Seminar 9

29.11.2021

Ex 1 Arătați că un grup $(G,\cdot)$ în care $x^2=1$ $(\forall)\, x\in G$, este un grup abelian.

Dem Vrem $x\cdot y=y\cdot x$ $(\forall)\, x,y\in G$

$(\forall)\, x,y\in G \Rightarrow x^2\cdot y^2 = 1 = (xy)^2$

$xxyy = xyxy \mid \cdot_s x^{-1}$

$\underbrace{(x^{-1}x)}_{1}xyy = \underbrace{(x^{-1}x)}_{1}yxy \Rightarrow xyy = yxy \mid \cdot_d y^{-1}$

$xy = yx$ $(\forall)\, x,y\in G$

$\Rightarrow (G,\cdot)$ e abelian.

Fie $G_1=(\mathbb{Z}_4,+)$ $\quad G_2=(\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2,+)$ $\quad G_3=(\mathbb{Z}_8,+)$

$\boxed{g^0=e}$

$G_1=(\mathbb{Z}_4,+)$ $\xrightarrow{\text{tabla lui } G_1}$

$+$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$
$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$
$\hat{1}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\boxed{\hat{0}}$
$\hat{2}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$
$\hat{3}$	$\hat{3}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$

$\hat{1}+\hat{3} = \underbrace{\hat{1}+\hat{1}+\hat{1}+\hat{1}}_{4 \text{ ori}}$

$|G_1|=4$

$ord(\hat{0})=1$

(**Obs** într-un grup singurul element de ordin 1 este elem. neutru.)

$ord(\hat{1})=4 \Rightarrow G_1=\langle\hat{1}\rangle$

$\hat{2}+\hat{2}=\hat{0} \Rightarrow ord(\hat{2})=2$

$ord(\hat{3})=4 \Rightarrow G_1=\langle\hat{3}\rangle$

$\hat{3}+\hat{3}=\hat{2}\neq\hat{0}$

$\hat{3}+\hat{3}+\hat{3}=\hat{5}=\hat{1}\neq\hat{0}$

$\hat{3}+\hat{3}+\hat{3}+\hat{3}=\hat{0}$

Def Fie $(G,\cdot)$ un grup, $g\in G$. S.n. ordinul elem. g, și s.n., cu $ord(g)$:

$ord(g)=$ cel mai mic nr. nat. nenul a.î. $g^n=1$ (dacă există $n\in\mathbb{N}$ a.î. $g^n=1$) sau ∞ dacă $g^n\neq 1$ $(\forall)\, n\in\mathbb{N}$

$(G,*)$ ... $g^n=e$ ...

(4) Într-un grup finit G, $ord(g)<\infty$. (În plus, avem că $ord(g) \mid |G|$)

(vom dem. la (3))

Exemple

(1) $(\mathbb{Z}_n,+)$ $n\geq 2$

$ord(\hat{1})=n$

(2) $(\mathbb{Z},+)$ $ord(1)=\infty$

$(ord(k)=\infty$ $(\forall)\, k\neq 0)$

(3) $(G,*)$ → grup

e → elem. neutru

$ord(e)=1$

$|\langle g\rangle| = ord(g)$

$\langle g\rangle$ – subgr. gen. de g.

Dacă $(G,\cdot)$ grup și $g\in G$ are $ord(g)<\infty$ $(=n)$ atunci

$\langle g\rangle=\{1,g,g^2,\dots,g^{n-1}\}$

$G_2=(\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2,+)$ $\quad \mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2=\{(\hat{0},\hat{0}),(\hat{0},\hat{1}),(\hat{1},\hat{0}),(\hat{1},\hat{1})\}$

$+$	$(\hat0,\hat0)$	$(\hat0,\hat1)$	$(\hat1,\hat0)$	$(\hat1,\hat1)$
$(\hat0,\hat0)$	$(\hat0,\hat0)$	$(\hat0,\hat1)$	$(\hat1,\hat0)$	$(\hat1,\hat1)$
$(\hat0,\hat1)$	$(\hat0,\hat1)$	$(\hat0,\hat0)$	$(\hat1,\hat1)$	$(\hat1,\hat0)$
$(\hat1,\hat0)$	$(\hat1,\hat0)$	$(\hat1,\hat1)$	$(\hat0,\hat0)$	$(\hat0,\hat1)$
$(\hat1,\hat1)$	$(\hat1,\hat1)$	$(\hat1,\hat0)$	$(\hat0,\hat1)$	$(\hat0,\hat0)$

$\mathrm{ord}((\hat0,\hat1)) = 2 = \mathrm{ord}((\hat1,\hat0)) = \mathrm{ord}((\hat1,\hat1))$

$\mathrm{ord}((\hat0,\hat0)) = 1$

$\Downarrow$

G nu e ciclic

G poate fi generat minimal de 2 elem.

$G = \langle (\hat0,\hat1),(\hat1,\hat0)\rangle = \langle (\hat0,\hat1),(\hat1,\hat1)\rangle = \langle (\hat1,\hat0),(\hat1,\hat1)\rangle.$

Exc Fie grupul $U(\mathbb{Z}_{19},\cdot)$ şi $(U_4=\{z\in\mathbb{C} \mid z^4=1\},\cdot)$, $U(\mathbb{Z}_8,\cdot)$. Identificaţi cu cine sunt izomorfe grupurile şi precizaţi dacă sunt izomorfe între ele.

$U(\mathbb{Z}_8,\cdot) \underset{C8}{=} \{\bar1,\bar3,\bar5,\bar7\}$ $\quad U(\mathbb{Z}_8,\cdot) = \langle \bar3,\bar5\rangle = \langle \bar3,\bar7\rangle = \langle \bar5,\bar7\rangle$

$\mathrm{ord}(\bar3) = \mathrm{ord}(\bar5) = 2 = \mathrm{ord}(\bar7)$

$U_4 = \{\pm1,\pm i\}$ $\quad i^1 = i \quad i^2=-1 \quad i^3=-i \quad i^4=1$

tabla lui $U(\mathbb{Z}_8,\cdot)$

$\cdot$	$\bar1$	$\bar3$	$\bar5$	$\bar7$
$\bar1$	$\bar1$	$\bar3$	$\bar5$	$\bar7$
$\bar3$	$\bar3$	$\bar1$	$\bar7$	$\bar5$
$\bar5$	$\bar5$	$\bar7$	$\bar1$	$\bar3$
$\bar7$	$\bar7$	$\bar5$	$\bar3$	$\bar1$

tabla lui $(U_4,\cdot)$

$\cdot$	1	-1	i	$-i$
1	1	-1	i	$-i$
-1	-1	1	$-i$	i
i	i	$-i$	-1	1
$-i$	$-i$	i	1	-1

Se observă că $U(\mathbb{Z}_8,\cdot) \simeq (\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2,+)$ (prin suprapunerea tablelor) via bijecţia:

$(U_4,\cdot) \simeq (\mathbb{Z}_4,+)$

$(\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2,+) \xrightarrow{f} U(\mathbb{Z}_8,\cdot)$

$(\hat0,\hat0) \xmapsto{f} \bar1$

$(\hat0,\hat1) \xrightarrow{f} \bar3$

$(\hat1,\hat0) \xrightarrow{f} \bar5$

$(\hat1,\hat1) \xrightarrow{f} \bar7$

$\Big\}$ bij

Exc! f morfism de gr! $\Downarrow$ f izom

$(\mathbb{Z}_4,+) \xrightarrow{g_1} (U_4,\cdot)$

$\hat0 \xrightarrow{g_1} 1$

$\hat1 \xrightarrow{g_1} i$

$\hat2 \xrightarrow{g_1} -1$

$\hat3 \xrightarrow{g_1} -i$

Exc! g_1 morf de gr $\Downarrow$ g_1 izom.

$$f\left((\hat{0},\hat{1})+(\hat{1},\hat{0})\right) \overset{?}{=} f(\hat{0},\hat{1})\cdot f(\hat{1},\hat{0})$$

$$f((\hat{1},\hat{1})) = \bar{7} \qquad \bar{3}\cdot\bar{5} = \bar{7}$$

$g_2(\hat{1}) = -i$

Obs Există 6 izom. între cele 2 grupuri!

Obs Există 2 izom între cele 2 grupuri

Arătați că $(\mathbb{Z}_4,+)$ nu e izomorf cu $(\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2,+)$!

Pp red. abs. că există un izom de gr. $f:(\mathbb{Z}_4,+)\to(\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2,+)$

$f(\hat{1})$ are ordin 1 de $f(\hat{1})=(\bar{0},\bar{0})$ $\cancel{\delta}$ (f bij) $f(\hat{0})=(\bar{0},\bar{0})$

$f(\hat{1})$ are ordin 2 de $f(\hat{1})$ este oricare dintre celelalte 3 elem.

$f(\hat{1}) \in \mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$

ord $f(\hat{1})=2$

$$f(\hat{1})+f(\hat{1})=(\bar{0},\bar{0})$$

|| f morf de gr

$$f(\hat{1}+\hat{1})=f(\hat{2}) \quad \cancel{\delta} \ (f \text{ bij})$$

$\Rightarrow$ Pp e falsă

$\Rightarrow$ gr. nu sunt izomorfe.

Exc Să se arate că un grup cu 4 elemente este izomorf sau cu $(\mathbb{Z}_4,+)$ sau cu $(\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2,+)$.

Obs ① Să se arate că orice grup cu p elemente, p prim, este izomorf cu $(\mathbb{Z}_p,+)$.

$\boxed{\text{Propr}}$ Fie $(G_1,\circ)$ și $(G_2,\circ)$ 2 grupuri izomorfe și $x\in G_1$ a.î. $\operatorname{ord}(x)=n$. Dacă $f:G_1\to G_2$ este un izom. de grupuri $\Rightarrow$ $\operatorname{ord}(f(x))=n$.

Obs În particular, propr. ant. implică faptul că pentru 2 grupuri finite multisetурile date de ordinele elem. sunt identice.

Dem prop 2 $f:(G_1,\cdot)\to(G_2,\circ)$ f izom de gr.

$\text{ord}(x)=n \Rightarrow x^n=1_{G_1}$ și $x^m\neq 1_{G_1}$ $(\forall)\ m\in\mathbb{N}^*, m<n$.

$$\underbrace{f(x)\circ\ldots\circ f(x)}_{n} = f(x)^n$$

f morf $\|$

$$f(\underbrace{x\cdot x\cdot\ldots\cdot x}_{n \text{ ori}}) = f(x^n) = f(1_{G_1}) = 1_{G_2}$$

$\Rightarrow f(x)^n = 1_{G_2}$

$\Downarrow$

$\text{ord}\, f(x)\le n$

Pp abs că $(\exists)\ t\in\mathbb{N}^*, t<n$ a.î. $f(x)^t=1_{G_2}$

$\|$ f morf

$f(x^t)$

$\Rightarrow f(x^t)=1_{G_2}$, $f(1_{G_1})=1_{G_2}$, f bij $\Rightarrow$

$\Rightarrow x^t=1_{G_1} \Rightarrow \text{ord}(x)\le t<n$ ↯

$\Rightarrow$ Pp e falsă $\Rightarrow \text{ord}(f(x))=n$.

$U(\mathbb{Z}_n,\cdot)=\{\hat{k} \mid 1\le k<n, (k,n)=1\}$

$|U(\mathbb{Z}_n,\cdot)|=\varphi(n)$

$U(\mathbb{Z}_{19},\cdot)=\mathbb{Z}_{19}\setminus\{\hat{0}\}$.

$\downarrow$

grup cu 18 elemente.

Obs Se dem. (la mate în anul II, sem II) că un grup abelian cu n elemente este izomorf cu un produs direct de gr. $(\mathbb{Z}_{d_1}\times\mathbb{Z}_{d_2}\times\ldots\times\mathbb{Z}_{d_r},+)$ unde $1<d_1\le\ldots\le d_r$, $r\ge 1$

$d_1 | d_2 | \ldots | d_r$

$d_1\cdot d_2\cdot\ldots\cdot d_r=n$.

$18=18=3\cdot 6$ $\Rightarrow$ un grup cu 18 elem. este izomorf cu $(\mathbb{Z}_{18},+)$ sau cu $(\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_6,+)$

$(\overset{\|}{2\cdot 3^2})$

Exc (Temă!) Există elemente de ordin 18 în $U(\mathbb{Z}_{19},\cdot)$?

Exemplu Calculăm $\text{ord}(\hat{6})$

$\hat{6}^2=\hat{36}=-\hat{2}\neq\hat{1}$

$\hat{6}^3=-\hat{2}\cdot\hat{6}=-\hat{12}=\hat{7}\neq\hat{1}$

$\hat{6}^4 = \hat{4}$ $\quad \hat{6}^5 = -\hat{14} = \hat{5}$ $\quad \hat{6}^6 = \hat{49} = \hat{11}$ $\quad \hat{6}^7 = \hat{9}$

$\hat{6}^8 = \hat{16} = -\hat{3}$ $\quad \hat{6}^9 = \hat{6}^4 \cdot \hat{6}^5 = \hat{20} = \hat{1} \Rightarrow \boxed{\operatorname{ord}(\hat{6}) = 9}$