Curs 15

Teoremă (Teorema funcțiilor implicite - cazul general). Fie $D \subset \mathbb{R}^{m+n}$ o mulțime deschisă, $(x^0, y^0) \in D$, $x^0 = (x_1^0, \dots, x_m^0)$, $y^0 = (y_1^0, \dots, y_n^0)$ și $F : D \to \mathbb{R}^n$, $F = (F_1, \dots, F_n)$ cu proprietățile:

1) $F(x^0, y^0) = 0_{\mathbb{R}^n} = (\underbrace{0, \dots, 0}_{\text{de } n \text{ ori}})$.

2) $F_1, \dots, F_n$ sunt funcții de clasă C^1.

3) $$\frac{D(F_1, \dots, F_n)}{D(y_1, \dots, y_n)}(x^0, y^0) \overset{\text{def.}}{=} \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(x^0, y^0) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_n}(x^0, y^0) \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1}(x^0, y^0) & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial y_n}(x^0, y^0) \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F_n}{\partial y_1}(x^0, y^0) & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial y_n}(x^0, y^0) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Atunci există U o vecinătate deschisă a lui x^0, există V o vecinătate deschisă a lui y^0 și există o unică funcție $f : U \to V$, $f = (f_1, \dots, f_n)$ astfel încât:

a) $f(x^0)=y^0$.

b) $F(x,f(x))=0_{\mathbb{R}^n}$ $\forall x\in U$.

c) $f_1,\dots,f_n$ sunt funcții de clasă C^1 și

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_i}(x)=-\frac{\dfrac{D(F_1,F_2,\dots,F_n)}{D(x_i,y_2,\dots,y_n)}(x,f(x))}{\dfrac{D(F_1,F_2,\dots,F_n)}{D(y_1,y_2,\dots,y_n)}(x,f(x))}\quad \forall x\in U,\ \forall i=\overline{1,m},$$

....

$$\frac{\partial f_n}{\partial x_i}(x)=-\frac{\dfrac{D(F_1,\dots,F_{n-1},F_n)}{D(y_1,\dots,y_{n-1},x_i)}(x,f(x))}{\dfrac{D(F_1,\dots,F_{n-1},F_n)}{D(y_1,\dots,y_{n-1},y_n)}(x,f(x))}\quad \forall x\in U,\ \forall i=\overline{1,m}.$$

Extreme cu legături

Fie $f:E\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $A\subset E$ și $a\in A$.

Definiție. 1) Spunem că a este punct de minim (respectiv maxim) local al funcției f relativ la mulțimea A dacă există $V\in\mathcal{V}_a$ a.î. $f(x)\geq f(a)$ (respectiv $f(x)\leq f(a)$) $\forall x\in V\cap A$.

2) Spunem că a este punct de extrem local al funcției f relativ la mulțimea A dacă

este punct de minim sau de maxim local al funcției f relativ la mulțimea A.

Observație. Dacă $A = E$ se omite sintagma „relativ la A".

Denumire alternativă. Punctele de extrem local ale lui f relative la mulțimea A se numesc și puncte de extrem local ale lui f condiționate de mulțimea A.

Fie $1 \leq k < n$, $g_1, \dots, g_k : E \to \mathbb{R}$ și sistemul

$$(1) \begin{cases} g_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ g_2(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ g_k(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$$

Fie $A = \{x \in E \mid g_1(x) = g_2(x) = \dots = g_k(x) = 0\}$.

Definiție. Punctele de extrem local ale funcției f condiționate de mulțimea A se numesc, în acest caz, puncte de extrem local ale funcției f

cu legăturile $g_1(x)=0, g_2(x)=0, \dots, g_k(x)=0$.

Teorema următoare dă condiții necesare de existență pentru punctele de extrem local cu legături.

Teoremă (Teorema multiplicatorilor lui Lagrange).

Fie $a \in A$ (i.e. verifică sistemul (1)). Presupunem că funcția f și funcțiile $g_1, \dots, g_k$ au derivate parțiale continue pe o vecinătate V a lui a și că matricea $\left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(a)\right)_{\substack{1 \le i \le k \\ 1 \le j \le n}}$ are rangul k (egal cu numărul ecuațiilor sistemului (1)).

Dacă a este punct de extrem local al funcției f condiționat de A, atunci există $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ a.î.

$$(2)\quad \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_1}(a) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x_2}(a) = 0 \\ \dots\dots\dots \\ \frac{\partial L}{\partial x_n}(a) = 0, \end{cases}$$

unde $L: E \to \mathbb{R}$, $L(x) = f(x) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i g_i(x)$.

Definiție. 1) Orice punct $a = (a_1, \dots, a_n) \in E$ care verifică sistemul (1) (i.e. $a \in A$), cu proprietatea că $\operatorname{rang}\left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(a)\right)_{\substack{1 \le i \le k \\ 1 \le j \le n}} = k$ și care verifică și sistemul (2) pentru anumite valori $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ se numește punct staționar al funcției f condiționat de A (sau cu legăturile $g_1(x) = 0$, $g_2(x) = 0$, …, $g_n(x) = 0$).

2) Coeficienții $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ de mai sus se numesc multiplicatorii lui Lagrange.

3) Funcția L se numește lagrangeianul problemei de extrem.

Observație. Valorile $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ se schimbă o dată cu punctul staționar a.

Observație. Teorema anterioară se poate enunța astfel: „Orice punct de extrem local condiționat este punct staționar condiționat".

Observație. Reciproca acestei afirmații nu este, în general, adevărată, i.e. există puncte staționare condiționate care nu sunt puncte de extrem local condiționate.

Algoritm pentru determinarea punctelor staționare condiționate

Presupunem că E este mulțime deschisă și că funcțiile $f, g_1, \ldots, g_k$ au derivate parțiale continue pe E.

1. Se consideră funcția $L: E \to \mathbb{R}$, $L(x) = f(x) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i g_i(x)$ (cu $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ nedeterminați).

2. Se formează sistemul cu $n+k$ ecuații, $n+k$ necunoscute $(x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_k)$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1}(x) = 0. \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2}(x) = 0. \\ \dots\dots\dots \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_n}(x) = 0. \\ g_1(x) = 0. \\ \dots\dots\dots \\ g_k(x) = 0. \end{cases}$$

și se caută soluțiile acestuia.

3) Dacă $(a_1, \dots, a_n, \lambda_1, \dots, \lambda_k)$ este o soluție a sistemului de la 2), atunci $(a_1, \dots, a_n)$ este punct staționar al lui f condiționat de A.

<u>Observație.</u> Printre aceste puncte staționare condiționate se pot afla și punctele de extrem local condiționate.

Vom căuta acum condiții suficiente care să ne permită să identificăm, dintre punctele staționare

nare condiționate, pe acelea care sunt puncte de extrem local condiționate.

Fie $a=(a_1,\dots,a_n)$ un punct staționar al lui f condiționat de A. Aceasta înseamnă, pe de o parte, că $g_1(a)=0,\dots,g_k(a)=0$, iar pe de altă parte, că există k numere reale $\lambda_1,\dots,\lambda_k$ a.î. să fie satisfăcut sistemul (2).

Presupunem că lagrangeianul L admite derivate parțiale de ordinul doi pe o vecinătate a lui a și că acestea sunt continue în a.

Diferențiem relațiile sistemului (1) în a și obținem:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g_1}{\partial x_1}(a)dx_1+\dots+\dfrac{\partial g_1}{\partial x_n}(a)dx_n=0. \\ \dfrac{\partial g_2}{\partial x_1}(a)dx_1+\dots+\dfrac{\partial g_2}{\partial x_n}(a)dx_n=0. \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{\partial g_k}{\partial x_1}(a)dx_1+\dots+\dfrac{\partial g_k}{\partial x_n}(a)dx_n=0. \end{cases}$$

Deoarece matricea acestui sistem liniar este $\left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(a)\right)_{\substack{1\le i\le k\\ 1\le j\le n}}$, care are rangul k, se pot exprima k diferențiale în funcție de celelalte $n-k$.

Presupunem că $\frac{D(g_1,\dots,g_k)}{D(x_{n-k+1},\dots,x_n)}(a) \overset{\text{def.}}{=}$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_{n-k+1}}(a) & \dots\dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n}(a) \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_{n-k+1}}(a) & \dots\dots & \frac{\partial g_2}{\partial x_n}(a) \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial g_k}{\partial x_{n-k+1}}(a) & \dots\dots & \frac{\partial g_k}{\partial x_n}(a) \end{vmatrix} \neq 0,$$ deci putem

exprima $dx_{n-k+1},\dots,dx_n$ în funcție de $dx_1,\dots,dx_{n-k}$.

Putem scrie

$$(*)\quad \begin{cases} dx_{n-k+1} = \sum_{i=1}^{n-k} \theta_i^1\, dx_i. \\ \dots\dots\dots\dots \\ dx_n = \sum_{i=1}^{n-k} \theta_i^k\, dx_i. \end{cases}$$

Reamintim că $d^2L(a): \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$d^2L(a)(\underset{\substack{\| \\ (u_1,\dots,u_n)}}{u}, \underset{\substack{\| \\ (v_1,\dots,v_n)}}{v}) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j}(a)\, u_i v_j.$$

Putem scrie $d^2L(a) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j}(a)\, dx_i\, dx_j$.

Înlocuim în expresia lui $d^2L(a)$, dx_{n-k+1}, $dx_{n-k+2}, \dots, dx_n$ cu relațiile $(*)$ și considerăm $d^2L(a)_{leg} = \sum\limits_{i,j=1}^{n-k} A_{ij}\, dx_i\, dx_j$, unde A_{ij} rezultă din calcul ($d^2L(a)_{leg}: \mathbb{R}^{n-k} \times \mathbb{R}^{n-k} \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$d^2L(a)_{leg}(\underset{\substack{\| \\ (u_1,\dots,u_{n-k})}}{u}, \underset{\substack{\| \\ (v_1,\dots,v_{n-k})}}{v}) = \sum_{i,j=1}^{n-k} A_{ij}\, u_i v_j).$$

1) Dacă $d^2L(a)_{leg}$ este pozitiv definită (i.e. $d^2L(a)_{leg}(u,u) \geq 0$ $\forall u \in \mathbb{R}^{n-k}$ și $d^2L(a)_{leg}(u,u) = 0$ dacă și numai dacă $u = 0_{\mathbb{R}^{n-k}}$), atunci a este punct de minim local al lui f condi-

ționat de A.

2) Dacă $d^2L(a)_{leg}$ este negativ definită (i.e. $d^2L(a)_{leg}(u,u) \leq 0 \ \forall u \in \mathbb{R}^{n-k}$ și $d^2L(a)_{leg}(u,u) = 0$ dacă și numai dacă $u = 0_{\mathbb{R}^{n-k}}$), atunci a este punct de maxim local al lui f condiționat de A.

Observatie. Deoarece, conform algoritmului de mai sus, avem nevoie doar de $d^2L(a)_{leg}(u,u)$ și nu de $d^2L(a)_{leg}(u,v)$ (de aici rezultă că avem nevoie doar de $d^2L(a)(u,u)$ și nu de $d^2L(a)(u,v)$), în toate exercițiile, vom calcula doar $d^2L(a)(u,u)$ și $d^2L(a)_{leg}(u,u)$, adică mereu $dx_i\, dx_j = dx_j\, dx_i$ $\forall i,j \in \{1,\dots,n\}$.

Exercitiu. Fie $f: \underbrace{(0,\infty)\times(0,\infty)\times(0,\infty)}_{=(0,\infty)^3} \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = xy + xz + yz$. Să se determine punctele de extrem local ale funcției f cu legătura $xyz = 1$.

Soluție. Determinăm punctele staționare condiționate ale lui f.

$E = (0,\infty)^3$ deschisă.

Fie $g: E \to \mathbb{R}$, $g(x,y,z) = xyz - 1$ $(g = g_1)$ și

$A = \{(x,y,z) \in E \mid g(x,y,z) = 0\}$.

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = y + z \quad \forall (x,y,z) \in E$.

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = x+z \quad \forall (x,y,z)\in E.$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = x+y \quad \forall (x,y,z)\in E.$$

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y,z) = yz \quad \forall (x,y,z)\in E.$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y,z) = xz \quad \forall (x,y,z)\in E.$$

$$\frac{\partial g}{\partial z}(x,y,z) = xy \quad \forall (x,y,z)\in E.$$

$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}, \frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial z}$ continue pe E.

$$\operatorname{rang}\left(\frac{\partial g}{\partial x}(x,y,z) \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x,y,z) \quad \frac{\partial g}{\partial z}(x,y,z)\right) =$$

$$= \operatorname{rang}\left(yz \quad xz \quad xy\right) = 1 \quad \forall (x,y,z)\in E.$$

Fie $L : E \to \mathbb{R}$, $L(x,y,z) = f(x,y,z) + \lambda g(x,y,z) =$

$= xy + xz + yz + \lambda(xyz - 1)$.

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x}(x,y,z) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y}(x,y,z) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial z}(x,y,z) = 0 \\ g(x,y,z) = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y+z+\lambda yz = 0 \\ x+z+\lambda xz = 0 \\ x+y+\lambda xy = 0 \\ xyz = 1. \end{cases}$$

Scădem prima ecuație din a doua și obținem:

$x-y+\lambda z(x-y)=0 \Leftrightarrow (x-y)(1+\lambda z)=0 \Leftrightarrow x=y$ sau $\lambda z=-1$.

<u>Cazul 1.</u> $x=y$

$x+y+\lambda xy=0 \Leftrightarrow 2x+\lambda x^2=0 \Leftrightarrow x(2+\lambda x)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lambda x=-2 \Leftrightarrow x=-\frac{2}{\lambda}$.

$\uparrow$

$x\in(0,\infty)$

Deoarece $x=y$ rezultă că $y=-\frac{2}{\lambda}$.

$y+z+\lambda yz=0 \Leftrightarrow -\frac{2}{\lambda}+z+\cancel{\lambda}\left(-\frac{2}{\cancel{\lambda}}\right)z=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\frac{2}{\lambda}+z-2z=0 \Leftrightarrow z=-\frac{2}{\lambda}$.

$xyz=1 \Leftrightarrow -\frac{8}{\lambda^3}=1 \Leftrightarrow \lambda=-2$.

Deci $x=y=z=1$.

<u>Cazul 2.</u> $\lambda z=-1$.

$\lambda z=-1 \Leftrightarrow z=-\frac{1}{\lambda}$.

$x+z+\lambda xz=0 \Leftrightarrow x-\frac{1}{\lambda}+\cancel{\lambda}x\left(-\frac{1}{\cancel{\lambda}}\right)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cancel{x}-\frac{1}{\lambda}-\cancel{x}=0 \Leftrightarrow -\frac{1}{\lambda}=0$, contradicție.

Singurul punct staționar al funcției f cu legătura $g(x,y,z)=0$ este $(1,1,1)$.

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(x,y,z)=0 \quad \forall (x,y,z)\in E$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(x,y,z)=0 \quad \forall (x,y,z)\in E$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial z^2}(x,y,z)=0 \quad \forall (x,y,z)\in E.$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x\partial y}(x,y,z)=1-2z=\frac{\partial^2 L}{\partial y\partial x}(x,y,z) \quad \forall (x,y,z)\in E.$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x\partial z}(x,y,z)=1-2y=\frac{\partial^2 L}{\partial z\partial x}(x,y,z) \quad \forall (x,y,z)\in E.$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial y\partial z}(x,y,z)=1-2x=\frac{\partial^2 L}{\partial z\partial y}(x,y,z) \quad \forall (x,y,z)\in E.$$

Toate aceste derivate parțiale de ordinul doi sunt continue pe E.

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(1,1,1)=\frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(1,1,1)=\frac{\partial^2 L}{\partial z^2}(1,1,1)=0$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x\partial y}(1,1,1)=\frac{\partial^2 L}{\partial y\partial x}(1,1,1)=\frac{\partial^2 L}{\partial x\partial z}(1,1,1)=\frac{\partial^2 L}{\partial z\partial x}(1,1,1)=$$

$$=\frac{\partial^2 L}{\partial y\partial z}(1,1,1)=\frac{\partial^2 L}{\partial z\partial y}(1,1,1)=-1.$$

$$d^2L(1,1,1) = -2(dx\,dy + dx\,dz + dy\,dz).$$

Diferențiem legătura $xyz = 1$.

$$yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz = 0.$$

În punctul $(1,1,1)$ ultima egalitate devine:

$$dx + dy + dz = 0 \Leftrightarrow dz = -dx - dy.$$

Avem $d^2L(1,1,1)_{leg} = -2\left(dx\,dy + dx(-dx-dy) + dy(-dx-dy)\right) = -2\left(\cancel{dx\,dy} - dx^2 - \cancel{dx\,dy} - dy\,dx - dy^2\right) = 2\left(dx^2 + dx\,dy + dy^2\right) = 2\left(\frac{1}{2}dx + dy\right)^2 + 2\cdot\frac{3}{4}dx^2.$

Deci $d^2L(1,1,1)_{leg}$ este pozitiv definită, i.e. $(1,1,1)$ este punct de minim local al funcției f cu legătura $g(x,y,z) = 0$. $\square$

<u>Denumire alternativă.</u> Punctele staționare condiționate se numesc și puncte critice condiționate.