Seminar 12

3.01.2022

Pb 1

Fie $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 9 & 7 & 2 & 3 & 1 & 8 & 5 & 6 \end{pmatrix} \in S_9$ $\left(\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 5 & 6 & 9 & 1 & 2 & 4 & 7 & 10 & 8 \end{pmatrix} \in S_{10} \right)$

1) Descompuneți σ în produs de cicli disjuncți și în produs de transpoziții
2) Aflați $sgn(\sigma)$ și calculați σ^{2022}, $ord(\sigma)$.
3) Det. toate permutările τ din S_9 (resp S_{10}) a.î. $\tau^3 = \sigma$ (resp $\tau^3 = \sigma_1$)
4) Fie $\rho \in S_9$ cu $ord(\rho) = 9$. Poate fi ρ permutare pară?

(Același enunț pt σ_1).

1) $\sigma = (1\ 4\ 2\ 9\ 6)(3\ 7\ 8\ 5)$ $\qquad$ $\sigma_1 = (1\ 3\ 6\ 2\ 5)(4\ 9\ 10\ 8\ 7)$

$\sigma = (1\ 4)(4\ 2)(2\ 9)(9\ 6)(3\ 7)(7\ 8)(8\ 5)$ $\qquad$ $\sigma_1 = (1\ 3)(3\ 6)(6\ 2)(2\ 5)(4\ 9)(9\ 10)(10\ 8)(8\ 7)$

Reamintim că $sgn : S_n \to \{-1, 1\}$ e morfism de grupuri și $sgn((i\ j)) = -1$
(vezi C11)

$sgn(\sigma) = (-1)^7 = -1$ $\qquad$ $sgn(\sigma_1) = (-1)^8 = 1$

Reamintim că $ord(\sigma) =$ c.m.m.m.c. al lungimilor ciclilor din desc. în produs de cicli disjuncți a lui σ

$ord(\sigma) = cmmmc(5, 4) = 20$ $\qquad$ $ord(\sigma_1) = [5, 5] = 5$

$\sigma_1 = (1\ 3\ 6\ 2\ 5)(4\ 9\ 10\ 8\ 7)$

$\sigma^{2022} = \sigma^{20 \cdot 101 + 2} = (\sigma^{20})^{101} \cdot \sigma^2 = \sigma^2 =$

$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 9 & 7 & 2 & 3 & 1 & 8 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 9 & 7 & 2 & 3 & 1 & 8 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 6 & 8 & 9 & 7 & 4 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} =$

$= (1\ 2\ 6\ 4\ 9)(3\ 8)(5\ 7)$

$\sigma = (1\ 4\ 2\ 9\ 6)(3\ 7\ 8\ 5) \underset{\text{cicli disj. comută}}{\Rightarrow} \sigma^2 = (1\ 4\ 2\ 9\ 6)^2 (3\ 7\ 8\ 5)^2 \underset{\text{mai jos}}{\overset{\text{vezi}}{=}}$

$(1\ 2\ 6\ 4\ 9)(3\ 8)(5\ 7)$

$\sigma_1^{2022} = \sigma_1^{5 \cdot 404 + 2} = (\sigma_1^5)^{404} \cdot \sigma_1^2 = \sigma_1^2 = (1\ 6\ 5\ 3\ 2)(4\ 10\ 7\ 9\ 8)$

4) ρ permutare pară ($\Leftrightarrow sgn(\rho)$ (sau $\varepsilon(\rho)$) $= 1$)

$\rho \in S_9$ $\boxed{ord(\rho) = 9}$

Reamintim: orice permutare se descompune în mod unic (mai puțin ordinea scrierii ciclilor) în produs de cicli disjuncți

$\rho \in S_9 \rightsquigarrow \rho = c_{i_1} \cdot c_{i_2} \cdot \ldots \cdot c_{i_k}$ → desc. în produs de cicli disj.

unde $i_1 + i_2 + \ldots + i_k = 9$, dacă scriem și cicli de lungime 1, (resp. $i_1 + \ldots + i_k \leq 9$ dacă nu scriem cicli de lungime 1) unde c_{i_j} este ciclu de lungime i_j.

$$\underset{\substack{\| \\ 9}}{ord(\rho)} = c.m.m.m.c.(i_1, i_2, \ldots, i_k) \Rightarrow (\exists)\, j \text{ a.î. } i_j = 9 \ \Big/ \Rightarrow$$

$$i_1 + i_2 + \ldots + i_k = 9$$

$\Rightarrow \boxed{k=1}$ și $\boxed{i_1 = 9}$ $\Rightarrow \rho$ este ciclu de lungime 9. $\Rightarrow sgn(\rho) = \underset{\substack{\| \\ 1}}{(-1)^{9-1}}$

$\Rightarrow \rho$ e permutare pară.

---

3) $\tau^3 = (1\ 4\ 2\ 9\ 6)(3\ 7\ 8\ 5) = \sigma$

Pp. că $(\exists)\, \tau \in S_9$ a.î. $\tau^3 = \sigma$. Fie $\tau = c_{i_1} \cdot c_{i_2} \cdot \ldots \cdot c_{i_k}$ → desc. lui τ în produs de cicli disjuncți, $i_1 + \ldots + i_k = 9$ $\quad 1 \leq k < 9$ $\begin{pmatrix} k=9 \\ \Downarrow \\ \tau = e \ \text{x} \end{pmatrix}$

c_{i_j} → ciclu de lungime i_j.

$$\tau^3 \overset{\text{cicli}}{\underset{\substack{\text{disj.} \\ \text{comută}}}{=}} c_{i_1}^3 \cdot c_{i_2}^3 \cdot \ldots \cdot c_{i_k}^3$$

$\boxed{\text{FAPT (vezi mai jos)}}$

$c_\ell^3 =$; $3 \mid \ell \Rightarrow c_\ell^3 =$ produs de 3 cicli disjuncți de lungime $\ell/3$

c_ℓ → ciclu de lungime ℓ ; $3 \nmid \ell \ (\Leftrightarrow (3,\ell) = 1) \Rightarrow c_\ell^3 =$ un ciclu de lungime ℓ

$$\underset{\substack{\| \\ c_{i_1}^3 \cdot c_{i_2}^3 \cdot \ldots \cdot c_{i_k}^3}}{\tau^3} \overset{(*)}{=} \sigma = (1\ 4\ 2\ 9\ 6)(3\ 7\ 8\ 5) \xRightarrow{\substack{\text{unicitatea desc.} \\ \text{în produs de cicli} \\ \text{disjuncți}}} 3 \nmid i_j \ (\forall)\, j = \overline{1,k}$$

(altfel $c_{i_j}^3 =$ produs de 3 cicli disj. de lungime $i_j/3$)

Prin urmare $c_{i_j}^3$ e un ciclu de lungime i_j $(\forall)\, j = \overline{1,k}$

$\overset{(*)}{\Longrightarrow}$ $\underline{k=2}$ și pot pp. că $\underline{i_1 = 5}$ și $\underline{i_2 = 4}$. Deci $\tau = c_5 \cdot c_4$,

$\tau^3 = c_5^3 \cdot c_4^3$ cu $c_5^3 = (1\ 4\ 2\ 9\ 6) \Rightarrow (c_5^3)^2 = (1\ 4\ 2\ 9\ 6)^2$

$\boxed{c_5 = (1\ 2\ 6\ 4\ 9)}$

$c_4^3 = (3\ 7\ 8\ 5)$

$\Downarrow$

$(c_4^3)^3 = (3\ 7\ 8\ 5)^3 = (3\ 5\ 8\ 7)$

$c_4^9 = c_4^8 \cdot c_4 = c_4$ $\boxed{c_4 = (3\ 5\ 8\ 7)}$

$\Rightarrow \tau = (1\ 2\ 6\ 4\ 9)(3\ 5\ 8\ 7)$ (Deci ec. $\tau^3 = \sigma$ are sol. unică).

$\tau^3 = \sigma_1 = (1\ 3\ 6\ 2\ 5)(4\ 9\ 10\ 8\ 7)$

Similar $\tau = c_{i_1} \cdot c_{i_2} \cdot \ldots \cdot c_{i_k}$ → desc. în produs de cicli disj.

$\tau^3 = c_{i_1}^3 \cdot c_{i_2}^3 \cdot \ldots \cdot c_{i_k}^3 = (1\ 3\ 6\ 2\ 5)(4\ 9\ 10\ 8\ 7)$. Analog se arată $\boxed{k=2}$ $i_1 = i_2 = 5$ $c_{i_1}^3 = (1\ 3\ 6\ 2\ 5) \Rightarrow c_{i_1} = (1\ 6\ 5\ 3\ 2)$

$c_{i_2}^3 = (4\ 9\ 10\ 8\ 7) \to c_{i_2} = (4\ 10\ 7\ 9\ 8)$

Ec $\tau^3 = \sigma_1$ are sol. unică în S_{10} pe $\tau = (1\ 6\ 5\ 3\ 2)(4\ 10\ 7\ 9\ 8)$.

Prb 2 Dacă $\sigma = (a_1 a_2 \ldots a_m) \in S_m$ este un m-ciclu atunci $(\forall)\, i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ $\sigma^i(a_k) = a_{k+i}$, unde $k+i$ este înlocuit de restul $k+i \pmod m$ dacă $k+i > m$.

Dem Ind. după i cazul $i=2$ $\sigma^2(a_1) = \sigma(\sigma(a_1)) = \sigma(a_2) = a_3$

$\sigma = (a_1 \to a_2 \to a_3 \to \ldots \to a_m \to a_1)$ notație $\sigma^2 = \begin{pmatrix} a_1 \ldots a_2 \ldots a_3 \ldots a_{m-1} \ldots a_m \\ a_3 \ldots a_4 \ldots a_5 \ldots a_1 \ldots a_2 \end{pmatrix}$

Obs 1) Dacă σ e un m-ciclu atunci σ^i nu e neapărat un m-ciclu. Exemplu: $\sigma = (1\ 2\ 3\ 4) \in S_4$ $\sigma^2 = \begin{pmatrix} 1 \to 3 \\ 2 \to 4 \\ 3 \to 1 \\ 4 \to 2 \end{pmatrix} = (1\ 3)(2\ 4)$

2) $\sigma^m = e$

Prb 3 Fie σ un m-ciclu. Atunci σ^i este un m-ciclu $\Leftrightarrow (i, m) = 1$.

Prb 4 Fie σ un m-ciclu și $d \mid m$. Atunci σ^d este un produs de d cicli disjuncți de lungime $\frac{m}{d}$.

Pb 5 Nr. ciclilor de lungime m din S_n $(m \le n)$ este egal cu $\boxed{\frac{A_n^m}{m} = \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-m+1)}{m}}$

$\left((i_1\, i_2 \ldots i_m) = (i_2\, i_3 \ldots i_m\, i_1) = \ldots = (i_m\, i_1 \ldots i_{m-1}) \right)$

Pb 6 Calculați nr. de permutări din S_4, respectiv S_5, care se scriu ca produs de 2-cicli disjuncți ($\Leftrightarrow$ permutările de ordin 2)

Obs! Un 2-ciclu = produs (cu un singur factor)

- $\sigma \in S_4$ $\rightsquigarrow$ produs de un 2-ciclu $\Rightarrow$ σ e transp. $\rightsquigarrow$ (12), (13), (14), (23), (24), (34)

  (în total $\frac{A_4^2}{2} = \frac{4\cdot 3}{2} = 6$ permutări)

  $\rightsquigarrow$ produs de 2 2-cicli disjuncți $\Rightarrow$ (12)(34), (13)(24), (14)(23)

  în total 3 permutări

În S_4 avem 9 astfel de permutări (de ordin 2).

- $\sigma \in S_5$ $\rightsquigarrow$ $\sigma = (i\, j)$ $\rightsquigarrow$ Avem $C_5^2 \left(= \frac{A_5^2}{2}\right)$ transpoziții în S_5.

  $C_5^2 = 10$

  $\rightsquigarrow$ $\sigma = (i\, j)(k\, l)$ cu $\{i,j\} \cap \{k,l\} = \emptyset$

  $\rightsquigarrow$ $\frac{C_5^2 \cdot C_3^2}{2} = \frac{10\cdot 3}{2} = 15$ permutări care se scriu ca produs de 2 2-cicli disjuncți.

Deci în S_5 avem $10+15=25$ permutări de ordin 2.

Pb 7 Determinați n a.î. există $\sigma \in S_7$ cu $\mathrm{ord}(\sigma) = n$.

$\sigma = c_{i_1} \cdot c_{i_2} \cdot \ldots \cdot c_{i_k}$ $\to$ desc. în produs de cicli disj. $\quad \mathrm{ord}(\sigma) = [i_1, \ldots, i_k]$, $i_1, \ldots, i_k \le 7$

Dc σ = k-ciclu $k = \overline{1,7}$ $\Rightarrow$ $\mathrm{ord}(\sigma) = k$

$8 = 2^3 = [i_1, \ldots, i_k] \Rightarrow (\exists) j$ $i_j = 8$ (X, $i_j \le 7$) $\Rightarrow \nexists\, \sigma \in S_7$ $\mathrm{ord}(\sigma) = 8$

$9 = 3^2 = [i_1, \ldots, i_k] \Rightarrow (\exists) i_j$ $i_j = 9$ (X, $i_j \le 7$) $\Rightarrow \nexists\, \sigma \in S_7$ $\mathrm{ord}(\sigma) = 9$

Evident $\mathrm{ord}(\sigma) \ne p$ $(\forall)$ p - prim $p > 7$.

$\sigma = (1\,2)(3\,4\,5\,6\,7) \Rightarrow \mathrm{ord}(\sigma) = 10$; $\sigma = (1\,2\,3)(4\,5\,6\,7) \Rightarrow \mathrm{ord}(\sigma) = 12$

Afirmație Mulțimea ordinelor elem. din S_7 este $\{1,2,3,4,5,6,7,10,12\}$

"$\supseteq$" (vezi mai sus)

$|S_7| = 7!$ $\quad \sigma \in S_7 \overset{\text{Lagrange}}{\Rightarrow} ord(\sigma) \mid 7! = 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7$ $\quad \boxed{ord(e) = 1}$

$S_7 \ni \underset{\neq e}{\sigma} = c_{i_1} \cdots c_{i_k}$ desc. în produs de cicli disj; c_{i_j} e ciclu de lung. $i_j > 1$

$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} i_1 + i_2 + \dots + i_k \le 7 \\ 1 < i_1, i_2, \dots, i_k \Rightarrow 2k \le i_1 + i_2 + \dots + i_k \\ i_1 \le i_2 \le \dots \le i_k \end{array} \right| \Rightarrow \boxed{2k \le 7} \Rightarrow \underline{k \le 3}$

Avem 3 cazuri:

I $\underline{k=1} \Rightarrow \sigma = c_{i_1} \Rightarrow \sigma$ e un i_1-ciclu $(i_1 \le 7) \Rightarrow ord(\sigma) = i_1 \in \{2,\dots,7\}$

II $\underline{k=2} \Rightarrow ord(\sigma) = [i_1, i_2]$ $\quad \underbrace{i_1 + i_2 \le 7 \quad 2 \le i_1 \le i_2}$

$\Rightarrow (i_1, i_2) \in \{(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(3,3),(3,4)\} \leadsto$

$\leadsto ord(\sigma) \in \{2, 6, 4, 10, 3, 12\} = \{2,3,4,6,10,12\}$

III $\underline{k=3} \Rightarrow ord(\sigma) = [i_1, i_2, i_3]$ $\quad \underbrace{i_1 + i_2 + i_3 \le 7 \quad 2 \le i_1 \le i_2 \le i_3}$

$\Rightarrow (i_1, i_2, i_3) \in \{(2,2,2),(2,2,3)\} \Rightarrow ord(\sigma) \in \{2, 6\}$

Din I, II și III $\Rightarrow$ "$\subseteq$" (Afirm. a fost dem.)