UNIVERSITATEA DIN BUCUREȘTI. FACULTATEA DE MATEMATICĂ ȘI INFORMATICĂ

Seminar 1.

1. Arătați cu ajutorul definiției că:

a) $\lim\limits_{n} \dfrac{n^2}{2n^2+1} = \dfrac{1}{2}$. b) $\lim\limits_{n} \left(\sqrt{1+\dfrac{1}{n}} - 1\right)\sqrt{n} = 0$.

c) $\lim\limits_{n} \dfrac{n^3}{n^3+2n^2+7n+4} = 1$. d) $\lim\limits_{n} \dfrac{2^n+(-2)^n}{3^n} = 0$

Soluție:

a) Fie $\varepsilon > 0$. Trebuie să găsim un rang $n_\varepsilon > 0$ a.î. $(\forall) n \geq n_\varepsilon$ să avem

$$\left| \frac{n^2}{2n^2+1} - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon. \ (*)$$

inegalitatea (*) este evident satisfăcută pt orice $\varepsilon > \frac{1}{2}$.

Să presupunem că $\varepsilon < \frac{1}{2}$. În acest caz (*) este satisfăcută dacă $n > \sqrt{\dfrac{1-2\varepsilon}{4\varepsilon}}$

Luăm $n_\varepsilon = \left[\sqrt{\dfrac{1-2\varepsilon}{4\varepsilon}}\right] + 1$. Atunci $(\forall) \varepsilon > 0$ $\left(\varepsilon < \frac{1}{2}\right)$ $(\exists)$

$n_\varepsilon = \left[\sqrt{\dfrac{1-2\varepsilon}{4\varepsilon}}\right] + 1$ a.î. $(\forall) n \geq n_\varepsilon$ avem $\left| \dfrac{n^2}{2n^2+1} - \dfrac{1}{2} \right| < \varepsilon$ ceia ce înseamnă că $\dfrac{n^2}{2n^2+1} \xrightarrow{n} \dfrac{1}{2}$.

b) Prelucrând puțin limita avem de arătat că $\lim\limits_{n} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 0$

Fie $\varepsilon > 0$. Să găsim $n_\varepsilon > 0$ a.î. $(\forall) n \geq n_\varepsilon$ să avem $|(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})| < \varepsilon$

$$\Longleftrightarrow \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} < \varepsilon. \ (1).$$

Cum $\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} < \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$, vom cere ca $\dfrac{1}{2\sqrt{n}} < \varepsilon$ și atunci are loc și (1).

Din $\frac{1}{2\sqrt{n}} < \varepsilon$ găsim $n > \frac{1}{4\varepsilon^2}$. Luăm $n_\varepsilon = \left[\frac{1}{4\varepsilon^2}\right] + 1$, când pentru $n \geq n_\varepsilon$ avem $n > \frac{1}{4\varepsilon^2} \iff \frac{1}{2\varepsilon} < \sqrt{n} \iff \frac{1}{2\sqrt{n}} < \varepsilon$ și deci (1).

Concluzie: $(\forall)\varepsilon > 0$ am găsit $n_\varepsilon = \left[\frac{1}{4\varepsilon^2}\right] + 1$ a.î. $(\forall) n \geq n_\varepsilon$ avem:

$|\sqrt{n+1} - \sqrt{n}| < \varepsilon$ ceea ce încheie demonstrația.

c) Fie $\varepsilon > 0$. Vrem $n_\varepsilon > 0$ a.î. $(\forall) n \geq n_\varepsilon$ să avem $\left|\frac{n^3}{n^3+2n^2+7n+4} - 1\right| < \varepsilon$ (2)

$$\left|\frac{n^3}{n^3+2n^2+7n+4} - 1\right| = \left|\frac{-2n^2-7n-4}{n^3+2n^2+7n+4}\right| < \frac{2n^2+7n+4}{n^3+2n^2+7n+4} < \frac{4}{n}$$

Vom cere ca $\frac{4}{n} < \varepsilon$ și atunci are loc și (2).

Din $\frac{4}{n} < \varepsilon \iff n > \frac{4}{\varepsilon}$. Luăm $n_\varepsilon = \left[\frac{4}{\varepsilon}\right] + 1$.

Concluzie: $(\forall)\varepsilon > 0$, $(\exists) n_\varepsilon := \left[\frac{4}{\varepsilon}\right] + 1$ a.î. $(\forall) n \geq n_\varepsilon \Rightarrow \left|\frac{n^3}{n^3+2n^2+7n+4} - 1\right| < \varepsilon$

Adică $\lim\limits_{n} \frac{n^3}{n^3+2n^2+7n+4} = 1$.

d) Fie $\varepsilon > 0$. Avem $\left|\frac{2^n+(-2)^n}{3^n}\right| < \frac{2^n+2^n}{3^n} = \frac{2^{n+1}}{3^n} < \varepsilon$

de unde $\left(\frac{2}{3}\right)^n < \frac{\varepsilon}{2}$. Deci $n \lg\frac{2}{3} < \lg\frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow n > \frac{\lg\frac{\varepsilon}{2}}{\lg\frac{2}{3}}$ $\left(\lg\frac{2}{3} < 0\right)$.

$n_\varepsilon = \left[\frac{\lg\frac{\varepsilon}{2}}{\lg\frac{2}{3}}\right] + 1$. Deci am găsit $n_\varepsilon > 0$ a.î. $(\forall) n \geq n_\varepsilon \Rightarrow \left|\frac{2^n+(-2)^n}{3^n}\right| < \varepsilon$

aceasta stabilește convergența șirului dat către zero.

(2) Folosind definiția arătați că dacă șirul $(x_n)_n \subseteq \mathbb{R}$ este convergent către $x \in \mathbb{R}$, atunci șirul $\left(\frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n}\right)_n$ este convergent tot către $x \in \mathbb{R}$.

<u>Soluție:</u>

Deoarece $\lim\limits_{n} x_n = x$, pentru $(\forall)\varepsilon > 0$ $(\exists) n_\varepsilon > 0$ a.î. $\|x_n - x\| < \varepsilon$

De asemenea, deoarece șirul $(x_n)_n$ este mărginit (pentru că e convergent) există $M \in \mathbb{R}$ a.î. $\|x_n - x\| < M$, $(\forall) n \in \mathbb{N}$

Avem:

$$\left\|\frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n}-x\right\| = \frac{\|(x_1-x)+(x_2-x)+\dots+(x_n-x)\|}{n} \le$$

$$\le \frac{\|(x_1-x)+\dots+(x_{n_\varepsilon}-x)\|}{n} + \frac{\|(x_{n_\varepsilon+1}-x)+\dots+(x_n-x)\|}{n} \le$$

$$\le n_\varepsilon \cdot \frac{M}{n} + \frac{n-n_\varepsilon}{n}\cdot\varepsilon \le n_\varepsilon\cdot\frac{M}{n}+\varepsilon \quad (1)$$

Deci $\left\|\frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n}-x\right\| \le n_\varepsilon\cdot\frac{M}{n}+\varepsilon$ $(\forall)\ n\ge n_\varepsilon$, $n\in\mathbb{N}$.

Cum $\lim\limits_n n_\varepsilon\cdot\frac{M}{n}=0 \Rightarrow (\exists)\ n_0\in\mathbb{N}$ a.î. $n_\varepsilon\cdot\frac{M}{n}<\varepsilon$ $(\forall)\ n\ge n_0$ (2).

Ca atare din (1) și (2) obținem că $\left\|\frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n}-x\right\|<2\varepsilon$ $(\forall)\ n\in\mathbb{N}$, $n\ge\max\{n_\varepsilon, n_0\}$.

Așadar $\lim\limits_n \frac{x_1+\dots+x_n}{n}=x$.

qed.

• Acum vom arăta că și șirul $\left(\frac{C_n^0x_0+C_n^1x_1+\dots+C_n^nx_n}{2^n}\right)_n$ converge tot la x (unde $\lim\limits_n x_n=x$).

Soluție:

Este binecunoscută identitatea $\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k=2^n$; $n\in\mathbb{N}$ (*).

Cum $x_n \xrightarrow{u} x \iff (\forall)\varepsilon>0\ (\exists)\ n_\varepsilon>0$ a.î. $(\forall)\ n\ge n_\varepsilon$ $\|x_n-x\|<\varepsilon$

Cum $(x_n)_n$ este mărginit $\Rightarrow (\exists)\ M>0$ a.î. $\|x_n-x\|<M$ $(\forall)\ n\in\mathbb{N}$

Avem $\left\|\frac{C_n^0x_0+C_n^1x_1+\dots+C_n^nx_n}{2^n}-x\right\| \overset{(*)}{=}$

$$\overset{(*)}{=} \left\|\frac{C_n^0(x_0-x)+C_n^1(x_1-x)+\dots+C_n^n(x_n-x)}{2^n}\right\| \le$$

$$\le \frac{\| C_n^0(x_0-x)+\dots+C_n^{n_\varepsilon}(x_{n_\varepsilon}-x)\|}{2^n} + \frac{\| C_n^{n_\varepsilon+1}(x_{n_\varepsilon+1}-x)+\dots+C_n^n(x_n-x)\|}{2^n}$$

$$\le M\cdot\frac{2^{n_\varepsilon}}{2^n} + \frac{2^n-2^{n_\varepsilon}}{2^n}\cdot\varepsilon \le M\cdot\frac{2^{n_\varepsilon}}{2^n}+\varepsilon$$

Așadar $\left\| \frac{C_n^0 x_0 + C_n^1 x_1 + \dots + C_n^n x_n}{2^n} - x \right\| \le M\cdot\frac{2^{n_\varepsilon}}{2^n} + \varepsilon$; $(\forall) n \ge n_\varepsilon$

Cum $\lim_n M\cdot\frac{2^{n_\varepsilon}}{2^n} = 0 \Rightarrow (\exists)\, n_0 \in \mathbb{N}$ a.î. $(\forall) n \ge n_0$ avem $M\cdot\frac{2^{n_\varepsilon}}{2^n} < \varepsilon$

Din ultimele două rânduri obținem $\left\| \frac{C_n^0 x_0 + C_n^1 x_1 + \dots + C_n^n x_n}{2^n} - x \right\| < 2\varepsilon$

adică concluzia.

qed.

③ a) Fie $(x_n)_n \subseteq \mathbb{R}$ a.î. $x_0 \in (0,1)$ și $x_{n+1} = x_n - x_n^2$

Calculați: i) $\lim_n x_n$

ii) $\lim_n n\cdot x_n$.

Soluție:

i) Deoarece $x_{n+1} - x_n = -x_n^2 \le 0$ $(\forall) n \in \mathbb{N}$ deducem că $(x_n)_n$ este descrescător.

Având în vedere relația $x_{n+1} = x_n(1-x_n)$, valabilă $(\forall) n \in \mathbb{N}$, utilizând metoda inducției matematice, se poate arăta că $x_n \in (0,1)$ $(\forall) n \in \mathbb{N}$

Prin urmare șirul $(x_n)_n$ este descrescător și cum este mărginit inferior de zero, rezultă că el este convergent.

Notând cu l - limita sa, prin trecere la limită în relația de recurență, obținem $l = l - l^2$ deci $l = 0$. Așadar $\lim_n x_n = 0$

ii) $\lim_n n x_n = (\text{cazul } 0\cdot\infty) = \lim_n \frac{n}{\frac{1}{x_n}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ (*)

Cum șirul $\left(\frac{1}{x_n}\right)_n$ este crescător și $\lim_n \frac{1}{x_n} = \infty$ putem aplica Lema lui Stolz-Cesàro (cazul $\frac{\infty}{\infty}$)

Așadar (*) devine $\lim_n \frac{n}{\frac{1}{x_n}} = \lim_n \frac{(n+1)-n}{\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n}} = \lim_n \frac{x_n x_{n+1}}{x_n - x_{n+1}}$

$= \lim_n \frac{x_n(x_n - x_n^2)}{x_n^2} = \lim_n (1-x_n) = 1$. Așadar $\lim_n n x_n = 1$.

b) Fie $(x_n)_n \subseteq \mathbb{R}$ a.î. $x_0 \in (0,1)$ și $x_{n+1} = x_n - x_n^3$

Calculați: i) $\lim_n x_n$

ii) $\lim_n \sqrt{n}\cdot x_n$

Soluție: i) Având în vedere relația $x_{n+1} = x_n(1-x_n^2)$ valabilă $(\forall) n \in \mathbb{N}$, folosind metoda inducției matematice obținem $x_n \in (0,1)$ $(\forall) n$.

Cum $x_{n+1} - x_n = -x_n^3 \leq 0$ $(\forall) n \in \mathbb{N}$ ($x_n \in (0,1)$ $(\forall) n$) găsim că șirul $(x_n)_n$ este descrescător.

Deoarece $(x_n)_n$ este descrescător și mărginit inferior de 0, conform Teoremei convergenței monotone avem că $(x_n)_n$ este convergent.

Notând l-limita sa și trecând la limită în relația de recurență găsim: $l = l - l^3 \Rightarrow l = 0$. Deci $\lim_n x_n = 0$.

ii) Deoarece $\lim_n \frac{(n+1)-n}{\frac{1}{x_{n+1}^2} - \frac{1}{x_n^2}} = \lim_n \frac{x_n^2 \cdot x_{n+1}^2}{(x_n - x_{n+1})(x_n + x_{n+1})} =$

$= \lim_n \frac{x_n^2 (x_n - x_n^3)^2}{x_n^3 (2x_n - x_n^3)} = \lim_n \frac{\cancel{x_n^4}(1-x_n^2)^2}{\cancel{x_n^4}(2-x_n^2)} = \frac{1}{2}$

obținem (cu ajutorul Lemei Stolz-Cesàro) că $\lim_n n x_n^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow \lim_n \sqrt{n}\, x_n = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

④ Să se studieze convergența șirului $(x_n)_n$, unde $x_0>0$ și $x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}$ $(\forall)\, n\geq 0$ și în caz de convergență să se precizeze limita sa.

Soluție: Presupunând că șirul $(x_n)_n$ este convergent, trecând la limită în relația de recurență avem: $l=\sqrt{2+l}$ unde $l=\lim_n x_n$, cu soluția $l=2$. Deci în eventualitatea convergenței, termenii șirului ar trebui să se „aglomereze" spre 2 (de la un rang încolo).

Se arată ușor (prin metoda inducției matematice) că $x_n>0$ $(\forall)\, n\geq 0$.

Distingem cazurile:

i) $x_0<2$ (deci $x_0\in(0,2)$)

Având în vedere relația $x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}<2$ valabilă $(\forall)\, n\geq 0$ utilizând metoda inducției matematice găsim că $x_n<2$ $(\forall)\, n\geq 0$ (i.e. șirul $(x_n)_n$ este mărginit superior de 2). (i.e $x_n\in(0,2)$).

Deoarece $x_{n+1}-x_n=\dfrac{2+x_n-x_n^2}{\sqrt{2+x_n}+x_n}$ folosind metoda inducției matematice găsim că șirul $(x_n)_n$ este strict crescător.

Prin urmare cum șirul $(x_n)_n$ este mărginit superior de 2 și este strict crescător, utilizând teorema convergenței monotone, concluzionăm că șirul $(x_n)_n$ este convergent și deci $\lim_n x_n=2$.

ii) $x_0>2$ (i.e $x_0\in(2,\infty)$)

În acest caz (procedând ca la i)) găsim $x_n>2$ $(\forall)\, n\geq 0$ și că șirul $(x_n)_n$ este strict descrescător. Prin urmare și în acest caz este convergent și $\lim_n x_n=2$.

iii) Dc $x_0=2$ atunci șirul $(x_n)_n$ este constant $x_n=2$ $(\forall)\, n\geq 0$ și deci $\lim_n x_n=2$.

5) Calculați următoarele limite:

a) $\lim\limits_n n(\sqrt[n]{n}-1)$; b) $\lim\limits_n \frac{1+2+\dots+n}{n^2}$; c) $\lim\limits_n \frac{1+\sqrt{2}+\dots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$

d) $\lim\limits_n \frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$; e) $\lim\limits_n \frac{1^p+2^p+\dots+n^p}{n^{p+1}}$; $p\in\mathbb{R}$, $p>-1$.

f) $\lim\limits_n n\sqrt{n}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}-2\sqrt{n})$. g) $\lim\limits_n (\sqrt[n+1]{(n+1)!}-\sqrt[n]{n!})$

Soluție:

a) $\lim\limits_n n(\sqrt[n]{n}-1)$

Notăm $x_n=\sqrt[n]{n}-1$; $n\geq 2$. Deoarece $\lim\limits_n \sqrt[n]{n}=\lim\limits_n \frac{n+1}{n}=1$.
avem că $\lim\limits_n x_n=0$. Din $x_n=\sqrt[n]{n}-1$; $n\geq 2$ avem $1+x_n=\sqrt[n]{n}$
sau $n=\frac{\ln n}{\ln(1+x_n)}$.

Avem: $\lim\limits_n n(\sqrt[n]{n}-1)=\lim\limits_n \frac{\ln n}{\ln(1+x_n)}\cdot x_n=\lim\limits_n \frac{\ln n}{\frac{\ln(1+x_n)}{x_n}}$

Cum $\lim\limits_n \frac{\ln(1+x_n)}{x_n}=1$. ($x_n \xrightarrow{n} 0$); $\lim\limits_n \ln n=\infty$

Prin urmare $\lim\limits_n n(\sqrt[n]{n}-1)=\infty$

b) $\lim\limits_n \frac{1+2+\dots+n}{n^2}=?$

Varianta 1: Știm $1+2+\dots+n=\frac{n(n+1)}{2}$ $(\forall)\, n\geq 1$.

Avem $\lim\limits_n \frac{1+2+\dots+n}{n^2}=\lim\limits_n \frac{n(n+1)}{2n^2}=\frac{1}{2}$

Varianta 2: Notăm $x_n=1+2+\dots+n$ $(\forall)\, n\geq 1$; $y_n=n^2$
Cum $\lim\limits_n y_n=\infty$ și este strict crescătoare; ne situăm în condițiile lemei Stolz-Cesaro (cazul $\frac{\infty}{\infty}$)

Deci: $\lim\limits_n \frac{1+2+\dots+n}{n^2}=\lim\limits_n \frac{n+1}{n^2+2n+1-n^2}=\lim\limits_n \frac{n+1}{2n+1}=\frac{1}{2}$

d) $\lim\limits_n \frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}=?$

Clar: $\sqrt{k+1}-\sqrt{k}>0$ $(\forall)\, k\geq 1 \iff \sqrt{k+1}+\sqrt{k}>2\sqrt{k}$, $(\forall)\, k\geq 1$.

$\iff 2(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})<\frac{1}{\sqrt{k}}$ $(\forall)\, k\geq 1$. $(*)$

• $\sqrt{k+1}-\sqrt{k}>0 \ (\forall) k\geq 1 \iff 2\sqrt{k+1}>\sqrt{k+1}+\sqrt{k} \ (\forall) k\geq 1$

$\iff \dfrac{1}{\sqrt{k+1}}<2(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}); \ (\forall) k\geq 1 \quad (**)$

Din $(*)$ obținem: $2(\sqrt{n+1}-1)<1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dots+\dfrac{1}{\sqrt{n}} \quad (\forall) n\geq 1. \ (1)$

Din $(**)$ obținem: $\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\dots+\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}<2(\sqrt{n+1}-1) \quad (\forall) n\geq 1.$

$\iff 1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dots+\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}<2\left(\sqrt{n+1}-\dfrac{1}{2}\right) \quad (\forall) n\geq 1$

$\iff 1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}<2\left(\sqrt{n}-\dfrac{1}{2}\right) \quad (\forall) n\geq 1. \quad (2)$

Din (1) și (2) obținem:

$$2(\sqrt{n+1}-1)<1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\left(\sqrt{n}-\frac{1}{2}\right); \ (\forall) n\geq 1. \quad (\bigstar)$$

De aici: $\dfrac{2(\sqrt{n+1}-1)}{\sqrt{n}}<\dfrac{1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}<\dfrac{2\sqrt{n}-1}{\sqrt{n}}; \ (\forall) n\geq 1.$

Însă: $\lim\limits_{n}\dfrac{2\sqrt{n+1}-2}{\sqrt{n}}=\lim\limits_{n}\dfrac{2\sqrt{n}-1}{\sqrt{n}}=2$

Concluzionăm că: $\lim\limits_{n}\dfrac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}=2.$

Altfel: Notăm $x_n=1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\xrightarrow{n}\infty$ (vezi $(\bigstar)$)

$y_n=\sqrt{n}\xrightarrow{n}\infty$ și este strict crescător, folosind lema Stolz-Cesaro (cazul $\frac{\infty}{\infty}$) obținem: $\lim\limits_{n}\dfrac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}=\lim\limits_{n}\dfrac{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}=$

$=\lim\limits_{n}\dfrac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}=2.$

Temă: Calculați $\lim\limits_{n}\dfrac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n}}}{n^{\alpha}}, \ \alpha\in\mathbb{R}.$

c) $\lim\limits_{n}\dfrac{1+\sqrt{2}+\dots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}=?$

Fie $x_n=1+\sqrt{2}+\dots+\sqrt{n}\xrightarrow{n}\infty$, $y_n=n\sqrt{n}\xrightarrow{n}\infty$ ($(y_n)_n$ este strict cresc.

Din lema lui Stolz-Cesaro $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ avem: $\lim\limits_{n}\dfrac{\sqrt{n+1}}{(n+1)\sqrt{n+1}-n\sqrt{n}}=$

$=\lim\limits_{n}\dfrac{(n+1)^{\frac{1}{2}}}{(n+1)^{\frac{3}{2}}-n^{\frac{3}{2}}}=\lim\limits_{n}\dfrac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{3}{2}}-1\right]n}=\dfrac{1}{\frac{3}{2}}=\dfrac{2}{3}$ $\left(\lim\limits_{n}\dfrac{(1+x_n)^{\alpha}-1}{x_n}=\alpha, \ x_n\xrightarrow{n}0\right)$

e.) $\lim\limits_{n} \dfrac{1^p+2^p+\dots+n^p}{n^{p+1}}$; $p\in\mathbb{R}$; $p>-1$.

Punem: $x_n = 1+2^p+\dots+n^p$, $y_n = n^{p+1}$ $(n\geq 1)$.

Deoarece ne situăm în condițiile lemei Stolz-Cesaro (cazul $\frac{\infty}{\infty}$)

avem: $\lim\limits_{n} \dfrac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} = \lim\limits_{n} \dfrac{(n+1)^p}{(n+1)^{p+1}-n^{p+1}}$ $(*)$.

Dacă $p\in\mathbb{N}$, folosind binomul lui Newton avem:

$$(*) = \lim_{n} \frac{C_p^0 n^p + C_p^1 n^{p-1} + C_p^2 n^{p-2} + \dots + C_p^p}{\cancel{C_{p+1}^0 n^{p+1}} + C_{p+1}^1 n^p + C_{p+1}^2 n^{p-1} + \dots + C_{p+1}^{p+1} - \cancel{C_{p+1}^0 n^{p+1}}}$$

$$= \frac{C_p^0}{C_{p+1}^1} = \frac{1}{p+1}$$

Dacă $p\in\mathbb{R}$ atunci avem:

$$\lim_{n} \frac{(n+1)^p}{(n+1)^{p+1}-n^{p+1}} = \lim_{n} \frac{\cancel{n^p}\left(1+\frac{1}{n}\right)^p}{\cancel{n^{p+1}}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{p+1}-1\right]} = \lim_{n} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^p}{n\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{p+1}-1\right]}$$

$= \dfrac{1}{p+1}$. (Am folosit limita remarcabilă: $\lim\limits_{n} n\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^p-1\right] = p$

și $\lim\limits_{n} \dfrac{(1+x_n)^p-1}{x_n} = p$, unde $x_n \xrightarrow{n} 0$)

Așadar $\lim\limits_{n} \dfrac{1^p+2^p+\dots+n^p}{n^{p+1}} = \dfrac{1}{p+1}$ $(\forall)\, p\in\mathbb{R}$; $p>-1$.

<u>obs</u>: Pentru $p=\frac{1}{2}$ se obține subpunctul c).

O altă metodă este următoarea:

Notăm $x_n = \dfrac{1^p+2^p+\dots+n^p}{n^{p+1}}$, $n\geq 1$, șir pe care îl scriem

sub forma: $x_n = \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} k^p}{n^{p+1}} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\dfrac{k}{n}\right)^p$. Punând $\frac{k}{n}=x$

se ia funcția $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ $f(x)=x^p$ (sugerată de forma

termenului general al sumei). Această funcție fiind continuă

pe $[0,1]$ este integrabilă

Considerăm șirul de diviziuni echidistante ale intervalului $[0,1]$.

$\Delta_n = \left(0 < \frac{1}{n} < \frac{2}{n} < \dots < \frac{n}{n} = 1\right)$ cu $\|\Delta_n\| = \frac{1}{n} \xrightarrow{n} 0$

și punctele intermediare $\xi_1 = \frac{1}{n} \in [0, \frac{1}{n}]$ (pentru $k=1$)

$\xi_2 = \frac{2}{n} \in [\frac{1}{n}, \frac{2}{n}]$ (pentru $k=2$), ..., $\xi_n = 1 \in [\frac{n-1}{n}, 1]$ ($k=n$)

Atunci suma Riemann asociată lui f relativ la Δ_n și sistemul de puncte intermediare este:

$$x_n = \sigma_{\Delta_n}(f, \xi_k) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow{n} \int_0^1 x^p dx =$$

$$= \frac{x^{p+1}}{p+1}\Big|_0^1 = \frac{1}{p+1}.$$ Prin urmare: $\lim_n x_n = \frac{1}{p+1}$.

Altfel: Considerăm funcția $f: [k, k+1] \to \mathbb{R}$ $f(x) = x^{p+1}$.

Deoarece f este continuă pe $[k, k+1]$, derivabilă pe $(k, k+1)$, atunci conform Teoremei lui Lagrange $(\exists)$ $c \in (k, k+1)$ a.î. $f(k+1) - f(k) = (p+1)c^p$ obținem:

$$(p+1) k^p < (k+1)^{p+1} - k^{p+1} < (p+1)(k+1)^p \quad , k = \overline{1, n-1}$$

Adunând relațiile pentru $k = \overline{1, n-1}$ găsim:

$$(p+1)(1^p + 2^p + \dots + (n-1)^p) < n^{p+1} - 1 < (p+1)(2^p + 3^p + \dots + n^p)$$ sau

$$(*)\ (p+1)(1^p + 2^p + \dots + n^p) - (p+1) n^p < n^{p+1} - 1 < (p+1)(1^p + 2^p + \dots + n^p) - (p+1).$$

$n \geq 1$, $n \in \mathbb{N}$.

După unele calcule asupra relației $(*)$ ajungem la:

$$\frac{1}{n^{p+1}} + \frac{1}{p+1} - \frac{1}{(p+1) n^{p+1}} < \frac{1^p + 2^p + \dots + n^p}{n^{p+1}} < \frac{n^p}{n^{p+1}} + \frac{1}{p+1} - \frac{1}{(p+1) n^{p+1}}$$

$(\forall) n \geq 1$.

Trecând la limită după $n \to \infty$ obținem din nou că:

$$\lim_n \frac{1^p + 2^p + \dots + n^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1}, \ p > -1, \ p \in \mathbb{R}.$$

f) $\lim\limits_{n} n\sqrt{n}\,(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}-2\sqrt{n}) = ?$

Avem: $\lim\limits_{n} n\sqrt{n}\,(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}+\sqrt{n-1}-\sqrt{n}) =$

$$=\lim_{n} n\sqrt{n}\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}\right)=$$

$$=\lim_{n} n\sqrt{n}\cdot\frac{\sqrt{n-1}+\cancel{\sqrt{n}}-\sqrt{n+1}-\cancel{\sqrt{n}}}{(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})(\sqrt{n-1}+\sqrt{n})}=$$

$$=\lim_{n}\frac{n\sqrt{n}\,(\sqrt{n-1}-\sqrt{n+1})}{(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})(\sqrt{n-1}+\sqrt{n})}=\lim_{n}\frac{-2n\sqrt{n}}{(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})(\sqrt{n-1}+\sqrt{n})(\sqrt{n-1}+\sqrt{n+1})}$$

$$=\lim_{n}\frac{-2\cancel{n\sqrt{n}}}{\cancel{n\sqrt{n}}\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)\left(\sqrt{1-\frac{1}{n}}+1\right)\left(\sqrt{1-\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)}=-\frac{1}{4}.$$

g) $\lim\limits_{n}\left(\sqrt[n+1]{(n+1)!}-\sqrt[n]{n!}\right)=?$ (Traian Lalescu).

Afirmația 1: $\lim\limits_{n}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\frac{1}{e}$.

Deoarece $\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}$ și $\lim\limits_{n}\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{n!}=\lim\limits_{n}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{1}{e}$.

deducem $\lim\limits_{n}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\frac{1}{e}$.

Afirmația 2: $\lim\limits_{n}\frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{\sqrt[n]{n!}}=1$.

Deoarece $\frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{\sqrt[n]{n!}}=\frac{\frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{n+1}}{\frac{\sqrt[n]{n!}}{n!}}\cdot\frac{n+1}{n}$, utilizând afirmația 1

deducem $\lim\limits_{n}\frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{\sqrt[n]{n!}}=1$.

Afirmația 3 $\frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{\sqrt[n]{n!}}=\left(\frac{\frac{n+1}{n}}{\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}}\right)^{\frac{1}{n+1}}$

În adevăr avem: $\frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{\sqrt[n]{n!}}=\frac{((n+1)!)^{\frac{1}{n+1}}}{(n!)^{\frac{1}{n}}}=\frac{((n+1)!)^{\frac{1}{n+1}}}{\left((n!)^{\frac{n+1}{n}}\right)^{\frac{1}{n+1}}}=$

$$=\left(\frac{\overset{n+1}{\cancel{(n+1)!}}}{\cancel{n!}\,(n!)^{\frac{1}{n}}}\right)^{\frac{1}{n+1}}=\left(\frac{n+1}{(n!)^{\frac{1}{n}}}\right)^{\frac{1}{n+1}}=\left(\frac{\frac{n+1}{n}}{\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}}\right)^{\frac{1}{n+1}}$$

Acum suntem pregătiți să arătăm că:

$$\lim_n \left(\sqrt[n+1]{(n+1)!} - \sqrt[n]{n!}\right) = \frac{1}{e}.$$

Notăm: $x_n = \dfrac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{\sqrt[n]{n!}} - 1$. Conform afirmația 1. $x_n \xrightarrow{n} 0$

Deci $\lim_n \dfrac{\ln(1+x_n)}{x_n} = 1$.

Din afirmația 3 avem: $\ln(1+x_n) = \ln \dfrac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{\sqrt[n]{n!}} = \dfrac{1}{n+1} \ln \dfrac{\frac{n+1}{n}}{\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}}$

de unde: $n \ln(1+x_n) = \lim_n \dfrac{n}{n+1} \ln \dfrac{\frac{n+1}{n}}{\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}} = \lim_n \dfrac{n}{n+1}\Big(\ln \underbrace{\frac{n+1}{n}}_{\to 1} - \ln \underbrace{\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}}_{\to \frac{1}{e}}\Big)$

$= -\ln \dfrac{1}{e} = 1.$

Prin urmare $\sqrt[n+1]{(n+1)!} - \sqrt[n]{n!} = \sqrt[n]{n!}\, x_n = \underbrace{\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}}_{\to \frac{1}{e}} \cdot \underbrace{n \cdot \ln(1+x_n)}_{\to 1} \cdot \underbrace{\dfrac{1}{\frac{\ln(1+x_n)}{x_n}}}_{\to 1}$

$$\lim_n \left(\sqrt[n+1]{(n+1)!} - \sqrt[n]{n!}\right) = \frac{1}{e}.$$

<u>Alte exerciții</u>

a) $\lim_n \sqrt[n]{n!} = ?$

Fie $(a_n)_{n \geq 1}$ un șir de numere reale strict pozitive, cu proprietatea că există $\lim_n \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = L \in \overline{\mathbb{R}}$. Atunci $\lim_n \sqrt[n]{a_n} = L$.

<u>Dem</u>: Punem $y_n = \sqrt[n]{a_n} \Rightarrow \ln y_n = \dfrac{\ln a_n}{n}$ qed.

Cum $\lim_n \dfrac{(n+1)!}{n!} = \lim_n (n+1) = \infty \Rightarrow \lim_n \sqrt[n]{n!} = \infty$.

b) $\lim_n \dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \lim_n \sqrt[n]{\dfrac{n!}{n^n}}$

Deoarece $\lim_n \dfrac{\cancel{(n+1)!}^{\,n+1}}{(n+1)^{\cancel{n+1}}} \cdot \dfrac{n^n}{\cancel{n!}} = \lim_n \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n = \lim_n \left(1 + \dfrac{-1}{n+1}\right)^n$

$= \lim_n \left[\left(1 + \dfrac{-1}{n+1}\right)^{-(n+1)}\right]^{\frac{n}{-(n+1)}} = \dfrac{1}{e} \Rightarrow \lim_n \dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \dfrac{1}{e}.$

Exerciții

1. Să se arate că următoarele șiruri sunt convergente

a) $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n$.

b) $a_n = \frac{1}{2\ln 2} + \frac{1}{3\ln 3} + \dots + \frac{1}{n\ln n} - \ln(\ln n)$.

c) $a_n = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \dots + \frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} \cdot n^{1-\alpha}$, $\alpha \in (0,1)$.

d) $a_n = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \dots + \frac{1}{n^\alpha}$; $\alpha > 1$.

Mai întâi să arătăm că:

(2) Fie $f: [1, \infty) \to \mathbb{R}$ o funcție descrescătoare și mărginită inferior. Să se arate că șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ de termen general

$$a_n = f(1) + f(2) + \dots + f(n) - \int_1^n f(x)\,dx \ ; \ n \geq 1.$$

este convergent.

Soluție:

Studiem monotonia lui $(a_n)_{n\geq 1}$. Avem

$$a_{n+1} - a_n = f(n+1) - \int_1^{n+1} f(x)\,dx + \int_1^n f(x)\,dx =$$

$$= f(n+1) - \cancel{\int_1^n f(x)\,dx} - \int_n^{n+1} f(x)\,dx + \cancel{\int_1^n f(x)\,dx} = \int_n^{n+1} (f(n+1) - f(x))\,dx \leq 0$$

Ținând seama că f este descrescătoare. Rezultă că $(a_n)_n$ este descrescător.

Demonstrăm acum că $(a_n)_n$ este mărginit inferior.

Avem: $a_n = \left(f(1) - \int_1^2 f(x)\,dx\right) + \left(f(2) - \int_2^3 f(x)\,dx\right) + \dots +$

$$+\left(f(n-1)-\int_{n-1}^{n} f(x)\,dx\right)+f(n) = \int_{1}^{2}(f(1)-f(x))dx+\int_{2}^{3}(f(2)-f(x))dx+$$

$$+\dots+\int_{n-1}^{n}(f(n-1)-f(x))\,dx+f(n),$$

de unde rezultă că $(c_n)_{n\geq 1}$ este mărginit inferior, ținând seama de monotonia f și de faptul că f este mărginită inferior.

Prin urmare șirul $(c_n)_n$ este convergent, folosind teorema convergenței monotone.

qed.

Revenim la Ex 1.

a) Luăm în Ex 2. $f:[1,\infty)\to\mathbb{R}$; $f(x)=\frac{1}{x}$.

b) Luăm în Ex 2 : $f:[2,\infty)\to\mathbb{R}$ $f(x)=\frac{1}{x\ln x}$.

c) Luăm $f:[1,\infty)\to\mathbb{R}$ $f(x)=\frac{1}{x^\alpha}$.

d) Luăm $f:[1,\infty)\to\mathbb{R}$ $f(x)=\frac{1}{x^\alpha}$.

Ex 3 Să se calculeze $\lim_{n}\left(e^{1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n+1}}-e^{1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}}\right)$

Soluție: Notăm $(c_n)_n$ șirul din ex. 1 punctul a).

$c_n=1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}-\ln n$. Am văzut mai sus că $(c_n)_n$ este convergent

$c_n \xrightarrow{n} c \simeq 0,577\dots$ (constanta lui Euler. Nu se știe la ora actuală dacă este algebric sau transcendent).

Notăm $a_n = e^{1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n+1}}-e^{1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}}$ $\forall\, n\geq 1$.

Avem $a_n = e^{1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}}\left(e^{\frac{1}{n+1}}-1\right) = e^{c_n+\ln n}\left(e^{\frac{1}{n+1}}-1\right)=$

$$= e^{c_n} \cdot \frac{n}{n+1} \cdot \frac{e^{\frac{1}{n+1}} - 1}{\frac{1}{n+1}} \xrightarrow{n\to\infty} e^{c}$$

$\frac{n}{n+1} \to 1$; $\frac{e^{\frac{1}{n+1}} - 1}{\frac{1}{n+1}} \to \ln e = 1$.

Prin urmare $\lim_n \left(e^{1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n+1}} - e^{1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}}\right) = e^{c}$

Ex 4. Calculați a) $\lim_n \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}\right)$.

b) $\lim_n n\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} - \ln 2\right)$.

Soluție:

Fie $c_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n$, $n \geq 0$. Avem:

$$x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} = c_{2n} - c_n + \ln 2n - \ln n =$$

$= c_{2n} - c_n + \ln 2$. De unde prin trecere la limită obținem că $\lim_n x_n = \ln 2$

b). Fie $y_n = \dfrac{\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} - \ln 2}{\frac{1}{n}}$; $n \geq 1$.

$a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} - \ln 2$; $b_n = \frac{1}{n}$.

Cum $a_n \xrightarrow{n} 0$ vezi punctul a).

$b_n \xrightarrow{n} 0$; $(b_n)_n$ este strict monoton.

Putem aplica Lema lui Stolz-Cesaro (cazul $\frac{0}{0}$).

Avem $\lim_n \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \lim_n \frac{-\frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}}{\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}} = -\frac{1}{4}$.

Deci $\lim_n y_n = -\frac{1}{4}$.