Curs 5

2.11.2021

Exemple (rel. de echiv.) (continuare)

- Rel. de congruență modulo m pe $\mathbb{Z}$, unde $m \in \mathbb{N}$, notată cu "$\equiv (\text{mod } m)$":

$$a \equiv b (\text{mod } m) \overset{def}{\iff} m \mid a-b.$$

① $m=0$

$$a \equiv b (\text{mod } 0) \overset{def}{\iff} 0 \mid a-b \iff a=b \rightsquigarrow \text{"}\equiv(\text{mod } 0)\text{" e " = "}$$

(Privită ca submulțime a lui $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ "$\equiv(\text{mod } 0)$" este $\{(a,a) \mid a \in \mathbb{Z}\}$)

② $m=1$

$$a \equiv b (\text{mod } 1) \overset{def}{\iff} 1 \mid a-b \text{ (adev.)} \rightsquigarrow (\forall) a,b \in \mathbb{Z} \quad a \equiv b (\text{mod } 1)$$

(Privită ca submulțime a lui $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ "$\equiv(\text{mod } 1)$" e $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$)

③ $\boxed{m \geq 2}$

$$a \equiv b (\text{mod } m) \overset{def}{\iff} m \mid a-b \iff a,b \text{ dau același rest la împărțirea cu } m.$$

Dem:

$a = m \cdot q_1 + r_1 \quad 0 \leq r_1 < m$

$b = m \cdot q_2 + r_2 \quad 0 \leq r_2 < m$

(1) $a-b = m(q_1-q_2) + r_1 - r_2$

$-(m-1) \leq r_1 - r_2 \leq m-1$ (2)

$m \mid a-b \overset{(1)}{\iff} m \mid r_1 - r_2 \iff r_1 - r_2 = 0$

$\overset{(2)}{\Downarrow}$

$r_1 = r_2$

Verificare că "$\equiv \text{mod } (m)$", $m \geq 2$, e o relație de echiv.:

1) reflexivitate: $a - a = 0 \,\vdots\, m \implies a \equiv a (\text{mod } m) \ (\forall) a \in \mathbb{Z}$

2) simetrie: $a \equiv b (\text{mod } m) \implies a,b$ dau același rest la împ cu $m \implies$ b,a

$b \equiv a (\text{mod } m)$

3) tranzitivitate: $a \equiv b (\text{mod } m) \overset{def}{\implies} m \mid a-b$, $b \equiv c (\text{mod } m) \overset{def}{\implies} m \mid b-c$ $\implies m \mid (a-b)+(b-c)$

$m \mid a-c \overset{def}{\implies} a \equiv c (\text{mod } m).$

Def O partiție a unei mulțimi $A \neq \emptyset$ este o familie de submulțimi nevide ale lui A, disjuncte 2 câte 2, și a cărei reuniune este mulțimea A. (formal notăm $\mathcal{A} = (A_i)_{i \in I}$ o partiție, I este o familie de indici, i.e. $A_i \neq \emptyset$ $(\forall)$ $i \in I$; $A_i \cap A_j = \emptyset$ $(\forall)$ $i \neq j$, $\bigcup_{i \in I} A_i = A$)

Exemple 1) $A = \mathbb{N}$ ($\mathbb{Z}$) $\mathcal{A} = (2\mathbb{N}, 2\mathbb{N}+1)$ ($2\mathbb{Z}, 2\mathbb{Z}+1$) este o partiție a lui $\mathbb{N}$ ($\mathbb{Z}$) cu 2 submulțimi

2) $A = \mathbb{N}$ ($\mathbb{Z}$) $\mathcal{A} = (\{n\})_{n \in \mathbb{N}}$ ($\mathbb{Z}$) o partiție a lui $\mathbb{N}$ ($\mathbb{Z}$) cu o infinit. de submulțimi

$\mathcal{A} = (\{2n, 2n+1\})_{n \in \mathbb{N}}$ ($\mathbb{Z}$) — " —

(**Obs** Pentru orice mulțime $A \neq \emptyset$ $\mathcal{A} = (\{a\})_{a \in A}$ este o partiție a mulțimii A)

3) $A = \mathbb{R}$ $\mathcal{A} = ([n, n+1))_{n \in \mathbb{Z}}$ este o partiție a lui $\mathbb{R}$ cu un număr numărabil de submulțimi

Def Fie "$\sim$" o rel. de echiv. pe mulțimea $A \neq \emptyset$. Atunci clasa de echivalență a lui a, notată cu $\hat{a}$ (sau $[a], \bar{a}, \ldots$) este submulțimea lui A: $\hat{a} = \{b \in A \mid a \sim b\}$. Mulțimea claselor de echivalență s.n. mulțimea factor a lui A modulo $\sim$ și se notează cu $A/_\sim$ ($A/_\sim = \{\hat{a} \mid a \in A\}$).

Teorema 1 Fie "$\sim$" o rel. de echivalență pe mulțimea $A \neq \emptyset$.

Atunci:

1) $a \in \hat{a}$ $(\forall)$ $a \in A$ ($\hat{a}$ reprezintă clasa de echivalență a lui a)

2) 2 clase de echivalență sunt ori egale ori disjuncte, i.e. $\hat{a} = \hat{b} \iff a \sim b$ (altfel, dacă $a \not\sim b \iff \hat{a} \cap \hat{b} = \emptyset$)

3) Mulțimea claselor de echivalență reprezintă o partiție a lui A.

$p = p_\sim : A \longrightarrow A/_\sim \quad p_\sim(a) = \hat{a} \quad p_\sim$ s.n. surjecția canonică asociată lui $\sim$.

Exemple ① Fie "$\equiv (\mathrm{mod}\ 11)$" pe $\mathbb{Z}$. Clasa de echivalență a lui 3:

$$\hat{3} = \{\ldots, -8, 3, 14, 25, \ldots\} = \{11a+3 \mid a \in \mathbb{Z}\}$$

$$\mathbb{Z}/_{\equiv(\mathrm{mod}\ 11)} = \{\hat{0}, \hat{1}, \ldots, \widehat{10}\} \overset{?}{=} \{\underset{\substack{\| \\ \hat{0}}}{\widehat{11}}, \underset{\substack{\| \\ \hat{1}}}{\widehat{-10}}, \hat{2}, \ldots, \widehat{10}\}$$

Motivație: Mulțimea factor ($\leadsto$ o nouă modalitate de a construi noi mulțimi cu proprietăți "controlate" pleeând de la unele cunoscute) (Exemplu: vrem restul împ. lui $11^{11^{13^{13}}}$ la 31)

$\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R} \to$ sunt construite ca mulțimi factor

$\mathbb{Z}$ poate fi identificat cu $\mathbb{N}\times\mathbb{N}/_\sim$ (e în bijecție) (mulțime factor); "$\sim$" e rel. de echiv. pe $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ dată:

$$(a,b) \sim (c,d) \overset{def}{\iff} a+d = b+c$$

$\mathbb{Q}$ e în bijecție cu $\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*/_{\sim_1}$ (mulțime factor); "$\sim_1$" e rel. de echiv pe $\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*$ dată:

$$(a,b) \sim_1 (c,d) \overset{def}{\iff} ad = bc.$$

$\mathbb{R}$ e în bijecție cu $\mathcal{C}/_{\sim_2}$; $\mathcal{C}$ repr. mulțimea șirurilor Cauchy de nr. rat. și "$\sim_2$" e rel. de echiv: $(a_n)_{n\geq 1} \sim_2 (b_n)_{n\geq 1} \overset{def}{\iff} \lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$.

(vezi la seminar detaliile construcțiilor)

Dem teoremei 1) "$\sim$" e reflexivă ($\Rightarrow a \sim a$) $\Rightarrow a \in \hat{a}$.

2) Pp $(\exists)\ c \in \hat{a} \cap \hat{b}$ (vreau să arăt că $\hat{a} = \hat{b}$) eg. de mulțimi

"$\subseteq$" (similar se face "$\supseteq$")

Fie $d \in \hat{a} \xRightarrow[\text{clasei}]{\text{def}} d \sim a ; a \sim c ; c \sim b \xRightarrow[\text{lui } \sim]{\text{tranzitivit.}} d \sim b \xRightarrow[\text{clasei}]{\text{def}} d \in \hat{b} \Rightarrow$

Cum d a fost ales arbitrar avem $\hat{a} \subseteq \hat{b}$.

Folosind 1, 2 $\Rightarrow$ ∎

3) $A = \bigcup_{a \in A} \hat{a}$

Dată o mulțime $A \neq \emptyset$.

Partițiile lui A

Fie $\mathcal{A} = (A_i)_{i \in I}$ o partiție a lui A

vs.

Rel. de echiv. pe mulțimea A

$\Rightarrow$ Def "$\sim_{\mathcal{A}}$" pe A astfel:

$x \sim_{\mathcal{A}} y \Leftrightarrow (\exists)\ i \in I$ a.î. $x, y \in A_i$

Exc! (Seminar) "$\sim_{\mathcal{A}}$" este o rel. de echiv pe A având clasele de echivalență exact A_i, $i \in I$.

$\mathcal{A} = (\hat{a})_{a \in A}$ ← Teorema anterioară — Dacă "$\sim$" e o rel de echiv pe A

$\hat{a} \to$ clasa de echiv. a lui a asociată lui $\sim$

partiție a lui A

Teorema 2 Fie $A \neq \emptyset$ o mulțime. Aplicațiile (descrise) de mai sus sunt bijecții, inverse una celeilalte.

Dem Exc!

Tb arătat că: (1) clasele de echiv ale lui $\sim_{\mathcal{A}}$ sunt A_i, $i \in I$ (unde $\mathcal{A} = (A_i)_{i \in I}$)

(2) $\boxed{\sim_{\mathcal{A}} \overset{?}{=} \sim}$, unde $\mathcal{A} = (\hat{a})_{a \in A}$ e partiția asociată rel. de echiv. $\sim$

$f: A \to B$, $\varphi: B \to A$

f, φ $f \circ \varphi = 1_B$

$\varphi \circ f = 1_A$