

BIBLIOTECA
de
MATEMATICĂ-INFORMATICĂ

Cota II 40336
Inventar 023d783

II 40336

AMC - 05

DRAGOŞ-RADU POPESCU

COMBINATORICĂ
ŞI TEORIA GRAFURILOR



SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE DIN ROMÂNIA

Dragoș-Radu Popescu

COMBINATORICĂ ȘI TEORIA GRAFURILOR

Copyright © 2005 — Societatea de Științe Matematice din România

ISBN 973-0-03761-2

Biblioteca de Matematică



1100 023 2783

Toate drepturile asupra conținutului sunt rezervate Societății de Științe Matematice din România.

Nici o parte din acest volum nu poate fi copiată fără permisiunea scrisă a Societății de Științe Matematice din România.

Drepturile de distribuție aparțin editorului.

All rights reserved. This work may not be translated or copied in whole or in part without the written permission of the publisher.

*În memoria bunului meu tată,
preotul Gheorghe C. Popescu*

Societatea de Științe Matematice din România
Str. Academiei, nr. 14, Sector 1, 010014 București, România
Tel.: 021 314 46 53; Fax: 021 312 40 72
E-mail: office@rms.unibuc.ro

Tehnoredactor: Barbara Ionescu

Cuprins

Cuvânt înainte

xi

I Teoria grafurilor

1

| | |
|---|-----------|
| 1 Repere istorice | 3 |
| 1.1. Problema podurilor din Königsberg | 3 |
| 1.2. Jocul icosian | 5 |
| 1.3. Corpurile platonice și grafurile asociate | 7 |
| 1.4. Teorema celor patru culori | 9 |
| 1.5. Originea cuvântului graf | 10 |
| 2 Definiții. Notații. Convenții | 11 |
| 2.1. Notații generale | 11 |
| 2.2. Multimi finite. Echipotență. Cardinal. Incluziune. Operații cu multimi | 12 |
| 2.3. Multiseturi | 13 |
| 2.4. Familiile de vectori (cuvinte), multipărți și părți peste o mulțime | 13 |
| 2.5. Grafuri orientate, neorientate și simple | 15 |
| 2.5.1. Graf orientat. | 15 |
| 2.5.2. Graf neorientat. | 15 |
| 2.5.3. Graf simplu. | 15 |
| 2.6. Izomorfism | 16 |
| 2.7. Subgrafuri | 18 |
| 2.8. Subgrafuri induse (generate) într-un graf | 19 |
| 2.9. Adiacență. Incidență | 20 |
| 2.10. Grade | 21 |
| 2.11. Multisetul scor. Multisetul gradelor. Mulțimea gradelor | 21 |
| 2.12. Vecini | 22 |
| 2.13. Drumuri. Lanțuri | 23 |
| 2.14. Conexitate. Componente conexe | 23 |
| 2.14.1. Cazul grafurilor neorientate. | 25 |
| 2.14.2. Cazul grafurilor orientate. | 25 |
| 2.15. Circuite. Cicluri | 26 |

| | |
|---|------------|
| 2.16. Operări cu grafuri | 27 |
| 2.17. Grafuri tip (standard) | 30 |
| 2.18. Familii de grafuri | 34 |
| 3 Teoreme de caracterizare a multiseturilor de numere care pot fi gradele unui graf | 36 |
| 4 Arbori | 42 |
| 4.1. Teoreme de caracterizare a arborilor | 42 |
| 4.2. Aplicații | 49 |
| 4.3. Arbori parțiali în grafuri | 53 |
| 4.3.1. Grafuri cu muchii ponderate. Ponderea unui graf. Lungimea unui lanț. Distanță. Rază. Diametru. Centru. | 53 |
| 4.3.2. Arbore economic. Arbore al distanțelor. | 55 |
| 4.3.3. Aplicații. | 58 |
| 5 Grafuri planare | 61 |
| 5.1. Teorema poliedrală a lui Euler | 64 |
| 5.2. Hamiltonitate în grafuri planare | 69 |
| 5.2.1. Aplicații. | 71 |
| 5.3. Colorări | 74 |
| 6 Linii euleriene | 79 |
| 6.1. Teoreme de caracterizare | 81 |
| 6.2. Graful liniilor | 84 |
| 6.2.1. Exemple | 84 |
| 7 Linii hamiltoniene | 91 |
| 7.1. Condiții necesare de hamiltonitate a unui graf simplu | 91 |
| 7.1.1. Aplicații | 92 |
| 7.2. Condiții suficiente de hamiltonitate a unui graf simplu | 93 |
| 7.2.1. Teoremele lui Dirac și Ore | 93 |
| 7.2.2. Caracterizarea grafurilor care au proprietatea Ore | 94 |
| 7.2.3. Probleme | 99 |
| 7.2.4. Tehnica închiderii | 100 |
| 7.2.5. Exemple | 103 |
| 7.2.6. Aplicații | 106 |
| 7.2.6.1. Hamiltonitate și stabilitate. | 106 |
| 7.2.6.2. Teorema lui Chvátal | 107 |
| 7.2.6.3. Caracterizarea grafurilor nehamiltoniene cu un număr maxim de muchii. | 111 |
| 7.2.6.4. Exemple | 112 |
| 8 Cuplaje | 116 |
| 8.1. Teorema lui Berge | 116 |
| 8.2. Structura unui graf bipartit în raport cu un cuplaj de cardinal maxim | 118 |

| | |
|---|------------|
| II Combinatorică | 123 |
| 9 Principii și metode de numărare | 125 |
| 9.1. Prinzipiul bijecției (PB) | 125 |
| 9.2. Prinzipiul partiției (PP) | 125 |
| 9.3. Prinzipiul grafului bipartit (PGB) | 126 |
| 9.3.1. Prinzipiul grafului bipartit și regula produsului | 126 |
| 9.3.2. Prinzipiul grafului bipartit pentru mulțimi de părți | 127 |
| 9.3.3. Sume de cardinali ai intersecțiilor de părți | 128 |
| 9.3.4. Aplicații | 129 |
| 9.3.4.1. Suma cardinalilor tuturor intersecțiilor | 129 |
| 9.3.4.2. Prinzipiul incluzerii și excluderii (PIE) | 129 |
| 9.3.4.3. Cardinalul diferenței simetrice | 129 |
| 9.3.4.4. Inegalitățile lui Bonferroni și Hunter | 130 |
| 9.3.4.5. Inversiune binomială | 133 |
| 9.4. Argumentul polinomial | 138 |
| 9.5. Aplicații | 140 |
| 10 Funcții de numărare | 145 |
| 10.1. Combinări și combinații cu repetiție | 145 |
| 10.1.1. Modele combinatoriale pentru combinări de n obiecte luate câte p luate câte k | 145 |
| 10.1.2. Modele combinatoriale pentru combinări cu repetiție de n obiecte luate câte k | 149 |
| 10.1.3. Formule de recurență. Evaluări | 151 |
| 10.1.4. Triunghiul lui Pascal. Proprietăți | 155 |
| 10.1.5. Aplicații | 159 |
| 10.1.5.1. Numărul funcțiilor | 160 |
| 10.1.5.2. Numărul funcțiilor bijective | 160 |
| 10.1.5.3. Numărul funcțiilor injective | 160 |
| 10.1.5.4. Numărul funcțiilor surjective | 160 |
| 10.2. Partaje | 163 |
| 10.2.1. Modele combinatoriale pentru partaje | 163 |
| 10.2.2. Formule de recurență. Evaluări | 166 |
| 10.2.3. Identități multinomiale | 168 |
| 10.2.4. Aplicație | 172 |
| 10.3. Numere Stirling și Bell | 172 |
| 10.3.1. Definiții și notații | 172 |
| 10.3.2. Evaluări | 175 |
| 10.3.3. Formule de recurență | 178 |
| 10.3.4. Polinoame generatoare | 184 |
| 10.3.5. Inversiune Stirling | 187 |
| 10.3.6. Aplicații | 188 |
| 10.3.7. Cazuri particulare. Identitatea lui Euler | 189 |
| 10.4. Numere Catalan | 195 |
| 10.4.1. Drumurile laticiale | 195 |

| | |
|--|------------|
| 10.4.2. Drumurile laticiale cu restricții | 197 |
| 10.4.2.1. Aplicație | 200 |
| 10.4.3. Modele combinatoriale pentru numărul lui Catalan | 201 |
| 10.4.4. Evaluări. Formule de recurență | 202 |
| 10.5. k -părți t -separate într-un graf. Numere Fibonacci și Lucas | 208 |
| 10.5.1. Definiții și notății | 208 |
| 10.5.2. Lemele lui Kaplansky | 209 |
| 10.5.3. Părți 1-separate în lanțuri. Numere Fibonacci | 214 |
| 10.5.4. Părți 1-separate în cicluri. Numere Lucas | 215 |
| 11 Numărarea arborilor | 217 |
| 11.1. Numărarea arborilor parțiali | 217 |
| 11.1.1. Numărul arborilor din K_n cu gradele vârfurilor fixate | 217 |
| 11.1.2. Numărul arborilor parțiali din K_n | 219 |
| 11.1.3. Numărul arborilor din K_n care conțin o p -pădure parțială fixată | 219 |
| 11.1.4. Numărul arborilor parțiali ai unui graf simplu. | |
| Teorema lui Temperley | 220 |
| 11.1.5. Teorema „produs“ | 222 |
| 11.1.6. Numărul arborilor parțiali din K_{n+1} cu gradul unui anumit vârf fixat | 223 |
| 11.1.7. Numărul p -pădurilor lui K care au vârfurile fixate v_1, \dots, v_p în arbori disjunciți | 223 |
| 11.1.8. Numărul arborilor parțiali din graful partit complet K_{s_1, \dots, s_p} . | |
| Teorema lui Austin | 225 |
| 11.1.9. Aplicații | 227 |
| 11.1.9.1. Numărul arborilor parțiali din K_n care nu conțin muchiile unui p -cuplaj fixat | 227 |
| 11.1.9.2. Numărul arborilor parțiali care nu conțin muchiile unei p -stele | 228 |
| 11.1.9.3. Suma funcțiilor $\tau(V, F)$ pentru toate p -pădurile parțiale $[F]$ dintr-un lanț P_n | 228 |
| 11.1.9.4. Numărul arborilor parțiali din K_n care nu conțin muchiile unui s -lanț elementar | 229 |
| 11.1.9.5. Identități multinomiale. Identitatea lui Abel | 230 |
| 11.2. Metoda recursivă de numărare a arborilor | 233 |
| 11.2.1. Aplicații | 234 |
| 11.3. Metode de codificare a arborilor | 243 |
| 11.3.1. Codificare și decodificare Prüfer | 243 |
| 11.3.2. Codificare și decodificare Neville | 248 |
| | 253 |

Cuvânt înainte

Îmi face o sinceră bucurie apariția monografiei *Combinatorică și teoria grafurilor* scrise de colegul meu mai Tânăr Dragoș-Radu Popescu, în colecția Biblioteca SSMR.

Ea conține două părți distincte care se întrepătrund în mod natural: teoria grafurilor și combinatorica. În partea de teoria grafurilor se introduc noțiunile de bază, familii de grafuri, multisetul gradelor, conexitate, arbori, grafuri planare, linii euleriene, linii hamiltoniene și cuplaje. În capitolele de combinatorică sunt prezentate principii și metode de numărare și funcții de numărare: combinări și combinări cu repetiție, partaje, numere Stirling, Bell, Catalan, Fibonacci și Lucas și sunt expuse în final probleme de numărare arborilor, care fac o legătură fericită între cele două părți ale lucrării, precum și metode de codificare a arborilor (Prüfer și Neville).

Monografia se bazează pe bogata experiență didactică a autorului la cursul cu același nume de la secția de matematică, cursul de *Algoritmica grafurilor* de la secția de informatică precum și cursul optional *Capitole speciale de combinatorică și teoria grafurilor*, finite la Facultatea de Matematică și Informatică a Universității din București.

Lucrarea este scrisă clar, materialul este prezentat într-o structură bine gândită, în virtutea unei vizionări de ansamblu care acceptă fără modificări dezvoltări ulterioare pe care autorul intenționează să le producă.

Se realizează tratarea unitară a temelor abordate într-un limbaj unic, susținută de o ilustrare grafică de excepție, ceea ce îi sporește atraktivitatea.

Multe enunțuri și demonstrații sunt originale sau sunt expuse într-o manieră proprie (probleme de hamiltonitate și cuplaje, cele care privesc grafurile planare, principiile și metodele de numărare, numerele lui Catalan).

Publicarea unei asemenea lucrări valoroase se impunea de mult, ea ilustrând un domeniu al matematicii mai puțin abordat în literatura de specialitate în limba română în ultimele decenii, dar care are o dezvoltare impresionantă pe plan mondial, în strânsă legătură cu informatica și lucrările de complexitate a algoritmilor.

O recomand cu căldură tuturor celor interesați: elevi și studenți în matematică sau informatică, profesorilor lor, cât și celor care vor să aplice acest mod de gândire și metodele combinatoriale în alte domenii ale cunoașterii.

Lectura acestei lucrări va produce cu siguranță o reală satisfacție, atât intelectuală cât și estetică.

București, 23 noiembrie 2004

Prof. dr. Ioan Tomescu
Membru corespondent al Academiei Române

Partea I

Teoria grafurilor

Capitolul 1

Repere istorice

1.1. Problema podurilor din Königsberg

În anul 1736 marele matematician Leonhard Euler a publicat în revista Comentarii Academiae Scientiarum Imperialis un articol scris în limba latină cu titlul *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis*, lucrare care poate fi numită *actul de naștere* al teoriei grafurilor.

În această lucrare Euler a rezolvat ceea ce în literatură se numește *Problema podurilor din Königsberg*.

Problemă 1.1. Orașul Königsberg, locul de naștere al filozofului german Immanuel Kant, se întindea pe ambele maluri ale râului Pragel și pe două insule. Cele patru regiuni ale orașului erau conectate prin șapte poduri.

Este posibil ca un om să facă o plimbare în care să treacă pe toate cele șapte poduri ale orașului exact o singură dată și să se întoarcă la locul de pornire?

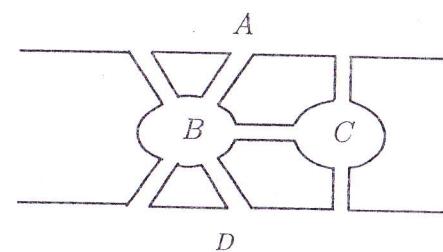


Figura 1.1.

Modelare. Se notează cu A, B, C, D cele patru regiuni ale orașului și se figurează prin puncte, iar podurile se reprezintă prin curbe care conectează aceste puncte. Problema se reformulează astfel:

Se poate desena diagrama printr-o curbă continuă închisă fără a ridica creionul de pe hârtie și fără a desena o linie de două ori?

Răspunsul la întrebare este negativ.

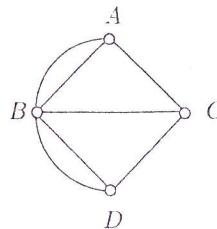


Figura 1.2.

Într-adevăr, dacă prin absurd diagrama ar putea fi desenată printr-o curbă închisă fără ridicarea creionului atunci fiecare dintre punctele A, B, C, D ar fi vizitat de un număr par de ori (numărul intrărilor va fi egal cu cel al ieșirilor), ceea ce nu se poate, deoarece în fiecare dintre punctele A, B, C, D sunt incidente 3 sau 5 linii — adică un număr fără soț. Deci răspunsul la întrebarea formulată în problemă este negativ.

Noțiuni desprinse. Vom numi punctele A, B, C, D vîrfuri, arcele de curbă AB, BD, AC, BC, CD le vom numi muchii, iar perechea

$$G = (V, E), \text{ unde } V = \{A, B, C, D\}, E = \{AB^2, BD^2, AC, BC, DC\}$$

o vom numi *graf neorientat*. Exponentul 2 la care figurează muchia AB îl vom numi *multiplicitatea lui AB* (sau *indicele de repetitivitate*). Numărul muchiilor incidente într-un vîrf îl vom numi *gradul* acelui vîrf. Un traseu închis cu proprietățile cerute în problema, care parege toate muchiile exact o singură dată, va fi numit *ciclu eulerian*, iar un graf care admite un astfel de ciclu va fi numit *graf eulerian*. Un traseu neînchis cu aceeași proprietate se numește *lanț eulerian*.

Din demonstrația precedentă rezultă că este adevărat următorul enunț:

Un graf care nu are un ciclu eulerian are toate gradele vîrfurilor sale pare.

Pentru grafurile conexe este adevărată și reciproca acestei afirmații.

Aspecte practice. În operațiunile de desenare automată a unor diagrame, a unor circuite electrice imprimate sau de tăiere automată a unor bucăți de tablă sau de stofă etc. suntem interesări — din motive de economie de timp sau de materie primă — în determinarea unui ciclu eulerian, ceea ce ar permite executarea „dintr-o bucătă” a operațiunii. Dacă un astfel de ciclu nu există suntem interesări în determinarea unui număr minim de trasee care să particioneze desenul.

Dezvoltări teoretice. Pornind de la această problemă a lui Euler s-au obținut în timp o serie de rezultate privind:

- ciclurile euleriene: condiții necesare și suficiente de existență, numărul lor, algoritmi de obținere;
- descompuneri euleriene în lanțuri.

Exercițiu. În figura 1.3 este reprezentat un triunghi și o linie continuă neînchisă care intersectează în interior fiecare segment exact o singură dată. Un exemplu asemănător este reprezentat în figura 1.4.

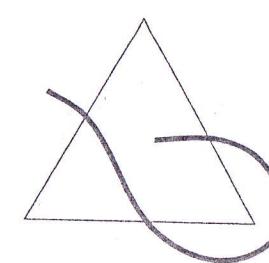


Figura 1.3.

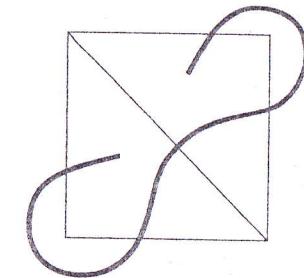


Figura 1.4.

Să se demonstreze că în cazul desenului reprezentat în figura 1.5 nu există o linie continuă neînchisă care să intersecteze în interior fiecare segment exact o singură dată.

| | | |
|---|---|---|
| 5 | | 5 |
| 4 | 5 | 4 |

9

Figura 1.5.

1.2. Jocul icosian

În anul 1856 matematicianul englez sir William Rowan Hamilton a inventat un joc numit *Jocul icosian* care avea ca suport material un dodecaedru din lemn reprezentând globul pământesc ale cărui vîrfuri erau notate cu numele unor orașe cum sunt: Bruxelles, Canton, Delhi, Frankfurt, Zanzibar, etc. (In limba greacă eikosi=20, dodeka=12, hedra=fâță.)

Problemă 1.2. Se cere să se indice un drum închis pe muchiile dodecaedrului care să treacă prin fiecare vîrf exact o singură dată, un fel de „votaj în jurul lumii”!

Modelare. Imaginăm suprafața dodecaedrului realizată dintr-o membrană elastică din care decupăm o față pentagonală, apoi o extindem până devine plană. Obținem imaginea unui graf.

Răspuns. Un traseu cu proprietățile din enunț este indicat în figura 1.6.

Noțiuni desprinse. Un traseu închis care parcurge toate vârfurile exact o singură dată va fi numit *ciclu hamiltonian*, iar un graf care admite un astfel de ciclu va fi numit *graf hamiltonian*. Un traseu neînchis cu aceleași proprietăți se numește *lanț hamiltonian*.

Aspecte practice. (Problema comis-voiajorului) *Fiind dată o mulțime fixată de orașe și distanțele intre ele se cere să se determine un traseu închis de lungime minimă care să permită vizitarea fiecărui oraș exact o singură dată.*

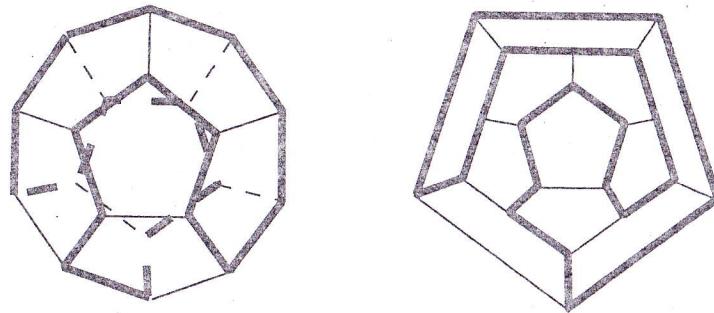


Figura 1.6.

Dezvoltări teoretice. S-au studiat condiții necesare și condiții suficiente de existență a unui ciclu hamiltonian pentru diferite clase de grafuri, algoritmi pentru determinarea unor cicluri hamiltoniene de lungime minimă etc.

Notă. Hamilton a ajuns să inventeze acest joc practic deoarece calculul formal cu lanțuri de grafului dodecaedrului prin care a descris soluția ilustră calculul numit de el *icosian* din studiul algebrelor necomutative.

Pe scurt, soluția lui Hamilton este următoarea:

Datorită simetriei grafului dodecaedrului, nu contează în analiza noastră muchia de pornire. Un jucător care ajunge la capătul unei muchii are de ales între următoarele trei posibilități:

- (a) să meargă la dreapta, operație notată cu D ;
- (b) să meargă la stânga, operație notată cu S ;
- (c) să rămână pe loc, operație notată cu I .

Se definește un produs al acestor operații astfel:

• $D^{k'}S^{l'}D^{k''}S^{l''}\dots$ înseamnă că jucătorul merge de k' ori la dreapta, de l' ori la stânga, de k'' ori la dreapta, de l'' ori la stânga, etc.

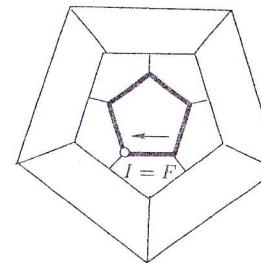
• Două produse sunt egale dacă plecând din același vârf, în care au intrat pe aceeași muchie, se ajunge în final într-un același vârf.

- Un produs este egal cu 1 dacă vârful de sosire este același cu vârful de plecare.
- $D^0 = S^0 = 1$ prin convenție.

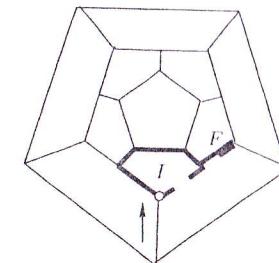
Produsul este necomutativ ($SD \neq DS$), dar este asociativ.

Sunt adevărate următoarele formule

$$D^5 = 1 \quad \text{și} \quad D^2 = SD^3S$$



$$D^5 = 1$$



$$D^2 = SD^3S$$

Figura 1.7.

Am notat cu I și F vârful de începere, respectiv cel de sosire, și cu o săgeată muchia inițială prin care se ajunge în I .

Utilizăm odată formula $1 = D^5$, de trei ori formula $D^2 = SD^3S$, ținem cont de caracterul asociativ al produsului și obținem

$$\begin{aligned} 1 &= D^5 = D^2D^3 = (SD^3S)D^3 = (SD^3)^2 = (SD^2D)^2 = [S(SD^3S)D]^2 \\ &= (S^2D^2DSD)^2 = [S^2(SD^3S)DSD]^2 = SSSDDDSDDSSSSDDSDSD. \end{aligned}$$

Secvența obținută are 20 de litere și nu conține nici-o subsecvență egală cu 1. Ea reprezintă deci *codul* unui ciclu hamiltonian.

Exerciții

1. Să se demonstreze următoarele formule de calcul icosian:

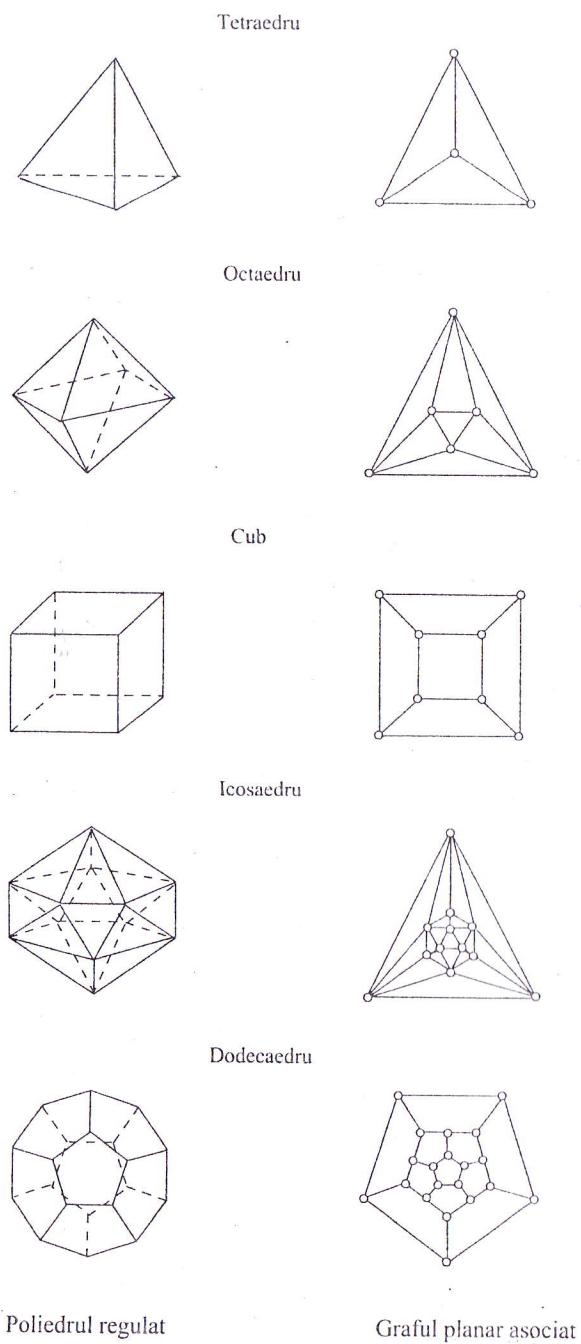
- (a) $D^5 = S^5 = 1$;
- (b) $DS^2D = SDS$ și $SD^2S = DSD$;
- (c) $D^2 = SD^3S$ și $S^2 = DS^3D$.

2. (a) Să se demonstreze că următoarea egalitate este adevărată: $DS^3 = S$.

(b) Putem oare înmulți la dreapta cu D în egalitatea precedentă? Cu alte cuvinte, este oare adevărată egalitatea $DS^3D = SD^2$?

1.3. Corpurile platonice și grafurile asociate

Un poliedru este un corp mărginit numai de suprafețe plane. Un poliedru se numește *convex* dacă segmentul care unește două puncte oarecare din el conține numai puncte din interiorul poliedrului. Un poliedru *regulat convex* este un poliedru convex ale cărui fețe sunt poligoane regulate congruente. Sunt cinci poliedre convexe regulate: tetraedrul, octaedrul, cubul, icosaedrul și dodecaedrul.



Graful planar asociat

Istoric. Descoperirea acestor coruri este atribuită grecilor antici din coloniile Italiei de sud. Se pare că ei ar fi abstras dodecaedrul regulat din cristalele de pirită, abundant în Sicilia. Sunt dovezi că dodecaedrul era folosit ca zar în Italia antică și cu semnificații religioase în civilizația etruscă.

Euclid expune în cartea a 13-a a *Elementelor* teoria poliedrelor regulate.

Platon a menționat de semenea existența poliedrelor convexe regulate în dialogul *Timeu*. El a asociat tetraedrul, octaedrul, cubul și icosaedrul cu cele patru elemente ale filozofiei antice grecești, foc, aer, pământ și apă, iar în dodecaedru vedea imaginea universului în ansamblu. De aceea poliedrele convexe regulate sunt cunoscute și sub numele de *corpuri platonice*.

Kepler în *Mysterium cosmographicum* (1595), cu mult înainte de descoperirea celor trei legi care îi poartă numele a făcut încercarea de a reduce distanțele sistemului planetar la razele unor sfere alternativ circumscrise și înscrise corporilor platonici. Cele șase sfere în ordinea descrescătoare a razelor corespund celor șase planete: Saturn, Jupiter, Marte, Pământ, Venus și Mercur separate, în acestă ordine, printre-un cub, tetraedru, dodecaedru, octaedru și icosaedru. Kepler a făcut paralele între proprietățile (mai mult astrologice decât astrofizice) planetelor și cele ale corporilor lui Platon. Își închipuia că astfel pătrunse adânc în secretele Creatorului. Credința într-o armonie matematică a Universului care l-a călăuzit pe Kepler conduce astăzi nu spre forme statice, cum sunt corpurile regulate, ci spre legi și principii generale.

Un graf care să poate reprezenta în plan astfel încât curbele asociate muchiilor să se intersecteze doar în vîrfuri se numește *graf planar*.

Unui poliedru i se asociază un graf care are aceleași vîrfuri și muchii cu acesta. Graful asociat unui poliedru este planar.

Pentru un graf planar G și o reprezentare plană a sa definim *graful dual* G^* , graful ale căruj vîrfuri sunt fețele lui G , inclusiv cea infinită și ale căruia muchii sunt perechile de fețe care au muchii în comun.

Grafurile cubului și octaedrului, precum și cele ale dodecaedrului și icosaedrului sunt perechi de grafuri duale, iar graful tetraedrului este autodual. Interesant este că proprietatea se regăsește la coruri. De exemplu, centrele fețelor unui tetraedru regulat sunt vîrfurile unui tetraedru regulat, centrele fețelor unui dodecaedru regulat sunt vîrfurile unui icosaedru regulat și centrele fețelor unui cub sunt vîrfurile unui octaedru regulat și reciproc.

Exercițiu. Arătați că grafurile poliedrelor regulate sunt hamiltoniene.

1.4. Teorema celor patru culori

In anul 1852, matematicianul De Morgan menționa într-o scrisoare adresată lui sir William Rowan Hamilton o întrebare formulată de studentul Francis Guthrie cu vreo doi ani înainte.

Se poate colora o hartă oarecare cu patru culori astfel încât orice două ţări, care au frontieră comună și care nu se reduce la un punct, să aibă culori diferite?

Acastă întrebare a devenit cunoscută sub numele *Problema celor patru culori*. Răs-

punsul este afirmativ și a fost obținut abia în anul 1976 cu ajutorul calculatorului electronic de către Appel și Haken.

Numărul cromatic $\chi(G)$ al unui graf G este prin definiție numărul minim de culori cu care se pot colora vârfurile sale astfel încât orice muchie să aibă capetele diferit colorate.

Problema celor patru culori afirmă că $\chi(D(G)) \leq 4$ pentru orice graf planar și se vede ușor că ea este echivalentă cu următoarea afirmație:

$$\chi(G) \leq 4 \quad \text{pentru orice graf planar.}$$

1.5. Originea cuvântului graf

Cuvântul *graf* în înțelesul actual a fost derivat din termenul „notație grafică” din chimie și a fost folosit prima dată de J. Sylvester în anul 1878 într-un articol publicat în primul număr al revistei American Journal of Mathematics, înființată chiar de el. Deși teoria unitară „chimico-algebrică” pe care el încerca să-o fundamenteze s-a dovedit o utopie, teoria grafurilor are totuși multe aplicații în chimie.

Capitolul 2

Definiții. Notații. Convenții

2.1. Notații generale

Vom citi semnele

| | |
|-------------------|----------------------------|
| $:$ | egal prin definiție, |
| \sim | izomorf prin definiție, |
| \Leftrightarrow | echivalent prin definiție. |

Notăm prin \mathbb{N} mulțimea numerelor naturale $\mathbb{N} := \{0, 1, 2, 3, \dots\}$, iar pentru $i \in \mathbb{N}$ notăm $\mathbb{N}_{\geq i} := \{i, i+1, i+2, \dots\}$.

Pentru $n \in \mathbb{N}$ notăm

$$[n] := \{1, 2, 3, \dots, n\} \quad \text{și} \quad [n]_0 := \{0, 1, 2, 3, \dots, n\}.$$

Pentru $n = 0$ extindem simbolul precedent astfel $[0] := \emptyset$. Pentru $x, y \in \mathbb{R}$ notăm

$$x \wedge y := \min\{x, y\} \quad \text{și} \quad x \vee y := \max\{x, y\}.$$

Pentru $x \in \mathbb{R}$ și $k \in \mathbb{N}$ definim *funcția factorială descrescător*

$$x^k := x(x-1)(x-2) \cdots (x-k+1),$$

și *funcția factorială crescător*

$$x^{\bar{k}} := x(x+1)(x+2) \cdots (x+k-1),$$

iar pentru $k = 0$ considerăm prin convenție $x^{\bar{0}} = x^0 = 1$.

Pentru $n \in \mathbb{N}$ numere x_1, \dots, x_n vom nota prin $\sum x_1 \cdots x_i$ suma tuturor produselor de căte i numere din cele n .

Pentru $x \in \mathbb{R}$ notăm cu $\lfloor \cdot \rfloor$ și $\lceil \cdot \rceil$ funcțiile *partea întreagă inferioară*, respectiv *superioară*

$$\lfloor \cdot \rfloor : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}, \quad \lceil \cdot \rceil : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$$

(\mathbb{Z} este mulțimea numerelor intregi) definite prin proprietăile

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1, \quad \lfloor x \rfloor - 1 < x \leq \lfloor x \rfloor \quad \text{pentru orice } x \in \mathbb{R}.$$

Cu alte cuvinte, $\lfloor x \rfloor$ este cel mai mare număr întreg mai mic decât x , iar $\lceil x \rceil$ este cel mai mic număr întreg mai mare decât x .

2.2. Mulțimi finite. Echipotență. Cardinal. Incluziune. Operații cu mulțimi

Pentru două mulțimi finite A, B definim:

| | |
|-------------------------------|--|
| <i>relația de echipotență</i> | $A \sim B : \Leftrightarrow$ există $f : A \rightarrow B$, f bijecție; |
| | (O notație alternativă pe care o vom folosi pentru echipotență a două mulțimi A, B este $A \leftrightarrow B$.) |
| <i>cardinalul</i> | $ A :=$ numărul elementelor mulțimii A ; |
| <i>inclusiunea</i> | $A \subseteq B : \Leftrightarrow (x \in A \Rightarrow x \in B)$; |
| <i>reuniunea</i> | $A \cup B := \{x \mid x \in A \text{ sau } x \in B\}$; |
| <i>intersecția</i> | $A \cap B := \{x \mid x \in A \text{ și } x \in B\}$; |
| <i>diferența</i> | $A - B := \{x \mid x \in A \text{ și } x \notin B\}$; |
| <i>diferența simetrică</i> | $A \Delta B := (A - B) \cup (B - A)$. |

Pentru n mulțimi finite A_1, A_2, \dots, A_n notăm prin $\bigcup_{i \in [n]} A_i$ reuniunea disjunctă a lor definită astfel

$$\bigcup_{i \in [n]} A_i \sim \bigcup_{i \in [n]} A'_i,$$

unde $A'_i \sim A_i$ și $A'_i \cap A'_j = \emptyset$, pentru orice $i \neq j \in [n]$. Spunem că A'_i sunt copii disjuncte ale mulțimilor A_i , $i \in [n]$.

Uneori vom utiliza semnul $\dot{\cup}$ doar pentru a sublinia faptul că mulțimile A_i sunt mutual disjuncte, $i \in [n]$.

Exerciții

- Pe mulțimea părților unei mulțimi S operația diferență simetrică este
 - asociativă;
 - comutativă;
 - mulțimea vidă este elementul neutru;
 - fiecare parte este propriul său element invers.
- Diferența simetrică $\Delta_{i \in [n]} A_i$ a n mulțimi A_i , $i \in [n]$, este mulțimea elementelor care aparțin unui număr impar de mulțimi A_i (vezi și paragraful 9.3.4.3).

2.3. Multiseturi

Fie S o mulțime finită nevidă. Un *multiset* peste S sau o *multiparte a lui S* este o pereche $\mathcal{M} = (S, r)$ formată din mulțimea S și o funcție $r : S \rightarrow \mathbb{N}_{\geq 0}$ numită *funcție multiplicitate (repetiție)* a elementelor din S . O notație alternativă pentru multisetul R se obține prin tabelarea funcției multiplicitate r pe care convenim să o descriem astfel

$$R = \{x^{r(x)} \mid s \in S\}.$$

Dacă un element x are multiplicitatea 1 vom scrie x^1 sau, simplu, x , iar dacă are multiplicitatea 0 vom scrie x^0 sau chiar putem să nu îl mai menționăm în descrierea lui R .

Spunem că un element x *apartine multisetului R* și vom nota aceasta prin $x \in R$ dacă și numai dacă $r(x) \geq 1$. Atunci când într-o expresie vom scrie $x \in R$ vom înțelege că x parurge toate cele $r(x)$ realizări (repetiții) ale lui x în R . Mulțimea elementelor $x \in R$ o vom nota $\text{sup } R$ și o vom numi *mulțimea suport a multisetului R* . De exemplu, pentru $S = \{a, b, c, d\}$ mulțimea suport a multisetului $R = a^2 b^0 c^3 d^0$ este $\text{sup } R = \{a, c\}$.

Pentru două multiseturi A, B peste S definim:

| | |
|----------------------------|--|
| <i>cardinalul</i> | $ A := \sum_{x \in S} a(x);$ |
| | (O notație alternativă pentru cardinalul lui A este $\#A$.) |
| | Dacă $ A = k$ vom spune că A este un k -multiset peste S sau o k -multiparte a lui S .) |
| <i>inclusiunea</i> | $A \subseteq B : \Leftrightarrow a(x) \leq b(x)$, pentru orice $x \in S$; |
| <i>reuniunea</i> | $A \cup B := \{x^{a(x) \vee b(x)} \mid x \in S\};$ |
| <i>reuniunea disjunctă</i> | $A \dot{\cup} B := \{x^{a(x) + b(x)} \mid x \in S\};$ |
| <i>diferența</i> | $A - B := \{x^{(a(x) - b(x)) \vee 0} \mid x \in S\}.$ |

Observație 2.1. O parte P a lui S poate fi privită ca un multiset peste S cu funcția multiplicitate luând valoarea 1 pentru elementele din P și valoarea 0 pentru elemente le din complementara în S a lui P , $\bar{P} = S - P$ (adică funcția multiplicată este chiar *fură caracteristică* a lui P în raport cu S).

Fie $R = (S, r)$ un multiset peste S cu $|R| \geq 1$ și $E = \{z_1, \dots, z_{|R|}\}$ o mulțime de cardinal egal cu $|R|$ ale cărei elemente le vom numi *etichete*. O *etichetare a multisetului R* este o funcție $e : E \rightarrow S$ cu proprietatea $|e^{-1}(x)| = r(x)$ pentru orice $x \in S$, unde $e^{-1}(x) := \{z \mid z \in E, e(z) = x\}$. Putem identifica o etichetare cu vectorul imaginilor $(e(z_1), \dots, e(z_{|R|}))$.

2.4. Familii de vectori (cuvinte), multipărți și părți peste o mulțime

Fie S o mulțime finită nevidă și $m \in \mathbb{N}$. Notăm:

- $S^m := \{(x_1, \dots, x_m) \mid x_i \in S\} =$ mulțimea m -vectorilor peste S sau mulțimea m -cuvintelor peste S ;

Un m -vector (x_1, \dots, x_m) va fi notat și sub forma $x_1 \dots x_m$ și va fi numit m -cuvânt.

• $S^{(m)} := \{X \mid X \text{ este } m\text{-multiset peste } S\}$;

• $S^{(m)} := \{X \mid X \subseteq S, |X| = m\} = \text{mulțimea } m\text{-părților lui } S$.

Vom nota adesea m -părțile X ale unei mulțimi S sub forma unor m -cuvinte cu litere diferite în care nu contează ordinea lor.

Prin $S^0, S^{(0)}, S^{(0)}$ vom înțelege mulțimea formată din cuvântul vid, multisetul vid (adică multisetul în care fiecare element are multiplicitatea zero), respectiv partea vidă.

Notăm de asemenea

$$S^* := \bigcup_{m \in \mathbb{N}_{\geq 0}} S^m, \quad S^{(*)} := \bigcup_{m \in \mathbb{N}_{\geq 0}} S^{(m)} \quad \text{și} \quad S^{(*)} := \bigcup_{m \in \mathbb{N}_{\geq 0}} S^{(m)}.$$

Evident $S^{(*)}$ este mulțimea părților lui S (termenii ultimei reununi fiind vide pentru $m > |S|$: $S^{(m)} = \emptyset$).

Exemplu 2.2. (a) Pentru $S = \{x, y, z\}$ și $m = 2$ avem:

$$S^2 = \{xx, yy, zz, xy, yx, xz, zx, yz, zy\},$$

$$S^{(2)} = \{xx, yy, zz, xy, xz, yz\} = \{x^2, y^2, z^2, xy, xz, yz\},$$

$$S^{(2)} = \{\{x, y\}, \{x, z\}, \{y, z\}\}.$$

Puteam asocia următoarele reprezentări grafice:

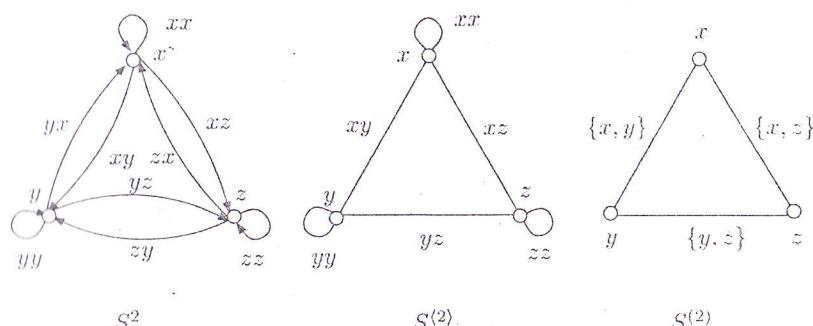


Figura 2.1.

(b) Pentru $S = \{x, y\}$ și $m = 3$ avem:

$$S^3 = \{xxx, xxy, yxy, yxx, xy\bar{y}, y\bar{x}y, yyx, yyyy\}$$

$$S^{(3)} = \{xxx, xxy, yyy, yyyy\} = \{x^3, x^2y, xy^2, y^3\}$$

$$S^{(3)} = \emptyset.$$

2.5. Grafuri orientate, neorientate și simple

Fie $V \neq \emptyset$ o mulțime finită nevidă ale cărei elemente le vom numi *vârfuri*.

2.5.1. Graf orientat. Un *graf orientat* peste V este o pereche $G = (V, E)$, unde $E = (V^2, r)$ este un multiset peste V^2 (un multiset de 2-cuvinte sau altfel spus, de perechi ordonate). Un element $e = (u, v)$ din E se numește în general *arc*, iar dacă $u = v$ se numește *bucătă*. El se poate reprezenta astfel:



Figura 2.2.

Vârfurile u și v se numesc *capetele* sau *extremitățile* arcului e . Vârful u se numește *vârf initial* sau *originea*, iar vârful v se numește *vârf final* sau *terminus* al arcului $e = (u, v)$. Vârful u se mai numește *predecesorul* lui v , iar vârful v se mai numește *succesorul* lui u . De asemenea vom nota $u = e^-$ și $v = e^+$.

Dacă $r(e) \leq p$ pentru orice $e \in E$, atunci G se numește *p-graf orientat*. Pentru un graf orientat G notăm G^{-1} graful orientat obținut din G prin inversarea tuturor arcelor:

$$V(G^{-1}) = V(G), \quad E(G^{-1}) = \{(x, y)^{r(yx)} \mid xy \in V^2\}.$$

2.5.2. Graf neorientat. Un *graf neorientat* peste V este o pereche $G = (V, E)$, unde $E = (V^{(2)}, r)$ este un multiset peste $V^{(2)}$. Un element $e = uv$ din E se numește în general *muchie*, iar dacă $u = v$ se numește *bucătă* și poate fi reprezentat în plan prin două puncte și un arc de curbă continuă cu capetele în acestea astfel



Figura 2.3.

Vârfurile u, v se numesc *capetele* sau *extremitățile* muchiei $e = uv$. Dacă $r(e) \leq p$ pentru orice $e \in E$, atunci G se numește *p-graf neorientat*.

2.5.3. Graf simplu. Un *graf neorientat simplu* (pe scurt *simplu*) peste V este o pereche $G = (V, E)$, unde $E \subseteq V^{(2)}$ este o parte din $V^{(2)}$. Un element $e = \{u, v\}$ din E se numește *muchie* și va fi notat adesea sub forma unui cuvânt în care nu contează ordinea literelor: $e = uv$.

Observăm că un graf simplu este un graf neorientat fără bucle și cu ordinul de multiplicitate al unei muchii egal cu 0 sau 1 adică, un *1-graf neorientat fără bucle*.

Dacă în definiția grafului simplu înlocuim exponentul 2 printr-un număr oarecare $k \in \mathbb{N}$, obținem definiția unui *hypergraf k-uniform* $G = (V, E)$, unde $E \subseteq V^{(k)}$. Mai general, dacă $E \subseteq V^{(1)}$ atunci $G = (V, E)$ se numește *hypergraf*.

Notăm prin $\bar{G} = (V, V^{(1)} - E)$ *graful complementar*.

Mulțimea vârfurilor, respectiv a muchiilor, unui graf G se notează $V(G)$ și $E(G)$. Pentru $E' \subseteq E(G)$ se notează cu $V(E')$ mulțimea vârfurilor muchiilor din E' .

Prin ștergerea buclelor unui graf neorientat $G = (V, E)$ și prin înlocuirea multmuchilor $e \in E$ prim multmuchii cu multiplicitatea egală cu 1 obținem *graful simplu suport* al acestuia. Prin ignorarea orientării arcelor unui graf orientat $G = (V, E)$ obținem *graful neorientat suport* al acestuia.

În cazuri particulare, vom descrie un graf prin indicarea unei diagrame asociate lui.

Exemplu 2.3. Să considerăm graful orientat $G_1 = (V, E_1)$ definit prin $V = \{a, b, c\}$ și $E_1 = \{aa, ac, ba, (bc)^2, cb\}$. Graful neorientat suport al lui G_1 este $G_2 = (V, E_2)$, unde $E_2 = \{aa, ab, ac, (bc)^3\}$, iar graful simplu suport al lui G_2 este $G_3 = (V, e_3)$, unde $E_3 = \{ab, ac, bc\}$.

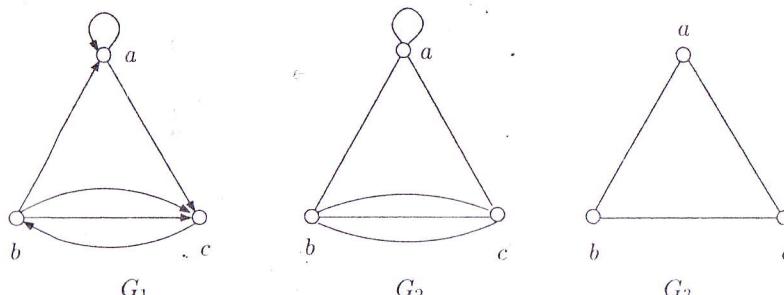


Figura 2.4.

2.6. Izomorfism

Fie $G_1 = (V_1, E_1)$ și $G_2 = (V_2, E_2)$ două grafuri.

2.6.1. Spunem că G_1 și G_2 sunt *izomorfe* (în limba greacă isos=egal, morphe=formă) și vom nota prin $G_1 \sim G_2$, dacă există o funcție bijectivă f

$$f : V_1 \rightarrow V_2$$

cu proprietatea $r_1(uv) = r_2(f(u)f(v))$ pentru orice $u, v \in V_1$, unde r_1 și r_2 sunt funcțiile multiplicității celor două grafuri. Cu alte cuvinte, grafurile G_1 și G_2 sunt *izomorfe* dacă și numai dacă există o bijecție a mulțimilor vârfurilor lor care conservă multiplicitățile muchiilor.

Aceasta corespunde în cazul 1-grafurilor și, în particular al grafurilor simple, existenței unei bijecții a mulțimilor vârfurilor $f : V_1 \rightarrow V_2$ care conservă adiacențele și

neadiacențele vârfurilor, adică pentru orice $u, v \in V_1$ avem echivalența: $uv \in E_1 \Leftrightarrow f(u)f(v) \in E_2$.

Noțiunea de izomorfism are interpretarea următoare: două grafuri G_1, G_2 sunt izomorfe dacă se pot reprezenta în plan prin același desen.

2.6.2. Pentru un sir de m grafuri G_1, \dots, G_m se înțelege prin *m copii disjuncte* ale acestora un sir de m grafuri G'_1, \dots, G'_m cu următoarele proprietăți:

$$G_1 \sim G'_1, \dots, G_m \sim G'_m, \\ V'_i \cap V'_j = \emptyset, \text{ oricare ar fi } i \neq j \in \{1, \dots, m\}.$$

Exemplu 2.4. În figura următoare sunt reprezentate o serie de grafuri izomorfe cu graful lui Petersen. Etichetele vârfurilor indică bijecția.

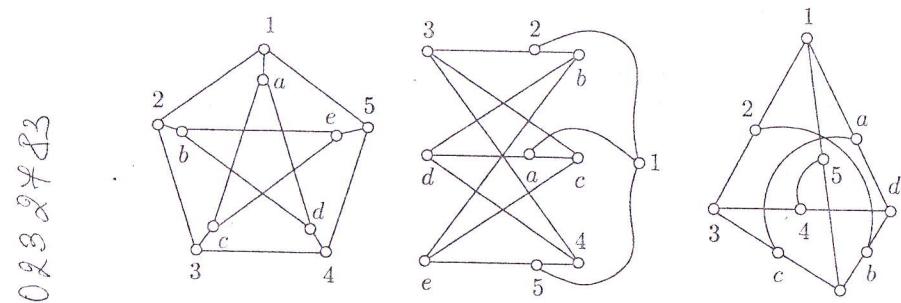


Figura 2.5.

Exerciții

1. Arătați că grafurile reprezentate în figura următoare sunt izomorfe cu graful asociat dodecaedrului regulat.

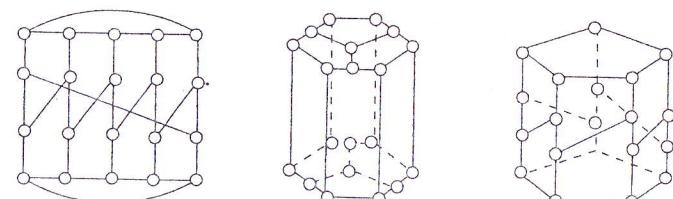


Figura 2.6.

2. Determinați perechile de grafuri izomorfe reprezentate în figura următoare:

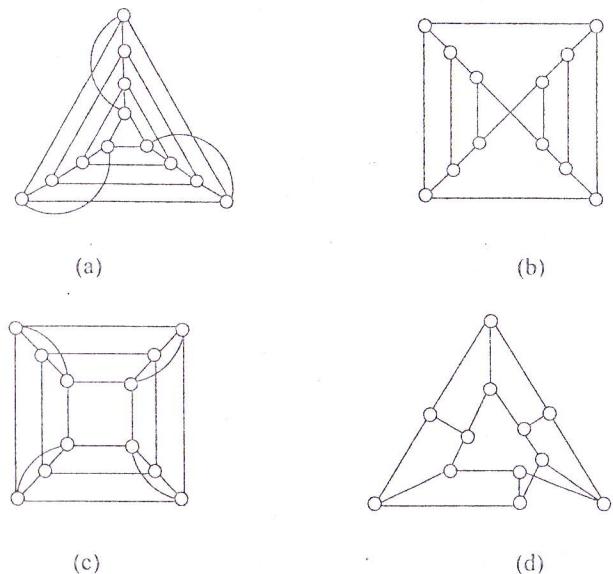


Figura 2.7.

2.7. Subgrafuri

Fie $G_1 = (V_1, E_1)$ și $G_2 = (V_2, E_2)$ două grafuri.

2.7.1. Spunem că G_1 este *subgraf* al lui G_2 și vom nota aceasta prin $G_1 \leq G_2$, dacă

$$V_1 \subseteq V_2 \quad \text{și} \quad E_1 \subseteq E_2.$$

2.7.2. Spunem că G_1 este *subgraf parțial* al lui G_2 sau că G_1 *subintinde* G_2 și vom nota aceasta prin $G_1 \prec G_2$, dacă

$$V_1 = V_2 \quad \text{și} \quad E_1 \subseteq E_2.$$

2.7.3. Spunem că G_1 se *scufundă* în G_2 și vom nota aceasta prin $G_1 \hookrightarrow G_2$, dacă există un graf G astfel încât $G \leq G_2$ și $G_1 \sim G$.

2.7.4. Notăm prin $\binom{G_2}{G_1}$ mulțimea subgrafurilor lui G_2 izomorfe cu G_1 și prin $\binom{G_2}{G_1}$ cardinalul acestei mulțimi:

$$\binom{G_2}{G_1} := \{G \mid G \leq G_2, G \sim G_1\} \quad \text{și} \quad \binom{G_2}{G_1} := \left| \binom{G_2}{G_1} \right|.$$

După caz, vom adăuga alături de G_1 în cadrul acestor semne o listă de condiții suplimentare pe care graful curent G trebuie să le îndeplinească.

2.8. Subgrafuri induse (generate) într-un graf

Fie $G = (V, E)$ un graf cu funcția multiplicitate a muchiilor notată prin r . Considerăm în G următoarele mulțimi: $\emptyset \neq E' \subseteq E$, $\emptyset \neq X$, $X_1, \dots, X_p \subseteq V$ cu $X_i \cap X_j = \emptyset$ pentru orice $1 \leq i < j \leq p$, unde $p \geq 2$.

2.8.1. Subgraful $G[X]$ cu următoarele proprietăți:

- (a) $V(G[X]) := X$;
 - (b) $E(G[X]) := \{e^{r(e)} \mid e \in E(G), V(e) \subseteq X\}$,
- se numește *subgraful $G[X]$ induș (generat) de X în G* .

Vom prefera notația mai simplă $[X]$ în loc de $G[X]$ atunci când graful G la care se face referire se înțelege de la sine.

2.8.2. Vom numi *subgraf p -partit $G[X_1, \dots, X_p]$ induș (generat) în G* de familia de mulțimi de vârfuri reciproc disjuncte $\{X_1, \dots, X_p\}$ subgraful cu următoarele proprietăți:

- (a) $V(G[X_1, \dots, X_p]) := X_1 \cup \dots \cup X_p$;
- (b) $E(G[X_1, \dots, X_p]) := \{e^{r(e)} \mid e \in E(G) \text{ pentru care există } 1 \leq i \leq j \leq p \text{ și } u \in X_i, v \in X_j \text{ astfel încât } V(e) = \{u, v\}\}$.

Vom prefera notația mai simplă $[X_1, \dots, X_p]$ în loc de $G[X_1, \dots, X_p]$ atunci când graful G la care se face referire se înțelege de la sine.

În cazul $p = 2$ definiția precedentă se extinde și pentru situația în care avem mulțimi nedisjuncte $X_1 \cap X_2 = \emptyset$. Observăm că notația de la paragraful 2.8.2 este o extindere a celei de la paragraful 2.8.1 în sensul următor: $[X] = [X, X]$.

Dacă G este graf orientat și $\emptyset \neq X, Y \subseteq V$, $X \cap Y = \emptyset$ atunci vom nota cu $G[X \rightarrow Y]$ subgraful definit astfel:

- (a) $V(G[X \rightarrow Y]) := X \cup Y$;
- (b) $E(G[X \rightarrow Y]) := \{(x, y)^{r(xy)} \mid x \in X, y \in Y\}$.

Dacă graful G rezultă clar din context atunci vom folosi notația $[X \rightarrow Y]$ în loc de $G[X \rightarrow Y]$.

2.8.3. *Subgraful $G(\langle X_1, \dots, X_p \rangle)$ generat prin identificarea elementelor unei familii de vârfuri reciproc disjuncte $\{X_1, \dots, X_p\}$* se definește astfel:

- (a) $V(G(\langle X_1, \dots, X_p \rangle)) := \{X_1, \dots, X_p\}$;
- (b) $E(G(\langle X_1, \dots, X_p \rangle)) := \bigcup_{1 \leq i \leq j \leq p} \{X_i X_j^{[E[X_i, X_j]]}\}$.

Vom prefera notația mai simplă $\langle X_1, \dots, X_p \rangle$ în loc de $G(\langle X_1, \dots, X_p \rangle)$ atunci când graful G la care se face referire rezultă clar din context.

În cazul în care $p = n - 1$ unde $n \geq 2$, și $V = \{x_1, \dots, x_n\}$, $X_1 = \{x_1\}, \dots, X_{n-2} = \{x_{n-2}\}$, $X_{n-1} = \{x_{n-1}, x_n\}$, vom spune că graful $\langle X_1, \dots, X_{n-1} \rangle$ este obținut din G prin *identificarea* vârfurilor x_{n-1} și x_n sau prin *construcția* muchiei $e = x_{n-1} x_n$ și vom nota

$$G * e := \langle X_1, \dots, X_{n-1} \rangle.$$

2.8.4. Subgraful $G[E']$ induș (generat) de E' în G este subgraful cu următoarele proprietăți:

- (a) $V(G[E']) := V(E')$;
- (b) $E(G[E']) := E'$.

Vom prefera notația mai simplă $[E']$ în loc de $G[E']$.

2.9. Adiacență. Incidență

Fie $G = (V, E)$ un graf neorientat.

2.9.1. Două vârfuri $u, v \in V$ se numesc *adiacente* dacă $uv \in E$.

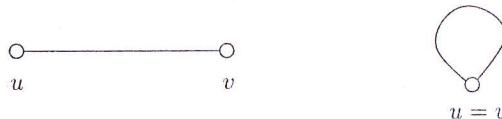


Figura 2.8. Adiacența a două vârfuri u, v .

2.9.2. O muchie $e \in E$ spunem că este *incidentă* într-un vârf $u \in V$ dacă $u \in e$.

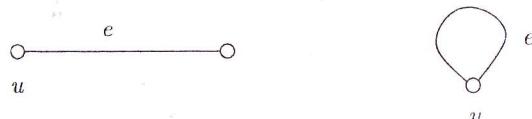


Figura 2.9. Incidența unei muchii e într-un vârf u .

2.9.3. Două muchii $e, f \in E$ se numesc *adiacente* dacă există un vârf în care acestea sunt incidente $e \cap f \neq \emptyset$.

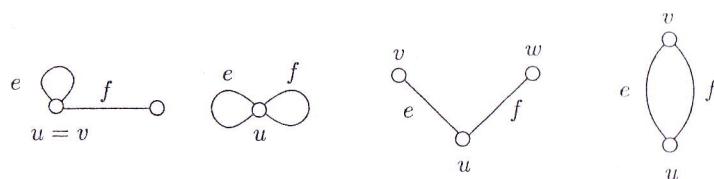


Figura 2.10. Adiacența a două muchii e, f .

Într-un graf orientat relațiile de adiacență și de incidență sunt induse de relațiile corespunzătoare din graful neorientat suport asociat.

Fie $V' \subseteq V$ și $E' \subseteq E$. Spunem că V' este *independentă* dacă orice două vârfuri din V' sunt neadiacente. Asemănător, spunem că E' este *independentă* dacă orice două arce (muchii) din E' sunt neadiacente. În acest ultim caz mai spunem că E' formează un *cuplu*.

GRADE

2.10. Grade

2.10.1. Fie $G = (V, E)$ un graf orientat. Pentru un vârf $x \in X$ definim:

- (a) *gradul interior* al lui x , notat cu $d_G^-(x)$

$$d_G^- := |\{e \mid e \in E, x \text{ este vârf terminus pentru } e\}|;$$

- (b) *gradul exterior* al lui x , notat cu $d_G^+(x)$

$$d_G^+ := |\{e \mid e \in E, x \text{ este originea arcului } e\}|;$$

- (c) *gradul* lui x , notat cu $d_G(x)$

$$d_G := d_G^-(x) + d_G^+(x).$$

2.10.2. Fie $G = (V, E)$ un graf neorientat.

Gradul $d_G(x)$ al unui vârf $x \in V$ este egal cu numărul muchiilor cu capetele diferite incidente în x plus de două ori numărul buclelor incidente în x . Observăm că $d_G(x)$ este egal cu gradul lui x într-un graf orientat al cărui graf neorientat suport este G . De asemenea, în cazul unui graf simplu, gradul unui vârf x este egal cu numărul muchiilor incidente în x . Se notează cu $\Delta(G)$ și $\delta(G)$ gradul maxim, respectiv minim, al unui vârf din G .

Un graf neorientat cu gradul oricărui vârf egal cu k , $k \in \mathbb{N}_{\geq 0}$, se numește *graf k -regulat*. Un k -factor al unui graf neorientat G este un subgraf parțial k -regulat al acestuia. Vom prefera să notăm $d^-(x), d^+(x), d(x), \Delta, \delta$ în loc de $d_G^-(x), d_G^+(x), d_G(x), \Delta(G), \delta(G)$ atunci când graful G la care se face referire rezultă clar din context.

2.11. Multisetul scor. Multisetul gradelor. Mulțimea gradelor

2.11.1. Fie $G = (V, E)$ un graf orientat, $V = \{v_1, \dots, v_n\}$. Se notează cu $s^+(G)$ multisetul gradelor exterioare ale vâfurilor lui G

$$s^+(G) := \{d^+(v_1), \dots, d^+(v_n)\}.$$

$s^+(G)$ mai este denumit și *vectorul scor* asociat lui G .

Analog se definește $s^-(G)$ multisetul gradelor interioare.

2.11.2. Fie $G = (V, E)$ un graf neorientat. Se notează cu $s(G)$ multisetul gradelor vâfurilor lui G . $s(G)$ mai este denumit și *secvența gradelor* sau încă *șirul gradelor* lui G . Vom nota adesea multisetul $s(G)$ ca un cuvânt cu „literele”, adică gradele vâfurilor ordonate (crescător sau descrescător)

$$s(G) = \{d_1 \leq \dots \leq d_n\}.$$

Uneori vom considera *mulțimea gradelor sup(s(G))*, adică mulțimea suport a multisetului gradelor lui G .

Considerăm două grafuri neorientate $G' = (V', E')$ și $G'' = (V'', E'')$, $|V'| = |V''| = n$, cu multiseturile gradelor ordonate crescător

$$s(G') = \{d'_1, \dots, d'_n\}, \quad s(G'') = \{d''_1, \dots, d''_n\}.$$

Spunem că G' este *grad majorat* de G'' și notăm $s(G') \leq s(G'')$ dacă $d'_i \leq d''_i$ pentru orice $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Exemple 2.5.

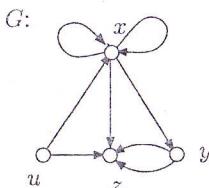


Figura 2.11.

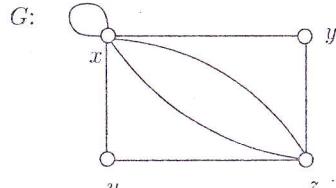


Figura 2.12.

$$\begin{aligned} d_G^+(x) &= 4, d_G^-(y) = 3, \\ d_G^+(y) &= 2, d_G^-(y) = 1, \\ d_G^+(z) &= 0, d_G^-(z) = 4, \\ d_G^+(u) &= 2, d_G^-(u) = 0, \\ s^+(G) &= 0224, s^-(G) = 0134, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_G(x) &= 6, d_G(y) = 2, \\ d_G(z) &= 4, d_G(u) = 2, \\ \Delta(G) &= 6, \delta(G) = 2, \\ s(G) &= 2246, \\ \text{sup}(s(G)) &= \{2, 4, 6\}, \end{aligned}$$

2.12. Vecini

Fie $G = (V, E)$ un graf și $v \in V$, $\emptyset \neq X, Y \subseteq V$.

Mulțimea $N_G(x)$ a vecinilor vârfurilor lui $x \in X$ este mulțimea vârfurilor din G adiacente lui x

$$N_G(x) := \{z \mid z \in V, x, z \text{ adiacente}\}.$$

Mulțimea $N_G(X)$ a vecinilor părții $X \subseteq V$ este definită astfel

$$N_G(X) := \bigcup_{x \in X} N_G(x),$$

iar mulțimea $N_G(X, Y)$ a vecinilor din Y al lui X este

$$N_G(X, Y) := N_G(X) \cap Y.$$

Dacă G este graf orientat notăm asemănător

$$\begin{aligned} N_G^+(x) &:= \{z \mid z \in V, xz \in E\}, & N_G^+(X, Y) &:= N_G^+(X) \cap Y, \\ N_G^-(x) &:= \{z \mid z \in V, zx \in E\}, & N_G^-(X, Y) &:= N_G^-(X) \cup Y. \end{aligned}$$

DRUMURI. LANȚURI

Observăm că

$$\begin{array}{ll} N_G(x) = N_G(\{x\}, V), & N_G(X) = N_G(X, V), \\ N_G^+(x) = N_G^+(\{x\}, V), & N_G^+(X) = N_G^+(X, V), \\ N_G^-(x) = N_G^-(\{x\}, V), & N_G^-(X) = N_G^-(X, V). \end{array}$$

Deasemenea, dacă G este graf simplu observăm că avem relația

$$d_G(x) = |N_G(x)|.$$

Vom prefera să notăm $N(x), N(X), \dots$ în loc de $N_G(x), N_G(X), \dots$ atunci când graful G la care se face referire rezultă clar din context.

2.13. Drumuri. Lanțuri

Vom defini în continuare noțiunea de drum pentru grafurile orientate, respectiv pe cea de lanț pentru grafurile neorientate.

Fie $G = (V, E)$ un graf.

2.13.1. Pentru G graf orientat un *drum* cu m vârfuri, sau m -*drum*, $m \in \mathbb{N}$, este o secvență P de vârfuri și arce care se succed alternativ

$$P := [v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, v_{m-1}, e_{m-1}, v_m]$$

unde $v_1, \dots, v_m \in V(G)$, $e_1, \dots, e_{m-1} \in E(G)$ cu proprietatea

$$v_i = e_i^- \text{ și } v_{i+1} = e_i^+ \text{ pentru orice } i \in \{1, 2, \dots, m-1\}.$$

2.13.2. Pentru G graf neorientat un *lanț* cu m vârfuri sau m -*lanț*, este o secvență P de vârfuri și muchii care se succed alternativ

$$P := [v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, v_{m-1}, e_{m-1}, v_m]$$

unde $v_1, \dots, v_m \in V(G)$, $e_1, \dots, e_{m-1} \in E(G)$ cu proprietatea

$$\{v_i, v_{i+1}\} = V(e_i) \text{ pentru orice } i \in \{1, 2, \dots, m-1\}.$$

2.13.3. Fie $P = [v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, v_{m-1}, e_{m-1}, v_m]$ un drum sau un lanț în G (după cum G este graf orientat sau neorientat).

Pentru $1 \leq i \leq j \leq m$ notăm prin $v_i \xrightarrow{P} v_j$ sau $P[v_i, v_j]$ *drumul*, respectiv *lanțul induș de P cu capetele în v_i și v_j*

$$v_i \xrightarrow{P} v_j := [v_i, e_i, v_{i+1}, e_{i+1}, \dots, v_{j-1}, e_{j-1}, v_j].$$

În cazul neorientat, notăm cu P^{-1} lanțul P , „citit“ invers

$$P^{-1} := [v_m, e_{m-1}, v_{m-1}, e_{m-2}, \dots, v_2, e_1, v_1].$$

Pentru $m = 1$ avem cazul drumului, respectiv lanțului, P cu un vârf și fără arce (muchii).

Vârfurile v_1, v_m se numesc *capetele* lui P . În cazul orientat v_1 se mai numește *vârf initial* sau *originea* lui P , iar v_m se mai numește *vârf final* sau *terminus* al lui P . Notăm $P^- := v_1$ și $P^+ := v_m$. Spunem că P este un v_1, v_m -drum, respectiv v_1, v_m -lanț.

Notăm:

- *Multisetul arcelor (muchiilor) lui P*

$$E(P) := \{e_1, e_2, \dots, e_{m-1}\}.$$

Numărul $|E(P)|$ se numește *lungimea* lui P .

- *Multisetul vârfurilor lui P*

$$V(P) := \{v_1, v_2, \dots, v_m\}.$$

- *Multisetul vârfurilor interne ale lui P*

$$\text{int}(P) := \{v_2, \dots, v_{m-1}\} - \{v_1, v_m\}.$$

- *Multisetul capetelor lui P sau frontiera lui P*

$$\text{fr}(P) := \{v_1, v_m\}.$$

Vom nota tot prin $E(P)$, $V(P)$, $\text{int}(P)$, $\text{fr}(P)$ și mulțimile suport corespunzătoare și vom preciza sensul notăției dacă este cazul. De asemenea, vom nota tot prin P graful $G[E(p)]$ induș de arcele (muchiile) lui P .

Pentru $x \in V(P)$ numim *intrare* (în), respectiv *ieșire* (din) vârful x o pereche de elemente succesive ale lanțului P de tip muchie-vârf (e_{j-1}, v_j) , respectiv vârf-muchie (v_j, e_j) , unde $v_j = x$ și $j \in \{1, 2, \dots, m\}$. Notăm cu $i_P^-(x)$ sau $i_P^+(x)$ numărul intrărilor (în), respectiv al ieșirilor (din) vârfului x . Avem, evident, relațiile

$$i_{P-1}^-(x) = i_P^+(x) \quad \text{și} \quad i_{P-1}^+ = i_P^-(x).$$

Observație. În cazul grafurilor orientate un drum P poate fi descris doar prin secvența arcelor sale (pentru $M \geq 2$)

$$P = [e_1, e_2, \dots, e_{m-1}].$$

Dacă într-un graf ordinul de multilicitate al arcelor, respectiv al muchiilor, este 0 sau 1, atunci un drum sau un lanț P poate fi descris doar prin secvența vârfurilor sale

$$P = [v_1, v_2, \dots, v_m].$$

Acesta este cazul 1-grafurilor și, în particular, al grafurilor simple.

Exercițiu. Fie P un u, v -lanț (drum) și $x \in \text{int } P$. Avem:

- dacă P are capetele diferite $u \neq v$, atunci $i(u) \equiv i(v) \pmod{2}$;
- dacă $i(x) \equiv 1 \pmod{2}$, atunci $x \in \{u, v\}$ și $u \neq v$;
- $i^-(x) = i^+(x)$.

CONEXITATE. COMPONENTE CONEXE

2.13.4. Spunem că un drum sau un lanț P se *autointersectează* în vârfuri, dacă în $V(P)$ există un vârf care se repetă (are multiplicitatea ≥ 2) și că P se *autointersectează* în arce, respectiv în muchii (după cum G este graf orientat sau neorientat), dacă în $E(p)$ există un arc sau o muchie care se repetă (are multiplicitatea ≥ 2).

Un *drum simplu* este un drum care nu se autointersectează în arce. Analog, un *lanț simplu* este un lanț care nu se autointersectează în muchii. Un *drum elementar* P este un drum care nu se autointersectează în nici-un vârf intern $x \in \text{int}(P)$. În general, dacă nu se fac alte precizări, vom considera că un drum (lanț) elementar are capetele diferite.

2.13.5. Să considerăm $G = (V, E)$ graf neorientat. Pentru două vârfuri oarecare $x, y \in V$ numim *distanța* dintre x și y un număr notat $d_G(x, y)$ definit astfel

$$d_G(x, y) := \begin{cases} 0 & \text{dacă } x = y, \\ \min\{|E(P)| \mid P \text{ este } x, y\text{-lanț în } G\} & \text{dacă } x \neq y. \end{cases}$$

Astfel, distanța $d_G(x, y)$ dintre două vârfuri $x, y \in V$ este egală cu lungimea minimă a unui x, y -lanț. Un astfel de lanț se numește *lanț optim*.

2.14. Conexitate. Componente conexe

2.14.1. Cazul grafurilor neorientate. Fie $G = (V, E)$ un graf neorientat. Spunem că G este *graf conex* dacă, pentru două vârfuri $x, y \in V$ există un x, y -lanț.

Pe mulțimea V a vârfurilor lui G definim următoarea relație

$$x \sim y \Leftrightarrow \text{există } x, y\text{-lanț în } G.$$

Se vede ușor că \sim este o relație de echivalență, adică sunt verificate următoarele proprietăți:

- reflexivitate: $x \sim x$ pentru orice $x \in V$;
- simetrie: $x \sim y \Leftrightarrow y \sim x$ pentru orice $x, y \in V$;
- tranzițivitate: $x \sim y$ și $y \sim z \Rightarrow x \sim z$ pentru orice $x, y, z \in V$.

Notăm cu V_1, \dots, V_p clasele de echivalență în raport cu relația \sim . Grafurile

$$G_1 = G[V_1], \dots, G_p = G[V_p]$$

induse în G de V_1, \dots, V_p se numesc *componentele conexe* ale lui G . Notăm cu $c(G)$ numărul componentelor conexe ale lui G

$$c(G) := p \quad \text{și} \quad G = G_1 + \dots + G_p.$$

Observăm că pentru un vârf $a \in V$ componenta conexă G_a care conține vârful a este subgraful lui G induș de mulțimea de vârfuri conectate de a prin lanțuri.

2.14.2. Cazul grafurilor orientate. Fie $G = (V, E)$ un graf orientat. Spunem că G este *conex* dacă graful neorientat suport al lui este conex. Componentele conexe ale lui G sunt induse în G de componentele conexe ale grafului neorientat suport asociat.

În cazul grafurilor orientate se pot defini și alte tipuri de conexitate. Dintre acestea menționăm tare-conexitatea. Acest tip de conexitate se definește asemănător cu cea din cazul neorientat; singura deosebire este că în definiție sunt utilizate drumurile în locul lanțurilor.

Astfel, spunem că G este *tare-conex* dacă pentru orice două vârfuri $x, y \in V$ există un x, y -drum. Observăm că schimbând ordinea lui x și y obținem că există și un y, x -drum.

Componentele tare-conexe ale grafului G sunt subgrafuri induse de clasele de echivalență ale relației \simeq definite pe V astfel

$$x \simeq y \text{ dacă și numai dacă există atât } x, y\text{-drum cât și } y, x\text{-drum.}$$

Exercițiu. Fie G un graf simplu. Demonstrați că cel puțin unul din grafurile G sau \bar{G} este conex.

2.15. Circuite. Cicluri

Vom defini în cele ce urmează noțiunea de circuit pentru grafurile orientate, respectiv pe cea de ciclu pentru grafurile neorientate.

Fie $G = (V, E)$ un graf.

2.15.1. Pentru un graf orientat G un *circuit cu m vârfuri* sau *m -circuit*, $m \in \mathbb{N}$, este un drum cu m arce cu capetele identice

$$C := [v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, v_{m-1}, e_{m-1}, v_m, e_m, v_1],$$

unde $v_1, \dots, v_m \in V(G)$ și $e_1, \dots, e_m \in E(G)$.

2.15.2. Pentru un graf neorientat G un *ciclu cu m vârfuri* sau *m -ciclu*, $m \in \mathbb{N}$, este un ciclu cu m muchii cu capetele identice

$$C := [v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, v_{m-1}, e_{m-1}, v_m, e_m, v_1],$$

unde $v_1, \dots, v_m \in V(G)$ și $e_1, \dots, e_m \in E(G)$.

2.15.3. Fie $C = [v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, v_m, e_m, v_1]$ un circuit sau un ciclu în G (după cum graful este orientat sau neorientat).

În cazul grafului neorientat notăm cu C^{-1} ciclul C „citat“ invers

$$C^{-1} = [v_1, e_m, v_m, e_{m-1}, v_{m-1}, \dots, e_2, v_2, e_1, v_1].$$

Notăm cu $E(C)$ și $V(C)$ multiseturile arcelor sau multiseturile muchiilor, respectiv ale vârfurilor. De asemenea, vom nota tot prin C graful $G[E(C)]$ induș de arcele sau muchiile lui C .

Circuitul, respectiv ciclul, se numește *simplu* dacă drumul, respectiv lanțul asociat este simplu și se numește *elementar* dacă drumul, respectiv lanțul asociat este elementar.

Exerciții

1. Pentru $n \geq 3$ notăm cu W_n graful „roată“ compus dintr-un ciclu elementar cu n vârfuri și un al $n+1$ -lea vârf auxiliar conectat prin câte o muchie de toate vârfurile ciclului.

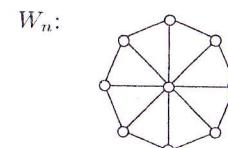


Figura 2.13.

(a) Demonstrați că pentru orice $3 \leq m \leq n+1$ graful W_n conține un ciclu elementar cu m vârfuri.

(b) Câte m -cicluri elementare are W_n ?

(c) Câte cicluri elementare are W_n ?

2. Un graf simplu $G = (V, E)$ se numește *autocomplementar* dacă el este izomorf cu propriul său graf complementar $G \sim \bar{G}$.

(a) Demonstrați că P_4 și C_5 sunt autocomplementare.

(b) Determinați toate grafurile autocomplementare cu 4 și cu 5 vârfuri.

(c) Demostrați că, dacă $G = (V, E)$ este autocomplementar atunci $|V|$ este multiplu de 4 sau multiplu de 4 plus 1.

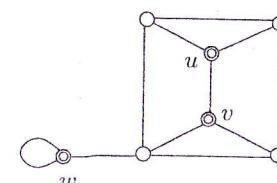
2.16. Operații cu grafuri

2.16.1. Fie $G = (V, E)$ un graf. Definim următoarele operații:

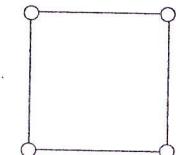
• *Ștergerea unei mulțimi de vârfuri* $V' \subseteq V$

$$G - V' := G[V - V'].$$

Cu alte cuvinte, se „șterg“ vârfurile din V' și arcele (muchiile) incidente în ele. Dacă $V' = \{v\}$ vom scrie $G - v$ în loc de $G - \{v\}$.



G



$G - \{u, v, w\}$

• *Ștergerea unei mulțimi de muchii* $E' \subseteq E$

$$G - E' := (V, E - E').$$

Dacă $E' = \{e\}$ vom scrie $G - e$ în loc de $G - \{e\}$.

- Suma dintre un graf și o mulțime E' de arce (muchii)

$$G + E' := (V \cup V(E'), E \cup E').$$

Suma muchie-disjunctă

$$G \ddot{+} E' := (V \cup V(E'), E \dot{\cup} E').$$

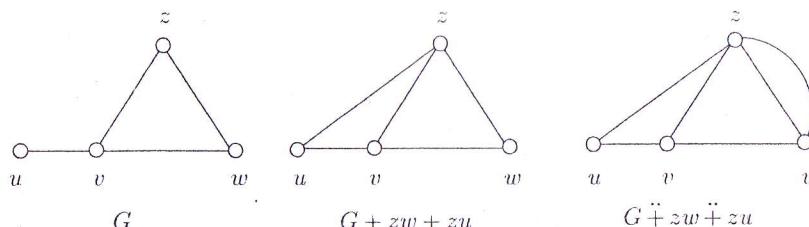


Figura 2.15.

Dacă $E' = \{e\}$ vom scrie $G + e$ și $G \ddot{+} e$ în loc de $G + \{e\}$ și $G \ddot{+} \{e\}$.

2.16.2. Fie $G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$ două grafuri. Definim următoarele operații:

- Intersecția grafurilor G_1, G_2 în cazul $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$

$$G_1 \cap G_2 := (V_1 \cap V_2, E_1 \cap E_2).$$

Dacă $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ sau dacă $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ spunem că grafurile G_1 și G_2 sunt vârf-disjuncte, respectiv muchie-disjuncte.

- Reuniunea sau suma grafurilor G_1, G_2

$$G_1 \cup G_2 := (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2).$$

Vom utiliza și notația alternativă $G_1 + G_2$ în loc de $G_1 \cup G_2$.

Se vede ușor că intersecția și reuniunea (suma) sunt operații asociative și comutative.

Pentru $p \geq 2$ grafuri G_1, \dots, G_p notăm

$$\bigcap_{i \in [p]} G_i := G_1 \cap G_2 \cap \dots \cap G_p, \quad \text{dacă } V(G_1) \cap \dots \cap V(G_p) \neq \emptyset$$

$$\bigcup_{i \in [p]} G_i = \sum_{i \in [p]} G_i := G_1 + \dots + G_p = G_1 \cup \dots \cup G_p.$$

- Articularea intr-un vârf a grafurilor G_1, G_2 în cazul $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Fie două vârfuri $v_1 \in V_1$ și $v_2 \in V_2$. Prin operația de articulare a grafurilor G_1 și G_2 intr-un vârf auxiliar w corespunzător lui v_1 și v_2 înțelegem graful obținut din $G_1 + G_2$ prin identificarea cu w a vâfurilor v_1 și v_2

OPERAȚII CU GRAFURI

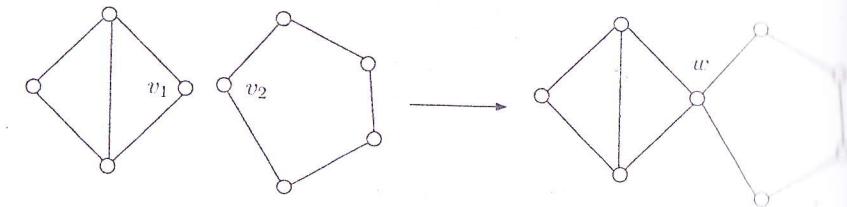


Figura 2.16.

2.16.3. (a) Suma vârf-disjunctă a grafurilor G_1, G_2 este un graf definit modulo un izomorfism astfel

$$G_1 \dot{+} G_2 \sim G'_1 + G'_2,$$

unde G'_1, G'_2 sunt copii disjuncți ale grafurilor G_1 , respectiv G_2 , adică $G'_1 \sim G_1, G'_2 \sim G_2$, și $V'_1 \cap V'_2 = \emptyset$.

- (b) Suma arc (muchie) disjunctă a grafurilor G_1, G_2

$$G_1 \ddot{+} G_2 := (V_1 \cup V_2, E_1 \dot{\cup} E_2).$$

Se vede ușor că suma vârf-disjunctă este o operație asociativă și comutativă modulo izomorfism, în sensul următor

$$(G_1 \dot{+} G_2) \dot{+} G_3 \sim G_1 \dot{+} (G_2 \dot{+} G_3),$$

$$G_1 \dot{+} G_2 \sim G_2 \dot{+} G_1.$$

De asemenea, suma muchie-disjunctă este o operație asociativă și comutativă modulo izomorfism. Fie G_1, \dots, G_p grafuri unde $p \geq 2$. Notăm

$$\sum_{i \in [p]} G_i := G_1 \dot{+} \dots \dot{+} G_p \quad \text{și} \quad \sum_{i \in [p]} G_i := G_1 \ddot{+} \dots \ddot{+} G_p.$$

Fie G un graf și $m \in \mathbb{N}$ un număr natural. Notăm

$$\overbrace{mG}^{\text{m ori}} := \underbrace{G \dot{+} \dots \dot{+} G}_{\text{m ori}} \quad \text{și} \quad \overbrace{mG}^{\text{m ori}} := \underbrace{G \ddot{+} \dots \ddot{+} G}_{\text{m ori}}.$$

Graful \overbrace{mG} este compus din m copii disjuncte ale lui G , iar graful \overbrace{mG} are același vârfuri cu G și fiecare muchie (arc) $e \in E$ din G este înlocuită prin m muchii (arce) cu aceleași capete.

2.16.4. Fie G_1, G_2 două grafuri neorientate. Definim următoarele operații:

- (i) Joinul grafurilor G_1, G_2 sau cuplarea completă

$$G_1 \vee G_2 := (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2 \cup \{xy \mid x \in V_1, y \in V_2\}).$$

Joinul (sau cuplarea completă) vârf-disjunct al grafurilor G_1, G_2 este un graf definit, modulo un izomorfism, astfel

$$G_1 \dot{\vee} G_2 \sim G'_1 \vee G'_2,$$

unde G'_1, G'_2 sunt copii disjuncte ale grafurilor G_1 , respectiv G_2 , $G'_1 \sim G_1$, $G'_2 \sim G$ și $V'_1 \cap V'_2 = \emptyset$. Se vede ușor că joinul este o operație *asociativă și comutativă*, iar joinul vârf-disjuncță este *asociativă și comutativă modulo un izomorfism* în sensul următor

$$(G_1 \dot{\vee} G_2) \dot{\vee} G_3 \sim G_1 \dot{\vee} (G_2 \dot{\vee} G_3) \quad \text{și} \quad G_1 \dot{\vee} G_2 \sim G_2 \dot{\vee} G_1.$$

Pentru $p \geq 2$ grafuri neorientate G_1, \dots, G_p notăm:

$$\bigvee_{i \in [p]} := G_1 \vee \dots \vee G_p \quad \text{și} \quad \bigvee_{i \in [p]} := G_1 \dot{\vee} \dots \dot{\vee} G_p.$$

(ii) *Produsul cartesian* al grafurilor G_1, G_2 este un graf definit modulo un izomorfism astfel

$$G_1 \times G_2 := G,$$

unde

$$V(G) = V_1 \times V_2 = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \in V_1, x_2 \in V_2\},$$

$$E(G) = \{(x_1, x_2), (y_1, y_2) \mid (x_1 y_1 \in E_1 \text{ și } x_2 = y_2) \text{ sau } (x_1 = y_1 \text{ și } x_2 y_2 \in E_2)\}.$$

Se vede ușor că produsul cartesian este o operație *asociativă și comutativă modulo un izomorfism* în sensul următor

$$(G_1 \times G_2) \times G_3 \sim G_1 \times (G_2 \times G_3) \quad \text{și} \quad G_1 \times G_2 \sim G_2 \times G_1.$$

Pentru $p \geq 2$ grafuri neorientate G_1, \dots, G_p . Notăm

$$\prod_{i \in [p]} G_i \sim G_1 \times \dots \times G_p.$$

(iii) *Puterea* G^m a unui graf simplu $G = (V, E)$, unde m este un număr natural $m \in \mathbb{N}$, este

$$G^m := (V, \{\{x, y\} \mid \{x, y\} \in V^{(2)}, d_G(x, y) \leq m\}).$$

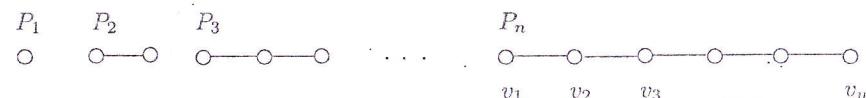
Exercițiu. Să se demonstreze că pentru orice trei grafuri neorientate G_1, G_2, G_3 avem relația

$$G_1 \dot{\vee} (G_2 \dot{\vee} G_3) \sim (G_1 \dot{\vee} G_2) + (G_1 \dot{\vee} G_3).$$

2.17. Grafuri tip (standard)

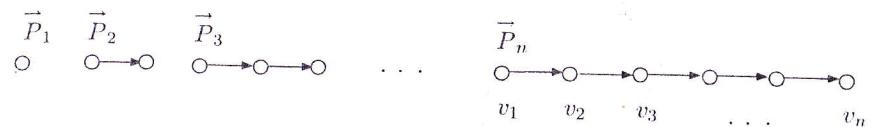
Fie $n \in \mathbb{N}$ și $V = \{v_1, \dots, v_n\}$. Definim, modulo un izomorfism, următoarele grafuri

2.17.1. (i) $P_n := n$ -lanțul elementar

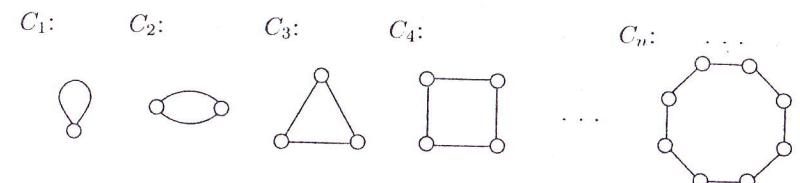


GRAFURI TIP (STANDARD)

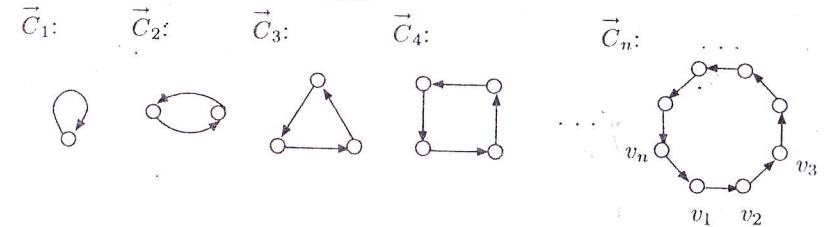
(ii) $\vec{P}_n := n$ -drumul elementar



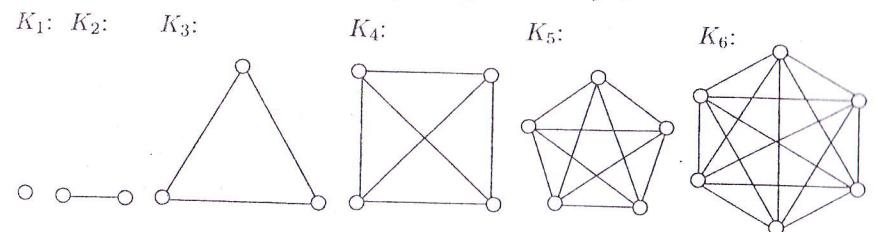
2.17.2. $C_n := n$ -ciclu elementar



2.17.3. $\vec{C}_n := n$ -circuitul elementar



2.17.4. $K_n := (V, V^{(2)}) =$ graful simplu complet cu n vârfuri



2.17.5. $\vec{K}_n :=$ un 1-graf orientat fără bucle al cărui graf simplu suport este K_n . Graful \vec{K}_n se mai numește și graf turneu.

Un exemplu de graf turneu cu 5 vârfuri este reprezentat în figura următoare.

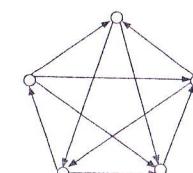
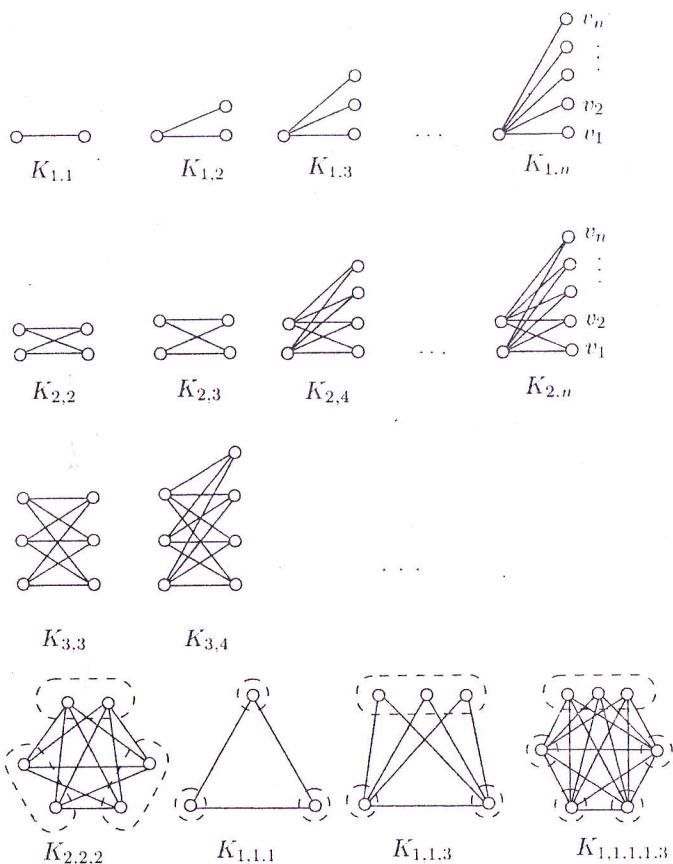


Figura 2.17.

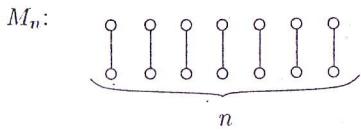
2.17.6. $\bar{K}_n :=$ complementarul grafului simplu complet cu n vârfuri = *graful cu n vârfuri și fără muchii* = mulțime independentă de n vârfuri.

2.17.7. $K_{a_1, \dots, a_p} := \bar{K}_{a_1} \dot{\vee} \dots \dot{\vee} \bar{K}_{a_p} =$ *graful p -partit complet* cu p -partiția vârfurilor de tip (a_1, \dots, a_p) , unde $a_1, \dots, a_p \in \mathbb{N}$ și $p \geq 2$.



2.17.8. $\bar{K}_{a_1, \dots, a_p} :=$ *complementarul grafului p -partit complet de tip (a_1, \dots, a_p)* .

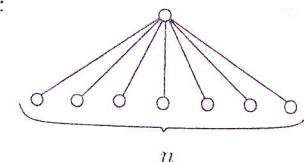
2.17.9. $M_n := nP_2 = n\text{-cuplaj} :=$ *graful induș de n muchii independente*



GRAFURI TIP (STANDARD)

2.17.10. $S_n := K_1 \dot{\vee} K_n =$ *n -stea (steaua cu n raze)*

$S_n:$



2.17.11. $T_n :=$ un graf conex obținut prin *articularea* succesivă a $n - 1$ muchii (muchii) unui $(n - 1)$ -cuplaj = un arbore cu n vârfuri pentru $n \geq 2$.

Vom nota de asemenea cu T_1 unicul arbore cu un vârf (modulo un izomorfism)

(1) $T_1 =$ arborii cu 1 vârf: ○

(2) $T_2 =$ arborii cu 2 vârfuri: ○○

(3) $T_3 =$ arborii cu 3 vârfuri: ○○○

(4) $T_4 =$ arborii cu 4 vârfuri: ○○○○ ○○○○ ○○○○

(5) $T_5 =$ arborii cu 5 vârfuri: ○○○○○ ○○○○○ ○○○○○

Observații. (a) Fie $T_n = (V, E)$ un arbore cu $E = \{e_1, e_2, e_3, \dots, e_{n-1}\}$, unde muchiile au fost indicate în ordinea articulării lor. Atunci, arboarele T_n poate fi privit drept ultimul dintr-o serie de $n - 1$ arbori $T_{i+1} = [e_1, e_2, e_3, \dots, e_i]$, unde $1 \leq i \leq n - 1$, obținuți unul din altul prin articularea către unei muchii

$$[e_1] \leq [e_1, e_2] \leq [e_1, e_2, e_3] \leq \dots \leq [e_1, e_2, e_3, \dots, e_{n-1}] = T_n.$$

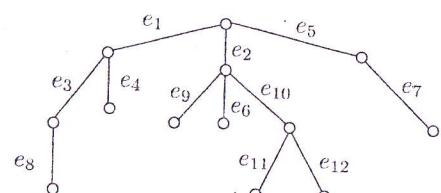


Figura 2.18. Un arbore cu 13 vârfuri (tip T_{13}) cu muchiile indicate în ordinea articulării lor.

(b) Evident, pentru producerea unui arbore ordinea articulării muchiilor nu este unică.

2.17.12. Un *cactus* este un graf conex obținut prin articularea succesivă de arbori și cicluri elementare.

$$\mathcal{T} = \left\{ \circ, \circ, \circ \circ, \circ \circ \circ, \circ \circ \circ \circ, \circ \circ \circ \circ \circ, \circ \circ \circ \circ \circ \circ, \circ \circ \circ \circ \circ \circ \circ, \dots \right\}$$

$$\mathcal{C}_{\geq 3} = \left\{ \begin{array}{c} \text{triangle} \\ \text{square} \\ \text{pentagon} \\ \text{hexagon} \\ \text{heptagon} \end{array}, \dots \right\}$$

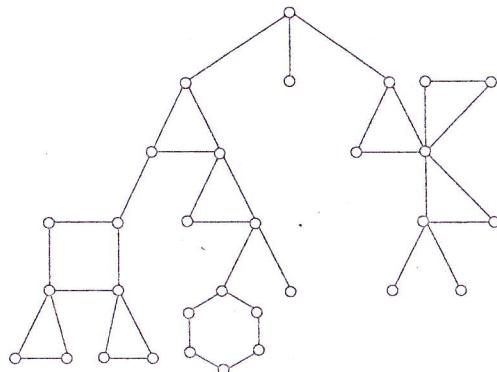


Figura 2.19.

2.18. Familii de grafuri

2.18.1. Fie $G_0 = (V_0, E_0)$ un graf, \mathcal{S} o mulțime de grafuri, $n, c \in \mathbb{N}$ și $m \in \mathbb{N}_{\geq 0}$. Notăm prin $\mathcal{S}_{n,c}^m$ mulțimea grafurilor din \mathcal{S} care au n vârfuri, m muchii (arce) și c componente conexe

$$\mathcal{S}_{n,c}^m = \{G \mid G \in \mathcal{S}, |V(G)| = n, |E(G)| = m, c(G) = c\}.$$

Dacă unul dintre parametrii n, m, c nu este menționat, atunci vom considera că grafurile selectate din \mathcal{S} nu sunt supuse condiției corespunzătoare $|V(G)| = n$ sau $|E(G)| = m$ sau $c(G) = c$.

2.18.2. Notăm prin \mathcal{S} sau prin $\left\{ \begin{array}{c} G_0 \\ \mathcal{S} \end{array} \right\}$ mulțimea subgrafurilor lui G_0 care sunt izomorfe cu grafuri din \mathcal{S}

$$\mathcal{S}(G_0) = \{G \mid G \leqslant G_0 \text{ pentru care există } G' \in \mathcal{S}, G \sim G'\},$$

iar prin $|\mathcal{S}(G_0)|$ sau $\binom{G_0}{\mathcal{S}}$ cardinalul acestei mulțimi. Dacă (P) este o anumită proprietate, vom nota prim $\mathcal{S}(G_0); (P)$ sau prin $\left\{ \begin{array}{c} G_0 \\ \mathcal{S}; (P) \end{array} \right\}$ mulțimea elementelor din $\mathcal{S}(G_0)$ cu proprietatea (P) .

2.18.3. Principalele mulțimi de grafuri studiate în această lucrare sunt, modulo un izomorfism,

- \mathcal{G} := mulțimea tuturor grafurilor,
- \mathcal{R} := mulțimea grafurilor regulate,
- \mathcal{K} := mulțimea grafurilor complete,
- \mathcal{M} := mulțimea cuplajelor,
- \mathcal{T} := mulțimea arborilor,
- \mathcal{C} := mulțimea ciclurilor elementare,
- \mathcal{Ct} := mulțimea cactușilor.

2.18.4. Pentru un graf $G_0 = (V_0, E_0)$ cu $n = |V_0|$ avem:

- $\mathcal{C}_n(G_0)$:= mulțimea ciclurilor hamiltoniene ale grafului G_0 ,
- $\mathcal{T}_n(G_0)$:= mulțimea arborilor parțiali ale grafului G_0 ,
- $\mathcal{G}_n(G_0)$:= mulțimea subgrafurilor parțiale ale grafului G_0 ,
- $\mathcal{R}_n(G_0)$:= mulțimea factorilor grafului G_0 .

Capitolul 3

Teoreme de caracterizare a multiseturilor de numere care pot fi gradele unui graf

Teoremă 3.1. Un multiset $s_0 = \{d_1, \dots, d_n\} \in \mathbb{N}_{\geq 0}^{(n)}$ (unde $n \geq 1$) este multisetul gradelor unui graf neorientat $G = (V, E)$ dacă și numai dacă

$$d_1 + d_2 + \dots + d_n \equiv 0 \pmod{2}.$$

Demonstrație. ⇒ Să presupunem că există un graf neorientat $G = (V, E)$ cu $s(G) = s_0$. Avem

$$d_1 + d_2 + \dots + d_n = \sum_{x \in V} d_G(x) = 2|E| \equiv 0 \pmod{2}.$$

⇐ Să presupunem acum că $d_1 + \dots + d_n \equiv 0 \pmod{2}$. Vom construi un graf neorientat $G = (V, E)$ cu $s(G) = s_0$. Observăm mai întâi că din relația $\sum_{i=1}^n d_i \equiv 0 \pmod{2}$ rezultă că în multisetul s_0 există un număr par $2k$ de numere impare, despre care putem presupune că sunt următoarele: d_1, d_2, \dots, d_{2k} .

Considerăm $V(G) := \{x_1, \dots, x_n\}$ mulțimea vârfurilor grafului G și construim în fiecare vârf $x_i \in V(G)$ un număr maxim de bucle astfel încât să avem $d_G(x_i) \leq d_i$, $1 \leq i \leq n$. Definim graful neorientat G astfel

$$G := B_1 + B_2 + \dots + B_n + x_1x_2 + x_3x_4 + \dots + x_{2k-1}x_{2k},$$

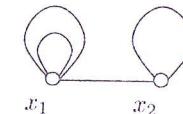
unde $B_i = (\{x_i\}, (x_i x_i)^{\lfloor d_i/2 \rfloor})$ este graful format din vârful x_i și o buclă $x_i x_i$ cu multiplicitate $\lfloor d_i/2 \rfloor$, $i \in [n]$.

Evident $s(G) = s_0$. □

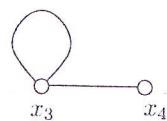
TEOREME DE CARACTERIZARE A MULTISETURILOR

Exemplu 3.2.

$G:$



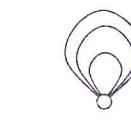
$$s(G) = \{3, 5, 3, 1, 1, 1, 6, 0\} = s_0$$



$$B_1, B_3 \sim$$



$$B_2 \sim$$



$$B_7 \sim$$



$$B_4, B_5, B_6, B_8 \sim$$



Teoremă 3.3. Un multiset $s_0 = \{d_1 \leq \dots \leq d_n\} \in \mathbb{N}_{\geq 0}^{(n)}$ (unde $n \geq 2$) este multisetul gradelor unui graf neorientat fără bucle dacă și numai dacă

- (a) $d_1 + \dots + d_n \equiv 0 \pmod{2}$;
- (b) $d_n \leq d_1 + \dots + d_{n-1}$.

Demonstrație. ⇒ Să presupunem că există un graf neorientat fără bucle $G = (V, E)$ cu $s(G) = s_0$. Proprietatea (a) este adevărată deoarece

$$d_1 + \dots + d_n = \sum_{x \in V} d_G(x) = 2|E| \equiv 0 \pmod{2}.$$

Proprietatea (b) este adevărată deoarece, graful G fiind fără bucle, avem succesiv

$$d_n \leq |E| \Leftrightarrow d_n \leq \frac{d_1 + \dots + d_n}{2} \Leftrightarrow d_n \leq d_1 + \dots + d_{n-1}.$$

Observație 3.4. Dacă graful neorientat $G = (V, E)$ nu ar fi supus restricției de a nu avea bucle, atunci proprietatea (b) nu mai este în general adevărată. De exemplu, în cazul grafului cu exact o muchie care este și buclă xx , atunci $d_G(x) = 2$, $|E| = 1$, iar multisetul gradelor este $s(G) = \{0, \dots, 0, 2\}$ și avem $d_G(x) = 2 > 0 = d_1 + \dots + d_n$.

⇐ Să presupunem acum că multisetul $s_0 = \{d_1 \leq \dots \leq d_n\}$ are proprietățile (a) și (b). Vom construi un graf neorientat fără bucle $G = (V, E)$ cu $s(G) = s_0$.

Considerăm graful neorientat $G' = (V', E')$ construit ca și în demonstrația teoremei 3.1, cu proprietatea $s(G') = s_0$ (aceasta este posibil deoarece s_0 are proprietatea (a)). Transformăm buclele din G' în muchii cu capete diferite prin operație de tipul $xx + yy \rightarrow 2xy$,



Figura 3.1.

aplicate atâtă timp cât există două bucle xx și yy cu $x \neq y \in V$. (Gradele vârfurilor se conservă prin aceste transformări.) Se obține un graf neorientat $G'' = (V, E'')$ cu $s(G'') = s_0$ care are bucle cel mult într-un vârf; fie acesta x . Asociem fiecare buclă de tip xx cu câte o muchie yz din $G'' - x$ și transformăm fiecare astfel de pereche în câte două muchii astfel

$$xx + yz \rightarrow xy + xz.$$



Figura 3.2.

(Această transformare conservă gradele vârfurilor.) Se obține un graf neorientat fără bucle $G = (V, E)$ cu $s(G) = s_0$.

Singurul lucru care mai trebuie demonstrat este că numărul buclelor de tip xx din G'' este cel mult egal cu cel al muchiilor din $G'' - x$. Într-adevăr notăm cu m numărul muchiilor cu capete diferite incidente în x și avem

- numărul buclelor incidente în x este $(d_{G''}(x) - m)/2$;
- numărul muchiilor din $G'' - x$ este $(\sum_{z \in V - \{x\}} d_{G''}(z) - m)/2$.

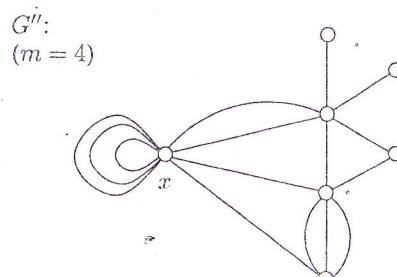


Figura 3.3.

Aveam

$$\frac{d_{G''}(x) - m}{2} \leq \frac{\sum_{z \in V - \{x\}} d_{G''}(z) - m}{2},$$

deoarece această inegalitate este echivalentă cu următoarea

$$2d_{G''}(x) \leq \sum_{z \in V} d_{G''}(z),$$

iar din (b) știm că

$$2 \max\{d_{G''}(z) \mid z \in V\} \leq \sum_{z \in V} d_{G''}(z). \quad \square$$

Teoremă 3.5. (Havel și Hakimi) Un multiset $s_0 = \{d_1 \geq \dots \geq d_n\} \in \mathbb{N}_{\geq 0}^{(n)}$, unde $n \geq 2$ și $d_1 \leq n - 1$, este multisetul gradelor unui graf simplu dacă și numai dacă multisetul $s'_0 = (d_2 - 1, d_3 - 1, \dots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, \dots, d_n)$ este multisetul gradelor unui graf simplu.

Demonstrație. \Rightarrow Să presupunem că există un graf simplu $G = (V, E)$ cu $s(G) = s_0$, mai precis $V = \{x_1, \dots, x_n\}$ și $d_G(x_t) = d_t$ pentru $t \in [n]$. Vom construi un graf simplu $G' = (V', E')$ cu $s(G') = s'_0$.

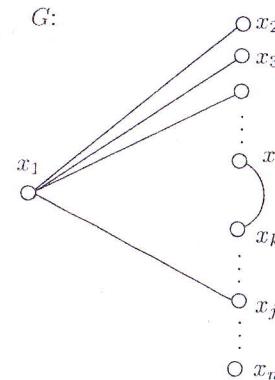
Cazul 1. Dacă pentru orice $i \in \{2, \dots, d_1 + 1\}$ avem $x_1 x_i \in E$, atunci definim $G' := G - x_1$ și evident G' este graf simplu și $s(G') = s'_0$.

Cazul 2. Dacă există $i \in \{2, \dots, d_1 + 1\}$ cu $x_1 x_i \notin E$, atunci există $j, d_1 + 1 \leq j \leq n$, cu $x_1 x_j \in E$ și, deoarece $d_G(x_i) \geq d_G(x_j)$, rezultă că există $k \in \{2, \dots, n\}$, $k \neq i, j$, cu $x_i x_k \in E$ și $x_j x_k \notin E$.

Definim

$$G_1 := G - x_1 x_j - x_i x_k + x_1 x_i + x_j x_k.$$

$G:$



$G_1:$

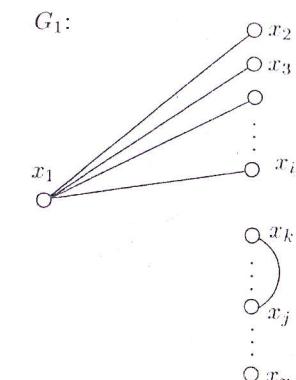


Figura 3.4.

G_1 este graf simplu, $V(G_1) = V(G)$ și $d_{G_1}(x_t) = d_G(x_t) = d_t$ pentru $t \in [n]$.

Fie p numărul indicilor $i \in \{2, 3, \dots, d_1 + 1\}$ pentru care $x_1 x_i \notin E$. Prin p transformări de tipul descris anterior (pentru fiecare din acești indici), obținem o secvență

de grafuri simple G, G_1, G_2, \dots, G_p peste mulțimea de vârfuri $v = \{x_1, \dots, x_n\}$ cu același grad în fiecare vârf $x_t \in V$. În plus, pentru orice $i \in \{2, 3, \dots, d_1 + 1\}$ avem $x_1 x_i \in E(G_p)$. Definim, ca și în cazul 1, $G' = G_p - x_1$. Evident G' este graf simplu și $s(G') = s'_0$.

⇒ Să presupunem că există un graf simplu $G' = (V', E')$ cu $s(G') = s'_0$. Notăm $V' = \{x_2, x_3, \dots, x_n\}$ astfel încât să avem

$$\begin{aligned} d_{G'}(x_2) &= d_2 - 1, & \dots, & d_{G'}(x_{d_1+1}) &= d_{d_1+1} - 1, \\ d_{G'}(x_{d_1+2}) &= d_{d_1+2}, & \dots, & d_{G'}(x_n) &= d_n. \end{aligned}$$

Fie x_1 un vârf auxiliar. Definim

$$G := G' + [x_1, x_2] + [x_1, x_3] + \dots + [x_1, x_{d_1+1}].$$

Evident G este graf simplu și $s(G) = s_0$. □

Observație 3.6. În cazurile 1 și 2 putem prezenta șirul transformărilor sintetic astfel:

Fie $i_1, \dots, i_p \in \{2, 3, d_1 + 1\}$ acei indici din mulțimea $\{2, 3, \dots, d_1 + 1\}$ pentru care $x_1 x_{i_1} \notin E, \dots, x_1 x_{i_p} \notin E$.

Dacă $p = 0$ atunci definim $G' := G - x_1$.

Dacă $p > 0$ atunci există p indicii $j_1, \dots, j_p \in \{d_1 + 2, \dots, n\}$ pentru care $x_1 x_{j_1} \in E, \dots, x_1 x_{j_p} \in E$.

Deoarece G este graf simplu pentru fiecare $t \in \{1, \dots, p\}$ avem

$$x_1 x_{i_t} \notin E, \quad x_1 x_{j_t} \in E \quad \text{și} \quad d(x_{i_t}) \geq d(x_{j_t}),$$

rezultă că există p indicii, nu neapărat distincți,

$$k_1 \neq i_1, j_1, \dots, k_p \neq i_p, j_p, \quad k_1, \dots, k_p \in \{2, 3, \dots, n\}$$

cu proprietățile $x_{i_t} x_{k_t} \in E$ și $x_{j_t} x_{k_t} \notin E$ pentru orice $t \in \{1, \dots, p\}$.

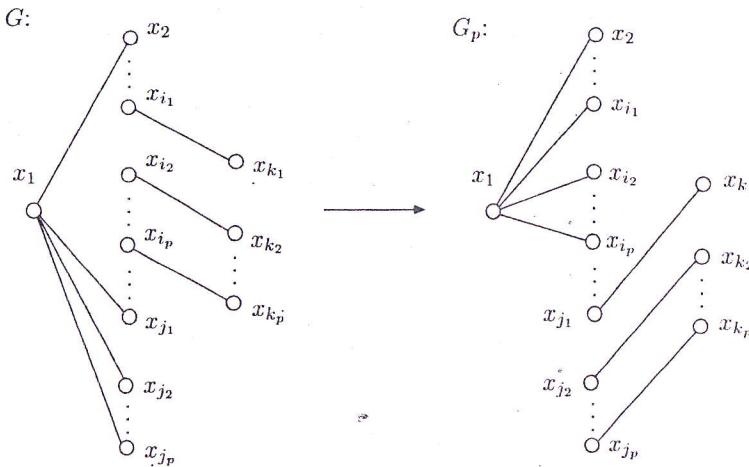


Figura 3.5.

Definim

$$G_p := G - \sum_{t=1}^p x_1 x_{j_t} - \sum_{t=1}^p x_{i_t} x_{k_t} + \sum_{t=1}^p x_1 x_{i_t} + \sum_{t=1}^p x_{j_t} x_{k_t}.$$

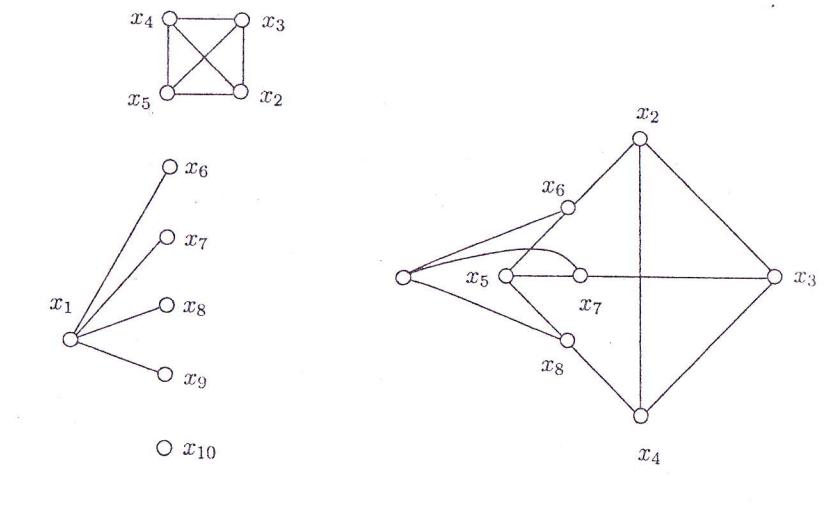
Graful G_p astfel construit este simplu, $V(G_p) = V(G)$ și $d_{G_p}(x_t) = d_t, t \in [n]$.

Definim $G' := G_p - x_1$. Graful G' este simplu și $s(G') = s'_0$. Vezi figura 3.5, unde vârfurile $x_{k_1}, x_{k_2}, \dots, x_{k_p}$ din graful G_p nu sunt neapărat diferite.

Problemă 3.7. Fie $p, n \in \mathbb{N}$ și $0 \leq p \leq (n-1)/2$. Să se construiască un graf simplu $G = (V, E)$ cu $V = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, $d_G(x_1) \geq \dots \geq d_G(x_n)$, $d_G(x_1) = p$, pentru care sunt necesare p transformări (în termenii demonstrației teoremei 3.5, cazul 2) pentru a obține un graf simplu $G' = (V', E')$ cu proprietățile: $d_{G'}(x_i) = d_G(x_i)$ pentru $i \notin \{1\}$ și $x_1 x_i \in E'$ pentru $i \in \{2, 3, \dots, p+1\}$.

Exemplu 3.8. 1. $G = K_p(x_2, \dots, x_{p+1}) + St(x_1; x_{p+2}, \dots, x_{2p+1}) + x_{2p+2} + \dots + x_n$.

2. Pentru $np \equiv 0 \pmod{2}$ se consideră G un graf p -regulat cu n vârfuri $V(G) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ etichetate astfel încât vecinii lui x_1 să nu fie x_2, x_3, \dots, x_{p+1} .



$p = 4, n = 11$

$p = 3, n = 8$

Figura 3.6.

Capitolul 4

Arbore

4.1. Teoreme de caracterizare a arborilor

Propoziție 4.1. Prin articularea într-un vârf a două grafuri conexe vârf-disjuncte se obține un graf conex.

Demonstrație. Să considerăm două grafuri conexe $G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$, unde $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, cu $v_1 \in V_1$, $v_2 \in V_2$, și G graful obținut din G_1 și G_2 prin articularea lor în vârful auxiliar w corespunzător vârfurilor v_1 și v_2 .

Fie $x, y \in V(G)$ două vârfuri diferite. Vom demonstra că există un x, y -lanț $P \leqslant G$. Într-adevăr, dacă $x, y \in V(G_1)$ atunci, deoarece G_1 este conex, există un x, y -lanț $P \leqslant G_1$, deci $P \leqslant G$. Analog, se procedează în cazul în care $x, y \in V(G_2)$. În fine, dacă $x \in V(G_1)$ și $y \in V(G_2)$ atunci, deoarece G_1 și G_2 sunt conexe, există un x, w -lanț $P_1 \leqslant G_1$ și un w, y -lanț $P_2 \leqslant G_2$, prin urmare $P = x \xrightarrow{P_1} w \xrightarrow{P_2} y$ este un x, y -lanț în G . \square

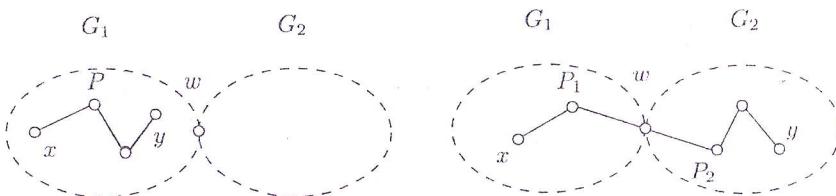


Figura 4.1.

Propoziție 4.2. Un arbore este un graf conex.

Demonstrație. Afirmația este o consecință imediată a definiției și a propoziției 4.1. \square

Propoziție 4.3. Un arbore nu conține cicluri elementare (este aciclic).

Demonstrație. În cazul unui arbore cu un vârf nu este nimic de demonstrat.

Să considerăm un arbore $T = (V, E)$ cu $E = \{e_1, e_2, \dots, e_{n-1}\}$, unde $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, iar muchiile au fost indicate în ordinea articulațiilor lor. Dacă, prin absurd, arborele T ar conține un ciclu elementar $C \leqslant T$ cu $C = [e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_t}]$, unde $t \geq 3$ și $i_1, i_2, \dots, i_{t-1} \leq i_t$ atunci muchia e_{i_t} ar avea cele două vârfuri ale sale în arborele $[e_1, e_2, \dots, e_{i_t-1}]$, ceea ce este imposibil, deoarece $[e_1, e_2, \dots, e_{i_t}]$ se obține din $[e_1, e_2, \dots, e_{i_t-1}]$ prin articularea muchiei e_{i_t} . Deci T nu conține cicluri. \square

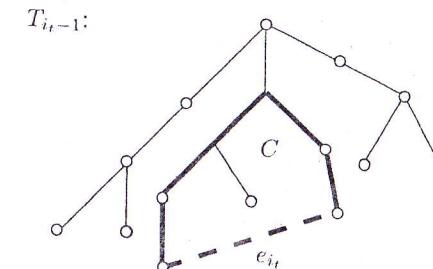


Figura 4.2.

Observație 4.4. Propozițiile 4.2 și 4.3 arată că un arbore este un graf *conex și aciclic*. În teorema 4.6 vom vedea că aceste două proprietăți sunt definitorii pentru un arbore.

Propoziție 4.5. Un graf $T = (V, E)$ cu $|V| \geq 2$ conex și aciclic (fără cicluri) conține cel puțin două vârfuri de gradul 1.

Demonstrație. Vom demonstra că orice lanț elementar maximal (adică el nu este subgraf propriu al unui alt lanț elementar) $P \leqslant T$, $P = [x, x', x'', \dots, y]$ are capetele de gradul 1: $d_T(x) = d_T(y) = 1$.

Într-adevăr, din faptul că P este maximal rezultă $N(x) \subseteq V(P)$, deoarece altfel lanțul s-ar putea prelungi. Cum în T nu există cicluri, avem $|N(x)| = 1$, deoarece altfel ar exista $z \in N(x)$, $z \neq x'$ și am avea ciclul $C = [x, x', x'', \dots, z, x] \leqslant T$; contradicție. Deci $d_T = 1$ și analog $d_T(y) = 1$. \square

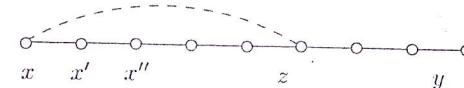


Figura 4.3.

Teoremă 4.6. Un graf $T = (V, E)$ este arbore dacă și numai dacă el este conex și aciclic.

Demonstrație. (1) Dacă T este un arbore atunci, el este graf conex și aciclic conform propozițiilor 4.2 și 4.3.

(2) Să presupunem acum că $T = (V, E)$ este un graf conex și aciclic cu $n = |V|$ vârfuri. Vom demonstra prin inducție matematică după n că graful T este arbore. Notăm cu $I(n)$ ipoteza inducțivă.

$\mathcal{I}(1)$ este adevărată deoarece în acest caz $T \sim K_1 \sim \circ$.

$\mathcal{I}(2)$ este adevărată deoarece în acest caz $T \sim P_2 \sim \circ - \circ$.

$\mathcal{I}(3)$ este adevărată deoarece în acest caz $T \sim P_3 \sim \circ - \circ - \circ$.

Vom demonstra că $\mathcal{I}(n-1)$ implică $\mathcal{I}(n)$ pentru $n \geq 4$.

Fie $x \in V(T)$ un vârf de gradul 1 din T (cea ce există conform propoziției 4.5) și fie x' vârful adjacent acestuia.

Se vede ușor că graful $T - x$ este aciclic, deoarece T este aciclic. De asemenea, graful $T - x$ este conex, deoarece graful T este conex iar vârful x , având gradul unu, nu se poate afla strict în interiorul nici-unui lanț elementar din T și, prin urmare, ștergerea sa nu produce disconectarea grafului.

Rezultă atunci că $T - x$ este arbore conform $\mathcal{I}(n-1)$, iar graful T se obține prin articularea arborelui $T - x$ cu muchia $x'x$ în vârful x' . Deci T este arbore. \square

Observație 4.7. Fie T un arbore cu $|V(T)| \leq 2$ și $x \in V(T)$ un vârf de grad k . Atunci graful $T - x$ are $k = d_T(x)$ componente conexe și acestea sunt arbori.

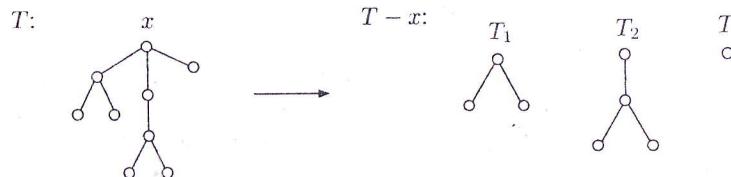


Figura 4.4.

Dacă $d_T(x) = 1$, atunci $T' = T - x$ este arbore de asemenea.

Propoziție 4.8. Un graf $T = (V, E)$ este arbore dacă și numai dacă este conex muchie-minimal.

Demonstrație. Pentru $|V| = 1$ proprietatea este evidentă. Considerăm $|V| \geq 2$.

(1) Să presupunem că $T = (V, E)$ este arbore. Fie $e = xy \in E$ cu $x \neq y$ o muchie din T (există deoarece T este conex și $|V| \geq 2$). Dacă prin absurd, $T' = T - e$ ar fi conex, atunci ar exista un x, y -lanț $P \leqslant T'$. Dar $C := P + xy \leqslant T$ este ciclu în T ; contradicție. Deci T este conex muchie-minimal.

(2) Să presupunem acum că $T = (V, E)$ este conex muchie-minimal. Dacă, prin absurd, T nu ar fi arbore, atunci în T ar exista un ciclu $C \leqslant T$. Prin ștergerea din T a unei muchii oarecare e a ciclului C s-ar obține un graf $T' := T - e$, tot conex; contradicție. Deci T este aciclic și, fiind conex, el este arbore. \square

Consecință 4.9. Orice graf conex $G = (V, E)$ conține un arbore parțial $T \prec G$. Acesta poate fi obținut prin ștergerea treptată a muchiilor din G , cu condiția conservării conexității la fiecare pas, până se obține un graf aciclic astfel:

(a) Dacă G nu conține cicluri atunci definim $T := G$ și STOP;

(b) Dacă există în G un ciclu C , atunci alegem o muchie oarecare $e \in E(C)$, înlocuim G cu $G - e$ și repetăm pasul (a).

TEOREME DE CARACTERIZARE A ARBORILOR

Graful $T = (V, E')$ obținut este conex (deoarece ștergerea unei muchii dintr-un ciclu nu afectează conexitatea) și este aciclic. Deci T este arbore.

Propoziție 4.10. Un graf $T = (V, E)$ este arbore dacă și numai dacă este aciclic muchie-maximal.

Demonstrație. Pentru $|V| \in \{1, 2\}$ proprietatea este evidentă. Considerăm $|V| \geq 3$.

(1) Să presupunem că $T = (V, E)$ este arbore. Fie $x, y \in V$ două vârfuri neadiacente în T (există deoarece altfel T ar fi complet și cum $|V| \geq 3$, atunci T ar conține cicluri). Fie $P \leqslant T$ un x, y -lanț (există deoarece T este conex). Graful $T' := T + xy$ conține ciclul $C = P + xy$. Deci T' este aciclic muchie-maximal.

(2) Să presupunem acum că T este aciclic muchie-maximal. Fie $x \neq y \in V$ două vârfuri oarecare din T și să demonstrează că există un x, y -lanț $P \leqslant T$. Dacă $xy \in E$ atunci luăm $P := [x, y]$. Dacă $xy \notin E$ atunci graful $T' = T + xy$ conține un ciclu C și cum T este aciclic, avem $e = xy \in E(C)$. Deci $P := C - e \leqslant T$ este un x, y -lanț în T . Rezultă că T este conex și fiind aciclic, el este arbore. \square

Propoziție 4.11. Într-un arbore $T = (V, E)$ avem $|V| - |E| = 1$.

Demonstrație. Utilizăm inducția matematică după numărul $n = |V|$ al vârfurilor arborelui T .

Notăm cu $\mathcal{I}(n)$ afirmația din enunț.

$\mathcal{I}(1)$ este adevărată, deoarece $T \sim (\{x\}, \emptyset)$ și avem $|V(T)| - |E(T)| = 1 - 0 = 1$.

Vom demonstra că $\mathcal{I}(n-1)$ implică $\mathcal{I}(n)$ pentru $n \geq 2$.

Fie $x \in V(T)$ cu $d_T(x) = 1$ (x există conform propoziției 4.5). Atunci $T' = T - x$ este arbore cu $n - 1$ vârfuri și $n - 2$ muchii (conform $\mathcal{I}(n-1)$). Avem

$$|V(T')| = |V(T)| - 1,$$

$$|E(T')| = |E(T)| - 1,$$

$$|V(T)| - |E(T)| = (|V(T)| - 1) - (|E(T)| - 1) = |V(T')| - |E(T')| = 1. \quad \square$$

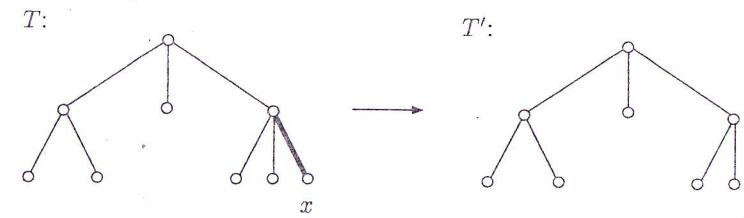


Figura 4.5.

Propoziție 4.12. Un graf $T = (V, E)$ este arbore dacă și numai dacă T este conex și $|V| - |E| = 1$.

Demonstrație. (1) Dacă $T = (V, E)$ este arbore, atunci T este conex și $|V| - |E| = 1$ conform propozițiilor 4.6 și 4.11.

(2) Să presupunem acum că $T = (V, E)$ este conex și $|V| - |E| = 1$. Fie $T' = (V, E') \prec T$ un arbore parțial al lui T (există conform consecinței 4.9). Conform propoziției 4.11 avem $|V| - |E'| = 1$. Dar $|V| - |E| = 1$ prin ipoteză. Rezultă $|E| = |E'|$ de unde, înțând cont că $E \supseteq E'$, $E = E'$ și deci $T = T'$. Deci T este arbore. \square

Propoziție 4.13. Un graf $T = (V, E)$ este arbore dacă și numai dacă T este aciclic și $|V| - |E| = 1$.

Demonstrație. (1) Dacă $T = (V, E)$ este arbore atunci T este aciclic prin definiție și $|V| - |E| = 1$ conform propoziției 4.11.

(2) Să presupunem acum că T este aciclic și $|V| - |E| = 1$. Fie $T = T_1 + \dots + T_q$ descompunerea lui T în componente conexe. Pentru orice $i \in \{1, \dots, q\}$ graful $T_i = (V_i, E_i)$ este conex și aciclic, deci arbore, și conform propoziției 4.11 avem $|V_i| - |E_i| = 1$ de unde $\sum_{i=1}^q (|V_i| - |E_i|) = q$ sau $\sum_{i=1}^q |V_i| - \sum_{i=1}^q |E_i| = q$ sau $|V| - |E| = q$. Dar $|V| - |E| = 1$ prin ipoteză. Rezultă $q = 1$ și $T = T_1$. Deci T este arbore. \square

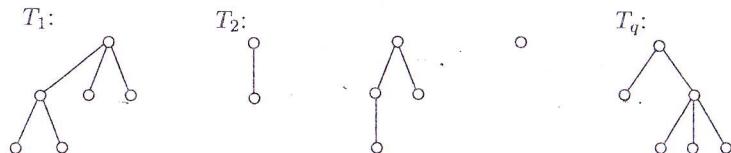


Figura 4.6.

Observație 4.14. O altă demonstrație a cazului (b), asemănătoare cu cea a teoremei 4.6, este următoarea:

Demonstrație. Să presupunem că T este aciclic și $|V| - |E| = 1$.

Fie E' cu $E \subseteq E' \subseteq V^{(2)}$ o parte maximală cu proprietatea că graful $T'(V, E')$ este aciclic. Conform teoremei 4.10, T' este arbore și conform propoziției 4.11 avem $|V| - |E'| = 1$. Dar $|V| - |E| = 1$ prin ipoteză. Rezultă $|E| = |E'|$. Prin urmare $T = T'$ și deci T este arbore. \square

Propoziție 4.15. Un graf $T = (V, E)$, $|V| \geq 2$, este arbore dacă și numai dacă este conex prin lanțuri unice, adică orice două vârfuri $x \neq y \in V$ sunt capetele unui unic x, y -lanț.

Demonstrație. (1) Să presupunem că $T = (V, E)$ este arbore și să considerăm două vârfuri $x \neq y \in V$. Graful T conține un x, y -lanț $P \leqslant T$ (deoarece T este conex). Dacă prin absurd T ar mai conține un x, y -lanț $P' \leqslant T$, $P' \neq P$, atunci $P + P' \leqslant T$ și $P + P'$ este ciclu; contradicție. Deci T este conex prin lanțuri unice.

(2) Să presupunem acum că T este conex prin lanțuri unice. Dacă, prin absurd, T nu ar fi arbore, atunci în T ar exista un ciclu $C \leqslant T$. Pentru două vârfuri $x \neq y \in V(C)$ există în C două x, y -lanțuri diferite ceea ce contrazice ipoteza. Deci T este aciclic și, fiind conex, el este arbore. \square

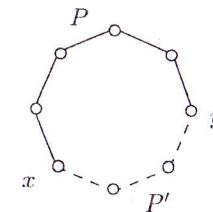


Figura 4.7.

Propoziție 4.16. Fie $T = (V, E)$ un arbore, $|V| \geq 3$ și $x \neq y \in V$ două vârfuri neadiacente $xy \notin E$. Atunci graful $T' := T + xy$ conține exact un ciclu.

Demonstrație. Graful $T' = T + xy$ conține cel puțin un ciclu C deoarece T fiind arbore este aciclic muchie-maximal (conform propoziției 4.10). Acest ciclu conține muchia xy deoarece T este aciclic.

Să presupunem, prin absurd, că în T' mai există un ciclu $C' \neq C$. și acest ciclu conține în mod necesar muchia xy . Fie P și P' lanțurile obținute din C respectiv C' prin stergerea muchiei xy . Atunci $P + P' \leqslant T$ și $P + P'$ este ciclu; contradicție. Deci $T' = T + xy$ conține exact un ciclu. \square

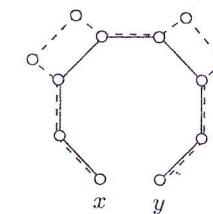


Figura 4.8.

Propoziție 4.17. Un multiset s_0 de $n \geq 2$ numere naturale mai mari sau egale cu 1, $s_0 = d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n \in \mathbb{N}_{\geq 1}^{(n)}$, este sirul gradelor unui arbore $T = (V, E)$ dacă și numai dacă $d_1 + d_2 + \dots + d_n = 2(n - 1)$.

Demonstrație. (1) Să presupunem că există un arbore $T = (V, E)$ cu $s(T) = s_0$. Avem

$$d_1 + d_2 + \dots + d_n = \sum_{x \in V} d_T(x) = 2|E| = 2(|V| - 1) = 2(n - 1).$$

(2) Să presupunem acum că $d_1 + \dots + d_n = 2(n - 1)$. Vom demonstra prin inducție matematică după n că există un arbore $T = (V, E)$ cu $s(T) = s_0$. Notăm cu $\mathcal{I}(n)$ ipoteza inductivă.

$\mathcal{I}(2)$ este adevărată. Într-adevăr, din relațiile $d_1 + d_2 = 2(2 - 1) = 2$ și $d_1 \geq d_2 \geq 1$ rezultă $d_1 = d_2 = 1$. Considerăm arboile T cu două vârfuri și o muchie care le unește și avem $s(T) = (1, 1) = s_0$.

Vom demonstra că $\mathcal{I}(n - 1)$ implică $\mathcal{I}(n)$ pentru $n \geq 3$. În acest caz, din relațiile

$$d_1 + d_2 + \cdots + d_n = 2(n - 1), \quad d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_n \geq 1$$

rezultă ușor prin reducere la absurd că $d_n = 1$ și $d_1 \geq 2$. Într-adevăr, dacă, prin absurd, $d_n \geq 2$ atunci $2(n - 1) = d_1 + \cdots + d_n \geq 2n$ de unde $-2 \geq 0$, contradicție, iar dacă $d_1 = 1$ atunci $d_1 = d_2 = \cdots = d_n = 1$ și avem $2(n - 1) = d_1 + \cdots + d_n = n$, de unde $n = 2$; contradicție.

Secvența $s'_0 = d_1 - 1 \ d_2 \ \cdots \ d_{n-1}$ este compusă din $n - 1$ numere naturale mai mari sau egale cu 1 (deoarece $d_1 \geq 2$) și suma acestor numere este $2(n - 2)$, deoarece $d_n = 1$. Conform ipotezei inducțive $\mathcal{I}(n - 1)$ există un arbore T' cu $s(T') = s'_0$. Fie $x \in V(T')$ cu $d_{T'}(x) = d_1 - 1$ și y un vârf auxiliar ($y \notin V(T')$). Graful $T := T' + [x, y]$ este un arbore și $s(T) = s_0$. \square

$$T = T' + [x, y]:$$

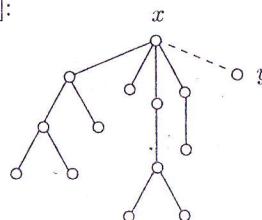


Figura 4.9.

Exerciții

1. Demonstrați prin reducere la absurd proprietatea din observația 4.7.

Soluție. Fie $T = T_1 + \cdots + T_p$ descompunerea lui $T' = T - x$ în componente conexe. Vârful x are în fiecare componentă conexă cel puțin un vecin (deoarece T este conex). Deci $p \geq k$. Dar vârful x nu poate avea doi vecini în aceeași componentă conexă deoarece T este aciclic. Deci $p \leq k$. Rezultă $p = k$. Pe de altă parte, pentru orice $i \in \{1, \dots, p\}$ graful $T_i = (V_i, E_i)$ este conex și aciclic, deci este arbore. \square

2. Demonstrați propoziția 4.5 prin inducție matematică utilizând observația 4.7.

Soluție. Pentru un graf oarecare G notăm cu $f(G)$ numărul vârfurilor de gradul 1. Vom demonstra că $f(T) \geq 2$ pentru orice arbore $T = (V, E)$ cu $n = |V| \geq 2$ vârfuri.

Utilizăm metoda inducției matematice după numărul n al vârfurilor lui T . Notăm cu $\mathcal{I}(n)$ afirmația de demonstrat.

$\mathcal{I}(2)$ este adevărată deoarece $T \sim K_2$.

Vom demonstra că $\mathcal{I}(< n)$ implică $\mathcal{I}(n)$ pentru $n \geq 3$. Deoarece $T = (V, E)$ este conex și $n \geq 3$, rezultă că orice vârf din T are gradul cel puțin egal cu 1. Fie $x \in V$ cu $d_T(x) = k \geq 1$ și $T' = T - x = T_1 + \cdots + T_k$ descompunerea în componente conexe a lui $T' = T - x$ (conform observației 4.7).

Pentru fiecare arbore $T_i = (V_i, E_i)$ cu $|V_i| \geq 2$ vârfuri avem $f(T_i) \geq 2$ conform ipotezei inducțive. Pe de altă parte, vârful x are exact câte un vecin în fiecare V_i , $i \in [k]$.

Tinem cont de observațiile precedente și obținem:

APLICAȚII

cazul $k = 1$ și $|V_1| = 1$ este imposibil deoarece $n = |V| = 1 + |V_1| \geq 3$;
cazul $k = 1$ și $|V_1| \geq 2$

$$f(T) \geq 1 + (f(T_1) - 1) \geq 1 + (2 - 1) = 2;$$

cazul $k \geq 2$

$$f(T) \geq \sum_{\substack{i \in [k] \\ |V_i| \geq 2}} (f(T_i) - 1) + \sum_{\substack{i \in [k] \\ |V_i|=1}} 1 \geq \sum_{\substack{i \in [k] \\ |V_i| \geq 2}} (2 - 1) + \sum_{\substack{i \in [k] \\ |V_i|=1}} 1 = k \geq 2.$$

Deci $f(T) \geq 2$. \square

3. Demonstrați propoziția 4.11 prin inducție matematică utilizând observația 4.7

Soluție. Vom demonstra că în orice arbore $T = (V, E)$ avem $|V| - |E| = 1$. Utilizăm metoda inducției matematice după numărul n al vârfurilor arborelui T , $n = |V|$.

Notăm cu $\mathcal{I}(n)$ afirmația de demonstrat.

$\mathcal{I}(1)$ este adevărată deoarece $|V| = 1$, $|E| = 0$ și deci $|V| - |E| = 1$.

Vom demonstra că $\mathcal{I}(< n)$ implică $\mathcal{I}(n)$ pentru $n \geq 2$. Deoarece $T = (V, E)$ este conex și $n \geq 2$, rezultă că orice vârf din T are gradul cel puțin egal cu 1. Fie $x \in V$ cu $d_T(x) = k \geq 1$ și $T' = T - x = T_1 + \cdots + T_k$ descompunerea în componente conexe a lui $T' = T - x$ (conform observației 4.7). Fiecare graf $T_i = (V_i, E_i)$, $i \in [k]$, este arbore. Utilizăm ipoteza inducțivă și obținem

$$|V| - |E| = \left(1 + \sum_{i=1}^k |V_i|\right) - \left(k + \sum_{i=1}^k |E_i|\right) = 1 - k + \sum_{i=1}^k (|V_i| - |E_i|) = 1 - k + k = 1.$$

Deci $|V| - |E| = 1$. \square

4.2. Aplicații

Teoremă 4.18. (König) Un graf $G = (V, E)$ are toate ciclurile elementare par dacă și numai dacă G este bipartit.

Demonstrație. (1) Dacă $G = (V, E)$ este un graf bipartit cu bipartitia vârfurilor $V = A \cup B$, atunci orice ciclu $C \subseteq G$ este par deoarece, la o citire a acestuia, vârfurile sale aparțin alternativ mulțimilor A și B (vezi figura 4.10).

(2) Să considerăm acum un graf $G = (V, E)$ în care orice ciclu conține un număr par de muchii și să arătăm că el este bipartit. Vom presupune că graful este conex, fiind evident că este suficient să demonstrăm proprietatea în acest caz.

Fie $T = (V, E') \prec G$ un arbore parțial din G (există, deoarece G este conex) și fie $c : V \rightarrow \{0, 1\}$ o bicolorare a vârfurilor sale cu culorile 0 și 1, astfel încât orice muchie din T să aibă capetele diferite de coloare.

Vom arăta că orice muchie $f = xy \in E - E'$ are capetele diferite de coloare și, prin urmare, că graful G este bipartit.

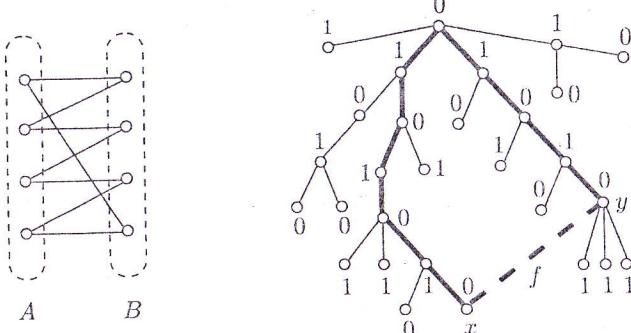


Figura 4.10.

Într-adevăr, să presupunem prin absurd că există o muchie $f = xy \in E - E'$ cu $c(x) = c(y)$. Notăm cu $P_{xy} := x \xrightarrow{T} y$ unicul x, y -lanț elementar din arborele T . Acesta are un număr par de muchii deoarece la o parcurgere a sa călătorile vârfurilor alternează, iar capetele sale au aceeași culoare. Rezultă că ciclul $C := P_{xy} + f \leq T + f \leq G$ este impar; ceea ce este exclus prin ipoteză. Deci, graful G este bipartit. \square

Teoremă 4.19. Un graf simplu, conex $G = (V, E)$ are toate ciclurile elementare impare dacă și numai dacă G este cactus cu toate ciclurile impare.

Demonstrație. (1) Dacă $G = (V, E)$ este cactus cu toate ciclurile impare, atunci nu este nimic de demonstrat.

(2) Să considerăm acum un graf conex $G = (V, E)$ cu $n = |V|$ în care orice ciclu elementer conține un număr impar de muchii. Vom demonstra prin inducție matematică după n că G este cactus. Notăm cu $\mathcal{I}(n)$ ipoteza inducțivă.

(a) $\mathcal{I}(1)$ este adevărată deoarece în acest caz $G \sim K_1 \sim \circ$.

(b) $\mathcal{I}(2)$ este adevărată deoarece în acest caz $G \sim P_2 \sim \circ-\circ$.

(c) $\mathcal{I}(3)$ este adevărată deoarece în acest caz avem, modulo un izomorfism,

$$G \in \left\{ \begin{array}{c} \text{ } \\ \text{ } \end{array} \right. , \left. \begin{array}{c} \text{ } \\ \text{ } \end{array} \right\}.$$

(d) $\mathcal{I}(4)$ este adevărată deoarece în acest caz avem, modulo un izomorfism,

$$G \in \left\{ \begin{array}{c} \text{ } \\ \text{ } \end{array} \right. , \left. \begin{array}{c} \text{ } \\ \text{ } \end{array} \right\}.$$

Vom demonstra că $\mathcal{I}(< n)$ implică $\mathcal{I}(n)$ pentru $n \geq 5$.

Fie $T = (V, E') \prec G$ un arbore parțial din G (există, deoarece G este conex). Dacă $E - E' = \emptyset$ atunci $G = T$ și prin urmare G este cactus. Dacă $E - E' \neq \emptyset$ să considerăm o muchie $e \in E - E'$. Graful $T + e$ conține un unic ciclu elementar

$C = [v_1, v_2, \dots, v_q, v_1] \leq G$, iar acesta este impar și $q \geq 3$. Componentele conexe din $(T + e) - E(C)$ sunt q arbori $T_i = (V_i, E'_i)$ cu $v_i \in V_i$ pentru $1 \leq i \leq q$

$$(T + e) - E(C) = T_1 + T_2 + \dots + T_q.$$

Vom folosi următoarea afirmație:

(A) Orice muchie $f \in E - (E' \cup \{e\})$ are ambele capete într-un același arbore T_j .

Dacă acest lucru este adevărat, atunci demonstrația teoremei este încheiată. Într-adevăr, în acest caz obținem o partitie a mulțimii $E - (E' \cup \{e\})$ în q părți:

$$E - \{E' \cup \{e\}\} = E''_1 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} E''_q,$$

unde prin E''_i am notat mulțimea muchiilor din $E - (E' \cup \{e\})$ care au ambele capete în V_i , $1 \leq i \leq q$. Dar grafurile $G_i := T_i + E''_i \leq G$ au toate ciclurile impare și deci, conform ipotezei inducțive $\mathcal{I}(|V_i|)$, sunt cactuși, pentru $1 \leq i \leq q$. Rezultă că și graful G este cactus:

$$G = C + G_1 + G_2 + \dots + G_q.$$

Rămâne să demonstrează afirmația (A).

Să presupunem prim absurd că afirmația (A) este falsă și să considerăm prin urmare o muchie $f = xy \in E - (E' \cup \{e\})$ cu $x \in V_i$, $y \in V_j$, unde $1 \leq i \neq j \leq q$. Notăm cu $P_x := x \xrightarrow{T_i} v_i$ unicul x, v_i -lanț din arborele T_i și analog $P_y := y \xrightarrow{T_j} v_j$. Notăm de asemenea cu P' și P'' cele două v_i, v_j -lanțuri din ciclul C .

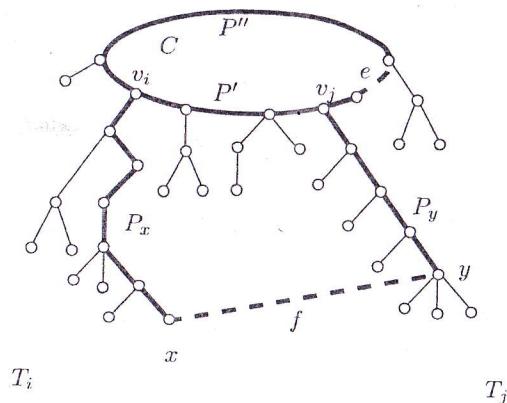


Figura 4.11.

Lanțurile P' și P'' formează împreună cu v_i, v_j -lanțul $v_i \xrightarrow{P_x} xy \xrightarrow{P_y} v_j$ două cicluri elementare

$$C' := v_i \xrightarrow{P_x} xy \xrightarrow{P_y} v_j \xrightarrow{P'} v_i, \quad C'' := v_i \xrightarrow{P_x} xy \xrightarrow{P_y} v_j \xrightarrow{P''} v_i.$$

Ciclurile C, C', C'' sunt impare prin ipoteză, adică

$$|E(C)| \equiv |E(C')| \equiv |E(C'')| \equiv 1 \pmod{2},$$

ceea ce este imposibil, deoarece suma lanțurilor lor este pară

$$\begin{aligned} |E(C)| + |E(C')| + |E(C'')| \\ = (|E(P')| + |E(P'')|) + (|E(P_x)| + 1 + |E(P_y)| + |E(P')|) \\ + (|E(P_x)| + 1 + |E(P_y)| + |E(P'')|) \\ = 2(|E(P')| + |E(P'')|) + |E(P_x)| + |E(P_y)| + 1 \equiv 0 \pmod{2}. \end{aligned}$$

Așadar afirmația (A) este adeverată și demonstrația este încheiată. \square

Propoziție 4.20. Fie $S = \{a_1, \dots, a_n\}$ și n părți diferite $A_1, \dots, A_n \subseteq S$.

(a) Există un element $a_k \in S$ cu proprietatea $A_1 - \{a_k\}, A_2 - \{a_k\}, \dots, A_n - \{a_k\}$ sunt de asemenea diferențiale.

(b) Pentru $n + 1$ părți diferențiale afirmația (a) nu mai este în general adeverată.

Demonstrație. (a) Observăm mai întâi că, dacă $A', A'' \subseteq S$, $|A'| < |A''|$, $a_k \in S$ și $A' - \{a_k\} = A'' - \{a_k\}$, atunci $A'' = A' \cup \{a_k\}$, adică A'' se obține prin adăugarea elementului a_k .

Să presupunem prin absurd că nu există un element $a_k \in S$ cu proprietatea din enunț. Atunci, ținând cont de observația precedentă, oricărui element $a_k \in S$ i se poate asocia o pereche de mulțimi $e_k = \{A_i, A_j\}$, $i \neq j$, cu proprietatea că A_j se poate obține din A_i prin adăugarea sau prin ștergerea lui a_k (după cum $|A_j| > |A_i|$ sau $|A_j| < |A_i|$). Observăm că, pentru două elemente diferențiale din S , $a_{k'}, a_{k''} \in S$, perechile asociate $e_{k'} = \{A_{i'}, A_{j'}\}$ și $e_{k''} = \{A_{i''}, A_{j''}\}$ sunt de asemenea diferențiale (altfel am avea $a_{k'} = a_{k''}$; contradicție). Fie $G = (V, E)$ un graf definit astfel:

$$V = \{A_1, \dots, A_n\} \text{ și } E = \{e_k \mid 1 \leq k \leq n\}.$$

G este un graf cu n vîrfuri și n muchii. Prin urmare G conține un ciclu elementar C . Cu o eventuală renumerotare a părților A_1, \dots, A_n și a elementelor mulțimii S putem considera ciclul C de forma

$$C = [A_1, A_2, \dots, A_p, A_1],$$

unde $e_1 = \{A_1, A_2\}$, $e_2 = \{A_2, A_3\}$, ..., $e_p = \{A_p, A_1\}$ și $|A_1| \leq |A_2|, \dots, |A_p|$.

Avem, conform observației de la începutul demonstrației:

- A_2 se obține din A_1 prin adăugarea elementului a_1 , deci $a_1 \notin A$ și $a_1 \in A_2$;
- A_3 se obține din A_2 prin adăugarea sau ștergerea elementului a_2 , deci $a_1 \in A_3$;
- A_4 se obține din A_3 prin adăugarea sau ștergerea elementului a_3 , deci $a_1 \in A_4$;
- ...
- A_p se obține din A_{p-1} prin adăugarea sau ștergerea elementului a_{p-1} , deci $a_1 \in A_p$;
- A_1 se obține din A_p prin ștergerea elementului a_p , deci $a_1 \in A_1$.

Rezultă că $a_1 \notin A_1$ și $a_1 \in A_1$; contradicție. Deci, există un element $a_k \in S$ cu proprietatea din enunț.

(b) Pentru $n+1$ părți A_1, \dots, A_{n+1} afirmația de la (a) nu mai este în general adeverată. De exemplu, pentru următoarele $n+1$ părți

$$\emptyset, \{a_1\}, \{a_2\}, \dots, \{a_n\}$$

este evident că avem

$$\emptyset - \{a_k\} = \{a_k\} - \{a_k\} = \emptyset \text{ pentru orice } a_k \in S. \quad \square$$

4.3. Arbori parțiali în grafuri

4.3.1. Grafuri cu muchii ponderate. Ponderea unui graf. Lungimea unui lanț. Distanță. Rază. Diametru. Centru. Fie $G = (V, E)$ un graf convex cu $|V| = n$ vîrfuri, $E \neq \emptyset$ și o funcție $w : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ definită pe mulțimea muchiilor E cu valori reale pozitive numită *pondere*.

Extindem ponderea w la mulțimea subgrafurilor $G' \leq G$ astfel

$$w(G') := \sum_{e \in E(G')} w(e),$$

adică ponderea unui subgraf G' este egală cu suma ponderilor muchiilor sale.

Pentru un lanț $P \leq G$ numărul $w(P)$ se mai numește *lungimea lanțului* P . Dacă P nu este elementar, atunci în $w(P)$ ponderea fiecărei muchii este adunată de un număr de ori egal cu numărul repetițiilor în P ale acelei muchii.

Pentru două vîrfuri oarecare $x, y \in V$ numim *distanță* dintre x și y numărul notat $d_G(x, y)$ definit astfel

$$d_G(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } x = y, \\ \min\{w(P) \mid P \text{ este } x, y\text{-lanț în } G\} & \text{dacă } x \neq y. \end{cases}$$

Astfel, distanța $d_G(x, y)$ dintre două vîrfuri $x, y \in V$ este egală cu lungimea minimă a unui x, y -lanț P . Un astfel de lanț se numește *lanț optim*.

Observăm că un lanț de lungime minimă este în mod necesar elementar deoarece altfel, prin eliminarea eventualelor cicluri formate, s-ar obține un lanț mai scurt cu aceleși capete.

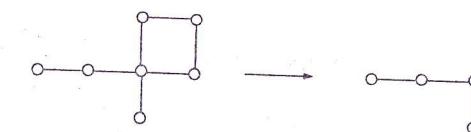


Figura 4.12.

Asemănător, remarcăm că orice lanț care este o parte a unui lanț de lungime minimă este și el minim.

Propoziție 4.21. Fie $G = (V, E, w)$ un graf conex cu $|V| = n$ ponderat, $w : E \rightarrow \mathbb{R}^+$. Avem:

- (1) $d_G(x, x) = 0$ pentru orice $x \in V$;
- (2) $d_G(x, y) = d_G(y, x)$ pentru orice $x, y \in V$;
- (3) $d_G(x, y) \leq d_G(x, z) + d_G(z, y)$ pentru orice $x, y, z \in V$ (inegalitatea triunghiului).

Demonstrație. Proprietățile (1) și (2) decurg imediat din definiție.

Pentru a demonstra proprietatea (3) considerăm $x, y, z \in V$ și P_{xy}, P_{xz}, P_{zy} trei lanțuri de lungime minime cu capetele în x și y , x și z , respectiv z și y . Atunci, x, y -lanțul Q obținut prin concatenarea în z a lanțurilor P_{xz} și P_{zy} are lungimea cel puțin egală cu cea a x, y -lanțului minim P_{xy} și avem

$$d_G(x, y) = w(P_{xy}) \leq w(Q) = w(P_{xz}) + w(P_{zy}) = d_G(x, z) + d_G(z, y). \quad \square$$

Fie $G = (V, E)$ un graf simplu conex cu ponderea fiecărei muchii egală cu 1. Pentru fiecare vârf $v \in V$, excentricitatea lui v , notată prin $e(v)$ este definită prin

$$e(v) := \max\{d(u, v) \mid u \in V, u \neq v\}.$$

Raza lui G , notată prin $\text{rad}(G)$, este definită prin

$$\text{rad}(G) := \min\{e(v) \mid v \in V\}.$$

Diametrul lui G , notat $\text{diam}(G)$, este definit prin

$$\text{diam}(G) := \max\{e(v) \mid v \in V\}.$$

Centrul lui G , notat $\text{centr}(G)$, este definit prin

$$\text{centr}(G) = \{v \mid v \in V, e(v) = \text{rad}(G)\}.$$

Propoziție 4.22. Într-un graf simplu conex $G = (V, E)$ avem

$$\text{rad}(G) \leq \text{diam}(G) \leq 2 \text{rad}(G).$$

Demonstrație. Prima inegalitate este o consecință imediată a definiției. Pentru a demonstra a doua inegalitate, considerăm două vârfuri $u, v \in V$ maxim depărtate, adică $d(u, v) = \text{diam}(G)$, și un vârf w în centrul lui G . Utilizăm inegalitatea triunghiului și obținem

$$\text{diam}(G) = d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v) \leq \text{rad}(G) + \text{rad}(G) = 2 \text{rad}(G). \quad \square$$

Exerciții

1. Se consideră lanțul $P_n = [1, 2, 3, \dots, n]$. Avem următoarele evaluări:

- (a) $d(i, j) = |j - i|$ pentru orice $i, j \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$;
- (b) $e(i) = \max\{i - 1, n - i\}$ pentru orice $i \in \{1, 2, \dots, n\}$;
- (c) $\text{rad}(P_n) = \lfloor n/2 \rfloor$ partea întreagă a numărului $n/2$;

- (d) $\text{diam}(P_n) = n - 1$;
- (e) $\text{centr}(P_n) = \begin{cases} \{k + 1\} & \text{pentru } n \text{ impar, } n = 2k + 1, \\ \{k, k + 1\} & \text{pentru } n \text{ par, } n = 2k. \end{cases}$

2. Se consideră ciclul $C_n = [1, 2, 3, \dots, n, 1]$. Avem următoarele evaluări:
 - (a) $d(i, j) = \min\{|i - j|, n - |i - j|\}$ pentru orice $i, j \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$;
 - (b) $e(i) = \lfloor n/2 \rfloor$ pentru orice $i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$;
 - (c) $\text{rad}(C_n) = \lfloor n/2 \rfloor$;
 - (d) $\text{diam}(C_n) = \lfloor n/2 \rfloor$;
 - (e) $\text{centr}(C_n) = \{1, 2, 3, \dots, n\}$.
3. Fie $T = (V, E)$ un arborie și $\text{term}(T)$ mulțimea vârfurilor de gradul 1 din T (mulțimea terminalelor).
 - (a) Dacă $|V| \geq 3$ atunci

$$\text{centr}(T) \cap \text{term}(T) = \emptyset \quad \text{și} \quad \text{centr}(T - \text{term}(T)) = \text{centr}(T).$$

$$(b) 1 \leq |\text{centr}(T)| \leq 2.$$

4.3.2. Arbore economic. Arbore al distanțelor. Fie $G = (V, E)$ un graf conex și $w : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ funcția pondere pe mulțimea muchiilor sale.

Un arbore parțial $T \prec G$ de pondere minimă va fi numit *arbore economic*. Spunem că un arbore parțial $T \prec G$ conservă distanțele unui vârf $v \in V$ la celelalte vârfuri din V dacă $d_T(v, x) = d_G(v, x)$ pentru orice $x \in V$. Un astfel de arbore T va fi numit *arbore al distanțelor vârfului v în graful G* .

Vom prezenta în paralel doi algoritmi pentru determinarea unui arbore economic, respectiv a unui arbore al distanțelor în raport cu un anumit vârf $v \in V$.

În ambele algoritmi se consideră arborele $T = (\{v\}, \emptyset)$ induș de vârful v ca punct de pornire.

Algoritmul lui Prim. Se repetă următorul pas până când arborele T are $n - 1$ muchii: se adaugă la T o muchie $e = xy \in [V(T), \overline{V(T)}]$ cu $x \in V(T)$ și $y \in \overline{V(T)}$ pentru care $w(xy)$ este minim.

Algoritmul lui Dijkstra. Se repetă următorul pas până când arborele T are $n - 1$ muchii:

se adaugă la T o muchie $e = xy \in [V(T), \overline{V(T)}]$ cu $x \in V(T)$ și $y \in \overline{V(T)}$ pentru care $d_T(v, x) + w(x, y)$ este minim.

Pentru fiecare din acești algoritmi notăm cu

$$x_0 = v, x_1, x_2, \dots, x_{n-1} \quad \text{și} \quad e_1, e_2, \dots, e_{n-1}$$

vârfurile, respectiv muchiile, lui T indicate în ordinea adăugării lor. De asemenea, pentru $1 \leq i \leq n - 1$, notăm $V_i = \{x_0, x_1, \dots, x_i\}$, $E_i = \{e_1, \dots, e_i\}$ și cu $T_i(V_i, E_i)$, arborele obținut în primele i iterări. Evident $T = T_{n-1}$.

Teoremă 4.23. Arborele obținut prin algoritmul lui Prim este arbore economic.

Demonstrație. Notăm cu \tilde{T} un arbore parțial economic care are în comun cu T_{n-1} o secvență inițială maximă de muchii e_1, e_2, \dots, e_{i-1} unde $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Vom demonstra că $T_{n-1} = \tilde{T}$.

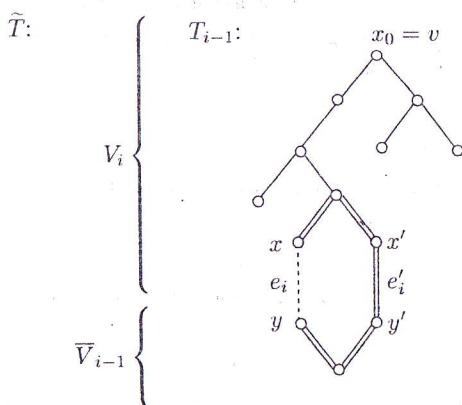


Figura 4.13.

Să presupunem prin absurd că $T_{n-1} \neq \tilde{T}$. Fie $e_1 = xy$ cu $x \in V_{i-1}$ și $y \in \overline{V}_{i-1}$ prima muchie selectată prin algoritm care nu este în \tilde{T} , și fie P unicul x, y -lanț din arborele \tilde{T} . Lanțul P conține în mod necesar o muchie $e'_i = x'y'$ cu $x' \in V_{i-1}$ și $y' \in \overline{V}_{i-1}$ și avem $e'_i \neq e_i$ deoarece $e_i \notin E(\tilde{T})$. Graful $\tilde{T}' = \tilde{T} + e_i - e'_i$ este arbore parțial deoarece este conex, are n vârfuri și $n - 1$ muchii. Pe de altă parte avem:

- $w(e'_i) \geq w(e_i)$, datorită modului în care este aleasă în algoritm muchia e_i ;
- $w(e'_i) \leq w(e_i)$, deoarece \tilde{T} fiind arbore economic, deci

$$w(\tilde{T}) \leq w(\tilde{T}') = w(\tilde{T}) + w(e_i) - w(e'_i).$$

Rezultă că $w(e'_i) = w(e_i)$, de unde obținem $w(\tilde{T}') = w(\tilde{T})$.

Așadar, \tilde{T}' este și el un arbore economic. Dar \tilde{T}' are în comun cu T o secvență inițială de muchii e_1, e_2, \dots, e_i cu cel puțin unu mai mare decât are \tilde{T} ; contradicție. Deci $T_{n-1} = \tilde{T}$. \square

Teoremă 4.24. Arborele obținut prin algoritmul lui Dijkstra este un arbore al distanțelor în raport cu vârful $v = x_0$.

Demonstrație. Vom demonstra prin inducție matematică după i că

$$(I(i)) \quad d_G(x_0, x_i) = d_{T_i}(x_0, x_i) \quad \text{unde } 1 \leq i \leq n - 1.$$

Aceasta este suficient deoarece $d_{T_i}(x_0, x_i) = d_{T_{n-1}}(x_0, x_i)$ pentru $1 \leq i \leq n - 1$.

Afirmăția

$$(I(1)) \quad d_G(x_0, x_1) = d_{T_1}(x_0, x_1)$$

ARBORI PARȚIALI ÎN GRAFURI

este adevărată în mod evident dat fiind felul în care este selectată prima muchie.

Vom demonstra că $(I(i-1))$ implică $(I(i))$ pentru $2 \leq i \leq n - 1$.

Într-adevăr, $d_G(x_0, x_i) \leq d_{T_i}(x_0, x_i)$ deoarece $T_i \leq G$. Dacă și inegalitatea contrară

$$d_G(x_0, x_i) \geq d_{T_i}(x_0, x_i) \quad (4.1)$$

ar fi valabilă, atunci $d_G(x_0, x_i) = d_{T_i}(x_0, x_i)$, și astfel $(I(i))$ ar fi adevărată și conform principiului inducției matematice, teorema ar fi demonstrată.

Pentru a demonstra inegalitatea (4.1) să considerăm un x_0, x_i -lanț de lungime minimă P în G . Notăm cu z'' primul vârf din P care este în \overline{V}_{i-1} și cu z' vârful anterior acestuia în P (deci $z' \in V_{i-1}$). Avem

$$\begin{aligned} d_G(x_0, x_i) &\geq d_G(x_0, z'') = d_G(x_0, z') + w(z', z'') \\ &\stackrel{(I(i-1))}{=} d_{T_{i-1}}(x_0, z') + w(z', z'') \geq d_{T_i}(x_0, x_i). \quad \square \end{aligned} \quad (4.2)$$

Observație 4.25. (a) Dacă $w(e) > 0$ pentru orice $e \in E(G)$ atunci în lanțul P din demonstrația teoremei 4.24 avem chiar $x_i = z''$. Într-adevăr, deoarece $d_{T_i}(x_0, x_i) \geq d_G(x_0, x_i)$ în relațiile (4.2) avem peste tot egalitate, deci $d_G(x_0, x_i) = d_G(x_0, z'')$. Deoarece $d_G(x_0, x_i) = d_G(x_0, z'') + d_G(z'', x_i)$ de unde $d_G(z'', x_i) = 0$ și deci $x_i = z''$. \square

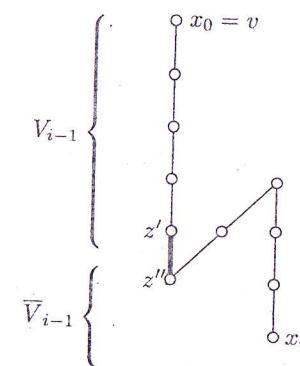


Figura 4.14.

(b) Prin determinarea arborelui T al distanțelor vârfului $x_0 = v$, algoritmul lui Dijkstra furnizează lanțuri optime de la x_0 la oricare alt vârf al grafului G . Dacă suntem interesați să determinăm numai un lanț optim de la vârful v la un anumit vârf z atunci putem opri funcționarea algoritmului la pasul în care z a devenit vârf în arborele T .

Un model fizic pentru problema lanțului optim. Se consideră un graf $G = (V, E)$ conex cu ponderea $w : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ și două vârfuri $x, y \in V$. Suntem interesați să determinăm lanțurile optime cu capetele în x și y . Asociem fiecărei muchii a grafului G căte o bucată de sfoară astfel încât lungimile acestora să fie direct proporționale cu ponderile

corespunzătoare. Legăm la capete în nod bucațile de sfoară asociate muchiilor adiacente. Luăm nodurile corespunzătoare vârfurilor x și y în mână stângă și în mână dreaptă, și le depărțăm cât de mult posibil. Lanțurile de sfuri întinse de la x la y constituie răspunsul concret la problema x, y -lanțurilor optime.

Exemplu 4.26. În graful reprezentat în figurile 4.15 și 4.16 numerele scrise în dreptul muchiilor reprezintă ponderile acestora.

În figurile 4.15(a) și 4.16(a) este reprezentat câte un arbore economic obținut prin algoritmul lui Prim, iar în figurile 4.15(b) și 4.16(b) câte un arbore al distanțelor vârfului x_0 obținut prin algoritmul lui Dijkstra.

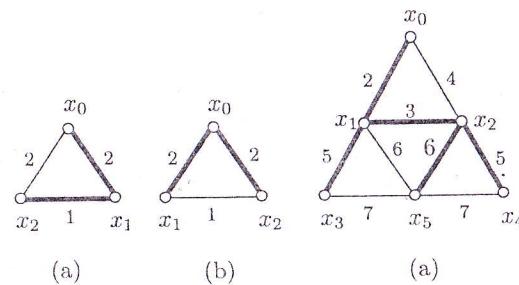


Figura 4.15

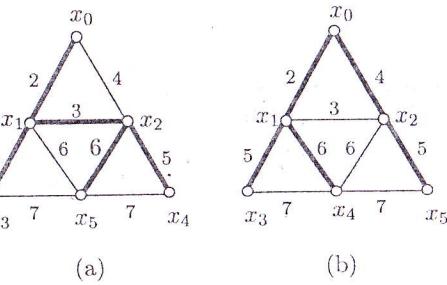


Figura 4.16

În toate cazurile indicii vârfurilor reflectă ordinea selectării lor în algoritmul corespunzător. Observăm cu această ocazie că un arbore economic nu este în general și un arbore al distanțelor unui vîrf și reciproc.

Un lanț de lungime minimă cu capetele în x_0 și x_5 pentru graful reprezentat în figura 4.16(b) este $[x_0, x_2, x_5]$.

4.3.3. Aplicații. În figura 4.17 este reprezentată harta drumurilor unei regiuni cu nouă orașe: $A, B, C, D, E, F, G, H, I$ dintre care A este capitala. În dreptul fiecărui drum este scris costul lucrărilor de modernizare ale acestuia precum și lungimile lui.

(a) Autoritățile regiunii vor să realizeze cu un *cost minim* o rețea de drumuri prin modernizarea celor existente astfel încât în final orice două orașe să fie conectate printr-un ansamblu de drumuri modernizate.

Pentru determinarea unei astfel de rețele și a costului necesar modernizării ei, asociem graful reprezentat în figura 4.18(a) în care în dreptul muchiilor sunt scrise costurile lucrărilor de modernizare. Rețeaua de drumuri modernizate cu un cost minim corespunde evident unui arbore economic în graful asociat.

Cu algoritmul lui Prim obținem succesiv un răspuns la problema conform figurii 4.19.

La fiecare pas sunt scrise ponderile muchiilor adiacente vârfurilor arborelui, acestea participând la calcularea minimului.

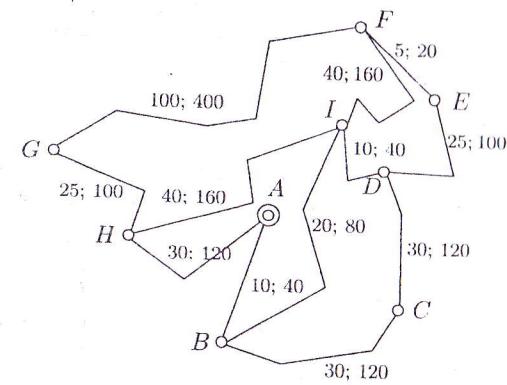
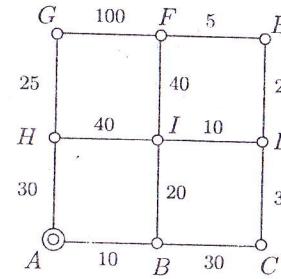
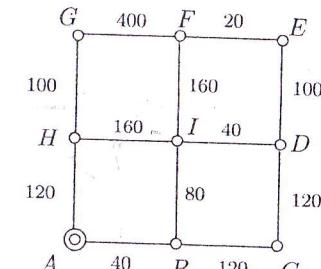


Figura 4.17.



(a)



(b)

Figura 4.18.

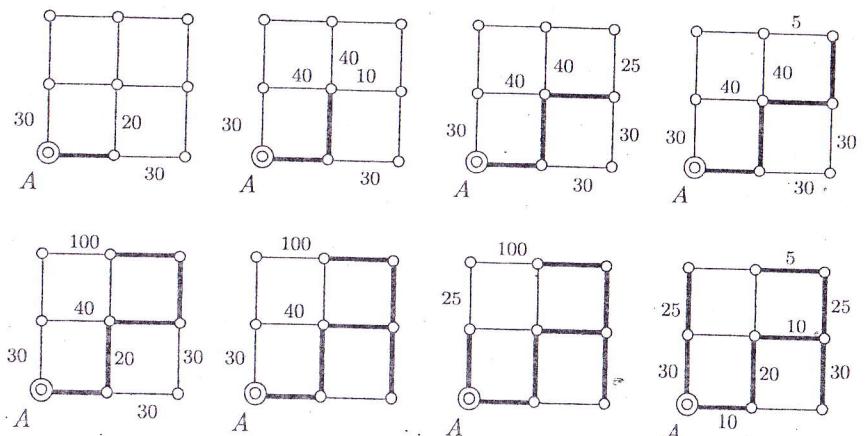


Figura 4.19.

Costul minim al lucrărilor necesare realizării unei rețele de drumuri modernizate este astăzi 155 unități monetare.

$$10 + 20 + 10 + 25 + 5 + 30 + 30 + 25 = 155.$$

(b) Să considerăm acum cazul în care autoritățile regiunii vor să realizeze o rețea de drumuri prin modernizarea celor existente astfel încât în final capitala A să fie conectată de oricare alt oraș prin cel mai scurt drum posibil.

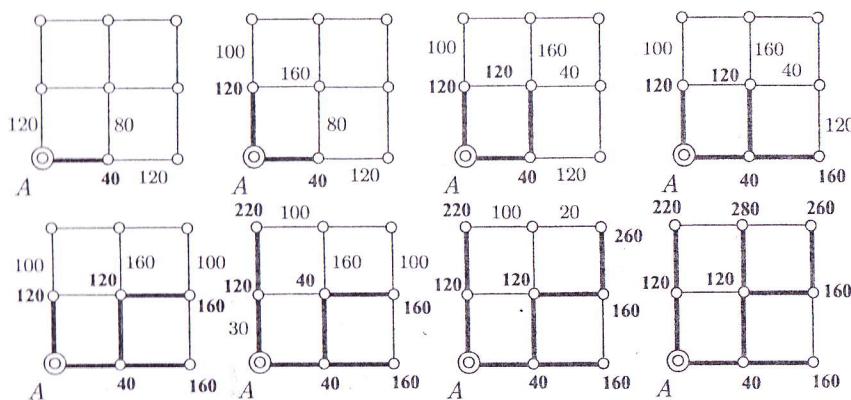


Figura 4.20.

Pentru determinarea unei astfel de rețele asociem graful reprezentat în figura 4.18(b) în care în dreptul muchiilor sunt scrise lungimile lor. Rețeaua de drumuri căutată în acest caz corespunde evident unui arbore al distanțelor vârfului A , corespunzător capătului, în graful asociat.

Cu algoritmul lui Dijkstra obținem succesiv un răspuns la problemă conform figurii 4.20. La fiecare pas sunt scrise în dreptul vârfurilor selectate distanțele lor față de A . De asemenea, sunt scrise ponderile muchiilor adiacente vârfurilor arborelui, acestea participând la calcularea minimului.

Așadar, rețeaua obținută și care urmează să fie modernizată conține drumurile: AB , AH , BI , ID , HG , DE , IF .

Capitolul 5

Grafuri planare

Un graf $G = (V, E)$ se numește *graf planar* dacă admite o reprezentare în plan cu proprietatea că muchiile le corespund segmente de curbe continue care nu se intersecțează în interior unele pe altele. O astfel de reprezentare M în plan a grafului G se numește *hartă*, iar G spunem că este *graful suport* al hărții M . Observăm că un graf planar poate admite mai multe hărți distincte (figurile 5.1 (a) și (b)).

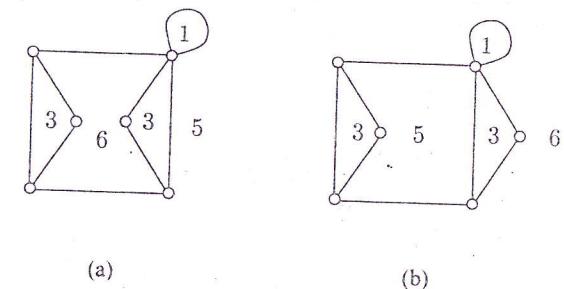


Figura 5.1.

Considerăm G un graf planar conex. O hartă M a lui G induce o împărțire a planului într-o mulțime F de părți conexe numite *fețe*. Una dintre acestea este față infinită. Vom nota o hartă asociată grafului $G = (V, E)$ prin $M = (V, E, F)$, unde F este *mulțimea fețelor*.

Definim *harta duală* M^* a hărții M astfel:

(1) *mulțimea vârfurilor* $V(M^*)$ se obține alegându-se în interiorul fiecărei fețe f a lui M câte un punct, notat în hartă cu f^* ;

(2) *mulțimea muchiilor* $E(M^*)$ se obține construind pentru fiecare muchie e a lui M , comună la două fețe f' și f'' , câte un segment de curbă continuă cu capetele în vârfurile f'^* și f''^* alese anterior în f' și f'' . Această curbă este construită așa încât să intersecțeze în interior muchia e și să nu mai intersecțeze astfel nici-o altă muchie a lui M . În harta duală vom nota această curbă cu e^* .

Se poate demonstra ușor că duala hărții duale lui M este izomorfă cu M

$$(M^*)^* \sim M.$$

În figura 5.2 muchiile hărții M sunt desenate cu linii subțiri, iar cele ale hărții duale M^* cu linii groase.

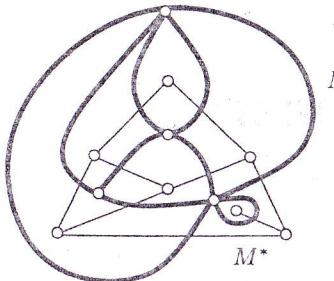


Figura 5.2.

Pentru o față f , numărul muchiilor ciclului care o delimită se notează cu $d_M(f)$ și se numește *gradul* acelei fețe.

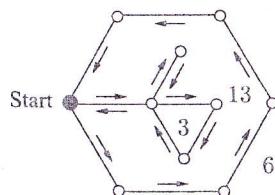


Figura 5.3.

În figura 5.1 numerele reprezintă gradele fețelor, iar în harta din figura 5.3 am marcat prin săgeți cîtirea muchiilor 13-feței. Gradul feței este egal cu numărul săgețiilor.

Observăm că pentru orice $f \in F(M)$ avem $d_M(f) = d_{M^*}(f^*)$, adică gradul unei fețe f din harta M este egal cu gradul vârfului asociat ei f^* din harta duală.

Pentru harta $M = (V, E, F)$ notăm cu V_i mulțimea i -vârfurilor, adică a vârfurilor de gradul i , $i \in \mathbb{N}_{\geq 0}$, și F_i mulțimea i -fețelor, adică a fețelor de gradul i , $i \in \mathbb{N}_{\geq 1}$,

$$V_{\leq i} = V_0 \dot{\cup} V_1 \dot{\cup} V_2 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} V_i, \quad F_{\leq i} = F_0 \dot{\cup} F_1 \dot{\cup} F_2 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} F_i.$$

Notăm de asemenea cu $\delta_V(M)$ gradul minim al unui vârf din M și cu $\delta_f(M)$ gradul minim al unei fețe din M .

$$\delta_v := \min\{d_M(x) \mid x \in V(M)\}, \quad \delta_f(M) := \min\{d_M(f) \mid f \in F(M)\}.$$

Dacă harta la care se face referire rezultă clar din context vom nota pe scurt δ_v, δ_f .

Analog, notăm cu $\Delta_v(M)$ gradul maxim al unui vârf din M și cu $\Delta_f(M)$ gradul maxim al unei fețe din M .

Fie M o hartă și $p \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. O *p-colorare a mulțimii vârfurilor* lui M , sau o *p-vârf colorare* este o funcție $c : V(M) \rightarrow [p]$. Colorarea c se numește *propriu* dacă orice muchie din $E(M)$ are capetele de culori diferite sau, altfel spus, dacă orice două vârfuri de aceeași culoare sunt neadiacente. Astfel, c este o *p-vârf colorare propriu* dacă părțile monocrome $c^{-1}(i)$, pentru $i \in [p]$, sunt mulțimi independente de vârfuri.

Notăm cu $\chi_v(M)$ numărul minim p de „culori“ pentru care există o *p-vârf colorare propriu* a lui M

$$\chi_v(M) := \min\{p \mid p \in \mathbb{N}_{\geq 1}, \text{ există o } p\text{-vârf colorare propriu a lui } M\}.$$

Numărul $\chi_v(M)$ se numește *numărul vârf-cromatic* al lui M .

Analog, o funcție $c : F(M) \rightarrow [p]$ se numește o *p-față colorare propriu* a lui M dacă orice două fețe adiacente au culori diferite. Se notează de asemenea cu $\chi_f(M)$ *numărul față-cromatic* al lui M , adică numărul minim p de culori pentru care există o *p-față colorare propriu* a lui M :

$$\chi_f := \min\{p \mid p \in \mathbb{N}_{\geq 1}, \text{ există o } p\text{-față colorare propriu a lui } M\}.$$

Evident, o *p-față colorare* a lui M induce o *p-vârf colorare propriu* a hărții duale M^* și reciproc. Avem

$$\chi_f(M) = \chi_v(M^*) \quad \text{și} \quad \chi_v(M) = \chi_f(M^*).$$

Astfel, problema colorării fețelor este echivalentă cu problema colorării vârfurilor unei hărți.

Să considerăm acum o *p-vârf colorare propriu* a hărții M , $c : V(M) \rightarrow [p]$. Mulțimile $c^{-1}(1), \dots, c^{-1}(p)$ induc o partitie a mulțimii vârfurilor $V(M)$ în p părți nu neapărat nesibile monocrome și independente

$$V(M) = c^{-1}(1) \dot{\cup} \dots \dot{\cup} c^{-1}(p).$$

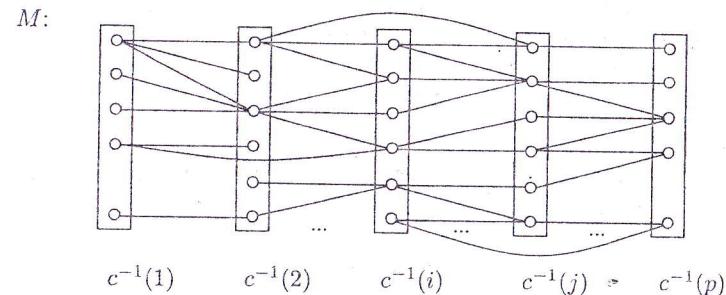


Figura 5.4.

Să considerăm în continuare două culori deferite $i, j \in [p]$ și graful bipartit induș în M de părțile monocrome $c^{-1}(i)$ și $c^{-1}(j)$: $M[c^{-1}(i) \dot{\cup} c^{-1}(j)]$. O componentă conexă (bicoloră) a grafului $M[c^{-1}(i) \dot{\cup} c^{-1}(j)]$ se numește *lanț Kempe*. Pentru un vârf oarecare $x \in c^{-1}(i)$ notăm cu $P_{ij}(x)$ lanțul Kempe de culori i, j care conține x . Observăm că dacă inversăm culorile asociate vâfurilor într-un lanț Kempe se conservă caracterul propriu al colorării.

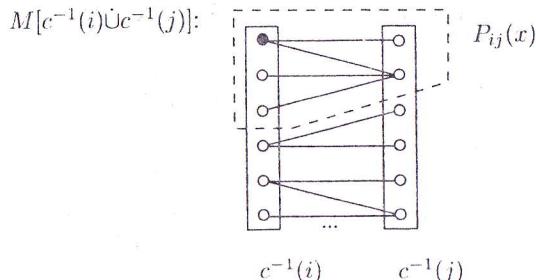


Figura 5.5.

5.1. Teorema poliedrală a lui Euler

Teoremă 5.1. (Teorema poliedrală a lui Euler) Fie $G = (V, E)$ un graf planar conex și $M = (V, E, F)$ o hartă a lui. Avem

$$|V| - |E| + |F| = 2.$$

Demonstrație. (1) Fie $T = (V, E^0, F^0) \prec M$ un arbore parțial (există, deoarece M este conexă) și

$$E - E^0 = \{e_1, e_2, e_3, \dots, e_p\}$$

multimea muchiilor lui M care nu sunt în T . Multimea F^0 conține exact o față, cea infinită.

Considerăm hărțile $M^i = (V, E^i, F^i)$, pentru $i \in \{0, 1, 2, \dots, p\}$, obținute succesiv prin adăugarea la T , una câte una, a muchiilor din $E - E^0$.

$$M^0 := T, \dots, M^i := M^{i-1} + e_i, \quad 1 \leq i \leq p.$$

Evident $M^p = M$.

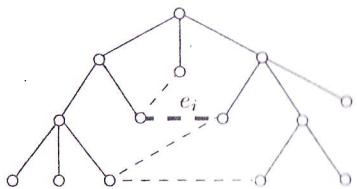


Figura 5.6.

(2) Observăm mai întâi că pentru M^0 relația din enunț este adevarată, deoarece acesta fiind arbore avem $|V| - |E^0| = 1$ și $|F^0| = 1$ de unde rezultă

$$|V| - |E^0| + |F^0| = 2.$$

(3) În continuare, pentru fiecare $i \in \{1, 2, 3, \dots, p\}$, muchia e_i împarte o anumită față din M^{i-1} în două fețe, pentru M^i . Astfel, atât numărul muchiilor cât și al fețelor crește la fiecare pas cu câte o unitate

$$|E^i| = |E^{i-1}| + 1$$

și

$$|F^i| = |F^{i-1}| + 1.$$

Rezultă

$$|V| - |E^i| + |F^i| = |V| - |E^{i-1}| + |F^{i-1}|, \quad \forall i \in \{1, 2, 3, \dots, p\},$$

de unde obținem ceea ce trebuia demonstrat

$$|V| - |E| + |F| = |V| - |E^p| + |F^p| = |V| - |E^0| + |F^0| = 2. \quad \square$$

Putem spune acum că pentru orice hartă conexă $M = (V, E, F)$ sunt adevărate următoarele formule

$$\sum_{i \geq 1} |V_i| = |V|, \quad (5.1)$$

$$\sum_{i \geq 1} i|V_i| = 2|E|, \quad (5.2)$$

$$\sum_{i \geq 1} |F_i| = |F|, \quad (5.3)$$

$$\sum_{i \geq 1} i|F_i| = 2|E|. \quad (5.4)$$

$$|V| - |E| + |F| = 2. \quad (5.5)$$

Într-adevăr, formule (5.1) și (5.3) sunt consecințe imediate ale definițiilor. Formula (5.5) este teorema lui Euler. Rămâne să mai observăm, pentru formulele (5.2) și (5.4), că în membrul stâng se adună gradele vâfurilor, respectiv gradele fețelor, și astfel fiecare muchie este numărată de două ori.

Teoremă 5.2. Fie $M = (V, E, F)$ o hartă conexă cu $n = |V| \geq 2$ și $p, q \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Avem:

$$(a) |V| \leq \frac{2}{p+1} |E| + \left(1 - \frac{\delta_v}{p+1}\right) |V_{\leq p}|;$$

$$(b) |F| \leq \frac{2}{q+1} |E| + \left(1 - \frac{\delta_f}{q+1}\right) |F_{\leq q}|;$$

$$(c) \left(1 - \frac{\delta_v}{p+1}\right) |V_{\leq p}| + \left(1 - \frac{\delta_f}{q+1}\right) |F_{\leq q}| \geq 2 + \left(1 - \frac{2}{p+1} - \frac{2}{q+1}\right) |E|.$$

Demonstrație. (a) Avem

$$\begin{aligned} 2|E| &= \sum_{i \geq 1} i|V_i| = \sum_{1 \leq i \leq p} i|V_i| + \sum_{i \geq p+1} i|V_i| \geq \sum_{1 \leq i \leq p} i|V_i| + (p+1) \sum_{i \geq p+1} |V_i| \\ &= \sum_{1 \leq i \leq p} (i - \delta_v)|V_i| + \delta_v \sum_{1 \leq i \leq p} |V_i| + (p+1) \sum_{i \geq p+1} |V_i| \\ &= \sum_{1 \leq i \leq p} (i - \delta_v)|V_i| + \delta_v|V_{\leq p}| + (p+1)|V| - (p+1)|V_{\leq p}| \\ &= \sum_{1 \leq i \leq p} (i - \delta_v)|V_i| + (p+1)|V| - (p+1 - \delta_v)|V_{\leq p}|. \end{aligned}$$

Rezultă

$$\begin{aligned} |V| &\leq \frac{2}{p+1}|E| + \left(1 - \frac{\delta_v}{p+1}\right)|V_{\leq p}| - \frac{1}{p+1} \sum_{1 \leq i \leq p} (i - \delta_v)|V_i| \\ &\leq \frac{2}{p+1}|E| + \left(1 - \frac{\delta_v}{p+1}\right)|V_{\leq p}|, \end{aligned}$$

unde am ținut cont că pentru $1 \leq i \leq \delta_v$ avem $|V_i| = 0$.

(b) Analog (este varianța duală a inegalității (a)).

(c) Utilizăm formula lui Euler și inegalitățile (a) și (b), și rezultă inegalitatea (c). \square

Observație 5.3. Se poate demonstra ușor că în inegalitatea (a) a teoremei 5.2 avem egalitate dacă și numai dacă este îndeplinită una din următoarele condiții:

- (i) $\Delta_v = \delta_v$ și $p \geq \Delta_v - 1$ (cazul grafurilor regulate);
- (ii) $\Delta_v \geq \delta_v + 1$, $p = \Delta_v - 1$ și $V_{\leq \Delta_v - 1} = V_{\delta_v}$.

Analog, în inegalitatea (b) avem egalitate dacă și numai dacă este îndeplinită una din următoarele condiții:

- (iii) $\Delta_f = \delta_f$ și $q \geq \Delta_f - 1$;
- (iv) $\Delta_f \geq \delta_f + 1$, $q = \Delta_f - 1$ și $F_{\leq \Delta_f - 1} = F_{\delta_f}$.

Teoremă 5.4. (a) K_5 este neplanar.

(b) $K_{3,3}$ este neplanar.

Demonstrație. (a) Dacă, prin absurd, graful K_5 ar fi planar atunci pentru o hartă a sa am avea

$$\delta_v = 4, \quad \delta_f \geq 3, \quad |V_{\leq 4}| = |V| = 5, \quad |E| = 10, \quad |F_{\leq 2}| = 0.$$

Conform teoremei 5.2 pentru $p = 4$ și $q = 2$ obținem

$$\left(1 - \frac{4}{4+1}\right)|V_{\leq 4}| + \left(1 - \frac{3}{2+1}\right)|F_{\leq 2}| \geq 2 + \left(1 - \frac{2}{4+1} - \frac{2}{2+1}\right)|E|$$

TEOREMA POLIEDRALĂ A LUI EULER

sau

$$\frac{1}{5}|V_{\leq 4}| \geq 2 - \frac{1}{15}|E|$$

sau

$$\frac{1}{5} \cdot 5 \geq 2 - \frac{1}{15} \cdot 10$$

sau

$$1 \geq \frac{4}{3};$$

contradicție.

(b) Dacă, prin absurd, graful $K_{3,3}$ ar fi planar atunci pentru o hartă a sa am avea

$$\delta_v = 3, \quad \delta_f \geq 4, \quad |V_{\leq 3}| = |V| = 6, \quad |E| = 9, \quad |F_{\leq 3}| = 0.$$

Conform teoremei 5.2 pentru $p = 3$ și $q = 3$ obținem

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{3}{3+1}\right)|V_{\leq 3}| + \left(1 - \frac{4}{3+1}\right)|F_{\leq 3}| \\ \geq 2 + \left(1 - \frac{2}{4} - \frac{2}{4}\right) \cdot |E| \end{aligned}$$

sau $(1/4) \cdot 6 \geq 2$, adică $3/2 \geq 2$; contradicție. \square

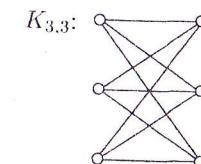


Figura 5.8.

Teoremă 5.5. Fie $M = (V, E, F)$ o hartă conexă.

(a) Dacă $|F_{\leq 2}| = 0$ atunci $|V_{\leq 5}| \geq 3$.

(b) Dacă $|V_{\leq 2}| = 0$ atunci $|F_{\leq 5}| \geq 3$ (enunțul dual).

Demonstrație. (a) Avem $\delta_f \geq 3$ și $\delta_v \geq 1$. Conform teoremei 5.2 pentru $p = 5$ și $q = 2$ obținem

$$\left(1 - \frac{1}{5+1}\right)|V_{\leq 5}| + \left(1 - \frac{1}{2+1}\right)|F_{\leq 2}| \geq 2 + \left(1 - \frac{2}{5+1} - \frac{2}{2+1}\right)|E|$$

sau $(5/6)|V_{\leq 5}| \geq 2$, de unde $|V_{\leq 5}| \geq 3$.

(b) Se demonstrează analog. \square

Lemă 5.6. Fie $M = (V, E, F)$ o hartă conexă. Avem $(1/\delta_v) + (1/\delta_f) > 1/2$.

Demonstrație. În inegalitatea (c) a teoremei 5.2 considerăm $p = \delta_v - 1$ și $q = \delta_f - 1$ și obținem $0 \geq 2 + (1 - (2/\delta_v) - (2/\delta_f))|E|$. Rezultă inegalitatea din enunț. \square

Teoremă 5.7. Fie $M = (V, E, F)$ o hartă conexă. Dacă $|V_{\leq 2}| = |F_{\leq 2}| = 0$ atunci parametrii δ_v și δ_f pot avea valorile din următorul tabel

| | | | | | |
|------------|---|---|---|---|---|
| δ_v | 3 | 3 | 3 | 4 | 5 |
| δ_f | 3 | 4 | 5 | 3 | 3 |

adică $\delta_v, \delta_f \in \{3, 4, 5\}$ și au loc implicațiile

$$\delta_v = 3 \Rightarrow \delta_f \in \{3, 4, 5\}, \quad \delta_v \in \{4, 5\} \Rightarrow \delta_f = 3.$$

Demonstrație. Inegalitatea din lema 5.6 se poate scrie și astfel $(\delta_v - 2) \cdot (\delta_f - 2) < 4$. Dar $\delta_v, \delta_f \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ prin ipoteza și prin urmare $\delta_v - 2, \delta_f - 2 \geq 1$. Rezultă că numerele $\delta_v - 2$ și $\delta_f - 2$ pot avea următoarele perechi de valori $(1, 1), (1, 2), (2, 1), (1, 3)$ și $(3, 1)$ ceea ce este echivalent cu afirmația din enunț. \square

Definiție 5.8. Fie $k, h \in \mathbb{N}_{\geq 3}$. O hartă M se numește k, h -regulată dacă gradul oricărui vârf este k și gradul oricărei fețe este h . Graful planar suport al unei astfel de hărți se numește, de asemenea, *graf planar k, h -regulat*.

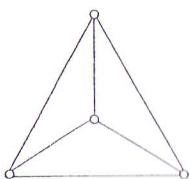
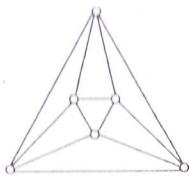
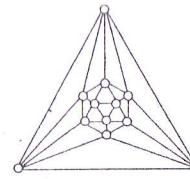
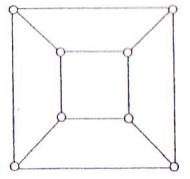
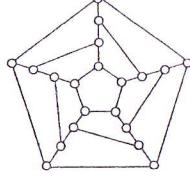
| $k \backslash h$ | 3 | 3 | 5 |
|------------------|--|--|---|
| 3 |  Tetraedrul $ V = 4, F = 4$ |  Octaedrul $ V = 6, F = 8$ |  Icosaedrul $ V = 12, F = 20$ |
| 4 |  Cubul $ V = 8, F = 6$ | Nu există | Nu există |
| 5 |  Dodecaedrul $ V = 20, F = 12$ | Nu există | Nu există |

Figura 5.9.

Teoremă 5.9. Există exact 5 grafuri planare k, h -regulate. Acestea sunt grafurile

asociate corpurilor platonice. Parametrii k, h pot avea valorile din următorul tabel

| | | | | | |
|-----|---|---|---|---|---|
| k | 3 | 3 | 3 | 4 | 5 |
| h | 3 | 4 | 5 | 3 | 3 |

Demonstrație. Pentru o hartă k, h -regulată M avem $\delta_v = k$, $\delta_f = h$. Valorile pe care le pot avea parametrii k, h rezultă din teorema 5.7. Hărțile k, h -regulate core-spunzătoare acestor parametri se obțin relativ simplu desenând mai întâi în plan o h -față $h \in \{3, 4, 5\}$, și apoi continuând construcția de h -fețe astfel încât în fiecare vârf să fie incidente k muchii. Se obțin hărți unice modulo un izomorfism (figura 5.9). \square

5.2. Hamiltonitate în grafuri planare

Teoremă 5.10. Fie $M = (V, E, F)$ o hartă conexă, $C \subseteq M$ un ciclu elementar și R', R'' cele două regiuni determinate de C în plan. Notăm cu f'_i , $i \geq 1$, și v' numărul i-fețelor din R' și, respectiv, numărul vârfurilor lui M din R' care nu sunt în C . Analog, notăm f''_i , $i \leq 1$, și v'' corespunzător regiunii R'' . Avem

$$\sum_{i \geq 1} (i - 2)(f'_i - f''_i) = 2(v' - v'').$$

Demonstrație. Notăm cu e' numărul muchiilor lui M din R' . Teorema poliedrală a lui Euler aplicată în cazul hărții induse în M de mulțimea vârfurilor din R' împreună cu cele ale lui C , conduce la următoarea egalitate

$$(v' + |V(C)|) - (e' + |E(C)|) + \left(\sum_{i \geq 1} f'_i + 1 \right) = 2$$

sau, înăind cont că $|V(C)| = |E(C)|$,

$$\sum_{i \geq 1} f'_i = e' - v' + 1. \quad (5.6)$$

Pe de altă parte

$$\sum_{i \geq 1} i f'_i = 2e' + |E(C)|. \quad (5.7)$$

Eliminăm e' din (5.6) și (5.7)

$$\sum_{i \geq 1} (i - 2)f'_i = |E(C)| + 2v' - 2. \quad (5.8)$$

Analog,

$$\sum_{i \geq 1} (i - 2)f''_i = |E(C)| + 2v'' - 2. \quad (5.9)$$

Din (5.8) scădem (5.9) și obținem relația din enunț. \square

Consecință 5.11. Dacă în M există un ciclu elementar C astfel încât în cele două regiuni R', R'' se află același număr de vârfuri (excluzând pe cele ale lui C), atunci $\sum_{i \geq 1} (i - 2)(f'_i - f''_i) = 0$.

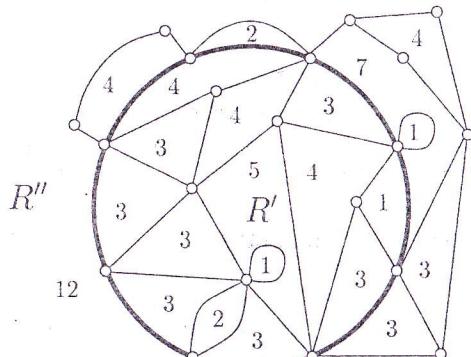


Figura 5.10.

Teoremă 5.12. (Teorema lui Grinberg) Fie $M = (V, E, F)$ o hartă conexă, $H \prec M$ un ciclu hamiltonian și R', R'' cele două regiuni determinate de H în plan. Notăm cu $f'_i, f''_i, i \geq 1$, numărul i -fețelor lui M din R' , respectiv R'' . Avem

$$\sum_{i \geq 1} (i - 2)(f'_i - f''_i) = 0.$$

Demonstrație. Formula este o consecință imediată a teoremei 5.10 deoarece, cu notațiile de acolo, avem $v' = v'' = 0$. \square

Teorema 5.13 prezintă o extindere pentru grafuri neplanare a teoremei lui Grinberg.

Teoremă 5.13. Fie $G = (V, E)$ un graf neorientat și $V' \cup V'' = V$ o partiție în părți nevide care induce în G doi arbori $T' = (V', E') = G[V']$ și $T'' = (V'', E'') = G[V'']$. Avem

$$\sum_{i \geq 1} (i - 2)(|V'_i| - |V''_i|) = 0,$$

unde, pentru $i \geq 1$, am notat cu V'_i , respectiv V''_i , mulțimea vârfurilor de gradul i din V' , respectiv din V'' .

Demonstrație. În arborele T' avem

$$\sum_{i \geq 1} |V'_i| = |E'| + 1 \quad \text{și} \quad \sum_{i \geq 1} i|V'_i| = 2|E'| + |E[V', V'']|.$$

Eliminăm $|E'|$

$$\sum_{i \geq 1} (i - 2)|V'_i| = |E[V', V'']| - 2. \quad (5.10)$$

Analog,

$$\sum_{i \geq 1} (i - 2)|V''_i| = |E[V', V'']| - 2. \quad (5.11)$$

Din (5.10) scădem (5.11) și obținem relația din enunț. \square

5.2.1. Aplicații. Să considerăm graful $G_n := C_n \times P_2$, $n \geq 3$. Fie $H \prec G_n$ un ciclu hamiltonian. Dacă există $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ cu $[x_{i+1}, x_i, y_i, y_{i-1}] \leq H$, atunci se demonstrează ușor că H este de tip (A) și sunt n astfel de cicluri.

În caz contrar, există $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ cu $[x_{i+1}, x_i, y_i, y_{i-1}] \leq H$ și se demonstrează ușor că H este de tip (B); lucru posibil numai pentru n par, situație în care sunt două astfel de cicluri.

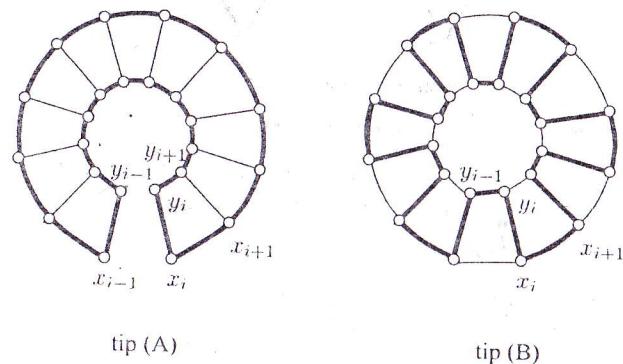


Figura 5.11.

Putem astfel formula următorul enunț.

Propoziție 5.14. În graful $G_n := C_n \times P_2$, $n \geq 3$ mulțimea ciclurilor hamiltoniene $\mathcal{H}(G_n)$ se descrie astfel:

- (a) pentru n impar, $\mathcal{H}(G_n)$ este alcătuită din n cicluri de tip (A);
- (b) pentru n par, $\mathcal{H}(G_n)$ este alcătuită din n cicluri de tip (A) și două cicluri de tip (B).

Consecință 5.15. Pentru n impar un ciclu hamiltonian $H \prec G_n$ nu conține simultan două muchii $x_i y_i$ și $x_j y_j$ dacă $i - j \neq \pm 1$. Mai precis, un ciclu hamiltonian $H \prec G_n$, pentru n impar, conține exact două muchii de tip $x_i y_i$ și, în plus, acestea sunt succesive $x_i y_i, x_{i+1} y_{i+1}$.

► **Propoziție 5.16.** G_t este nehamiltonian (vezi figura 5.12).

Demonstrația. 1. Notăm cu G_1, G_2, G_3 cele trei „triunghiuri” din diagramă. Presupunem prin absurd că G_t este hamiltonian. Fie $H \prec G_t$ un ciclu hamiltonian.

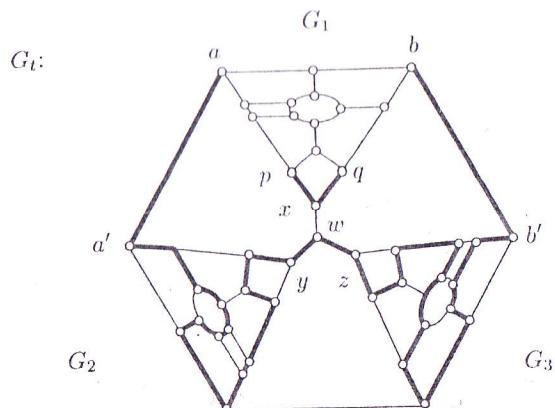


Figura 5.12. Graful lui Tutte.

Fără a micșora generalitatea, putem presupune că $wy, wz \in E(H)$. Atunci avem

- $aa', bb' \in E(H)$ deoarece G_1 este conectat de restul grafului G_t prin trei muchii $a'a, b'b, wx$, dintre care știm că $wx \notin E(H)$;
 $xp, xq \in E(H)$ deoarece $wx \notin E(H)$.

Rezultă că ciclul H induce în fiecare dintre grafurile G_1, G_2 și G_3 câte un lanț hamiltonian. În G_1 , H induce un a, b -lanț hamiltonian, H_1 .

Lanțul H_1 induce în graful $G'_1 = G_1 + ab$ un ciclu hamiltonian H'_1 care conține muchiile ab și pq , iar acesta induce în graful G''_1 un ciclu hamiltonian H''_1 care conține muchiile uv și rs ; ceea ce este imposibil conform propoziției 5.16

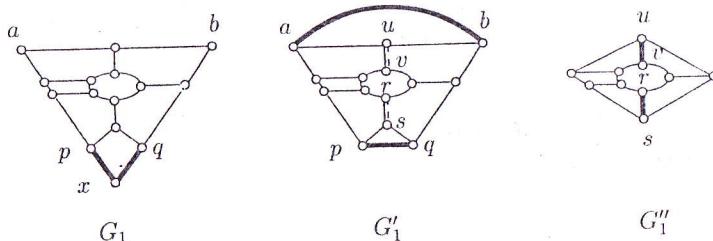


Figura 5.13.

Deci G_t nu este hamiltonian. □

Demonstrația 2. Prima parte este comună cu cea a demonstrației 1. Trecem la partea a doua. Lanțul H_1 induce în graful G'''_1 un ciclu hamiltonian. Analizăm structura fețelor lui G'''_1

| | | | |
|-------|---|---|----|
| i | 4 | 5 | 11 |
| f_i | 1 | 7 | 1 |

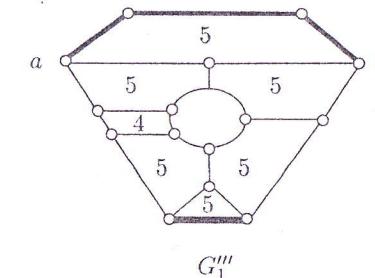


Figura 5.14.

Conform teoremei lui Grinberg avem

$$2(f'_4 - f''_4) + 3(f'_5 - f''_5) + (f'_{11} - f''_{11}) = 0,$$

de unde $3 \mid 2(f'_4 - f''_4)$ ceea ce este imposibil deoarece $f'_4 + f''_4 = f_4 = 1 \Rightarrow f'_4 - f''_4 \in \{+1, -1\}$. Deci, G_t nu este hamiltonian. □

G_{g_1} :

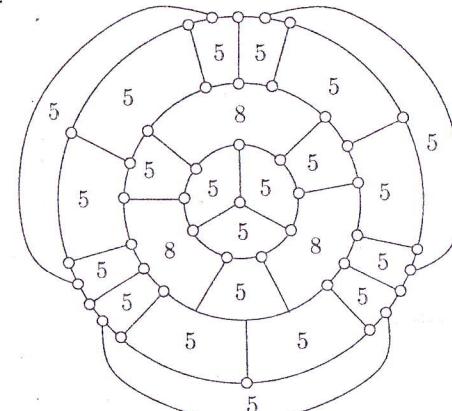


Figura 5.15. Graful lui Grinberg (1).

Propoziție 5.17. G_{g_1} nu este hamiltonian.

Demonstrație. Presupunem prin absurd că există un ciclu hamiltonian $H \prec G_{g_1}$. Analizăm structura fețelor lui G_{g_1}

| i | f_i |
|-----|-------|
| 5 | 21 |
| 8 | 3 |
| 9 | 1 |

Conform teoremei lui Grinberg avem

$$3(f'_5 - f''_5) + 6(f'_8 - f''_8) + 7(f'_9 - f''_9) = 0.$$

Rezultă $3 \mid 7(f'_9 - f''_9)$ ceea ce este imposibil deoarece $f'_9 + f''_9 = 1$. Deci G_{g_1} este nehamiltonian. □

Observație 5.18. În analiză putem să precizăm $f'_9 = 0$, $f''_9 = 1$ (deoarece față infinită este exterioară ciclului H) dar în acest caz nu era util.

Propoziție 5.19. G_{g_2} (vezi figura 5.16) nu este hamiltonian.

Demonstrație. Presupunem prin absurd că există un ciclu hamiltonian $H \prec G_{g_2}$. Analizăm structura fețelor lui G_{g_2} .

| i | f_i |
|-----|-------|
| 5 | 18 |
| 6 | 3 |
| 8 | 3 |

Conform teoremei lui Grinberg avem

$$3(f'_5 - f''_5) + 4(f'_6 - f''_6) + 6(f'_8 - f''_8) = 0.$$

Rezultă $3 \mid 4(f'_6 - f''_6)$. Dar $f'_6 + f''_6 = f_6 = 3$ și obținem $f'_6 \in \{0, 3\}$.

Aceasta este însă imposibil deoarece în ambele cazuri cele 3 hexagoane fiind în aceeași regiune în raport cu H , vârful central w ar fi inaccesibil ciclului hamiltonian H .

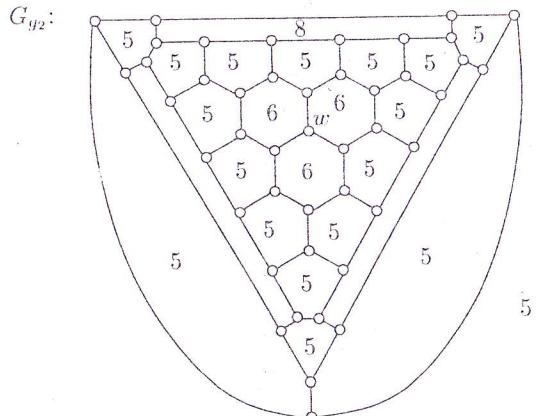


Figura 5.16. Graful lui Grinberg (2).

Deci G_{g_2} este nehamiltonian. \square

5.3. Colorări

Theoremă 5.20. (a) O hărță conexă $M = (V, E, F)$ are $\chi_v(M) = 2$ dacă și numai dacă $d_m(f) \equiv 0 \pmod{2}$ pentru orice $f \in F(M)$.

(b) O hărță conexă $M = (V, E, F)$ are $\chi_f(M) = 2$ dacă și numai dacă $d_m(x) \equiv 0 \pmod{2}$ pentru orice $x \in V(M)$.

Demonstrația 1. (a) Dacă $\chi_v(M) = 2$ atunci graful suport al hărții M este bipartit și, conform teoremei lui König, orice ciclu al său este par. În particular, orice față a hărții M are gradul par adică $d_m(f) \equiv 0 \pmod{2}$ pentru orice $f \in F(M)$.

Să presupunem acum că $d_M(f) \equiv 0 \pmod{2}$ pentru orice $f \in F(M)$. Atunci orice ciclu elementar C din M este par ($|E(C)| \equiv 0 \pmod{2}$). Într-adevăr, un ciclu elementar C determină în plan o regiune interioară (mărginită) R' și una exterioară (nemărginită) R'' . Fie E' mulțimea muchiilor lui M din R' diferite de cele ale lui C

$$E' = \{e \mid e \in E(M) - E(C), e \subseteq R'\}.$$

Notăm de asemenea cu F'_i mulțimea i -fețelor din R' , $i \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Tinem cont că $F'_i = \emptyset$ pentru $i \equiv 1 \pmod{2}$ prin ipoteză și avem

$$\sum_{i \in \mathbb{N}_{\geq 1}} i|F'_i| = \sum_{\substack{i \in \mathbb{N}_{\geq 1} \\ i \text{ par}}} i|F'_i| = 2|E'| + |E(C)|.$$

Rezultă că $|E(C)| \equiv 0 \pmod{2}$. Conform teoremei lui König, graful suport al hărții M este bipartit și, prin urmare $\chi_v(M) = 2$.

(b) Afirmația este echivalentă cu cea demonstrată la (a) deoarece

$$\chi_f(M) = \chi_v(M^*) \quad \text{și} \quad d_M(x) = d_{M^*}(x^*), \quad \text{pentru orice } x \in V(M). \quad \square$$

Demonstrația 2. Vom da o a doua demonstrație pentru una din implicațiile de la punctul (b) și anume

$$d_M(x) \equiv 0 \pmod{2} \text{ pentru orice } x \in V(M) \iff \chi_f(M) = 2.$$

Să presupunem aşadar că orice vârf din M are gradul par. Atunci, deoarece M este conexă prin ipoteză, rezultă că există în M un ciclu eulerian C . Fie $C_1, C_2, C_3, \dots, C_p$ o descompunere în cicluri elementare a lui C . Notăm cu \mathcal{R}_i^1 și \mathcal{R}_i^0 regiunea mărginită, respectiv regiunea nemărginită, în care ciclul C_i împarte planul pentru $i \in \{1, \dots, p\}$. Fețele hărții M se pot reprezenta unic ca intersecție a regiunilor $\mathcal{R}_i^{\varepsilon_i}$, $i \in \{1, \dots, p\}$, $\varepsilon_i \in \{0, 1\}$. Definim o 2-față colorare proprie a hărții M , $c : F(M) \rightarrow \{0, 1\}$ astfel pentru o față $f = \mathcal{R}_1^{\varepsilon_1} \cap \dots \cap \mathcal{R}_p^{\varepsilon_p}$ definim

$$c(f) = \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_p \pmod{2},$$

unde suma se face modulo 2. Rezultă $\chi_f(M) = 2$. \square

Propoziție 5.21. Pentru un arbore $T = (V, E)$ cu $|V| \geq 2$ avem

$$\chi_v(T) = 2.$$

Demonstrația 1. Fie $w \in V$ un vârf fixat. Definim colorarea $c : V \rightarrow \{0, 1\}$ astfel

$$c(x) := \begin{cases} 0 & \text{dacă } d_T(w, x) \equiv 0 \pmod{2}, \\ 1 & \text{dacă } d_T(w, x) \equiv 1 \pmod{2}, \end{cases} \quad \forall x \in V.$$

c este o 2-colorare proprie deoarece T este conex prin lanțuri unice (vârfurile oricărui w -lanț sunt colorate alternativ cu 0 și 1 începând cu $c(w) = 0$). Deci $\chi_v(T) \leq 2$. Deoarece $|E| = |V| - 1 \geq 1$ avem $\chi_v(T) \geq 2$. Rezultă $\chi_v(T) = 2$. \square

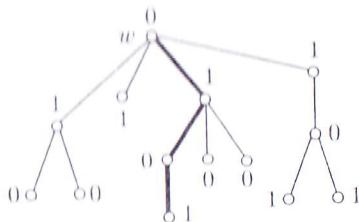


Figura 5.17.

Demonstrația 2. Fie $M = (V, E, F)$ o hartă asociată. M are o singură față și aceasta are dimensiunea pară ($2|E| \equiv 0 \pmod{2}$). Conform teoremei 5.20 (a) avem $\chi_v(M) = 2$. \square

Teoremă 5.22. (Taft) Dacă o hartă $M = (V, E, F)$ este hamiltoniană atunci $\chi_f(M) \leq 4$.

Demonstrație. Fie $H \prec M$ un ciclu hamiltonian și $\mathcal{R}', \mathcal{R}''$ regiunile interioare, respectiv exterioare, în care el împarte planul. Notăm cu F', F'' mulțimea fețelor lui M din \mathcal{R}' , respectiv \mathcal{R}'' . În harta duală $M^* = (F, E, V)$, mulțimile F' și F'' induc doi arbori vârf-disjuncți

$$T' = (F', E') \quad \text{și} \quad T'' = (F'', E'').$$

Avem

$$\chi_f(M) = \chi_v(M^*) \leq \chi_v(T') + \chi_v(T'') \leq 4. \quad \square$$

Teoremă 5.23. (Teorema (5C) celor cinci culori) Pentru orice hartă $M = (V, E, F)$ avem $\chi_v(M) \leq 5$ și $\chi_f(M) \leq 5$.

Demonstrație. Evident, dacă prima inegalitate este adevărată pentru orice hartă atunci și a doua este adevărată, deoarece $\chi_f(M) = \chi_v(M^*) \leq 5$.

Putem presupune fără a micșora generalitatea că M este simplă și conexă, deoarece suportul simplu al lui M are același număr vârf-cromatic cu M , iar componentele conexe se colorează independent.

Notăm cu $\mathcal{I}(n)$ următoarea afirmație, echivalentă cu enunțul teoremei restrâns la prima inegalitate,

$\mathcal{I}(n)$: Orice hartă simplă și conexă $M = (V, E, F)$ cu $|V| = n$ are $\chi_v(M) \leq 5$.

Vom construi prin inducție după n o 5-vârf colorare proprie a hărții M , $c : V \rightarrow [5]$ de unde va rezulta și concluzia dorită $\chi_v(M) \leq 5$, afirmația $\mathcal{I}(n)$ fiind astfel demonstrată.

$\mathcal{I}(1 \leq n \leq 5)$ Pentru $1 \leq n \leq 5$ notăm $V = \{x_1, \dots, x_n\}$, definim $c : V \rightarrow [5]$ prin $c(x_i) = i$ pentru $i \in [n]$ și $\mathcal{I}(n)$ rezultă adevărată.

$\mathcal{I}(< n) \Rightarrow \mathcal{I}(n)$ pentru $n \geq 6$. Fie $x \in V$ un vârf de grad ≤ 5 (există conform teoremei 5.5 (a)). Considerăm harta $M' = (V', E', F') := M - x$ și $c' : V' \rightarrow [5]$, o 5-vârf colorare proprie a lui M' (există conform $\mathcal{I}(n-1)$). Vom construi o 5-vârf colorare proprie a lui M , $c : V \rightarrow [5]$. Analizăm cazurile posibile.

Cazul 1. $|c'(N(x))| \leq 4$.

Definim o 5-vârf colorare proprie pentru M , $c : V \rightarrow [5]$ astfel

$$c|_{V'} := c'$$

și alegem $c(x) \in [5] - c'(N(x))$.

Cazul 2. $|c'(N(x))| = 5$.

Atunci, deoarece $|N(X)| \leq 5$ avem $|N(x)| = 5$. Notăm $N(x) = \{z_1, z_2, z_3, z_4, z_5\}$, vârfurile fiind indicate în ordinea în care apar la o rotere în jurul lui x și considerăm $c'(z_i) = i$, $i \in [5]$.

Sunt posibile următoarele două situații:

(i) $z_3 \in V(P_{1,3}(z_1))$ și $z_4 \in V(P_{2,4}(z_2))$. Atunci pentru un vârf $w \in V(P_{1,3}(z_1)) \cap V(P_{2,4}(z_2))$ avem $c'(w) \in \{1, 3\} \cap \{2, 4\} = \emptyset$; contradicție.

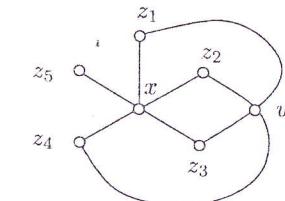


Figura 5.18

(ii) $z_3 \notin V(P_{1,3}(z_1))$ sau $z_4 \notin V(P_{2,4}(z_2))$. Cele două cazuri sunt analoage. Să considerăm primul dintre ele: $z_3 \notin V(P_{1,3}(z_1))$.

Vom transforma 5-vârf colorarea proprie c' într-o 5-vârf colorare proprie $c'' : V' \rightarrow [5]$ cu proprietatea $|c''(N(x))| \leq 4$, situație analizată deja la cazul (i).

Fie $c'' : V' \rightarrow [5]$ colorarea obținută din c' prin interschimbarea celorilor 1 și 3 pe vârfurile lanțului Kempe $P_{1,3}(z_1)$

$$c''(z) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } c'(z) = 3, \\ 3 & \text{dacă } c'(z) = 1, \end{cases} \quad \text{pentru } z \in V(P_{1,3}(z_1)) \quad \text{și} \quad c''|_{V' - V(P_{1,3}(z_1))} = c',$$

c'' este o 5-vârf colorare proprie și $c''(z_1) = 3 = c''(z_3)$, deci $|c''(N(x))| = 4$.

Ca și în cazul 1, definim 5-vârf colorarea proprie pentru M , $c : V \rightarrow [5]$ astfel

$$c|_{V'} = c'' \quad \text{și} \quad c(x) = 1.$$

Așadar, analizând toate cazurile posibile, am construit o 5-vârf colorare proprie pentru M . Deci $\chi_v(M) \leq 5$. \square

Demonstrația 2. Demonstrația deține în același mod cu precedenta până la singurul pas netrivial și anume cazul 2.

Cazul 2. $|c'(N(x))| = 5$.

Analog, deducem $|N(x)| = 5$, notăm $N(x) = \{z_1, \dots, z_5\}$ și considerăm $c'(z_i) = i$ pentru $i \in [5]$. Deoarece K_5 este neplanar, rezultă că există $i \neq j \in [5]$ cu $z_i z_j \notin E'$.

Considerăm harta cu $n - 2$ vârfuri $M'' = (V'', E'', F'')$ obținută din M' prin identificarea vârfurilor z_i și z_j cu un vârf auxiliar w . Conform $\mathcal{I}(n - 2)$, există o 5-vârf colorare a lui M'' , $c'': V'' \rightarrow [5]$. Definim colorarea $c''' : V' \rightarrow [5]$ astfel

$$c'''|_{V' - \{z_i, z_j\}} = c'', \quad c'''(z_i) = c'''(z_j) = c''(w).$$

c''' este o 5-vârf colorare proprie a lui M' cu $|c'''(N(x))| \leq 4$. Ca și în cazul 1, definim 5-vârf colorarea proprie pentru M , $c : V \rightarrow [5]$ astfel

$$c|_{V'} = c''' \quad \text{și} \quad c(x) \in [5] - c'''(N(x)).$$

Rezultă asemănător că $\chi_v(M) \leq 5$. \square

Capitolul 6

Linii euleriene

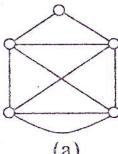
Fie G un graf neorientat. Un *ciclu eulerian* al lui G este un ciclu simplu $C \leq G$ cu proprietatea $E(C) = E(G)$, adică un ciclu care la o citire a sa parcurge toate muchiile grafului exact o singură dată (figura 6.1). Graful G se numește *graf eulerian* dacă el conține un ciclu eulerian. Un *lanț eulerian* al lui G este un lanț simplu $P \leq G$ cu proprietatea $E(P) = E(G)$ (figura 6.2). O k -descompunere euleriană în lanțuri a unui graf G , $k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, este o mulțime de k lanțuri simple $\mathcal{D} = \{P_1, \dots, P_k\}$ muchie-disjuncte ale căror muchii induc o k -partiție a mulțimii $E(G)$ (figura 6.3)

$$E(P_i) \cap E(P_j) = \emptyset$$

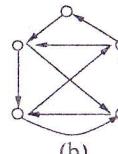
$$E(G) = E(P_1) \cup E(P_2) \cup E(P_3) \cup \dots \cup E(P_k),$$

pentru orice $1 \leq i < j \leq k$.

$G:$



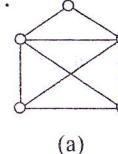
(a)



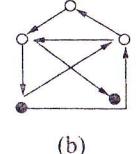
(b)

ciclu eulerian

$G:$



(a)

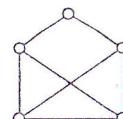


(b)

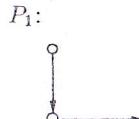
x, y -lanț eulerian

Figura 6.1.

Figura 6.2.



(a)



(b)

$$\mathcal{D} = \{P_1, P_2\}$$

o 2-descompunere euleriană în lanțuri

Figura 6.3.

Un ciclu sau un lanț simplu poate fi citit în două sensuri. Citirea sa induce o orientare a muchiilor.

Fie $C \leqslant G$ un ciclu simplu și $x \in V(G)$. Notăm:

- $i_C^-(x) =$ numărul arcelor care intră în vârful x la o citire (numărul intrărilor în x);
- $i_C^+(x) =$ numărul arcelor care ies din vârful x la o citire (numărul ieșirilor din x).

Observăm că $i_C^+(x) = i_C^-(x)$ pentru orice vârf x al ciclului C , $x \in V(C)$.

Dacă C este un ciclu eulerian, atunci pentru orice $x \in V(G)$ avem

$$d_G(x) = d_C^-(x) + d_C^+(x) \equiv 0 \pmod{2}.$$

Introducem aceleași notații și pentru un lanț simplu $P \leqslant G$. În acest caz avem:

$i_P^+(x) = i_P^-(x)$ pentru orice vârf $x \in V(P)$ care nu este capăt al lui P ;

$i_P^+(x) = i_P^-(x) + 1$ dacă x este capătul inițial al lui P ;

$i_P^+(x) = i_P^-(x) - 1$ dacă x este capătul final al lui P ;

Dacă P este lanț eulerian, atunci pentru orice $x \in V(G)$ avem

$$d_G(x) = i_P^-(x) + i_P^+(x) \equiv \begin{cases} 1 \pmod{2} & \text{dacă } x \text{ este capăt al lui } P, \\ 0 \pmod{2} & \text{dacă } x \text{ nu este capăt al lui } P. \end{cases}$$

Fuziunea a două cicluri simple. Fie $C_1, C_2 \leqslant G$ două cicluri simple în G muchie-disjuncte și fie $x \in V(C_1) \cap V(C_2)$. Spunem că un ciclu $C \leqslant G$ este obținut prin fuziunea în x (figura 6.4) a ciclurilor C_1 și C_2 , și notăm

$$C = C_1 \cdot C_2,$$

dacă el este de tipul următor

$$C = x \xrightarrow{C_1} x \xrightarrow{C_2} x,$$

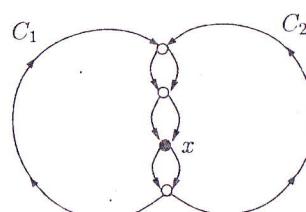


Figura 6.4.

adică se citește ciclul C_1 din x până x și apoi se trece la citirea ciclului C_2 . Evident, asociind cele două sensuri în care poate fi citit fiecare din ciclurile C_1 și C_2 , avem patru moduri în care pot fuziona în vârful x ciclurile C_1 și C_2 .

6.1. Teoreme de caracterizare

Propoziție 6.1. Într-un graf neorientat G orice ciclu simplu se descompune în cicluri elementare muchie-disjuncte.

Demonstrație. Fie $C \leqslant G$ un ciclu simplu din G

$$C = [x_1, e_1, x_2, e_2, x_3, e_3, \dots, x_t, e_t, x_{t+1}],$$

unde $x_{t+1} = x_1$, iar muchiile e_1, e_2, \dots, e_t sunt diferite.

Vom demonstra că există ciclurile elementare $C_1, \dots, C_p \leqslant G$ muchie-disjuncte ale căror muchii induc o partitie mulțimii $E(C)$

$$\begin{aligned} E(C_i) \cap E(C_j) &= \emptyset && \text{pentru orice } 1 \leqslant i \leqslant j \leqslant p, \\ E(C) &= E(C_1) \cup E(C_2) \cup \dots \cup E(C_p). \end{aligned}$$

În secvența $1, 2, 3, \dots, t, t+1$ alegem doi indicii $i < j$ cu diferența lor $j-i$ minimă, având proprietatea $x_i = x_j$. Definim

$$C_1 := x_i \xrightarrow{C} x_j$$

și înlocuim ciclul C cu cel obținut prin stergerea din el a muchiilor lui C_1

$$C := C - E(C_1).$$

Ciclurile C_2, C_3, \dots, C_p se obțin analog repetând operațiile descrise anterior cât timp aceasta este posibil, adică pînă când $E(C) = \emptyset$. Evident ciclurile $C_1, C_2, C_3, \dots, C_p$ obținute sunt elementare, muchie-disjuncte și constituie o descompunere a ciclului simplu inițial C . \square

Propoziție 6.2. Fie G un graf neorientat cu $d_G(x) \equiv 0 \pmod{2}$ și $d_G(x) \neq 0$ pentru orice $x \in V(G)$. Următoarele afirmații sunt adevărate:

(a) Există $C_1, C_2, \dots, C_p \leqslant G$ cicluri elementare în G cu proprietățile

$$\begin{aligned} E(C_i) \cap E(C_j) &= \emptyset && \text{pentru orice } 1 \leqslant i \leqslant j \leqslant p, \\ E(C) &= E(C_1) \cup E(C_2) \cup \dots \cup E(C_p). \end{aligned}$$

(b) Orice muchie $e \in E(G)$ aparține cel puțin unui ciclu elementar.

Demonstrație. Evident (a) \Rightarrow (b).

Demonstrăm (a). Fie G_1 o componentă conexă a grafului G . Din $d_{G_1}(x) \equiv 0 \pmod{2}$ și $d_{G_1}(x) \neq 0$ pentru orice $x \in V(G_1)$, rezultă $d_{G_1}(x) \geqslant 2$ pentru orice $x \in V(G_1)$. Deci G_1 nu este arbore și, prin urmare, există un ciclu elementar $C_1 \leqslant G_1$. Înlocuim graful G cu graful obținut din el prin stergerea muchiilor ciclului C_1 : $G = G - E(C_1)$. Componentele conexe care nu sunt vârfuri izolate ale noului graf G au proprietățile din enunț. Analog obținem existența unui ciclu elementar C_2 , etc. \square

Teoremă 6.3. Fie G un graf neorientat conex, $G \neq K_1$, cu exact $2k$ vârfuri de grad impar. Avem:

- (a) $k = 0$ dacă și numai dacă G este graf eulerian;
- (b) pentru $k > 0$ există o k -descompunere euleriană în lanțuri a grafului G , $\mathcal{D} = \{P_1, P_2, \dots, P_k\}$, și k este cel mai mic număr cu această proprietate.

Demonstrație. (a) \Leftrightarrow Fie G graf eulerian și $C \prec G$ un ciclu eulerian din G . Pentru orice vârf $x \in V(G)$ avem

$$d_G(x) = i_C^-(x) + i_C^+(x) \equiv 0 \pmod{2}$$

deoarece $i_C^-(x) = i_C^+(x)$.

\Rightarrow Să presupunem acum că graful G nu conține vârfuri de grad impar (cazul $k = 0$), adică $d_G(x) \equiv 0 \pmod{2}$ pentru orice $x \in V(G)$. Avem de asemenea și $d_G(x) \neq 0$ pentru orice $x \in V(G)$ deoarece G este conex și $G \neq K_1$. Conform propoziției 6.2 există $C_1, C_2, \dots, C_p \leqslant G$ cicluri elementare din G cu proprietățile

$$\begin{aligned} E(C_i) \cap E(C_j) &= \emptyset && \text{pentru orice } 1 \leq i \leq j \leq p \\ E(C) &= E(C_1) \cup E(C_2) \cup \dots \cup E(C_p). \end{aligned}$$

Fie numărul $t \in \{1, 2, \dots, p\}$ maxim cu proprietatea că există $1 \leq i_1 < \dots < i_t \leq p$ astfel încât

$$\begin{aligned} V(C_{i_1}) &\neq \emptyset \\ V(C_{i_2}) \cap V(C_{i_1}) &\neq \emptyset \\ V(C_{i_3}) \cap [V(C_{i_2}) \cup V(C_{i_1})] &\neq \emptyset \\ V(C_{i_4}) \cap [V(C_{i_3}) \cup V(C_{i_2}) \cup V(C_{i_1})] &\neq \emptyset \\ &\dots \\ V(C_{i_t}) \cap [V(C_{i_{t-1}}) \cup V(C_{i_{t-2}}) \cup \dots \cup V(C_{i_1})] &\neq \emptyset. \end{aligned}$$

Sunt două posibilități:

Cazul 1. Dacă $t = p$, atunci $\{i_1, i_2, \dots, i_p\} = \{1, 2, \dots, p\}$ și putem defini ciclul eulerian $C \prec G$ obținut prin fuziunea succesivă a ciclurilor $C_{i_1}, C_{i_2}, \dots, C_{i_p}$

$$C := (\dots ((C_{i_1} \circ C_{i_2}) \circ C_{i_3}) \circ \dots \circ C_{i_p}) \circ C_{i_p}.$$

Deci, în acest caz graful G este graf eulerian.

Cazul 2. Dacă $t < p$, atunci

$$V(C_j) \cap [V(C_{i_t}) \cup V(C_{i_{t-1}}) \cup \dots \cup V(C_{i_1})] = \emptyset$$

pentru orice $j \in \{1, 2, \dots, p\} - \{i_1, i_2, \dots, i_t\}$. Prin urmare, subgraful induș $G[V(C_{i_1}) \cup \dots \cup V(C_{i_t})]$ este o componentă conexă proprie a lui G ; contradicție cu faptul că G este conex. Deci cazul 2 nu este posibil.

Demonstrația punctului (a) este încheiată.

(b) Fie x_1, x_2, \dots, x_{2k} vârfurile de grad impar din G .

Pasul 1. Vom demonstra mai întâi că există o k -descompunere euleriană în lanțuri a grafului G . În acest scop, construim graful G' obținut din G prin adăugarea muchiilor $e_i = x_{2i-1}x_{2i}$, unde $i \in \{1, 2, \dots, k\}$,

$$G' = G \ddot{+} x_1x_2 \ddot{+} x_3x_4 \ddot{+} x_5x_6 \ddot{+} \dots \ddot{+} x_{2k-1}x_{2k}.$$

Graful G' este conex și orice vârf al lui are gradul par. Conform celor demonstrează la punctul (a), în graful G' există un ciclu eulerian $C' \prec G'$. Cu o eventuală renumerotare a vârfurilor x_i putem considera că muchiile adăugate grafului G sunt citite în ciclul C' astfel $x_1x_2, x_3x_4, x_5x_6, \dots, x_{2k-1}x_{2k}$. Definim $\mathcal{D} = \{P_1, \dots, P_k\}$ unde

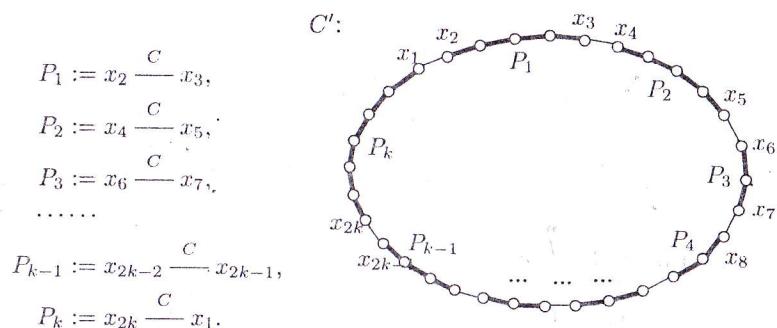


Figura 6.5.

\mathcal{D} este o k -descompunere euleriană în lanțuri a grafului G .

Pasul 2. Vom demonstra acum că numărul k este minim cu proprietatea anterioară. Pentru aceasta considerăm o k' -descompunere euleriană în lanțuri a lui G

$$\mathcal{D}' = \{P'_1, P'_2, \dots, P'_{k'}\}$$

și vom arăta că avem $k \leq k'$; demonstrația fiind astfel încheiată.

Fie graful bipartit B definit astfel

$$V(B) = \{P'_1, P'_2, \dots, P'_{k'}\} \cup V(G)$$

$$E(B) = \{\{P'_i, x\} \mid 1 \leq i \leq k', x \in V(G) \text{ și } x \text{ este o extremitate a lanțului } P'_i\}.$$

Aveam

$$d_G(P'_i) = 2 \quad \text{pentru orice } i \in \{1, 2, \dots, k'\}, \tag{6.1}$$

deoarece în graful B fiecare lanț $P'_i \in \mathcal{D}'$ este adjacent capelor sale. Pe de altă parte, orice vârf de grad impar $x_i \in V(G)$, unde $i \in \{1, 2, 3, \dots, 2k\}$, este capătul a cel puțin un lanț $P'_j \in \mathcal{D}'$, adică

$$d_B(x_i) \geq 1 \quad \text{pentru orice } i \in \{1, 2, \dots, 2k\}. \tag{6.2}$$

Într-adevăr, din relația

$$d_G(x) = \sum_{j=1}^{k'} d_{P_j}(x) \quad \text{pentru orice } x \in V(G),$$

rezultă că dacă $d_G(x) \equiv 1 \pmod{2}$ atunci, există $j \in \{1, 2, \dots, k'\}$ cu $d_{P_j} \equiv 1 \pmod{2}$, adică x este unul dintre capetele lanțului P_j și prin urmare $d_B(x) \geq 1$. Deci, $d_B(x_i) \geq 1$ pentru orice $i \in \{1, 2, \dots, 2k\}$.

În fine, înăndând cont de relațiile (6.1) și (6.2) avem

$$\begin{aligned} |E(B)| &= \sum_{i=1}^{k'} d_B(P'_i) = \sum_{i=1}^{k'} 2 = 2k', \\ |E(B)| &= \sum_{x \in V(G)} d_B(x) \geq \sum_{\substack{x \in V(G) \\ d_G \equiv 1 \pmod{2}}} d_B(x) = \sum_{i=1}^{2k} d_B(x_i) \geq \sum_{i=1}^{2k} 1 = 2k. \end{aligned}$$

Rezultă $k \leq k'$. \square

6.2. Graful liniilor

Definiție 6.4. Fie un digraf (graf orientat) $D = (V, A)$. Dacă $A = \emptyset$ notăm cu $L(D) = D$, iar dacă $a \neq \emptyset$ notăm cu $L(D)$ *graful arcelor* sau *graful liniilor* sau *lineograful* lui D și îl definim astfel

$$V(L(D)) := A(D), \quad A(L(D)) := \{a'a'' \mid a'a'' \in A(D), a'^+ = a''^-\},$$

unde pentru un arc $a = uv \in A(D)$ am notat $a^- = u$ și $a^+ = v$: 

Dacă a este buclă, atunci $a^- = a^+$. Notăm

$$L^0(D) := D, \quad L^i(D) := L(L^{i-1}(D)) \quad \text{pentru } i \geq 1 \text{ și } A(L^{i-1}(D)) \neq \emptyset.$$

6.2.1. Exemple

1.

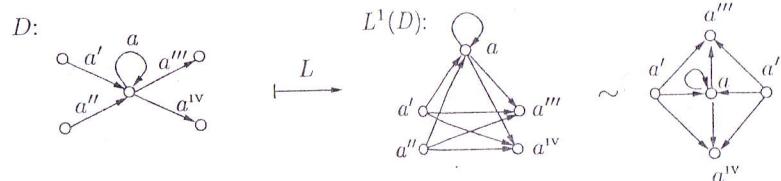


Figura 6.6.

TEOREME DE CARACTERIZARE

$$2. \vec{P}_5: \quad \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \circ \rightarrow \circ \rightarrow \circ \rightarrow \circ \rightarrow \circ \end{array}$$

$$L^1(\vec{P}_5): \quad \begin{array}{ccccc} 12 & 23 & 34 & 45 \\ \circ \rightarrow \circ \rightarrow \circ \rightarrow \circ \end{array}$$

$$L^2(\vec{P}_5): \quad \begin{array}{ccccc} 123 & 234 & 345 \\ \circ \rightarrow \circ \rightarrow \circ \end{array}$$

$$L^3(\vec{P}_5): \quad \begin{array}{ccccc} 1234 & 2345 \\ \circ \rightarrow \circ \end{array}$$

$$L^4(\vec{P}_5): \quad \begin{array}{ccccc} 12345 \\ \circ \end{array}$$

În general avem

$$L^i(\vec{P}_n) \sim \vec{P}_{n-i} \quad \text{pentru } 0 \leq i \leq n-1.$$

$$3. \text{ Analog obținem } L(\vec{C}_n) \sim \vec{C}_n$$

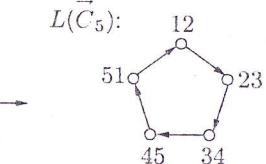
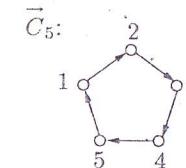
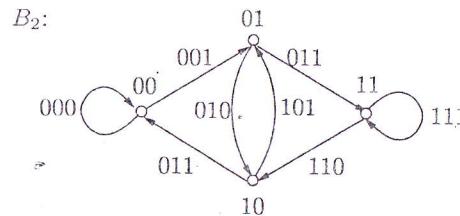
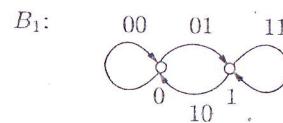
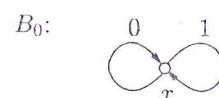
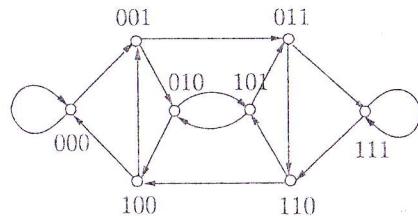
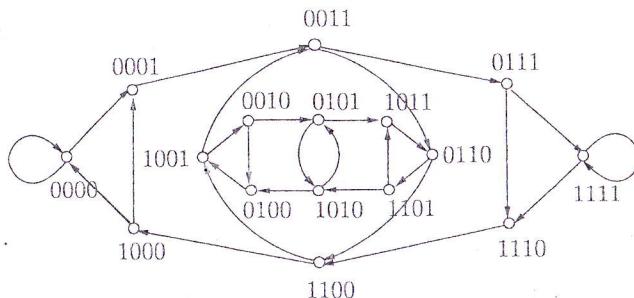


Figura 6.7.

4. Graful $B_i := L^i(B_0)$, pentru $i \geq 0$, este numit *graful de Bruijn*.



$B_3:$  $B_4:$ 

Din exemplele precedente rezultă că mulțimea vârfurilor grafului $L^{i-1}(D)$ poate fi pusă în corespondență bijectivă cu mulțimea i -drumurilor din D , iar mulțimea arcelor lui $L^{i-1}(D)$ poate fi pusă în corespondență bijectivă cu mulțimea $(i+1)$ -drumurilor lui D . Prin urmare, graful $L^{i-1}(D)$, $i \geq 1$, poate fi descris direct astfel

$$V(L^{i-1}(D)) = \{\lambda \mid \lambda \text{ } i\text{-drum în } D \text{ (drum cu } i \text{ vârfuri, nu neapărat distințe)}\}$$

$$A(L^{i-1}(D)) = \{\lambda' \lambda'' \mid \lambda', \lambda'' \in V(L^{i-1}(D)),$$

$$\lambda' = x'_1 a'_1 x'_2 a'_2 \cdots x'_{i-1} a'_{i-1} x'_i,$$

$$\lambda'' = x''_1 a''_1 x''_2 a''_2 \cdots x''_{i-1} a''_{i-1} x''_i,$$

$$x'_t = x''_{t-1}, a'_t = a''_{t-1} \text{ pentru } 2 \leq t \leq i-1, \text{ și } x'_i = x''_{i-1},\}$$

$$\leftrightarrow \{\nu \mid \nu \text{ } (i+1)\text{-drum în } D\}.$$

Cu notația λ^-, λ^+ pentru vârfurile inițial și final ale unui i -drum $\lambda \in V(L^{i-1}(D))$ avem

$$d_{L^{i-1}(D)}^+(\lambda) = d_D^+(\lambda^+) \text{ și } d_{L^{i-1}(D)}^-(\lambda) = d_D^-(\lambda^-).$$

Două i -drumuri $\lambda', \lambda'' \in D$ sunt adiacente în $L^{i-1}(D)$ dacă $(i-1)$ -drumul inducă în λ' de ultimele $i-1$ vârfuri este totodată și $(i-1)$ -drumul inducă în λ'' de primele $i-1$ vârfuri ale lui λ'' . De aceea, mulțimea arcelor $\lambda' \lambda'' \in A(L^{i-1}(D))$ poate fi pusă în corespondență bijectivă cu mulțimea $(i+1)$ -drumurilor din D .

Dacă indicele de repetitivitate a arcelor lui D este 0 sau 1, atunci drumurile lui D pot fi descrise prin menționarea numai a succesiunii vârfurilor.

Revenim la exemplul 1.4, *graful lui de Bruijn*, pentru a-l descrie. Evident, i -drumurile din B_1 , descrise prin succesiunea vârfurilor, sunt i -vectorii peste $\{0, 1\}$, adică $\{0, 1\}^i$. În

consecință, pentru $B_i = L^{i-1}(B_1)$, $i \geq 1$, avem

$$V(B_i) = \{0, 1\}^i, \quad A(B_i) = \{0, 1\}^{i+1},$$

$$d_{B_i}^+(\lambda) = 2, \quad d_{B_i}^-(\lambda) = \lambda, \quad \text{pentru orice } \lambda \in V(B_i).$$

Teoremă 6.5. Fie $D = (V, A)$ un graf conex orientat și $k \in \mathbb{N}$. Dacă pentru orice $x \in V(D)$ avem $d_D^+(x) = d_D^-(x) = k$, atunci $L^i(D)$ este eulerian și hamiltonian pentru orice $i \geq 1$.

Demonstrație. Este suficient să demonstrăm pentru $i = 1$ că $L^1(D)$ este eulerian și hamiltonian, și că $d_{L^1(D)}^+(a) = d_{L^1(D)}^-(a) = k$ pentru orice $a \in A(D)$ (ipoteza repetându-se astfel pentru $L^1(D)$ în locul lui D). Pentru orice $a \in A(D)$ avem

$$d_{L^1(D)}^+(a) = d_D^+(a^+) = k, \quad d_{L^1(D)}^-(a) = d_D^-(a^-) = k.$$

Deoarece D este conex și $d_D^+(x) = d_D^-(x) = k$ pentru orice $x \in V(D)$, rezultă că D este eulerian, de unde $L^1(D)$ este hamiltonian, deci și conex. Deoarece $L^1(D)$ este conex și $d_{L^1(D)}^+(a) = d_{L^1(D)}^-(a) = k$ pentru orice $a \in A(D)$, rezultă că $L^1(D)$ este eulerian. Demonstrația este încheiată. \square

Observație 6.6. Teorema nu este adevarată pentru $i = 0$. De exemplu, graful următor $D = (V, A)$ este conex și $d^+(x) = d^-(x) = 2$ pentru orice $x \in V$, dar nu este hamiltonian

 $D:$ 

Corolar 6.7. *Graful lui de Bruijn B_i , $i \geq 1$, este eulerian și hamiltonian.*

Interpretare. Un circuit hamiltonian în B_i este un circuit elementar care are ca vârfuri toți cei 2^i vectori i -dimensionali peste $\{0, 1\}$ cu proprietatea că ultimele $i-1$ componente ale unui vector sunt aceleași și în aceeași ordine cu primele $i-1$ componente ale următorului vector din circuit. Un astfel de circuit induce o 0, 1-etichetare a vârfurilor unui 2^n -cielu cu proprietatea că cele 2^n n -secvențe (de etichete succesive în ciclu) ce se pot forma, sunt toți cei 2^n n -vectori peste $\{0, 1\}$.

Exemplu 6.8. În cazul grafului B_3 , circuitul hamiltonian marcat în diagramă induce următoarea 0, 1-etichetare a unui 8-cielu (vezi figura 6.8)

În cazul grafului B_4 , circuitul hamiltonian marcat în diagramă induce următoarea 0, 1-etichetare a unui 16-cielu (vezi figura 6.9)

Teoremă 6.9. (Problema lui Posthumus) Notăm cu $f(n)$ numărul minim de cifre de 0 și 1 care se pot dispune circular, cu proprietatea că între cele $f(n)$ n -secvențe de cifre succese determinătoare apar toți cei 2^n n -vectori peste $\{0, 1\}$ (citite în același sens). Avem $f(n) = 2^n$.

Demonstratie. Un circuit hamiltonian din graful lui de Bruijn B_n induce o așezare circulară a 2^n cifre de 0 și 1 cu proprietatea din enunț. Rezultă $f(n) \leq 2^n$.

Pe de altă parte, într-o situație de minim sunt $f(n)$ n -secvențe, iar numărul n -vectorilor peste $\{0, 1\}$ este egal cu 2^n . Rezultă $f(n) \geq 2^n$.

În concluzie $f(n) = 2^n$. \square

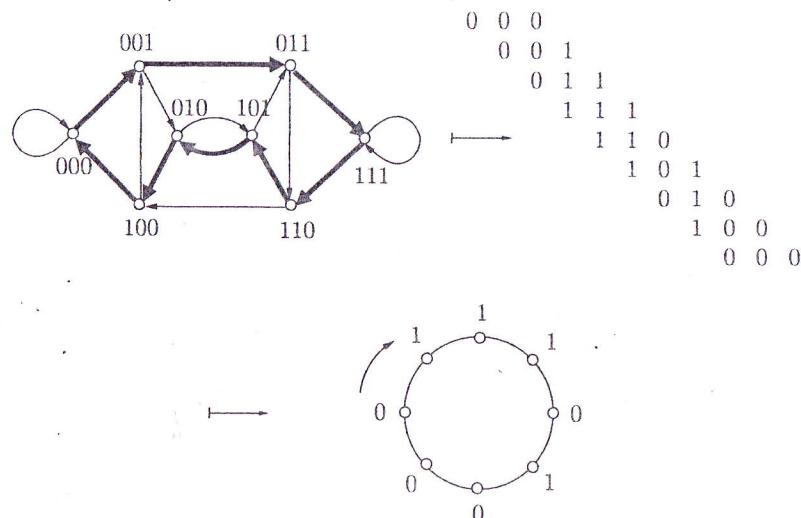


Figura 6.8.

Exercițiu. Fie $D = (V, A)$ un graf orientat conex. Următoarele afirmații sunt echivalente:

- (a) există $k \in \mathbb{N}$ cu $d_D^+(x) = d_D^-(x) = k$ pentru orice $x \in V$;
- (b) $L^1(D)$ este eulerian și hamiltonian.

Soluție. $\Rightarrow L^1(D)$ este eulerian și hamiltonian conform teoremei 6.9.

\Leftarrow Din $L^1(D)$ hamiltonian rezultă

$$D \text{ este eulerian,} \quad (6.3)$$

$$D \text{ este conex.} \quad (6.4)$$

Vom arăta că pentru orice $uv \in A(D)$ avem

$$d_D^+(u) = d_D^-(u) = d_D^+(v) = d_D^-(v)$$

și, deoarece D este conex (conform (6.4)), rezultă afirmația din enunț.

Fie $uv \in A(D)$. Din $L^1(D)$ eulerian rezultă

$$d_{L^1(D)}^-(a) = d_{L^1(D)}^+(a) \quad \text{sau} \quad d_D^-(u) = d_D^+(v). \quad (6.5)$$

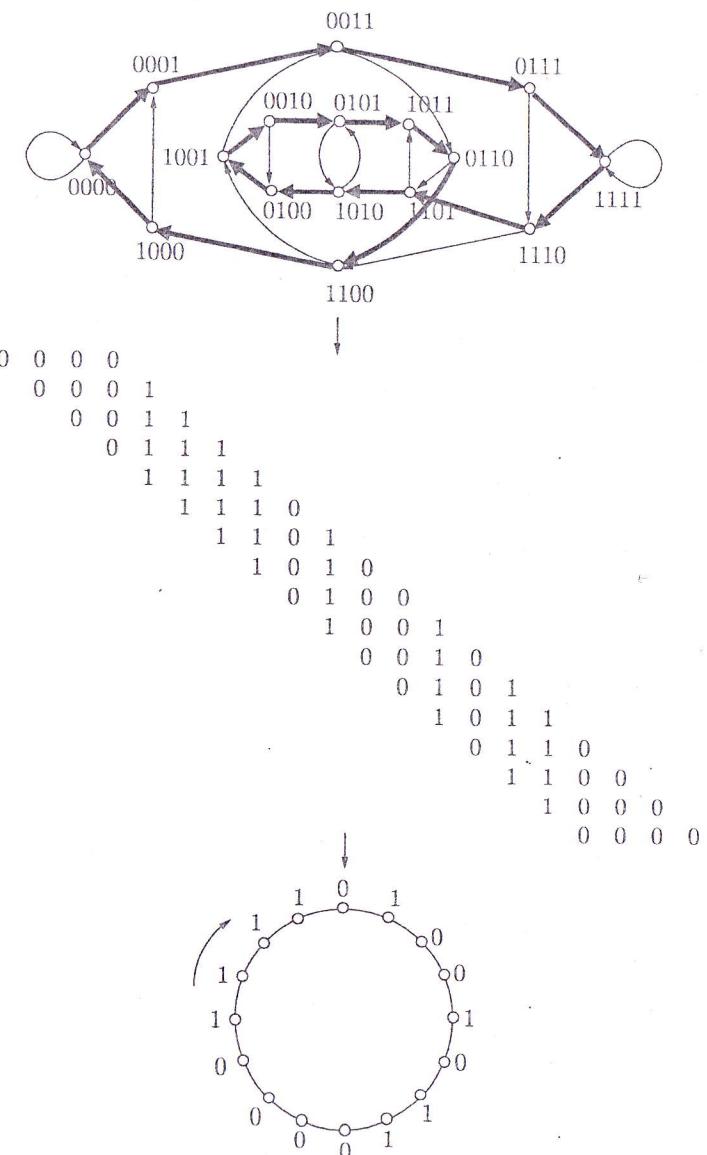


Figura 6.9.

Dar D este eulerian (conform (6.3)) și avem

$$d_D^-(u) = d_D^+(u) \quad \text{și} \quad d_D^-(v) = d_D^+(v). \quad (6.6)$$

Din (6.5) și (6.6) rezultă

$$d_D^+(u) = d_D^-(u) = d_D^+(v) = d_D^-(v),$$

și teorema este demonstrată. \square

Exercițiu. Notăm cu $g(n)$ numărul minim de cifre de 0 și 1 cu care se poate forma un sir cu proprietatea că între cele $g(n) - n + 1$ n-sevențe de cifre consecutive determinate apar toți cei 2^n n -vectori peste $\{0, 1\}$. Avem $g(n) = 2^n + n - 1$.

Soluție. Exercițiul este echivalent cu problema lui Posthumus. \square

Pentru $n = 3$ avem $g(3) = 2^3 + 3 - 1 = 10$. Un sir cu 10 termeni cu proprietatea din enunț este următorul

$$0001110100.$$

Pentru $n = 4$ avem $g(4) = 2^4 + 4 - 1 = 19$. Un sir cu 19 termeni cu proprietatea din enunț este următorul

$$0000111101001011000.$$

Capitolul 7

Linii hamiltoniene

Fie G un graf neorientat. Un *ciclu hamiltonian* al lui G este un ciclu $C \prec G$ elementar și parțial, adică un ciclu care la o citire a sa parcurge toate vârfurile grafului exact o singură dată. Graful G se numește *graf hamiltonian* dacă el conține un ciclu hamiltonian. Un *lanț hamiltonian* al lui G este un lanț $P \prec G$ elementar și parțial. Graful G se numește *pancyclic* dacă pentru orice $k \in \{3, 4, \dots, |V(G)|\}$ el conține un k -ciclu elementar.

7.1. Condiții necesare de hamiltoneitate a unui graf simplu

Teoremă 7.1. Într-un graf simplu hamiltonian $G = (V, E)$ este adeverată inegalitatea următoare

$$c(G - S) \leq |S|$$

pentru orice mulțime S de vârfuri, unde $\emptyset \neq S \subsetneq V$.

Demonstrație. Fie $C \prec G$ un ciclu hamiltonian. Pentru orice mulțime S de vârfuri, $\emptyset \neq S \subsetneq V$, avem

$$c(G - S) \leq c(C - S) \leq |S|.$$

Prima inegalitate rezultă din faptul că $E(G - S) \supseteq E(C - S)$, iar numărul componentelor conexe crește, nu neapărat strict, prin stergerea muchiilor.

Pentru a doua inegalitate este suficient să observăm că vârfurile lui C cuprinse între două vârfuri din S , successive la o citire a lui C induc cel mult un lanț în C .

Teorema este astfel demonstrată (vezi figura 7.1). \square

Corolar 7.2. Într-un graf simplu hamiltonian $G = (V, E)$ este adeverată inegalitatea următoare

$$c(G[S]) + |S| \leq |V|$$

pentru orice mulțime S de vârfuri, $S \subsetneq V$.

Demonstrație. Fie S o mulțime de vârfuri, $S \subsetneq V$. Atunci $\emptyset \neq V - S \subseteq V$. Conform

teoremei 7.1 avem $c(G - (V - S)) \leq |V - S|$ sau $c(G[S]) \leq |V| - |S|$, adică

$$c(G[S]) + |S| \leq |V|. \quad \square$$

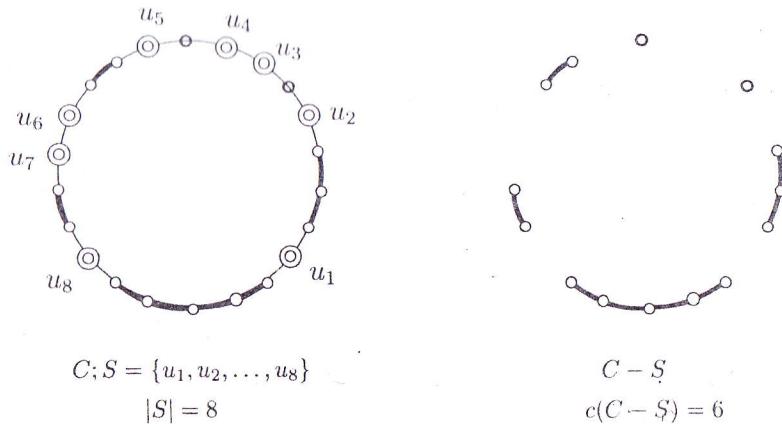


Figura 7.1.

Corolar 7.3. Într-un graf simplu hamiltonian $G = (V, E)$ este adevărată inegalitatea următoare

$$|S| \leq \frac{|V|}{2}$$

pentru orice mulțime S de vârfuri, $S \subseteq V$.

Demonstrație. Fie $S \subseteq V$ o mulțime independentă de vârfuri. Atunci $S \neq V$ deoarece graful G este hamiltonian și $c(G[S]) = |S|$. Conform corolarului 7.2 avem

$$2|S| = c(G[S]) + |S| \leq |V|;$$

și demonstrația este încheiată. \square

7.1.1. Aplicații

Propoziție 7.4. Condiția necesară și suficientă ca un graf p-partit complet

$G = (A_1 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} A_p, E)$, unde $p \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, $|A_1| \leq \dots \leq |A_p|$, $|V(G)| \geq 3$, să fie hamiltonian este

$$|A_p| \leq |A_1| + |A_2| + \dots + |A_{p-1}|.$$

Demonstrație. (1) Dacă G este hamiltonian atunci, mulțimea A_p fiind independentă, conform corolarului 7.3 avem $|A_p| \leq |V(G)|/2$, ceea ce este echivalent cu

$$|A_p| \leq |A_1| + |A_2| + |A_3| + \dots + |A_{p-1}|.$$

CONDIȚII SUFICIENTE DE HAMILTONEITATE A UNUI GRAF SIMPLU

(2) Dacă inegalitatea din enunț este adevărată, atunci graful G este hamiltonian ce reiese ușor din procedeul de construcție sugerat în figura 7.2. \square

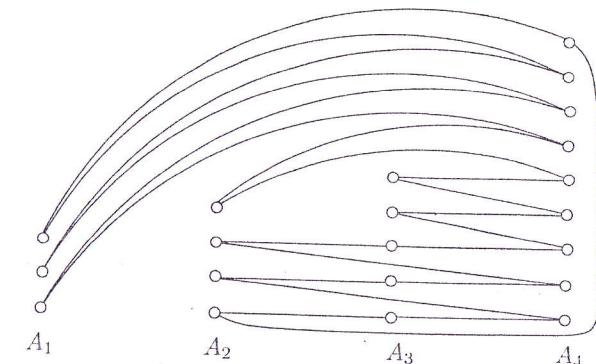


Figura 7.2.

7.2. Condiții suficiente de hamiltoneitate a unui graf simplu

7.2.1. Teoremele lui Dirac și Ore

Teoremă 7.5. (Dirac) Un graf simplu $G = (V, E)$ cu $n \geq 3$ vârfuri, cu proprietatea că orice vârf $x \in V$ are gradul mai mare sau egal cu $n/2$ este hamiltonian.

Demonstrație. Notăm cu r_G funcția multiplicitate a muchiilor

$$r_G : V^{(2)} \rightarrow \{0, 1\}, \quad \text{unde } r_G(\{x, y\}) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } \{x, y\} \in E, \\ 0 & \text{dacă } \{x, y\} \notin E. \end{cases}$$

Să presupunem, prin absurd, că G nu este hamiltonian. Deoarece graful $(V, V^{(2)}) \sim K_n$ este hamiltonian, există o mulțime de muchii E' , $E \subseteq E' \subsetneq V^{(2)}$, cu proprietatea că graful $G = (V, E')$ este hamiltonian muchie maximal, adică G' nu este hamiltonian dacă orice muchie i-am adăuga devine hamiltonian. Din $E' \neq V^{(2)}$ rezultă că există două vârfuri $u \neq v \in V$ cu $e = \{u, v\} \notin E'$. Deoarece G' este nehamiltonian muchie maximal, rezultă că în graful $G' + e$ există un ciclu hamiltonian $C \leq G' + e$. Dar G' nefiind hamiltonian, avem $C \not\leq G'$. Rezultă $e \in E(C)$. Fie $P = C - e$ u, v-lanțul hamiltonian din G' induș de C . Notăm $P = [x_1, \dots, x_n]$ unde $x_1 = u$ și $x_n = v$. Observăm că pentru orice $i \in \{2, \dots, n\}$ dacă $\{x_1, x_i\} \in E'$ atunci $\{x_n, x_i\} \notin E'$, deoarece altfel s-ar forma în G' ciclul hamiltonian

$$C' = \left[x_1 \xrightarrow{P} x_{i-1}, x_n \xrightarrow{P^{-1}} x_i, x_1 \right] \prec G'.$$

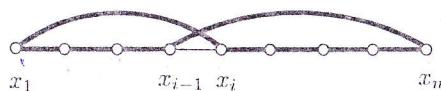


Figura 7.3.

Astfel, pentru orice $i \in \{2, \dots, n\}$ este adevarată inegalitatea

$$r_G(\{x_1, x_i\}) + r_G(\{x_n, x_{i-1}\}) \leq 1.$$

Rezultă, înținând cont că $N_{G'}(x_1) \subseteq \{x_2, \dots, x_n\}$ și $N_{G'}(x_n) \subseteq \{x_1, \dots, x_{n-1}\}$:

$$\begin{aligned} d_{G'}(x_1) + d_{G'}(x_n) &= \sum_{i=2}^n r_{G'}(\{x_1, x_i\}) + \sum_{i=2}^n r_{G'}(\{x_n, x_{i-1}\}) \\ &= \sum_{i=2}^n [r_{G'}(\{x_1, x_i\}) + r_{G'}(\{x_n, x_{i-1}\})] \leq n - 1. \end{aligned}$$

Această inegalitate contrazice însă ipoteza deoarece, conform acesteia, avem:

$$d_{G'}(x_1) + d_{G'}(x_n) \geq d_G(x_1) + d_G(x_n) \geq \frac{n}{2} + \frac{n}{2} = n.$$

Deci graful G este hamiltonian. \square

Teorema următoare, datorată lui O. Ore (1960), admite în mod evident o demonstrație aproape identică celei precedente.

Teoremă 7.6. (Ore) Un graf simplu $G = (V, E)$ cu $n \geq 3$ vârfuri și cu proprietatea că $d_G(x) + d_G(y) \geq n$ pentru orice două vârfuri neadiacente $x, y \in V$, este hamiltonian.

7.2.2. Caracterizarea grafurilor care au proprietatea Ore

Teoremă 7.7. Un graf simplu $G = (V, E)$ cu $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ vârfuri cu proprietatea că $d_G(x) + d_G(y) \geq n$ pentru orice două vârfuri neadiacente $x, y \in V$, are cel puțin $n^2/4$ muchii, $|E| \geq n^2/4$.

Demonstrație. Pentru $n = 2$ afirmația din enunț se verifică simplu deoarece singurul graf cu proprietatea din enunț este graful complet cu două vârfuri, $G \sim K_2$, și avem $|E| = 1 = 2^2/4$.

Considerăm în continuare $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ și fie G un graf cu proprietatea din enunț.

Observăm mai întâi că *graful G este conex*. Pentru a demonstra aceasta vom arăta că pentru două vârfuri oricare $x, y \in V$ există un x, y -lanț $P \leq C$. Într-adevăr, dacă $\{x, y\} \in E(G)$ atunci putem lua $P = [x, y]$. Dacă $\{x, y\} \notin E(G)$ atunci, conform ipotezei, $d_G(x) + d_G(y) \geq n$ și avem

$$\begin{aligned} |N_G(x) \cap N_G(y)| &= |N_G(x)| + |N_G(y)| - |N_G(x) \cup N_G(y)| \\ &= d_G(x) + d_G(y) - |N_G(x) \cup N_G(y)| \\ &\geq d_G(x) + d_G(y) - |V(G) - \{x, y\}| \\ &\geq n - (n - 2) = 2. \end{aligned}$$

Există prin urmare un vârf $z \in N_G(x) \cap N_G(y)$ iar $P = [x, y, z] \leq G$ este un x, y -lanț.

În continuare, notăm cu p gradul minim al vârfurilor lui G , $p = \delta(G)$ și cu V_p mulțimea vârfurilor de grad p . De asemenea, pentru o mulțime oarecare $S \subseteq V(G)$ notăm cu \bar{S} complementara în $V(G)$ a lui S , $\bar{S} = V(G) - S$. Sunt posibile următoarele situații:

Cazul 1. $p \geq n/2$.

Atunci, evident

$$|E(G)| = \frac{1}{2} \sum_{x \in V(G)} d_G(x) \geq \frac{1}{2} \cdot n \cdot \frac{n}{2} = \frac{n^2}{4}.$$

Deci $|E(G)| \geq n^2/4$.

Cazul 2. $p < n/2$.

În acest caz avem:

(i) *Graful $G_p = G[V_p]$ induș în G de mulțimea vârfurilor de grad minim este complet.* Într-adevăr, dacă prin absurd ar exista două vârfuri neadiacente $x \neq y \in V_p$ atunci, pe de o parte am avea $d_G(x) + d_G(y) = 2 \cdot p < n$, iar pe de altă parte, conform proprietății din enunț, $d_G(x) + d_G(y) \geq n$; contradicție! Deci G_p este graf complet.

(ii) $p > |V_p| - 1$. Într-adevăr, pentru $x \in V_p$ avem $p = d_G(x) \geq d_{G_p}(x) = |V_p| - 1$ deoarece $G_p \leq G$ și G_p este graf complet. Dar $p \neq |V_p| - 1$ deoarece altfel, ori G nu ar fi convex ceea ce contrazice observația făcută la începutul demonstrației, ori $G = G_p$ ceea ce nu se poate deoarece am avea $n/2 > p = n - 1 > n/2$. Deci $p > |V_p| - 1$.

(iii) În consecință, pentru orice vârf $x \in V_p$ există un alt vârf $x' \in \bar{V}_p$ cu proprietatea $\{x, x'\} \in E(G)$. În plus, acest vârf x' are gradul cel puțin egal cu $p + 1$, $d_G(x') \geq p + 1$.

Să considerăm aşadar un vârf $x_0 \in V_p$ și să evaluăm gradele vârfurilor grafului G în raport cu gradul lui x_0 . După cum am văzut, există un vârf $x'_0 \in N(x_0)$ cu $d_G(x') \geq p + 1$. Avem

$$(a) d_G(x_0) = p;$$

$$(b) d_G(x'_0) \geq p + 1;$$

$$(c) d_G(x) \geq p, \forall x \in N_G(x_0) - \{x'_0\};$$

$$(d) d_G(x) \geq n - p, \forall x \in \bar{N}_G(x_0) \cup \{x_0\}.$$

Inegalitatea (d) este adevarată deoarece pentru $x \in \bar{N}_G(x_0) \cup \{x_0\}$ avem $\{x, x_0\} \notin E(G)$ și, conform proprietății din enunț, avem $d_G(x_0) + d_G(x) \geq n$ sau $p + d_G(x) \geq n$.

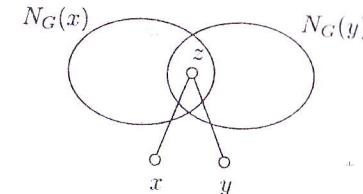


Figura 7.4.

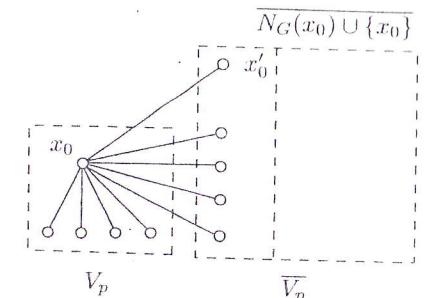


Figura 7.5.

Rezultă

$$\begin{aligned}
 |E(G)| &= \frac{1}{2} \sum_{x \in V(G)} d_G(x) \\
 &= \frac{1}{2} \left[d_G(x_0) + \left(\sum_{x \in N_G(x_0) - \{x'_0\}} d_G(x) + d_G(x'_0) \right) + \sum_{x \in N_G(x_0) \cup x_0} d_G(x) \right] \\
 &\geq \frac{1}{2} \{p + [(p-1) \cdot p + (p-1)] + [n - (p+1)](n-p)\} \\
 &= \left(p - \frac{n-1}{2}\right)^2 + \frac{n^2+1}{4} \geq \frac{n^2+1}{4} > \frac{n^2}{4}.
 \end{aligned}$$

Așadar, dacă $p \geq n/2$ atunci $|E(G)| \geq n^2/4$ iar dacă $p < n/2$ atunci $|E(G)| > n^2/4$. Demonstrația este încheiată. \square

Teoremă 7.8. Un graf simplu hamiltonian G cu $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ vârfuri și cu cel puțin $n^2/4$ muchii este panciclic sau este izomorf cu $K_{n/2, n/2}$.

Demonstrație. Utilizăm metoda inducției matematice după numărul n al vârfurilor grafului. Notăm cu $\mathcal{I}(n)$ ipoteza inductivă-care este chiar afirmația din enunț. $\mathcal{I}(3)$ este adevărată în mod evident.

Vom demonstra că $\mathcal{I}(n-1)$ implică $\mathcal{I}(n)$ pentru $n \geq 4$. Fie G un graf simplu hamiltonian cu n vârfuri, $n \in \mathbb{N}_{\geq 4}$, și cu cel puțin $n^2/4$ muchii, $|E(G)| \geq n^2/4$. Notăm cu r_G funcția multiplicitate a muchiilor, $r_G : V(G)^{(2)} \rightarrow \{0, 1\}$, unde $r_G(\{x, y\}) = 1$ dacă $\{x, y\} \in E(G)$ și $r_G(\{x, y\}) = 0$ dacă $\{x, y\} \notin E(G)$. Sunt posibile următoarele două situații:

1. *Cazul în care graful G conține un $n-1$ -ciclu $C = [x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_1]$.*

Vom demonstra că în acest caz graful G este panciclic. Să notăm cu z vârful lui G care nu aparține ciclului C : $\{z\} = V(G) - V(C)$. Avem:

1.1. *Cazul $d_G(z) \leq (n-1)/2$.*

Atunci

$$|E(G-z)| = |E(G)| - d_G(z) \geq \frac{n^2}{4} - \frac{n-1}{2} = \frac{(n-1)^2}{4} + \frac{1}{4} > \frac{(n-1)^2}{4}. \quad (7.1)$$

Astfel graful $G-z$ are $n-1$ vârfuri, este hamiltonian (deoarece $C \prec G-z$) și are mai mult decât $(n-1)^2/4$ muchii. Conform ipotezei inductive $\mathcal{I}(n-1)$ graful $G-z$ este ori panciclic, și atunci și graful G este panciclic, ori este izomorf cu $K_{(n-1)/2, (n-1)/2}$. Dar această ultimă variantă nu este posibilă deoarece pe de o parte am avea

$$|E(G-z)| = |E(K_{(n-1)/2, (n-1)/2})| = \frac{(n-1)^2}{4},$$

iar pe de altă parte, conform (7.1)

$$|E(G-z)| > \frac{(n-1)^2}{4};$$

contradicție! Prin urmare, în cazul 1.1 graful este panciclic.

1.2. *Cazul $d_G(z) > (n-1)/2$.*

Atunci, pentru orice $l \in \{3, 4, 5, \dots, n\}$ există $i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$ cu proprietatea $\{z, x_i\}, \{z, x_{i+l-2}\} \in E(G)$. Într-adevăr, avem

$$n-1 < 2d_G(z) \sum_{1 \leq i \leq n-1} [r_G(\{z, x_i\}) + r_G(\{z, x_{i+l-2}\})]$$

și deci, ținând cont că $r_G(\{z, x_i\}), r_G(\{z, x_{i+l-2}\}) \in \{0, 1\}$ există $i \in \{1, 2, 3, \dots, n-1\}$ cu proprietatea

$$2 \geq r_G(\{z, x_i\}) + r_G(\{z, x_{i+l-2}\}) > \frac{n-1}{n-1} = 1$$

de unde

$$r_G(\{z, x_i\}) + r_G(\{z, x_{i+l-2}\}) = 2.$$

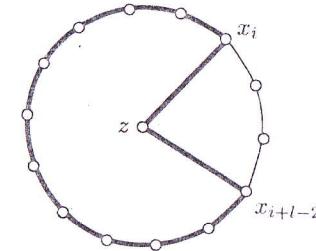


Figura 7.6.

Așadar $r_G(\{z, x_i\}) = 1$ și $r_G(\{z, x_{i+l-2}\}) = 1$ adică $\{z, x_i\}, \{z, x_{i+l-2}\} \in E(G)$. Astfel G conține l -ciclul $[z, x_i \xrightarrow{C} x_{i+l-2}, z]$. Deci și în cazul 1.2 graful G este panciclic.

2. *Cazul în care graful G nu conține nici un $(n-1)$ -ciclu.*

Vom demonstra că în acest caz graful G este izomorf cu $K_{n/2, n/2}$. Să notăm cu $C = [x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, x_1]$ un ciclu hamiltonian. Din faptul că G nu conține nici un $(n-1)$ -ciclu rezultă că, pentru orice $i, j \in \{1, \dots, n\}$ cu $i \neq j$ și $i+1 \neq j+2$, dacă $\{x_i, x_j\} \in E(G)$ atunci $\{x_{i+1}, x_{j+2}\} \notin E(G)$, deoarece altfel s-ar forma $(n-1)$ -ciclul $[x_i, x_j \xrightarrow{C^{-1}} x_{i+1}, x_{j+2} \xrightarrow{C} x_i] \leq G$. Astfel pentru orice $i, j \in \{1, \dots, n\}$ cu $i \neq j$ și $i+1 \neq j+2$ este adevărată inegalitatea

$$r_G(\{x_i, x_j\}) + r_G(\{x_{i+1}, x_{j+2}\}) \leq 1. \quad (7.2)$$

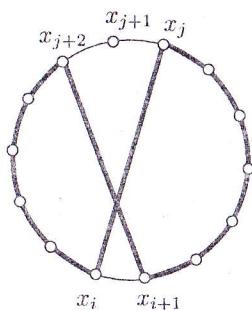


Figura 7.7.

Mai mult, inegalitatea (7.2) este adevărată cu egalitate, chiar și în cazul în care $i = j$ sau $i + 1 = j + 2$ deoarece graful G , fiind simplu, nu are bucle. Astfel, conform (7.2), avem

$$\begin{aligned} 4|E(G)| &= 2|E(G)| + 2|E(G)| \\ &= \sum_{i,j \in \{1, \dots, n\}} r_G(\{x_i, x_j\}) + \sum_{i,j \in \{1, \dots, n\}} r_G(\{x_{i+1}, x_{j+2}\}) \\ &= \sum_{i,j \in \{1, \dots, n\}} [r_G(\{x_i, x_j\}) + r_G(\{x_{i+1}, x_{j+2}\})] \leq n^2. \end{aligned}$$

Prin urmare $|E(G)| \leq n^2/4$ și, deoarece prin ipoteză $|E(G)| \geq n^2/4$, rezultă că

$$|E(G)| = \frac{n^2}{4}. \quad (7.3)$$

Egalitatea (7.3) este adevărată dacă și numai dacă n este par și dacă pentru orice $i, j \in \{1, \dots, n\}$ avem

$$r_G(\{x_i, x_j\}) + r_G(\{x_{i+1}, x_{j+2}\}) = 1, \quad (7.4)$$

adică exact o muchie dintre $\{x_i, x_j\}$ și $\{x_{i+1}, x_{j+2}\}$ aparține lui $E(G)$.

Din (7.4) rezultă că pentru orice $t \in \{1, 2, 3, \dots, n-1\}$ sunt adevărate echivalențele următoare:

$$\begin{aligned} \{x_i, x_{i+t}\} \in E(G), \text{ pentru orice } i \in \{1, \dots, n\} \\ \Leftrightarrow \{x_i, x_{i+t+1}\} \notin E(G) \text{ pentru orice } i \in \{1, \dots, n\} \end{aligned} \quad (7.5)$$

$$\begin{aligned} \{x_i, x_{i+t}\} \notin E(G), \text{ pentru orice } i \in \{1, \dots, n\} \\ \Leftrightarrow \{x_i, x_{i+t+1}\} \in E(G) \text{ pentru orice } i \in \{1, \dots, n\} \end{aligned} \quad (7.6)$$

Într-adevăr, propoziția

$$\{x_i, x_{i+t}\} \in E(G) \text{ pentru orice } i \in \{1, \dots, n\}$$

este echivalentă, conform (7.4), cu

$$\{x_i, x_{i+t+2}\} \notin E(G) \text{ pentru orice } i \in \{1, \dots, n\},$$

adică

$$\{x_i, x_{i+t+1}\} \notin E(G) \text{ pentru orice } i \in \{1, \dots, n\}$$

și deci echivalența (7.5) este adevărată. Analog se procedează și în cazul echivalenței (7.6). Dar $\{x_i, x_{i+1}\} \in E(G)$ pentru orice $i \in \{1, \dots, n\}$ acestea fiind chiar muchiile ciclului hamiltonian C . Aplicând alternativ echivalențele (7.5) și (7.6) rezultă că următoarele apartenențe sunt adevărate pentru orice $i \in \{1, \dots, n\}$:

$$\begin{array}{ll} \{x_i, x_{i+1}\} \in E(G), & \{x_i, x_{i+2}\} \notin E(G), \\ \{x_i, x_{i+3}\} \in E(G), & \{x_i, x_{i+4}\} \notin E(G), \\ \{x_i, x_{i+5}\} \in E(G), & \{x_i, x_{i+6}\} \notin E(G), \\ \dots & \dots \\ \{x_i, x_{i-3}\} \in E(G), & \{x_i, x_{i-2}\} \notin E(G), \\ \{x_i, x_{i-1}\} \in E(G). & \{x_i, x_{i-1}\} \in E(G). \end{array}$$

În concluzie, orice două vârfuri din G cu indici de parități diferite sunt adiacente și orice două vârfuri din G cu indici de aceeași paritate sunt neadiacente. Deci

$$G = \{x_1, x_3, x_5, \dots, x_{n-1}\} \cup \{x_2, x_4, \dots, x_n\} \sim K_{n/2, n/2}.$$

Conform principiului inducției matematice demonstrația este încheiată. \square

Din teoremele 7.7, 7.8 și din teorema 7.6 rezultă următoarea caracterizare a grafurilor care satisfac condiția lui Ore.

Teoremă 7.9. *Un graf simplu $G = (V, E)$ cu $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ vârfuri cu proprietatea că $d_G(x) + d_G(y) \geq n$ pentru orice două vârfuri neadiacente $x, y \in V$ este panciclic sau este izomorf cu $K_{n/2, n/2}$.*

7.2.3. Probleme

1. Un graf simplu G cu n vârfuri cu proprietatea că $d_G(x) + d_G(y) \geq n - 1$ pentru orice două vârfuri neadiacente $x, y \in V(G)$ este conex.
2. Fie G un graf simplu cu n vârfuri cu proprietatea că $d_G(x) + d_G(y) \geq n$ pentru orice două vârfuri neadiacente $x, y \in V(G)$. Dacă $\delta(G) < n/2$ atunci graful induș în G de vârfurile de grad minim $\delta(G)$ este complet.
3. Un graf simplu hamiltonian cu n vârfuri care nu conține nici un $(n-1)$ -ciclu are cel mult $n^2/4$ muchii. Maximul este atins numai pentru n par și $G \sim K_{n/2, n/2}$.
4. Fie G un graf simplu cu n vârfuri compus dintr-un $(n-1)$ -ciclu elementar și un vârf z de grad $d_G(z) > (n-1)/2$. Atunci G este panciclic.
5. Fie G un graf simplu cu n vârfuri care conține un ciclu hamiltonian $C = [x_1, x_2, \dots, x_n, x_1]$. Dacă pentru orice $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ următoarea echivalență este adevărată atunci $G \sim K_{n/2, n/2}$.

$$\{x_i, x_j\} \in E(G) \Leftrightarrow \{x_{i+1}, x_{j+2}\} \notin E(G)$$

atunci $G \sim K_{n/2, n/2}$.

6. Fie G un graf simplu cu n vârfuri $V(G) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ cu proprietatea că pentru orice $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ următoarea implicație este adevărată

$$\{x_i, x_j\} \in E(G) \Rightarrow \{x_{i+1}, x_{j+2}\} \notin E(G),$$

atunci pentru orice $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ avem $d_G(x_i) + d_G(x_{i+1}) \leq n$ și $|E(G)| \leq n^2/4$.

7.2.4. Tehnica închiderii

Să considerăm \mathcal{G}_V mulțimea tuturor grafurilor simple peste o mulțime finită de vârfuri V , o proprietate \mathcal{P} a acestora și un număr natural $k \in \mathbb{N}_{\geq 0}$. \mathcal{G}_V împreună cu relația \leq formează o mulțime parțial ordonată $\mathcal{G}_{V,\leq}$. În cele ce urmează convenim să identificăm \mathcal{P} cu mulțimea grafurilor din \mathcal{G}_V care au proprietatea \mathcal{P} . Astfel expresiile „graful G are proprietatea \mathcal{P} “ și „ $G \in \mathcal{P}$ “ vor comunica aceeași informație.

Pentru un graf $G \in \mathcal{G}_V$ și o pereche de vârfuri $e = \{x, y\} \in V^{(2)}$ notăm cu $w_G(e)$ numărul muchiilor din $E(G)$ care au un capăt în mulțimea $\{x, y\}$ și un capăt în mulțimea complementară acesteia $V - \{x, y\}$.

Proprietatea \mathcal{P} se numește k^+ -stabilă dacă pentru orice graf $G \in \mathcal{G}_V$ și orice pereche de vârfuri $e = \{x, y\} \in V^{(2)}$ cu $w_G(e) \geq k$ următoarea implicație este adevărată

$$G \text{ are proprietatea } \mathcal{P} \Rightarrow G + e \text{ are proprietatea } \mathcal{P}.$$

Observăm că dacă vârfurile x și y sunt adiacente în G , atunci $G = G + e$. Prin urmare, implicația precedentă este semnificativă doar dacă vârfurile x și y nu sunt adiacente, caz în care avem

$$w_G(\{x, y\}) = w_{G+e}(\{x, y\}) = d_G(x) + d_G(y) = d_{G+e}(x) + d_{G+e}(y) - 2.$$

Proprietatea \mathcal{P} se numește k^- -stabilă dacă pentru orice graf $G \in \mathcal{G}_V$ și orice pereche de vârfuri $e = \{x, y\} \in V^{(2)}$ cu $w_G(e) \geq k$ următoarea implicație este adevărată

$$G \text{ are proprietatea } \mathcal{P} \Rightarrow G - e \text{ are proprietatea } \mathcal{P}.$$

Observăm că dacă vârfurile x și y sunt adiacente în G , atunci $G = G - e$. Prin urmare, implicația precedentă este semnificativă doar dacă vârfurile x și y sunt adiacente, caz în care avem

$$w_G(\{x, y\}) = w_{G-e}(\{x, y\}) = d_G(x) + d_G(y) - 2 = d_{G-e}(x) + d_{G-e}(y).$$

Pentru două numere $i, k \in \mathbb{N}_{\geq 0}$ vom spune că proprietatea \mathcal{P} este (i^-, k^+) -stabilă dacă este i^- -stabilă și k^+ -stabilă.

În figura 7.8 am reprezentat diagrama Hasse a posetului induș în \mathcal{G}_V / \sim de posetul $\mathcal{G}_{V,\leq}$. Pe arcele diagramei am notat maximul ponderii muchiilor prin a căror adăugare/stergere grafurile se transformă unele în altele.

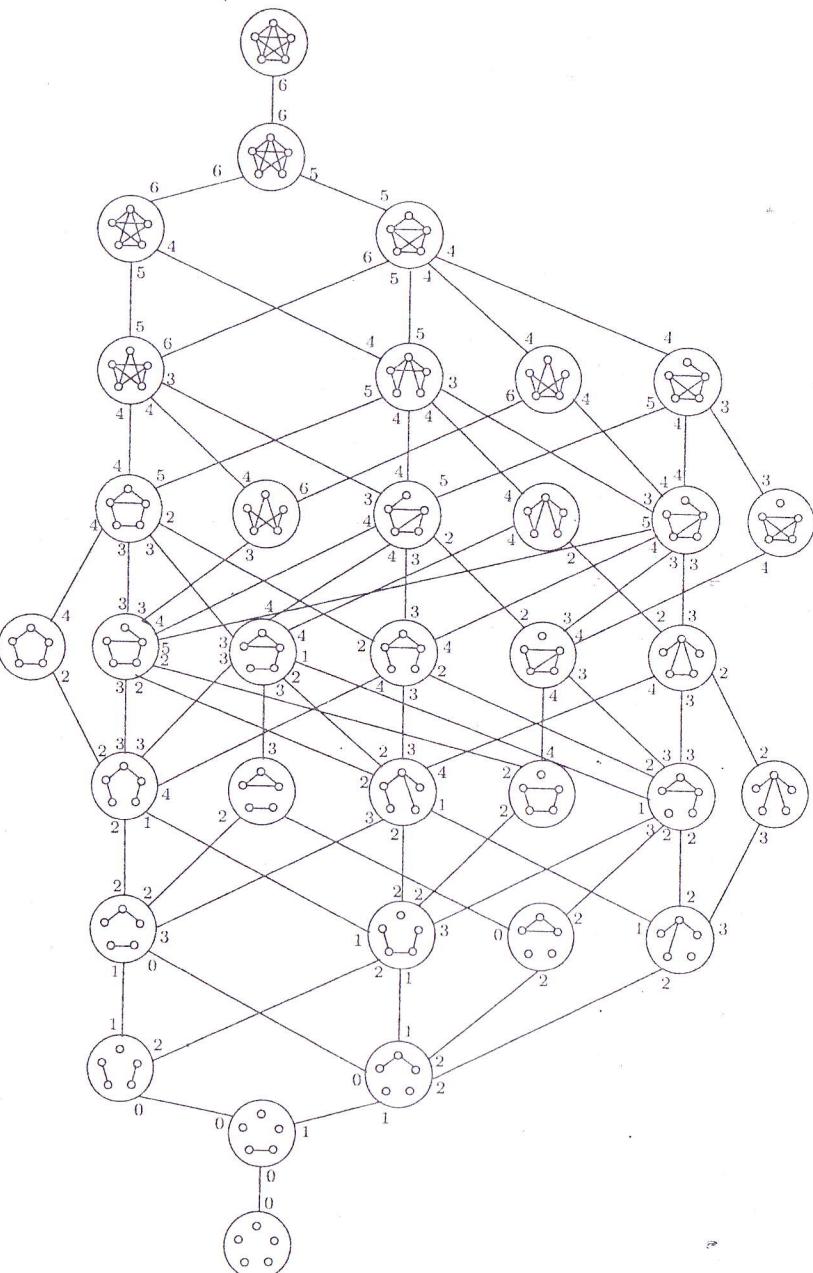


Figura 7.8.

k^+ închiderea unui graf simplu $G(V, E)$, unde $k \in \mathbb{N}_{\geq 0}$, este mulțimea $c_{k^+}(G)$ a grafurilor obținute din G prin repetarea cât timp este posibil a următoarei operații:

$$\text{dacă există } e = \{x, y\} \in V^{(2)} - E \text{ cu } w_G(e) = d_G(x) + d_G(y) \geq k, \quad (7.7)$$

atunci se înlocuiește graful G cu $G + e$ (figura 7.9).

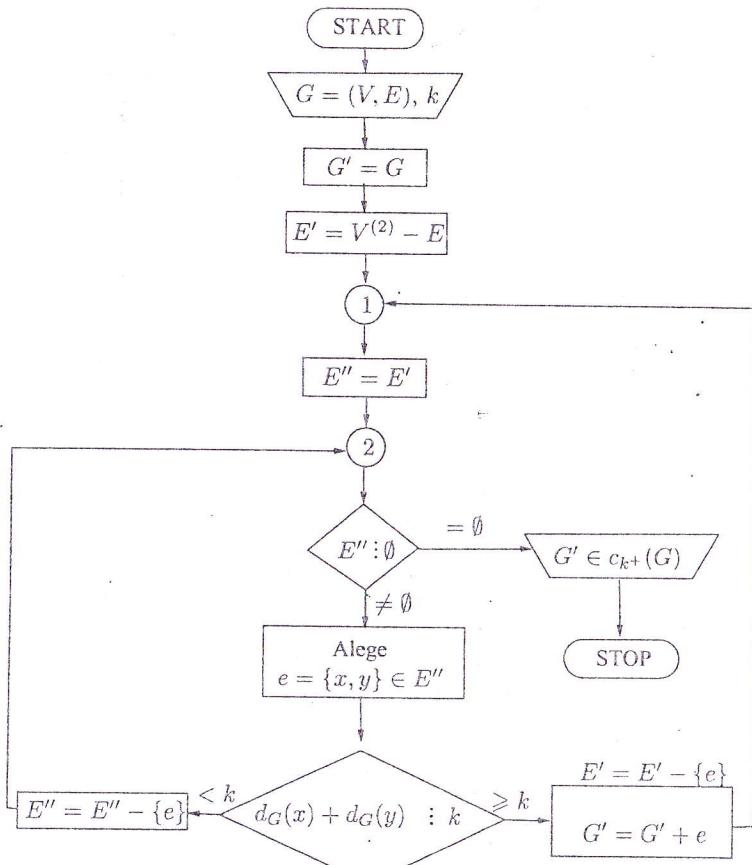


Figura 7.9.

k^- închiderea unui graf simplu $G(V, E)$; unde $k \in \mathbb{N}_{\geq 0}$, este mulțimea $c_{k^-}(G)$ a grafurilor obținute din G prin repetarea cât timp este posibil a următoarei operații:

$$\text{dacă există } e = \{x, y\} \in E \text{ cu } w_G(e) \geq k, \text{ atunci se înlocuiește graful } G \text{ cu } G - e. \quad (7.8)$$

Un graf simplu G se numește *graf k^- -închis* dacă $c_{k^-}(G) = \{G\}$. Cu alte cuvinte, un graf k^- -închis este caracterizat de proprietatea că pentru orice muchie $e = \{x, y\}$ avem $w_G(e) < k$.

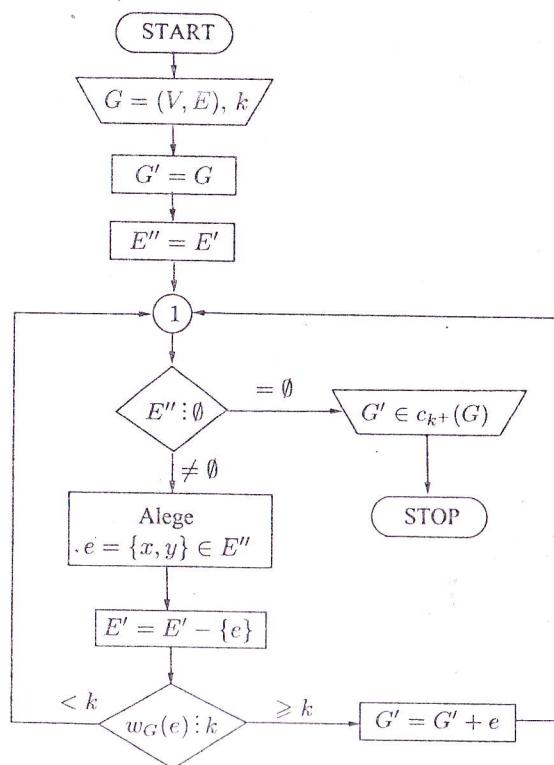


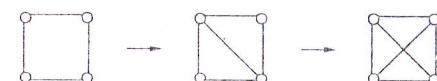
Figura 7.10.

7.2.5. Exemple

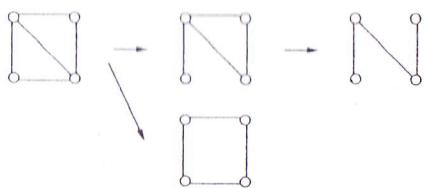
1. $c_{3^+}\left(\begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \\ \bullet \end{array}\right) = \left\{ \begin{array}{c} \bullet \quad \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \quad \bullet \end{array}, \begin{array}{c} \bullet \quad \bullet \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \quad \bullet \end{array} \right\}$



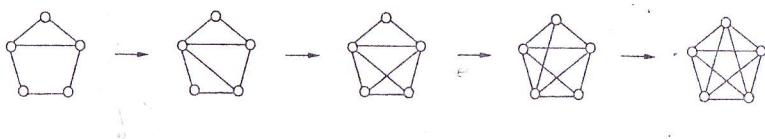
2. $c_{3^+}\left(\begin{array}{|c|c|} \hline \bullet & \bullet \\ \hline \end{array}\right) = \left\{ \begin{array}{|c|c|} \hline \bullet & \bullet \\ \hline \bullet & \bullet \\ \hline \end{array} \right\}$



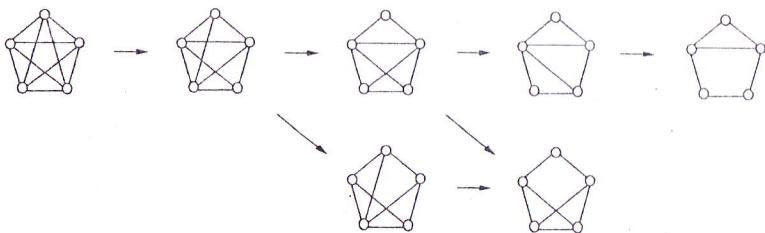
3. $c_{3-} \left(\begin{array}{|c|c|} \hline \text{ } & \text{ } \\ \hline \text{ } & \text{ } \\ \hline \end{array} \right) = \left\{ \begin{array}{|c|c|} \hline \text{ } & \text{ } \\ \hline \text{ } & \text{ } \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline \text{ } & \text{ } \\ \hline \text{ } & \text{ } \\ \hline \end{array} \right\}$



4. $c_{5+} \left(\begin{array}{|c|c|} \hline \text{ } & \text{ } \\ \hline \text{ } & \text{ } \\ \hline \end{array} \right) = \left\{ \begin{array}{|c|c|} \hline \text{ } & \text{ } \\ \hline \text{ } & \text{ } \\ \hline \end{array} \right\}$



5. $c_{5-} \left(\begin{array}{|c|c|} \hline \text{ } & \text{ } \\ \hline \text{ } & \text{ } \\ \hline \end{array} \right) = \left\{ \begin{array}{|c|c|} \hline \text{ } & \text{ } \\ \hline \text{ } & \text{ } \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline \text{ } & \text{ } \\ \hline \text{ } & \text{ } \\ \hline \end{array} \right\}$



6. $c_{5+} \left(\begin{array}{|c|c|} \hline \text{ } & \text{ } \\ \hline \text{ } & \text{ } \\ \hline \end{array} \right) = \left\{ \begin{array}{|c|c|} \hline \text{ } & \text{ } \\ \hline \text{ } & \text{ } \\ \hline \end{array} \right\}$

7. $c_{5+} \left(\begin{array}{|c|c|} \hline \text{ } & \text{ } \\ \hline \text{ } & \text{ } \\ \hline \end{array} \right) = \left\{ \begin{array}{|c|c|} \hline \text{ } & \text{ } \\ \hline \text{ } & \text{ } \\ \hline \end{array} \right\}$

În cele ce urmează, în funcție de context, convenim să înțelegem prin $c_{k-}(G)$ și $c_{k+}(G)$ un graf oarecare din mulțimile $c_{k-}(G)$, respectiv $c_{k+}(G)$.

Teoremă 7.10. (Teorema de unicitate a k^+ -închiderii unui graf) Pentru orice graf simplu $G = (V, E)$ și orice număr $k \in \mathbb{N}_{\geq 0}$ prin algoritm (7.7) se obține un unic graf k^+ -închidere $|c_{k+}(G)| = 1$.

Demonstrație. Să presupunem prin absurd că algoritmul (7.7) poate conduce, prin selecții diferite ale vârfurilor neadiacente x și y , la două grafuri k^+ -închidere diferite $G_1 = (V, E_1)$ și $G_2 = (V, E_2)$, $G_1 \neq G_2$.

Notăm $E_1 - E = \{e_1, e_2, e_3, \dots\}$, unde indicii corespund ordinii selectării muchiilor în procesul obținerii grafului G_1 . Deoarece $E_1 \neq E$, putem presupune, fără a micșora generalitatea, că $E_1 - E_2 \neq \emptyset$. Fie $j \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ primul indice al unei muchii care aparține lui E_1 dar nu aparține lui E_2

$$e_1, e_2, e_3, \dots, e_{j-1} \in (E_1 - E) \cap (E_2 - E) \quad \text{și} \quad e_j \in E_1 - E_2.$$

Notăm

$$e_j = \{x, y\}, \quad G_0 := G + \sum_{1 \leq i < j} e_i \quad \text{și} \quad G_0 = (V, E_0).$$

Conform modului de selecție a vârfurilor neadiacente x, y din algoritm, următoarele implicații sunt devărate

$$G_0 \leq G_1, e_j = \{x, y\} \notin E_0 \text{ și } e_j = \{x, y\} \in E_1 \Rightarrow d_{G_0}(x) + d_{G_0}(y) \geq k; \quad (a)$$

$$e_j = \{x, y\} \notin E_2 \Rightarrow d_{G_2}(x) + d_{G_2}(y) < k. \quad (b)$$

Dar $G_0 \leq G_2$. Prin urmare $d_{G_0}(x) \leq d_{G_2}(x)$ și $d_{G_0}(y) \leq d_{G_2}(y)$, și din (b) obținem

$$d_{G_0}(x) + d_{G_0}(y) \leq d_{G_2}(x) + d_{G_2}(y) < k. \quad (c)$$

Inegalitățile (a) și (c) se contrazic și astfel presupunerea făcută la început este falsă. Deci $G_1 = G_2$, și prin urmare $|c_{k+}(G)| = 1$. Demonstrația este încheiată. \square

Observație 7.11. În cazul k^- -închiderii unui graf G nu este adeverată o teoremă analoagă celei precedente ceea ce se poate constata în exemplele 3 și 5.

Lemă 7.12. Fie două numere naturale $i, k \in \mathbb{N}_{\geq 0}$, \mathcal{G}_V mulțimea grafurilor simple peste o mulțime finită de vârfuri V și \mathcal{P} o proprietate a acestora (i^+, k^-)-stabilă. Atunci, oricare ar fi graful $G \in \mathcal{G}_V$, pentru orice pereche de vârfuri $e = \{x, y\} \in V^{(2)}$ cu $w_G(e) \geq \max\{i, k\}$ următoarele afirmații sunt echivalente:

(a) $G - e$ are proprietatea \mathcal{P} ;

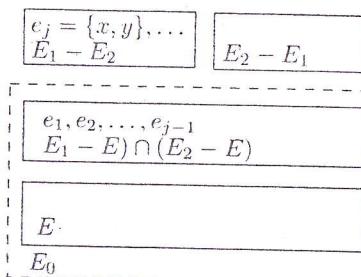


Figura 7.11.

- (b) G are proprietatea \mathcal{P} ;
(c) $G + e$ are proprietatea \mathcal{P} .

Demonstrație. Vom demonstra că $(b) \Leftrightarrow (c)$, cealaltă echivalență $(a) \Leftrightarrow (b)$, fiind evident analoagă.

Sunt posibile următoarele două situații:

Cazul 1. $e \in E(G)$. Atunci $G = G + e$ și echivalența este imediată.

Cazul 2. $e \notin E(G)$. Avem:

(i) dacă G are proprietatea \mathcal{P} , atunci și $G + e$ are proprietatea \mathcal{P} deoarece \mathcal{P} este i^+ -stabilă și $w_G(e) \geq \max\{i, k\} \geq i$;

(ii) dacă $G + e$ are proprietatea \mathcal{P} , atunci și G are proprietatea \mathcal{P} deoarece \mathcal{P} este k^- -stabilă și $w_{G+e}(e) = w_G(e) \geq \max\{i, k\} \geq k$.

Așadar, în ambele situații echivalența $(b) \Leftrightarrow (c)$ este adevărată. Lema este demonstrată. \square

Teoremă 7.13. Fie două numere naturale $i, k \in \mathbb{N}_{\geq 0}$, \mathcal{G}_V mulțimea grafurilor simple peste o mulțime finită de vârfuri V și \mathcal{P} o proprietate a cestora (i^+, k^-) -stabilă. Atunci, oricare ar fi graful $G \in \mathcal{G}_V$ următoarele afirmații sunt echivante:

- (a) $c_{p^-}(G)$ are proprietatea \mathcal{P} ;
(b) G are proprietatea \mathcal{P} ;
(c) $c_{p^+}(G)$ are proprietatea \mathcal{P} ;

unde $p = \max\{i, k\}$. \square

Cu aceleși notații, este adevărat de asemenea, și următorul enunț:

Teoremă 7.14. (a) Fie $i, k \in \mathbb{N}_{\geq 0}$ cu $i \leq k$ și \mathcal{P} o proprietate i^+ -stabilă a grafurilor din \mathcal{G}_V . Dacă G are proprietatea \mathcal{P} pentru orice $G \in \mathcal{G}_V$, atunci și $c_{k^+}(G)$ are proprietatea \mathcal{P} .

(b) Fie $i, k \in \mathbb{N}_{\geq 0}$ cu $i \leq k$ și \mathcal{P} o proprietate i^- -stabilă a grafurilor din \mathcal{G}_V . Dacă G are proprietatea \mathcal{P} pentru orice $G \in \mathcal{G}_V$, atunci și $c_{k^-}(G)$ are proprietatea \mathcal{P} . \square

7.2.6. Aplicații

7.2.6.1. Hamiltonicitate și stabilitate. Începem prin a demonstra faptul că hamiltonicitatea grafurilor simple cu n vârfuri este o proprietate $(0^+, n^-)$ -stabilă și conform teoremei 7.13 vom obține o condiție necesară și suficientă de hamiltonitate în termeni de n^+ și n^- -închideri, formulată în teorema 7.16. Aceasta va avea drept consecințe teoremele lui Dirac și Ore.

Teoremă 7.15. În mulțimea \mathcal{G}_V a grafurilor simple peste o mulțime cu n vârfuri V , $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$, proprietatea de a fi hamiltonian este $(0^+, n^-)$ -satabilă.

Demonstrație. Notăm cu \mathcal{H}_V proprietatea de a fi hamiltonian a grafurilor din \mathcal{G}_V . Avem:

(a) *Proprietatea \mathcal{H}_V este 0^+ -stabilă.* Să considerăm un graf $G \in \mathcal{H}_V$, un ciclu hamiltonian $C \leq G$ și $e = \{u, v\} \in V^{(2)}$ două vârfuri neadiacente în G . Evident $w_G(e) \geq 0$. Atunci $C \leq G + e$ și astfel graful $G + e$ este de asemenea hamiltonian, $G + e \in \mathcal{H}_V$. Deci proprietatea \mathcal{H}_V este 0^+ -stabilă.

(b) *Proprietatea \mathcal{H}_V este n^- -stabilă.* Să considerăm un graf $G \in \mathcal{H}_V$ un ciclu hamiltonian $C \leq G$ și $e = \{u, v\} \in V^{(2)}$ două vârfuri adiacente în G cu $w_G(e) \geq n$. Vom arăta că $G - e \in \mathcal{H}_V$. Dacă, prin absurd, $G - e$ nu ar fi hamiltonian, adică $G - e \notin \mathcal{H}_V$, atunci $C \not\leq G - e$ și cum $C \leq G$, rezultă că $e \in E(C)$. Prin urmare, ciclul C induce în graful $G - e$ un u.v-lanț hamiltonian $P = C - e = [x_1, \dots, x_n]$ unde $x_1 = u$ și $x_n = v$. Pentru orice $i \in \{2, \dots, n\}$ avem proprietatea că dacă $x_i \in N_{G-e}(x_1)$, atunci $x_{i-1} \notin N_{G-e}(x_n)$ deoarece altfel s-ar forma în $G - e$ ciclul hamiltonian $C' = [x_1 \xrightarrow{P} x_{i-1}, x_n \xrightarrow{P^{-1}} x_i, x_1]$. Rezultă $N_{G-e}(x_n) \subseteq \{x_1, \dots, x_{i-1}\} - \{x_{i-1} \mid i \in N_{G-e}(x_1)\}$, de unde obținem

$$d_{G-e}(x_1) + d_{G-e}(x_n) \leq 1.$$

Această inegalitate contrazice însă ipoteza $w_G(e) \geq n$, deoarece avem

$$d_{G-e}(x_1) + d_{G-e}(x_n) = d_G(x_1) - 1 + d_G(x_n) - 1 = w_G(\{x_1, x_n\}) = w_G(e) \geq n.$$

Așadar, graful $G - e$ este hamiltonian, $G - e \in \mathcal{H}_V$. Deci proprietatea \mathcal{H}_V este n^- -stabilă. Demonstrația este încheiată. \square .

Puteam formula acum, conform teoremei 7.13, enunțul următor:

Teoremă 7.16. În mulțimea \mathcal{G}_V grafurilor simple peste o mulțime cu n vârfuri V , $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$, pentru orice graf $G \in \mathcal{G}_V$ următoarele afirmații sunt echivante:

- (a) $c_{n^-}(G)$ este hamiltonian;
(b) G este hamiltonian;
(c) $c_{n^+}(G)$ este hamiltonian. \square

Amintim că am convenit să notăm prin $c_{n^+}(G)$ unicul graf n^+ -închidere a lui G din mulțimea $c_{n^+}(G)$, iar prin $c_{n^-}(G)$ oricare din grafurile n^- -închidere ale lui G care formează mulțimea $c_{n^-}(G)$.

Corolar 7.17. Fie G un graf simplu cu n vârfuri, $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$. Dacă $c_{n^+}(G) \sim K_n$, atunci graful G este hamiltonian.

Din corolarul 7.17 rezultă imediat teorema 7.5 a lui Dirac și teorema 7.6 a lui Ore. Într-adevăr, este ușor de văzut că graful G din enunțurile acestor teoreme are n^+ -închidere izomorfă cu graful complet K_n . În consecință, conform corolarului 7.17, graful G este hamiltonian.

7.2.6.2. Teorema lui Chvátal

Demonstrăm în continuare o proprietate a grafurilor simple cu n vârfuri n^+ -închise a cărei negație este 0^+ -stabilă. Aceasta ne va permite formularea unei condiții suficiente de hamiltonitate a unui graf simplu aparținând lui Chvátal.

Teoremă 7.18. Fie $G = (V, E)$ un graf simplu de ordin n , $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$, n^+ -închis în care notăm

$$s(G) = (d_1 \leq \dots \leq d_n), \quad \text{multisetul ordonat crescător al gradelor vârfurilor lui } G, \\ V_i = \{x \mid x \in V, d_G(x) = i\} \quad \text{pentru } i \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}.$$

Atunci una din următoarele două afirmații este adevărată:

- (a) graful G este complet: $G \sim K_n$;
- (b) graful G are proprietatea \mathcal{P}_V :

$$\begin{aligned} & \text{Există un număr întreg } k, 1 \leq k < n/2 \text{ astfel încât} \\ & |V_{n-k}| + \dots + |V_{n-1}| \leq k \leq |V_0| + |V_1| + \dots + |V_k|. \end{aligned} \quad (\mathcal{P}_V)$$

Demonstrație. Sunt posibile următoarele două situații:

Cazul 1. $V_0 \neq \emptyset$. Atunci graful G nu este complet deoarece G are vârfuri izolate ($V_0 \neq \emptyset$) și $|V| = n \geq 3$. Pentru $k = 1$ avem

$$|V_{n-1}| \leq 1 \leq |V_0| + |V_1|$$

deoarece prin ipoteză $|V_0| \geq 1$ și prin urmare $|V_{n-1}| = 0$. Așadar proprietatea \mathcal{P} este adevărată în acest caz.

Cazul 2. $V_0 = \emptyset$. Vom arăta că dacă graful G nu este complet, atunci el are proprietatea \mathcal{P}_V (adică non (a) \Rightarrow (b)) și cu acesta demonstrația va fi încheiată.

Presupunem așadar că $G \not\sim K_n$. Există atunci două vârfuri $u, v \in V$ neadiacente

$$\{u, v\} \notin E \quad (7.9)$$

Presupunem că, în mulțimea perechilor de vârfuri neadiacente din G , perechea $\{u, v\}$ este aleasă astfel încât suma gradelor să fie maximă

$$d_G(u) + d_G(v) \text{ maximă.} \quad (7.10)$$

Notăm $k = d_G(u)$ și $t = d_G(v)$ ceea ce înseamnă că $u \in V_k$ și $v \in V_t$. Putem presupune fără a micșora generalitatea că avem

$$k \leq t. \quad (7.11)$$

Vom arăta că numărul k astfel definit are calitățile din enunțul proprietății \mathcal{P}_V . Observăm mai întâi că este adevărată următoarea inegalitate

$$k + t = d_G(u) + d_G(v) < n \quad (7.12)$$

deoarece graful G este n^+ -închis, iar vâfurile u și v sunt neadiacente.

În continuare avem:

$$2.1. 1 \leq k < n/2.$$

Într-adevăr, $d_G(u) = k \geq 1$ deoarece graful G nu are vârfuri izolate ($|V_0| = 0$). Pe de altă parte $k + t = d_G(u) + d_G(v) < n$ și, cum $k \leq t$, rezultă $k < n/2$ (vezi figura 7.12).

$$2.2. |V_{n-k}| + |V_{n-k+1}| + \dots + |V_{n-1}| \leq k.$$

Într-adevăr, pentru orice $i \in \{n-k, n-k+1, \dots, n-1\}$ și orice vârf $x \in V_i$, $\{u, x\} \in E$, deoarece altfel am avea $\{u, x\} \notin E$ și $d_G(u) + d_G(x) = k + i \geq n$; ceea ce contrazice faptul că graful G este n^+ -închis. Rezultă $k = d_G(u) \geq |V_{n-k}| + |V_{n-k+1}| + \dots + |V_{n-1}|$.

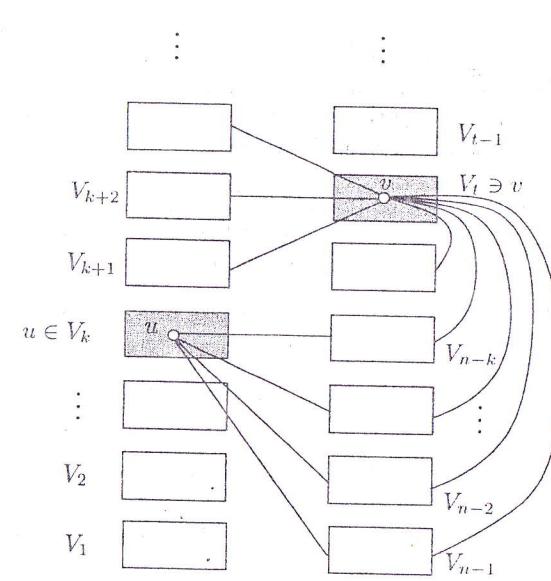


Figura 7.12.

$$2.3. k \leq |V_1| + |V_2| + \dots + |V_k|.$$

Într-adevăr, pentru orice $i \in \{k+1, k+2, \dots, n-1\}$ și orice vârf $x \in V_i$, $x \neq v$, $\{u, x\} \in E$, deoarece altfel am avea $\{v, x\} \notin E$ și $d_G(x) + d_G(v) = i + t > k + t = d_G(u) + d_G(v)$ ceea ce contrazice faptul că numărul $k + t$ este egal cu maximul sumei gradelor a două vârfuri neadiacente. Rezultă

$$t = d_G(v) \geq |V_{k+1} \cup V_{k+2} \cup \dots \cup V_{n-1} - \{v\}|. \quad (7.13)$$

Sunt posibile următoarele două situații:

$$2.3.1. t = k.$$

$v \in V_k = V_t$ și din (7.13) obținem

$$t \geq |V_{k+1}| + |V_{k+2}| + \dots + |V_{n-1}|. \quad (7.14)$$

$$2.3.2. t > k.$$

Atunci $v \in V_t \subseteq V_{k+1} \cup V_{k+2} \cup \dots \cup V_{n-1}$ și din (7.13) obținem

$$t \geq |V_{k+1}| + |V_{k+2}| + \dots + |V_{n-1}| - 1. \quad (7.15)$$

Comparând (7.14) cu (7.15) reținem faptul că relația (7.15) este adevărată în ambele cazuri. Inegalitatea (7.15) admite forma echivalentă $t \geq n - (|V_1| + |V_2| + \dots + |V_k|) - 1$ sau

$$|V_1| + |V_2| + \dots + |V_k| \geq n - t - 1 \geq k$$

deoarece $k + t < n$, ceea ce trebuie demonstrat. \square

Fie $s = (x_1 \leq \dots \leq x_n)$ și $s' = (x'_1 \leq \dots \leq x'_n)$ două n -multiseturi de numere ordonate crescător, $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Spunem că s' majorează s și notăm $s \leq s'$ dacă și numai dacă $x_i \leq x'_i$ pentru orice $i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$. Un graf neorientat G_1 spunem că este grad-majorat de un graf neorientat G_2 dacă $s(G_1) \leq s(G_2)$, unde $s(G_1)$ și $s(G_2)$ sunt multiseturile ordonate crescător ale gradelor vârfurilor.

Lemă 7.19. Fie $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, $i_0 \in \{1, 2, \dots, n\}$ și $s = (x_1 \leq \dots \leq x_n) \in \mathbb{N}_{\geq 0}^n$. Fie $s' = (x'_1 \leq \dots \leq x'_n)$ multisetul obținut din s prin adunarea unei unități la componenta x_{i_0} : $x_{i_0} + 1 \rightarrow x_{i_0}$ și reordonarea componentelor. Avem $s < s'$.

Demonstrație. Cu notația $j_0 = \max\{j \mid i_0 \leq j \leq n, x_j = x_{i_0}\}$ avem $x_i = x'_i$ pentru $i \in [n] - \{j_0\}$ și $x_{j_0} = x'_{j_0} - 1 < x'_{j_0}$. Deci

$$s = (x_1 \leq \dots \leq x_n) < (x'_1 \leq \dots \leq x'_n) = s'. \quad \square$$

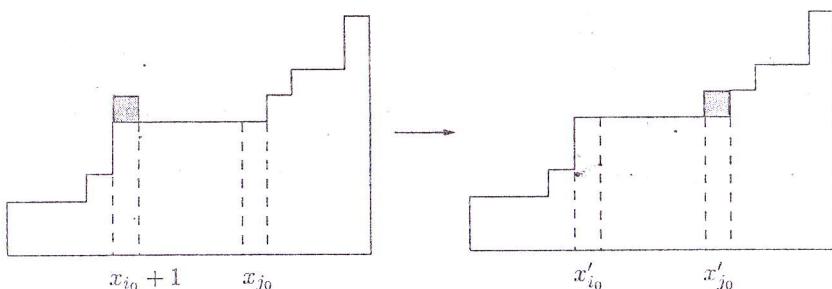


Figura 7.13.

Corolar 7.20. (a) Pentru orice graf neorientat G și $u, v \in V(G)$ avem $s(G) < s(G + uv)$.

(b) Pentru orice graf simplu G și orice număr $k \in \mathbb{N}_{\geq 0}$ avem $s(c_{k-}(G)) \leq s(G) \leq s(c_{k+}(G))$.

Propoziție 7.21. În mulțimea \mathcal{G}_V a grafurilor simple peste o mulțime cu n vârfuri V , $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$, proprietatea non \mathcal{P}_V (negația proprietății \mathcal{P}_V) este 0^+ -stabilă.

Demonstrație. Conform propoziției 7.23, negația proprietății \mathcal{P}_V poate fi formulată astfel:

Un graf $G \in \mathcal{G}_V$ cu multisetul gradelor $s(G) = (d_1 \leq \dots \leq d_n)$ are proprietatea non \mathcal{P}_V dacă și numai dacă pentru orice număr întreg k , $1 \leq k < n/2$, este adevărată următoarea implicație

$$d_k \leq k \Rightarrow d_{n-k} \geq n - k.$$

Să considerăm un graf necomplet $G \in \mathcal{G}_V$, $G \not\sim K_n$, și o pereche de vârfuri neadiacente $e = \{x, y\} \in V^{(2)}$. Fie $G' = G + e$ și $s(G') = (d'_1 \leq \dots \leq d'_n)$ multisetul gradelor lui G' . Presupunem că graful G are proprietatea non \mathcal{P}_V și să arătăm că și graful $G' = G + e$ are aceeași proprietate. Cu aceasta demonstrația va fi încheiată.

Într-adevăr, conform lemei 7.19 și corolarului 7.20 avem

$$s(G) \leq s(G'). \quad (7.16)$$

Prin urmare, pentru orice număr întreg k , $1 \leq k < n/2$, avem implicațile

$$d'_k \leq k \stackrel{(7.16)}{\Rightarrow} d_k \leq k \stackrel{\text{non } \mathcal{P}_V}{\Rightarrow} d_{n-k} \geq n - k \stackrel{(7.16)}{\Rightarrow} d'_{n-k} \geq d_{n-k} \geq n - k.$$

Așadar, pentru $1 \leq k < n/2$ avem $d'_k \leq k \Rightarrow d'_{n-k} \geq n - k$. Deci G' are proprietatea non \mathcal{P}_V . \square

Theoremă 7.22. (Chvátal) Fie $G = (V, E)$ un graf simplu cu $|V| = n \geq 3$ și multisetul ordonat crescător al gradelor vârfurilor $s(G) = (d_1 \leq \dots \leq d_n)$. Dacă graful G are proprietatea non \mathcal{P}_V , atunci G este hamiltonian.

Pentru orice număr întreg k , $1 \leq k \leq n/2$, este adevărată

următoarea implicație

$$d_k \leq k \Rightarrow d_{n-k} \geq n - k.$$

Demonstrație. În virtutea teoremei 7.18 sunt posibile următoarele două situații:

Cazul 1. Graful n^+ -închis $c_{n+}(G)$ este complet: $c_{n+}(G) \sim K_n$.

Atunci, conform corolarului 7.17 graful G este hamiltonian.

Cazul 2. Graful n^+ -închis $c_{n+}(G)$ are proprietatea \mathcal{P}_V .

Dar, conform propoziției 7.21 proprietatea non \mathcal{P}_V este 0^+ -stabilă și prin urmare, conform teoremei 7.14 (a) graful n^+ -închis, $c_{n+}(G)$ are proprietatea non \mathcal{P}_V ; contradicție.

Așadar, singura situație posibilă este cazul 1, iar graful G este în consecință hamiltonian. \square

7.2.6.3. Caracterizarea grafurilor nehamiltoniene cu un număr maxim de muchii.

Pentru orice $t, a_1, \dots, a_t, b \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ definim graful $H_b^{a_1, \dots, a_t}$ astfel

$$H_b^{a_1, \dots, a_t} := (K_{a_1} \ddot{\cup} \dots \ddot{\cup} K_b).$$

Evident multisetul gradelor grafului $H_b^{a_1, \dots, a_t}$ este dat de formula

$$s(H_b^{a_1, \dots, a_t}) = (b + a_1 - 1)^{a_1} \dots (b + a_t - 1)^{a_t} (b + a_1 + \dots + a_t - 1)^b. \quad (7.17)$$

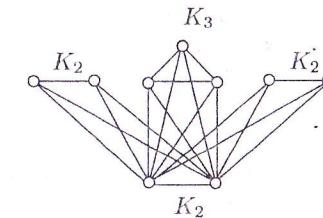
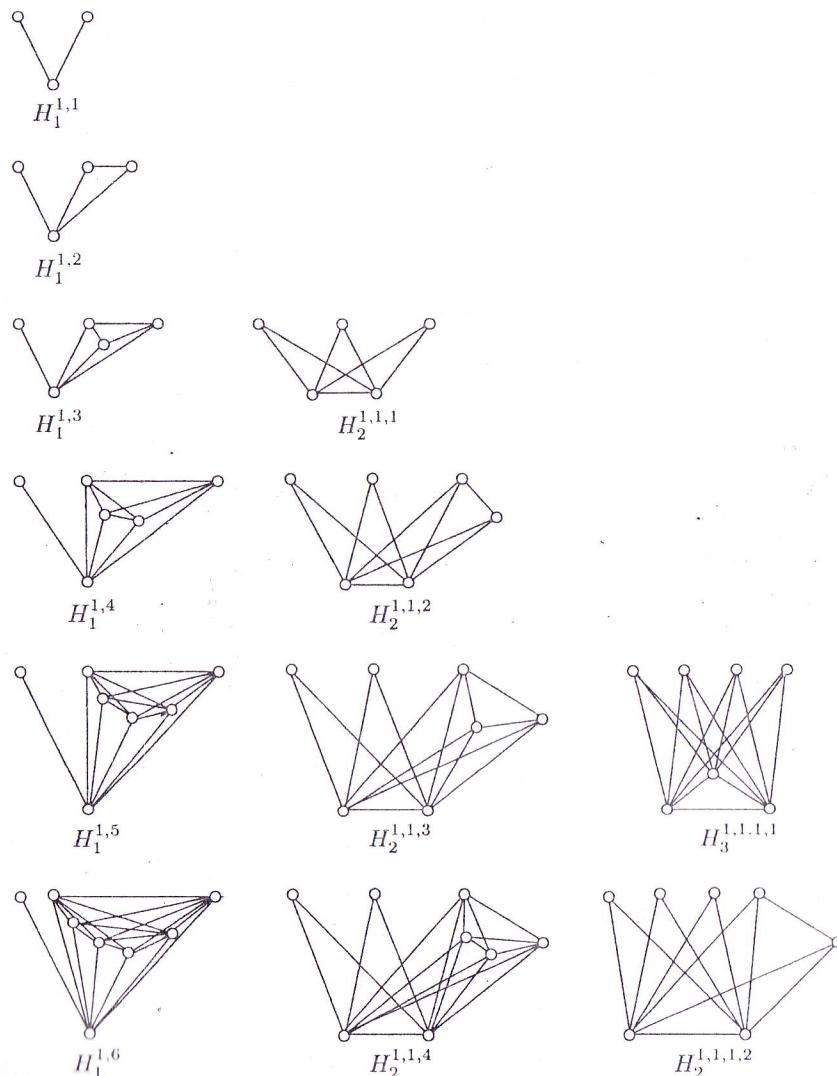


Figura 7.14. $H_2^{2,3,2}$; $s(H_2^{2,3,2}) = 3^4 4^3 8^2 = 333344488$.

7.2.6.4. Exemple



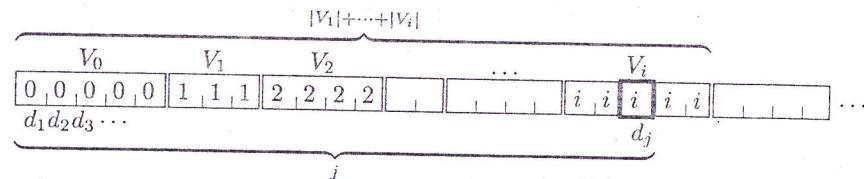
Propoziție 7.23. Proprietatea \mathcal{P}_V a mulțimii grafurilor simple \mathcal{G}_V definită în enunțul teoremei 7.18 admite următoarele definiții echivalente (a), (b), (c) sau (d).

- (a) $|V_{n-k}| + \dots + |V_{n-1}| \leq k \leq |V_0| + |V_1| + \dots + |V_k|$;
- (b) $d_k \leq k$ și $d_{n-k} < n - k$;
- (c) $s(G) \leq \underbrace{k \cdots k}_{k} \underbrace{(n - k - 1) \cdots (n - k - 1)}_{n - 2k} \underbrace{(n - 1) \cdots (n - 1)}_{k}$;

(d) $s(G) \leq s(\overbrace{H_k^{1,\dots,1,n-2k}}^k)$;
unde, cu notațiile teoremei 7.18, $G \in \mathcal{G}_V$ pentru care există k un număr întreg, $1 \leq k < n/2$, cu una din proprietățile (a), (b), (c) sau (d).

Demonstrație. În general, pentru orice $p, q \in \{1, \dots, n\}$, orice $i \in \{1, \dots, n-1\}$ și orice $j \in \{1, \dots, n\}$ avem

- (i) $|V_0| + |V_1| + \dots + |V_{n-1}| = n$;
- (ii) $p \leq q \Leftrightarrow d_p \leq d_q$;
- (iii) $i \geq d_j \Leftrightarrow d_{|V_0|+|V_1|+\dots+|V_i|} \geq d_j \Leftrightarrow |V_0| + |V_1| + \dots + |V_i| \geq j$.



Obținem echivalențele

$$\begin{aligned} k \geq d_k &\Leftrightarrow d_{|V_0|+|V_1|+\dots+|V_k|} \geq d_k \Leftrightarrow |V_0| + |V_1| + \dots + |V_k| \geq k; \\ n - k > d_{n-k} &\Leftrightarrow n - k - 1 \geq d_{n-k} \Leftrightarrow d_{|V_0|+|V_1|+\dots+|V_{n-k-1}|} \geq d_{n-k} \\ &\Leftrightarrow |V_0| + |V_1| + \dots + |V_{n-k-1}| \geq n - k \\ &\Leftrightarrow n - (|V_{n-k}| + \dots + |V_{n-1}|) \geq n - k \\ &\Leftrightarrow |V_{n-k}| + \dots + |V_{n-1}| \geq k. \end{aligned}$$

Așadar, (a) echivalent este cu (b).

În fine, echivalența (b) \Leftrightarrow (c) este evidentă, iar (c) \Leftrightarrow (d) rezultă imediat din formula (7.17) care, în acest caz particular, devine

$$\begin{aligned} s(\overbrace{H_k^{1,\dots,1,n-2k}}^k) &= k^k (n - k - 1)^{n-2k} (n - 1)^k \\ &= \underbrace{k \cdots k}_{k} \underbrace{(n - k - 1) \cdots (n - k - 1)}_{n - 2k} \underbrace{(n - 1) \cdots (n - 1)}_{k}. \quad \square \end{aligned}$$

Teoremă 7.24. Orice graf nehamiltonian simplu $G = (V, E)$ cu $n \geq 3$ vârfuri este grad-majorat de un graf de tip $\overbrace{H_k^{1,\dots,1,n-2k}}^k$ pentru un anumit număr întreg k , $1 \leq k < n/2$.

Demonstrație. Fie $G = (V, E)$ un graf nehamiltonian cu n vârfuri. Conform corolarelor 7.20 și 7.17 avem

$$s(G) \leq s(c_{n+}(G)) \quad \text{și} \quad c_{n+}(G) \not\simeq K_n. \quad (7.18)$$

Conform teoremei 7.18 și propoziției 7.23 există un număr întreg k , $1 \leq k < n/2$ cu proprietatea

$$s(c_{n+}(G)) \leq s(H_k^{1,\dots,1,n-2k}). \quad (7.19)$$

Din (7.18) și (7.19) rezultă

$$s(G) \leq s(H_k^{1,\dots,1,n-2k}),$$

adică G este grad-majorat de graful $H_k^{1,\dots,1,n-2k}$. \square

Teoremă 7.25. În orice graf nehamiltonian simplu G cu $n \geq 3$ vârfuri este adevărată inegalitatea următoare

$$|E(G)| \leq \binom{n-1}{2} + 1.$$

Avem egalitate dacă și numai dacă $G \in \{H_1^{1,n-2}, H_2^{1,1,1}\}$ (mod \sim).

Demonstrație. Fie G un graf nehamiltonian simplu cu $n \geq 3$ vârfuri. Conform teoremei 7.24 există un număr întreg k , $1 \leq k < n/2$, pentru care avem

$$s(G) \leq s(H_k^{1,\dots,1,n-2k}).$$

Rezultă

$$\begin{aligned} |E(G)| &\stackrel{(*)}{\leq} |E(H_k^{1,\dots,1,n-2k})| \\ &= \binom{n-k}{2} + k^2 = \binom{n-1}{2} - \binom{k-1}{2} - (n-k)(k-1) + k^2 \\ &= \binom{n-1}{2} - \binom{k-1}{2} - (n-2k-1)(k-1) + K^2 - k^2 + 1 \\ &= \binom{n-1}{2} + 1 - \binom{k-1}{2} - (n-2k-1)(k-1) \\ &\stackrel{(**)}{\leq} \binom{n-1}{2} + 1, \end{aligned}$$

unde am folosit inegalitatea tip Vandermonde

$$\binom{n-1}{2} = \binom{n-k}{2} + \binom{n-k}{1} \binom{k-1}{1} + \binom{k-1}{2}.$$

Așadar, $|E(G)| \leq \binom{n-1}{2} + 1$. Maximul este atins dacă și numai dacă avem egalitate în (*) și (**). În (*) avem egalitate dacă și numai dacă

$$\begin{aligned} s(G) &= s(H_k^{1,\dots,1,n-2k}) \\ &= \underbrace{k \cdots k}_{k} \underbrace{(n-k-1) \cdots (n-k-1)}_{n-2k} \underbrace{(n-1) \cdots (n-1)}_k. \end{aligned} \quad (7.20)$$

În (**) avem egalitate dacă și numai dacă una din următoarele două afirmații este adevărată:

- (1) $k = 1$;
- (2) $k = 2$ și $n = 5$.

În cazul (1) avem, înținând cont de (7.20),

$$s(G) = s(H_1^{1,n-2}) = (\underbrace{1, n-2, \dots, n-2}_{n-2}, n-1)$$

și rezultă ușor că $G \sim H_1^{1,n-2}$.

În cazul (2) avem, înținând cont de (7.20) $s(G) = s(H_2^{1,1,1}) = 22244$ și rezultă ușor că $G \sim H_2^{1,1,1}$.

Așadar, $G \in \{H_1^{1,n-2}, H_2^{1,1,1}\}$ (mod \sim). Demostrația este încheiată. \square

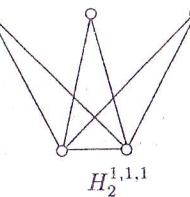
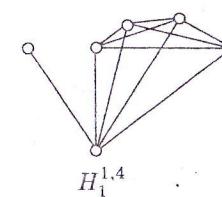


Figura 7.15.

Capitolul 8

Cuplaje

Fie G un graf simplu. Un *cuplaj* M din G este o mulțime independentă de muchii $M \subseteq E(G)$ adică o mulțime de muchii oricare două neadiacente. Graful induș de M îl notăm prin $[M]$. Notăm cu M^* un cuplaj de cardinal maxim din G . Vârfurile muchiilor unui cuplaj spunem că sunt *M -saturate*. Vârfurile grafului G care nu aparțin lui M spunem că sunt *M -nesaturate*.

În raport cu un cuplaj M din G , un lanț sau un ciclu elementar spunem că este *M -alternant* dacă muchiile sale aparțin alternativ mulțimilor M și $\bar{M} = E(G) - M$. Un lanț M -alternant spunem că este *deschis* (sau *crescător*) dacă are capetele nesaturate.

$$\begin{aligned} \overline{V(\bar{M})} &= V(G) - V(M) & \left\{ \begin{array}{c} \text{vârfurile } M\text{-nesaturate} \\ \text{vârfurile } M\text{-saturate} \end{array} \right. \\ V(M) & \quad \left\{ \begin{array}{c} \text{vârfurile } M\text{-saturate} \\ \text{vârfurile } M\text{-nesaturate} \end{array} \right. \end{aligned}$$

Figura 8.1. P un lanț M -alternant deschis (muchiile cuplajului M sunt reprezentate prin linii groase).

O *transversală* K din G este o mulțime de vârfuri $K \subseteq V(G)$ cu proprietatea că orice muchie din G are cel puțin unul din vârfuri în ea. Notăm cu \tilde{K} o transversală de cardinal minim din G .

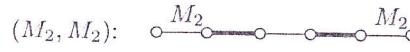
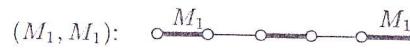
8.1. Teorema lui Berge

Fie M_1, M_2 două cuplaje. Considerăm graful $[M_1 \Delta M_2]$ induș de diferența lor simetrică. Deoarece pentru orice $x \in V[M_1 \Delta M_2]$ avem

$$d_{[M_1 \Delta M_2]}(x) = d_{[M_1]}(x) + d_{[M_2]}(\tilde{x}) \leq 2$$

componentele conexe ale grafului $[M_1 \Delta M_2]$ sunt de patru tipuri:

TEOREMA LUI BERGE



cicluri M_1, M_2 -alternante;

lanțuri M_1, M_2 -alternante cu un capăt M_1 -saturat, iar celălalt M_2 -saturat;

lanțuri M_1, M_2 -alternante cu capetele M_1 -saturate;

lanțuri M_1, M_2 -alternante capetele M_2 -saturate.

Am reprezentat cu o linie groasă muchiile lui M_1 și cu o linie subțire muchiile lui M_2 . Cu notațiile precedente este adevărat următorul enunț:

Propoziție 8.1. Fie M_1, M_2 două cuplaje diferite.

(a) Pentru o componentă conexă oarecare $G_0 \leq [M_1 \Delta M_2]$ avem

$$|M_1 \cap E(G_0)| - |M_2 \cap E(G_0)| = \begin{cases} 0 & \text{dacă } G_0 \text{ este de tip (C) sau } (M_1, M_2), \\ 1 & \text{dacă } G_0 \text{ este de tip } (M_1, M_1), \\ -1 & \text{dacă } G_0 \text{ este de tip } (M_2, M_2). \end{cases}$$

(b) Avem

$$|M_1| - |M_2| = \text{numărul componentelor conexe din } [M_1 \Delta M_2] \text{ de tip } (M_1, M_1) - \text{numărul componentelor conexe din } [M_1 \Delta M_2] \text{ de tip } (M_2, M_2).$$

Teoremă 8.2. (Berge) Fie $G = (V, E)$, $E \neq \emptyset$, un graf simplu și $M \subseteq E$ un cuplaj. Atunci M este cuplaj de cardinal maxim dacă și numai dacă nu există nici un lanț M -alternant deschis.

Demonstrație. \Rightarrow Dacă M este cuplaj de cardinal maxim în G și dacă, prin absurd, ar exista un lanț M -alternant deschis $P \leq G$ atunci $M_1 := M \Delta E(P)$ ar fi un cuplaj de cardinal $|M| + 1$ de unde $|M_1| > |M|$, contradicție. Deci nu există lanț M -alternant deschis.

\Leftarrow Să presupunem acum că nu există lanț M -alternant deschis. Fie $M^* \subseteq E$ un cuplaj de cardinal maxim. Vom demonstra că $|M| = |M^*|$.

Presupunem prin absurd că $|M| < |M^*|$. Conform propoziției 8.1 avem

$$|M^*| - |M| = \text{numărul componentelor conexe din } [M^* \Delta M] \text{ de tip } (M^*, M^*) - \text{numărul componentelor conexe din } [M^* \Delta M] \text{ de tip } (M, M).$$

Deoarece $|M^*| - |M| > 0$ rezultă că există o componentă conexă din $[M^* \Delta M]$ de tip (M^*, M^*) , adică există un lanț M -alternant deschis, contradicție. Deci $|M| = |M^*|$. \square

3.2. Structura unui graf bipartit în raport cu un cuplaj de cardinal maxim

Fie $G = (A \cup B, E)$ un graf bipartit și $M^* \subseteq E$ un cuplaj de cardinal maxim. Notăm cu A_0, B_0 mulțimile vârfurilor M^* -saturate din A , respectiv B :

$$A_0 := A - V(M^*), \quad B_0 := B - V(M^*).$$

și cu $\mathcal{P}(A_0), \mathcal{P}(B_0)$ mulțimile lanțurilor M^* -alternante care au un capăt în A_0 , respectiv B_0 :

$$\mathcal{P}(A_0) := \{P \mid \exists x \in A_0, P \text{ este } x\text{-lanț } M^*\text{-alternant}\},$$

$$\mathcal{P}(B_0) := \{P \mid \exists y \in B_0, P \text{ este } y\text{-lanț } M^*\text{-alternant}\}.$$

Notăm

— A_1, B_3 mulțimile vârfurilor din $A - A_0$, respectiv B , ale lanțurilor din $\mathcal{P}(A_0)$;

— A_3, B_1 mulțimile vârfurilor din A , respectiv $B - B_0$, ale lanțurilor din $\mathcal{P}(B_0)$.

Notăm de asemenea:

$$A_2 := A - A_0 - A_1 - A_3, \quad B_2 := B - B_0 - B_1 - B_3.$$

Ordonăm mulțimile $\mathcal{P}(A_0)$ și $\mathcal{P}(B_0)$ cu relația \leqslant astfel:

— pentru $P', P'' \in \mathcal{P}(A_0)$: $P' \leqslant P'' \Leftrightarrow E(P') \subseteq E(P'')$;

— pentru $P', P'' \in \mathcal{P}(B_0)$: $P' \leqslant P'' \Leftrightarrow E(P') \subseteq E(P'')$.

Observație 3.3. (1) Dacă $A_0 = \emptyset$ atunci $A_1 = B_3 = \emptyset$.

(2) Dacă $B_0 = \emptyset$ atunci $A_3 = B_1 = \emptyset$.

(3) Orice A_0, A_1 -lanț M^* -alternant are ultima muchie în M^* și orice A_0, B_3 -lanț M^* -alternant are ultima muchie în $\overline{M^*} = E(G) - M^*$.

(4) Orice B_0, B_1 -lanț M^* -alternant are ultima muchie în M^* și orice B_0, A_3 -lanț M^* -alternant are ultima muchie în $\overline{M^*}$.

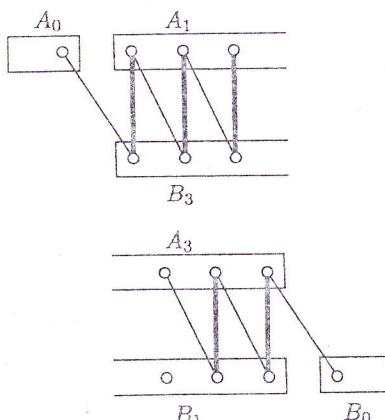


Figura 8.2.

Lemă 8.4. (a) $\mathcal{P}(A_0) \cap \mathcal{P}(B_0) = \emptyset$;

(b) $A_0 \cap A_1 = \emptyset$ și $B_0 \cap B_1 = \emptyset$;

(c) $A_0 \cap A_3 = \emptyset$ și $B_0 \cap B_3 = \emptyset$;

(d) $A_1 \cap A_3 = \emptyset$ și $B_1 \cap B_3 = \emptyset$.

Demonstrație. a) Presupunem prin absurd că $\mathcal{P}(A_0) \cap \mathcal{P}(B_0) \neq \emptyset$. Fie $P \in \mathcal{P}(A_0) \cap \mathcal{P}(B_0)$. Lanțul P este M^* -alternant deschis deoarece capetele sale, aparținând mulțimilor A_0 și B_0 , sunt M^* -nesaturate. Pe de altă parte, conform teoremei lui Berge, un astfel de lanț nu există, deoarece M^* este un cuplaj de cardinal maxim în G . Deci $\mathcal{P}(A_0) \cap \mathcal{P}(B_0) = \emptyset$.

b) Egalitățile sunt consecințe ale definițiilor mulțimilor A_1 și B_1 .

c) $A_0 \cap A_3 = \emptyset$ deoarece în caz contrar ar exista un A_0, B_0 -lanț M^* -alternant $P \in \mathcal{P}(A_0) \cap \mathcal{P}(B_0)$, contradicție. Analog $B_0 \cap B_3 = \emptyset$.

d) Cu un argument analog obținem $A_1 \cap A_3 = \emptyset$ și $B_1 \cap B_3 = \emptyset$. □

Lemă 8.5. (a) M^* induce o bijecție $A_1 \xleftrightarrow{M^*} B_3$;

(b) M^* induce o bijecție $A_3 \xleftrightarrow{M^*} B_1$;

(c) M^* induce o bijecție $A_2 \xleftrightarrow{M^*} B_2$.

Demonstrație. (a) Un lanț $P \in \mathcal{P}(A_0)$ are capătul care nu este în A_0 , M^* -saturat conform teoremei lui Berge, deoarece M^* are cardinalul maxim iar capătul din A_0 al lui P este nesaturat. Prin urmare, un A_0 -lanț M^* -alternant maximal în raport cu relația de ordine \leqslant , $P \in \max \mathcal{P}(A_0)_{\leqslant}$, are ultima sa muchie la o parcurgere începând din A_0 în M^* adică este de tip $(\overline{M^*}, M^*)$ și deci are capătul care nu este în A_0 , în A_1 .

Urmează că fiecare din lanțurile $P \in \mathcal{P}(A_0)$ induce prin cuplajul M^* câte o bijecție

$$V(P) \cap A_1 \xleftrightarrow{M^*} V(P) \cap B_3.$$

Toate aceste bijecții sunt compatibile.

Rezultă că M^* induce bijecția

$$\bigcup_{P \in \mathcal{P}(A_0)} V(P) \cap A_1 \xleftrightarrow{M^*} \bigcup_{P \in \mathcal{P}(A_0)} V(P) \cap B_3$$

sau, ținând cont de definițiile mulțimilor A_1 și B_3 , $A_1 \xleftrightarrow{M^*} B_3$.

(b) Argument analog.

(c) Este o consecință a proprietăților (a) și (b) (vezi figura 8.4). □

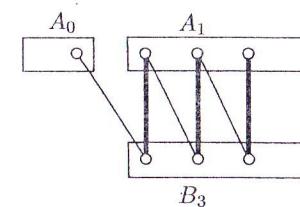


Figura 8.3.

Lemă 8.6. (a) $N_G(A_0 \cup A_1) = B_3$;

(b) $N_G(B_0 \cup B_1) = A_3$.

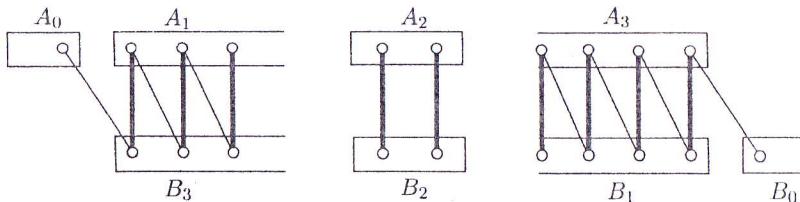


Figura 8.4.

Demonstrație. (a) \supseteq Avem

$$\begin{aligned} N_G(A_0 \cup A_1) &= N_G\left(\bigcup_{P \in \mathcal{P}(A_0)} V(P) \cap A\right) \\ &= \bigcup_{P \in \mathcal{P}(A_0)} N_G(V(P) \cap A) \supseteq \bigcup_{P \in \mathcal{P}(A_0)} N_P(V(P) \cap A) = B_3. \end{aligned}$$

\subseteq Vom arăta că pentru orice vîrf $x \in A_0 \cup A_1$ avem $N_G(x) \subseteq B_3$. Fie $y \in N_G(x)$. Vom arăta că $y \in B_3$ și demonstrația se va încheia.

Dacă $x \in A_0$ atunci $[x, y] \in \mathcal{P}(A_0)$ și deci $y \in B_3$. Dacă $x \in A_1$ să considerăm un v, x -lanț M^* -alternant $P \in \mathcal{P}(A_0)$ cu $v \in A_0$. Sunt posibile următoarele două cazuri:

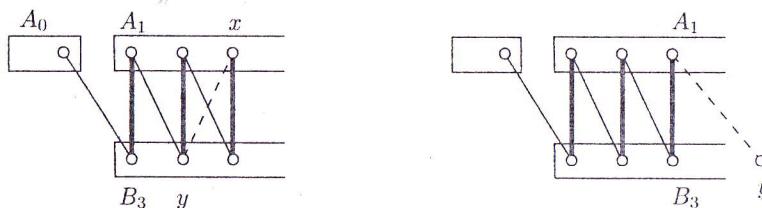


Figura 8.5.

- (1) $y \in V(P)$. Atunci $P' := P \xrightarrow{y} y \in \mathcal{P}(A_0)$ și deci $y \in B_3$.
(2) $y \notin V(P)$. Atunci $P' := P + [x, y] \in \mathcal{P}(A_0)$ și deci $y \in B_3$.

(b) Argument analog. \square

Conform lemelor 8.4, 8.5 și 8.6, cu notațiile precedente este adevărat următorul enunț:

Teoremă 8.7. Fie $G(A \dot{\cup} B, E)$ un graf bipartit și $M^* \subseteq E$ un cuplaj de cardinal maxim. Următoarele afirmații sunt adevărate:

- (a) A_0, A_1, A_2, A_3 și B_0, B_1, B_2, B_3 formează câte o partiție a lui A , respectiv B .
(b) Cuplajul M^* induce următoarele bijecții:

$$A_1 \xleftrightarrow{M^*} B_3, \quad A_2 \xleftrightarrow{M^*} B_2, \quad A_3 \xleftrightarrow{M^*} B_1.$$

- (c) $N_G(A_0 \cup A_1) = B_3$ și $N_G(B_0 \cup B_1) = A_3$.

Corolar 8.8. $G \prec (A_0 + A_1 + A_2 + A_3) \vee B_3 + (B_0 + B_1 + B_2 + B_3) \vee A_3 + A_2 \vee B_2. \square$

O diagramă schematică a grafului G este reprezentată în figura 8.6 unde am notat fiecare cuplaj induș de M^* prin căte o muchie groasă, iar mulțimile de muchii care nu sunt în M^* prin căte o muchie subțire:

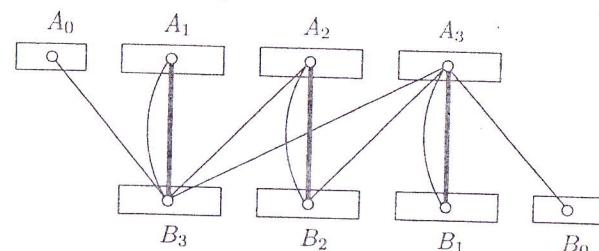


Figura 8.6.

Teoremă 8.9. (Hall) Pentru orice graf bipartit $G = (A \dot{\cup} B, E)$ este adevărată echivalența: G admite un cuplaj care saturează $A \Leftrightarrow \forall X \subseteq A : |N_G(X)| \geq |X|$.

Demonstrație. \Rightarrow Fie $M \subseteq E$ un cuplaj care saturează vârfurile din A și fie $X \subseteq A$. Avem $|N_G(X)| \geq |N_{[M]}(X)| = |X|$.

\Leftarrow Vom demonstra că un cuplaj de cardinal maxim $M^* \subseteq E$ saturează orice vîrf din A . Să presupunem prin absurd că M^* nu saturează A . Aceasta înseamnă, cu notațiile din paragraful precedent, că $A_0 \neq \emptyset$. Pentru $X = A_0 \cup A_1$, conform teoremei 8.7, avem

$|N_G(X)| = |N_G(A_0 \cup A_1)| = |B_3| = |A_1| < |A_0| + |A_1| = |X|$, contradicție. Deci M^* saturează orice vîrf din A . \square

Teoremă 8.10. (König) Pentru orice graf bipartit $G = (A \dot{\cup} B, E)$ avem $|\tilde{K}| = |M^*|$.

Demonstrație. \supseteq Avem

$$|\tilde{K}| \geq \sum_{e \in M^*} |e \cap \tilde{K}| \geq \sum_{e \in M^*} 1 = |M^*|.$$

\leqslant Cu notațiile din paragraful 8.2, definim $K := A_2 \cup A_3 \cup B_3$. K este o transversală și $|K| = |M^*|$. Deci $|\tilde{K}| \leq |K| = |M^*|$. \square

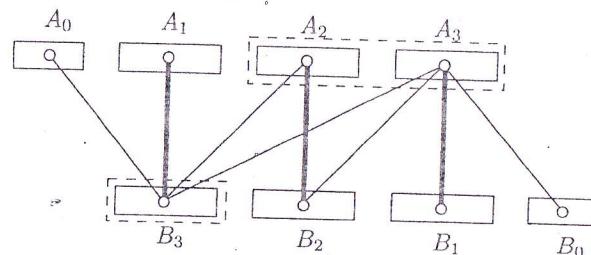


Figura 8.7.