \cos A \sin B \sin C + \cos B \sin C \sin A + \cos C \sin A \sin B - 1.$$

Exerciţii

1. *Să se demonstreze că dacă $A + B + C = \pi$, atunci:*

a. $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2\cos A \cos B \cos C = 1$,

b. $\sin A + \sin B - \sin C = 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$.

2. *Să se arate că dacă $u + v = w$, atunci*

$\cos^2 u + \cos^2 v + \cos^2 w - 2 \cos u \cos v \cos w = 1$.

3. *În ipoteza $a + b + c = \pi$, să se transforme în produse sumele:*

$$\cos\frac{a}{2} + \cos\frac{b}{2} + \cos\frac{2}{c}, \quad \sin\frac{a}{2} + \sin\frac{b}{2} + \sin\frac{c}{2}, \quad \operatorname{ctg}\frac{a}{2} + \operatorname{ctg}\frac{b}{2} + \operatorname{ctg}\frac{c}{2}.$$

4. *În ipoteza $a + b + c + d = 2\pi$, să se transforme în produse sumele*

$\cos a + \cos b + \cos c + \cos d$, $\sin a + \sin b + \sin c + \sin d$,

$\sin a - \sin b + \sin c - \sin d$, $\cos a - \cos b + \cos c - \cos d$.

5. *Ştiind că $a + c = 2b$ şi că $t - z = z - y = y - x$, să se transforme în produse sumele*

$\sin a + \sin b + \sin c$, $\sin x + \sin y + \sin z + \sin t$,

$\cos a + \cos b + \cos c$, $\cos x + \cos y + \cos z + \cos t$.

6. *Să se transforme în produs suma*

$\sin a + \sin(a + b) + \sin(a + 2b) + \sin(a + 3b) + \sin(a + 4b)$.

7. *Să se transforme în produs suma*

$\cos a + \cos(a + b) + \cos(a + 2b) + \cos(a + 3b) + \cos(a + 4b)$.

(*Indicaţie pentru ex. 6 şi 7.* Se înmulţeşte fiecare termen cu $\sin\frac{b}{2}$ şi se transformă fiecare produs astfel obţinut într-o diferenţă de cosinusuri respectiv de sinusuri.)

10. Transformarea în produs a sumei a două tangente sau a două cotangente

Uneori sînt utile identităţile următoare

$$\operatorname{tg} p \pm \operatorname{tg} q = \frac{\sin p}{\cos p} \pm \frac{\sin q}{\cos q} = \frac{\sin p \cos q \pm \cos p \sin q}{\cos p \cos q} = \frac{\sin(p \pm q)}{\cos p \cos q}$$

$$\operatorname{ctg} p \pm \operatorname{ctg} q = \frac{\cos p}{\sin p} \pm \frac{\cos q}{\sin q} = \frac{\cos p \sin q \pm \cos q \sin p}{\sin p \sin q} = \frac{\sin(q \pm p)}{\sin p \sin q}$$

care permit să transformăm în produse suma a două tangente sau a două cotangente.

Aplicaţie. Să se transforme în produs suma

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} 3x.$$

Soluţie. Avem

$$(\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x) - \operatorname{tg} 3x = \frac{\sin 3x}{\cos x \cos 2x} - \frac{\sin 3x}{\cos 3x} = \sin 3x \frac{\cos 3x - \cos x \cos 2x}{\cos x \cos 2x \cos 3x} =$$

$$= \sin 3x \frac{\cos(2x + x) - \cos x \cos 2x}{\cos x \cos 2x \cos 3x} = -\frac{\sin 3x \sin 2x \sin x}{\cos 3x \cos 2x \cos x} = -\operatorname{tg} 3x \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} x.$$

A doua soluţie. Observăm că expresia dată se poate scrie sub forma $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg}(-3x)$ şi că $x + 2x + (-3x) = 0$. Aplicînd un rezultat stabilit anterior, putem scrie

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg}(-3x) = \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg}(-3x) = -\operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} 3x.$$

Exerciţiu. *Ştiind că numerele u, v, w reprezintă măsurile în radiani ale unghiurilor unui triunghi, să se transforme în produs suma*

$$\operatorname{tg} u + \operatorname{tg} v + \operatorname{tg} w.$$

Exerciţii recapitulative

I. *Să se demonstreze următoarele identităţi:*

1. $\sin a \sin b = \frac{1}{2}[\cos(a - b) - \cos(a + b)]$

2. $\cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a - b) + \cos(a + b)]$

3. $\sin a \cos b = \frac{1}{2}[\sin(a + b) + \sin(a - b)]$

4. $\sin 5a \cos 3a = \frac{1}{2}(\sin 8a + \sin 2a)$

5. $\sin 3a \cos 5a = \frac{1}{2}(\sin 8a - \sin 2a)$

6. $\sin(a - b)\cos(a + b) + \sin(b - c)\cos(b + c) + \sin(c - a)\cos(c + a) = 0$

7. $\sin(a - b)\sin(a + b) + \sin(b - c)\sin(b + c) + \sin(c - a)\sin(c + a) = 0$

8. $\sin 2x \sin 5x = \frac{1}{2}(\cos 3x - \cos 7x)$, $\cos 2x \cos 5x = \frac{1}{2}(\cos 3x + \cos 7x)$

9. $\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x = 2\operatorname{ctg} 2x$

10. $\sin(a + b)\sin(a - b) = \sin^2 a - \sin^2 b$

11. $\operatorname{tg}^2 a - \operatorname{tg}^2 b = \frac{\sin(a + b)\sin(a - b)}{\cos^2 a \cos^2 b}$

12. $\frac{\sin a + \sin 3a + \sin 5a}{\cos a + \cos 3a + \cos 5a} = \operatorname{tg} 3a$

II. *Să se calculeze valorile exprimate prin formulele următoare*

1. $\sin\frac{5\pi}{1}$, $\cos\frac{5\pi}{12}$, $\sin\frac{\pi}{12}$, $\cos\frac{\pi}{12}$, $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{12}$, $\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{12}$, $\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}$, $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{12}$.

$\left(\textit{Indicaţie.}\ \text{Se foloseşte faptul că } \frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} \text{ şi } \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right)$

2. $\sin\frac{7\pi}{12}$, $\cos\frac{7\pi}{12}$, $\operatorname{tg}\frac{7\pi}{12}$, $\operatorname{ctg}\frac{7\pi}{12}$, $\sin\frac{11\pi}{12}$, $\cos\frac{11\pi}{12}$, $\operatorname{tg}\frac{11\pi}{12}$, $\operatorname{ctg}\frac{11\pi}{12}$.

III. 1. *Să se arate că dacă $\widehat{A}$ este un unghi oarecare, atunci*

$$\cos\frac{\widehat{A}}{2} = \sqrt{\frac{\cos\widehat{A} + 1}{2}}, \quad \sin\frac{\widehat{A}}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\widehat{A}}{2}}, \quad \operatorname{tg}\frac{\widehat{A}}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\widehat{A}}{1+\cos\widehat{A}}},$$

$$\operatorname{ctg}\frac{\widehat{A}}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\widehat{A}}{1-\cos\widehat{A}}}$$

2. *Să se calculeze, cu două zecimale exacte,* $\sin\frac{\pi}{24}$, $\cos\frac{\pi}{24}$ *şi* $\operatorname{tg}\frac{\pi}{24}$.

IV. *Să se arate că dacă x este un număr real oarecare, atunci*

$$\cos\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}, \quad \sin\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$$

şi să se indice felul în care trebuie alese semnele, cînd x parcurge dreapta reală.

11. Funcţii trigonometrice inverse

Ştim de la algebră că dacă $f : E \to F$ este o aplicaţie bijectivă de la mulţimea E la mulţimea F, deci dacă f asociază fiecărui element x din E un element $y = f(x)$ din F, astfel ca orice element din F să fie asociat unui element şi unuia singur din E, atunci există *aplicaţia inversă* a lui f, notată $f^{-1} : F \to E$ şi definită în modul următor:

dacă $y' \in F$, atunci $f^{-1}(y')$ este acel element x' din E, pentru care $f(x') = y'$.

Deci, pentru o aplicaţie bijectivă $f : E \to F$, relaţiile

$$x \in E, \; y = (f^{-1})(x)$$ ~~INCORECT~~ : $y = f(x)$

sînt echivalente cu relaţiile

$$y \in F, \; x = f^{1}(y).$$ şi $f^{-1}(y) = x$

Funcţiile trigonometrice sinus, cosinus, tangentă şi cotangentă au fost definite între următoarele mulţimi[1]:

$$\sin : R \to [-1, 1]; \; \cos : \mathbf{R} \to [-1, 1]$$

$$\operatorname{tg} : \mathbf{R} - \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbf{Z}\right) \to \mathbf{R}, \; \operatorname{ctg} : \mathbf{R} - (\pi\mathbf{Z}) \to \mathbf{R}.$$

Astfel definite, funcţiile trigonometrice nu sînt bijective, dar sînt surjective. Într-adevăr, orice număr din intervalul închis $[-1, 1]$ este de forma $\sin x$ sau $\cos y$, pentru o infinitate de valori ale lui x şi y; de asemenea, orice număr real se poate pune sub forma $\operatorname{tg} u$ sau $\operatorname{ctg} v$ pentru o infinitate de valori ale lui u şi v.

Deci orice număr real cuprins între -1 şi 1, incluzînd aceste valori, este egal cu sinusul a o infinitate de numere x şi este egal cu cosinusul a o infinitate de numere y. Mulţimea numerelor reale x, al căror sinus are o valoare

[1] Pentru o mulţime $A \subset \mathbf{R}$ convenim să notăm prin $n + mA$ mulţimea $\{n + ma \mid a \in A\}$, oricare ar fi numerele reale m şi n.

dată a, se notează Arcsin a şi se citeşte: Arcsin a = *mulţimea arcelor, al căror sinus este egal cu a.*

Denumirea vine de la faptul că funcţiile trigonometrice au fost definite cu ajutorul unei aplicaţii $F : \mathbf{R} \to C$, care aplică intervalele dreptei reale $\mathbf{R}$ pe arce ale cercului trigonometric C.

În mod analog:

Se notează prin Arccos b mulţimea arcelor (numerelor reale), al căror cosinus este egal cu numărul $b \in [-1, 1]$.

Se notează prin Arctg m mulţimea arcelor (numerelor reale), ale căror tangente sînt egale cu numărul $m \in \mathbf{R}$.

Se notează prin Arcctg m, mulţimea arcelor (numerelor reale), ale căror cotangente sînt egale cu numărul $m \in \mathbf{R}$.

Mulţimile astfel introduse

$$\text{Arcsin } a, \; \text{Arccos } b, \; \text{Arctg } m, \; \text{Arcctg } m$$

sînt mulţimi infinite de numere reale, conţinînd fiecare o infinitate numărabilă de elemente.

Se pune problema de a distinge, în fiecare din aceste mulţimi, cîte un element, printr-o regulă generală şi uşor de reţinut.

Rezolvarea acestei probleme se poate face în mod natural, avînd în vedere faptul că *fiecare din funcţiile trigonometrice considerate admite cîte un interval, închis sau deschis, pe care funcţia respectivă are restricţia injectivă şi surjectivă.*

Într-adevăr, din studiul făcut asupra funcţiilor trigonometrice, rezultă că:

1. Dacă numărul real x parcurge intervalul $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, de la $-\frac{\pi}{2}$ la $\frac{\pi}{2}$, numărul $\sin x$ va parcurge intervalul $[-1, 1]$, de la -1 la 1, trecînd prin fiecare punct al acestui interval, o singură dată.

Aceasta înseamnă că dacă a este un număr din intervalul $[-1, 1]$, atunci există un singur număr $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, astfel ca $\sin x = a$. Numărul x va fi notat prin arcsin a. Avem prin urmare, pentru $a \in [-1, 1]$,

$$\{\arcsin a\} = (\text{Arcsin } a) \cap \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Exemple. Avem

$$\arcsin 0 = 0, \; \arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}, \; \arcsin 1 = \frac{\pi}{2},$$

$$\arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}, \; \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}, \; \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3},$$

$$\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}, \; \arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}, \; \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}.$$

2. Dacă numărul x parcurge intervalul $[0, \pi]$, de la 0 la π, atunci numărul $\cos x$ va parcurge intervalul $[-1, 1]$, de la 1 la -1, o singură dată, trecînd prin fiecare punct al acestui interval.

Deci, oricare ar fi numărul $b \in [-1, 1]$, există un singur număr $y \in [0, \pi]$, astfel ca $b = \cos y$. Numărul y, care verifică aceste condiții, va fi notat $y = \arccos b$. Avem deci

$$\{\arccos b\} = (\mathrm{Arccos}\, b) \cap [0, \pi].$$

Exemple. Avem

$$\arccos 0 = \frac{\pi}{2}, \ \arccos 1 = 0, \ \operatorname{arc\,cos}(-1) = \pi,$$

$$\arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}, \ \arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}, \ \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$$

$$\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}, \ \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}, \ \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5\pi}{6}.$$

3. Dacă numărul x parcurge intervalul $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ de la $-\frac{\pi}{2}$ la $+\frac{\pi}{2}$ atunci numărul $\mathrm{tg}\,x$ va parcurge întreaga dreaptă reală **R**, în sensul pozitiv (crescător), trecînd prin fiecare punct o singură dată.

Dacă $m \in \mathbf{R}$, există deci un singur număr real $u \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, astfel ca $\mathrm{tg}\,u = m$. Acest număr u va fi notat prin $\mathrm{arctg}\, m$. Avem deci:

$$\{\mathrm{arctg}\ m\} = (\mathrm{Arctg}\ m) \cap \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Exemple. Avem

$$\mathrm{arctg}\ 0 = 0, \ \mathrm{arctg}\ 1 = \frac{\pi}{4}, \ \mathrm{arctg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}, \ \mathrm{arc\,tg}\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6},$$

$$\mathrm{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4}, \ \mathrm{arctg}(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}, \ \mathrm{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{\pi}{6}.$$

4. Dacă numărul x parcurge intervalul $(0, \pi)$, de la 0 la π, numărul $\mathrm{ctg}\, x$ va parcurge întreaga dreaptă reală **R**, în sens negativ (descrescător) trecînd prin fiecare punct, o singură dată. Deci, oricare ar fi numărul real m, există un unic număr $v \in (0, \pi)$, astfel ca $m = \mathrm{ctg}\, v$. Numărul v avînd aceste proprietăți, va fi notat $\mathrm{arcctg}\, m$. Avem deci:

$$\{\mathrm{arcctg}\, m\} = (\mathrm{Arcctg}\, m) \cap (0, \pi).$$

Exemple. Avem

$$\mathrm{arcctg}\ 0 = \frac{\pi}{2}, \ \mathrm{arcctg}\ 1 = \frac{\pi}{4}, \ \mathrm{arcctg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{6}, \ \mathrm{arcctg}\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{3}$$

$$\mathrm{arcctg}(-1) = \frac{3\pi}{4}, \ \mathrm{arcctg}(-\sqrt{3}) = \frac{5\pi}{6}, \ \mathrm{arcctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2\pi}{3}.$$

Recapitulare. Funcțiile următoare, date de restricții,

$$\sin\left|\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right.:\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1],$$

$$\cos\,|\,[0, \pi] : [0, \pi] \to [-1, 1],$$

$$\mathrm{tg}\left|\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right.:\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbf{R},$$

$$\mathrm{ctg}\,|\,(0, \pi):(0, \pi) \to \mathbf{R}$$

sînt bijective și admit ca inverse funcțiile

$$\arcsin: [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],$$

$$\arccos: [-1, 1] \to [0, \pi],$$

$$\mathrm{arctg}: \mathbf{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\mathrm{arcctg}: \mathbf{R} \to (0, \pi).$$

Exerciții

1. *Să se indice, pentru fiecare din funcțiile sin, cos, tg și ctg, alte intervale, pe care aceste funcții să aibă restricții bijective.*

2. *Să se indice intervale, pe care funcțiile cos și ctg sînt crescătoare și intervale, pe care funcțiile sin și tg sînt descrescătoare.*

3. *Să se arate că următoarele egalități sînt adevărate, în fiecare punct al domeniului de definiție al funcției respective:*

$$\arcsin(-a) = -\arcsin a, \quad \mathrm{arctg}(-m) = -\mathrm{arctg}\, m,$$
$$\arccos(-b) = \pi - \arccos b, \quad \mathrm{arcctg}(-m) = \pi - \mathrm{arcctg}\, m.$$

4. *Să se arate că, pentru orice număr* $a \in [-1, 1]$, *avem*

$$\arcsin a + \arccos a = \frac{\pi}{2}.$$

5. *Pentru orice număr* $a \in [-1, 1]$, *avem* $\sin(\arccos a) = \sqrt{1 - a^2}$ *și* $\cos(\arcsin a) = \sqrt{1 - a^2}$.

6. *Să se exprime sub o formă cît mai simplă numerele*

$$\sin(2\arcsin a), \ \sin(3\arcsin a), \ \sin(4\arcsin a), \ \sin(5\arcsin a),$$
$$\cos(2\arcsin a), \ \cos(3\arcsin a), \ \cos(4\arcsin a), \ \cos(5\arcsin a),$$
$$\sin(2\arccos a), \ \sin(3\arccos a), \ \sin(4\arccos a), \ \sin(5\arccos a),$$
$$\cos(2\arccos a), \ \cos(3\arccos a), \ \cos(4\arccos a), \ \cos(5\arccos a).$$

7. *Să se calculeze* $\sin x$, $\mathrm{tg}\, x$, $\mathrm{ctg}\, x$ *știind că* $x = \arccos\left(\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}\right)$. *Apoi să se calculeze, în aceeași ipoteză,* $\sin 2x$ *și* $\cos 2x$. *Să se deducă valoarea lui* x.

R. $x = \frac{\pi}{12}$.

8. *Se dă* $x = \arcsin\left(\frac{\sqrt{5} - 1}{4}\right)$. *Să se calculeze* $\sin 5x$ *și să se afle* x.

9. *Să se calculeze numerele*

$$\sin\frac{\pi}{12}, \quad \cos\frac{\pi}{12}, \quad \mathrm{tg}\frac{\pi}{12}, \quad \sin\frac{\pi}{10}, \quad \cos\frac{\pi}{10}, \quad \mathrm{tg}\frac{\pi}{10}$$

folosind rezultatele de la exercițiile 7 și 8.

10. *Se dau relațiile*

$$u = \arcsin\frac{\sqrt{3 + \sqrt{5}} - \sqrt{5 - \sqrt{5}}}{4}$$

$$v = \operatorname{arctg}\,(\sqrt{6} - \sqrt{3} + \sqrt{2} - 2).$$

Să se calculeze sin $5u$ *și* tg $4v$ *și să se deducă valorile exacte ale numerelor* u *și* v.

R. $u = \dfrac{\pi}{20}$, $v = \dfrac{\pi}{24}$.

11. *Să se arate că, pentru orice număr real nenul, avem*

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg} x) = \operatorname{ctg}\,(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{x}.$$

12. Ecuații trigonometrice

Dacă x este un număr real variabil, și dacă

$$P(x) = a + bx + cx^2 + \ldots + hx^p$$

este un polinom cu coeficienții a, b, c..., h, egalitatea

$$P(x) = 0$$

constituie o ***relație algebrică*** în variabila x. Dacă toți coeficienții a, b, c, ...,h sînt nuli, relația $P(x) = 0$ este adevărată pentru orice valoare dată lui x; se spune că relația $P(x) = 0$ este o identitate sau că este identic verificată.

Fie E o mulțime de numere reale, $E \subset \mathbf{R}$, și fie $f : E \to \mathbf{R}$ o funcție numerică definită pe mulțimea E. Dacă $f(x)$ depinde de x prin intermediul unor funcții trigonometrice cunoscute, spunem că și f este o funcție trigonometrică. Dacă f este o funcție trigonometrică, egalitatea

$$f(x) = 0$$

se numește *relație trigonometrică*.

Exemple. Funcțiile

$$\sin x,\ \sin 3x,\ \cos x^2,\ \sin 3x + \cos 2x,\ \operatorname{tg} x - 7\frac{\sin x}{1 - \operatorname{tg} x}$$

sînt funcții trigonometrice. Egalitățile

$$\sin x = 0,\ \cos(x + 3) - 2 = 0,\ \operatorname{tg}(\sin x) = 0$$

constituie exemple de relații trigonometrice.

O relație trigonometrică poate fi verificată pentru orice valoare dată variabilei x. Exemple: $\sin^2 x + \cos^2 x - 1 = 0$.

Există relații care nu sînt verificate pentru nici o valoare dată variabilei x. Exemplu: $\sin 3x = 2$.

O relație trigonometrică se mai numește și ***ecuație trigonometrică***. Deci o ecuație trigonometrică este o relație de forma $f(x) = 0$, unde $f : E \to \mathbf{R}$ este o funcție trigonometrică definită pe o mulțime $E \subset \mathbf{R}$.

Funcțiile trigonometrice pe care le vom considera vor fi combinații polinomiale sau raționale de funcțiile sinus, cosinus, tangentă și cotangentă, aplicate unor multipli sau unor submultipli ai numărului x, sau unor funcții mai complicate de x.

Pentru astfel de funcții, mulțimea de definiție poate fi dedusă din însăși expresia care definește funcția f. De exemplu, funcția

$$f(x) = \frac{\sin x}{1 - \sin x} + \operatorname{tg} x$$

este definită pe mulțimea E, care se obține din $\mathbf{R}$ scoțînd numerele x, pentru care avem $\sin x = 1$ sau $\cos x = 0$.

Prin urmare, putem da o ecuație $f(x) = 0$, fără a specifica domeniul de definiție al funcției f, urmînd ca acest domeniu să fie dedus din felul în care a fost exprimat membrul stîng $f(x)$ al ecuației.

A rezolva o ecuație $f(x) = 0$ înseamnă a determina mulțimea S formată din toate numerele $x \in \mathbf{R}$, pentru care avem $f(x) = 0$. Mulțimea S se numește *mulțimea soluțiilor* ecuației $f(x) = 0$.

Deci a rezolva o ecuație înseamnă a determina mulțimea soluțiilor acelei ecuații.

Mulțimea S a soluțiilor unei ecuații $f(x) = 0$ este o submulțime a mulțimii E, pe care este definită funcția f, sau a mulțimii formate din numerele x, pentru care funcția f are sens, dacă mulțimea E nu a fost specificată.

Vom începe prin rezolvarea ecuațiilor trigonometrice cele mai simple.

Ecuația $\sin x - a = 0$, $a \in \mathbf{R}$. Deci fiind dat un număr real a, trebuie să determinăm mulțimea S a numerelor x, pentru care avem $\sin x = a$.

Avem de distins mai multe cazuri:

Dacă $|a| > 1$, ecuația $\sin x = a$ nu are nici o soluție, deoarece sinusul oricărui număr real este un număr, a cărui valoare absolută nu depășește numărul 1. Deci în cazul $|a| > 1$, mulțimea soluțiilor ecuației date este mulțimea vidă.

Dacă $a = 1$ obținem, ecuația $\sin x = 1$, care admite soluția $x = \dfrac{\pi}{2}$. Din periodicitatea funcției sinus, rezultă că orice număr de forma $\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, este de asemenea o soluție a ecuației $\sin x = 1$. Din studiul efectuat asupra funcției sinus rezultă pe de altă parte că singurele numere reale care verifică ecuația $\sin x = 1$ sînt numerele de forma $\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. Deci mulțimea S a soluțiilor ecuației $\sin x = 1$ este mulțimea

$$S = \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi;\ k \in \mathbf{Z}\right\}.$$

Dacă r este un număr real, convenim să notăm prin $r\mathbf{Z}$ mulțimea

$$r\mathbf{Z} = \{rm;\ m \in \mathbf{Z}\}$$

formată din multiplii întregi ai lui r. Mai general, dacă A este o mulțime de numere și dacă $b \in \mathbf{R}$, $r \in \mathbf{R}$, notăm $b + rA = \{b + ra;\ a \in A\}$.

În particular, dacă b, r sînt numere reale, convenim să notăm prin $b + r\mathbf{Z}$ mulțimea

$$b + r\mathbf{Z} = \{b + rm;\ m \in \mathbf{Z}\}.$$

Cu aceste convenții, putem scrie mulțimea soluțiilor ecuației $\sin x = 1$ sub forma

$$S = \frac{\pi}{2} + 2\pi\mathbf{Z}.$$

În mod asemănător, din proprietățile cunoscute ale funcției sinus deducem că mulțimea soluțiilor ecuației $\sin x = -1$ este dată de formula

$$S = -\frac{\pi}{2} + 2\pi\mathbf{Z}.$$

Fie acuma a un număr din intervalul deschis $(-1, 1)$. În intervalul $[0, 2\pi)$ există exact două numere care verifică ecuația $\sin x = a$; dacă x' este unul din aceste numere, al doilea are valoarea $x'' = \pi - x'$, dacă $a > 0$ și $x'' = 3\pi - x'$, dacă $a < 0$.

Intervalul $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ conține exact un număr x cu proprietatea $\sin x = a$. Rezultă că mulțimea soluțiilor ecuației $\sin x = a$, $a \in (-1, 1)$, este

$$S = (x' + 2\pi\mathbf{Z}) \cup (\pi - x' + 2\pi\mathbf{Z}),$$

unde x' este o soluție particulară; se poate presupune că $x' \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

În particular, ecuația $\sin x = 0$ admite ca mulțime a soluțiilor

$$S = \pi\mathbf{Z}.$$

În rezumat, dacă asociem fiecărui număr a din intervalul închis $[-1, 1]$, acel număr x din intervalul $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, pentru care $\sin x = a$ și dacă notăm numărul x astfel definit prin arcsin$a$, atunci putem enunța următorul rezultat:

Pentru $a \in [-1, 1]$, *mulțimea soluțiilor ecuației*

$$\sin x = a$$

este

$$\boxed{S = (\arcsin a + 2\pi\mathbf{Z}) \cup (\pi - \arcsin a + 2\pi\mathbf{Z}).}$$

Exercițiu. *Să se arate că mulțimea soluțiilor ecuației* $\sin x = a$, $a \in [-1, 1]$, *se poate defini prin formula*

$$S = \{(-1)^n \arcsin a + n\pi;\ n \in Z\}.$$

Notație. Dacă a este un număr din intervalul $[-1, 1]$, se notează prin Arcsin$a$ mulțimea soluțiilor ecuației $\sin x = a$. Deci

$$\operatorname{Arcsin} a = (\arcsin a + 2\pi\mathbf{Z}) \cup (\pi - \arcsin a + 2\pi\mathbf{Z}).$$

Exerciții

1. *Să se determine numerele*

$$\arcsin\frac{1}{2},\quad \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2},\quad \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right),\quad \arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\quad \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

2. *Să se determine mulțimile*

$$\operatorname{Arcsin}\frac{1}{2},\quad \operatorname{Arcsin}\frac{\sqrt{2}}{2},\quad \operatorname{Arcsin}\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\operatorname{Arcsin}\left(-\frac{1}{2}\right),\quad \operatorname{Arcsin}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\quad \operatorname{Arcsin}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Aplicație. Să se rezolve ecuația $\sin 2x = 0$.

Soluție. Punînd $y = 2x$, relația $\sin 2x = 0$ este echivalentă cu relația $\sin y = 0$ care este la rîndul ei echivalentă cu condiția

$$y = 2x \in \operatorname{Arcsin}0.$$

Deci soluțiile ecuației $\sin 2x = 0$ se obțin împărțind prin 2 soluțiile ecuației $\sin y = 0$. Deci mulțimea soluțiilor ecuației $\sin 2x = 0$ este dată de formula $S = \frac{\pi}{2}\mathbf{Z}$. Putem scrie $S = \frac{1}{2}\operatorname{Arcsin}0$.

Aplicație. Să se rezolve ecuația $\sin\frac{x}{3} = \frac{1}{2}$.

Soluție. Punînd $y = \frac{x}{3}$, ecuația dată devine $\sin y = \frac{1}{2}$. Soluțiile ultimei ecuații formează mulțimea $\operatorname{Arcsin}\frac{1}{2} = \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi\mathbf{Z}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi\mathbf{Z}\right)$. Rezultă că mulțimea S a soluțiilor ecuației date este formată din numerele care se obțin înmulțind cu 3 elementele mulțimii $\operatorname{Arcsin}\frac{1}{2}$, deci

$$S = \left(\frac{\pi}{2} + 6\pi\mathbf{Z}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{2} + 6\pi\mathbf{Z}\right) 3 \operatorname{Arcsin}\frac{1}{2}.$$

Observație. În cele două rezolvări, am folosit următoarea convenție: Dacă S este o mulțime de numere reale și dacă h este un număr real, notăm $hS = \{hx;\ x \in S\}$, deci mulțimea hS este formată din produsele cu h ale numerelor din mulțimea S.

Exerciții:

1. *Să se arate care sînt mulțimile soluțiilor fiecăreia din ecuațiile*

$$\sin x = 0,\ \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2},\ \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

2. *Să se arate că, pentru* $a \in [-1, 1]$, *mulțimile soluțiilor ecuațiilor* $\sin x = a$ *și* $\sin x = -a$ *sînt simetrice față de originea O a axei reale.*

Ecuația $\cos x = a$, $a \in \mathbf{R}$. Pentru $|a| > 1$, ecuația $\cos x = a$ nu are nici o soluție, deci mulțimea soluțiilor este vidă.

Pentru orice număr $a \in [-1, 1]$, ecuația $\cos x = a$ are o soluție unică în intervalul $[0, \pi]$. Această soluție se notează arccos$a$. Numerele $\pm \arccos a + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, sînt de asemenea soluții ale ecuației $\cos x = a$. Din proprietățile cunoscute ale funcției cosinus deducem că orice soluție a ecuației $\cos x = a$ este un număr de forma $\pm \arccos a + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

Deci, notînd prin $\operatorname{Arccos} a$ mulțimea formată din aceste numere, putem spune că:

Mulțimea soluțiilor ecuației $\cos x = a$, $a \in [-1, 1]$, *este dată de*

$$\boxed{\operatorname{Arccos} a = (\arccos a + 2\pi\mathbf{Z}) \cup (-\arccos a + 2\pi\mathbf{Z}).}$$

Aplicații. 1. *Avem*

$$\arccos 0 = \frac{\pi}{2}, \ \arccos(-1) = \pi, \ \arccos 1 = 0, \ \arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3},$$

$$\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}, \ \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5\pi}{6};$$

$$\operatorname{Arccos} 0 = \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi\mathbf{Z}\right) \cup \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi\mathbf{Z}\right) = \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbf{Z}\right).$$

$$\operatorname{Arccos} 1 = 2\pi\mathbf{Z}, \ \operatorname{Arccos}(-1) = \pi + 2\pi\mathbf{Z},$$

$$\operatorname{Arccos}\frac{1}{2} = \left(\frac{\pi}{3} + 2\pi\mathbf{Z}\right) \cup \left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi\mathbf{Z}\right).$$

Exerciții

1. *Să se determine numerele*

$$\arccos\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}, \ \arccos\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}, \ \arccos\frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}, \ \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

$$\arccos\left(\frac{-\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}\right).$$

2. *Să se determine mulțimile*

$$\operatorname{Arccos}\frac{\sqrt{2}}{2}, \ \operatorname{Arccos}\frac{\sqrt{3}}{2}, \ \operatorname{Arccos}\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}, \ \operatorname{Arccos}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \ \operatorname{Arccos}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

3. *Să se rezolve ecuația* $2 \cos x - 1 = 0$.

4. *Să se determine mulțimea* $\operatorname{Arccos}\left(-\frac{1}{2}\right) \cap [0, 3\pi]$.

Aplicație. Să se rezolve ecuația $2\cos x + 1 = 0$.

Soluție. Relația dată este echivalentă cu ecuația $\cos x = -\frac{1}{2}$. Avem $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$, deci mulțimea soluțiilor va fi

$$S = \operatorname{Arccos}\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi\mathbf{Z}\right) \cup \left(-\frac{2\pi}{3} + 2\pi\mathbf{Z}\right).$$

Exercițiu. *Să se determine elementele mulțimii* $\operatorname{Arccos}\left(-\frac{1}{2}\right) \cap [0, 2\pi]$.

Ecuația $\operatorname{tg} x = m$.

Domeniul de definiție al funcției tangentă este mulțimea $\mathbf{R} - \operatorname{Arccos} 0$, deci mulțimea soluțiilor oricărei ecuații de forma $\operatorname{tg} x = m$ trebuie căutată în acest domeniu.

Codomeniul funcției tangentă este întreaga dreaptă reală $\mathbf{R}$; deci orice număr real m este egal cu tangenta unui anumit număr $x \in \mathbf{R}$. Deci oricare ar fi $m \in \mathbf{R}$, mulțimea soluțiilor ecuației $\operatorname{tg} x = m$ este nevidă. Printre soluțiile acestei ecuații, există una și numai una singură în intervalul $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, deoarece atunci cînd x parcurge intervalul $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, numărul $\operatorname{tg} x$ parcurge toată dreapta $\mathbf{R}$, o singură dată.

Pentru $m \in \mathbf{R}$, numărul $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, pentru care $\operatorname{tg} x = m$, se notează $\operatorname{arctg} m$.

Exemple. Avem

$$\operatorname{arctg} 0 = 0, \ \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}, \ \operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4}, \ \operatorname{arct} \operatorname{tg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3},$$

$$\operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right) = -\frac{\pi}{3}, \ \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}.$$

Numărul $\operatorname{arctg} m$ nu este singura soluție a ecuației $\operatorname{tg} x = m$, deoarece funcția tangentă este periodică, cu perioada principală π. Rezultă că orice număr de forma $\operatorname{arctg} m + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, este o soluție a aceleiași ecuații. Din proprietățile funcției tangentă rezultă că acestea sînt singurele soluții ale ecuației $\operatorname{tg} x = m$. Deci:

Mulțimea soluțiilor ecuației $\operatorname{tg} x = m$ este

$$\boxed{\operatorname{Arctg} m = \operatorname{arctg} m + \pi\mathbf{Z}.}$$

Exemple. Mulțimea soluțiilor ecuației $\operatorname{tg} x = 0$ este $\pi\mathbf{Z}$, iar mulțimea soluțiile ecuației $\operatorname{tg} x = 1$ este $\operatorname{Arctg} 1 = \frac{\pi}{4} + \pi\mathbf{Z}$.

Exerciții

1. *Să se rezolve ecuația* $\operatorname{tg} x = -1$.
2. *Să se rezolve ecuația* $\operatorname{tg} x + \sqrt{3} = 0$ *și să se determine valorile lui* x, *care verifică această ecuație și care aparțin intervalului* $(1, 8)$.

Aplicație. Să se rezolve ecuația $\sin x = m \cos x$.

Soluție. Nu putem avea, pentru o soluție x a ecuației date, $\cos x = 0$, deoarece din ecuație ar rezulta și $\sin x = 0$; dar relațiile $\sin x = 0$ și $\cos x = 0$ nu pot fi verificate de un același număr x.

Avînd în vedere că avem $\cos x \neq 0$, deducem că relația dată este echivalentă cu ecuația $\mathrm{tg}x = m$, care a fost analizată anterior. Deci mulțimea soluțiilor ecuației $\sin x = m \cos x$ este mulțimea $\mathrm{Arctg}m$.

Observație. Avem

$$\mathrm{Arcsin}0 = \mathrm{Arctg}0 = \pi\mathbf{Z}.$$

Ecuația $\mathrm{ctg}x = m$. Funcția cotangentă este definită pe mulțimea

$$\mathbf{R} - \mathrm{Arcsin}0,$$

deci soluțiile oricărei ecuații de forma $\mathrm{ctg}x = m$ trebuie căutate în mulțimea $R - \mathrm{Arcsin}0$.

Orice număr real este egal cu cotangenta unui număr unic din intervalul $(0, \pi)$, deoarece atunci cînd x parcurge intervalul $(0, \pi)$, numărul $\mathrm{ctg}x$ parcurge o singură dată întreaga dreaptă $\mathbf{R}$. Numărul real x, cu proprietățile

$$x \in (0, \pi), \ \mathrm{ctg}x = m$$

se notează $\mathrm{arcctg}m$.

Din proprietățile funcției cotangentă rezultă că mulțimea soluțiilor ecuației $\mathrm{ctg}x = m$ este

$$\boxed{\mathrm{Arcctg}m = \mathrm{arcctg}m + \pi\mathbf{Z}.}$$

Exemple. Avem

$$\mathrm{arcctg}0 = \frac{\pi}{2}, \ \mathrm{Arcctg}0 = \frac{\pi}{2} + \pi\mathbf{Z},$$

$$\mathrm{arcctg}1 = \frac{\pi}{4}, \ \mathrm{Arcctg}1 = \frac{\pi}{4} + \pi\mathbf{Z},$$

$$\mathrm{arcctg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{6}, \ \mathrm{Arcctg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{6} + \pi\mathbf{Z},$$

$$\mathrm{arcctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2\pi}{3}, \ \mathrm{Arcctg}\left(-\sqrt{3}\right) = \frac{5\pi}{6} + \pi\mathbf{Z}.$$

Exerciții

1. *Să se rezolve ecuația* $\cos x = m \sin x$, *pentru* $m = -1$ *și* $m = -\sqrt{3}$.
2. *Să se arate că ecuațiile* $\cos x = 0$ *și* $\mathrm{ctg}\ x = 0$ *au aceleași soluții.*

13. Ecuații trigonometrice care se reduc la una sau mai multe ecuații de tipurile $\sin x = a$, $\cos x = b$, $\mathrm{tg}\ x = p$, $\mathrm{ctg}\ x = q$.

Aplicînd regulile de calcul algebric și relațiile cunoscute între diferitele funcții trigonometrice, numeroase ecuații trigonometrice pot fi rezolvate prin

reducere la una din ecuațiile studiate anterior, sau la mai multe din aceste ecuații.

Exemplu. Ecuația

$$\sin^2 x - 3 \sin x + 2 = 0$$

poate fi scrisă sub forma

$$(\sin x - 1)(\sin x - 2) = 0,$$

din care rezultă că trebuie să fie verificată cel puțin una din relațiile

$$\sin x = 1 \text{ sau } \sin x = 2.$$

Dar ultima relație este imposibilă, deci ecuația dată este echivalentă cu ecuația $\sin x = 1$. Mulțimea soluțiilor va fi mulțimea $\mathrm{Arcsin}\ 1 = \frac{\pi}{2} + 2\pi\mathbf{Z}$.

Mai general, dacă f este o funcție definită pe o mulțime $A \subset \mathbf{R}$, se poate considera relația

$$f(\sin x) = 0.$$

Făcînd înlocuirea $y = \sin x$, ecuația devine

$$f(y) = 0.$$

Ultima ecuație poate avea 0, 1, 2, 3 sau mai multe soluții. Dacă y' este o soluție a ecuației $f(y) = 0$, ecuația $\sin x = y'$ va admite soluții dacă și numai dacă $y' \in [-1, 1]$. Rezultă că mulțimea soluțiilor ecuației $f(\sin x) = 0$ este egală cu reuniunea mulțimilor $\mathrm{Arcsin}y'$, corespunzătoare acelor soluții y' ale ecuației $f(y) = 0$, pentru care $y' \in [-1, 1]$.

Considerații asemănătoare se pot face pentru ecuațiile de forma

$$f(\cos x) = 0, \ f(\mathrm{tg}x) = 0, \ f(\mathrm{ctg}x) = 0.$$

Ecuațiile de forma

$$\sin f(x) = \sin g(x), \ \cos f(x) = \cos g(x)$$

$$\mathrm{tg} f(x) = \mathrm{tg} h(x), \ \mathrm{ctg} f(x) = \mathrm{ctg} h(x),$$

în care f, g, h sînt funcții numerice date, pot fi rezolvate de asemenea folosind proprietățile pe care le cunoaștem ale funcțiilor trigonometrice.

De exemplu o ecuație de forma

(1) $$\sin f(x) = \sin g(x)$$

se rezolvă observînd că un număr x verifică o astfel de ecuație dacă și numai dacă există un număr întreg k, astfel încît să avem

(2) $$f(x) - g(x) = 2k\pi \text{ sau } f(x) + g(x) = (2k + 1)\pi.$$

Deci mulțimea soluțiilor ecuației (1) este egală cu reuniunea mulțimilor de soluții ale fiecăreia din ecuațiile (2), considerate pentru fiecare număr întreg k.

De exemplu, ecuaţia

$$(3) \qquad \sin(x^2) = \sin x$$

are ca mulţime de soluţii reuniunea mulţimilor de soluţii ale fiecăreia din ecuaţiile

$$x^2 - x = 2k\pi, \quad x^2 + x = (2k+1)\pi, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Prima din aceste ecuaţii are soluţii reale numai dacă $1 + 8k\pi \geqslant 0$, iar a doua ecuaţie are soluţii numai pentru $1 + (8k+4)\pi \geqslant 0$. Rezultă că *ecuaţia dată admite o infinitate de soluţii*, anume

$$x'_k = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 8k\pi}}{2}, \quad x''_k = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + (8k+4)\pi}}{2}$$

unde k poate lua orice valoare întreagă, cu condiţia ca expresiile de sub radicali să fie pozitive, deci $k \geqslant 0$.

Pentru rezolvarea ecuaţiei (3), am utilizat următorul criteriu:

I) Relaţia $\sin u = \sin v$ are loc dacă şi numai dacă există un număr întreg n, astfel ca să avem fie $u - v = 2n\pi$, fie $u + v = (2n+1)\pi$.

Ultimele două condiţii sînt echivalente cu condiţia $u \in v + 2\pi\mathbf{Z}$, respectiv cu condiţia $u \in \pi - v + 2\pi\mathbf{Z}$.

Pentru rezolvarea ecuaţiilor

$$\cos f(x) = \cos g(x), \quad \operatorname{tg} f(x) = \operatorname{tg} h(x), \quad \operatorname{ctg} f(x) = \operatorname{ctg} h(x),$$

vom folosi următoarele criterii:

(II) Relaţia $\cos u = \cos v$ este adevărată dacă şi numai dacă există un număr întreg n, astfel încît să avem fie $u - v = 2n\pi$ fie $u + v = 2n\pi$.

(III) Relaţia $\operatorname{tg} u = \operatorname{tg} v$ este verificată dacă şi numai dacă există un număr întreg n, astfel încît să avem $v = u + n\pi$.

(IV) Relaţia $\operatorname{ctg} u = \operatorname{ctg} v$ este verificată dacă şi numai dacă există un număr întreg n, astfel ca $v = u + n\pi$.

Aplicaţii. **1.** *Să se rezolve ecuaţia* $\cos 2x = \cos 3x$.

Soluţie. Aplicînd criteriul (II), obţinem ecuaţiile

$$3x = 2x + 2n\pi, \quad 3x + 2x = 2n\pi, \quad n \in \mathbf{Z}$$

care au soluţiile

$$x'_n = 2n\pi, \quad x''_n = \frac{2n}{5}\pi.$$

2. *Să se rezolve ecuaţia* $\operatorname{ctg} 4x = \operatorname{ctg} x$.

Soluţie. Aplicînd criteriul (IV), obţinem ecuaţiile

$$4x = x + n\pi, \quad n \in \mathbf{Z},$$

care au soluţiile

$$x_n = \frac{n}{3}\pi, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Exerciţii

Să se rezolve următoarele ecuaţii:

1. $\sin(2x+1) = \sin(3x^2)$.

2. $\sin x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

3. $\sin x = \cos 2x$.

4. $\operatorname{tg} px = \operatorname{tg} qx$ $(p,\ q \in \mathbf{R})$.

5. $\cos px = \cos qx$.

6. $\sin px = \sin qx$.

7. $\sin px = \cos qx$.

8. $\operatorname{tg} x = \operatorname{ctg} x$.

Exemplu. Să se rezolve ecuaţia $\sin 2x \sin 3x = \sin x \sin 4x$.

Soluţie. Ecuaţia dată este echivalentă cu fiecare din ecuaţiile următoare:

$$2 \sin 2x \sin 3x = 2 \sin x \sin 4x,$$

$$\cos x - \cos 5x = \cos 3x - \cos 5x,$$

$$\cos x = \cos 3x;$$

aplicînd criteriul (II), obţinem soluţiile $x_n = \frac{n\pi}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$.

Exerciţiu. *Să se rezolve ecuaţia* $\cos 2x \cos 3x = \cos x \cos 4x$.

Ecuaţii trigonometrice care se reduc la ecuaţii de gradul II

Ecuaţii de forma $a \sin^2 x + b \sin x + c = 0$.

Făcînd substituţia $y = \sin x$, ecuaţia dată devine

$$(1) \qquad ay^2 + by + c = 0.$$

Sînt posibile mai multe cazuri:

1) Rădăcinile ecuaţiei (I) sînt imaginare. Atunci ecuaţia trigonometrică nu are nici o soluţie în $\mathbf{R}$.

2) Rădăcinile ecuaţiei (1) sînt reale, dar sînt amîndouă exterioare intervalului $[-1, 1]$. Nici în acest caz ecuaţia trigonometrică dată nu are nici o soluţie în $\mathbf{R}$.

3) Ecuaţia (1) are o singură soluţie reală y_0 conţinută în intervalul $[-1, 1]$. În acest caz, mulţimea soluţiilor ecuaţiei date este $S = \operatorname{Arcsin} y_0$.

4) Ecuaţia (1) are două soluţii reale y_1, y_2 conţinute în intervalul $[-1, 1]$. În acest caz, ecuaţia trigonometrică dată are ca mulţime a soluţiilor reuniunea $\operatorname{Arcsin} y_1 \cup \operatorname{Arcsin} y_2$.

Observaţii. Pentru ca ecuaţia (1) să aibă cel puţin o soluţie reală este necesar şi suficient să avem $b^2 - 4ac \geqslant 0$.

Dacă $a = 0$, dar $b \neq 0$ şi dacă $|c| < |b|$, atunci ecuaţia dată are ca mulţime a soluţiilor mulţimea $\operatorname{Arcsin}\left(-\frac{c}{b}\right)$.

Ecuaţia (1) are două rădăcini în intervalul $[-1, 1]$ dacă şi numai dacă

$$-\frac{b}{2a} \in (-1, 1), \quad a(a - b + c) \geqslant 0 \text{ şi } a(a + b + c) \geqslant 0, \quad b^2 - 4ac > 0.$$

Dacă ecuaţia (1) are o singură rădăcină în intervalul $[-1, 1]$, avem

$$(a - b + c)(a + b + c) \leqslant 0.$$

Ecuaţiile de forma $a \cos^2 x + b \cos x + c = 0$ se discută şi se rezolvă în mod analog.

Ecuaţiile de forma $A \cos 2x + B \cos x + C = 0$ se aduc la forma

$$2A \cos^2 x + B \cos x + C - A = 0.$$

Ecuaţiile de forma $A \cos^2 x + B \sin x + C = 0$ se reduc de asemenea la o ecuaţie de gradul II, deoarece putem folosi identitatea

$$\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x.$$

Ecuaţiile de tipul $a \operatorname{tg}^2 x + b \operatorname{tg} x + c = 0$ sau $a \operatorname{ctg}^2 x + b \operatorname{ctg} x + c = 0$ se rezolvă de asemenea prin reducere la ecuaţii de gradul II, făcînd substituţiile $y = \operatorname{tg} x$ respectiv $y = \operatorname{ctg} x$. Discuţia acestor ecuaţii este mai simplă, deoarece orice soluţie reală m a ecuaţiei de gradul II conduce la o mulţime de soluţii de forma $\operatorname{Arctg} m$, respectiv $\operatorname{Arcctg} m$.

O ecuaţie omogenă de gradul II în $\sin x$ şi $\cos x$, deci o ecuaţie de forma

$$(2) \qquad a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = 0$$

poate fi de asemenea redusă la o ecuaţie algebrică de gradul doi.

Într-adevăr, dacă $a \neq 0$, orice soluţie a ecuaţiei (2) este astfel încît $\cos x \neq 0$, deoarece nu putem avea simultan $\sin x = 0$ şi $\cos x = 0$. Deci, în cazul $a \neq 0$ putem împărţi primul membru al ecuaţiei (2) prin $\cos x$ şi obţinem atunci ecuaţia echivalentă cu (2):

$$a \operatorname{tg}^2 x + b \operatorname{tg} x + c = 0,$$

care se reduce la o ecuaţie algebrică de gradul II, prin efectuarea substituţiei $y = \operatorname{tg} x$.

Dacă $a = 0$, mulţimea soluţiilor ecuaţiei (2) este egală cu reuniunea mulţimilor formate din soluţiile ecuaţiilor

$$\cos x = 0 \text{ şi } b \sin x + c \cos x = 0.$$

Ştim să determinăm mulţimea soluţiilor primei ecuaţii. Ecuaţia a doua se reduce la ecuaţia

$$\operatorname{tg} x = -\frac{c}{b}$$

dacă $b \neq 0$, şi se reduce la ecuaţia $\cos x = 0$ dacă $b = 0$, dar $c \neq 0$.

A p l i c a ţ i i. 1. *Să se rezolve ecuaţia* $2 \sin^2 x - 7 \sin x + 3 = 0$

Soluţie. Notînd $y = \sin x$ ecuaţia devine $2y^2 - 7y + 3 = 0$. Soluţiile ultimei ecuaţii sînt $\frac{1}{2}$ şi 3. Convine numai prima din aceste soluţii, care

conduce la mulţimea următoare de soluţii pentru ecuaţia trigonometrică dată:

$$S = \operatorname{Arcsin}\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi\mathbf{Z}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi\mathbf{Z}\right).$$

2. *Să se rezolve ecuaţia* $\cos 2x - 3 \cos x - 1 = 0$.

Soluţie. Notăm $y = \cos x$; atunci $\cos 2x = 2y^2 - 1$ şi sîntem conduşi în rezolvarea ecuaţiei algebrice $2y^2 - 3y - 2 = 0$. Ultima ecuaţie are rădăcinile $-\frac{1}{2}$ şi 2, dintre care convine numai prima. Deci mulţimea soluţiilor ecuaţiei trigonometrice date este

$$S = \operatorname{Arccos}\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi\mathbf{Z}\right) \cup \left(-\frac{2\pi}{3} + 2\pi\mathbf{Z}\right).$$

3. *Să se rezolve ecuaţia* $\sin^2 x - 8 \sin x \cos x + 7 \cos^2 x = 0$.

Soluţie. Notăm $y = \operatorname{tg} x$; ecuaţia dată devine

$$y^2 - 8y + 7 = 0$$

şi obţinem rădăcinile 1 şi 7. Mulţimea soluţiilor ecuaţiei trigonometrice date este deci reuniunea

$$S = \operatorname{Arctg} 1 \cup \operatorname{Arctg} 7.$$

Amintim că $\operatorname{Arctg} 1 = \frac{\pi}{4} + \pi\mathbf{Z}$. De asemenea, $\operatorname{Arctg} 7 = \operatorname{arctg} 7 + \pi\mathbf{Z}$.

4. $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{5}{8}$.

Rezolvare. Folosim identitatea

$$\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cos^2 x = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x$$

şi obţinem ecuaţia echivalentă cu ecuaţia dată:

$$\sin^2 2x = \frac{3}{4}.$$

Ultima ecuaţie are ca mulţime de soluţii reuniunea mulţimilor de soluţii ale ecuaţiilor

$$\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Rezultă că mulţimea soluţiilor ecuaţiei date este[1]

$$S = \frac{1}{2} \operatorname{Arcsin}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cup \frac{1}{2} \operatorname{Arcsin}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left(\frac{\pi}{6} + \pi\mathbf{Z}\right) \cup \left(\frac{\pi}{3} + \pi\mathbf{Z}\right) \cup \left(-\frac{\pi}{6} + \pi\mathbf{Z}\right) \cup \left(-\frac{\pi}{3} + \pi\mathbf{Z}\right).$$

[1] Reamintim că, dacă avem o mulţime A de numere reale, convenim să **notăm prin** $n + mA$ mulţimea $\{n + ma;\ a \in A\}$, *oricare ar fi numerele reale* m *şi* n.

5. *Să rezolvăm ecuația*

$$4(\sin^6 x + \cos^6 x) = 1.$$

Soluție. Din identitatea $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ deducem

$$\sin^6 x = 1 - 3\cos^2 x + 3\cos^4 x - \cos^6 x$$

astfel încît ecuația dată este echivalentă cu ecuația

$$4(1 - 3\cos^2 x + 3\cos^4 x) = 1$$

și cu ecuația

$$4\cos^4 x - 4\cos^2 x + 1 = 0.$$

Ultima ecuație poate fi pusă sub forma

$$(2\cos^2 x - 1)^2 = 0$$

și se reduce la ecuația echivalentă $\cos 2x = 0$. Mulțimea soluțiilor ultimei ecuații, deci și a ecuației date, va fi

$$S = \frac{1}{2}\text{Arccos } 0 = \left(\frac{\pi}{4} + \pi\mathbf{Z}\right) \cup \left(-\frac{\pi}{4} + \pi\mathbf{Z}\right).$$

14. Ecuații de forma $a \sin x + b \cos x = c$

Pentru $(a = 0,\ b \neq 0)$ sau $(a \neq 0$ și $b = 0)$ ecuația

(1) $$a \sin x + b \cos x = c$$

este echivalentă cu ecuația $\cos x = \frac{c}{b}$ respectiv cu ecuația $\sin x = \frac{c}{a}$ și fiecare din aceste ecuații a fost discutată.

Dacă $ab \neq 0$ dar $c = 0$, ecuația (1) se scrie $a \sin x + b \cos x = 0$ și este echivalentă cu ecuația $\text{tg } x = -\frac{b}{a}$, care a fost de asemenea discutată.

Vom studia acum soluțiile unei ecuații de forma (1), în care $abc \neq 0$. O astfel de ecuație poate fi rezolvată prin mai multe metode.

Metoda 1.

Notăm:

$$p = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad q = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

și considerăm punctul $M(p, q)$; acest punct aparține cercului trigonometric, deoarece $p^2 + q^2 = 1$. Aplicația $F : \mathbf{R} \to C$ fiind surjectivă, rezultă că există un număr real t, astfel ca să avem

(2) $$p = \cos t,\ q = \sin t,\ t \in [0, 2\pi).$$

În acest caz, vom avea

$$a = \sqrt{a^2 + b^2}\cos t, \quad b = \sqrt{a^2 + b^2}\sin t.$$

Introducînd aceste valori în ecuația (1), această ecuație capătă forma $\sqrt{a^2 + b^2}(\cos t \sin x + \sin t \cos x) = c$ sau

(3) $$h \sin(t + x) = c,\ h = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Ecuația (3) admite o mulțime nevidă de soluții dacă și numai dacă $|c| \leqslant h$. În acest caz, mulțimea soluțiilor va fi

(I) $$S = \text{Arcsin}\left(\frac{c}{h}\right) - t = \left(\arcsin\frac{c}{h} - t + 2\pi\mathbf{Z}\right) \cup \left(\pi - \arcsin\frac{c}{h} - t + 2\pi\mathbf{Z}\right).$$

Observație. Aplicarea acestei metode presupune posibilitatea găsirii numărului real t, care să verifice condițiile (2). Existența acestui număr este asigurată, dar aflarea *valorii exacte* a lui t este în general o problemă imposibilă din punct de vedere practic. Totuși, cu ajutorul tabelelor, putem găsi *valoarea aproximativă* a lui t, suficient de apropiată de valoarea exactă, pentru aplicațiile obișnuite. În condițiile unor calcule foarte fine, mașinile electronice de calcul permit obținerea unor aproximații pentru t oricît de bune vrem, în principiu.

În cazuri particulare favorabile, valoarea exactă a lui t poate fi dedusă fără dificultate din relațiile (2).

Exemplu. Să se rezolve ecuația $\sin x + \cos x = 1$.

Soluție. Avem $a = b = c = 1$, deci $h = \sqrt{2}$, $p = q = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $t = \frac{\pi}{4}$.

Ecuația dată este echivalentă cu ecuația

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Potrivit formulei generale, mulțimea soluțiilor ultimei ecuații, deci și a ecuației date, va fi

$$S = \text{Arcsin}\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi}{4} = (2\pi\mathbf{Z}) \cup \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi\mathbf{Z}\right)$$

Metoda 2. Presupunem că $b + c \neq 0$.

Notăm $y = \text{tg}\frac{x}{2}$ și exprimăm $\sin x$ și $\cos x$ cu ajutorul lui y, folosind formulele care dau sinusul și cosinusul unui unghi în funcție de tangenta unghiului pe jumătate. Avem

$$\sin x = \frac{2y}{1 + y^2}, \quad \cos x = \frac{1 - y^2}{1 + y^2}$$

şi ecuaţia (1) capătă forma

$$2\,ay + b(1 - y^2) = c(1 + y^2)$$

Am obţinut o ecuaţie algebrică de gradul II, care se mai poate scrie

$$(b + c)y^2 - 2ay + (c - b) = 0. \tag{4}$$

Ecuaţia (4) are rădăcinile reale, dacă este verificată condiţia

$$a^2 - (b + c)(c - b) \geqslant 0$$

sau dacă $a^2 + b^2 \geqslant c^2$. Dar această condiţie este echivalentă cu condiţia $h \geqslant |c|$, găsită prin aplicarea metodei 1.

Să presupunem că avem

$$a^2 + b^2 > c^2$$

şi fie m una din soluţiile ecuaţiei (4). Din ecuaţia

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = m$$

deducem $x \in 2$ Arctg m, deci mulţimea 2 Arctg $m = 2$ arctg $m + 2\pi\mathbf{Z}$ este o mulţime de soluţii ale ecuaţiei (1). Dacă ecuaţia (4) are două rădăcini reale m_1 şi m_2, atunci mulţimea soluţiilor ecuaţiei (1) va fi

$$S = 2\text{ Arctg } m_1 \cup 2\text{ Arctg } m_2. \tag{II}$$

Exerciţiu. *Să se arate, în legătură cu rezultatele obţinute aplicînd metoda 1 şi metoda 2 că, dacă $b + c \neq 0$, atunci formulele (I) şi (II) definesc mulţimi egale.*

Observaţie. Dacă $b + c = 0$, deci dacă $b = -c$ atunci ecuaţia (1) admite soluţiile $(2k + 1)\pi$, pentru $k \in \mathbf{Z}$; într-adevăr, pentru $x = (2k + 1)\pi$ avem $\sin x = 0$ şi $\cos x = -1$. Pentru aceste soluţii, funcţia tangentă nu poate fi aplicată numerelor $\frac{x}{2}$. Deci metoda 2 nu poate conduce la găsirea acestor soluţii.

Pentru $b = -c$, putem scrie ecuaţia (1) sub formele echivalente

$$a \sin x = c(1 + \cos x),$$

$$2\,a \sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2c\cos^2\frac{x}{2},$$

$$\cos\frac{x}{2}\left(a\sin\frac{x}{2} - c\cos\frac{x}{2}\right) = 0,$$

care admit ca mulţime de soluţii reuniunea

$$S = (\pi + 2\pi\mathbf{Z}) \cup \left\{2\text{ Arctg}\frac{c}{a}\right\}, \quad (a \neq 0).$$

Exemplu. Să rezolvăm prin metoda 2 ecuaţia $\sin x + \cos x = 1$.

Avem $b + c = 2 \neq 0$, deci metoda 2 va furniza toate soluţiile.

Punînd $y = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, se obţine ecuatia

$$y^2 - y = 0,$$

care are soluţiile 0 şi 1. Rezultă că ecuaţia trigonometrică dată are mulţimea de soluţii

$$S = 2\text{ Arctg } 0 \cup 2\text{ Arctg } 1 = (2\pi\mathbf{Z}) \cup \left\{\frac{\pi}{2} + 2\pi\mathbf{Z}\right\},$$

care a fost obţinută şi prin aplicarea metodei 1.

Ecuaţia

$$\sin x + \cos x = -1 \tag{5}$$

se rezolvă prin metoda 1. Ecuaţiile (2) vor fi verificate de $t = \frac{\pi}{4}$ şi ecuaţia (3) devine

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \frac{-1}{\sqrt{2}} = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right);$$

rezultă că mulţimea de soluţii ale ecuaţiei (5) este

$$S = \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi\mathbf{Z}\right) \cup (\pi + 2\pi\mathbf{Z}).$$

Exerciţii

1. *Să se rezolve ecuaţiile*

$$\sin x + 3\cos x = 1,\quad 3\sin x - \cos x = -1.$$

2. *Să se rezolve ecuaţiile*

$$3\sin 3x + 4\cos 3x = -5,\quad 3\sin 2x - 4\cos 2x = 5.$$

Alte metode de rezolvare a ecuaţiilor trigonometrice

O bună cunoaştere a proprietăţilor funcţiilor trigonometrice şi utilizarea judicioasă a identităţilor trigonometrice şi algebrice permit rezolvarea unei mari varietăţi de ecuaţii trigonometrice.

Trebuie subliniat că nu există o metodă generală pentru rezolvarea oricărei ecuaţii trigonometrice. Dimpotrivă, se poate afirma că ecuaţiile trigonometrice, care pot fi rezolvate efectiv, prin indicarea explicită a mulţimii soluţiilor, constituie o categorie foarte restrînsă, în mulţimea tuturor ecuaţiilor trigonometrice care se pot imagina, sau care intervin în practică.

Combinarea metodelor furnizate de algebră și de analiză permit însă, în principiu, să se rezolve *orice* ecuație trigonometrică, *cu o aproximație oricît de bună vrem.* O parte din aceste metode vor fi prezentate în manualele destinate claselor X, XI și XII. În acest capitol, ne limităm a indica numai unele metode elementare, care însă pot fi aplicate multor tipuri de ecuații ce intervin în aplicații practice.

Utilizarea identităților algebrice

Să considerăm ecuația

$$\sin x \cos x - \sin^2 x - \cos x + \sin x = 0.$$

Primul membru al acestei ecuații poate fi descompus într-un produs de doi factori; se obține atunci ecuația echivalentă:

$$(\sin x - 1)(\cos x - \sin x) = 0,$$

care are mulțimea de soluții:

$$S = (\text{Arcsin } 1) \cup (\text{Arctg } 1) = \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi \mathbf{Z}\right) \cup \left(\frac{\pi}{4} + \pi \mathbf{Z}\right).$$

Pentru a da alt exemplu, să considerăm ecuația

$$\cos^4 x - \sin^4 x = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Folosind identitățile $u^2 - v^2 = (u - v)(u + v)$, $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, putem transforma ecuația dată în ecuația echivalentă $\cos^2 x - \sin^2 x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ sau $\cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, care are mulțimea de soluții

$$S = \frac{1}{2} \text{Arccos} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi \mathbf{Z}\right) \cup \left(-\frac{\pi}{6} + 2\pi \mathbf{Z}\right)\right\}.$$

Să ne propunem acuma să rezolvăm ecuația

$$\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x = \frac{3}{2}.$$

Folosind identitatea

$$\sin^2 u = \frac{1 - \cos 2u}{2},$$

ecuația se poate scrie sub forma echivalentă

$$\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x = 0.$$

Transformînd în produs suma dintre $\cos 2x$ și $\cos 6x$, ecuația devine

$$\cos 4x(2 \cos 2x + 1) = 0.$$

Mulțimea soluțiilor ultimei ecuații este egală cu reuniunea mulțimilor de soluții ale ecuațiilor

$$\cos 4x = 0, \quad \cos 2x = -\frac{1}{2}.$$

Rezultă că ecuația dată are următoarea mulțime de soluții:

$$S = \left\{\frac{1}{4} \text{Arccos } 0\right\} \cup \left\{\frac{1}{2} \text{Arccos} \left(-\frac{1}{2}\right)\right\}.$$

Exerciții. 1. *Să se expliciteze membrul drept al ultimei formule.*

2. *Să se rezolve ecuația*

$$\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x = 2.$$

3. *Să se aducă fiecare din ecuațiile următoare la una din formele* $\sin x = a$, $\cos x = a$ *sau* $\operatorname{tg} x = a$. *Să se facă discuția după parametrii* P, Q, R, p, a, b, c.

1) $P \sin^2 x + Q \cos^2 x - R \sin x = 0.$
2) $P \cos 2x + Q \cos x + R = 0.$
3) $p \sin^2 x + Q \cos x + R = 0.$
4) $\cos^2 x + \sin x \cos x = 1.$
5) $\sin 3x = \sin x.$
6) $\cos 3x + \cos x = p \cos 2x.$
7) $\sin x - \sin a = p\sin(x - a).$
8) $A \operatorname{tg} x + B \operatorname{ctg} x + C = 0.$
9) $a \cos x + b \cos(c - x) = p.$

4. *Să se rezolve ecuațiile*

1) $\arcsin x = \arccos x.$
2) $\arcsin x = 2 \arccos x.$
3) $\arccos x = 2 \arcsin x.$
4) $\arcsin x = 3 \arcsin x.$
5) $\arcsin x = 2 \operatorname{arc}(\operatorname{tg} x).$
6) $\arcsin x = 3 \operatorname{arc}(\operatorname{ctg} x).$

5 *Fie* $a = d(B, C)$, $b = d(C, A)$, $c = d(A, B)$ lungimile laturilor unui triunghi și fie S aria acestui triunghi. Să se demonstreze formulele

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A,$$

$$2S = bc \sin A.$$

6. *Fie* O un punct în planul triunghiului ABC și fie $a = d(B, C)$, $b = d(C, A)$, $c = d(A, B)$, $a' = d(O, A)$, $b' = d(O, B)$, $c' = d(O, C)$, $L = b'^2 + c'^2 - a^2$, $M = c'^2 + a'^2 - b^2$, $N = a'^2 + b'^2 - c^2$.

Să se demonstreze relația

$$a'^2L^2 + b'^2M^2 + c'^2N^2 = LMN + 4a'^2b'^2c'^2.$$

7. *Fie* $ABCD$ *un patrulater convex și fie* $a = d(A, B)$, $b = d(B, C)$, $c = d(C, D)$, $d = d((D, A)$, $f = d(A, C)$, $u = \widehat{ABC}$, $v = \widehat{ADC}$, $S =$ *aria suprafeței limitată de patrulaterul* $ABCD$. *Să se demonstreze formulele:*

a) $f^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos u = c^2 + d^2 - 2cd \cos v;$
b) $a^2 + b^2 - c^2 - d^2 = 2(ab \cos u - cd \cos v);$

c) $2S = ab \sin u + cd \sin v$;

d) $16S^2 + (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 = 4(a^2b^2 + c^2d^2) - 8\, abcd\, \cos(u + v)$;

e) $16S^2 = 4(ab + cd)^2 - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 - 16\, abcd \left(\cos \dfrac{u+v}{2}\right)^2$;

f) dacă $2s = a + b + c + d$, atunci $S^2 = (s - a)\,(s - b)\,(s - c)(s - d) - abcd\left(\cos \dfrac{u+v}{2}\right)^2$.

8. *Să se arate că, printre toate patrulaterele convexe, ale căror lungimi ale laturilor au valori date a, b, c și d, patrulaterul de arie maximă este inscriptibil.*

(*Indicație.* Se folosește ultima formulă din exercițiul precedent și se observă că S este maxim dacă unghiul $u + v$ este alungit.)

9. Fiind dat m numere pozitive $a_1, a_2, \ldots, a_m$, astfel ca

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_m < a_1 + a_2 + \ldots + a_{m-1},$$

să se arate că:

a) Există poligoane cu n laturi, de lungimi egale cu numerele date, în ordinea dată.

b) Printre poligoanele considerate la punctul a), există poligoane care limitează o suprafață de arie maximă și aceste poligoane sînt inscriptibile.

10. *Să se arate că aria unui patrulater inscriptibil, avînd lungimile laturilor egale cu a, b, c și d, este dată de formula*

$$S^2 = (s - a)(s - b)(s - c)(s - d),$$

unde $2s = a + b + c + d$.

Cuprins

Nr. colilor de tipar: 11,5
Bun de tipar: 14.07.1980

Com. nr. 90 600/26 386
Combinatul Poligrafic
„CASA SCINTEII"
București — R.S.R.