UNIVERSITATEA DIN BUCUREŞTI
FACULTATEA DE MATEMATICĂ

Prof. dr. NICU BOBOC

ANALIZĂ MATEMATICĂ

(Partea I)

Bucureşti, 1988

U N I V E R S I T A T E A   D I N   B U C U R E S T I

FACULTATEA DE MATEMATICA

Prof. dr. NICU BOBOC

A N A L I Z A   M A T E M A T I C A

(Partea I)

Bucureşti, 1988

PREFATA

Această lucrare reprezintă prima parte a cursului de analiză matematică pe care l-am predat la anul I secţia matematică de la Facultatea de matematică a Universităţii Bucureşti, mai mulţi ani la rînd.

In fapt ea cuprinde principalele noţiuni şi teoreme care se referă la analiza matematică pe R: convergentă, topologie, continuitate diferenţiabilitate, analiticitate, integrabilitate.

Sînt în total 18 capitole fiecare avînd teoremele numerotate independent şi încheindu-se cu un număr de exerciţii unele de rutină, altele presupunînd o lectură mai atentă a textului şi în sfîrşit puţine din ele solicitînd foarte intens spiritul creativ al cititorului.

Nu s-a insistat prea mult asupra părţilor aşa zise algoritmice, preferîndu-se adîncirea fenomenelor analizei matematice din R. Acesta este motivul spre exemplu pentru care a fost inclus şi un paragraf privind proprietatea Baire şi unele consecinţe ale sale privind continuitatea s-au analiticitatea funcţiilor reale.

Numărul exerciţiilor propuse este însă insuficient pentru a permite cititorului să-şi verifice suficient de bine gradul de receptare al noţiunilor şi teoremelor. Se impune elaborarea unei culegeri adecvate.

CUPRINSUL

ELEMENTE DE TEORIA MULTIMILOR

Se presupune că nu pentru prima dată cititorul a luat contact cu termenii de bază privind teoria mulţimilor: Mulţimi şi operaţii cu mulţimi (reuniune, intersecţie, diferenţă, produs cartezian); relaţii între mulţimi (relaţie funcţională, relaţie de echivalenţă, relaţie de ordine); în final se fac cîteva consideraţii privind echipotenţa mulţimilor şi în particular se vorbeşte despre noţiunea de mulţime infinită şi mulţime numărabilă. In timpul prezentării sînt presărate unele exerciţii care de cele mai multe ori se deduc simplu şi reprezintă totodată o invitaţie a cititorului de a participa constructiv la lectura textului de bază.

1. Mulţimea este concepută ca un obiect format din elemente. Faptul că un element $\underline{a}$ <u>aparţine</u> (resp. <u>nu aparţine</u>) unei mulţimi A va fi notat prin

$$a \in A \quad (\text{resp. } a \notin A) .$$

Două mulţimi A şi B vor fi considerate egale (vom scrie $A = B$) dacă sînt formate din aceleaşi elemente. O mulţime A se numeşte <u>submulţime</u> sau <u>parte</u> a mulţimii B dacă orice element din A este şi element din B. Faptul că A este o submulţime a lui B se va nota prin

$$A \subset B \quad (\text{sau } B \supset A)$$

şi se va citi A este inclusă în B (sau B include pe A). Evident vom avea $A = B$ dacă şi numai dacă $A \subset B$ şi $B \subset A$. Dacă A este o submulţime a lui B dar A nu este egală cu B atunci despre A se spune că este o <u>submulţime proprie</u> a lui B. Dacă A nu este o submulţime a lui B vom scrie $A \not\subset B$ sau $B \not\supset A$. Pentru orice mulţime A vom nota cu $\mathcal{P}(A)$ mulţimea care este definită în felul următor: un element M aparţine lui $\mathcal{P}(A)$ atunci şi numai atunci cînd M este o submulţime a lui A. Această mulţime se va numi <u>mulţimea părţilor lui A</u>.

Fie X o mulţime şi $\underline{p}$ o <u>proprietate</u> care se referă la elementele lui X. Putem considera mulţimea formată din acele elemente ale lui X care se bucură de proprietatea p. Această mulţime va fi descrisă prin

$$\{ x \in X \mid \underline{p}(x) \}$$

Evident o astfel de mulţime este o submulţime a lui X. Orice submulţime A a lui X poate fi descrisă în acest f l. Vom avea evident

$$A = \{ x \in X \mid x \in A \} .$$

Pe de altă parte putem considera şi mulţimea

$$\{ x \in X \mid x \notin X \}$$

care nu conţine elemente şi se va numi <u>submulţimea vidă</u> a lui X. Această mulţime nu depinde de X şi de aceea se numeşte simplu mulţimea vidă şi se notează prin ϕ.

Dacă X şi A sînt mulţimi vom nota prin $X \setminus A$ mulţimea

$$\{x \in X \mid x \notin A\}$$

şi o vom numi <u>diferenţa dintre X şi A</u>. Dacă $A \subset X$ vom scrie $C_X(A)$ (sau simplu $C(A)$ în loc de $X \setminus A$. In acest caz mulţimea $C_X(A)$ se numeşte <u>complementara lui A în raport cu X</u> (sau simplu complementara lui A).

Dacă <u>p</u> şi q sînt două proprietăţi şi vrem să descriem faptul că proprietatea q este adevărată ori de cîte ori proprietatea p este adevărată vom nota

$$p \Longrightarrow q$$

şi vom citi "dacă p atunci q" sau "p implică q". Astfel dacă A şi B sînt submulţimi ale lui X atunci putem scrie următoarea implicaţie

$$A \subset B \Longrightarrow C_X(B) \subset C_X(A) .$$

Dacă p şi q sînt proprietăţi atunci ele se numesc echivalente dacă au loc ambele implicaţiile

$$p \Longrightarrow q \quad \text{şi} \quad q \Longrightarrow p$$

adică p este adevărată atunci şi numai atunci cînd q este adevărată. In acest caz vom scrie

$$p \Longleftrightarrow q$$

Spre exemplu dacă A şi B sînt submulţimi ale lui X atunci au loc următoarele echivalenţe:

$$A \subset B \Longleftrightarrow C_X(B) \subset C_X(A)$$

$$A = \emptyset \Longleftrightarrow C_X(A) = X$$

Dacă p este o proprietate care se referă la elementele unei mulţimi X şi ea este adevărată pentru cel puţin un element din X vom scrie

$$(\exists)\ x \in X \mid p(x)$$

Dacă proprietatea p este adevărată pentru orice element $x \in X$ vom scrie

$$(\forall)\ x \in X \mid p(x)$$

2. Dacă X şi Y sînt mulţimi vom nota cu $X \cup Y$ mulţimea definită în felul următor: un element z aparţine mulţimii $X \cup Y$ atunci şi numai atunci cînd z aparţine lui X sau z aparţine lui Y. Această mulţime se numeşte reuniunea mulţimii X cu mulţimea Y. Vom nota cu $X \cap Y$ mulţimea definită în felul următor: un element z aparţine mulţimii $X \cap Y$ atunci şi numai atunci cînd z aparţine lui X şi z aparţine lui Y. Această mulţime se numeşte intersecţia mulţimii X cu mulţimea Y. Mulţimile X, Y se numesc disjuncte dacă $X \cap Y = \emptyset$.

O mulţime de forma $\{x,y\}$ formată din elementele x şi y se numeşte pereche neordonată. Dacă $x = y$ în loc de $\{x,y\}$ se pune $\{x\}$. Mulţimea $\{\{x\}, \{x,y\}\}$ se va numi pereche ordonată formată din elementele x şi y şi se va nota cu (x,y). Conform convenţiei precedente perechea (x,x) va fi mulţimea formată dintr-un singur element şi anume din elementul $\{x\}$. Se verifică simplu că două perechi ordonate (x,y), (u,v) sînt egale atunci şi numai atunci cînd $x = u$ şi $y = v$. Dacă X şi Y sînt două mulţimi vom nota cu $X \times Y$ mulţimea formată din perechile ordonate de forma (x,y) unde $x \in X$ şi $y \in Y$. Această mulţime se va numi produs cartezian între mulţimea X şi mulţimea Y.

Exerciţii a). Dacă $A, B \in \mathcal{P}(X)$ atunci au loc egalităţile (relaţiile lui de Morgan):

$$C_X(A \cup B) = C_X(A) \cap C_X(B)$$

$$C_X(A \cap B) = C_X(A) \cup C_X(B)$$

b). Dacă A, B, C sînt mulţimi atunci au loc egalităţile

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

c). Dacă A, B, A', B' sînt mulţimi atunci au loc egalităţile

$$(A \times B) \cup (A' \times B) = (A \cup A') \times B$$

$$(A \times B) \cap (A' \times B') = (A \cap A') \times (B \cap B')$$

$$(A \times B) \setminus (A' \times B) = (A \setminus A') \times B$$

3. Se numeşte <u>relaţie binară</u> o mulţime ale cărei elemente sînt perechi ordonate. Dacă T este o relaţie binară atunci în loc de $(x,y) \in T$ se va scrie adesea $x\ T\ y$ şi se va citi <u>x este în relaţia T cu y</u>. Dacă X şi Y sînt mulţimi iar T este o relaţie binară astfel încît $T \subset X \times Y$ atunci T se va numi <u>relaţie de la X la Y</u>. Dacă $T \subset X \times X$ vom spune că T este o <u>relaţie pe X</u>.

O relaţie f de la mulţimea X la mulţimea Y se numeşte <u>relaţie funcţională</u> dacă pentru orice $x \in X$ există un element şi numai unul $y \in Y$ cu proprietatea $x\ f\ y$. In acest caz elementul unic y asociat cu x prin relaţia f se notează cu $f(x)$ şi se numeşte <u>imaginea lui x prin f</u> sau <u>valoarea lui f în x</u>. Dacă f este o relaţie funcţională de la X la Y vom scrie prescurtat

$$X \xrightarrow{f} Y$$

sau

$$f : X \longrightarrow Y$$

sau mai simplu f atunci cînd nu sînt dubii asupra mulţimilor X şi Y. Adesea în loc de relaţie funcţională se utilizează termenul de <u>funcţie</u> sau <u>aplicaţie</u>. Dacă $A \subset X$ şi f este o funcţie de la X la Y se notează cu $f|_A$ funcţia de la A la Y definită prin

$$f|_A(x) = f(x)$$

şi se numeşte <u>restricţia lui f la A</u>. Dacă $A \supset X$, f este o funcţie de la X la Y, iar φ este o funcţie de la A la Y astfel încît $\varphi|_X = f$ atunci φ se numeşte o <u>prelungire a lui f</u>. O funcţie $f : X \longrightarrow Y$ se numeşte <u>injectivă</u> dacă pentru orice x, x' din X, $x \neq x'$ avem $f(x) \neq f(x')$. Funcţia $f : X \longrightarrow Y$ se numeşte <u>surjectivă</u> dacă pentru orice y din Y există x din X astfel încît $f(x) = y$. O funcţie se numeşte <u>bijectivă</u> dacă este în acelaşi timp injectivă şi surjectivă. Spre exemplu pentru orice mulţime X funcţia de la X la X notată prin 1_X, definită prin

$$1_X(x) = x$$

este bijectivă şi se numeşte funcţia identică a lui X.

Dacă $f : X \to Y$ este bijectivă vom nota cu f^{-1} aplicaţia de la Y la X definită în felul următor: dacă $y \in Y$ atunci $f^{-1}(y)$ este unicul element $x \in X$ cu proprietatea $f(x) = y$. Funcţia f^{-1} se numeşte <u>inversa funcţiei f</u> şi reprezintă de asemenea o funcţie bijectivă. Din definiţie rezultă direct că $(f^{-1})^{-1} = f$.

Fie acum $X \xrightarrow{f} Y'$, $Y \xrightarrow{g} Z$ două funcţii astfel încît $Y' \subset Y$. Atunci putem forma funcţia de la X la Z notată $g \circ f$ definită prin

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

Aceasta se numeşte <u>compunerea funcţiei g cu funcţia f</u>.

<u>Exerciţii</u>. a) Pentru orice funcţie $X \xrightarrow{f} Y$ au loc egalităţile

$$f \circ 1_X = f \quad , \quad 1_Y \circ f = f$$

b) Dacă $X \xrightarrow{f} Y$ este bijectivă atunci au loc egalităţile

$$f \circ f^{-1} = 1_Y \quad , \quad f^{-1} \circ f = 1_X$$

c) Dacă $X \xrightarrow{f} Y$, $Y \xrightarrow{g} Z$ sînt bijective atunci $g \circ f$ este de asemenea bijectivă şi are loc egalitatea

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

d) Dacă $X \xrightarrow{f} Y$, $Y \xrightarrow{g} X$ sînt astfel încît

$$g \circ f = 1_X \quad \text{şi} \quad f \circ g = 1_Y$$

atunci f este bijectivă şi $g = f^{-1}$.

4. Dacă X este o mulţime se numeşte <u>familie de elemente din X</u> o funcţie de la o mulţime nevidă I la X. Mulţimea I se va numi <u>mulţimea de indici a familiei</u>. Familia de elemente din X va fi notată adesea prin $(x_i)_{i \in I}$ unde I este mulţimea de indici a familiei iar pentru

fiecare $i \in I$, elementul x_i este imaginea lui i prin funcţia care defineşte familia.

O familie $(x_i)_{i \in I}$ pentru care mulţimea de indici I este mulţimea N a numerelor naturale se va numi şir. Fie $(M_i)_{i \in I}$ o familie de părţi ale lui X (adică o familie de elemente din $\mathcal{P}(X)$). Vom nota prin

$$\bigcup_{i \in I} M_i$$

mulţimea definită în felul următor: un element z aparţine mulţimii $\bigcup_{i \in I} M_i$ atunci şi numai atunci cînd există $i \in I$ cu proprietatea $z \in M_i$. Această mulţime se numeşte <u>reuniunea familiei</u> $(M_i)_{i \in I}$.

Vom nota de asemenea prin

$$\bigcap_{i \in I} M_i$$

mulţimea definită în felul următor: un element z aparţine mulţimii $\bigcap_{i \in I} M_i$ atunci şi numai atunci cînd pentru orice $i \in I$ avem $z \in M_i$. Această mulţime se numeşte <u>intersecţia familiei</u> $(M_i)_{i \in I}$.

Vom nota prin $\prod_{i \in I} M_i$ mulţimea definită astfel: un element z aparţine mulţimii $\prod_{i \in I} M_i$ atunci şi numai atunci cînd z este o familie $(x_i)_{i \in I}$ unde pentru orice $i \in I$ avem $x_i \in M_i$. Această mulţime se numeşte <u>produsul cartizian al familiei</u> $(M_i)_{i \in I}$. Dacă familia $(M_i)_{i \in I}$ este astfel încît pentru $i, j \in I$ avem $M_i = M_j = M$ atunci vom scrie M^I în loc de $\prod_{i \in I} M_i$. Pentru fiecare $i \in I$ vom nota cu $\mathcal{T}_i$ funcţia de la $\prod_{i \in I} M_i$ la M_i definită astfel: dacă $z = (z_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} M_i$ atunci

$$\mathcal{T}_i z = z_i$$

Această aplicaţie se numeşte <u>proiecţie de indice i</u>.

Exerciţii. a) Dacă $(M_i)_{i\in I}$ este o familie de părţi ale lui X atunci au loc egalităţile:

$$C_X(\bigcup_{i\in I} M_i) = \bigcap_{i\in I} C_X(M_i)$$

$$C_X(\bigcap_{i\in I} M_i) = \bigcup_{i\in I} C_X(M_i)$$

$$A \cap (\bigcup_{i\in I} M_i) = \bigcup_{i\in I} (A \cap M_i)$$

$$A \cup (\bigcap_{i\in I} M_i) = \bigcap_{i\in I} (A \cup M_i)$$

b) Să se arate că următoarele afirmaţii sînt echivalente:

i) Pentru orice familie $(M_i)_{i\in I}$ de mulţimi nevide produsul cartezian $\prod_{i\in I} M_i$ este de asemenea o mulţime nevidă.

ii) Pentru orice funcţie surjectivă $f : X \longrightarrow Y$ unde X şi Y sînt nevide există o funcţie $g : Y \longrightarrow X$ cu proprietatea $f \circ g = 1_Y$.

iii) Pentru orice mulţime M ale cărei elemente sînt mulţimi nevide disjuncte două cîte două, există o mulţime A cu proprietatea că pentru orice $m\in M$ mulţimea $A \cap m$ este formată dintr-un singur element.

iv) Pentru orice mulţime nevidă X există o funcţie φ de la $\mathcal{P}(X)$ la X astfel încît $\varphi(A)\in A$ pentru orice $A \in \mathcal{P}$

Afirmaţia iii) este cunoscută sub numele de axioma alegerii (sau axioma lui Zermelo).

5. Fie f o aplicaţie de la X la Y. Pentru orice $A \subset X$ vom nota cu f(A) submulţimea lui Y definită prin

$$f(A) = \{y\in Y \mid (\exists)\ x\in A\ ,\ f(x) = y\}$$

Această mulţime se numeşte imaginea directă a lui A prin f. Pentru orice $B \subset Y$ vom nota cu $f^{-1}(B)$ submulţimea lui X definită prin

$$f^{-1}(B) = \{x\in X \mid f(x) \in B\}$$

Această mulţime se numeşte imaginea inversă a lui B prin f. Subliniem, pentru a înlătura eventuale confuzii, că $f^{-1}(B)$ are sens chiar dacă f nu este bijectivă şi deci nu există f^{-1}. Dacă f este bijectivă atunci f(B) coincide cu imaginea directă a lui B prin f^{-1}.

<u>Exerciţii</u>. a) Pentru orice funcţie $f : X \longrightarrow Y$ şi orice familie $(A_i)_{i\in I}$ de submulţimi ale lui X avem:

$$f(\bigcup_{i\in I} A_i) = \bigcup_{i\in I} f(A_i)$$

$$f(\bigcap_{i\in I} A_i) \subset \bigcap_{i\in I} f(A_i)$$

b) Pentru orice funcţie $f : X \longrightarrow Y$ şi orice familie $(B_i)_{i\in I}$ de submulţimi ale lui Y avem:

$$f^{-1}(\bigcup_{i\in I} B_i) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i)$$

$$f^{-1}(\bigcap_{i\in I} B_i) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i)$$

c) Pentru orice $B \subset Y$ avem

$$f^{-1}(C_Y(B)) = C_X(f^{-1}(B))$$

6. O relaţie E pe o mulţime nevidă X se numeşte <u>relaţie de echivalenţă</u> dacă

a) este <u>reflexivă</u> adică x E x pentru orice $x\in X$

b) este <u>simetrică</u> adică pentru orice $x,y\in X$ avem

$$x\,E\,y \Longrightarrow y\,E\,x$$

c) este <u>tranzitivă</u> adică pentru orice $x,y,z\in X$ avem

$$x\,E\,y \text{ şi } y\,E\,z \Longrightarrow x\,E\,z$$

Dacă E este o relaţie de echivalenţă pe X vom numi <u>clasă de echivalenţă</u> în raport cu E o submulţime A a lui X care posedă următoarele două proprietăţi:

$$x,y\in A \Longrightarrow x\,E\,y$$

$$x\in A\ ,\ y\in X\ ,\ y\,E\,x \Longrightarrow y\in A$$

Dacă $x \in X$ se va nota cu $\dot{x}$ clasa de echivalență care conține pe x adică

$$\dot{x} = \{y \in X \mid y\, E\, x\}$$

Se verifică simplu că două clase de echivalență care sînt distincte sînt disjuncte. Se consideră acum mulțimea ale cărei elemente sînt clasele de echivalență în raport cu E. Această mulțime se va numi mulțimea cît a lui X în raport cu E și se va nota prin $X/_E$ iar funcția

$$\varphi : X \longrightarrow X/_E$$

definită prin $\varphi(x) = \dot{x}$ se numește <u>funcția canonică</u> de la X la $X/_E$. Evident această funcție este surjectivă.

Se numește <u>partiție</u> a unei mulțimi nevide X o familie $(X_i)_{i \in I}$ care posedă următoarele două proprietăți

a) $i, j \in I\ ,\ i \neq j \Longrightarrow X_i \cap X_j = \emptyset$

b) $\bigcup\limits_{i \in I} X_i = X$

Orice relație de echivalență E pe X produce în mod natural o partiție a lui X și anume familia claselor de echivalență în raport cu E. Reciproc dacă $(X_i)_{i \in I}$ este o partiție a lui X atunci există o relație de echivalență E pe X astfel încît $(X_i)_{i \in I}$ să reprezinte exact familia claselor de echivalență în raport cu E. Relația de echivalență E se definește astfel:

$$x\, E\, y \overset{def}{\Longleftrightarrow} (\exists)\ i \in I,\ x, y \in X_i$$

<u>Exerciții</u>. a) Fie Q mulțimea numerelor raționale și E relația pe Q definită prin

$$x\, E\, y \overset{def}{\Longleftrightarrow} x\text{-}y \text{ este un număr întreg}$$

Să se arate că E este o relație de echivalență. Să se descrie clasa de echivalență a lui $\frac{1}{2}$. Să se arate că în orice clasă de echivalență există numere raționale din intervalul $[0, 1]$.

b) Fie Z mulţimea numerelor întregi, p un număr natural şi E relaţia pe Z definită prin

$$x\, E\, y \overset{def}{\Longleftrightarrow} p \text{ divide } x-y$$

Să se arate că singurele clase de echivalenţă în raport cu E sînt $\dot{0}, \dot{1}, \ldots \widehat{p-1}$.

7. O relaţie pe o mulţime nevidă X, notată $\leq$, se numeşte relaţie de ordine dacă posedă următoarele proprietăţi:

a) este <u>reflexivă</u> adică pentru orice $x \in X$ avem $x \leq x$.

b) este <u>tranzitivă</u> adică pentru orice x,y,z din X avem

$$x \leq y \text{ şi } y \leq z \Longrightarrow x \leq z$$

c) este <u>antisimetrică</u> adică pentru orice x,y din X avem

$$x \leq y \text{ şi } y \leq x \Longrightarrow x = y$$

Dacă $x \leq y$ şi $x \neq y$ vom scrie $x < y$. Obiectul $(X, \leq)$ format din X şi o relaţie de ordine $\leq$ pe X se va numi <u>mulţime ordonată</u>. O mulţime ordonată $(X, \leq)$ se numeşte <u>total ordonată</u> dacă pentru orice $x,y \in X$ avem $x \leq y$ sau $y \leq x$.

Fie $(X, \leq)$ o mulţime ordonată. Dacă $A \subset X$ este o parte nevidă a lui X atunci un element $x \in X$ cu proprietatea $a \leq x$ pentru orice $a \in A$ se numeşte <u>majorant</u> pentru A. Dacă $a \geq x$ pentru orice $a \in A$ atunci elementul x se va numi <u>minorant</u> pentru A. Dacă A posedă un majorant (resp. un minorant) se spune că A este majorată (resp. minorată). Dacă x este un majorant pentru A şi în acelaş timp $x \in A$ atunci x este unic determinat. Intr-adevăr, dacă ar exista y majorant pentru A şi în acelaş timp $y \in A$ atunci am avea $x \leq y$ (pentru că y este majorant al lui A şi $x \in A$) şi $y \leq x$ (pentru că x este majorant al lui A şi $y \in A$). Un astfel de element x se va numi <u>cel mai mare element al lui A</u>. Analog dacă există un minorant x al lui A şi în acelaş timp $x \in A$ atunci x este unic determinat şi se numeşte <u>cel mai mic element al lui A</u>.

Dacă $A \subset X$ este nevidă şi majorată şi dacă mulţimea majoranţilor lui A are un cel mai mic element atunci acest element se va numi <u>marginea superioară a lui A</u> sau <u>supremumul lui A</u> şi se notează cu sup A. Din definiţie rezultă că elementul u : = sup A este caracterizat de următoarele două proprietăţi:

a) u este majorant al lui A

b) dacă v este majorant al lui A atunci $v \geqslant u$.

Analog dacă $A \subset X$ este nevidă şi minorată şi dacă mulţimea minoranţilor lui A are un cel mai mare element atunci acest element se numeşte <u>marginea inferioară a lui A</u> sau <u>infimumul lui A</u> şi se notează cu inf A. Din definiţie rezultă că elementul u : = inf A este caracterizat de următoarele două proprietăţi:

a) u este minorant al lui A

b) dacă v este un minorant al lui A atunci $v \leqslant u$.

O mulţime ordonată $(X, \leqslant)$ se va numi <u>complet ordonată</u> dacă orice parte nevidă şi majorată a sa are supremum. Dacă $(X, \leqslant)$ este complet ordonată atunci rezultă că orice parte nevidă şi minorată a lui A are infimum. Intr-adevăr, dacă A este nevidă şi minorată atunci mulţimea B a minoranţilor săi este nevidă şi este majorată (orice element din A este un majorant al lui B) şi deci există u : = sup B. Intrucît orice element din A este un majorant pentru B rezultă că u este un minorant pentru A şi deci $u \in B$. Aşadar u este cel mai mare element din B adică u = inf A.

Mulţimea $\mathbb{Q}$ a numerelor raţionale este total ordonată în raport cu ordinea sa uzuală dar nu este complet ordonată întrucît spre exemplu, mulţimea $\{x \in \mathbb{Q}\ ,\ x > 0\ ,\ x^2 < 2\}$ este majorată dar nu posedă supremum.

O mulţime ordonată $(X, \leqslant)$ se numeşte <u>bine ordonată</u> dacă orice parte nevidă a sa are un cel mai mic element. Mulţimea $\mathbb{N}$ a numerelor naturale în raport cu ordinea uzuală este bine ordonată dar mulţimile $\mathbb{Z}$ şi $\mathbb{Q}$ notate cu ordinea uzuală nu sînt bine ordonate.

Dacă $(X, \leq)$, $(Y, \leq)$ sînt mulţimi ordonate atunci o funcţie $f : X \longrightarrow Y$ se numeşte crescătoare (resp. descrescătoare dacă pentru orice $x, x' \in X$ avem

$$x \leq x' \Longrightarrow f(x) \leq f(x') \text{ (resp. } f(x) \geq f(x'))$$

Funcţia f se va numi strict crescătoare (resp. strict descrescătoare) dacă pentru orice $x, x' \in X$ avem

$$x < x' \Longrightarrow f(x) < f(x') \text{ (resp. } f(x) > f(x'))$$

<u>Exerciţii</u>. a) Fie X o mulţime nevidă. Să se arate că relaţia $\leq$ definită pe $\mathcal{P}(X)$ prin

$$A \leq B \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} A \subset B$$

este o relaţie de ordine iar $(\mathcal{P}(X), \leq)$ este o mulţime complet ordonată. Dacă X are cel puţin două elemente atunci $(\mathcal{P}(X) \leq)$ nu este total ordonată.

b) Fie $(X, \quad)$ o mulţime ordonată astfel încît orice parte nevidă şi total ordonată are supremum. Atunci pentru orice aplicaţie $f : X \longrightarrow X$ cu proprietatea $f(x) \geq x$ există un $x_0 \in X$ cu $f(x_0) = x_0$.

c) Fie $(X, \leq)$ o mulţime total ordonată şi $(Y, \leq)$ o mulţime ordonată şi $f : X \longrightarrow Y$ o funcţie strict crescătoare. Atunci f este injectivă.

d) Fie $(X, \leq)$ total ordonată, $(Y, \leq)$ o mulţime total ordonală şi complet ordonată, X_0 o parte nevidă a lui X şi $f : X_0 \longrightarrow Y$ o funcţie crescătoare. Presupunem că pentru orice parte nevidă A a lui X_0 majorată în X, mulţimea $f(A)$ este de asemenea majorată şi pentru orice parte nevidă A a lui X_0 minorată în X mulţimea $f(A)$ este de asemenea minorată. Atunci f admite o prelungire crescătoare de la X la Y.

e) Fie $(X, \leq)$ şi $(Y, \leq)$ mulţimi total ordonate, X_0 o parte nevidă a lui X şi f, g funcţii crescătoare de la X la Y astfel încît $f(x) = g(x)$ pentru orice $x \in X_0$. Presupunem că pentru orice $y', y'' \in Y$, $y' < y''$ există $x \in X_0$ cu $y' < f(x) < y''$. Să se arate că $f = g$.

f) Axioma alegerii este echivalentă cu fiecare din următoarele proprietăţi:

f') Pentru orice mulţime nevidă X există o relaţie de ordine astfel încît $(X, \leq)$ este bine ordonată.

f'') Pentru orice mulţime ordonată X astfel încît orice parte total ordonată este majorată există $x \in X$ cu proprietatea $x \leq y \Longrightarrow y = x$.

8. Fie X şi Y două mulţimi. Spunem că X este <u>echipotentă</u> cu Y dacă există o funcţie bijectivă de la X la Y. Faptul că X este echipotentă cu Y va fi notat prin $X \sim Y$ sau prin $X \overset{f}{\sim} Y$ punînd în evidenţă şi aplicaţia bijectivă f de la X la Y prin care s-a realizat echipotentă.

Evident avem

a) $X \overset{1_X}{\sim} X$ pentru orice mulţime X

b) $X \overset{f}{\sim} Y \Longrightarrow Y \overset{f^{-1}}{\sim} X$

c) $X \overset{f}{\sim} Y$ şi $Y \overset{g}{\sim} Z \Longrightarrow X \overset{g \circ f}{\sim} Z$

Aceste proprietăţi arată că relaţia $A \sim B$ considerată pe mulţimea $\mathcal{P}(X)$ unde X este o mulţime nevidă este o relaţie de echivalenţă.

O mulţime X se numeşte <u>infinită</u> dacă este echipotentă cu o submulţime proprie a sa. Evident mulţimea $\mathbb{N}$ a numerelor naturale este infinită întrucît aplicaţia $p \longrightarrow 2p$ este o bijecţie de la $\mathbb{N}$ la submulţimea proprie a lui $\mathbb{N}$ formată din toate numerele pare.

O mulţime A se va numi <u>numărabilă</u> dacă este echipotentă cu $\mathbb{N}$. Evident orice mulţime numărabilă este infinită.

In strînsă legătură cu noţiunea de mulţime numărabilă este noţiunea de <u>mulţime cu succesor</u>. Fie A o mulţime nevidă. O pereche (a, s) unde $a \in A$ şi $s : A \longrightarrow A \setminus \{a\}$ este o funcţie injectivă se numeşte <u>succesor</u> pe A dacă orice parte B a lui A care se bucură de proprietăţile

$$1) \quad a \in B \; ; \qquad 2) \quad s(B) \subset B$$

coincide cu A. O mulţime A pe care s-a dat un succesor (a, s) se numeşte <u>mulţime cu succesor</u>. Elementul a se va numi <u>elementul iniţial în A</u>, iar s se va numi <u>funcţia succesor</u>.

Din definiţie rezultă că dacă perechea (a, s) este un succesor pe A atunci avem $A \setminus \{a\} = s(A)$ şi deci A este infinită. Mai mult A este chiar numărabilă întrucît există şi este unică o aplicaţie bijectivă $\varphi: \mathbb{N} \longrightarrow A$ definită prin

$$\varphi(o) = a \quad \text{şi} \quad \varphi(n+1) = s(\varphi(n))$$

In acest fel s apare ca o maşină de numărat pe mulţimea A începînd cu elementul a continuînd cu s(a), s(s(a)) şi aşa mai departe.

Evident $\mathbb{N}$ apare ca un prototip al mulţimilor cu succesor în care 0 este elementul iniţial iar funcţia $n \longrightarrow n+1$ ca funcţie succesor pe $\mathbb{N}$. Aceasta rezultă din faptul că $\mathbb{N}$ are proprietatea că o submulţime B a lui $\mathbb{N}$, care conţine pe 0 şi odată cu n conţine pe n+1, coincide cu $\mathbb{N}$.

In sfîrşit remarcăm faptul că orice mulţime infinită conţine o mulţime numărabilă. Intr-adevăr dacă X este infinită atunci există o funcţie bijectivă $f : X \longrightarrow Y$ unde Y este o submulţime proprie a lui X. Fie acum $a \in X \setminus Y$ şi fie $\mathcal{B}$ mulţimea părţilor B ale lui X cu proprietăţile

$$\text{i)} \quad a \in B \quad ; \quad \text{ii)} \quad f(B) \subset B$$

Evident $X \in \mathcal{B}$. Notînd

$$A := \bigcap_{B \in \mathcal{B}} B$$

observăm de asemenea că $A \in \mathcal{B}$. In plus, prin construcţie, A este cea mai mică (în sensul incluziunii) mulţime din $\mathcal{B}$ şi deci orice parte C a lui A cu proprietăţile

$$\text{i)} \quad a \in C \, , \qquad \text{ii)} \quad f(C) \subset C$$

coincide cu A. Aşadar perechea (a, s) unde $s : A \longrightarrow A$ este definită prin $s(x) = f(x)$ este un succesor pe A şi deci A este numărabilă.

O mulţime se numeşte <u>finită</u> dacă este vidă sau dacă există $n \in \mathbb{N}$ astfel încît A este echipotentă cu mulţimea $\{o, 1, 2, \dots, n\}$. Dacă axioma alegerii are loc atunci se arată că A este finită dacă şi numai dacă A nu este infinită.

Exerciţii. a) Au loc următoarele relaţii:

X numărabilă, Y finită $\Longrightarrow X \cup Y$ numărabilă

X numărabilă, Y numărabilă $\Longrightarrow X \cup Y$ numărabilă

b) Dacă $(X_n)_n$ este un şir de mulţimi numărabile atunci $\bigcup\limits_n X_n$ este numărabilă.

c) Dacă X este infinită iar Y este finită sau numărabilă atunci $X \sim (X \cup Y)$.

d) $\mathbb{Z}$ şi $\mathbb{Q}$ sînt mulţimi numărabile.

e) Dacă X este numărabilă şi $Y \subset X$ este infinită atunci Y este numărabilă.

f) Dacă X, Y sînt astfel încît există $X' \subset X$ şi $Y' \subset Y$ cu proprietăţile $X \sim Y'$ şi $Y \sim X'$ atunci $X \sim Y$.

g) Pentru orice X nu are loc relaţia $X \sim \mathcal{P}(X)$.

I. MULTIMILE $\mathbb{R}$ şi $\overline{\mathbb{R}}$

1. Mulţimea numerelor reale
2. Mulţimea $\overline{\mathbb{R}}$
3. Construcţia lui $\mathbb{R}$ (Schiţă)

1. Mulţimea numerelor reale

Mulţimea numerelor reale, notată cu $\mathbb{R}$, este o mulţime nevidă care posedă o dublă organizare una de corp comutativ, alta de mulţime complet ordonată legate între ele prin aşa numitele proprietăţi de compatibilitate. Se arată că acest tip de organizare determină în mod unic mulţimea R pînă la un izomorfism.

Definiţie. Se numeşte corp ordonat, un corp comutativ S înzestrat cu o relaţie de ordine $\leq$ care satisface următoarele proprietăţi (numite proprietăţi de compatibilitate cu structura de corp)

a) $x \leq y \Longrightarrow x + z \leq y + z \quad (\forall)\ x, y, z \in S$

b) $x \leq y \Longrightarrow x \cdot z \leq y \cdot z \quad (\forall)\ z, y, z \in S,\ z \geq 0$

c) $x, y \in S \Longrightarrow x \leq y$ sau $y \leq x$.

Două corpuri ordonate S şi T se numesc izomorfe dacă există o funcţie bijectivă $\varphi : S \longrightarrow T$ astfel încît pentru orice $x, y \in S$ să avem

$$\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y),$$
$$\varphi(x \cdot y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y),$$
$$x \leq y \Longrightarrow \varphi(x) \leq \varphi(y).$$

Dacă S este un corp ordonat elementul zero se notează cu 0, elementul unu se notează cu 1. Un element $x \in A$ care verifică relaţia $x \geq 0$ (resp. $x \leq 0$) se va numi pozitiv (resp. negativ). Dacă $x > 0$ (resp. $x < 0$) vom spune că x este strict pozitiv (resp. strict negativ).

Propoziţia 1. (Regula semnelor). Fie S un corp ordonat. Atunci au loc relaţiile:

1) $x \in S \Longrightarrow x \leq 0$ sau $x \geq 0$

2) $x \geq 0 \Longleftrightarrow -x \leq 0$

3) $x \geq 0,\ y \geq 0 \Longrightarrow x + y \geq 0,$

$x \leq 0,\ y \leq 0 \Longrightarrow x + y \leq 0$

4) $x \geq 0,\ y \geq 0 \Longrightarrow x \cdot y \geq 0$

$x \geq 0,\ y \leq 0 \Longrightarrow x \cdot y \leq 0$

$x \leq 0,\ y \leq 0 \Longrightarrow x \cdot y \geq 0$

5) $x \in S \Longrightarrow x^2 \geqslant 0$

$1 > 0$

$x > 0 \Longrightarrow 1/x > 0$.

Demonstrație

1) rezultă direct din proprietatea a) comparînd pe x cu 0 ,

2) și 3) rezultă din proprietatea a) .

Avem:

$$x \geqslant 0 \Longrightarrow x + (-x) \geqslant -x \Longrightarrow -x \leqslant 0$$

$$x \geqslant 0,\ y \geqslant 0 \Longrightarrow x + y \geqslant 0 + y = y \geqslant 0$$

$$x \leqslant 0,\ y \leqslant 0 \Longrightarrow x + y \leqslant 0 + y = y \leqslant 0$$

4) rezultă din proprietatea b) și din 2)

Avem:

$$x \geqslant 0,\ y \geqslant 0 \Longrightarrow x \cdot y \geqslant 0 \cdot y = 0$$

$$x \leqslant 0,\ y \geqslant 0 \Longrightarrow x \cdot y \leqslant 0 \cdot y = 0$$

$$x \leqslant 0,\ y \leqslant 0 \Longrightarrow x(-y) \leqslant 0 \Longrightarrow -(xy) \leqslant 0 \Longrightarrow xy \geqslant 0$$

5) Fie $x \in S$. Dacă $x \geqslant 0$ atunci $x^2 = x \cdot x \geqslant 0$. Dacă $x \leqslant 0$ atunci $x^2 = x \cdot x \geqslant 0$. Deci $x^2 \geqslant 0$. Intrucît $1^2 = 1$ rezultă $1 \geqslant 0$ și din $1 \neq 0$ deducem $1 > 0$. Dacă $x > 0$ atunci $x \neq 0$ și deci există $\frac{1}{x}$. Din $x \cdot \frac{1}{x} = 1 > 0$ rezultă $\frac{1}{x} > 0$ întrucît în caz contrar $\frac{1}{x} < 0$ am avea $1 = x \cdot \frac{1}{x} \leqslant 0$.

Propoziția 2. Fie S un corp ordonat și $(s_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ un sistem finit de elemente pozitive din S. Atunci $s_1 + s_2 + \ldots + s_n \geqslant 0$. Dacă în plus avem $s_1 + s_2 + \ldots + s_n = 0$ atunci $s_1 = s_2 = \ldots = s_n = 0$.

Demonstrație. Se aplică inducția. Pentru $n = 1$ afirmația este trivială. Presupunem că afirmația este adevărată pentru n și fie $(s_i)_{1 \leqslant i \leqslant n+1}$ un sistem de n+1 elemente pozitive din S. Din ipoteza de inducție deducem

$$s_1 + s_2 + \ldots + s_n \geqslant 0 .$$

Deci

$$s_1 + s_2 + \ldots + s_n + s_{n+1} = (s_1 + \ldots + s_n) + s_{n+1} \geqslant 0$$

Dacă $\quad s_1 + \ldots + s_n + s_{n+1} = 0 \quad$ atunci avem

$$(s_1 + \ldots + s_n) = - s_{n+1} \leqslant 0$$

$$s_{n+1} = - (s_1 + \ldots + s_n) \leqslant 0$$

şi deci $s_{n+1} = 0$ şi $s_1 + \ldots + s_n = 0$. Din ipoteza de inducţie rezultă $s_1 = \ldots = s_n = 0$.

Fie S un corp. Pentru orice număr natural $p \neq 0$ şi $x \in S$ punem px în loc de suma familiei de p elemente din S toate egale cu x. Dacă $p = 0$ se pune $0 \cdot x = 0$. Dacă $p \in \mathbb{Z}$, $p < 0$ atunci punem px în loc de $-(-p)x$ sau echivalent în loc de $(-p)(-x)$.

Se spune că S este de caracteristica zero dacă pentru orice $p \in \mathbb{N}$, $p \neq 0$ şi orice $x \in S$, $x \neq 0$ avem $px \neq 0$.

Dacă S nu este de caracteristică zero atunci se numeşte caracteristica lui S cel mai mic număr natural p, $p > 1$ cu proprietatea că ? $px = 0$ pentru orice $x \in S$.

Propoziţia 3. Orice corp ordonat S este de caracteristică zero. Mulţime $Q(S)$ a elementelor din S de forma $p\cdot 1/q\cdot 1$ unde $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, $q > 0$ este un subcorp al lui S iar aplicaţia φ de la $\mathbb{Q}$ la $Q(S)$ definită prin

$$\varphi(p/q) = p\cdot 1/q\cdot 1$$

este un izomorfism de corpuri ordonate.

Demonstraţie. Fie $p \in \mathbb{N}$, $p > 1$ şi $x \in S$ astfel încît $px = 0$. Dacă $x \geqslant 0$ atunci din propoziţia 2) deducem $x = 0$. Dacă $x \leqslant 0$ atunci $-x \geqslant 0$, $p(-x) = 0$ şi din consideraţiile precedente deducem $-x = 0$ şi deci $x = 0$. Aşadar S este de caracteristică zero. Fie acum $p, p' \in \mathbb{Z}$, $q, q' \in \mathbb{N}$, $q \neq 0$, $q' \neq 0$. Intrucît avem

$$(p+p')\cdot 1 = p\cdot 1 + p'\cdot 1 \quad , \quad (p\cdot 1)(p'\cdot 1) = (pp')\cdot 1$$

deducem

$$\varphi(p/q) + \varphi(p'/q') = \frac{p\cdot 1}{q\cdot 1} + \frac{p'\cdot 1}{q'\cdot 1} = \frac{(pq'+qp')1}{(q\cdot q')1} = \varphi(p/q + p'/q')$$

$$\varphi(p/q) \cdot \varphi(p'/q) = \frac{p\cdot 1}{q\cdot 1} \cdot \frac{p'\cdot 1}{q'\cdot 1} = \frac{(p\cdot p')1}{(q\cdot q')1} = \varphi(p/q \cdot p'/q')$$

Dacă $p/q \geqslant 0$ atunci $p \geqslant 0$. Din $p \cdot 1 \geqslant 0$, $q \cdot 1 \geqslant 0$ deducem

$$\varphi(p/q) = \frac{p\cdot 1}{q\cdot 1} \geqslant 0 \quad .$$

Aşadar φ este un izomorfism de corpuri ordonate între $\mathbb{Q}$ şi $\mathbb{Q}(S)$.

Notaţie. In cele ce urmează dacă S este un corp ordonat atunci vom identifica subcorpul $\mathbb{Q}(S)$ cu corpul $\mathbb{Q}$ urmînd izomorfismul descris în propoziţia precedentă. Aceasta în fond revine la a identifica, pentru $p \in \mathbb{Z}$, elementul $p.1$ din S cu numărul p. In acest fel dacă $p \in \mathbb{N}$ şi $x \in S$ atunci elementul px înseamna produsul dintre p ca element al lui S cu x. Intr-adevăr avem

$$px = \underbrace{x + x + \dots + x}_{p \text{ ori}} = \underbrace{(1 + 1 + \dots + 1)}_{p \text{ ori}}x = (p \cdot 1)x \quad .$$

Propoziţia 4. Fie S un corp ordonat, A o submulţime nevidă şi majorată (resp. minorată) a lui S pentru care există $\sup A$ (resp. $\inf A$). Atunci pentru orice $x \in S$ mulţimea

$$A + x = \{a+x \mid a \in A\}$$

are supremum (resp. infimum) şi avem

$$\sup(A+x) = (\sup A) + x$$

$$(\text{resp. } \inf(A+x) = (\inf A) + x)$$

Demonstraţie. Fie $u = \sup A$. Din

$$a \in A \Longrightarrow a \leqslant u$$

rezultă $a + x \leqslant u + x$ ceea ce înseamnă că $u + x$ este un majorant pentru $A + x$. Dacă w este un majorant pentru $A + x$ atunci

$$a + x \leqslant w \qquad (\forall)\ a \in A$$

sau echivalent

$$a \leqslant w - x \quad (\forall)\ a \in A$$

de unde deducem că $u \leqslant w - x$ adică

$$u + x \leqslant w \ .$$

Aşadar $u + x = \sup(A + x)$.

Fie $v = \inf A$. Din

$$a \in A \Longrightarrow v \leqslant a$$

deducem $v + x \leqslant a + x$ pentru orice $a \in A$ adică $v + x$ este un minorant pentru $A + x$. Dacă w este un minorant pentru $A + x$ atunci

$$w \leqslant a + x \quad (\forall)\ a \in A$$

sau echivalent

$$w - x \leqslant a \quad (\forall)\ a \in A$$

de unde deducem că $w - x \leqslant v$ adică

$$w \leqslant v + x \ .$$

Aşadar $v + x = \inf(A + x)$.

Propoziţia 5. Presupunem că S este un corp ordonat şi A este o submulţime a lui S nevidă majorată (resp. minorată) pentru care există $\sup A$ (resp. $\inf A$) atunci pentru orice $x \in S$, $x > 0$ avem

$$\sup(A \cdot x) = (\sup A) \cdot x$$

$$(\text{resp. } \inf(A \cdot x) = (\inf A)\, x \quad)$$

iar pentru orice $x \in S$, $x < 0$ avem

$$\inf(A \cdot x) = (\sup A) \cdot x$$

$$(\text{resp. } \sup(A \cdot x) = (\inf A)\, x \quad)$$

unde $A \cdot x$ este mulţimea $\{ a \cdot x \mid a \in A \}$.

Demonstraţie. Presupunem $x > 0$ şi fie $u = \sup A$. Din

$$a \leqslant u \quad (\forall)\ a \in A$$

deducem

$$ax \leqslant ux \quad (\forall)\ a \in A$$

ceea ce arată că $u \cdot x$ este un majorant pentru $A \cdot x$. Dacă w este un majorant pentru $A \cdot x$ adică

$$ax \leqslant w \quad (\forall)\ a \in A$$

rezultă că

$$a \leqslant \frac{w}{x} \quad (\forall)\ a \in A$$

şi deci $\frac{w}{x}$ este un majorant pentru A. De aici deducem $u \leqslant w/x$, $u \cdot x \leqslant w$ adică $u \cdot x$ este cel mai mic majorant al lui $A \cdot x$ şi deci $u \cdot x = \sup(Ax)$. O demonstraţie analogă pentru formula $\inf(A \cdot x) = (\inf A) \cdot x$ dacă $x > 0$.

Presupunem acum $x < 0$ şi fie $u = \sup A$. Din

$$a \leqslant u \quad (\forall)\ a \in A$$

deducem

$$a \cdot x \geqslant u \cdot x \quad (\forall)\ a \in A$$

şi deci $u \cdot x$ este un minorant pentru $A \cdot x$. Dacă w este un minorant pentru $A \cdot x$ atunci

$$ax \geqslant w \quad (\forall)\ a \in A$$

sau

$$a \leqslant w/x \quad (\forall)\ a \in A$$

adică w/x este un majorant al lui A şi deci

$$u \leqslant w/x, \qquad u \cdot x \geqslant w .$$

De aici rezultă că $u \cdot x$ este cel mai mare minorant al lui $A \cdot x$ adică $u \cdot x = \inf(A \cdot x)$. O demonstraţie analogă pentru formula

$$\sup(Ax) = (\inf A) \cdot x$$

în cazul $x < 0$.

<u>Definiţie</u>. Un corp ordonat S se numeşte <u>arhimedian</u> dacă pentru orice $x \in S$ şi orice $u \in S$, $u > 0$ există $n \in \mathbb{N}$ cu proprietatea $x \leqslant n\, u$.

<u>Propoziţia 6</u>. Fie S un corp ordonat. Atunci următoarele afirmaţii sînt echivalente:

1) S este arhimedian.

2) Pentru orice $x \in A$ există $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încît $x \leqslant n$.

3) Pentru orice $x, y \in S$, astfel încît $x < y$ există un număr raţional $r \in Q$ astfel încît $x < r < y$.

<u>Demonstraţie</u>.

2) $\Longrightarrow$ 1). Fie $u > 0$ şi $x \in S$. Din 2) rezultă că există $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încît

$$x/u \leqslant n \quad \text{sau echivalent} \quad x \leqslant n\,u\,.$$

1) $\Longrightarrow$ 3). Fie $x, y \in S$, $x < y$. Vom presupune mai întîi că $y \geqslant 0$. Intrucît $y-x > 0$ rezultă că există $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încît

$$1 < n(y-x)$$

sau echivalent $1/n < y-x$. Notăm cu n_o primul număr natural $n_o \in \mathbb{N}^*$ cu proprietatea

$$1/n_o < y-x$$

Intrucît $1/n_o > 0$ există $m \in \mathbb{N}^*$, astfel încît

$$m/n_o \geqslant y\,.$$

Notăm cu m_1 primul număr natural cu proprietatea $m_1/n_o \geqslant y$ şi cu $m_o :=$ $= m_1 - 1$. Din definiţia lui m_1 rezultă că

$$m_o/n_o < y$$

Pe de altă parte avem $m_o/n_o > x$ întrucît în caz contrar avem

$$x \geqslant m_o/n_o$$

şi deci

$$y - x \leqslant m_1/n_o - m_o/n_o = 1/n_o \quad .$$

ceea ce contrazice definiţia lui n_o. Aşadar

$$x < m_o/n_o < y$$

Dacă $y < 0$ atunci $x < y < 0$ şi deci

$$-y < -x \quad \text{şi} \quad -x > 0 \quad .$$

Aplicînd consideraţiile precedente găsim un număr raţional r' astfel încît

$$-y < r' < -x \quad .$$

Punînd $r := -r'$ avem

$$x < r < y \quad .$$

Propoziţia 7. Fie S un corp ordonat arhimedian. Atunci pentru orice $x \in S$ avem

$$x = \sup\{r \in Q \mid r < x\} ,$$
$$x = \inf\{s \in Q \mid s > x\} .$$

Demonstraţie. Fie $x \in S$. Intrucît $x-1 < x$ există $r \in Q$ astfel încît $x-1 < r < x$ ceea ce arată că mulţimea

$$A := \{r \in Q \mid r < x\}$$

este nevidă. Evident x este un majorant pentru A. Dacă y este un majorant pentru A atunci $y \geqslant x$. Intr-adevăr în caz contrar am avea $y < x$ şi din faptul că S este arhimedian deducem că există $r \in Q$ cu $y < r < x$ ceea ce contrazice faptul că y este majorant pentru A. Aşadar

$$x = \sup A \quad .$$

Notînd $B := \{ r \in Q \mid r > x \}$ avem

$$(-1) \cdot B = \{ r \in Q \mid r < -x \}$$

şi deci

$$-x = \sup((-1)B) = -\inf B \ ,$$
$$x = \inf B \ .$$

<u>Definiţie</u>. Un corp ordonat S se numeşte <u>complet ordonat</u> dacă mulţimea ordonată $(S, \leqslant)$ este complet ordonată.

<u>Propoziţia 8</u>. Orice corp complet ordonat este arhimedian.

<u>Demonstraţie</u>. Fie S un corp complet ordonat şi presupunem că există $x \in S$ astfel încît

$$n \leqslant x \quad (\forall)\ n \in \mathbb{N} \ .$$

De aici deducem că $\mathbb{N}$ este majorată (x este un majorant pentru $\mathbb{N}$) şi deci există $\sup \mathbb{N}$. Intrucît

$$n \leqslant \sup \mathbb{N} \quad (\forall)\ n \in \mathbb{N}$$

deducem

$$n + 1 \leqslant \sup \mathbb{N} \quad (\forall)\ n \in \mathbb{N}$$

şi deci

$$n \leqslant (\sup \mathbb{N}) - 1 \quad (\forall)\ n \in \mathbb{N}$$

ceea ce arată că $(\sup \mathbb{N}) - 1$ este un majorant pentru $\mathbb{N}$. De aici rezultă inegalitatea contradictorie

$$(\sup \mathbb{N}) - 1 \leqslant \sup \mathbb{N} \ .$$

<u>Propoziţia 9</u>. Fie S un corp ordonat arhimedian şi $\mathbb{R}$ un corp complet ordonat. Atunci există o aplicaţie injectivă $\varphi : S \longrightarrow \mathbb{R}$ astfel încît

$$\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y) \ , \quad \varphi(xy) = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$$
$$x \geqslant 0 \iff \varphi(x) \geqslant 0$$

Dacă în plus S este un corp complet ordonat atunci φ este şi bijectivă şi deci S este izomorf cu $\mathbb{R}$.

<u>Demonstrație</u>. Se consideră corpul Q al numerelor raționale. Fără a restrînge generalitatea se poate presupune, întrucît S și $\mathbb{R}$ sînt corpuri ordonate, că Q este inclus în S și în acelaș timp Q este inclus în $\mathbb{R}$. Intrucît pentru orice $x \in S$ există $r \in Q$ cu $x < r$ rezultă că mulțimea

$$\{y \in Q \mid y < x\}$$

este o mulțime majorată în Q și considerată ca submulțime a lui $\mathbb{R}$ este majorată în $\mathbb{R}$. Intrucît R este complet ordonat deducem că există supremumul în R al acestei mulțimi. Punem

$$\varphi(x) := \sup\{y \in R \mid y \in Q \text{ , } y < x\}$$

Evident vom avea $\varphi(x) = x$ pentru orice $x \in Q$. Pe de altă parte dacă $x, y \in S$ atunci vom avea $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$. Intr-adevăr dacă $r \in Q$, $r < x+y$ atunci $r-x < y$ și deci există $r_2 \in Q$ cu $r-x < r_2 < y$. Punînd $r_1 := r-r_2$ avem $r_1 \in Q$, $r_1 < x$. Din definiția lui $\varphi(x)$ și $\varphi(y)$ avem $r_1 \leqslant \varphi(x)$, $r_2 \leqslant \varphi(y)$ și deci

$$r = r_1 + r_2 \leqslant \varphi(x) + \varphi(y) \quad .$$

Intrucît $\varphi(x+y) = \sup\{r \in R \mid r \in Q,\ r < x+y\}$ deducem din considerațiile precedente

$$\varphi(x+y) \leqslant \varphi(x) + \varphi(y)$$

Pe de altă parte dacă

$$r_1 \in Q,\ r_1 < x \quad \text{și} \quad r_2 \in Q,\ r_2 < y$$

atunci $r_1 + r_2 \in Q$ și $r_1 + r_2 < x+y$ și deci

$$r_1 + r_2 \leqslant \varphi(x+y)$$

Trecînd la supremum după r_1 deducem, aplicînd Propoziția 5,

$$\varphi(x) + r_2 \leqslant \varphi(x+y) \quad .$$

Trecînd la supremum după r_2 și aplicînd din nou Propoziția 5 deducem

$$\varphi(x) + \varphi(y) \leqslant \varphi(x+y) \quad .$$

Vom arăta acum că

$$x \geqslant 0 \iff \varphi(x) \geqslant 0 \quad .$$

Din $x > 0$ şi din faptul că S este arhimedean deducem că există $\rho \in Q$ cu $0 < \rho < x$ şi deci

$$\varphi(x) = \sup\{y \in R \mid y \in Q,\ y < x\} \geqslant \rho > 0$$

Reciproc dacă $\varphi(x) > 0$ atunci există $\rho \in Q$ cu $0 < \rho < \varphi(x)$. Pe de altă parte din definiţia lui $\varphi(x)$ rezultă că există $r \in Q$, $r < x$ astfel încît $\rho < r$. Aşadar $0 < \rho < r < x$ şi deci $x > 0$.

Din $0 = \varphi(0) = \varphi(x + (-x)) = \varphi(x) + \varphi(-x)$ deducem că $\varphi(-x) = -\varphi(x)$ şi deci va fi suficient pentru a demonstra relaţia

$$\varphi(xy) = \varphi(x)\cdot\varphi(y)$$

să presupunem $x > 0$ şi $y > 0$. Fie $r \in Q$ $0 < r < x\,y$. Atunci $\frac{r}{x} < y$ şi deci există $r_2 \in Q$, astfel încît $\frac{r}{x} < r_2 < y$. Punînd $r_1 := \frac{r}{r_2}$ avem $r_1 < x$ şi deci

$$r = r_1 \cdot r_2 \leqslant \varphi(x)\,\varphi(y) \quad .$$

De aici şi din definiţia lui $\varphi(xy)$ deducem

$$\varphi(xy) \leqslant \varphi(x)\,\varphi(y) \quad .$$

Fie acum $r_1 \in Q$, $r_2 \in Q$, $r_1 < x$, $r_2 < y$. Avem $r_1 r_2 < xy$ şi deci $r_1 r_2 < \varphi(xy)$. Trecînd la supremum după r_1 şi utilizînd Propoziţia 6 obţinem

$$\varphi(x) \cdot r_2 \leqslant \varphi(xy)$$

Trecînd la supremum după r_2 şi ţinînd seama de Propoziţia 6 deducem

$$\varphi(x)\,\varphi(y) \leqslant \varphi(xy) \quad .$$

Presupunem acum că S este un corp complet ordonat. Vom arăta că φ este bijectivă. Fie pentru aceasta $y \in R$ şi fie mulţimea $A \subset S$ defi definită prin

$$A = \{ r \in S \mid r \in Q,\ r < y \} .$$

Intrucît există $\rho \in Q$ cu $\rho > y$ rezultă că A este majorată în S şi deci există $x := \sup A \in S$. Din $\alpha \in Q$, $\alpha < x$ deducem că există $r \in A$ cu $\alpha < r < x$. Evident $r < y$. De aici rezultă că

$$\varphi(x) = \sup \{ \alpha \in Q \mid \alpha < x \} \leq y .$$

Dacă am avea $\varphi(x) < y$ atunci ar exista $r \in Q$ cu $\varphi(x) < r < y$ adică $r \in A$ ceea ce contrazice relaţia $\varphi(x) < r$. Aşadar $\varphi(x) = y$.

<u>Definiţie</u>. Se numeşte corp al numerelor reale un corp complet ordonat. Corpul numerelor reale se va nota cu $\mathbb{R}$.

Din Propoziţia 8 rezultă că orice două corpuri complet ordonate sînt izomorfe. Pe de altă parte, aşa cum va rezulta din finalul acestui paragraf există un corp complet ordonat. Aşadar putem spune că abstracţie făcînd de un izomorfism corpul numerelor reale este caracterizat de faptul că este unicul corp complet ordonat.

<u>Definiţie</u>. Pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$ cu $x \leq y$ mulţimea

$$[x,y] := \{ z \in \mathbb{R} \mid x \leq z \leq y \}$$

se numeşte <u>interval închis de extremităţi x,y</u>.

<u>Propoziţia 1o</u>. Pentru orice şir descrescător $(x_n, y_n)_n$ de intervale închise din $\mathbb{R}$ avem

$$\bigcap_n [x_n, y_n] \neq \emptyset .$$

<u>Demonstraţie</u>. Intrucît şirul $([x_n, y_n])_n$ este descrescător rezultă că

$$x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq \dots \leq y_m \leq \dots \leq y_2 \leq y_1 .$$

Considerăm mulţimea

$$A := \{ z \in \mathbb{R} \mid z \leq y_m \quad (\forall)\ m \in \mathbb{N} \}$$

rezultă că A este nevidă (întrucît $x_n \in A$ $(\forall)$ $n \in \mathbb{N}$) şi este majorată (întrucît orice y_n este un majorant). Punînd $u := \sup A$ avem

$$x_n \leq u \leq y_m \qquad (\forall)\ n,m \in \mathbb{N}$$

şi deci $u \in \bigcap_n [x_n, y_n]$.

Propoziţia 11. Dacă $a,b \in \mathbb{R}$ şi $a < b$ atunci $[a,b]$ este o mulţime infinită nenumărabilă.

Demonstraţie. Evident $[a,b]$ este infinită. Presupunem $[a,b]$ ar fi o mulţime numărabilă şi fie f o funcţie bijectivă de la $\mathbb{N}$ la $[a,b]$. Descompunem intervalul $[a,b]$ în trei părţi egale punînd $[a,b] = [a_0,a_1] \cup [a_1,a_2] \cup [a_2,a_3]$ unde $a_0 = a$, $a_3 = b$ şi $a_1 - a_0 = a_2 - a_1 = a_3 - a_2$. Cel puţin unul dintre intervalele $[a_0,a_1]$, $[a_1,a_2]$, $[a_2,a_3]$ nu conţine punctul $f(o)$. Acest interval va fi notat cu $[c_0,d_0]$. Descompunem ca mai sus acest interval în trei părţi egale. Unul din cele trei intervale fie acesta $[c_1,d_1]$ nu conţine punctul $f(1)$. Se construieşte inductiv un şir descrescător $[c_n,d_n]_n$ de intervale, astfel încît

$$[a,b] \supset [c_n,d_n] \supset [c_{n+1},d_{n+1}]$$

şi astfel încît intervalul $[c_n,d_n]$ nu conţine punctul $f(n)$. Din propoziţia precedentă rezultă că

$$\bigcap_n [c_n,d_n] \neq \emptyset .$$

Alegînd $u \in \bigcap_n [c_n,d_n]$ deducem că există $n_0 \in \mathbb{N}$ cu $f(n_0) = u$. Deci $u \notin [c_{n_0},d_{n_0}]$ ceea ce este o contradicţie. Aşadar $[a,b]$ este nenumărabilă.

Definiţie. Pentru orice număr real x numărul

$$|x| = \begin{cases} x & \text{dacă } x > 0 \\ 0 & \text{dacă } x = 0 \\ -x & \text{dacă } x < 0 \end{cases}$$

se numeşte modulul lui x. Evident $|x| \geq 0$.

Propoziţia 12. Funcţia

$$x \longrightarrow |x|$$

satisface următoarele proprietăţi:

1) $|x| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$

2) $|x + y| \leqslant |x| + |y|$

3) $|xy| = |x| \cdot |y|$

4) Pentru orice $a \in R$, $a > 0$ avem

$$|x| < a \Longleftrightarrow -a < x < a$$

$$|x| \leqslant a \Longleftrightarrow -a \leqslant x \leqslant a \ .$$

Demonstraţie. Proprietatea 1) rezultă direct din definiţie. Proprietatea 3) se verifică separat pentru situaţiile $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$; $x \geqslant 0$, $y < 0$; $x \leqslant 0$, $y \leqslant 0$.

Vom demonstra acum proprietatea 4). Fie $a > 0$ şi $x \in R$. Dacă $x \geqslant 0$ avem $|x| = x$ şi deci

$$|x| < a \Longrightarrow x < a \Longrightarrow 0 \leqslant x < a \Longrightarrow -a < x < a$$

$$-a < x < a \Longrightarrow x < a \Longrightarrow |x| < a$$

Analog

$$|x| \leqslant a \Longrightarrow x \leqslant a \Longrightarrow 0 \leqslant x < a \Longrightarrow -a \leqslant x \leqslant a$$

$$-a \leqslant x \leqslant a \Longrightarrow x \leqslant a \Longrightarrow |x| \leqslant a$$

Dacă $x < 0$ atunci $-x > 0$ şi deoarece $|x| = |-x|$ avem din consideraţiile precedente

$$|x| < a \Longleftrightarrow |-x| < a \Longleftrightarrow -a < -x < a \Longleftrightarrow -a < x < a$$

$$|x| \leqslant a \Longleftrightarrow |-x| \leqslant a \Longleftrightarrow -a \leqslant -x \leqslant a \Longleftrightarrow -a \leqslant x \leqslant a$$

Proprietatea 2) rezultă direct din proprietatea 4).

2. Mulţimea $\bar{\mathbb{R}}$

Pentru a adînci unele fenomene care se desfăşoară în $\mathbb{R}$ este util să lărgim mulţimea $\mathbb{R}$. In această etapă va fi suficient să considerăm mulţimea $\bar{\mathbb{R}}$ care se obţine adăugînd la $\mathbb{R}$ două puncte distincte unul notat $+\infty$ altul $-\infty$. Nu ne va interesa natura acestor puncte noi. Aşadar

$$\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$$

In mulţimea $\bar{\mathbb{R}}$ vom considera o relaţie de ordine definită astfel:

$$x \underset{\bar{\mathbb{R}}}{\leq} y \iff \begin{cases} x = -\infty, \\ y = +\infty, \\ x,y \in \mathbb{R} \quad \text{şi} \quad x \underset{\mathbb{R}}{\leq} y \end{cases}$$

Se verifică simplu că aceasta este o relaţie de ordine. In fapt dacă $x,y \in \mathbb{R}$ atunci relaţia $x \leq y$ în $\bar{\mathbb{R}}$ dacă şi numai dacă $x \leq y$ în $\mathbb{R}$. Elementul $+\infty$ este cel mai mare element din mulţimea ordonată $(\bar{\mathbb{R}}, \leq)$ iar $-\infty$ este cel mai mic element din $(\bar{\mathbb{R}}, \leq)$.

In acest fel orice parte nevidă din $\bar{\mathbb{R}}$ este majorată (de $+\infty$) şi în acelaş timp minorată (de $-\infty$).

Propoziţia 13. Mulţimea $(\bar{\mathbb{R}}, \leq)$ este o mulţime complet ordonată. Mai precis dacă $A \subset \bar{\mathbb{R}}$, $A \neq \emptyset$ atunci:

$$A \text{ majorată în } \mathbb{R} \Longrightarrow \underset{(\text{în } \mathbb{R})}{\sup A} = \underset{(\text{în } \bar{\mathbb{R}})}{\sup A}$$

$$A \text{ nu este majorată în } \mathbb{R} \Longrightarrow \underset{(\text{în } \bar{\mathbb{R}})}{\sup A} = +\infty$$

$$A \text{ minorată în } \mathbb{R} \longrightarrow \underset{(\text{în } \mathbb{R})}{\inf A} = \underset{(\text{în } \bar{\mathbb{R}})}{\inf A}$$

$$A \text{ nu este minorată în } \mathbb{R} \Longrightarrow \underset{(\text{în } \bar{\mathbb{R}})}{\inf A} = -\infty .$$

Demonstrație.

Dacă A este majorată în $\mathbb{R}$ fie $\alpha = \sup\limits_{(\hat{\imath}n\ \mathbb{R})} A$. Avem α este un majorant al lui A în $\mathbb{R}$ și deci în $\bar{\mathbb{R}}$. Dacă $x \in \bar{\mathbb{R}}$ este un majorant al lui A atunci întrucît $A \neq \emptyset$ rezultă $x \in \mathbb{R}$ (și deci $x \geq \alpha$) sau $x = +\infty$ și deci $x \geq \alpha$.

Dacă A nu este majorată în $\mathbb{R}$ rezultă că singurul majorant al lui A în $\bar{\mathbb{R}}$ este $+\infty$ și deci $\sup\limits_{(\hat{\imath}n\ \bar{\mathbb{R}})} A = +\infty$.

Considerații similare se fac pentru calculul infimumului lui A.

In legătură cu problema extinderii operațiilor algebrice $+$, $\cdot$ din $\mathbb{R}$ la $\bar{\mathbb{R}}$ subliniem faptul că nu este posibil să fie făcută astfel încît întreaga armonie a acestor operații din $\mathbb{R}$ să se regăsească în $\bar{\mathbb{R}}$. Se fac doar unele convenții care își vor găsi justificarea mai tîrziu cînd vom aborda unele din fenomenele pentru adîncirea cărora s-a realizat de fapt lărgirea lui $\mathbb{R}$ la $\bar{\mathbb{R}}$. Astfel următoarele convenții se dovedesc a fi convenabile:

$$x + (+\infty) = +\infty \qquad x \in \bar{\mathbb{R}},\ x \neq -\infty$$
$$x + (-\infty) = -\infty \qquad x \in \bar{\mathbb{R}},\ x \neq +\infty$$
$$x \cdot (+\infty) = +\infty \quad , \quad x \in \bar{\mathbb{R}},\ x > 0$$
$$x \cdot (+\infty) = -\infty \qquad x \in \bar{\mathbb{R}},\ x < 0$$
$$x \cdot (-\infty) = -\infty \quad , \quad x \in \bar{\mathbb{R}},\ x > 0$$
$$x \cdot (+\infty) = -\infty \qquad x \in \bar{\mathbb{R}},\ x < 0$$

In special este contraindicată orice convenție privind operațiile $(-\infty) + (\infty)$, $0 \cdot (+\infty)$, $0 \cdot (-\infty)$.

In sfîrșit pentru a avea o intuiție mai bună asupra modului în care $\bar{\mathbb{R}}$ s-a obținut din $\mathbb{R}$ vom considera aplicația

$$\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow (-1, 1)$$

definită prin

$$\varphi(x) = \frac{x}{1+|x|}$$

care reprezintă o funcţie bijectivă strict crescătoare a cărei inversă este funcţia

$$\psi : (-1, 1) \longrightarrow \mathbb{R}$$

definită prin

$$\psi(y) = \frac{y}{1-|y|} \quad .$$

Se poate spune că φ realizează un "izomorfism" între mulţimea ordonată $\mathbb{R}$ şi mulţimea ordonată $(-1, 1)$.

Tot astfel vom considera aplicaţia

$$\overline{\varphi} : \overline{\mathbb{R}} \longrightarrow [-1, 1]$$

definită prin

$$\overline{\varphi}(x) = \begin{cases} -1 & \text{dacă } x = -\infty \\ \frac{x}{1+|x|} & \text{dacă } x \in \mathbb{R} \\ +1 & \text{dacă } x = +\infty \end{cases}$$

Se verifică simplu că $\overline{\varphi}$ este o funcţie bijectivă, strict crescătoare care coincide cu φ pe $\mathbb{R}$. In acest fel $\overline{\varphi}$ realizează un izomorfism între mulţimile ordonate $\overline{\mathbb{R}}$ şi $[-1, 1]$ astfel încît $-\infty$ şi $+\infty$ se raportează la R tot astfel cum punctele -1 şi 1 se raportează la intervalul deschis $(-1, 1)$.

3. In acest punct vom schiţa două din construcţiile clasice ale unui corp complet ordonat. Ambele construcţii presupun cunoscut corpul ordonat al numerelor raţionale $\mathbb{Q}$.

<u>Construcţia lui Cantor</u> (1845-1918)

<u>Definiţie</u>. Un şir $(x_n)_n$ din $\mathbb{Q}$ se numeşte <u>şir fundamental</u> dacă pentru orice $\varepsilon \in \mathbb{Q}$, $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ cu proprietatea

$$n, m \geq n_\varepsilon \Longrightarrow |x_n - x_m| < \varepsilon \quad .$$

Mulţimea şirurilor fundamentale din $\mathbb{Q}$ se va nota cu litera $\mathcal{S}$.

In mulţimea $\mathcal{S}$ se introduce relaţia $\sim$ definită astfel: $(x_n)_n \sim (y_n)_n$ dacă pentru orice $\varepsilon \in \mathbb{Q}$, $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ cu proprietatea

$$n \geq n_\varepsilon \Longrightarrow |x_n - y_n| < \varepsilon$$

Se verifică simplu că această relaţie este o relaţie de echivalenţă pe $\mathcal{S}$.

<u>Propoziţia A</u>. Dacă $(x_n)_n, (y_n)_n \in \mathcal{S}$ atunci $(x_n + y_n)_n \in \mathcal{S}$, $(x_n \cdot y_n)_n \in \mathcal{S}$ şi $\mathcal{S}$ înzestrat cu operaţiile

$$(x_n)_n + (y_n)_n := (x_n + y_n)_n$$

$$(x_n)_n \cdot (y_n)_n := (x_n \cdot y_n)_n$$

formează un inel comutativ în care elementul neutru în raport cu adunarea "+" este şirul constant egal cu zero iar elementul neutru în raport cu înmulţirea este şirul constant egal cu unu. In plus dacă $s,s', t,t' \in \mathcal{S}$ atunci

$$\begin{matrix} s \sim s' \\ t \sim t' \end{matrix} \Longrightarrow \begin{matrix} s+t \sim s'+t' \\ s \cdot t \sim s'+t' \end{matrix}$$

<u>Propoziţia B</u>. Dacă $(x_n)_n \not\sim 0$ atunci are loc una din următoarele afirmaţii:

a) există $\alpha \in Q$, $\alpha > 0$ şi $n_0 \in N$ cu proprietatea $x_n \geq \alpha$ pentru orice $n \geq n_0$

b) există $\alpha \in Q$, $\alpha > 0$ şi $n_0 \in N$ cu proprietatea $-x_n \geq \alpha$ pentru orice $n \geq n_0$.

In plus există $(y_n)_n$ în $\mathcal{S}$ cu proprietatea $(x_n)_n(y_n) \sim 1$.

<u>Propoziţia C</u>. Mulţimea cît $S = \mathcal{S}/_\sim$ înzestrată cu operaţiile

$$\widehat{(x_n)_n} + \widehat{(y_n)_n} := \widehat{(x_n + y_n)_n}$$

$$\widehat{(x_n)_n} \cdot \widehat{(y_n)_n} := \widehat{(x_n \cdot y_n)_n}$$

formează un corp comutativ unde prin $\widehat{(x_n)_n}$ am notat clasa de echivalenţă a şirului $(x_n)_n$ din $\mathcal{S}$).

Propoziția D. Relația $\leqslant$ pe S definită prin

$$(x_n)_n \leqslant (y_n) \Longleftrightarrow (x_n)_n \sim (y_n)_n$$

sau

există $\alpha \in Q$, $\alpha > 0$ și $n_0 \in \mathbb{N}$ cu proprietatea

$$n \geqslant n_0 \Longrightarrow x_n + \alpha < y_n$$

este o relație de ordine pe S în raport cu care S devine un corp complet ordonat.

Construcția lui Dedekind (1831-1916)

Definiție. Se numește tăietură în Q o submulțime T a lui Q cu proprietățile:

1) $T \neq \emptyset$, $T \neq Q$

2) T nu are un cel mai mic element

3) $a \in T$, $x > a \Longrightarrow x \in T$.

Se notează cu $\mathcal{T}$ mulțimea tăieturilor în Q. Dacă $a \in Q$ atunci mulțimea $\hat{a} := \{x \in Q \mid x > a\}$ este o tăietură numită tăietură rațională determinată de numărul rațional a. In fapt $\hat{a}$ este acea tăietură cu proprietatea că $\inf \hat{a} = a$. Se verifică simplu că aplicația $x \longrightarrow \hat{x}$ de la Q în mulțimea tăieturilor este injectivă.

Propoziția A'. Relația $\leqslant$ definită în $\mathcal{T}$ prin

$$T_1 \leqslant T_2 \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} T_1 \subset T_2$$

este o relație de ordine pe $\mathcal{T}$ cu proprietățile:

1) $T_1, T_2 \in \mathcal{T} \Longrightarrow T_1 \leqslant T_2$ sau $T_2 \leqslant T_1$.

2) Orice parte nevidă și majorată a lui $\mathcal{T}$ are un supremum.

3) $a \leqslant b \Longleftrightarrow \hat{a} \leqslant \hat{b}$ pentru orice $a, b \in Q$.

Propoziția B'. Pentru orice $T_1, T_2 \in \mathcal{T}$ mulțimea

$$T_1 + T_2 := \{x + y \mid x \in T_1,\ y \in T_2\}$$

este o tăietură în Q şi aplicaţia

$$(T_1, T_2) \longrightarrow T_1 + T_2$$

este o lege de compunere în raport cu care $\mathcal{T}$ formează un grup comutativ. In plus avem

$$T_1 \leq T_2 \Longrightarrow T_1 + T \leq T_2 + T$$

pentru orice T_1, T_2, $T \in \mathcal{T}$.

Elementul neutru în raport cu adunarea "+" este tăietura $\hat{0}$ iar pentru $T \in \mathcal{T}$ opusul lui T este tăietura

$$- T = \{x \in Q \mid x > - a \ (\forall) \ a \in T\}$$

Pentru orice tăietură $T \in \mathcal{T}$ are loc una din relaţiile $\hat{0} \leq T$ sau $T \leq \hat{0}$.

Propoziţia C'. Notăm cu $\mathcal{T}_+$ mulţimea tăieturilor pozitive (adică $T \geq \hat{0}$). Pentru orice T_1, $T_2 \in \mathcal{T}_+$ mulţimea

$$T_1 \circ T_2 := \{x \cdot y \mid x \in T_1, \ y \in T_2\}$$

este o tăietură şi aplicaţia

$$(T_1, T_2) \longrightarrow T_1 \circ T_2$$

satisface proprietăţile

$$(T_1 \circ T_2) \circ T_3 = T_1 \circ (T_2 \circ T_3)$$

$$T_1 \circ T_2 = T_2 \circ T_1$$

$$T_1 \circ (T_2 + T_3) = T_1 \circ T_2 + T_1 \circ T_3$$

$$T_1 \leq T_2 \Longrightarrow T_1 \circ T_3 \leq T_2 \circ T_3$$

pentru orice T_1, T_2, $T_3 \in \mathcal{T}_+$.

In plus elementul neutru în raport cu operaţia "$\circ$" este tăietura raţională $\hat{1}$. De asemenea pentru orice $T \in \mathcal{T}_+$, $T \neq \hat{0}$ există o tăietură $U \in \mathcal{T}_+$ cu proprietatea $U \circ T = \hat{1}$. In fapt vom avea

$$U = \{ x \in Q \mid x > \frac{1}{y} \quad (\forall)\ y \in T \} .$$

<u>Propoziţia D'</u>. Operaţia "$\cdot$" definită pe $\mathcal{T}$ prin

$$T_1 \cdot T_2 = \begin{cases} T_1 \circ T_2 & \text{dacă } T_1 ,\ T_2 \in \mathcal{T}_+ \\ -[(-T_1) \circ T_2] & \text{dacă } T_1 \notin \mathcal{T}_+ ,\ T_2 \in \mathcal{T}_+ \\ -[T_1 \circ (-T_2)] & \text{dacă } T_1 \in \mathcal{T}_+ ,\ T_2 \in \mathcal{T}_+ \\ (-T_1) \circ (-T_2) & \text{dacă } T_1 \in \mathcal{T}_+ ,\ T_2 \in \mathcal{T}_+ \end{cases}$$

satisface proprietăţile

$$(T_1 \cdot T_2) \cdot T_3 = T_1 \cdot (T_2 \cdot T_3)$$

$$T_1 \cdot T_2 = T_2 \cdot T_1$$

$$T_1 \cdot (T_2 + T_3) = T_1 \cdot T_2 + T_1 \cdot T_3$$

iar $\mathcal{T}$ înzestrat cu operaţiile "+" şi "$\cdot$" şi cu relaţia de ordine $\leq$ formează un corp complet ordonat.

<u>Exerciţii</u>. 1. Fie S un corp ordonat şi S_+ mulţimea

$$S_+ = \{ x \in S \mid x \geq 0 \} .$$

Să se arate că

a) $x, y \in S_+ \Longrightarrow x + y \in S_+$ şi $x \cdot y \in S_+$

b) $x \in S \Longrightarrow x \in S_+$ sau $-x \in S_+$

2. Fie S un corp comutativ şi P o submulţime a lui S care verifică proprietăţile

a') $x, y \in P \Longrightarrow x + y \in P$ şi $x \cdot y \in P$

b') $x \in S \Longrightarrow x \in P$ sau $-x \in P$.

Atunci există o relaţie de ordine pe S şi numai una în raport cu care S devine un corp ordonat iar $P = S_+$.

Indicaţie. Se pune $x \leq y \overset{def}{\iff} y - x \in P$.

3. Fie S un corp comutativ. Atunci S posedă o structură de corp ordonat dacă şi numai dacă -1 nu este o sumă de pătrate (adică nu există o familie finită $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ de elemente din S cu proprietatea $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = -1$).

Indicaţie. Dacă S este un corp ordonat atunci $x^2 \geq 0$ pentru orice x şi deci -1 care este strict negativ nu poate fi scris ca o sumă de pătrate. Reciproc presupunem că -1 nu poate fi scris ca o sumă de pătrate. Considerăm mulţimea P_o a elementelor din S de forma $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_p^2$ unde $(x_i)_{1 \leq i \leq p}$ este o familie finită de elemente din S şi $p \in \mathbb{N}^*$. Se verifică simplu că P_o satisface proprietăţile

a) $x, y \in P_o \Longrightarrow x + y \in P_o$ şi $x \cdot y \in P_o$

b) $x \in P_o$, $-x \in P_o \Longrightarrow x = 0$

Notăm cu P o submulţime maximală a lui S, $P \supset P_o$ cu proprietăţile

a') $x, y \in P \Longrightarrow x + y \in P$ şi $x \cdot y \in P$

b') $x \in P$ şi $-x \in P \Longrightarrow x = 0$

O astfel de mulţime P există în virtutea lemei lui Zorn. Se verifică simplu că P posedă în plus şi proprietatea

$$x \in P \text{ , } y \in P \text{ , } y \neq 0 \Longrightarrow x/y \in P \text{ .}$$

Fie acum $\xi \in S$ astfel încît $-\xi \notin P$. Vom arăta că $\xi \in P$. Intr-adevăr se consideră mulţimea

$$P_1 = \{x + \xi y \mid x, y \in P\}$$

Se verifică direct că P_1 satisface proprietăţile:

a'') $x, y \in P_1 \Longrightarrow x + y \in P_1$, $x \cdot y \in P_1$

b'') $x \in P_1$, $-x \in P_1 \Longrightarrow x = 0$

şi că $P \subset P_1$. Din maximalitatea lui P deducem $P = P_1$ şi deci $\xi \in P$.

Aşadar P este o submulţime a lui S care verifică proprietăţile a'), b') din exerciţiul 2) şi deci există o relaţie de ordine pe S în raport cu care S este un corp ordonat şi $S_+ = P$.

4. Se consideră $p \in \mathbb{N}^*$ prim şi Z_p corpul claselor de resturi modulo p. Să se arate că nu există o relaţie de ordine pe Z_p în raport cu care Z_p să devină un corp ordonat.

<u>Indicaţie</u>. Afirmaţia rezultă din faptul în Z_p are loc relaţia

$$\underbrace{1 + 1 + 1 \dots + 1}_{p-1} = 0$$

5. Se consideră corpul C al numerelor complexe. Să se arate că nu există o relaţie de ordine pe C astfel încît C să devină un corp ordonat.

<u>Indicaţie</u>. Afirmaţia rezultă din faptul că în C are loc relaţia $-1 = i^2$.

6. Fie S un corp ordonat care este o extensie algebrică a lui Q (adică pentru orice element x din S există un polinom p cu coeficienţii în Q astfel încît $p(x) = o$). Atunci S este arhimedian.

<u>Indicaţie</u>. Dacă S nu ar fi arhemedian ar exista $\xi \in S$ cu proprietatea $\xi > n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Se arată inductiv că pentru orice sistem $(\alpha_0, \alpha_1, \dots \alpha_p)$ de numere întregi avem

$$\alpha_0 + \alpha_1 \xi + \dots + \alpha_p \xi^p > 1$$

şi deci nu poate exista un polinom p cu coeficienţi întregi (şi deci raţionali) astfel încît $p(\xi) = 0$.

II. FUNCTIA EXPONENTIALA

1. Funcţia exponenţială şi funcţia logaritmică

2. Valoare absolută

1. Funcţia putere, funcţia exponenţială, funcţia logaritmică

In această secţiune se arată că pentru orice număr real $x > 1$ (resp. $x < 1$) există şi este unică o funcţie $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ care satisface proprietăţile

a) este crescătoare (resp. descrescătoare)

b) $\varphi(a+b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$

c) $\varphi(1) = x$

O astfel de funcţie este funcţie bijectivă de la $\mathbb{R}$ la $\mathbb{R}_+^*$ şi se numeşte funcţie exponenţială de bază x.

Definiţie. Pentru orice număr real x şi orice număr natural n se numeşte puterea de exponent n a lui x numărul real definit inductiv prin:

$$x^0 = 1$$

$$x^{n+1} = x^n \cdot x$$

Se verifică inductiv următoarele proprietăţi. Dacă $n \geqslant 1$ avem

$$x = 0 \Longleftrightarrow x^n = 0$$

$$x = 1 \Longrightarrow x^n = 1$$

$$(x \cdot y)^n = x^n \cdot y^n$$

$$x \neq 0 \Longrightarrow \left(\frac{1}{x}\right)^n = \frac{1}{x^n}$$

$$0 < x < y \Longrightarrow 0 < x^n < y^n$$

Dacă $n \geqslant 2$ avem

$$0 < x < 1 \Longrightarrow x^n < x \quad ,$$

$$x > 1 \Longrightarrow x^n > x \quad .$$

Pentru orice $n, m \in \mathbb{N}$ avem

$$x^{n+m} = x^n \cdot x^m$$

$$x^{nm} = (x^n)^m$$

Propoziţia 1 (Bernoulli). Pentru orice $x > -1$ şi orice $n \in \mathbb{N}$ avem

$$(1+x)^n \geq 1 + n\,x \;.$$

Dacă în plus $n \geq 2$ şi $x \neq 0$ atunci

$$(1+x)^n > 1 + n\,x \;.$$

Demonstraţie. Dacă $n = 0$ propoziţia rezultă direct. Presupunem că afirmaţia este adevărată pentru $n \geq 1$ adică

$$(1+x)^n \geq 1 + n\,x \qquad (\forall)\ x > -1$$

Intrucît $x+1 > 0$ deducem

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n \cdot (1+x) \geq (1+nx)(1+x) =$$

$$= 1 + (n+1)x + n\,x^2$$

şi deci

$$(1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x \qquad (\forall)\ x > -1$$

$$(1+x)^{n+1} > 1 + (n+1)x \qquad (\forall)\ x > -1,\ x \neq 0 \;.$$

Propoziţia 2. Fie $x \in \mathbb{R}$, $0 < x < 1$. Atunci pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ există $a \in \mathbb{R}$, $0 < a < 1$ astfel încît $x < a^n < 1$.

Demonstraţie. Fie $u \in \mathbb{R}$, $0 < u < \frac{1-x}{n}$. Evident $0 < u < 1$ şi din propoziţia precedentă avem

$$(1-u)^n \geq 1 - n\,u > 1 - n \cdot \frac{1-x}{n} = x$$

Punînd $a = 1-u$ avem $0 < a < 1$ şi

$$x < a^n < 1 \;.$$

Propoziţia 3. (Existenţa rădăcinii aritmetice). Pentru orice număr real pozitiv x şi orice număr natural $n \geq 1$ există un număr pozitiv a unic determinat cu proprietatea $a^n = x$. Acest număr se notează cu $\sqrt[n]{x}$ sau cu $x^{\frac{1}{n}}$ şi se numeşte rădăcina aritmetică de ordin şi a lui x.

<u>Demonstrație.</u> Dacă $x = 0$ atunci punînd $a = 0$ avem $a^n = 0$. Unicitatea rădăcinii aritmetice a lui a rezultă observînd că

$$0 \leqslant a < b \Longrightarrow a^n < b^n$$

și deci dacă $a,b \geqslant 0$ și $a^n = b^n$ pentru un $n \geqslant 1$ atunci $a = b$.

Presupunem deci $x > 0$ și considerăm mulțimea

$$A := \{ y \in \mathbb{R} \mid y > 0 , y^n \leqslant x \} .$$

Această mulțime este nevidă și majorată. Punînd

$$b := \inf(x, 1)$$

avem

$$0^n \leqslant b^n \leqslant x$$

și deci $b \in A$. Pe de altă parte punînd

$$C := \max(x, 1)$$

avem pentru orice $y \in A$,

$$y^n \leqslant x \leqslant C \leqslant C^n$$

de unde deducem $y \leqslant C$ adică C este un majorant pentru A.

Intrucît A este nevidă și majorată există

$$a := \sup A .$$

Vom arăta că $a^n = x$. Intr-adevăr dacă $a^n < x$ atunci $0 < \frac{a^n}{x} < 1$ și deci din propoziția 2 deducem că există $b \in \mathbb{R}$, $0 < b < 1$ cu proprietatea $\frac{a^n}{x} < b^n < 1$. De aici rezultă $(\frac{a}{b})^n < x$ adică $\frac{a}{b} \in A$ și deci $\frac{a}{b} \leqslant a$ ceea ce evident contrazice relația $b < 1$. Dacă $a^n > x$ atunci avem $0 < \frac{x}{a^n} < 1$ și deci din propoziția 2 deducem că există $b \in \mathbb{R}$, $a < b < 1$ astfel încît $\frac{x}{a^n} < b^n < 1$ adică $x < (ba)^n$. Din $ba < a$ rezultă că există $y \in A$ cu $ba < y$ și deci $x^n < (ba)^n < y^n$ ceea ce contrazice relația $y^n \leqslant x$.

Se verifică direct următoarele proprietăți:

Pentru $x,y \in \mathbb{R}_+^*$ şi $q,q' \in \mathbb{N}^*$ avem

$$(x\,y)^{\frac{1}{q}} = x^{\frac{1}{q}} \cdot y^{\frac{1}{q}} \quad ,$$

$$(x^{\frac{1}{q}})^{\frac{1}{q'}} = x^{\frac{1}{qq'}} \quad ,$$

$$(x^{\frac{1}{q}})^{q'} = (x^{q'})^{\frac{1}{q}} \quad ,$$

$$(x^{q})^{\frac{1}{qq'}} = x^{\frac{1}{q'}} \quad ,$$

$$\frac{1}{x^q} = (\frac{1}{x})^q$$

De aici rezultă că dacă $p,p \in \mathbb{N}$ şi $q,q' \in \mathbb{N}^*$ atunci pentru orice $x > 0$ avem

$$pq' = p'q \Longrightarrow (x^p)^{\frac{1}{q}} = (x^{p'})^{\frac{1}{q'}}$$

<u>Definiţie</u>. Pentru orice $x \in \mathbb{R}_+^*$ şi orice număr raţional pozitiv, $r = (p/_q)$, $p \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{N}^*$, numărul

$$(x^p)^{1/q} = (x^{1/q})^p$$

nu depinde de fracţia $p/_q$ care reprezintă pe r, se numeşte <u>puterea de exponent r a lui x</u> şi se notează cu x^r. Dacă $r \in \mathbb{Q}$, $r < 0$ se pune

$$x^r := \frac{1}{x^{-r}} = (\frac{1}{x})^{-r}$$

<u>Propoziţia 4</u>. Pentru orice $x \in \mathbb{R}_+^*$ şi orice $r', r'' \in \mathbb{Q}$ avem

$$x^{r' + r''} = x^{r'} \cdot x^{r''}$$

$$x^{r' \cdot r''} = (x^{r'})^{r''}$$

<u>Demonstraţie</u>. Pentru $r' = (p'/_{q'})$, $r'' = (p''/_{q''})$ în $\mathbb{Q}_+$ avem

$$x^{r'+r''} = x^{\frac{p'q''+p''q'}{q'q''}} = (x^{p'q''+p''q'})^{\frac{1}{q'q''}} = (x^{p'q''} \cdot x^{p''q'})^{\frac{1}{q'q''}} =$$

$$= (x^{p'q''})^{\frac{1}{q'q''}} \cdot (x^{p''q'})^{\frac{1}{q'q''}} = (x^{p'})^{\frac{1}{q'}} \cdot (x^{p''})^{\frac{1}{q''}} = x^{r'} \cdot x^{r''}$$

$$x^{r'r''} = x^{\frac{p'p''}{q'q''}} = (x^{p'p''})^{\frac{1}{q'q''}} = ((x^{p'})^{\frac{1}{q'q''}})^{p''} =$$

$$= (((x^{p'})^{\frac{1}{q'}})^{\frac{1}{q''}})^{p''} = ((x^{r'})^{\frac{1}{q''}})^{p''} = (x^{r'})^{r''}$$

Dacă $r', r'' < 0$ atunci avem

$$x^{r'+r''} = \frac{1}{x^{-r'-r''}} = \frac{1}{x^{-r'} \cdot x^{-r''}} = x^{r'} \cdot x^{r''}$$

$$x^{r'r''} = x^{(-r')(-r'')} = (x^{-r'})^{(-r'')} = (\frac{1}{x^{r'}})^{(-r'')} = (x^{r'})^{r''}$$

Dacă $r' < 0$ şi $r'' > 0$ atunci

Pentru $r' + r'' > 0$ avem

$$x^{-r'} \cdot x^{r'+r''} = x^{(-r') + (r'+r'')} = x^{r''}$$

iar din $x^{-r'} = \frac{1}{x^{r'}}$ deducem

$$x^{r'+r''} = x^{r'} \cdot x^{r''} \quad .$$

Pentru $r' + r'' < 0$ avem $-r' - r'' > 0$, $-r' > 0$, $-r'' < 0$ şi din consideraţiile precedente deducem

$$x^{r'+r''} = \frac{1}{x^{-(r'+r'')}} = \frac{1}{x^{-r'} \cdot x^{-r''}} = x^{r'} \cdot x^{r''}$$

Pe de altă parte avem

$$(x^{r'})^{r''} = (\frac{1}{x^{-r'}})^{r''} = ((\frac{1}{x})^{(-r')})^{r''} = (\frac{1}{x})^{(-r')r''} =$$

$$= (\frac{1}{x})^{-(r'r'')} = x^{r'r''} \quad .$$

Propoziţia 5. Pentru orice $x,y \in \mathbb{R}_+^*$ şi orice $r \in Q$ avem

$$(xy)^r = x^r \cdot y^r .$$

Demonstraţie. Dacă $r \geq 0$, $r = (p/q)$ avem

$$(xy)^{p/q} = \left[(xy)^p\right]^{1/q} = (x^p y^p)^{1/q} = (x^p)^{1/q} \cdot (y^p)^{1/q} =$$
$$= x^r \cdot y^r .$$

Dacă $r < 0$ atunci

$$(xy)^r = \frac{1}{(xy)^{-r}} = \frac{1}{x^{-r} \cdot y^{-r}} = \frac{1}{x^{-r}} \cdot \frac{1}{y^{-r}} = x^r \cdot y^r .$$

Propoziţia 6. Pentru $x > 1$ şi $a \in \mathbb{R}$ avem

$$\sup\left\{x^r \mid r \in Q , r < a\right\} = \inf\left\{x^r \mid r \in Q , r > a\right\} .$$

Pentru $x < 1$ şi $a \in \mathbb{R}$ avem

$$\inf\left\{x^r \mid r \in Q , r < a\right\} = \sup\left\{x^r \mid r \in Q , r > a\right\} .$$

Demonstraţie. Fie $x > 1$ şi

$$\alpha := \sup\left\{x^r \mid r \in Q , r < a\right\}, \quad \beta := \inf\left\{x^r \mid r \in Q , r > a\right\}$$

Avem evident $0 < \alpha \leq \beta$. Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, există $r' \in Q$, $r' < a$, $r'' \in Q$, $r'' > a$ astfel încît $r'' - r' < \frac{1}{n}$. De aici rezultă că

$$\beta/\alpha \leq \frac{x^{r''}}{x^{r'}} = x^{r''-r'} < x^{\frac{1}{n}}$$

şi deci

$$\beta/\alpha \leq \inf\left\{x^{\frac{1}{n}} \mid n \in \mathbb{N}^*\right\} = 1$$

ceea ce arată că $\alpha = \beta$.

Cazul $x < 1$ se obţine din primul înlocuind x cu $\frac{1}{x}$.

<u>Propoziţia 6</u>. Pentru orice $x \in \mathbb{R}_+^*$, $x > 1$ (resp. $x < 1$) există şi este unică o funcţie

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$$

care posedă următoarele proprietăţi

a) f este crescătoare (resp. descrescătoare)

b) $f(a+b) = f(a) \cdot f(b)$ $\quad (\forall)\ a,b \in \mathbb{R}$

c) $f(1) = x$.

Dacă $a \in \mathbb{Q}$ avem $f(a) = x^a$ şi în general pentru $a \in \mathbb{R}$ avem

$$f(a) = \sup\{x^r \mid r \in \mathbb{Q} , r < a\} = \\ = \inf\{x^r \mid r \in \mathbb{Q} , r > a\} \quad , \text{ dacă } x > 1$$

şi

$$f(a) = \inf\{x^r \mid r \in \mathbb{Q} , r < a\} = \\ = \sup\{x^r \mid r \in \mathbb{Q} , r > a\} \quad , \text{ dacă } x < 1 .$$

<u>Demonstraţie</u>. Fie $x > 1$. Se consideră funcţia

$$f_o : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$$

definită prin

$$f_o(a) = \sup\{x^r \mid r \in \mathbb{Q} , r < a\} = \\ = \inf\{x^r \mid r \in \mathbb{Q} , r > a\}$$

Din construcţie rezultă că f_o este strict crescătoare. Intr-adevăr dacă $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$ alegem $r',r'' \in \mathbb{Q}$, $a < r' < r'' < b$. Avem

$$f_o(a) \leq x^{r'} < x^{r''} \leq \varphi_o(b) .$$

Fie acum $a,b \in \mathbb{R}$. Vom arăta că

$$f_o(a+b) = f_o(a) \cdot f_o(b) .$$

Dacă $r \in \mathbb{Q}$, $r < a+b$ atunci există $r',r'' \in \mathbb{Q}$, astfel încît $r' < a$, $r'' < b$ şi $r = r' + r''$. Intr-adevăr se alege $r'' \in \mathbb{Q}$ cu $r-a < r'' < b$ şi se pune $r' = r'' - r''$.

Prin urmare vom avea

$$x^r = x^{r'} \cdot x^{r''} \leq f_o(a) \cdot f_o(b)$$

şi deci, cum $r \in Q$ este arbitrar $< a + b$, deducem

$$f_o(a+b) \leq f_o(a) \cdot f_o(b) .$$

Reciproc fie $r \in Q$, $r' < a$ şi $r'' \in Q$, $r'' < b$. Avem $r' + r'' < a + b$ şi deci

$$x^{r'} \cdot x^{r''} = x^{r'+r''} \leq f_o(a+b) .$$

Trecînd la supremum după $r' \in Q$, $r' < a$

$$f_o(a) \cdot x^{r''} \leq f_o(a+b) .$$

Trecînd la supremum după $r'' \in Q$, $r'' < b$ deducem

$$f_o(a) \cdot f_o(b) \leq f_o(a+b) .$$

Să remarcăm acum că dacă $a \in Q$ atunci $f_o(a) = x^a$. Intr-adevăr avem

$$f_o(a) = \sup \left\{ x^r \mid r \in Q , r < a \right\} \leq x^a$$

şi

$$f_o(a) = \inf \left\{ x^r \mid r \in Q , r > a \right\} \geq x^a$$

şi deci $f_o(a) = x^a$.

Să arătăm acum că funcţia f_o definită mai sus este surjectivă. Fie $c \in R_+^*$. Considerăm mulţimile

$$A := \left\{ a \in R \mid f_o(a) \leq c \right\}$$

$$B := \left\{ a \in R \mid f_o(a) > c \right\}$$

Prin ipoteză avem $A \cup B = R$,

$$a \in A, \quad a' < a \Longrightarrow a' \in A$$

$$b \in B, \quad b' > b \Longrightarrow b' \in B$$

$$a \in A, \quad b \in B \Longrightarrow a < b$$

Pe de altă parte întrucît $x^{-n} \in A$ pentru $n \in N$ suficient de mare şi $x^{n} \in B$ pentru $n \in N$ suficient de mare rezultă că A şi B sînt nevide. Evident A este majorat de orice element din B şi B este minorat de orice element din A. De aici rezultă că

$$\sup A = \inf B = a_o$$

Intrucît

$$r' \in Q \ , \ r' < a_o \Longrightarrow r' \in A$$

$$r'' \in Q \ , \ r'' > a_o \Longrightarrow r'' \in B$$

avem

$$f_o(a_o) = \sup\left\{x^{r'} / \ r' \in Q \ , \ r' < a_o\right\} \leqslant c$$

$$f_o(a_o) = \inf\left\{x^{r''} / \ r'' \in Q \ , \ r'' > a_o\right\} \geqslant c$$

şi deci $f_o(a_o) = c$.

Cazul $x < 1$ se obţine înlocuind x cu $\frac{1}{x}$ şi apoi funcţia f_o obţinută cu $\frac{1}{f_o}$.

Să arătăm acum unicitatea unei funcţii f ca în enunţ. Vom considera cazul $x > 1$.

Din relaţia b) deducem

$$f(na) = (f(a))^n \qquad (\forall) \ a \in R$$

şi deci

$$\left(f\left(\frac{1}{n} a\right)\right)^n = f(a)$$

ceea ce arată că

$$f\left(\frac{1}{n} a\right) = (f(a))^{\frac{1}{n}} .$$

Aşadar dacă $r \in Q_+$, $r = (p/q)$ atunci

$$f(p/q) = f(p/q \cdot 1) = (f(1/q \cdot 1))^p = ((f(1))^{1/q})^p = x^{p/q} .$$

Pe de altă parte din $f(o) > 0$ şi din

$$f(o) = f(0+0) = (f(o))^2$$

rezultă că $f(o) = 1$. Intrucît

$$1 = f(o) = f(a-a) = f(a) \cdot f(-a)$$

deducem că pentru orice $a \in \mathbb{R}$ avem

$$f(-a) = \frac{1}{f(a)}$$

Aşadar dacă $a \in Q$ avem

$$f(a) = x^a \ .$$

De aici şi din faptul că f este crescătoare deducem că pentru orice $a \in R$ avem

$$f_o(a) = \sup\{x^r \ / \ r \in Q,\ r < a\} = \sup\{f(r) \ / \ r \in Q,\ r < a\} \leqslant f(a)$$

$$f_o(a) = \inf\{x^r \ / \ r \in Q,\ r > a\} = \inf\{f(r) \ / \ r \in Q,\ r > a\} \geqslant f(a)$$

şi deci $f(a) = f_o(a)$ pentru orice $a \in \mathbb{R}$.

Cazul $x < 1$ se obţine observînd că dacă f este o funcţie ca în enunţ asociată lui $x < 1$ atunci $\frac{1}{f}$ este o funcţie ca enunţ asociată lui $1/x > 1$.

Definiţie. Dacă $x \in \mathbb{R}_+^*$ atunci unica funcţie f cu proprietăţile din propoziţia precedentă se numeşte funcţia exponenţială de bază x şi se notează cu $\exp_x$. In loc de $\exp_x(a)$ se pune adesea x^a.

Dacă $a \in R$ funcţia

$$x \longrightarrow x^a$$

definită pe $\mathbb{R}_+^*$ cu valori în $\mathbb{R}$ cu valoarea 1 în punctul $x = 1$ se n numeşte funcţie putere de exponent a.

Propoziţia 7. Pentru orice $x,y \in \mathbb{R}_+^*$ şi orice $a \in \mathbb{R}$ avem

$$(xy)^a = x^a \cdot y^a \ .$$

<u>Demonstrație</u>. Dacă $y = \frac{1}{x}$ atunci avem

$$(\tfrac{1}{x})^a = x^{-a}$$

și deci în acest caz

$$x^a \cdot y^a = x^a \cdot x^{-a} = x^0 = 1 = (1^a) = (xy)^a$$

Dacă $x > 1$, $y > 1$ (resp. $x < 1$ și $y < 1$) atunci funcția

$$a \xrightarrow{f} x^a \cdot y^a$$

este crescătoare (resp. descrescătoare), verifică relația

$$f(a+b) = f(a) \cdot f(a)$$

și în plus $f(1) = xy$. Deci această funcție coincide de funcție exponențială de bază xy adică

$$f(a) = x^a y^a = (xy)^a \quad .$$

Dacă $x > 1$, $y < 1$ și $xy < 1$ atunci funcția

$$a \xrightarrow{f} \frac{(xy)^a}{x^a} \quad .$$

este crescătoare, satisface proprietatea

$$f(a+b) = f(a) \cdot f(b)$$

și $f(1) = y$. Prin urmare $f(a) = y^a$ adică

$$\frac{(xy)^a}{x^a} = y^a \quad .$$

Dacă $x > 1$, $y < 1$ și $xy > 1$ atunci funcțiile

$$a \xrightarrow{f} \frac{(xy)^a}{y^a}$$

este crescătoare, satisface relația

$$f(a+b) = f(a) \cdot f(b)$$

și $f(1) = x$. De aici rezultă că

$$\frac{(xy)^a}{y^a} = x^a \quad .$$

<u>Definiție</u>. Pentru $x \in \mathbb{R}_+^*$, $x \neq 1$ inversa funcției exponențiale de bază x se numește funcția logaritmică de bază x și se notează cu

$\log_x$

Din definiție rezultă deci că pentru $x > 1$ (resp. $x < 1$) $\log_x$ este unica funcție $g : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ care satisface următoarele proprietăți:

1) g este crescătoare (resp. descrescătoare)

2) $g(ab) = g(a) + g(b)$

3) $g(x) = 1$.

In plus $\log_x$ este o bijecție de la R_+^* la $\mathbb{R}$.

<u>Exerciții</u>.

1. Să se arate că pentru orice $x,y \in \mathbb{R}_+^*$, astfel încît $x \neq 1$, $y \neq 1$, $xy \neq 1$ și pentru orice $a \in \mathbb{R}$ avem

$$x^a \cdot y^a = (x \cdot y)^a$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)^a = \frac{1}{x^a}$$

2. Să se arate că pentru orice $x,y \in \mathbb{R}_+^*$, $x \neq 1$, $y \neq 1$ și pentru orice $a \in \mathbb{R}$ avem

$$\log_x a = (\log_y a) \cdot (\log_x y)$$

și în particular

$$\log_x y = \frac{1}{\log_y x} \quad .$$

3. Dacă $x > 1$ atunci pentru orice $\alpha > 0$ există $a_\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ astfel încît

$$a \in \mathbb{R},\ a \geq a_\alpha \Longrightarrow x^a > a^\alpha$$

Dacă $x > 1$ atunci pentru orice $\alpha > 0$ există $a_\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ astfel încît

$$a \geqslant a_{\alpha} \Longrightarrow \log_x a < a^{\alpha}$$

4. Să se arate că pentru orice $0 < \alpha < 1$ (resp. $1 < \alpha$) orice $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ avem

$$(x+y)^{\alpha} < x^{\alpha} + y^{\alpha} \quad (\text{resp. } (x+y)^{\alpha} > x^{\alpha} + y^{\alpha})$$

<u>Indicație</u>. Relația $(x+y)^{\alpha} < x^{\alpha} + y^{\alpha}$ este echivalentă cu relația $1 < a^{\alpha} + b^{\alpha}$ unde $a, b \in \mathbb{R}_+^*$, $a + b = 1$. Din $0 < a < 1$, $0 < b < 1$, rezultă $a^{\alpha} + b^{\alpha} > a + b = 1$.

5. Fie $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ o funcție crescătoare sau descrescătoare astfel încît

$$\varphi(a+b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$$

pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$ și $\varphi(1) = 1$. Să se arate că φ este constantă egală cu 1.

6. Fie $x, y \in \mathbb{R}_+^*$, $x \neq 1$, $y \neq 1$. Atunci pentru orice $a \in \mathbb{R}$ are loc relațiile:

$$\log_x(y^a) = a \log_x y$$

$$y^a = x^{a \log_x y}$$

2. Valoare absolută.

Definiţie. Fie S un corp comutativ. O funcţie $v : S \longrightarrow R_+$ se numeşte valoare absolută dacă are următoarele proprietăţi:

1) $v(a) = 0 \Longleftrightarrow a = 0$

2) $v(a+b) \leqslant v(a) + v(b) \quad (\forall)\ a,b \in S$

3) $v(a\cdot b) = v(a) \cdot v(b) \quad (\forall)\ a,b \in S$

Dacă în locul proprietăţii 2) este verificată proprietatea mai tare

(2') $v(a+b) \leqslant \max (v(a), v(b)) \quad (\forall)\ a,b \in S$

atunci valoarea absolută se numeşte nearhimediană. O valoare absolută pe S care nu este nearhimediană se numeşte arhimediană.

Intrucît $v(1) \neq 0$ şi $v(1) = v(1\cdot 1) = (v(1))^2$ rezultă $v(1) = 1$.

Vom examina în cele ce urmează valorile absolute ce se pot construi pe corpul Q al numerelor raţionale.

Propoziţia 8. Fie S un corp comutativ şi v o valoare absolută pe S. Atunci următoarele afirmaţii sînt echivalente:

a) v este nearhimediană

b) Sirul $(v(n\cdot 1))_n$ este mărginit

c) $v(n\cdot 1) \leqslant 1$ pentru orice $n \in N$.

Demonstraţie.

a) $\Longrightarrow$ c) Vom arăta că din a) rezultă

$$v(n \cdot 1) \leqslant v(1) = 1 \quad (\forall)\ n \in N^*$$

Afirmaţia este evidentă pentru n=1. Presupunem că $v(n \cdot 1) \leqslant 1$. Din

$$v((n + 1) \cdot 1) = v(n \cdot 1 + 1) \leqslant \max (v(n \cdot 1), v(1))$$

deducem, utilizînd ipoteza de inducţie

$$v(n + 1) \cdot 1) \leqslant 1 \ .$$

c) $\Longrightarrow$ b) este trivială.

b) $\Longrightarrow$ c) Dacă ar exista $n \in \mathbb{N}$ cu $v(n \cdot 1) = \alpha > 1$ atunci vom avea $v(n^p \cdot 1) = v((n \cdot 1)^p) = \alpha^p$ şi deci şirul $(v(n \cdot 1))_n$ nu ar fi mărginit.

c) $\Longrightarrow$ a. Fie $a,b \in S$. Avem pentru orice $n \in N$

$$(v(a+b))^n = v((a+b)^n) = v(a^n + C_n^1 a^{n-1}b + \ldots + C_n^p a^{n-p} b^p + \ldots + b^n) \leqslant$$

$$\leqslant v(a^n) + v(C_n^1 a^{n-1} b) + \ldots + v(C_n^p a^{n-p} b^p) + \ldots + v(b^n) =$$

$$= (v(a))^n + v(C_n^1 \cdot 1) v(a^{n-1}) \cdot v(b) + \ldots + v(C_n^p \cdot 1) \cdot v(a^{n-p}) \cdot v(b^p) + \ldots + v(b^n) \leqslant$$

$$\leqslant (v(a))^n + (v(a))^{n-1} v(b) + \ldots + (v(a))^{n-p} (v(b))^p + \ldots + (v(b))^n$$

$$\leqslant (n+1) \cdot (\max(v(a), v(b)))^n$$

şi deci

$$v(a+b) \leqslant \sqrt[n]{n+1} \cdot \max(v(a), v(b)) \quad (\forall)\ n \in \mathbb{N} .$$

De aici rezultă

$$v(a+b) \leqslant \max(v(a), v(b)) .$$

<u>Definiţie</u>. Fie $r \in Q_+$, $r = (m/n)$, $m \in \mathbb{N}^*$ $n \in \mathbb{N}^*$. Dacă p este un număr prim vom nota cu $\alpha_p(r)$ numărul $\alpha - \beta$ unde α (resp. β) este exponentul la care figurează p în descompunerea lui m (resp. n) în factori primi. Evident α_p nu depinde de fracţia m/n care reprezintă pe r.

<u>Propoziţia 9</u>. Pentru orice număr prim p şi orice număr real a, $0 < a < 1$ funcţia

$$v_{p,a} : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

definită prin

$$v_{p,a}(x) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } x = 0 \\ a^{\alpha_p(|x|)} & \text{dacă } x \neq 0 \end{cases}$$

este o valoare absolută nearhimediană pe Q numită <u>valoarea absolută p - adică</u>.

<u>Demonstrație</u>. Evident avem

$$v_{p,a}(x) = 0 \iff x = 0$$

$$v_{p,a}(x \cdot y) = v_{p,a}(x) \cdot v_{p,a}(y)$$

Dacă $x = (m/n)$, $y = (m'/n')$ atunci

$$\frac{m}{n} = p^{\alpha_p(|x|)} \cdot \frac{m_1}{n_1} , \quad \frac{m'}{n'} = p^{\alpha_p(|y|)} \cdot \frac{m_1'}{n_1'}$$

unde m_1, n_1, m_1', n_1' nu sînt divizibile cu p. De aici rezultă, presupunînd că $\alpha_p(|x|) \leqslant \alpha_p(|y|)$,

$$\frac{m}{n} + \frac{m'}{n'} = p^{\alpha_p(|x|)} \left(\frac{m_1}{n_1} + p^{\alpha_p(|y|) - \alpha_p(|x|)} \frac{m_1'}{n_1'}\right) .$$

Așadar

$$\alpha_p(|x + y|) = \alpha_p(|x|) \quad \text{dacă} \quad \alpha_p(|x|) < \alpha_p(|y|)$$

$$\alpha_p(|x + y|) \geqslant \alpha_p(x) \quad \text{dacă} \quad \alpha_p(|x|) = \alpha_p(|y|)$$

$$\text{și } x+x' \neq 0$$

și deci

$$v_{p,a}(x+y) \geqslant \max(v_{p,a}(x) , v_{p,a}(y)).$$

<u>Propoziția 10</u>. Pentru orice valoare absolută nearhimediană v pe Q astfel încît $v/_{Q^*}$ nu este constantă există un număr prim p și $a \in \mathbb{R}$, $0 < a < 1$ astfel încît

$$v = v_{p,a}$$

<u>Demonstrație</u>. Intrucît v este nearhimediană rezultă că $v(n) \leqslant 1$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Pe de altă parte dacă n şi m $\in N$, n,m ≥ 2 sînt prime între ele există $\alpha, \beta \in Z^*$ astfel încît

$$1 = \alpha n + \beta m$$

şi deci

$$1 = v(1) = v(\alpha n + \beta m) \leq \max(v(n),\ v(m))$$

ceea ce implică

$$v(n) \geq 1 \quad \text{sau} \quad v(m) \geq 1$$

şi deci

$$v(n) = 1 \quad \text{sau} \quad v(m) = 1 \ .$$

De aici rezultă că pentru orice două numere prime distincte p,q avem

$$\max(\gamma(p)\ ,\ \gamma(q)) = 1$$

Pe de altă parte întrucît $v/_{Q^*}$ nu este constantă rezultă că există un număr prim p cu proprietatea $v(p) < 1$. Din observaţia precedentă există un singur număr prim cu această proprietate. De aici rezultă

$$v(n) = a^{\alpha_p(n)} \qquad (\forall)\ n \in N^*$$

unde $a = \gamma(p)$. Intrucît pentru orice $x \in Q^*$ avem

$$v(1/x) = 1/v(x) \quad , \quad v(x) = v(|x|)$$

rezultă

$$v(x) = a^{\alpha_p(|x|)} = v_{p,a}(x) \qquad (\forall)\ x \in Q \ .$$

<u>Propoziţia 11</u>. Pentru orice $\alpha \in R$, $0 < \alpha \leq 1$ funcţia

$$x \longrightarrow |x|^{\alpha}$$

este o valoare absolută arhimediană pe R.

<u>Demonstraţie</u>. Dacă $\alpha = 1$ afirmaţia rezultă din Propoziţia I.12 Fie deci $0 < \alpha < 1$. Avem

$$|x|^{\alpha} = 0 \iff |x| = 0 \iff x = 0$$

$$|x \cdot y|^{\alpha} = (|x|\ |y|)^{\alpha} = |x|^{\alpha}|y|^{\alpha} .$$

Pe de altă parte dacă $a > 0$, $b > 0$ avem

$$\left(\frac{a}{a+b}\right)^{\alpha} + \left(\frac{b}{a+b}\right)^{\alpha} \geqslant \frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b} = 1$$

adică

$$(a+b)^{\alpha} \leqslant a^{\alpha} + b^{\alpha}$$

şi deci

$$|x+y|^{\alpha} \leqslant (|x| + |y|)^{\alpha} \leqslant |x|^{\alpha} + |y|^{\alpha} .$$

<u>Propoziţia 12</u>. Fie v o valuaţie arhimediană pe $\mathbb{Q}$. Atunci există $0 < \alpha \leqslant 1$ astfel încît

$$v(x) = |x|^{\alpha} .$$

<u>Demonstraţie</u>. Intrucît v este arhimediană rezultă că există $a \in \mathbb{N}^*$, $a \geqslant 2$ astfel încît $v(a) > 1$. Fie acum $b \in \mathbb{N}^*$, $b \geqslant 2$, şi $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geqslant 1$. Considerăm scrierea lui a^n în baza b. Avem

$$a^n = C_o + C_1 b + \dots + C_{p_n} b^{p_n} , \quad C_{p_n} \neq 0 .$$

unde $C_i \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant C_i < b$. De aici şi din faptul că v este valoare absolută deducem

$$v(C_i) \leqslant C_i < b$$

şi deci

$$(v(a))^n = v(a^n) \leqslant b(1 + v(b) + v(b^2) + \dots + v(b^{p_n})) \leqslant$$

$$\leqslant b(1 + p_n) \sup (1, v(b))^{p_n} .$$

Aşadar

$$v(a) \leqslant (b(1 + p_n))^{\frac{1}{n}} (\sup (1, v(b))^{\frac{p_n}{n}} .$$

Intrucît $b^{p_n} \leqslant a^n$, $a^n \leqslant b^{p_n+1}$ deducem

$$\frac{p_n}{n} \leqslant \log_b a \qquad \frac{p_n + 1}{n} \geqslant \log_b a$$

şi deci

$$\inf_n (b(1 + p_n))^{\frac{1}{n}} \leqslant 1$$

$$v(a) \leqslant (\sup(1,b(b)))^{\log_b a}$$

Din $v(a) > 1$ rezultă, $\sup(1,v(b)) > 1$ şi deci

$$v(b) = \sup(1,v(b)) > 1 \quad .$$

Din cele de mai sus rezultă

$$v(a) \leqslant (v(b))^{\log_b a}$$

şi analog (schimb pe b cu a) avem

$$v(b) \leqslant (v(a))^{\log_a b}$$

adică

$$v(a) = (v(b))^{\log_b a} \quad , \quad v(a) > 1$$

oricare ar fi $a,b \in N^*$, $a,b \geqslant 2$. De aici rezultă că există $\alpha \in R$, $\alpha > 1$ astfel încît

$$\log_b v(b) = \alpha \qquad (\forall)\ b \in N^*,\ b \geqslant 2$$

$$v(b) = b^{\alpha} \qquad (\forall)\ b \in N^*,\ b \geqslant 2 \ .$$

Intrucît $v(xy) = v(x)v(y)$ şi $v(-x) = v(|x|)$ rezultă că

$$v(x) = |x|^{\alpha} \qquad \text{pentru orice } x \in Q \ .$$

Din $v(a) \leqslant a$ $(\forall)$ $a \in N^*$ rezultă $\alpha \leqslant 1$.

III. ŞIRURI CONVERGENTE

Şiruri convergente

1. Convergenţa într-un spaţiu metric

Un cadru natural în care sînt descrise principalele fapte privind fenomenul convergenţei este acela al spaţiilor metrice.

Definiţie. Fie X o mulţime nevidă. Se numeşte distanţă pe X o funcţie

$$d : X \times X \longrightarrow R_+$$

care satisface următoarele proprietăţi:

1) $d(x,y) = 0 \iff x = y$

2) $d(x,y) = d(y,x) \quad (\forall)\ x,y \in X.$

3) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) \quad (\forall)\ x,y,z \in X$

Perechea (X,d) formată din mulţimea X şi o distanţă d pe X se numeşte spaţiu metric.

Definiţie. Fie (X,d) un spaţiu metric. O submulţime A a lui X se numeşte mărginită dacă există $x_0 \in X$ şi $\alpha_0 > 0$ astfel încît

$$a \in A \Longrightarrow d(a,x_0) \leq \alpha_0.$$

O funcţie $f : I \longrightarrow X$ se numeşte mărginită dacă $f(I)$ este mărginită.

Dacă A este mărginită atunci pentru orice $x \in X$ există $\alpha_x > 0$ astfel încît

$$a \in A \Longrightarrow d(a,x) \leq \alpha_x.$$

Intr-adevăr avem

$$a \in A \Longrightarrow d(a,x) \leq d(a,x_0) + d(x_0,x) \leq \alpha_0 + d(x_0,x)$$

şi deci numărul $\alpha_x = \alpha_0 + d(x_0,x)$ satisface proprietatea de mai sus.

Evident orice mulţime finită este mărginită şi reuniunea unui sistem finit de mulţimi mărginite este de asemenea o mulţime mărginită.

Vom da cîteva exemple de spaţii metrice.

<u>Exemplul 1</u>. <u>Spaţiul metric $\mathbb{R}$</u>. Pe $\mathbb{R}$ se introduce următoarea distanţă numită distanţa naturală a lui $\mathbb{R}$:

$$d(x,y) = |x - y| .$$

Faptul că d este o distanţă pe $\mathbb{R}$ rezultă din:

$$d(x,y) = 0 \iff |x-y| = 0 \iff x-y = 0 \iff x=y$$

$$d(x,y) = |x - y| = |y - x| = d(y,x)$$

$$d(x,y) = |x - y| = |(x-z)+(z-y)| \leq |x-z| + |z-y| = d(x,z)+d(z,y).$$

Fie A o submulţime a lui $\mathbb{R}$. Atunci A este mărginită în spaţiul metric $\mathbb{R}$ dacă şi numai dacă A este majorată şi minorată. Intr-adevăr dacă A este mărginită atunci există $\alpha > 0$ astfel încît

$$a \in A \implies d(a,0) = |a| \leq \alpha$$

şi deci

$$a \in A \implies -\alpha \leq a \leq \alpha$$

adică A este majorată şi minorată. Reciproc dacă A este majorată de β şi minorată de α atunci A va fi majorată de $|\beta| + |\alpha|$ şi va fi minorată de $-(|\beta| + |\alpha|)$ adică

$$a \in A \implies -(|\beta| + |\alpha|) \leq a \leq |\beta| + |\alpha|$$

sau echivalent

$$a \in A \implies |a| \leq |\alpha| + |\beta|$$

ceea ce arată că A este mărginită.

<u>Exemplul 2</u>. <u>Spaţiul metric $\overline{\mathbb{R}}$</u>. Pe $\overline{\mathbb{R}}$ se introduce următoarea distanţă, notată cu δ:

$$\delta(x,y) = |\overline{\varphi}(x) - \overline{\varphi}(y)|$$

unde $\overline{\varphi}$ este aplicaţia bijectivă $\overline{\varphi}: \overline{\mathbb{R}} \longrightarrow [-1,1] \subset \mathbb{R}$ definită prin

$$\overline{\varphi}(x) = \begin{cases} -1 & \text{dacă } x = -\infty \\ \dfrac{x}{1+|x|} & \text{dacă } x \in \mathbb{R} \\ 1 & \text{dacă } x = +\infty \end{cases}$$

Faptul că δ este o distanţă rezultă din

$$\delta(x,y) = 0 \Longleftrightarrow \overline{\varphi}(x) = \overline{\varphi}(y) \Longleftrightarrow x = y$$

$$\delta(x,y) = |\overline{\varphi}(x) - \overline{\varphi}(y)| = |\overline{\varphi}(y) - \overline{\varphi}(x)| = \delta(y,x)$$

$$\delta(x,y) = |\overline{\varphi}(x) - \overline{\varphi}(y)| \leqslant |\overline{\varphi}(x) - \overline{\varphi}(z)| + |\overline{\varphi}(z) - \overline{\varphi}(y)| =$$

$$= \delta(x,z) + \delta(z,y)$$

Intrucît pentru orice $x,y \in \overline{\mathbb{R}}$ avem $|\overline{\varphi}(x) - \overline{\varphi}(y)| \leqslant 2$ rezultă că $\overline{\mathbb{R}}$ este o mulţime mărginită în spaţiul metric $(\overline{\mathbb{R}}, \delta)$.

Exemplul 3. Fie X o mulţime nevidă şi d funcţia $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}_+$ definită prin

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } x = y \\ 1 & \text{dacă } x \neq y \end{cases}$$

Se verifică simplu că d este o distanţă pe X.

Exemplul 4. Spaţiul metric $\mathbb{R}^n$. Pe $\mathbb{R}^n$ se introduce următoarea distanţă, numită distanţa euclidiană: dacă $x=(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ $y = (y_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$

$$d(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\ldots+(x_n-y_n)^2}$$

Faptul că d este o distanţă pe $\mathbb{R}^n$ rezultă din:

$$d(x,y) = 0 \Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2 = 0 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow x_i = y_i \ (\forall)\ i \in \{1,2,\ldots,n\} \Longleftrightarrow x = y$$

$$d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i-y_i)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i-x_i)^2} = d(y,x)$$

Dacă $z = (z_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ atunci

$$\left|\sum_{i=1}^{n} (x_i-z_i)(z_i-y_i)\right|^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i-z_i)^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} (z_i-y_i)^2\right)$$

deducem

$$d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i-y_i)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left[(x_i-z_i)+(z_i-y_i)\right]^2} =$$

$$= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i-z_i)^2 + \sum_{i=1}^{n} (z_i-y_i)^2 + 2 \sum_{i=1}^{n} (x_i-z_i)(y_i-z_i)} \leqslant$$

$$= \sqrt{\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i-z_o)^2} + \sqrt{\sum_{i=1} (z_i-y_i)^2}\right)^2} = \sqrt{\sum_{i=1} (x_i-z_o)^2} +$$

$$+ \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (z_i-y_i)^2} = d(x,z) + d(z,y).$$

<u>Definiţie</u>. Fie (X,d) un spaţiu metric. Un şir $(x_n)_n$ din X se numeşte <u>convergent</u> dacă există $a \in X$ care se bucură de următoarea proprietate: pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încît

$$n \geqslant n_\varepsilon \Longrightarrow d(x_n, a) < \varepsilon$$

Un astfel de element a este unic determinat şi se numeşte <u>limita şirului</u> x_n. Vom utiliza notaţia $a = \lim_{n\to\infty} x_n$, $a = \lim_n x_n$ sau $x_n \to a$ şi vom citi adesea "x_n tinde la a" sau "x_n converge la a".

Să arătăm unicitatea lui a. Dacă $b \in X$ se bucură de aceeași proprietate ca și a atunci rezultă că pentru orice $\varepsilon > 0$ există $m_\varepsilon \in N$ astfel încît

$$n \geq m_\varepsilon \Longrightarrow d(x_n, b) < \varepsilon$$

De aici rezultă, alegînd $n_0 \geq \max(n_\varepsilon, m_\varepsilon)$,

$d(a,b) \leq d(a, x_{n_0}) + d(x_{n_0}, b) \leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$. Intrucît ε este arbitrar > 0 deducem $d(a,b) = 0$ adică $a = b$.

<u>Definiție</u>. Fie (X,d) un spațiu metric $(x_n)_n$ un șir din X. Un punct $x \in X$ se numește punct limită al șirului $(x_n)_n$ dacă există un subșir $(x_{k_n})_n$ al șirului $(x_n)_n$ astfel încît $x_{k_n} \longrightarrow x$.

Dacă șirul $(x_n)_n$ este convergent și $x_n \longrightarrow x$ atunci x este un punct limită și cum se va vedea din teorema care urmează este unicul punct limită pentru șirul $(x_n)_n$.

In general, așa cum rezultă din definiție, este complicat să se arate că un șir $(x_n)_n$ este convergent întrucît aceasta presupune găsirea unui element a din X care să satisfacă o anumită proprietate legată de șir. De aceea s-a încercat găsirea de criterii, chiar necesare numai, pentru a decide convergența unui șir.

<u>Definiție</u>. Fie (X,d) un spațiu metric. Un șir $(x_n)_n$ din X se numește <u>șir fundamental</u> (sau <u>șir Cauchy</u>) dacă se bucură de următoarea proprietate: pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in N$ astfel încît

$$n, m \geq n_\varepsilon \Longrightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

Remarcăm faptul că noțiunea de șir fundamental este relativ mai simplă întrucît proprietatea care intră în definiția sa nu face apel la elemente exterioare șirului.

<u>Propoziția 1</u>. Fie (X,d) un spațiu metric și $(x_n)_n$ un șir din X. Atunci au loc următoarele afirmații:

1) Dacă $(x_n)_n$ este convergent atunci $(x_n)_n$ este un șir fundamental.

2) Dacă $x_n \to x$ atunci $x_{k_n} \to x$ pentru orice subşir $(x_{k_n})_n$ al şirului $(x_n)_n$.

3) Dacă $(x_n)_n$ este fundamental atunci $(x_{k_n})_n$ este de asemenea fundamental pentru orice subşir $(x_{k_n})_n$ al şirului $(x_n)_n$.

4) Dacă $(x_n)_n$ este fundamental şi există un subşir $(x_{k_n})_n$ al şirului $(x_n)_n$ care este convergent atunci $(x_n)_n$ este convergent.

5) Dacă $(x_n)_n$ este fundamental atunci $(x_n)_n$ este mărginit.

<u>Demonstrație</u>

1) Presupunem $x_n \to x$ şi fie $\varepsilon > 0$. Atunci există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încît

$$n \geq n_\varepsilon \Longrightarrow d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Avem

$$n, m \geq n_\varepsilon \Longrightarrow d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) < \varepsilon$$

2) Presupunem $x_n \to x$ şi fie $\varepsilon > 0$. Atunci există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încît

$$n \geq n_\varepsilon \Longrightarrow d(x_n, x) < \varepsilon.$$

Dacă $(x_{k_n})_n$ este un subşir al şirului $(x_n)_n$ atunci din $k_n \geq n$ deducem

$$n \geq n_\varepsilon \Longrightarrow k_n \geq n \geq n_\varepsilon \Longrightarrow d(x_{k_n}, x) < \varepsilon.$$

3) Presupunem $(x_n)_n$ fundamental şi fie $\varepsilon > 0$. Atunci există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încît

$$n, m \geq n_\varepsilon \Longrightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Dacă $(x_{k_n})_n$ este subşir al şirului $(x_n)_n$ atunci sin $k_n \geq n$ pentru orice n deducem

$$n, m \geq n_\varepsilon \Longrightarrow k_n, k_m \geq n_\varepsilon \Longrightarrow d(x_{k_n}, x_{k_m}) < \varepsilon.$$

4) Fie $(x_n)_n$ un şir fundamental şi $(x_{k_n})_n$ un subşir al şirului $(x_n)_n$ cu $x_{k_n} \longrightarrow x$. Atunci pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ şi $m_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încît

$$n,m \geq n_\varepsilon \Longrightarrow d(x_n,x_m) < \varepsilon/2$$

$$n \geq m_\varepsilon \Longrightarrow d(x_{k_n},x) < \varepsilon/2$$

Luînd $p_\varepsilon = \max(n_\varepsilon, m_\varepsilon)$ avem

$$n \geq p_2 \Longrightarrow \begin{matrix} n \geq n_\varepsilon \\ k_n \geq n \geq n_\varepsilon \\ k_n \geq n \geq m_\varepsilon \end{matrix} \Longrightarrow d(x_n,x) \leq$$

$$\leq d(x_n,x_{k_n})+d(x_{k_n},x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

5) Fie $(x_n)_n$ un şir fundamental şi $\varepsilon = 1$. Atunci există $n_1 \in \mathbb{N}$ cu proprietatea

$$n,\ m \geq n_1 \Longrightarrow d(x_n,x_m) \leq 1$$

Punînd $\alpha_1 = \sup\,(1,\ d(x_o,x_{n_1}),\ d(x_1,x_{n_1}),\ldots,d(x_{n_1-1},x_{n_1})$ avem

$$d(x_n,x_{n_1}) \leq \alpha_1 \quad (\forall)\ n \in \mathbb{N}$$

ceea ce arată că $(x_n)_n$ este mărginit.

<u>Definiţie</u>. Un spaţiu metric (X,d) se numeşte <u>complet</u> dacă orice şir fundamental din X este un şir convergent

2. <u>Convergenţa în $\mathbb{R}$</u>

<u>Propoziţia</u> 2 . Dacă $(x_n)_n$ este un şir din $\mathbb{R}$ crescător (resp. descrescător) şi mărginit atunci $(x_n)_n$ este convergent. In plus avem

$$\lim_n x_n = \sup_n x_n \ (\text{resp. } \lim_n x_n = \inf_n x_n)$$

<u>Demonstrație</u>. Fie $(x_n)_n$ un șir crescător și mărginit din $\mathbb{R}$ și fie

$$a := \sup_n x_n$$

Pentru orice $\varepsilon > 0$, numărul $a - \varepsilon$ nu este un majorant al șirului $(x_n)_n$ și deci există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încît $x_{n_\varepsilon} > a - \varepsilon$. Intrucît șirul $(x_n)_n$ este crescător vom avea

$$n \geqslant n_\varepsilon \Longrightarrow x_n \geqslant x_{n_\varepsilon} > a - \varepsilon.$$

Pe de altă parte avem

$$n \in \mathbb{N} \Longrightarrow x_n \leqslant a < a + \varepsilon$$

și deci

$$n \geqslant n_\varepsilon \Longrightarrow a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon \Longleftrightarrow |x_n - a| < \varepsilon$$

O demonstrație analogă pentru cazul cînd $(x_n)_n$ este descrescător și mărginit.

<u>Propoziția</u> 3 . Fie $(x_n)_n$ un șir din $\mathbb{R}$ astfel încît $x_n \longrightarrow x$ și $a \in \mathbb{R}$. Atunci

1) Dacă $(\exists)$ $n_o \in \mathbb{N}$ astfel încît

$$n \geqslant n_o \Longrightarrow x_n \geqslant a \quad (\text{resp. } x_n \leq a)$$

atunci $x \geqslant a$ (resp. $x \leq a$)

2) Dacă $x > a$ (resp. $x < a$) atunci există $n_o \in \mathbb{N}$ astfel încît

$$n \geqslant n_o \Longrightarrow x_n > a \quad (\text{resp. } x_n < a)$$

<u>Demonstrație</u>. Presupunem că $x > a$ (resp. $x < a$). Luînd $\varepsilon = |x - a|$ deducem din $x_n \longrightarrow a$ că există $n_o \in \mathbb{N}$ cu proprietatea

$$n \geqslant n_o \Longrightarrow |x_n - x| < \varepsilon$$

și deci

$$n \geqslant n_o \Longrightarrow x_n - x > -\varepsilon = a - x \Longrightarrow x_n > a$$

$$(\text{resp. } n \geqslant n_o \Longrightarrow x_n - x < \varepsilon = a - x \Longrightarrow x_n < a)$$

Presupunem acum că există $n_o \in N$ cu proprietatea

$$n \geqslant n_o \Longrightarrow x_n \geqslant a \text{ (resp. } x_n \leqslant a)$$

Dacă nu am avea $x \geqslant a$ (resp. $x \leqslant a$) atunci $x < a$ (resp. $x > a$) şi din prima parte a demonstraţiei ar exista $m_o \in N$ cu proprietatea

$$n \geqslant m_o \Longrightarrow x_n < a \text{ (resp. } x_n > a)$$

ceea ce intră în contradicţie cu relaţia

$$n \geqslant n_o \Longrightarrow x_n \geqslant a \text{ (resp. } x_n \leqslant a)$$

<u>Propoziţia</u> 4 . Fie $(x_n)_n$, $(y_n)_n$ două şirui convergente în R. Atunci avem:

1) $x_n \longrightarrow a$ şi $y_n \longrightarrow b \Longrightarrow x_n + y_n \longrightarrow a + b$
2) $x_n \longrightarrow a$ şi $y_n \longrightarrow b \Longrightarrow x_n y_n \longrightarrow a \cdot b$
3) $x_n \longrightarrow a \Longrightarrow |x_n| \longrightarrow |a|$
4) $x_n \longrightarrow a$, $a \neq 0$ şi $x_n \neq 0$ $(\forall)\ n \in N \Longrightarrow \frac{1}{x_n} \longrightarrow \frac{1}{a}$

<u>Demonstraţie</u>. 1) Fie $x_n \longrightarrow a$, $y_n \longrightarrow b$ şi fie $\varepsilon > 0$. Atunci există $n_\varepsilon \in N$ cu proprietatea

$$n \geqslant n_\varepsilon \Longrightarrow |x_n - a| < \varepsilon/2, \quad |x_n - b| < \varepsilon/2$$

Avem

$$n \geqslant n_\varepsilon \Longrightarrow |(x_n + y_n) - (a+b)| \leqslant |x_n - a| + |y_n - b| < \varepsilon.$$

2) Fie $x_n \longrightarrow a$ şi $y_n \longrightarrow b$. Intrucît $(y_n)_n$ este mărginit există $M > 0$ astfel încît

$$|y_n| \leqslant M \ (\forall)\ n \in N \quad \text{şi} \quad |a| \leqslant M$$

Dacă $\varepsilon > 0$ atunci există $n_\varepsilon \in N$ astfel încît

$$n \geqslant n_\varepsilon \Longrightarrow |y_n - a| < \frac{\varepsilon}{2M}, \quad |y_n - a| < \frac{\varepsilon}{2M}$$

Avem, pentru $n \geq n_\varepsilon$,

$$|x_n y_n - ab| = |(x_n - a)y_n + a(y_n - b)| \leq$$

$$\leq |x_n - a||y_n| + |a||y_n - b| \leq \frac{\varepsilon}{2M} M + M\frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon$$

3) Fie $x_n \to a$ şi $\varepsilon > 0$. Există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încît

$$n \geq n_\varepsilon \Longrightarrow |x_n - a| < \varepsilon$$

Din

$$||x_n| - |a|| \leq |x_n - a|$$

deducem

$$n \geq n_\varepsilon \Longrightarrow ||x_n| - |a|| < \varepsilon$$

4) Fie $x_n \to a$, $a \neq 0$ şi $x_n \neq 0$ $(\forall)$ $n \in \mathbb{N}$. Atunci $|x_n| \to |a|$ şi cum $|a| > \frac{|a|}{2}$ rezultă că există $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încît

$$n \geq n_0 \Longrightarrow |x_n| > \frac{|a|}{2} \Rightarrow \frac{1}{|x_n|} < \frac{2}{|a|}$$

De aici rezultă că şirul $\left(\frac{1}{|x_n|}\right)_n$ este mărginit şi deci există $M > 0$ astfel încît

$$\frac{1}{|x_n|} \leq M \quad (\forall)\ n \in \mathbb{N}, \ \frac{1}{|a|} \leq M$$

Dacă $\varepsilon > 0$ atunci există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ cu proprietatea

$$n \geq n_\varepsilon \Longrightarrow |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{M^2}$$

De aici rezultă

$$n \geq n_\varepsilon \Rightarrow \left|\frac{1}{x_n} - \frac{1}{a}\right| = \frac{|x_n - a|}{|x_n||a|} < \frac{\varepsilon}{M^2} \cdot M^2 = \varepsilon$$

ceea ce arată că

$$\frac{1}{x_n} \to \frac{1}{a}.$$

Propoziţia 5. Fie $(x_n)_n$, $(y_n)_n$, (z_n) trei şiruri din $\mathbb{R}$ şi $a \in \mathbb{R}$ astfel încît

$$x_n \to a \ , \ y_n \to a$$

şi există $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încît

$$n \geqslant n_0 \Longrightarrow x_n \leqslant z_n \leqslant y_n$$

Atunci

$$z_n \to a$$

Demonstraţie. Fie $\varepsilon > 0$ şi $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încît

$$n \geqslant n_\varepsilon \Longrightarrow |x_n - a| < \varepsilon \ , \ |y_n - a| < c$$

Atunci

$$n \geqslant \max(n_\varepsilon, n_0) \Longrightarrow -\varepsilon < x_n - a \leqslant z_n - a \leqslant y_n - a < \varepsilon$$

şi deci

$$n \geqslant \max(n_\varepsilon, x_n) \Longrightarrow |z_n - a| < \varepsilon.$$

Propoziţia 6 . Fie $(x_n)_n$ un şir din $\mathbb{R}_+^*$ şi $a \in \mathbb{R}_+^*$ astfel încît $x_n \to a$. Atunci pentru orice $\alpha \in \mathbb{R}$ avem

$$x_n^\alpha \to a^\alpha$$

Demonstraţie. Fie

$$u_n = \sup\{x_k \mid k \geqslant n\} \qquad v_n = \inf\{x_k \mid k \geqslant n\}$$

Avem $v_n \nearrow a$, $u_n \searrow a$. Dacă $\alpha > 0$ atunci şirul $(v_n^\alpha)_n$ este crescător, şirul $(u_n^\alpha)_n$ este descrescător şi

$$\sup_n v_n^\alpha \leqslant a^\alpha \leqslant \inf_n u_n^\alpha$$

Dacă $\sup_n v_n^\alpha < a^\alpha$ atunci alegem $b \in \mathbb{R}$ astfel încît

$$\sup_n v_n^\alpha < b < a^\alpha$$

De aici rezultă

$$v_n^{\alpha} < b < a^{\alpha} \quad (\forall)\ n \in \mathbb{N}$$

şi deci

$$v_n < b^{\frac{1}{\alpha}} < a \quad (\forall)\ n \in \mathbb{N}$$

ceea ce contrazice relaţia $a = \sup\limits_n v_n$. Analog se arată $a^{\alpha} = \inf\limits_n u_n^{\alpha}$.
Din

$$v_n^{\alpha} \leq x_n^{\alpha} \leq u_n^{\alpha}$$

şi din $v_n^{\alpha} \nearrow a^{\alpha}$, $u_n^{\alpha} \searrow a^{\alpha}$ deducem $x_n^{\alpha} \to a^{\alpha}$.

Dacă $\alpha < 0$ atunci $\frac{1}{x_n} \to \frac{1}{a}$ şi deci

$$x_n^{\alpha} = \left(\frac{1}{x_n}\right)^{-\alpha} \to \left(\frac{1}{a}\right)^{-\alpha} = a^{\alpha}$$

<u>Definiţie</u>. Fie $(x_n)_n$ un şir mărginit în $\mathbb{R}$. Se consideră şirurile $(u_n)_n$, $(v_n)_n$ definite prin

$$u_n = \sup\left\{x_k \mid k \geq n\right\},\ v_n = \inf\left\{x_k \mid k \geq n\right\}.$$

Şirul $(u_n)_n$ este descrescător, şirul $(v_n)_n$ este crescător şi pentru orice $n,m \in \mathbb{N}$ avem

$$v_n \leq u_m$$

Numărul

$$v := \sup_n v_n$$

se numeşte <u>limita inferioară a şirului $(x_n)_n$</u> şi se notează cu $\liminf\limits_n x_n$ sau cu $\underline{\lim}\, x_n$ iar numărul

$$u := \inf_n u_n$$

se numeşte <u>limita superioară a şirului</u> $(x_n)_n$ şi se notează cu $\limsup\limits_n x_n$ sau cu $\overline{\lim}\, x_n$.

Evident

$$\liminf_n x_n \leq \limsup_n x_n$$

<u>Teorema</u> 7. Fie $(x_n)_n$ un şir mărginit din $\mathbb{R}$ şi $u = \limsup_n x_n$, $v = \liminf_n x_n$. Atunci există două subşiruri convergente $(x_{k_n})_n$ şi $(x_{l_n})_n$ ale şirului $(x_n)_n$ astfel încît

$$x_{k_n} \longrightarrow u , \quad x_{l_n} \longrightarrow v$$

<u>Demonstraţie</u>. Fie pentru orice $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \sup\{x_i \mid i \geq n\}$$

$$v_n = \inf\{x_i \mid i \leq n\}$$

Vom construi inductiv un şir strict crescător $(k_n)_n$ de numere naturale astfel încît $k_1 = 1$ şi k_{n+1} este ales cu proprietatea $k_{n+1} \geq k_n + 1$ şi

$$u_{k_n+1} < x_{k_{n+1}} + \frac{1}{n+1}$$

Vom avea

$$u_{k_n+1} - \frac{1}{n+1} < x_{k_{n+1}} \leq u_{k_n+1} < u_{k_n+1} + \frac{1}{n+1} \quad (\forall)\ n \in \mathbb{N}$$

şi deci cum

$$u_{k_n+1} \longrightarrow u, \quad \frac{1}{n+1} \longrightarrow 0$$

deducem, utilizînd propoziţia 5, că

$$x_{k_n} \longrightarrow u$$

Analog vom construi un şir strict crescător $(l_n)_n$ de numere naturale astfel încît $\ell_1 = 1$ şi ℓ_{n+1} este ales cu proprietatea $\ell_{n+1} \geq \ell_n + 1$ şi

$$v_{\ell_n+1} > x_{\ell_{n+1}} - \frac{1}{n+1}$$

Vom avea

$$v_{\ell_{n+1}} - \frac{1}{n+1} < v_{\ell_{n+1}} \leqslant x_{\ell_{n+1}} < v_{\ell_{n+1}} + \frac{1}{n+1}$$

şi deci cum

$$v_{\ell_{n+1}} \to v \text{ şi } \frac{1}{n+1} \to 0$$

deducem, utilizînd din nou propoziţia 5, că

$$x_{\ell_{n+1}} \to v$$

Corolar 8 (Lema lui Cezaro(1859-1906). Orice şir mărginit din $\mathbb{R}$ conţine un subşir convergent.

Propoziţia 9. $\mathbb{R}$ este un spaţiu metric complet.

Demonstraţie. Dacă $(x_n)_n$ este un şir fundamental atunci el este mărginit şi din corolarul precedent conţine un subşir convergent. Aplicînd teorema 1 deducem că $(x_n)_n$ este convergent.

3. Convergenţa în $\overline{\mathbb{R}}$

Propoziţia 10. 1) Fie $(x_n)_n$ un şir din $\mathbb{R}$ şi $x \in \mathbb{R}$. Atunci $x_n \to x$ în $\overline{\mathbb{R}}$ dacă şi numai dacă $x_n \to x$ în $\mathbb{R}$.

2) Fie $(x_n)_n$ un şir din $\mathbb{R}$. Atunci

$$x_n \to +\infty \Leftrightarrow -x_n \to -\infty$$

3) Fie $(x_n)_n$ un şir din $\overline{\mathbb{R}}$. Atunci următoarele afirmaţii sînt echivalente:

i) $x_n \to +\infty$

ii) pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încît $n \geqslant n_\varepsilon \Rightarrow x_n > \varepsilon$

iii) există $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încît $n \geqslant n_0 \Rightarrow x_n > 0$ şi $1/x_n \to 0$.

4) Fie $(x_n)_n$ un şir din $\mathbb{R}$. Atunci următoarele afirmaţii sînt echivalente:

i) $x_n \longrightarrow -\infty$

ii) pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încît $n \geqslant n_\varepsilon \Longrightarrow x_n < -\varepsilon$.

iii) există $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încît $n \geqslant n_0 \Longrightarrow x_n < 0$ şi $1/x_n \longrightarrow 0$.

<u>Demonstraţie</u>

1) Din definiţie avem

$$x_n \longrightarrow x \text{ în } \overline{\mathbb{R}} \Longleftrightarrow \frac{x_n}{1+|x_n|} \longrightarrow \frac{x}{1+|x|} \text{ în } \mathbb{R}$$

Intrucît

$$x_n = \frac{\dfrac{x_n}{1+|x_n|}}{1-\dfrac{|x_n|}{1+|x_n|}}, \quad x = \frac{\dfrac{x}{1+|x|}}{1-\dfrac{|x|}{1+|x|}}$$

deducem că

$$\frac{x_n}{1+|x_n|} \longrightarrow \frac{x}{1+|x|} \text{ în } \mathbb{R} \Longleftrightarrow x_n \longrightarrow x \text{ în } \mathbb{R}.$$

2) Fie $(x_n)_n$ un şir din $\mathbb{R}$. Avem

$$x_n \longrightarrow +\infty \Longleftrightarrow \frac{x_n}{1+|x_n|} \longrightarrow 1 \Longleftrightarrow \frac{-x_n}{1+|-x_n|} \longrightarrow -1 \Longleftrightarrow -x_n \longrightarrow -\infty$$

3) i $\Longrightarrow$ ii) Dacă $x_n \longrightarrow +\infty$ atunci $\frac{x_n}{1+|x_n|} \longrightarrow 1$ şi deci există $n_0 \in \mathbb{N}$ cu proprietatea $n \geqslant n_0 \Longrightarrow x_n > 0$ şi pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ cu proprietatea

$$n \geqslant n_\varepsilon \Longrightarrow \left|\frac{x_n}{1+x_n} - 1\right| < \frac{1}{1+\varepsilon}$$

De aici rezultă că

$$n \geq \max(n_o, n_\varepsilon) \Longrightarrow \frac{1}{1+x_n} = \left|\frac{x_n}{1+x_n} - 1\right| = \left|\frac{x_n}{1+x_n} - 1\right| < \frac{1}{1+\varepsilon}$$

şi deci

$$n \geq \max(n_o, n_\varepsilon) \Longrightarrow x_n > \varepsilon .$$

ii) $\Longrightarrow$ iii) Fie $\varepsilon > 0$. Din ii) deducem că există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ cu proprietatea

$$n \geq n_\varepsilon \Longrightarrow x_n > \frac{1}{\varepsilon} \Longrightarrow \frac{1}{x_n} < \varepsilon$$

ceea ce arată că există $n_o \in \mathbb{N}$ cu $n \geq n_o \Longrightarrow x_n > 0$ şi în acelaşi timp $1/x_n \longrightarrow 0$.

iii) $\Longrightarrow$ i) Intrucît $\frac{1}{x_n} \longrightarrow 0$ deducem că

$$\frac{1+x_n}{x_n} = 1 + \frac{1}{x_n} \longrightarrow 1.$$

Din faptul că există $n_o \in \mathbb{N}$ cu proprietatea

$$n \geq n_o \Longrightarrow x_n > 0$$

deducem că

$$\frac{1 + |x_n|}{x_n} \longrightarrow 1$$

şi deci

$$\frac{x_n}{1 + |x_n|} \longrightarrow 1.$$

adică $x_n \longrightarrow +\infty$.

4) Rezultă din 3) aplicînd 2).

<u>Propoziţia</u> 11. Fie $(x_n)_n$, $(y_n)_n$ şiruri din $\overline{\mathbb{R}}$. Avem

1) $x_n \longrightarrow +\infty$, $y_n \longrightarrow y$, $y > -\infty \Longrightarrow x_n + y_n \longrightarrow +\infty$

$x_n \longrightarrow -\infty$, $y_n \longrightarrow y$, $y < +\infty \Longrightarrow x_n + y_n \longrightarrow -\infty$

$$2)\ x_n \to +\infty\ ,\ y_n \to y\ ,\ y > 0 \Longrightarrow x_n y_n \to +\infty$$

$$x_n \to +\infty\ ,\ y_n \to y\ ,\ y < 0 \Longrightarrow x_n y_n \to -\infty$$

$$x_n \to -\infty\ ,\ y_n \to y\ ,\ y > 0 \Longrightarrow x_n y_n \to -\infty$$

$$x_n \to -\infty\ ,\ y_n \to y\ ,\ y < 0 \Longrightarrow x_n \cdot y_n \to +\infty$$

3) Dacă în plus $x_n \neq 0$ $(\forall)$ $n \in \mathbb{N}$ avem

$$|x_n| \to +\infty \Longleftrightarrow \frac{1}{x_n} \to 0$$

<u>Demonstrație</u>. 1) Presupunem $x_n \to +\infty$, $y_n \to y$ și $y > -\infty$ Fie $\varepsilon > 0$ și $a \in \mathbb{R}$, $a < y$. Atunci există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ cu proprietatea

$$n \geq n_\varepsilon \Longrightarrow x_n > \varepsilon + |a|\ ,\ y_n > a$$

De aici rezultă

$$n \geq n_\varepsilon \Longrightarrow x_n + y_n > \varepsilon + |a| + a \geq \varepsilon$$

ceea ce arată că $x_n + y_n \to +\infty$.

Dacă $x_n \to -\infty$, $y_n \to y$, $y > -\infty$ atunci avem $-x_n \to +\infty$, $-y_n \to -y$, $-y < +\infty$ și deci

$$-(x_n + y_n) \to +\infty$$

sau echivalent $x_n + y_n \to -\infty$.

2) Fie $x_n \to +\infty$, $y_n \to y$ și $y > 0$. Alegem $a \in \mathbb{R}$, $0 < a < y$. Atunci există $n_0 \in \mathbb{N}$ cu proprietatea $n \geq n_0 \Longrightarrow y_n > a$. Pentru $\varepsilon > 0$ alegem $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ cu proprietatea

$$n \geq n_\varepsilon \Longrightarrow x_n > \varepsilon/a$$

Avem

$$n \geq \max(n_0, n_\varepsilon) \Longrightarrow x_n y_n > \varepsilon/a \cdot a = \varepsilon.$$

și deci

$$x_n y_n \to +\infty$$

Dacă $x_n \to +\infty$, $y_n \to y$ şi $y>0$ atunci $-y_n \to -y$ şi $-y>0$ şi deci

$$x_n(-y_n) \to +\infty \ , \ x_n y_n \to -\infty \ .$$

Dacă $x_n \to -\infty$ şi $y_n \to y$ cu $y>0$ avem $-x_n \to +\infty$ şi deci

$$(-x_n)\, y_n \to +\infty \ , \ x_n y_n \to -\infty$$

Dacă $x_n \to -\infty$ şi $y_n \to y$ cu $y<0$ avem $-x_n \to +\infty$ şi deci

$$(-x_n) y_n \to -\infty \ , \ x_n y_n \to +\infty \ .$$

3) Presupunem că $x_n \neq 0$ $(\forall)$ $n \in \mathbb{N}$, avem

$$|x_n| \to +\infty \Leftrightarrow \frac{1}{|x_n|} \to 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x_n} \to 0.$$

<u>Remarcă</u>. Afirmaţiile 1) şi 2) din propoziţia precedentă dau o justificare pentru următoarele convenţii de calcul în $\overline{\mathbb{R}}$:

$$x + (+\infty) = (+\infty) + x = +\infty \quad (\forall)\ x > -\infty$$
$$x + (-\infty) = (-\infty) + x = -\infty \quad (\forall)\ x < +\infty$$
$$x\,(+\infty) = (+\infty)\, x = +\infty \quad \text{dacă } x>0$$
$$x\,(+\infty) = (+\infty)\, x = -\infty \quad \text{dacă } x<0$$
$$x\,(-\infty) = (-\infty)\, x = -\infty \quad \text{dacă } x>0$$
$$x\,(-\infty) = (-\infty)\, x = +\infty \quad \text{dacă } x<0$$

După cum se vede nici un fel de convenţie pentru operaţiile $(+\infty) + (-\infty)$, $(-\infty) + (+\infty)$, $(+\infty)\, 0$, $(-\infty)\, 0$.

Pe de altă parte afirmaţia 3) justifică eventuala convenţie $\frac{x}{+\infty} = \frac{x}{-\infty} = 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Remarcăm şi aici că nici un fel de convenţie nu se face pentru operaţia $\frac{x}{0}$ cu $x \in \mathbb{R}$.

<u>Propoziţia</u> 12. Fie $(x_n)_n$ un şir din $\mathbb{R}$. Atunci

1) dacă $(x_n)_n$ este crescător atunci $(x_n)_n$ este convergent în $\overline{\mathbb{R}}$ şi avem

$$\lim_n x_n = \sup_n x_n$$

2) dacă $(x_n)_n$ este descrescător atunci $(x_n)_n$ este convergent şi avem

$$\lim_n x_n = \inf_n x_n .$$

<u>Demonstraţie</u>. 1) Dacă $(x_n)_n$ este crescător şi majorat în $\mathbb{R}$ afirmaţia rezultă din Propoziţia 2. Dacă $(x_n)_n$ este crescător dar nu este majorat în $\mathbb{R}$ atunci pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încît

$$n \geq n_\varepsilon \Longrightarrow x_n > \varepsilon$$

şi deci

$$x_n \longrightarrow +\infty = \sup_n x_n$$

2) Dacă $(x_n)_n$ este descrescător şi minorat în $\mathbb{R}$ afirmaţia rezultă din Propoziţia 2. Dacă $(x_n)_n$ este descrescător şi nu este majorat în $\mathbb{R}$ atunci pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încît

$$n \geq n_\varepsilon \Longrightarrow x_n < -\varepsilon$$

şi deci

$$x_n \longrightarrow -\infty = \inf_n x_n$$

<u>Definiţie</u>. Pentru orice şir $(x_n)_n$ din $\overline{\mathbb{R}}$ punem

$$u_n := \sup\{x_k \mid k \geq n\}, \quad v_n := \sup\{x_k \mid k \geq n\}$$

unde supremumul şi infimimul sînt considerate în $\overline{\mathbb{R}}$. Şirul $(u_n)_n$ este descrescător în $\overline{\mathbb{R}}$ iar şirul $(v_n)_n$ este crescător în $\overline{\mathbb{R}}$ şi avem

$$n, m \in \mathbb{N} \Longrightarrow v_n \leq u_m .$$

Elementul $u = \inf_n u_n$ se numeşte <u>limita superioară a şirului</u> $(x_n)_n$ <u>în $\overline{\mathbb{R}}$</u> şi se notează cu

$$\lim_n \inf u_n \text{ sau } \underline{\lim}\, u_n$$

Elementul $v = \sup_n v$ se numeşte <u>limita inferioară a şirului $(x_n)_n$ în $\overline{\mathbb{R}}$</u> şi se notează cu

$$\lim_n \sup x_n \quad \text{sau} \quad \overline{\lim}\, x_n$$

Evident avem

$$\lim_n \inf x_n \leq \lim_n \sup x_n$$

<u>Remarcă</u>. 1) Dacă şirul $(x_n)_n$ este mărginit în $\mathbb{R}$ atunci limita inferioară şi limita superioară a şirului $(x_n)_n$ calculată în $\overline{\mathbb{R}}$ sînt numere reale şi coincid cu limita inferioară şi limita superioară a şirului $(x_n)_n$ calculată în $\mathbb{R}$.

2) Fie $\overline{\varphi} : \overline{\mathbb{R}} \to [-1,1]$, $\overline{\Psi} : [-1,1] \to \overline{\mathbb{R}}$ funcţiile strict crescătoare şi bijective definite prin

$$\overline{\varphi}(x) = \begin{cases} -1 & \text{dacă } x = -\infty \\ \dfrac{x}{1+|x|} & \text{dacă } x \in \mathbb{R} \\ +1 & \text{dacă } x = +\infty \end{cases}$$

$$\overline{\Psi}(y) = \begin{cases} -\infty & \text{dacă } y = -1 \\ \dfrac{y}{1-|y|} & \text{dacă } y \in (-1,1) \\ +\infty & \text{dacă } y = 1 \end{cases}$$

Se ştie că $\overline{\Psi}$ este inversa lui $\overline{\varphi}$.

Dacă $(x_n)_n$ este un şir din $\mathbb{R}$ atunci vom avea evident

$$\lim_n \inf \overline{\varphi}(x_n) = \overline{\varphi}(\lim_n \inf x_n)$$

$$\lim_n \sup \overline{\varphi}(x_n) = \overline{\varphi}(\lim_n \inf x_n)$$

şi deci

$$\lim_n \inf x_n = \overline{\Psi}((\lim_n \inf \overline{\varphi}(x_n))$$

$$\lim_n \sup x_n = \overline{\Psi}((\lim_n \sup \overline{\varphi}(x_n))$$

<u>Propoziția 13</u>. Fie $(x_n)_n$ un şir din $\overline{\mathbb{R}}$ şi $u = \limsup\limits_n x_n$, $v = \liminf\limits_n x_n$. Atunci există două subşiruri $(x_{k_n})_n$, $(x_{\ell_n})_n$ ale şirului $(x_n)_n$ astfel încît

$$x_{k_n} \to u \ , \quad x_{\ell_n} \to v$$

<u>Demonstrație</u>. Intrucît şirul $(\varphi(x_n))_n$ este mărginit în $\mathbb{R}$ există două subşiruri $(x_{k_n})_n$, $(x_{\ell_n})_n$ ale lui $(x_n)_n$ astfel încît

$$\overline{\varphi}(x_{k_n}) \to \overline{\varphi}(u) \ , \quad \overline{\varphi}(x_{\ell_n}) \to \overline{\varphi}(v)$$

şi deci din definiția convergenței în $\overline{\mathbb{R}}$,

$$x_{k_n} \to u \ , \quad x_{\ell_n} \to v \ .$$

<u>Corolar</u> 14. Orice şir din $\overline{\mathbb{R}}$ conține un subşir convergent.

<u>Corolar</u> 15. Spațiul metric $\overline{\mathbb{R}}$ este complet.

<u>Propoziția 16 (Stolz)</u> Fie $(x_n)_n$, $(y_n)_n$ şiruri în $\mathbb{R}$ astfel încît $(y_n)_n$ este strict crescător şi $y_n \to +\infty$. Atunci

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} \to a \Longrightarrow \frac{x_n}{y_n} \to a$$

<u>Demonstrație</u>. Presupunem că $a = +\infty$. Atunci pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ cu proprietatea

$$n \geq n_\varepsilon \Longrightarrow \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} > 2\varepsilon \ , \quad y_n \geq 1$$

De aici rezultă

$$n \geq n_\varepsilon \Longrightarrow x_{n+1} - x_n > 2\varepsilon\,(y_{n+1} - y_n)$$

şi deci adunînd aceste relații pentru n între n_ε şi $n = n > n_\varepsilon$ avem

$$x_{n+1} - x_{n_\varepsilon} > 2\varepsilon\,(y_{n+1} - y_{n_\varepsilon}) \ ,$$

$$\frac{x_{n+1}}{y_{n+1}} > 2\varepsilon - 2\varepsilon\,\frac{y_{n_\varepsilon}}{y_{n+1}} + \frac{x_{n_\varepsilon}}{y_{n+1}}$$

Intrucît $y_n \to +\infty$ deducem că există $m_\varepsilon \in N$ astfel încît

$$m \geq m_\varepsilon \Rightarrow \left|\frac{x_{n_\varepsilon}}{y_m}\right| < \frac{\varepsilon}{2} \ , \ \left|\frac{y_n}{y_{m+1}}\right| < \frac{1}{4}$$

şi deci

$$n \geq \max(n_\varepsilon, m_\varepsilon) \Longrightarrow \frac{x_{m+1}}{y_{m+1}} > \varepsilon$$

adică

$$\frac{x_m}{y_m} \to +\infty .$$

Cazul $a = -\infty$ se obţine din cel precedent înlocuind şirul $(x_n)_n$ cu $(-x_n)_n$.

Presupunem acum că $a \in R$. Atunci pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in N$ astfel încît

$$n \geq n_\varepsilon \Rightarrow \left|\frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} - a\right| < \varepsilon/2 \ , \ y_n \geq 1$$

De aici rezultă

$$n \geq n_\varepsilon \Rightarrow (a - \frac{\varepsilon}{2})(y_{n+1} - y_n) < x_{n+1} - x_n < (a + \frac{\varepsilon}{2})(y_{n+1} - y_n)$$

Adunînd aceste relaţii pentru n între n_ε şi $n = m > n_\varepsilon$ avem

$$(a - \frac{\varepsilon}{2})(y_{m+1} - y_{n_\varepsilon}) < x_{m+1} - x_{n_\varepsilon} < (a + \frac{\varepsilon}{2})(y_{m+1} - y_{n_\varepsilon})$$

sau

$$\frac{x_{n_\varepsilon}}{y_{m+1}} - (a - \frac{\varepsilon}{2}) < \frac{y_n}{y_{m+1}} - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{x_{m+1}}{y_{m+1}} - a < \frac{x_{n_\varepsilon}}{y_{m+1}} - (a + \frac{\varepsilon}{2}) \frac{y_n}{y_{m+1}} + \frac{\varepsilon}{2}$$

Intrucît $y_n \to \infty$, deducem că există $m_\varepsilon \in N$ cu proprietatea

$$n \geq m_\varepsilon \Rightarrow \left|\frac{x_{n_\varepsilon}}{y_{n+1}}\right| + (|a| + \varepsilon/2) \left|\frac{y_{n_\varepsilon}}{y_{n+1}}\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

De aici deducem că

$$n \geq \max(n_\varepsilon, m_\varepsilon) \Rightarrow \left|\frac{x_{n+1}}{y_{n+1}} - a\right| < \varepsilon$$

ceea ce arată că

$$\frac{x_n}{y_n} \to a.$$

4. <u>Numărul e şi funcţia exponenţială de bază e</u>

In acest paragraf se construieşte unul din numerele reale care nu este raţional, notat cu e, şi care ocupă din multe motive o poziţie remarcabilă printre numerele reale.

<u>Propoziţia</u> 17. 1) Şirul $(1+\frac{1}{n})^n$ este strict crescător, iar şirul $(1+\frac{1}{n})^{n+1}$ este strict descrescător şi în plus avem

$$n, m \in N^* \Longrightarrow (1+\frac{1}{n})^n < (1+\frac{1}{m})^{m+1}$$

$$\lim_n (1+\frac{1}{n})^n = \lim_n (1+\frac{1}{n})^{n+1}$$

Notînd $e := \lim_n (1+\frac{1}{n})^n$ avem $1/e = \lim_n (1-\frac{1}{n})^n$.

2. Dacă $(x_n)_n$ este un şir din R atunci

$$x_n \longrightarrow +\infty \Longrightarrow e = \lim_n (1+\frac{1}{x_n})^{x_n}, \quad 1/e = \lim_n (1-\frac{1}{x_n})^{x_n}$$

3. Pentru orice $x \in R$ avem $e^x = \exp_e x = \lim_n (1+\frac{x}{n})^n$.

<u>Demonstraţie</u>. Fie $n \in N$, $n \geq 1$. Vom arăta că

$$(1+\frac{1}{n})^n < (1+\frac{1}{n+1})^{n+1}$$

Intr-adevăr avem

$$\frac{(1+\frac{1}{n})^n}{(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}} = \left[\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right]^{n+1} \frac{n}{n+1}.$$

Aplicînd inegalitatea lui Bernoulli obţinem

$$\left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)^{n+1} = \frac{1}{\left[\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right]^{n+1}} = \frac{1}{(1-\frac{1}{(n+1)^2})^{n+1}} < \frac{1}{1-\frac{1}{n+1}} = \frac{n+1}{n}$$

şi deci

$$\frac{(1+\frac{1}{n})^n}{(1+\frac{1}{n+1})^n} < 1$$

Vom arăta acum că

$$(1 + \frac{1}{n})^{n+1} > (1 + \frac{1}{n+1})^{n+2}$$

Intr-adevăr avem

$$\frac{(1 + \frac{1}{n+1})^{n+2}}{(1 + \frac{1}{n})^{n+1}} = \left(\frac{(n+2)n}{(n+1)^2}\right)^{n+2} \frac{n+1}{n}.$$

Pe de altă parte aplicînd inegalitatea lui Bernoulli obţinem

$$\left(\frac{(n+2)n}{(n+1)^2}\right)^{n+2} = \frac{1}{(1 + \frac{1}{n(n+2)})^{n+2}} < \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = \frac{n}{n+1}$$

şi deci

$$\frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}} < 1 .$$

Punînd $e = \lim (1 + \frac{1}{n})^n$ avem

$$\lim_n (1 + \frac{1}{n})^{n+1} = \lim_n (1 + \frac{1}{n})^n \lim_n (1 + \frac{1}{n}) = e$$

$$\lim_n (1 - \frac{1}{n})^n = \lim_n \frac{1}{(1 - \frac{1}{n-1})^n} = \frac{1}{e}$$

2. Fie acum $(x_n)_n$ un şir din $\mathbb{R}$ cu $x_n \longrightarrow +\infty$. Pentru $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încît

$$n \geq n_\varepsilon \Longrightarrow e - \varepsilon < (1 + \frac{1}{n+1})^n \leq (1 + \frac{1}{n})^n < (1 + \frac{1}{n})^{n+1} < e + \varepsilon$$

Intrucît $x_n \longrightarrow +\infty$ există $m_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încît

$$n \geq m_\varepsilon \longrightarrow x_n > n_\varepsilon$$

De aici deducem, pentru $n \geq \max(n_\varepsilon, m_\varepsilon)$,

$$e - \varepsilon < (1 + \frac{1}{[x_n]+1})^{[x_n]} \leq (1 + \frac{1}{x_n})^{x_n} \leq (1 + \frac{1}{[x_n]})^{[x_n]+1} < e + \varepsilon$$

unde am notat prin $[x]$ partea întreagă a lui x.

Deci

$$n \geq \max(n_\varepsilon, m_\varepsilon) \Longrightarrow |(1 + \frac{1}{x_n})^{x_n} - e| < \varepsilon$$

ceea ce arată că $(1 + \frac{1}{x_n})^{x_n} \longrightarrow e$.

Avem

$$\lim_n (1 - \frac{1}{x_n})^{x_n} = \lim_n \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{x_n - 1}}\right)^{x_n - 1} \cdot \lim_n \frac{1}{1 - \frac{1}{x_n - 1}} = \frac{1}{e} .$$

3. Fie acum $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$. Atunci $(n/x)_n$ este strict crescător şi $n/x \longrightarrow +\infty$. De aici rezultă că

$$\lim_n (1 + \frac{x}{n})^{n/x} = e$$

şi deci

$$\lim_n (1 + \frac{x}{n})^n = \lim_n \left[(1 + \frac{x}{n})^{n/x}\right]^x = e^x$$

Dacă $x \in \mathbb{R}$, $x < 0$ atunci $-n/x \longrightarrow +\infty$ şi deci

$$\lim_n (1 + \frac{x}{n})^{-n/x} = 1/e$$

$$\lim_n (1 + \frac{x}{n})^n = \lim \left[(1 + \frac{x}{n})^{-n/x}\right]^{-x} = (1/e)^{-x} = e^x$$

Propoziţia 18. Exemple de şiruri convergente

Au loc următoarele afirmaţii:

1) $\lim_n \sqrt[n]{n} = 1$

2) $\lim_n \frac{n^\alpha}{a^n} = 0 \quad (\forall)\ a \in \mathbb{R},\ a > 1$ şi $\alpha > 0$

3) $\lim\limits_n \frac{a^n}{n!} = 0 \quad (\forall)\ a \in \mathbb{R}$.

4) $\lim\limits_n \frac{n!}{n^n} = 0$

1) Se verifică simplu că şirul $(\sqrt[n]{n})_{n \geqslant 3}$ este descrescător. Prin urmare există $a = \lim\limits_n \sqrt[n]{n}$ şi avem $a = \inf\limits_n \sqrt[n]{n}$. Evident $a \geqslant 1$. Pentru $n \geqslant 3$ avem

$$n \geqslant a^n = (1 + (a-1))^n \geqslant n(n-1)(a-1)^2$$

şi deci

$$(a-1)^2 \leqslant \frac{1}{n-1}$$

adică $a - 1 = 0$, $a = 1$.

2) Fie $n_o \in \mathbb{N}$, $n_o > \alpha$. Avem pentru $n > 2n_o$

$$a^n = \left[1 + (a-1)\right]^n \geqslant C_n^{n_o+1}(a-1)^{n_o+1}$$

şi deci

$$a^n \geqslant n(n-1)(n-2)\ \ldots\ (n-n_o)\ \frac{(a-1)^{n_o+1}}{(n_o+1)!}$$

şi deci

$$\frac{n^\alpha}{a^n} \leqslant \frac{n^{n_o}}{a^n} \leqslant \frac{1}{n} \quad \frac{(n_o+1)!}{(a-1)^{n_o+1}} \quad (2)^{n_o}$$

ceea ce arată că

$$\frac{n^\alpha}{a^n} \longrightarrow 0$$

3) Este suficient să considerăm cazul $a > 0$. Avem

$$\frac{a^{n+1}}{(n+1)!} \Big/ \frac{a^n}{n!} = \frac{a}{n+1}$$

şi deci

$$\frac{a^{n+1}}{(n+1)!} < \frac{a^n}{n!} \quad (\forall)\ n \geqslant a$$

Prin urmare avem $\lim\limits_n \frac{a^n}{n!} = \inf\limits_n \frac{a^n}{n!} = \theta$. Din

$$\lim_n \left(\frac{a^{n+1}}{n+1} \Big/ \frac{a^n}{n}\right) = 0$$

rezultă $\theta = 0$.

4) Din

$$\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \Big/ \frac{n!}{n^n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}$$

rezultă că şirul $(\frac{n!}{n^n})_n$ este descrescător. Fie

$$a = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n}$$

Intrucît

$$\lim_n \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \Big/ \frac{n!}{n^n} = e$$

rezultă că $a = 0$.

Exerciţii

1. Să se arate că şirul $(n)_n$ al numerelor naturale nu are puncte limită în $\mathbb{R}$ dar ca şir în $\overline{\mathbb{R}}$ este convergent şi are limita $+\infty$.

2. Să se calculeze

$$\lim_n \frac{n}{n^2-n+1}, \quad \lim_n \frac{n^2+n+1}{n^2-n+1}; \quad \lim_n \frac{n^3}{n^2-n+1}$$

$$\lim_n \frac{n}{\sqrt{n^2-n+1}}; \quad \lim_n (\sqrt{n^2+n-1} - n); \quad \lim_n (\sqrt{n+1} - n^{1/3})$$

3. Fie $(x_n)_n$ un şir mărginit în $\mathbb{R}$, care are un singur punct limită. Atunci $(x_n)_n$ este convergent.

4. Să se arate că şirul $(x_n)_n$, $x_n=(-1)^n n$, nu are puncte limită în $\mathbb{R}$ şi nu este convergent în $\overline{\mathbb{R}}$. Să se arate că în $\overline{\mathbb{R}}$ avem

$$\liminf_n x_n = -\infty, \quad \limsup_n x_n = +\infty.$$

Cda. 105/989 Fasc. 6

5. Fie $(x_n)_n$ un şir de numere reale pozitive astfel încît nu are puncte limită în $\mathbb{R}$. Să se arate că şirul $(x_n)_n$ este convergent în $\overline{\mathbb{R}}$ şi $\lim\limits_n x_n = +\infty$.

6. Fie α un număr real pozitiv. Să se calculeze

$$\lim_n \frac{1 + 2^\alpha + 3^\alpha + \dots + n^\alpha}{1+2^\alpha + 3^\alpha + \dots + (n+1)^\alpha}$$

7. Fie $(x_n)_n$ un şir de numere reale şi α un punct limită al acestui şir în $\overline{\mathbb{R}}$. Atunci

$$\liminf_n x_n \leq \alpha \leq \limsup_n x_n$$

8. Fie $(x_n)_n$ un şir din $\mathbb{R}$ cu proprietatea că

$$\mathbb{Q} = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

Să se arate că orice punct din $\mathbb{R}$ este punct limită pentru şirul $(x_n)_n$.

9. Fie $(x_n)_n$ un şir din $\mathbb{R}$ şi $(u_n)_n$ un şir convergent în $\mathbb{R}$ astfel încît pentru orice $n \in \mathbb{N}$ termenul u_n este un punct limită al şirului $(x_n)_n$. Să se arate că $\lim\limits_n u_n$ este de asemenea un punct limită al şirului $(x_n)_n$.

1o. Fie $(x_n)_n$, (y_n) două şirui din $\mathbb{R}$. Atunci avem

$$\overline{\lim} (x_n + y_n) \leq \overline{\lim}\, x_n + \overline{\lim}\, y_n$$

$$\underline{\lim} (x_n + y_n) \geq \underline{\lim}\, x_n + \underline{\lim}\, y_n$$

cu condiţia ca expresiile din membrul drept al acestor relaţii să aibă sens (să nu avem $(-\infty) + (+\infty)$ sau $(+\infty) + (-\infty)$).

11. Fie $(x_n)_n$ (y_n) două şiruri în $\mathbb{R}$ astfel încît $x_n > 0$, $y_n > 0$. Atunci

$$\overline{\lim}\,(x_n\, y_n) \leq \overline{\lim}\, x_n\, \overline{\lim}\, y_n$$

$$\underline{\lim}\,(x_n\, y_n) \geq \underline{\lim}\, x_n\, \underline{\lim}\, y_n$$

cu condiţia ca expresiile din membrul drept al acestor relaţii să aibe sens (să nu avem $(+\infty)\, 0$ sau $0\, (+\infty)$).

Dacă în plus şirul $(y_n)_n$ este convergent atunci

$$\overline{\lim}\,(x_n\, y_n) = \overline{\lim}\, y_n \lim y_n$$

$$\underline{\lim}\,(x_n\, y_n) = \underline{\lim}\, x_n \lim y_n$$

cu aceleaşi restricţii ordonînd membrul drept al acestor relaţii.

12. Pentru orice şir $(x_n)_n$ are loc relaţia

$$\overline{\lim}\,(-x_n) = -\,\underline{\lim}\, x_n$$

13. Fie $(x_n)_n$ un şir în $\mathbb{R}$ astfel încît

$$\lim_n (x_{n+1} - x_n) = 0$$

Atunci, punînd $a = \underline{\lim}\, x_n$, $b = \overline{\lim}\, x_n$, să se arate că orice punct $\alpha \in [a,b]$ este punct limită al şirului $(x_n)_n$.

14. Fie $(x_n)_n$ un şir din $\mathbb{R}$ cu proprietatea că $\lim\limits_n x_n = 0$, $x_{2n} < 0$, $x_{2n+1} > 0$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$ şi că $\lim\limits_n (x_0 + x_2 + \ldots + x_{2n}) = -\infty$. Să se arate că $\lim\limits_n (x_1 + x_3 + \ldots + x_{2n+1}) = +\infty$ şi că pentru orice $\alpha \in \mathbb{R}$ există o permutare $(p_n)_n$ a mulţimii $\mathbb{N}$ astfel încît

$$\lim_n (x_{p_0} + x_{p_1} + \ldots + x_{p_n}) = \alpha$$

15. Să se arate că oricare ar fi şirul (x_n) de numere reale strict pozitive există un subşir $(x_{p_n})_n$ al acestui şir cu proprietatea

$$\frac{1 + x_{p_n+1}}{x_{p_n}} > \frac{1 + p_n}{p_n}\,.$$

Să se deducă de aici că

$$\overline{\lim}\ n\left(\frac{1 + x_{n+1}}{x_n} - 1\right) \geqslant 1$$

$$\overline{\lim}\ \left(\frac{1 + x_{n+1}}{x_n}\right)^n \geqslant e$$

16. Fie $0 < \alpha < 1$, $a,b \in \mathbb{R}$ şi $(x_n)_n$ un şir de numere reale astfel încît $x_0 = a$, $x_1 = b$

$$x_{n+1} = \alpha x_n + (1 - \alpha)\, x_{n-1} \qquad n \geqslant 1$$

Să se arate că şirul $(x_n)_n$ este convergent şi să se calculeze $\lim\limits_n x_n$.

17. Fie $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1})$ un sistem de $p \geqslant 2$ numere reale, $0 < \alpha < 1$ cu $\sum\limits_{i=1}^{p} \alpha_i = 1$ şi fie $a_0, a_1, \ldots, a_{p-1}$ un sistem oarecare de numere reale. Se consideră şirul $(x_n)_n$ unde

$$x_i = a_i \quad \text{dacă} \quad 0 \leqslant i \leqslant p-1$$

şi

$$x_n = \alpha_0\, x_{n-1} + \alpha_1\, x_{n-2} + \cdots + \alpha_{p-1}\, x_{n-p}$$

pentru orice $n \geqslant p$. Să se arate că şirul $(x_n)_n$ este convergent şi să se calculeze $\lim\limits_n x_n$.

18. Se consideră două şiruri $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ din $\mathbb{R}_+$ unde $a_0 < b_0$, $a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$, $b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$. Să se arate că cele două şiruri sînt convergente şi au aceeaşi limită.

19. Să se arate că

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} \ln k\right) = +\infty$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e$$

2o. Fie $(x_n)_n$ un şir de numere reale strict pozitive. Să se arate că

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} \leqslant \underline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} \leqslant \overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} \leqslant \overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$$

Să se deducă de aici că dacă şirul $(\frac{x_{n+1}}{x_n})$ este convergent atunci şirul $\sqrt[n]{x_n}$ este de asemenea convergent şi

$$\lim_{n} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n} \frac{x_{n+1}}{x_n}$$

21. Să se arate că

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{(n!)^2}} = 4$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\ldots(2n)} = \frac{4}{e}$$

$$\lim_{n} \sqrt[n]{\ln(n!)} = 1.$$

IV. SERII CONVERGENTE DE NUMERE REALE

1. Serii convergente

In această secţiune se va prezenta noţiunea de serie convergentă de numere reale, unele criterii de convergenţă şi cîteva proprietăţi privind seriile absolut convergente. Secţiunea se încheie cu prezentarea cîtorva exemple remarcabile de serii convergente de numere reale.

Definiţie. Fie $(x_n)_n$ un şir de numere reale. Pentru fiecare $x \in \mathbb{N}$ punem

$$s_n := x_o + x_1 + \ldots + x_n = \sum_{k=o}^{n} x_k$$

Perechea $((x_n)_n, (s_n)_n)$ formată din şirurile $(x_n)_n$ şi $(s_n)_n$ se numeşte serie asociată şirului $(x_n)_n$ care se va nota simplu prin $\sum_n x_n$. Numărul x_n se numeşte termenul de rang n al seriei iar numărul s_n se numeşte suma parţială de rang n a seriei.

Seria $\sum_n x_n$ se numeşte convergentă dacă şirul $(s_n)_n$ al sumelor ei parţiale este convergent. Numărul $\lim_n s_n$ se numeşte suma seriei $\sum_n x_n$, care va fi notată de asemenea prin $\sum_n x_n$.

Dacă seria $\sum_n x_n$ nu este convergentă atunci ea se numeşte divergentă.

Propoziţia 1. Fie $\sum_n x_n$, $\sum_n y_n$ două serii de numere reale astfel încît există $p,q \in \mathbb{N}$ cu proprietatea

$$x_{n+p} = y_{n+q} \ (\forall) \ n \in \mathbb{N}$$

Atunci seria $\sum_n x_n$ este convergentă atunci şi numai atunci cînd seria $\sum_n y_n$ este convergentă.

Demonstrație. Notînd

$$s_n = \sum_{k=o}^{n} x_k \ , \quad t_n = \sum_{k=o}^{n} y_k$$

avem

$$s_{n+p} - t_{n+q} = \sum_{k=o}^{p} x_k - \sum_{k=o}^{q} y_k$$

și deci șirul dacă $(s_n)_n \longrightarrow s$, atunci $t_n \longrightarrow t$ unde

$$s - t = \sum_{k=o}^{p} x_k - \sum_{k=o}^{q} y_k$$

Propoziția 2. Dacă seria $\sum_n x_n$ este convergentă atunci $x_n \longrightarrow 0$.

Demonstrație. Dacă $(s_n)_n$ este șirul sumelor parțiale ale seriei convergente $\sum_n x_n$ atunci avem

$$x_n = s_n - s_{n-1}$$

și afirmația rezultă din faptul că

$$\lim_n s_n = \lim_n s_{n-1} .$$

Propoziția 3. (Criteriul lui Cauchy). O serie $\sum_n x_n$ de numere reale este convergentă dacă și numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încît

$$n \geqslant n_\varepsilon \ , \ p \in \mathbb{N} \Longrightarrow \left| \sum_{k=n}^{n+p} x_k \right| < \varepsilon$$

Demonstrație.

Fie $(s_n)_n$ șirul sumelor parțiale ale seriei $\sum_n x_n$. Prin definiție $\sum_n x_n$ este convergentă dacă și numai dacă șirul $(s_n)_n$ este convergent sau echivalent dacă şi numai dacă şirul $(s_n)_n$ este Cauchy. Faptul că $(s_n)_n$ este un şir Cauchy, înseamnă că următoarea proprietate are loc:pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încît

$$n > n_\varepsilon,\ p \in \mathbb{N} \Longrightarrow |s_{n+p} - s_{n-1}| < \varepsilon$$

sau echivalent

$$n > n_\varepsilon,\ p \in \mathbb{N} \Longrightarrow \left|\sum_{k=n}^{n+p} x_k\right| < \varepsilon$$

<u>Propoziţia</u> 4. Fie $\sum_n x_n$, $\sum_n y_n$ două serii convergente şi $\alpha \in \mathbb{R}$. Atunci seriile $\sum_n (x_n+y_n)$, $\sum_n (\alpha x_n)$ sînt de asemenea convergente şi

$$\sum_n (x_n+y_n) = \sum_n x_n + \sum_n y_n .$$

$$\sum_n (\alpha x_n) = \alpha\cdot\left(\sum_n x_n\right)$$

<u>Demonstraţie</u>. Fie $s_n = \sum_{k=o}^{n} x_k$, $t_n = \sum_{k=o}^{n} y_k$.

Avem:

$$\sum_{k=o}^{n} (\alpha x_k) = \sum_{k=o}^{n} x_k) = \alpha s_n$$

$$\sum_{k=o}^{n} (x_k+y_k) = \sum_{k=o}^{n} x_k + \sum_{k=o}^{n} y_k = s_n + t_n$$

şi deci

$$\sum_n (\alpha x_n) = \lim_n \sum_{k=o}^{n} (\alpha x_k) = \alpha \lim_n s_n = \alpha\left(\sum_n x_n\right)$$

$$\sum_n (x_n + y_n) = \lim_n \sum_{k=o}^{n} (x_k+y_k) = \lim_n (s_n+t_n) = \sum_n x_n + \sum_n y_n .$$

<u>Propoziţia 5</u>.((Criteriul lui Abel (1802-1829))

Fie $(x_n)_n$, (y_n) două şiruri din $\mathbb{R}$ astfel încît $(x_n)_n$ este descrescător şi $\lim\limits_n x_n = 0$ iar şirul $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} y_k\right)_n$ este mărginit. Atunci seria $\sum\limits_n (x_n\, y_n)$ este convergentă.

<u>Demonstraţie</u>. Punînd $t_n = \sum\limits_{k=0}^{n} y_k$ rezultă că şirul $(t_n)_n$ este mărginit şi deci există $M > 0$ astfel încît

$$|t_n| \leq M \ (\forall)\ n \in \mathbb{N}$$

Pentru $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încît

$$n \geqslant n_\varepsilon \Longrightarrow x_n < \frac{\varepsilon}{2M}\ .$$

Avem pentru $n \geqslant n_\varepsilon$ şi $p \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=n}^{n+p} a_k b_k = \sum_{k=n}^{n+p} a_k(t_k - t_{k-1}) = \sum_{k=n}^{n+p} (a_k - a_{k+1})t_k + a_{n+p+1}\, t_{n+p} - a_n t_{n-1}$$

şi deci

$$\left|\sum_{k=n}^{n+p} a_k b_k\right| \leqslant M(a_n - a_{n+p+1}) + M\, a_{n+p-1} + M\, a_n = 2Ma_n < \varepsilon$$

<u>Corolar</u> 6 ((Criteriul lui Leibniz (1646-1716))

Dacă şirul $(x_n)_n$ este descrescător şi $\lim\limits_n x_n = 0$ atunci seria $\sum\limits_n (-1)^n x_n$ este convergentă.

<u>Propoziţia</u> 7. Pentru orice $q \in \mathbb{R}$, seria $\sum\limits_n q^n$ este convergentă dacă şi numai dacă $|q| < 1$. In cazul $|q| < 1$ suma seriei $\sum\limits_n q^n$ este $\frac{1}{1-q}$.

Demonstrație. Dacă $|q| \geq 1$ atunci seria $\sum_n q^n$ nu este convergentă întrucît $|q^n| \geq 1$ (ceea ce arată că $|q^n| \not\to 0$). Dacă $|q| < 1$ atunci $q^n \longrightarrow 0$ iar din

$$\sum_{k=o}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

deducem

$$\sum_n q^n = \lim_n \sum_{k=o}^{n} q^n = \frac{1}{1-q} .$$

2. Serii cu termeni pozitivi

In acest paragraf vom considera numai serii cu termeni pozitivi adică serii $\sum_n x_n$, cu $x_n \geq 0$ $(\forall)$ $n \in N$. In acest caz dacă $(s_n)_n$ este șirul sumelor parțiale ale seriei $\sum_n x_n$, atunci întrucît

$$s_{n+1} = s_n + x_{n+1} ,$$

rezultă că $(s_n)_n$ este crescator și deci seria $\sum_n x_n$ va fi convergentă dacă șirul $(s_n)_n$ este mărginit adică dacă există $M > 0$ astfel încît

$$\sum_{k=o}^{n} x_k \leq M \ (\forall) \ n \in N.$$

Propoziția 8 (Criteriul comparației)

Fie $\sum_n x_n$, $\sum_n y_n$ două serii cu termeni pozitivi astfel încît există $n_o \in N$ cu proprietatea

$$n \geq n_o \Longrightarrow x_n \leq y_n .$$

Dacă seria $\sum_n y_n$ este convergentă atunci și seria $\sum_n x_n$ este de asemenea convergentă.

Demonstrație. Fie $M>0$ astfel încît

$$\sum_{k=0}^{n} y_k \leq M \ (\forall)\ n\in \mathbb{N}$$

Din

$$\sum_{k=0}^{n} x_k \leq \sum_{k=0}^{n_0} x_k + \sum_{k=0}^{n} y_k \leq \sum_{k=0}^{n_0} x_k + M$$

rezultă că şirul $\left(\sum_{k=0}^{n} x_k\right)_n$ este mărginit şi deci seria $\sum_n x_n$ este convergentă.

Propoziția 9 (Criteriul raportului). Fie $\sum_n x_n$ o serie cu termeni strict pozitivi astfel încît are loc următoarea proprietate: există $n_0\in\mathbb{N}$ şi $0\leq q<1$ astfel încît

$$n\geq n_0 \Longrightarrow \frac{x_{n+1}}{x_n} \leq q\,.$$

Atunci seria $\sum_n x_n$ este convergentă.

Demonstrație. Relația

$$n\geq n_0 \Longrightarrow \frac{x_{n+1}}{x_n} \leq q$$

este echivalentă cu

$$n\geq n_0 \Longrightarrow x_{n+1} \leq q x_n\,.$$

De aici se deduce inductiv

$$p\in\mathbb{N} \Longrightarrow x_{n_0+p} \leq q^p x_{n_0}\,.$$

Intrucît $0\leq q<1$ seria $\sum_p q^p x_{n_0}$ este convergentă şi deci din criteriul comparației rezultă că seria

$$\sum_n x_n$$

este de asemenea convergentă.

Remarcă. Se verifică direct că proprietatea "există $n_o \in N$ şi $0 \leq q < 1$ astfel încît

$$n \geq n_o \Longrightarrow \frac{x_{n+1}}{x_n} \leq q \text{ "}$$

este echivalentă cu proprietatea

$$\overline{\lim} \frac{x_{n+1}}{x_n} < 1.$$

Aşadar dacă $\overline{\lim} \frac{x_{n+1}}{x_n} < 1$ atunci seria $\sum_n x_n$ este convergentă.

Propoziţia 10. (Criteriul rădăcinii). Fie $\sum_n x_n$ o serie cu termeni pozitivi cu proprietatea "există $n_o \in N$ şi $0 \leq q < 1$ astfel încît

$$n \geq n_o \Longrightarrow \sqrt[n]{x_n} \leq q \text{ "}$$

Atunci seria $\sum_n x_n$ este convergentă.

Demonstraţie. Ipoteza

$$n \geq n_o \Longrightarrow \sqrt[n]{x_n} \leq q$$

este echivalentă că

$$n \geq n_o \Longrightarrow x_n \leq q^n \text{ "}$$

şi deoarece $0 \leq q < 1$ atunci din criteriul comparaţiei deducem că seria $\sum_n x_n$ este convergentă.

Remarcă. Se verifică direct că proprietatea "există $n_o \in N$ şi $0 \leq q < 1$ astfel încît

$$n \geq n_o \Longrightarrow \sqrt[n]{x_n} \leq q\text{"}$$

este echivalentă cu proprietatea

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{x_n} < 1.$$

Aşa dar dacă $\overline{\lim} \sqrt[n]{x_n} < 1$ atunci seria $\sum_n x_n$ este convergentă.

Propoziţia 11.(Criteriul lui Raab-Duhamel). Fie $\sum_n a_n$ o serie cu termeni strict pozitivi cu proprietatea

"există $n_0 \in \mathbb{N}$ şi $q > 1$ astfel încît

$$n \geqslant n_0 \Longrightarrow n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \geqslant q \text{"}$$

Atunci seria $\sum_n a_n$ este convergentă.

Demonstraţie. Punînd $q = 1 + \varepsilon$ cu $\varepsilon > 0$ avem

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right) \geqslant q \Longleftrightarrow n\, a_n \geqslant (n+1)\, a_{n+1} + \varepsilon a_{n+1}$$

şi deci

$$n \geqslant n_0 \Longrightarrow n\, a_n \geqslant (n+1)\, a_{n+1} + \varepsilon a_{n+1}\, .$$

De aici rezultă, adunînd aceste relaţii pentru n între n_0 şi n_0+p cu $p \in \mathbb{N}$,

$$n_0 a_{n_0} \geqslant (n_0+p)\, a_{n_0+p} + \varepsilon(a_{n_0+1} + \dots + a_{n_0+p})$$

şi deci

$$\varepsilon(a_{n_0+1} + \dots + a_{n_0+p}) \leqslant n_0\, a_{n_0}\, ,$$

$$a_{n_0+1} + \dots + a_{n_0+p} \leqslant \frac{n_0 a_{n_0}}{\varepsilon}\, .$$

ceea ce arată că seria $\sum a_{n_0+p}$ este convergentă şi deci seria $\sum_n a_n$ este convergentă.

Propoziţia 12. (Criteriul condensării). Fie $\sum_n x_n$ o serie cu termeni pozitivi astfel încît şirul $(x_n)_n$ este descrescător. Atunci seria $\sum_n x_n$ este convergentă dacă şi numai dacă seria $\sum_n 2^n x_{2^n}$ este convergentă.

Demonstraţie. Fie $s_n = \sum_{k=0}^{n} x_k$, $t_n = \sum_{k=0}^{n} 2^k x_{2^k}$. Avem

$$2^n x_{2^{n+1}} \leqslant \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} x_k \leqslant 2^n x_{2^n}$$

şi deci

$$s_{2^{n+1}} \leqslant x_0 + t_n$$

$$t_{n+1} \leqslant 2\, s_{2^{n+1}}$$

ceea ce arată că $(s_n)_n$ este mărginit dacă şi numai dacă $(t_n)_n$ este mărginit şi deci seria $\sum_n x_n$ este convergentă dacă şi numai dacă seria $\sum_n 2^n x_{2^n}$ este convergentă.

Corolar 13. Seria $\sum_n \frac{1}{n^\alpha}$ este convergentă dacă şi numai dacă $\alpha > 1$.

3. Serii absolut convergente

Definiţie. O serie de numere reale $\sum_n x_n$ se numeşte absolut convergentă dacă seria $\sum_n |x_n|$ este convergentă.

Propoziţia 14. Dacă o serie este absolut convergentă atunci ea este convergentă.

Demonstraţie. Fie $\sum_n x_n$ o serie absolut convergentă. Atunci pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ cu proprietatea

$$n \geqslant n_\varepsilon,\ p \in \mathbb{N}_\varepsilon \Rightarrow \sum_{k=n}^{n+p} |x_k| < \varepsilon$$

De aici rezultă că

$$n \geq n_\varepsilon\,,\ p \in \mathbb{N}_\varepsilon \Longrightarrow \left|\sum_{k=n}^{n+p} x_k\right| \leq \sum_{k=n}^{n+p} |x_k| < \varepsilon$$

ceea ce arată că seria $\sum_n x_n$ este convergentă.

Propoziția 15. Fie $\sum_n x_n$ o serie absolut convergentă și $(a_n)_n$ un şir cu $a_n \longrightarrow 0$. Atunci punînd

$$b_n := \sum_{k+\ell=n} x_k\, a_\ell$$

avem $b_n \longrightarrow 0$.

Demonstrație. Intrucît $\sum_n x_n$ este absolut convergentă şi $(a_n)_n$ este convergent, deci mărginit, există $M > 0$ cu proprietatea

$$\sum_{k=0}^{n} |x_k| \leq M\,,\ |a_n| \leq M\ (\forall)\ n \in \mathbb{N}\,.$$

Fie acum $\varepsilon > 0$. Din ipoteză există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ cu proprietatea

$$n \geq n_\varepsilon\,,\ p \in \mathbb{N} \Rightarrow \sum_{k=n}^{n+p} |x_k| < \varepsilon/2M\,,\ |a_n| \leq \varepsilon/2M$$

Pentru $n \geq 2n_\varepsilon$ avem, $n - n_\varepsilon \geq n_\varepsilon$ şi deci

$$|x_o a_n + x_1 a_{n-1} + \ldots + x_{n_\varepsilon} a_{n-n_\varepsilon}| \leq |x_o|\,|a_n| + |x_n|\,|a_{n-1}| + \ldots + |x_{n_\varepsilon}|\,|a_{n-\varepsilon}| \leq$$
$$< \frac{\varepsilon}{2M} M = \frac{\varepsilon}{2}$$

$$|x_{n_\varepsilon+1}\, a_{n-n_\varepsilon-1} + x_{n_\varepsilon+2}\, a_{n-n_\varepsilon-2} + \ldots + x_n\, a_o| \leq$$

$$\leq |x_{n\varepsilon+1}|\,|a_{n-n_\varepsilon-1}| + |x_{n_\varepsilon+2}|\,|a_{n-n_\varepsilon-2}| + \ldots + |x_n|\,|a_o| \leq M\,\frac{\varepsilon}{2M} = \frac{\varepsilon}{2}$$

De aici rezultă

$$|b_n| < \varepsilon\ (\forall)\ n \geq 2n_\varepsilon\,.$$

adică $b_n \longrightarrow 0$.

Remarcă. Dacă $(x_n)_n$ şi $(a_n)_n$ sînt două şirui de numere reale atunci şirul

$$\Big(\sum_{k+\ell=n} x_k a_\ell\Big)_n$$

se numeşte convoluţia celor două şiruri şi se notează cu $(x_n)_n * (a_n)_n$. Propoziţia precedentă arată că dacă $\sum_n x_n$ este o serie absolut convergentă atunci pentru orice şir $(a_n)_n$ cu limita zero şirul $(x_n)_n * (a_n)_n$ are de asemenea limita zero. Lăsăm cititorului să demonstreze că această proprietate caracterizează absolut convergenţa seriei $\sum_n x_n$. Mai precis dacă şirul $(x_n)_n$ este astfel încît pentru orice şir $(a_n)_n$ cu limita zero şirul $(x_n)_n * (a_n)_n$ are de asemenea limita zero atunci seria $\sum_n x_n$ este absolut convergentă.

Definiţie: Fie $\sum_n x_n$, $\sum_n y_n$ două serii de numere reale. Seria $\sum_n z_n$ unde

$$z_n = \sum_{k+\ell=n} x_k y_\ell$$

se numeşte produsul celor două serii.

Propoziţia 16. Fie $\sum_n x_n$, $\sum_n y_n$ două serii de numere reale şi $\sum_n z_n$ produsul acestor serii. Avem:

a) Dacă $\sum_n x_n$ şi $\sum_n y_n$ sînt absolut convergente atunci seria $\sum_n z_n$ este de asemenea absolut convergentă.

b) Dacă $\sum_n x_n$ este absolut convergentă iar $\sum_n y_n$ este convergentă atunci $\sum_n z_n$ este convergentă şi avem

$$\sum_n z_n = \Big(\sum_n x_n\Big)\Big(\sum_n y_n\Big).$$

Demonstraţie. a) Dacă $\sum_n x_n$ şi $\sum_n y_n$ sînt absolut convergente atunci există $M > 0$ astfel încît

$$\sum_{k=o}^{n} |x_k| \leq M, \quad \sum_{k=o}^{n} |y_k| \leq M \ (\forall)\ n \in \mathbb{N}$$

Din

$$\sum_{k=o}^{n} |z_k| \leq \sum_{k=o}^{n} \left(\left| \sum_{k+\ell=n} |x_k||y_k| \right) = \sum_{k+\ell \leq n} |x_k||y_\ell| \leq \sum_{k=o}^{n} |x_k| \right) \left(\sum_{\ell=o}^{n} |y_k| \right) \leq M^2$$

deducem că $\sum_n z_n$ este absolut convergentă.

b) Presupunem că $\sum_n x_n$ este absolut convergentă şi că $\sum_n y_n$ este convergentă. Fie

$$s_n = \sum_{k=o}^{n} x_k\ ,\ s = \sum_n x_n\ , \quad t_n = \sum_{k=o}^{n} y_k\ ,\ t = \sum_n y_n\ .$$

Avem $(t - t_n) \longrightarrow 0$ şi deci din propoziţia 15 deducem

$$(x_o(t - t_n) + x_1(t-t_{n-1})+\ldots+ x_n(t-t_0) \longrightarrow 0$$

Pe de altă parte avem

$$x_o(t-t_n) + x_1(t-t_{n-1})+\ldots+x_n(t-t_0)=s_n t - u_n$$

unde $u_n = \sum_{k=o}^{n} z_k$. Aşa dar

$$\lim_n (s_n t - u_n) = 0$$

şi deci

$$\lim_n u_n = \lim_n (s_n t) = s \cdot t$$

<u>Propoziţia</u> 17. Fie $\sum_n x_n$ o serie absolut convergentă. Atunci pentru orice permutare $(p_n)_n$ a lui $\mathbb{N}$ seria $\sum_n x_{p_n}$ este absolut convergentă şi are aceiaşi sumă ca seria $\sum_n x_n$.

<u>Demonstrație</u>. Avem, pentru orice $n \in N$,

$$\sum_{k=o}^{n} |x_{p_k}| \leqslant \sum_{i=o}^{m} |x_i|$$

unde $m := \max(p_o, p_1, \ldots, p_n)$. De aici și din faptul că seria $\sum_n x_n$ este absolut convergentă rezultă că șirul $(\sum_{k=o}^{n} |x_{p_k}|)_n$ este mărginit și deci seria $\sum_n x_{p_n}$ este absolut convergentă. Să arătăm acum că seriile $\sum_n x_n$, $\sum_n x_{p_n}$ au aceeași sumă. Fie $s = \sum_n x_n$. Pentru $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in N$ astfel încît

$$n > n_\varepsilon \Longrightarrow \sum_{k=n_\varepsilon}^{n} |x_k| < \varepsilon/2$$

$$n > n_\varepsilon \Longrightarrow \left| s - \sum_{n=o}^{n} x_n \right| < \varepsilon/2$$

Alegem acum m_ε astfel încît

$$m \geqslant m_\varepsilon \Longrightarrow p_m > n_\varepsilon .$$

Avem pentru $m \geqslant m_\varepsilon$

$$s - \sum_{k=o}^{m} x_{p_k} = s - \sum_{k=o}^{n} x_k - \sum_{\substack{k \leqslant m \\ p_k > n}} x_{p_k} .$$

și deci

$$\left| s - \sum_{k=o}^{m} x_{p_k} \right| \leqslant \left| s - \sum_{k=o}^{n} x_k \right| + \sum_{\ell > n_\varepsilon}^{m'} |x_\ell|$$

unde $m' = \max(p_o, p_1, \ldots, p_m) > n_\varepsilon$. De aici și din considerațiile precedente deducem

$$m \geqslant m_\varepsilon \Longrightarrow \left| s - \sum_{k=o} x_{p_k} \right| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

ceea ce arată că $\sum_n x_{p_n} = \sum_n x_n$.

Cda. 105/983 Fasc. 7

Remarcă. Din propoziţia precedentă rezultă că dacă o serie $\sum_n x_n$ este absolut convergentă atunci pentru orice permutare $(p_n)_n$ a lui $\mathbb{N}$ seria $\sum_n x_{p_n}$ este convergentă. Lăsăm cititorului să verifice că această proprietate caracterizează absolut convergenţa adică: Dacă $\sum_n x_n$ este o serie de numere reale astfel încît oricare ar fi permutarea $(p_n)_n$ a lui $\mathbb{N}$ seria $\sum_n x_{p_n}$ este convergentă atunci seria $\sum_n x_n$ este absolut convergentă.

Propoziţia 18. Fie $(a_{n,m})_{(n,m)\in \mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ o familie de numere reale astfel încît există $M>0$ cu proprietatea

$$\sum_{n,m\leq k} |a_{n,m}| \leq M \quad (\forall)\ k\in\mathbb{N}$$

Atunci $(\forall)$ $n\in\mathbb{N}$ seriile $\sum_{m=1} a_{n,m}$, $\sum_{m=1} a_{m,n}$ sînt absolut convergente şi punînd

$$u_n = \sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m}, \qquad v_n = \sum_{m=1}^{\infty} a_{m,n}$$

seriile $\sum_n u_n$, $\sum_n v_n$ sînt de asemenea absolut convergente şi

$$\sum_n u_n = \sum_n v_n = \lim_{p\to\infty} \sum_{m,n\leq p} a_{mn}.$$

Demonstraţie. Din ipoteză rezultă că pentru orice n avem

$$\sum_{m=1}^{k} |a_{n,m}| \leq M, \quad \sum_{m=1}^{k} |a_{m,n}| \leq M$$

ceea ce arată că seriile

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m}, \quad \sum_{m=1}^{\infty} a_{m,n}$$

sînt absolut convergente. Punînd

$$u_n = \sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m} \quad , \quad v_n = \sum_{m=1}^{\infty} a_{m,n} \quad .$$

avem

$$|u_n| \leqslant \sum_{m=1}^{\infty} |a_{n,m}| \quad , \quad |v_n| \leqslant \sum_{m=1} |a_{m,n}|$$

şi deci din ipoteză rezultă că

$$\sum_{m=1}^{k} |u_n| \leqslant \sup_{\ell} \sum_{m,n\leqslant \ell} |a_{n,m}| \leqslant M$$

$$\sum_{n=1}^{k} |v_n| \leqslant \sup_{\ell} \sum_{m,n\leqslant \ell} |a_{m,n}| \leqslant M$$

ceea ce arată că seriile $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ sînt de asemenea absolut convergente. Fie acum $\varepsilon > 0$. Intrucît

$$\sup_{\ell} \sum_{m,n\leqslant \ell} |a_{m,n}| = L < \infty$$

rezultă că există $\ell_0 \in N$ cu proprietatea

$$L - \sum_{m,n\leqslant \ell_0} |a_{m,n}| < \varepsilon$$

De aici deducem că pentru orice $p \in N$ avem

$$\sum_{n=\ell_0+1}^{\ell_0+p} \sum_{m=1}^{\infty} |a_{n,m}| < \varepsilon , \left| \sum_{n=\ell_0+1}^{\ell_0+p} u_n \right| < \varepsilon$$

$$\sum_{n=\ell_0+1}^{\ell_0+p} \sum_{m=1}^{\infty} |a_{m,n}| < \varepsilon \quad , \left| \sum_{n=\ell_0+1}^{\ell_0+p} v_n \right| < \varepsilon$$

şi deci

$$\left| u - \sum_{m,n\leqslant \ell_0} a_{m,n} \right| \leqslant \left| u - \sum_{k=1}^{\ell_0} u_k \right| + \left| \sum_{k=1}^{\ell_0} u_k - \sum_{m,n\leq \ell_0} a_{m,n} \right|$$

$$\leq \lim_{p\to\infty}\left|\sum_{n=\ell_0+1}^{\ell_0+p} u_n\right| + \lim_{p\to\infty}\left|\sum_{k=1}^{\ell_0}\sum_{n=\ell_0+1}^{\ell_0+p} a_{k,n}\right| \leq$$

$$\varepsilon + \lim_{p\to\infty}\sum_{n=\ell_0+n}^{\ell_0+p}\sum_{k=1}^{\ell_0}|a_{k,n}| < 2\varepsilon,$$

$$\left|v - \sum_{m,n\leq\ell_0} a_{m,n}\right| \leq \left|u - \sum_{k=1}^{\ell_0} v_k\right| + \left|\sum_{k=1}^{\ell_0} v_k - \sum_{m,n\leq\ell_0} a_{m,n}\right| \leq$$

$$\leq \lim_{p\to\infty}\left|\sum_{n=\ell_0+1}^{\ell_0+p} v_n\right| + \lim_{p\to\infty}\left|\sum_{k=1}^{\ell_0}\sum_{n=\ell_0+1}^{\ell_0+p} a_{n,k}\right| \leq$$

$$\varepsilon + \lim_{p\to\infty}\sum_{n=\ell_0+1}^{\ell_0+p}\sum_{k=1}^{\ell_0}|a_{n,k}| < 2\varepsilon$$

4. Exemple remarcabile de serii convergente

Exemplul 1. Pentru orice $x \in R$ seria $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ (unde $0! = 1$) este absolut convergentă şi suma ei este e^x.

Demonstraţie. Afirmaţia este evidentă dacă $x = 0$. Dacă $x \neq 0$ atunci absolut convergenţa rezultă din criteriul raportului întrucît avem

$$\frac{\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right|}{\left|\frac{x^n}{n!}\right|} = \frac{|x|}{n+1}$$

şi deci $\frac{|x|}{n+1} < \frac{1}{2}$ pentru $n \geq 2|x|$.

Pe de altă parte punînd pent u $x \in R$

$$\varphi(x) = \sum_{n=0} \frac{x^n}{n!}$$

avem

$$\varphi(x)\cdot\varphi(y)=\Big(\sum_n \frac{x^n}{n!}\Big)\Big(\sum_n \frac{y^n}{n!}\Big)=\sum_n\Big(\sum_{k+\ell=n}\frac{x^k}{k!}\frac{y^\ell}{\ell!}\Big)=\sum_n\frac{1}{n!}(x+y)^n=$$

$$=\varphi(x+y)$$

De aici rezultă că pentru orice $x\in R$ avem

$$1=\varphi(0)=\varphi(x-x)=\varphi(x)\cdot\varphi(-x)$$

$$\varphi(x)=\varphi(2\tfrac{x}{2})=(\varphi(\tfrac{x}{2}))^2$$

şi deci $\varphi(x)>0$. Pe de altă parte un calcul direct ne dă

$$z>0\Longrightarrow\varphi(z)>1$$

şi deci

$$x<y\Longrightarrow\varphi(y)=\varphi(y-x)\cdot\varphi(x)>\varphi(x)$$

ceea ce arată că φ este crescătoare.

Pentru a demonstra că $\varphi(x)=e^x$ rămîne să arătăm că $\varphi(1)=e$.

Avem

$$(1+\tfrac{1}{n})^n=1+\frac{n}{1!}\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2}+\dots+\frac{n(n-1)\dots 2}{n!}\frac{1}{n^2}=$$

$$=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}(1-\tfrac{1}{n})+\dots+\frac{1}{n!}(1-\tfrac{1}{n})(1-\tfrac{2}{n})\dots(1-\tfrac{n-1}{n})\leqslant$$

$$\leqslant 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\dots+\frac{1}{n!}$$

şi deci

$$e=\lim_n(1+\tfrac{1}{n})^n\leqslant\lim_n(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\dots+\frac{1}{n!})=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$$

Pe de altă parte pentru n_0 fixat şi $n>n_0$ avem

$$(1+\tfrac{1}{n})^n\geqslant 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}(1-\tfrac{1}{n})+\dots+\frac{1}{n_0!}(1-\tfrac{1}{n})(1-\tfrac{2}{n})\dots\Big(1-\frac{n_0}{n}\Big)$$

şi deci

$$e = \lim_{n} (1 + \frac{1}{n})^n \geq 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n_o!}$$

Deoarece n_o este arbitrar rezultă

$$e \geq \sum_{n=o}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

Aşa dar

$$e = \varphi(1)$$

Exemplul 2. Pentru orice $x \in R$ cu $|x| < 1$ şi orice $\alpha \in R$ seria

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1) \ldots (\alpha-n+1)}{n!} x^n$$

este absolut convergentă şi suma ei este

$$(1 + x)^{\alpha}$$

Demonstraţie. Afirmaţia este evidenta pentru $x = 0$. Dacă $x \neq 0$ atunci absolut convergenţa seriei rezultă din criteriul raportului întrucît notînd

$$x_n = \frac{\alpha(\alpha-1) \ldots (\alpha-n+1) x^n}{n!}$$

avem

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\alpha - n}{n+1} x$$

şi deci

$$\frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} = \frac{n - \alpha}{n+1} |x|$$

ceea ce arată că luînd $|x| < q < 1$ există $n_{\alpha} \in N$ astfel încît

$$n \geq n_{\alpha} \Longrightarrow \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} < q .$$

Punînd pentru $n\in N$, $n\geq 1$ şi $\alpha\in R$,

$$\theta_n(\alpha)=\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)$$

vom arăta că are loc următoarea formulă

$$\theta_n(\alpha+\beta)=\theta_n(\alpha)+C_n^1\theta_{n-1}(\alpha)\theta_1(\beta)+C_n^2\theta_{n-2}(\alpha)\theta_2(\beta)+\ldots+$$

$$+C_n^{n-1}\theta_1(\alpha)\theta_{n-1}(\beta)+\theta_n(\beta)$$

Intr-adevăr formula este evident adevărată pentru $n=1$ întrucît

$$\theta_1(\alpha+\beta)=\alpha+\beta=\theta_1(\alpha)+\theta_1(\beta)$$

Presupunem formula adevărată pentru $n\in N$. Avem

$$\theta_{n+1}(\alpha+\beta)=\theta_n(\alpha)\cdot(\alpha+\beta-n)=$$

$$=\Big(\sum_{p+q=n}C_n^p\,\theta_p(\alpha)\cdot\theta_q(\beta)\Big)(\alpha+\beta-n)$$

Intrucît pentru orice $p,q\in N$ cu $p+q=n$ avem

$$\alpha+\beta-n=(\alpha-p)+(\beta-q)$$

deducem

$$\theta_p(\alpha)\,\theta_q(\beta)(\alpha+\beta-n)=\theta_{p+1}(\alpha)\,\theta_q+\theta_p(\alpha)\,\theta_{q+1}(\beta)$$

şi deci

$$\theta_{n+1}(\alpha+\beta)=\sum_{p+q=n}C_n^p\,\theta_{p+1}(\alpha)\,\theta_q(\beta)+\sum_{p+q=n}C_n^p\,\theta_p(\alpha)\,\theta_{q+1}(\beta)=$$

$$=\theta_{n+1}(\alpha)+\theta_{n+1}(\beta)+\sum_{p+q=n}(C_n^p+C_n^{p+1})\,\theta_{p+1}(\alpha)\,\theta_q(\beta)=$$

$$= \theta_{n+1}(\alpha) + \theta_{n+1}(\beta) + \sum_{p+q=1} C_{n+1}^{p+1}\,\theta_{p+1}(\alpha)\,\theta_q(\beta) =$$

$$= \sum_{p'+q'=n+1} C_{n+1}^{p'}\ \theta_{p'}(\alpha)\,\theta_{q'}(\beta)$$

Fie acum pentru $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\varphi(\alpha) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ \dots\ (\alpha-n+1)}{n!}\, x^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\theta_n(\alpha)}{n!}\, x^n .$$

Un calcul direct ne dă

$$\varphi(\alpha)\cdot\varphi(\beta) = \sum_{n=o}^{\infty}\Bigl(\sum_{p+q=n} \frac{\theta_p(\alpha)}{p!}\ \frac{\theta_q(\beta)}{q!}\ x^p\, x^q\Bigr) =$$

$$= \sum_{n=o}^{\infty} \frac{1}{n!}\ \theta_n(\alpha+\beta)\, x^n = \varphi(\alpha+\beta).$$

De aici deducem că pentru orice $\alpha \in \mathbb{R}$ avem

$$\varphi(o) = \varphi(\alpha-\alpha) = \varphi(\alpha)\cdot\varphi(-\alpha)$$

$$\varphi(\alpha) = \varphi\left(2\,\frac{\alpha}{2}\right) = \left(\varphi\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)^2$$

şi deci

$$\varphi(\alpha) > 0.$$

Pe de altă parte dacă $0 < \alpha < 1$ avem:

$$\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = \frac{n-\alpha}{n+1}\ |x| \leqslant \frac{n}{n+1} < 1$$

şi deci cum $x_{2n+1} > 0$ şi $x_{2n} < 0$ pentru orice $n \geqslant 1$ deducem că dacă $x \geqslant 0$ atunci

$$\varphi(\alpha) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ \dots\ (\alpha-n+1)}{n!}\, x^n > 1$$

De aici rezultă ţinînd seama de consideraţiile precedente că dacă $x \geq 0$

$$\alpha \geq 0 \Longrightarrow \varphi(\alpha) \geq 1$$

şi deci dacă $x \geq 0$ atunci

$$\alpha < \beta \Longrightarrow \varphi(\beta) = \varphi(\beta-\alpha)\cdot\varphi(\alpha) > \varphi(\alpha)$$

adică φ este crescătoare. Intrucît $\varphi(1) = 1 + x$ deducem că

$$\varphi(\alpha) = (1+x)^{\alpha} \quad (\forall) \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Dacă $x < 0$ atunci avem $\alpha \geq 0 \Longrightarrow \varphi(\alpha) < 1$ şi deci

$$\alpha < \beta \Longrightarrow \varphi(\beta) = \varphi(\beta-\alpha)\ \varphi(\alpha) < \varphi(\alpha)$$

adică φ este descrescătoare. Intrucît $\varphi(1) = 1 + x$ deducem că

$$\varphi(x) = (1+x)^{\alpha} \ (\forall) \ \alpha \in \mathbb{R}.$$

Exemplul 3. Pentru orice x seriile

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

sînt absolut convergente. Sumele celor două serii se notează prin

$$\sin x := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

$$\cos x := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Au loc următoarele relaţii:

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\sin(-x) = -\sin x, \ \cos(-x) = \cos x$$

$$\sin(0) = 0, \ \cos(0) = 1$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

In plus există un număr real notat π cu proprietatea $2 < \pi < 4$ astfel încît

$$\cos(\frac{\pi}{2}) = 0 \text{ şi } 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \Longrightarrow \cos x > 0.$$

şi

$$\sin(x+2\pi) = \sin x, \ \cos(x+2\pi) = \sin x$$

$$\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x, \quad \cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$$

<u>Demonstrație</u>. Faptul că cele două serii sînt absolut convergente rezultă din criteriul raportului întrucît

$$\left|\frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!}\right| \Big/ \left|\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right| = \frac{|x|^2}{(2n+2)(2n+3)},$$

$$\left|\frac{x^{2n+2}}{(2n+1)!}\right| \Big/ \left|\frac{x^{2n}}{(2n)!}\right| = \frac{|x|^2}{(2n+1)(2n+2)}.$$

Pe de altă parte avem

$$\sin x \cos y + \sin y \cos x =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{k+\ =n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} (-1)^\ell \frac{y^{2\ell}}{(2\ell)!} +$$

$$+\Big(\sum_{k+\ell=n} (-1)^\ell \frac{y^{2\ell+1}}{(2\ell+1)!} \frac{x^{2k}}{(2k)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x+y)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sin(x+y)$$

$$\cos x \cos y - \sin x \sin y =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{k+\ell=n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} (-1)^\ell \frac{y^{2\ell}}{(2\ell)!} -$$

$$- \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k+\ell=n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} (-1)^\ell \frac{y^{2\ell+1}}{(2\ell+1)!} =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{k+\ell=n}(-1)^k(-1)^\ell \frac{x^{2k}}{(2k)!}\frac{y^{2\ell}}{(2\ell)!} + \sum_{k+\ell=n-1}(-1)^{k+1}(-1)^\ell \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\frac{y^{2\ell+1}}{(2\ell+1)!}\Big) =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(x+y)^{2n}}{(2n)!} = \cos(x+y) .$$

Relaţiile $\sin(-x) = -\sin x$, $\cos(-x) = \cos x$, $\sin 0 = 0$, $\cos 0 = 1$ rezultă direct din definiţie. Avem $\sin^2 x + \cos^2 x = \cos(x-x) = \cos 0 = 1$.

Deoarece pentru $n \geq 1$ şi $0 \leq x \leq 2$ avem

$$\left|\frac{\frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!}}{\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}}\right| = \frac{|x^2|}{(2n+2)(2n+3)} < 1$$

$$\left|\frac{\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}}{\frac{x^{2n}}{(2n)!}}\right| = \frac{x^2}{(2n+1)(2n+1)} < 1$$

rezultă că pentru $0 \leq x \leq 2$ avem:

$$\sin x = \Big(x - \frac{x^3}{3!}\Big) + \Big(\frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}\Big) + \ldots + \Big(\frac{x^{4k+1}}{(4k+1)!} - \frac{x^{4k+3}}{(4k+3)!}\Big) + \ldots \geq 0$$

$$\sin x = x - \Big(\frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!}\Big) - \ldots - \Big(\frac{x^{4k+3}}{(4k+3)!} - \frac{x^{4k+5}}{(4k+5)!}\Big) \leq x$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \Big(\frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}\Big) + \ldots + \Big(\frac{x^{4k}}{(4k)!} - \frac{x^{4k+2}}{(4k+2)!}\Big) + \ldots \geq 1 - \frac{x^2}{2!}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \Big(\frac{x^6}{6!} - \frac{x^8}{8!}\Big) - \ldots - \Big(\frac{x^{4k+2}}{(4k+2)!} - \frac{x^{4k+4}}{(4k+4)!}\Big) \leq 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$$

$$0 \leq x \leq 2 \implies 0 \leq \sin x \leq x$$

$$0 \leq x \leq 2 \implies 1 - \frac{x^2}{2!} \leq \cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$$

De aici rezultă în particular că

$$|x| \leq 2 \Longrightarrow |\sin x| \leq |x| ,$$

$$0 \leq x \leq \sqrt{2} \Longrightarrow \cos x > 0$$

şi că $\cos 2 < 0$. Pe de altă parte din

$$\cos x - \cos y = \cos\left(\frac{(x+y)}{2} + \frac{(x-y)}{2}\right) - \cos\left(\frac{x+y}{2} + \frac{y-x}{2}\right) =$$

$$= 2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{y-x}{2}$$

rezultă că dacă $(x_n)_n$ este un şir din $\mathbb{R}$ care converge la x atunci $x_n - x \to 0$ şi deci $\sin(x_n - x) \to 0$ şi $\cos x_n \to \cos x$.

Punem prin definiţie

$$\pi = 2\sup\left\{x \in [0,2] \mid \cos x > 0\right\} .$$

Din consideraţiile precedente rezultă că

$$2\sqrt{2} < \pi < 4$$

Vom arăta că $\cos \frac{\pi}{2} = 0$. Pe de altă parte dacă $(x_n)_n$ este un şir din $(0,2)$ care converge la $\frac{\pi}{2}$ atunci $x_n - \frac{\pi}{2} \to 0$ şi deci

$$\cos \frac{\pi}{2} - \cos(x_n) = 2\sin \frac{\pi}{4} \sin \frac{x_n - \frac{\pi}{2}}{2} \to 0 .$$

Deci luînd $x_n \nearrow \frac{\pi}{2}$ obţinem $\cos \frac{\pi}{2} = \lim\limits_n \cos x_n \geq 0$. Pe de altă parte nu putem avea $\cos \frac{\pi}{2} > 0$ întrucît din definiţie ar exista $x_n \searrow \frac{\pi}{2}$ astfel încît $\cos x_n \leq 0$ pentru orice n şi deci am avea $\cos \frac{\pi}{2} = \lim\limits_n \cos x_n \leq 0$. Aşa dar $\cos \frac{\pi}{2} = 0$.

Avem

$$\sin \frac{\pi}{2} = \sqrt{1 - \cos^2 \frac{\pi}{2}} = 1,$$

$$\sin \pi = 2\sin \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} = 0, \quad \cos \pi = \cos^2 \frac{\pi}{2} - \sin^2 \frac{\pi}{2} = -1$$

$$\sin(x + 2\pi) = \sin x \cos 2\pi + \sin 2\pi \cos x = \sin x$$

$$\cos(x + 2\pi) = \cos x \cos 2\pi - \sin x \sin 2\pi = \cos x$$

Exerciţii

1. Se consideră pentru $\alpha \in \mathbb{R}$ seria

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}$$

Să se arate că seria este absolut convergentă dacă $\alpha \geq 0$, că este convergentă dar nu absolut convergentă dacă $-1 < \alpha < 0$ şi că nu este convergentă dacă $\alpha \leq -1$.

Indicaţie. Pentru $\alpha \geq 0$ se aplică criteriul lui Raale-Duhamel. Pentru $-1 < \alpha < 0$ se aplică criteriul lui Abel. Pentru $\alpha \leq -1$ se verifică că şirul termenilor seriei nu converge la zero.

2. Să se arate că următoarele serii sînt convergente:

$$a) \sum_n \frac{n!}{n^n}, \quad b) \sum_n \frac{n^2}{(n!)^2}, \quad c) \sum_n \frac{1.3.5.\ldots.(2n-1)}{2.4.6.\ldots.2n} \frac{1}{n}$$

3. Se consideră două serii cu termeni strict pozitivi

$$\sum_n a_n, \quad \sum_n b_n$$

astfel încît

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n} \ (\forall)\ n \in \mathbb{N}$$

şi astfel încît seria $\sum_n b_n$ este convergentă. Atunci seria $\sum_n a_n$ este de asemenea convergentă.

Indicație. Se verifică relația $\frac{a_n}{b_n} \leq \frac{a_1}{b_1} = M$ și deci $a_n < M\, b_n$ unde $M = \frac{a_1}{b_1}$.

4. Se consideră o serie $\sum_n a_n$ cu proprietatea că pentru orice serie convergentă $\sum_n b_n$ seria produs $\sum_n (a_n b_o + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_o b_n)$ este de asemenea convergentă. Să se arate că seria $\sum_n a_n$ este absolut convergentă.

5. Se consideră seria $\sum_n \frac{a^n\, n!}{n^n}$. Să se arate că această serie este absolut convergentă dacă $|a| < e$, este divergentă dacă $|a| \geq e$.

6. Se consideră seria $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n\, \ln^{\alpha} n}$. Să se arate că această serie este convergentă dacă $\alpha > 1$ și divergentă pentru $\alpha \leq 1$.

Indicație. Se aplică criteriul condensării.

7. Se consideră seria $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin n}{\ln n}$. Să se arate că această serie este convergentă dar nu este absolut convergentă.

Indicație. Se aplică criteriul lui Abel observînd că

$$\sum_{k=1}^{n} \sin k = \frac{\sin n/2}{\sin 1/2} \cdot \sin \frac{n+1}{2} \text{ și deci } \left|\sum_{k=1}^{n} \sin k\right| \leq \frac{1}{\sin 1/2}$$

Pentru neabsolut convergență se remarcă că

$$\frac{|\sin 2n|}{\ln(2n)} + \frac{|\sin(2n+1)|}{\ln(2n+1)} \geq \frac{|\sin 2n| + |\sin(2n+1)|}{\ln(2n+1)}$$

iar din faptul că $|\sin x|$ este periodică cu perioada π avem

$$|\sin x| + |\sin(x+1)| \geq \inf_{x \in [0,\pi]} (|\sin x| + |\sin(x+1)|) = M > 0$$

și deci

$$\frac{|\sin 2n| + |\sin(2n+1)|}{\ln(2n+1)} \geq \frac{M}{\ln(2n+1)} \geq \frac{M}{2(2n+1)} .$$

8. Să se arate că seria $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{\sin \frac{1}{n}}$ este convergentă dar nu este absolut convergentă.

9. Se consideră un şir $(x_n)_n$ cu $x_n \to 0$ astfel încît există două subşiruri $(x_{k_n})_n$ şi $(x_{l_n})_n$ cu $x_{k_n} < 0$ şi $x_{l_n} > 0$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Să se arate că există o permutare $(p_n)_n$ a lui $\mathbb{N}$ astfel încît seria $\sum_n x_{p_n}$ să fie convergentă.

lo. Fie $\sum_n x_n$ o serie convergentă dar neabsolut convergentă. Atunci pentru orice $\alpha \in \mathbb{R}$ există o permutare $(p_n)_n$ a lui $\mathbb{N}$ astfel încît seria $\sum_n x_{p_n}$ să fie convergentă şi să aibă suma egală cu α.

V. ELEMENTE DE TOPOLOGIE GENERALA

1. Spaţiu topologic
2. Analiza topologică a unei mulţimi
3. Mulţimi compacte
4. Mulţimi conexe
5. Spaţii topologice cu proprietatea Baire

Elemente de topologie generală

1) Topologie; Spaţiu topologic

Definiţie. Fie X o mulţime nevidă. O mulţime $\mathcal{T}$ de părţi ale lui X se numeşte topologie pe X dacă

1) ϕ , $X \in \mathcal{T}$

2) G_1 , $G_2 \in \mathcal{T} \Longrightarrow G_1 \cap G_2 \in \mathcal{T}$

3) Pentru orice familie $(G_i)_{i \in I}$ de elemente din $\mathcal{T}$ avem $\bigcup_{i \in I} G_i \in \mathcal{T}$.

Dacă $\mathcal{T}$ este o topologie pe X elementele lui $\mathcal{T}$ se numesc mulţimi deschise (relativ la $\mathcal{T}$) iar perechea $(X, \mathcal{T})$ se numeşte spaţiu topologic.

Dacă $(X, \mathcal{T})$ este un spaţiu topologic o mulţime $A \subset X$ se va numi închisă dacă complementara sa este deschisă (adică dacă $\complement A \in \mathcal{T}$).

Propoziţia 1. Au loc următoarele proprietăţi:

1) ϕ şi X sînt mulţimi închise.

2) F_1 , F_2 închise $\Longrightarrow F_1 \cup F_2$ închisă

3) Pentru orice familie $(F_i)_{i \in I}$ de mulţimi închise avem $\bigcap_{i \in I} F_i$ este de asemenea închisă.

Demonstraţie.

1) Din $\phi \in \mathcal{T}$ şi $X \in \mathcal{T}$ deducem $\complement \phi = X$ şi $\complement X = \phi$ şi deci ϕ şi X sînt mulţimi închise.

2) Dacă F_1, F_2 sînt închise atunci $\complement F_1 \in \mathcal{T}$, $\complement F_2 \in \mathcal{T}$ şi deci $\complement F_1 \cap \complement F_2 \in \mathcal{T}$ adică $\complement (F_1 \cup F_2) \in \mathcal{T}$. De aici rezultă că $F_1 \cup F_2$ este închisă.

3) Dacă $(F_i)_{i \in I}$ este o familie de mulţimi închise atunci $\complement F_i \in \mathcal{T}$ pentru orice $i \in I$ şi deci $\bigcup_{i \in I} \complement F_i \in \mathcal{T}$.

Din

$$\complement(\bigcap_{i \in I} F_i) = \bigcup_{i \in I} \complement F_i \in \mathcal{T}$$

deducem că $\bigcap_{i \in I} F_i$ este închisă.

Remarcă. In cele ce urmează spaţiul topologic $(X, \mathcal{T})$ va fi notat cel mai adesea prin X subînţelegînd deci topologia $\mathcal{T}$ adică mulţimile deschise ale acestui staţiu topologic.

Definiţie. Fie (X, d) un spaţiu metric. Se numeşte bilă (deschisă) de centru $x \in X$ şi de rază $r > 0$ mulţimea

$$B(x ; r) = \{ y \in X \mid d(y, x) < r \}$$

O mulţime $G \subset X$ se va numi deschisă (relativ la spaţiul metric (X, d)), dacă satisface următoarea proprietate: Pentru orice $a \in G$ există $r_a > 0$ astfel încît

$$B(a ; r_a) \subset G .$$

Propoziţia 2. Fie (X, d) un spaţiu metric. Atunci mulţimea părţilor deschise (relativ la (X, d)) formează o topologie pe X numită topologia asociată spaţiului metric (X, d) care va fi notată cu $\mathcal{T}_d$.

Demonstraţie. Evident $\emptyset \in \mathcal{T}_d$ şi $X \in \mathcal{T}_d$.

Fie $G_1, G_2 \in \mathcal{T}_d$ şi $a \in G_1 \cap G_2$. Atunci $a \in G_1$ şi $a \in G_2$ şi deci există $r_1 > 0$, $r_2 > 0$ astfel încît

$$B(a; r_1) \subset G_1 \quad , \quad B(a; r_2) \subset G_2 .$$

Luînd $r = \min(r_1, r_2)$ avem

$$B(a; r) \subset B(a; r_1) \cap B(a; r_2) \subset G_1 \cap G_2$$

Deci $G_1 \cap G_2 \in \mathcal{T}_d$.

Fie acum $(G_i)_{i \in I}$ o familie de elemente din $\mathcal{T}_d$ şi $a \in \bigcup_{i \in I} G_i$. Atunci există $i_0 \in I$ cu $a \in G_{i_0}$ şi deci există $r_0 > 0$ cu $B(a; r_0) \subset G_{i_0}$. Evident

$$B(a; r_0) \subset \bigcup_{i \in I} G_i$$

şi deci cum a este arbitrar în $\bigcup_{i \in I} G_i$ deducem că

$$\bigcup_{i \in I} G_i \in \mathcal{T}_d$$

Remarcă. 1) Intrucît în $\mathbb{R}$ o bilă de centru a şi de rază r este intervalul deschis $(a - r, a + r)$ rezultă că o mulţime $G \subset \mathbb{R}$ va fi deschisă în spaţiul metric $\mathbb{R}$ dacă şi numai dacă pentru orice $a \in G$ există un interval deschis $(a - r , a + r)$ cu $r > 0$ inclus în G .

2) In $\overline{\mathbb{R}}$,dacă $a \in \mathbb{R}$, atunci orice bilă de centru a şi de rază $r > 0$ include un interval deschis $(a - \rho , a + \rho)$ adică o bilă din $\mathbb{R}$ de centru a şi de rază ρ şi reciproc orice bilă din $\mathbb{R}$ de centru a şi de rază $r > 0$ include o bilă din $\overline{\mathbb{R}}$ de centru a şi de rază ρ .

Dacă $a = +\infty$ atunci orice bilă în $\overline{\mathbb{R}}$ de centru $+\infty$ şi de rază r include un interval de forma $(\varepsilon , +\infty]$ cu $\varepsilon \in \mathbb{R}$ şi orice interval de forma $(\alpha , +\infty]$, $\alpha \in \mathbb{R}$ include o bilă cu centrul în $+\infty$ şi de rază $\rho > 0$. Dacă $a = -\infty$ atunci orice bilă în $\overline{\mathbb{R}}$ de centru $-\infty$ şi de rază r include un interval de forma $[-\infty , \varepsilon)$ cu $\varepsilon \in \mathbb{R}$ şi orice interval de forma $[-\infty , \beta)$ cu $\beta \in \mathbb{R}$ include o bilă în $\overline{\mathbb{R}}$ de centru $-\infty$ şi de rază $\rho > 0$.

3) Din consideraţiile precedente rezultă că o submulţime G a lui $\overline{\mathbb{R}}$ va fi deschisă în $\overline{\mathbb{R}}$ dacă şi numai dacă $G \cap \mathbb{R}$ este deschisă în $\mathbb{R}$ şi în plus dacă $+\infty \in G$ (resp. $-\infty \in G$) atunci să existe $\alpha \in \mathbb{R}$ cu proprietatea că $(\alpha , +\infty] \subset G$ (resp. $[-\infty, \alpha) \subset G$)

In particular o submulţime A a lui $\mathbb{R}$ va fi deschisă în $\mathbb{R}$ dacă şi numai dacă, privită ca submulţime în $\overline{\mathbb{R}}$, este deschisă în $\overline{\mathbb{R}}$.

Propoziţia 3. Fie (X, d) un spaţiu metric. Atunci pentru orice $a \in X$ şi $r > 0$, bila $B(a ; r)$ este o mulţime deschisă (relativ la (X, d)).

Demonstraţie. Fie $b \in B(a ; r)$. Avem

$$d(b, a) < r$$

şi deci $\rho := r - d(b, a) > 0$. Vom arăta că

$$B(b\,;\,\rho) \subset B(a\,;\,r)$$

Intr-adevăr dacă $x \in B(b;\rho)$ avem

$$d(x, a) \leq d(x, b) + d(b, a) < \rho + d(b, a) = r$$

şi deci $x \in B(a; r)$. Intrucît b este arbitrar în $B(a; r)$ deducem că $B(a; r) \in \mathcal{T}_d$.

Propoziţia 4. Fie (X, d) un spaţiu metric. Atunci o mulţime $F \subset X$ va fi închisă dacă şi numai dacă pentru orice şir convergent $(x_n)_n$, din X cu $x_n \in F$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$ avem $\lim\limits_n x_n \in F$.

Demonstraţie. Presupunem că $F \subset X$ este închisă şi fie $(x_n)_n$ un şir convergent cu $x_n \in F$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Dacă $a := \lim\limits_n x_n$ nu aparţine lui F rezultă că $a \in \complement F$ şi deci există $r > 0$ cu proprietatea

$$B(a\,;\,r) \subset \complement F$$

Pe de altă parte întrucît $a = \lim\limits_n x_n$ există $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încît dacă $n \geq n_0$ să avem $d(x_n, a) < r$ adică

$$n \geq n_0 \Longrightarrow x_n \in B(a; r)$$

şi deci

$$n \geq n_0 \Longrightarrow x_n \notin F$$

ceea ce contrazice ipoteza.

Fie acum $F \subset X$ cu proprietatea că pentru orice şir $(x_n)_n$ din F, care este convergent, limita sa aparţine lui F. Dacă F n-ar fi închisă rezultă că $\complement F$ nu ar fi deschisă şi deci ar exista $a \in \complement F$ cu proprietatea că pentru orice $r > 0$ avem

$$B(a;\; r) \cap F \neq \emptyset .$$

Alegem acum pentru orice $n \in \mathbb{N}$

$$x_n \in B(a\,;\,\tfrac{1}{n}) \cap F$$

Evident şirul $(x_n)_n$ este din F, este convergent şi limita sa este egală cu a. Pe de altă parte $a \notin F$ ceea ce contrazice ipoteza. Aşa dar F este închisă.

Definiţie. Fie $(X, \mathcal{T})$ un spaţiu topologic şi $A \subset X$. Se notează ca $\mathcal{T}_A$ mulţimea părţilor lui A de forma $A \cap G$ unde $G \in \mathcal{T}$. Mulţimea $\mathcal{T}_A$ formează o topologie pe A numită urma pe A a topologiei $\mathcal{T}$, iar spaţiul topologic $(A, \mathcal{T}_A)$ se numeşte subspaţiul topologic al spaţiului topologic $(X, \mathcal{T})$ generat de mulţimea A.

Remarcă. 1) Dacă $A \subset X$ atunci topologia pe A este astfel aleasă încît o submulţime a lui A va fi deschisă dacă şi numai dacă este de forma $A \cap G$ unde G este deschisă în X. In acest fel o submulţime a lui A va fi deschisă în spaţiul topologic $(A, \mathcal{T}_A)$ dacă şi numai dacă ea este de forma $A \cap F$ unde F este o mulţime închisă în X.

2) Dacă (X, d) este un spaţiu metric şi $A \subset X$ atunci vom nota cu d_A distanţa pe A dată prin $d_A(x, y) = d(x, y)$ pentru orice $x, y \in A$. Atunci (A, d_A) devine un spaţiu metric şi pentru orice $x \in A$ bila de centru x şi de rază r în acest spaţiu metric va fi intersecţia dintre A cu bila $B(x, r)$ de centru x şi de rază r din X. Se verifică acum direct faptul că topologia pe A generată de distanţa d_A, coincide cu urma pe A a topologiei $\mathcal{T}_d$ asociată pe X distanţei d.

Exerciţii. 1. Fie Q mulţimea numerelor raţionale şi μ o valoare absolută pe Q. Atunci

$$(x, y) \longrightarrow d_{\mu}(x, y) = \mu(x - y)$$

este o distanţă pe Q. Dacă $\mu(x) = |x|$ atunci d_{μ} este distanţa euclidiană pe Q. Dacă p este un număr prim, iar μ_p este valoarea absolută p- adică atunci distanţa d_{μ_p} are proprietatea

$$x, y, z \in \mathbb{Q} \Longrightarrow d_{\mu_p}(x, y) \leq \max(d_{\mu_p}(x,z), d_{\mu_p}(y, z))$$

O distanţă d pe o mulţime X cu proprietatea

$$x, y, z \in X \Longrightarrow d(x, y) \leq \max(d(x, z), d(z, y))$$

se numeşte ultradistanţă.

Să se arate că dacă d este o ultradistanţă pe X, iar x, y, z sînt trei puncte distincte din X atunci două din numerele $d(x, y)$, $d(y, z)$, $d(x, z)$ sînt egale.

2. Fie (X, d) un spaţiu metric astfel încît d este o ultradistanţă. Atunci pentru orice bilă $B(a; r)$ are loc proprietatea

$$b \in B(a, r) \Longrightarrow B(b; r) = B(a; r)$$

3. Fie (X, d) un spaţiu metric. Să se arate că pentru orice $x \in X$ şi $r > 0$ mulţimea

$$\{x \in X \mid d(a, r) \leq r\}$$

este închisă. Să se deducă de aici că orice mulţime finită din X este închisă.

4. Să se arate că orice interval deschis din $\mathbb{R}$

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$

este o mulţime deschisă.

5. Să se arate că orice interval închis din $\mathbb{R}$

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq r \leq b\}$$

este o mulţime închisă.

6. Să se arate că pentru orice $a \in \mathbb{R}$ mulţimile

$$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$$

$$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$$

sînt închise în $\mathbb{R}$.

7. Să se arate că pentru orice $a \in \overline{R}$ mulțimile

$$(a, +\infty] \quad , \quad [-\infty, a)$$

sînt deschise în $\overline{R}$.

8. Să se arate că orice mulțime $A \subset R$ (respectiv $A \subset \overline{R}$) care este în același timp închisă și deschisă este de forma $A = \emptyset$ sau $A = R$ (respectiv $A = \emptyset$ sau $A = \overline{R}$).

9. Să se arate că $((-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}))_n$ este un șir de mulțimi deschise, dar $\bigcap_n (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ nu este deschisă.

10. Să se arate că Q nu se poate scrie ca intersecție a unui șir de mulțimi deschise în R .

11. Pentru orice mulțime X mulțimea părților lui X (notată $\mathscr{P}(X)$) este o topologie pe X . Să se arate că dacă d este distanța pe X definită prin

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } x = y \\ 1 & \text{dacă } x \neq y \end{cases}$$

atunci $\mathscr{P}(X)$ este topologia pe X asociată acestei distanțe.

2. Analiza topologică a unei mulțimi

In acest paragraf X va fi un spațiu topologic.

Definiție. Se numește vecinătate a unui punct $x \in X$ o submulțime V a lui X cu proprietatea că există o mulțime deschisă G astfel încît

$$x \in G \subset V$$

Mulțimea vecinătăților unui punct x se va nota prin $\mathcal{V}_x$

Remarcă. Dacă G este deschis și $x \in G$ atunci G este vecinătate a lui x întrucît avem relația $x \in G \subset G$.

<u>Propoziția 5.</u> Au loc următoarele proprietăți:

1) $V \in \mathcal{V}_x \quad , \; W \supset V \Longrightarrow W \in \mathcal{V}_x$

2) $V_1, V_2 \in \mathcal{V}_x \Longrightarrow V_1 \cap V_2 \in \mathcal{V}_x$

3) $V \in \mathcal{V}_x \Longrightarrow (\exists)\; W \in \mathcal{V}_x \;,\; W \subset V$ astfel încît
$y \in W \Longrightarrow W \in \mathcal{V}_y$

<u>Demonstrație</u>. 1) Fie $V \in \mathcal{V}_x$ și fie G deschisă astfel încît

$$x \in G \subset V$$

Deoarece $V \subset W$ avem

$$x \in G \subset W$$

și deci $W \in \mathcal{V}_x$.

2) Fie $V_1, V_2 \in \mathcal{V}_x$ și fie G_1, G_2 deschisă astfel încît

$$x \in V_1 \subset G_1 \;,\; x \in V_2 \subset G_2$$

Avem

$$x \in V_1 \cap V_2 \subset G_1 \cap G_2$$

Intrucît $G_1 \cap G_2$ este deschisă rezultă $V_1 \cap V_2 \in \mathcal{V}_x$.

3) Fie $V \in \mathcal{V}_x$ și fie W o mulțime deschisă astfel încît

$$x \in W \subset V$$

Dacă $y \in W$ atunci avem

$$y \in W \subset W$$

și deci $W \in \mathcal{V}_y$.

<u>Remarcă</u>. 1) Fie (X, d) un spațiu metric. Intrucît orice mulțime deschisă care conține un punct x include o bilă cu centrul în x și înctrucît orice bilă cu centrul în x este o mulțime deschisă deducem că o mulțime $V \subset X$ va fi o vecinătate a lui x dacă și numai dacă există o bilă $B(a, r)$ închisă în V.

2) Fie $X = \mathbb{R}$ sau $X = \overline{\mathbb{R}}$ şi $x \in \mathbb{R}$. Intrucît orice interval deschis din $\mathbb{R}$ este o mulţime deschisă şi întrucît orice mulţime deschisă din $\mathbb{R}$ sau $\overline{\mathbb{R}}$ care conţine pe x include un interval deschis din $\mathbb{R}$ care conţine pe x, rezultă că o submulţime V a lui $\mathbb{R}$ sau $\overline{\mathbb{R}}$ va fi o vecinătate a lui x în $\mathbb{R}$ sau $\overline{\mathbb{R}}$ dacă şi numai dacă există un interval deschis D în $\mathbb{R}$ astfel încît

$$x \in D \subset V$$

3) Intrucît orice mulţime deschisă din $\overline{\mathbb{R}}$ care conţine pe $+\infty$ include un interval de forma $(a, +\infty]$ cu $a \in \mathbb{R}$ şi orice interval de forma $(a, +\infty]$ cu $a \in \mathbb{R}$ este o mulţime deschisă în $\overline{\mathbb{R}}$ rezultă că o submulţime V a lui $\overline{\mathbb{R}}$ va fi vecinătate a lui $+\infty$ dacă şi numai dacă există $a \in \mathbb{R}$ astfel încît

$$(a, +\infty] \subset V$$

Analog o submulţime V a lui $\overline{\mathbb{R}}$ va fi vecinătate a lui $-\infty$ dacă şi numai dacă există $a \in \mathbb{R}$ cu proprietatea

$$[-\infty, a) \subset V$$

4) Dacă $A \subset X$ şi $x \in A$ atunci o vecinătate a lui x în spaţiul topologic A este de forma $V \cap A$ unde V este o vecinătate a lui x în X.

<u>Definiţie</u>. Se numeşte <u>sistem fundamental de vecinătăţi ale unui punct</u> $x \in X$ o mulţime $\mathcal{B}_x$ de vecinătăţi ale lui x cu proprietatea

$$V \in \mathcal{V}_x \Longrightarrow (\exists)\quad U \in \mathcal{B}_x\,,\quad U \subset V$$

<u>Remarcă</u>. 1) Mulţimea $\mathcal{G}$ a vecinătăţilor lui x care sînt în acelaşi timp mulţimi deschise formează un sistem fundamental de vecinătăţi ale lui x.

2) Dacă (X, d) este un spaţiu metric atunci mulţimea bilelor $(B(x, r))_{r > 0}$ cu centrul în x formează un sistem fundamental de vecinătăţi ale lui x.

3) Dacă (X, d) este un spaţiu metric, iar $(r_n)_n$ este un şir de numere reale strict pozitive cu $\lim_n r_n = 0$ atunci mulţimea $\{B(x, r_n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ formează un sistem fundamental de vecinătăţi ale lui x.

4) Dacă $X = \mathbb{R}$ sau $X = \overline{\mathbb{R}}$ şi $x \in \mathbb{R}$ atunci mulţimea de intervale deschise $(x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n})$ unde $n \in \mathbb{N}^*$ formează un sistem fundamental de vecinătăţi ale lui x.

5) In $\overline{\mathbb{R}}$ mulţimea de intervale de forma $(n, +\infty]$ cu $n \in \mathbb{N}$ formează un sistem fundamental de vecinătăţi ale lui $+\infty$ iar mulţimea intervalelor de forma $[-\infty, -n)$ cu $n \in \mathbb{N}$ formează un sistem fundamental de vecinătăţi ale lui $-\infty$.

<u>Definiţie</u>. Fie $A \subset X$ şi $x \in X$. Punctul x se numeşte <u>punct interior lui A</u> dacă A este o vecinătate a lui x. Mulţimea punctelor interioare lui A se numeşte <u>interiorul lui A</u> şi se notează cu $\mathring{A}$.

<u>Remarcă</u>. Dacă $\mathcal{B}_x$ este un sistem fundamental de vecinătăţi ale lui x atunci se verifică simplu că x este punct interior lui A dacă şi numai dacă există $U \in \mathcal{B}_x$ cu proprietatea $U \subset A$.

<u>Propoziţia 6</u>. Pentru orice $A \subset X$ au loc următoarele afirmaţii:

1) $\mathring{A}$ este o mulţime deschisă şi $\mathring{A} \subset A$.

Dacă G este o mulţime deschisă şi $G \subset A$ atunci

$$G \subset \mathring{A}$$

2) A este deschisă dacă şi numai dacă $A = \mathring{A}$.

<u>Demonstraţie</u>. 1) Fie $x \in \mathring{A}$. Atunci $A \in \mathcal{V}_x$ şi deci există G_x deschisă cu proprietatea

$$x \in G_x \subset A$$

De aici rezultă evident

$$y \in G_x \subset A$$

şi deci $A \in \mathcal{V}_y$ pentru orice $y \in G_x$ adică

$$y \in G_x \Longrightarrow y \in \mathring{A}$$

sau echivalent

$$G_x \subset \mathring{A} .$$

Evident

$$\bigcup_{x \in \mathring{A}} G_x = \mathring{A}$$

adică $\mathring{A}$ este deschisă. Intrucît dacă $x \in \mathring{A}$ rezultă A este vecinătate a lui x şi deci $x \in A$ avem

$$\mathring{A} \subset A .$$

Fie acum G o mulţime deschisă inclusă în A. Dacă $x \in G$ atunci avem $x \in G \subset A$ şi deci $A \in \mathcal{V}_x$ adică

$$x \in G \Longrightarrow x \in \mathring{A}$$

sau echivalent

$$G \subset \mathring{A}.$$

2) Dacă A este deschisă atunci din 1) rezultă că $A \subset \mathring{A}$ şi deci $A = \mathring{A}$. Dacă $A = \mathring{A}$ atunci din 1) rezultă că A este deschisă.

<u>Remarcă.</u> Propoziţia precedentă arată că interiorul unei mulţimi A este cea mai mare (în sensul incluziunii) mulţime deschisă inclusă în A.

<u>Exerciţii.</u> Să se arate că dacă $A, B \subset X$ atunci

a) $A \subset B \Longrightarrow \mathring{A} \subset \mathring{B}$

b) $\overset{\circ}{\widehat{A \cup B}} \supset \mathring{A} \cup \mathring{B}$

c) $\overset{\circ}{\widehat{A \cap B}} = \mathring{A} \cap \mathring{B}$

d) $\mathring{\mathring{A}} = \mathring{A}$

<u>Definiţie.</u> Fie $A \subset X$ şi $x \in X$. Punctul x se va numi <u>punct de aderenţă al lui A</u> dacă pentru orice vecinătate V a lui x avem $V \cap A \neq \emptyset$. Mulţimea punctelor de aderenţă ale lui A se notează cu $\bar{A}$ şi se numeşte <u>aderenţa lui A.</u>

Remarcă. Dacă $\mathcal{B}_x$ este un sistem fundamental de vecinătăţi ale lui x atunci se verifică simplu că x este punct de aderenţă al lui A dacă şi numai dacă pentru orice $U \in \mathcal{B}_x$ avem $U \cap A \neq \emptyset$.

Propoziţia 7. Pentru orice $A \subset X$ are loc următoarea proprietate:

$$\complement(\bar{A}) = \overset{\circ}{\widehat{\complement A}}, \quad \complement(\mathring{A}) = \overline{\complement A}$$

Demonstraţie. Relaţia a doua rezultă din prima înlocuind A cu $\complement A$ şi trecînd apoi în ambii membri la complementară. Avem

$$x \in \complement(\bar{A}) \Longleftrightarrow x \notin \bar{A} \Longleftrightarrow (\exists)\, V \in \mathcal{V}_x,\ V \cap A = \emptyset \Longleftrightarrow$$

$$(\exists)\, V \in \mathcal{V}_x,\ V \subset \complement A \Longleftrightarrow \complement A \in \mathcal{V}_x \Longleftrightarrow x \in \overset{\circ}{\widehat{\complement A}}$$

şi deci

$$\complement(\bar{A}) = \overset{\circ}{\widehat{\complement A}}$$

Propoziţia 8. Pentru orice $A \subset X$ au loc următoarele afirmaţii:

1) $\bar{A}$ este o mulţime închisă şi $A \subset \bar{A}$.

Dacă F este o mulţime închisă şi $A \subset F$ atunci $\bar{A} \subset F$.

2) A este închisă dacă şi numai dacă $A = \bar{A}$

Demonstraţie. 1) Din propoziţia precedentă avem

$$\complement(\bar{A}) = \overset{\circ}{\widehat{\complement A}}$$

iar din propoziţia 6 rezultă că $\complement(\bar{A})$ este deschisă inclusă în $\complement A$ şi deci $\bar{A}$ este închisă şi $A \subset \bar{A}$. Dacă F este închisă şi $A \subset F$ atunci $\complement F$ este deschisă şi $\complement F \subset \complement A$. Utilizînd din nou propoziţia 6 rezultă că $\complement F \subset \overset{\circ}{\widehat{\complement A}} = \complement(\bar{A})$ şi deci $F \supset \bar{A}$.

2) Avem, utilizînd propoziţiile 6) şi 7),

$$A \text{ închisă} \Longleftrightarrow \complement A \text{ deschisă} \Longleftrightarrow \complement A = \overset{\circ}{\widehat{\complement A}} \Longleftrightarrow \complement A = \complement(\bar{A}) \Longleftrightarrow A = \bar{A}$$

Remarcă. Propoziţia 8 ne arată că $\bar{A}$ este cea mai mică (în sensul incluziunii) mulţime închisă care include pe A.

Exerciţii. Să se arate că pentru orice $A, B \subset X$ avem

a) $A \subset B \longrightarrow \bar{A} \subset \bar{B}$

b) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

c) $\overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$

d) $\overline{(\bar{A})} = \bar{A}$

Definiţie. Fie $A \subset X$ şi $x \in X$. Punctul x se numeşte punct de acumulare al lui A dacă pentru orice vecinătate V a lui x avem $V \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$. Mulţimea punctelor de acumulare ale lui A se va nota cu A' şi se va numi mulţimea derivată a lui A.

Remarcă. Dacă $\mathcal{B}_x$ este un sistem fundamental de vecinătăţi ale lui x atunci se verifică simplu că x este punct de acumulare al lui A dacă şi numai dacă pentru orice vecinătate $U \in \mathcal{B}_x$ avem $U \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$.

Propoziţia 9. Pentru orice $A \subset X$ avem

1) $\bar{A} = A \cup A'$

2) A este închisă $\Longleftrightarrow A' \subset A$

Demonstraţie. 1) Intrucît $A \subset \bar{A}$ şi $A' \subset \bar{A}$ va fi suficient să arătăm că

$$\bar{A} \setminus A \subset A'$$

Dacă $x \in \bar{A}$ şi $x \notin A$ atunci pentru orice $V \in \mathcal{V}_x$ avem

$$V \cap A \neq \emptyset$$

şi deci cum $x \notin A$

$$V \cap (A \setminus \{x\}) = V \cap A \neq \emptyset$$

ceea ce arată că $x \in A'$.

2) rezultă din 1) şi propoziţia 8.

Definiţie. Fie $A, B \subset X$ astfel încît $A \subset B$. Spunem că A este densă în B dacă $\bar{A} \supset B$.

Exerciţii. 1) Dacă $X = \mathbb{R}$ şi $a, b \in \mathbb{R}$, $a<b$ avem

i) $\overline{(a, b)} = [a, b]$

ii) $\overline{\mathbb{Q} \cap (a, b)} = [a, b]$

iii) $\mathbb{Q}$ este densă în $\mathbb{R}$

2) Dacă $X = \overline{\mathbb{R}}$ atunci

i) $\mathbb{R}$ este densă în $\overline{\mathbb{R}}$

ii) $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, $\overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

3) Dacă $A \subset X$ şi $B \subset A$ atunci aderenţa lui B în spaţiul topologic A este egală cu $\overline{B} \cap A$ unde $\overline{B}$ este aderenţa lui B în X.

Propoziţia 10. Fie (X, d) un spaţiu metric, $A \subset X$ şi $x \in X$. Atunci

1) $x \in \overline{A} \iff (\exists)\ (x_n)_n \longrightarrow x$ cu $x_n \in A$ $(\forall)$ $n \in \mathbb{N}$

2) $x \in A' \iff (\exists)\ (x_n)_n \longrightarrow x$ cu $x_n \in A \setminus \{x\}$, $(\forall)$ $n \in \mathbb{N}$.

Demonstraţie. 1) Fie $x \in \overline{A}$. Atunci pentru orice $n \in \mathbb{N}$ există $x_n \in A \cap B(a, \frac{1}{n})$. Intrucît $d(x, x_n) < \frac{1}{n}$ rezultă că $(x_n)_n \longrightarrow x$. Reciproc fie $(x_n)_n \longrightarrow x$ cu $x_n \in A$ pentru orice n şi fie $\mathcal{B}_x = \{B(x; \varepsilon) \mid \varepsilon > 0\}$ sistemul fundamental de vecinătăţi al bilelor de centru x. Pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încît

$$n \geq n_\varepsilon \Longrightarrow d(x_n, x) < \varepsilon \Longrightarrow x_n \in B(x; \varepsilon)$$

şi deci

$$A \cap B(x; \varepsilon) \neq \phi$$

ceea ce arată că $x \in \overline{A}$.

2) Dacă $x \in A'$ atunci pentru orice $n \in \mathbb{N}$ există $x_n \in (A \setminus \{x\}) \cap B(a, \frac{1}{n})$. Intrucît $d(x_n, x) < \frac{1}{n}$ rezultă $(x_n)_n \longrightarrow x$ şi evident $x_n \in A \setminus \{x\}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Reciproc fie $(x_n)_n \longrightarrow x$ cu $x_n \in A \setminus \{x\}$. De aici rezultă ca mai sus că pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încît

$$n \geqslant n_\varepsilon \longrightarrow (d(x_n, x) < \varepsilon \longrightarrow x_n \in B(x ; \varepsilon)$$

şi deci

$$(A \setminus \{x\}) \cap B(x; \varepsilon) \neq \phi$$

ceea ce arată, ţinînd seama că mulţimea bilelor cu centrul în x, formează un sistem fundamental de vecinătăţi ale lui x, că $x \in A'$.

<u>Definiţie</u>. Fie $A \subset X$ şi $x \in X$. Punctul x se numeşte punct frontieră al lui A dacă pentru orice vecinătate V a lui x avem $V \cap A \neq \phi$ şi $V \cap (\complement A) \neq \phi$. Mulţimea punctelor frontieră ale lui A se notează cu ∂A şi se numeşte <u>frontiera lui A</u>.

<u>Remarcă</u>. 1. Dacă $\mathcal{B}_x$ este un sistem fundamental de vecinătăţi ale lui x atunci x va fi punct frontieră pentru A dacă şi numai dacă pentru orice vecinătate $V \in \mathcal{B}_x$ avem $U \cap A \neq \phi$ şi $U \cap (\complement A) \neq \phi$.

2. Din definiţie rezultă direct că pentru orice $A \subset X$ avem

$$\partial A = \partial(\complement A) = \bar{A} \cap \overline{\complement A}.$$

3. Din relaţia precedentă şi din propoziţia 7) deducem că

$$\partial A = \bar{A} \cap \complement(\mathring{A}) = \bar{A} \setminus \mathring{A}$$

<u>Exerciţii</u>. Să se arate că pentru orice $A \subset X$ avem

1) A închisă $\Longleftrightarrow \partial A \subset A$

2) A deschisă $\Longleftrightarrow (\partial A) \cap A = \phi$

3) Dacă $X = \mathbb{R}$ şi $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ avem

$$\partial \mathbb{Q} = \mathbb{R}$$

$$\partial((a, b)) = \partial([a, b)) = \partial((a, b]) = \partial([a, b]) = \{a, b\}$$

4) Dacă $X = \overline{\mathbb{R}}$ atunci

$$\partial(\mathbb{R}) = \{-\infty, +\infty\}.$$

3. Mulțimi compacte

In acest paragraf X va fi un spațiu topologic.

Definiție. Fie $A \subset X$. O familie $(G_i)_{i\in I}$ de mulțimi se numește acoperire a lui A dacă $A \subset \bigcup_{i\in I} G_i$. Dacă în plus fiecare din mulțimile G_i este deschisă, atunci acoperirea $(G_i)_{i\in I}$ a lui A se va numi acoperire deschisă a lui A.

Mulțimea A se va numi compactă dacă pentru orice acoperire deschisă $(G_i)_{i\in I}$ a lui A există $J \subset I$ finită astfel încît $(G_i)_{j\in J}$ să fie de asemenea o acoperire a lui A.

Spațiul topologic X se va numi compact, dacă X este o mulțime compactă.

Remarcă. 1. Dacă $(G_i)_{i\in I}$ este o acoperire deschisă a lui A, iar $J\subset I$ astfel încît $(G_j)_{j\in J}$ este de asemenea o acoperire a lui A, atunci se spune că $(G_j)_{j\in J}$ este o subacoperire a lui A a acoperirii date $(G_i)_{i\in I}$. Subacoperirea $(G_j)_{j\in J}$ se va numi finită dacă J este finită.

In acești termeni a spune că A este compactă înseamnă a spune că orice acoperire deschisă a lui A conține o subacoperire finită a lui A.

2) Fie $A\subset X$. Intrucît orice mulțime deschisă în A este de forma $G\cap A$ unde G este deschisă în X rezultă că dacă $(P_i)_{i\in I}$ este o acoperire a lui A cu mulțimi deschise în A atunci există o acoperire a lui A $(G_i)_{i\in I}$ cu mulțimi deschise în X astfel încît $P_i = G_i \cap A$ pentru orice $i\in I$. De aici rezultă: a spune că A este compactă ca submulțime a lui X este echivalent cu a spune că spațiul topologic A este compact.

3) Evident orice submulțime finită a lui X este compactă.

Propozitia 11. Fie $A, B \subset X$, $A \subset B$ astfel încît B este compactă şi A este închisă. Atunci A este compactă.

Demonstraţie. Fie $(G_i)_{i \in I}$ o acoperire deschisă a lui A. Intrucît

$$B \subset \bigcup_{i \in I} G_i \cup (\complement A)$$

şi întrucît $\complement A$ este deschisă, iar B este compactă rezultă că există $J \subset I$ finită astfel încît

$$B \subset \bigcup_{j \in J} G_j \cup (\complement A)$$

De aici deducem că

$$A \subset \bigcup_{j \in J} G_j \cup (\complement A)$$

şi deci

$$A \subset \bigcup_{j \in J} G_j$$

ceea ce arată că A este compactă.

Definiţie. Spaţiul topologic X se numeşte separat sau Hausdorf, dacă pentru orice $x, y \in X$, $x \neq y$ există o vecinătate V a lui x şi o vecinătate W a lui y astfel încît

$$V \cap W = \phi$$

Intrucît orice vecinătate a unui punct include o vecinătate deschisă a acelui punct rezultă că spaţiul topologic X este separat dacă şi numai dacă pentru orice $x, y \in X$, $x \neq y$ există V, W mulţimi deschise $x \in V$, $y \in W$ astfel încît

$$V \cap W = \phi$$

Remarcă. Dacă (X, d) un spaţiu metric atunci spaţiul topologic asociat este un spaţiu Hausdorf. Intr-adevăr dacă $x, y \in X$, $x \neq y$ atunci luînd $r := \frac{1}{2} d(x, y)$, bilele $B(x; r)$, $B(y; r)$ sînt vecinătăţi ale lui x şi respectiv y şi $B(x, r) \cap B(y, r) = \phi$

<u>Propoziția 12.</u> Fie $A \subset X$ o mulțime compactă. Dacă X este un spațiu Hausdorf atunci A este mulțime închisă.

<u>Demonstrație</u>. Vom arăta că $\complement A$ este deschisă. Fie $b \in \complement A$. Intrucît X este un spațiu Hausdorf rezultă că pentru orice $x \in A$ există o vecinătate deschisă V_x a lui b și U_x o vecinătate deschisă a lui x astfel încît $V_x \cap U_x = \emptyset$. Evident familia $(U_x)_{x \in A}$ este o acoperire deschisă a lui A. Intrucît A este prin ipoteză compactă există $J \subset A$ finită astfel încît

$$A \subset \bigcup_{x \in J} U_x$$

Din faptul că J este finită mulțimea

$$V := \bigcap_{x \in J} V_x$$

este o vecinătate deschisă a lui b și avem

$$V \cap A \subset \left(\bigcap_{x \in J} V_x\right) \cap \left(\bigcup_{x \in J} U_x\right) = \emptyset$$

și deci

$$V \subset \complement A$$

De aici rezultă că $b \in \overset{\circ}{\widehat{\complement A}}$. Cum b este arbitrar în $\complement A$ deducem că $\complement A = \overset{\circ}{\widehat{\complement A}}$ și deci $\complement A$ este deschisă.

<u>Definiție</u>. Fie (X, d) un spațiu metric și $A \subset X$.

Mulțimea A se numește <u>precompactă</u> dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există o parte finită $J \subset X$ astfel încît

$$A \subset \bigcup_{a \in J} B(a, \varepsilon)$$

Mulțimea A se numește <u>completă</u> dacă orice șir Cauchy din A converge la un punct din A.

<u>Remarcă</u>. 1) Fie (X, d) un spațiu metric. Dacă $A \subset X$ este precompactă atunci A este mărginită. Dacă $B \subset A \subset X$ și A este precompactă atunci B este de asemenea precompactă.

Dacă $A \subset X$ este completă atunci din propoziţia 4) rezultă că A este închisă. Dacă $A \subset X$ este completă şi $B \subset A$ atunci B va fi completă dacă şi numai dacă B este închisă.

2) Considerăm spaţiul metric $\mathbb{R}$. Atunci $A \subset \mathbb{R}$ este precompactă dacă şi numai dacă A este mărginită. Intr-adevăr este suficient să se verifice că orice interval $[a, b]$ cu $a < b$ este precompactă. Ori este evident că pentru orice $\varepsilon > 0$ există o diviziune $a = a_0 < a_1 < \dots < b_n = b$ cu $a_{i+1} - a_i < \varepsilon$. Evident avem

$$[a, b] \subset \bigcup_{i=0}^{n} B(a_i; \varepsilon)$$

Intrucît $\mathbb{R}$ este un spaţiu metric complet rezultă că o mulţime $A \subset R$ va fi completă dacă şi numai dacă A este închisă.

3) Considerăm spaţiul metric $\overline{\mathbb{R}}$. Intrucît $\overline{\mathbb{R}}$ ca spaţiu metric este izomorf cu $[-1, 1]$ în care distanţa este cea uzuală din R rezultă că orice submulţime a lui $\overline{\mathbb{R}}$ este precompactă şi că o mulţime $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ va fi completă dacă şi numai dacă este închisă în $\overline{\mathbb{R}}$.

Propoziţia 13. Fie (X, d) un spaţiu metric şi $A \subset X$. Atunci $A \subset X$ este precompactă dacă şi numai dacă orice şir $(x_n)_n$ din A conţine un subşir Cauchy.

Demonstraţie. Presupunem că $A \subset X$ este precompactă şi fie $(x_n)_n$ un şir din A. Intrucît A este precompactă rezultă că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ există $J_n \subset X$ finită astfel încît

$$A \subset \bigcup_{y \in J_n} B(y, \tfrac{1}{n})$$

Se construieşte inductiv un şir descrescător $(T_n)_n$ de submulţimi infinite ale lui $\mathbb{N}$ şi $(y_n)_n$ un şir din X astfel încît $y_n \in J_n$ şi

$$T_n \subset \{n \in \mathbb{N} \mid x_n \in B(y_n; \tfrac{1}{n})\}$$

Intr-adevăr întrucît J_1 este finită rezultă că există $y_1 \in J_1$ astfel încît

$$T_1 = \{ n \in N \mid x_n \in B(y_1; 1)\}$$

este infinită. Presupunem că s-a construit sistemul $(y_k)_{1 \leq k \leq n}$ şi $(T_k)_{1 \leq k \leq n}$ cu proprietăţile de mai sus. Intrucît T_n este infinită, J_{n+1} este finită şi

$$A \subset \bigcup_{y \in J_{n+1}} B(y, \frac{1}{n+1})$$

deducem că există $y_{n+1} \in J_{n+1}$ astfel încît mulţimea

$$\{ i \in T_n \mid x_m \in B(y_{n+1}, \frac{1}{n+1})\}$$

este infinită. Vom pune

$$T_{n+1} = \{ n \in T_n \mid x_m \in B(y_{n+1}, \frac{1}{n+1})$$

Considerăm acum un şir strict crescător $(k_n)_n$ de numere naturale astfel încît

$$k_n \in T_n \quad (\forall) \quad n \in N$$

Vom aráta că şirul $(x_{k_n})_n$ este Cauchy. Intr-adevăr pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in N$ astfel încît

$$\frac{2}{n_\varepsilon} < \varepsilon$$

De aici rezultă că

$$n \geq n_\varepsilon \Rightarrow k_n \in T_{n_\varepsilon} \Rightarrow x_{k_n} \in B(y_{n_\varepsilon}, \frac{1}{n_\varepsilon})$$

şi deci

$$n, m \geq n_\varepsilon \Rightarrow d(x_{k_n}, x_{k_m}) < \frac{2}{n_\varepsilon} < \varepsilon.$$

Presupunem acum că orice şir $(x_n)_n$ din A conţine un subşir Cauchy. Să arătăm că A este precompactă. Presupunem că A nu este precompactă. Atunci există $\varepsilon_0 > 0$ astfel încît nu există $J \subset X$ finită cu proprietatea

$$A \subset \bigcup_{y \in J} B(y; \varepsilon_0)$$

Construim acum un şir $(x_n)_n$ în A astfel încît $x_n \in A$ şi

$$x_{n+1} \in A \setminus \bigcup_{k=0}^{n} B(x_k; \varepsilon_0) .$$

Şirul $(x_n)_n$ are proprietatea că

$$n > m \Longrightarrow x_n \notin B(x_m; \varepsilon_0) \longrightarrow d(x_n, x_m) \geqslant \varepsilon_0$$

şi deci acest şir nu conţine un subşir Cauchy ceea ce contrazice ipoteza. Aşadar în ipoteza făcută rezultă că A este precompactă.

<u>Propoziţia 14.</u> Fie (X, d) un spaţiu metric şi $A \subset X$. Atunci următoarele afirmaţii sînt echivalente:

1) A este compactă

2) A este precompactă şi completă

3) Orice şir din A conţine un subşir convergent la un punct din A.

<u>Demonstraţie.</u> 1) $\Longrightarrow$ 2). Fie $\varepsilon > 0$. Intrucît familia $(B(x; \varepsilon))_{x \in A}$ este o acoperire deschisă a lui A, iar A este compactă rezultă că există $J \subset A$ finită astfel încît

$$A \subset \bigcup_{x \in J} B(x; \varepsilon)$$

adică A este precompactă.

Fie $(x_n)_n$ un şir Cauchy din A. Vrem să arătăm că există $a \in A$ astfel încît $x_n \longrightarrow a$. Ţinînd seama că $(x_n)_n$ este şir Cauchy atunci existenţa unui astfel de punct a este echivalentă cu existenţa unui subşir $(x_{k_n})_n$ care converge la a, sau echivalent cu faptul că pentru orice $\varepsilon > 0$ mulţimea

$$\{n \in \mathbb{N} \mid x_n \in B(a, \varepsilon)\}$$

este infinită. Presupunem aşadar că şirul $(x_n)_n$ nu converge la nici un punct $a \in A$. Atunci rezultă că pentru orice $a \in A$ există $r_a > 0$ cu proprietatea că mulţimea

$$S_a := \{n \in \mathbb{N} \mid x_n \in B(a; r_a)\}$$

este finită. Intrucît familia $(B(a; r_a))_{a \in A}$ este o acoperire deschisă a lui A iar A este compactă rezultă că există $J \subset A$ finită cu proprietatea

$$A \subset \bigcup_{a \in J} B(a; r_a)$$

De aici rezultă că $\bigcup_{a \in J} S_a$ este finită ceea ce evident contrazice relația

$$\mathbb{N} = \bigcup_{a \in J} S_a$$

2) $\Longrightarrow$ 3) . Fie $(x_n)_n$ un şir din A . Intrucît A este precompactă atunci există un subşir $(x_n)_n$ Cauchy. Din faptul că A este completă deducem că $(x_{k_n})_n$ este convergent la un punct din A.

3) $\Longrightarrow$ 2) . Dacă $(x_n)_n$ este un şir din A atunci el conţine un subşir convergent şi deci un subşir Cauchy. Prin urmare A este precompactă. Dacă $(x_n)_n$ este un şir Cauchy din A atunci el conţine un subşir convergent la un punct din A şi deci $(x_n)_n$ converge la un punct din A. Deci A este completă.

3) $\Longrightarrow$ 1) . Presupunem că A nu este compactă. Atunci există o acoperire deschisă $(G_i)_{i \in I}$ a lui A pentru care nu există $J \subset I$ finită astfel încît $(G_j)_{j \in J}$ să fie o acoperire a lui A . Vom aráta că aceasta va contrazice ipoteza 3).

In continuare vom spune despre o mulţime B a lui A că are proprietatea $\mathcal{L}$) dacă nu există $J \subset I$ finită astfel ca $(G_j)_{j \in J}$ să fie o acoperire a lui B. Remarcăm că dacă $B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_k$ are proprietatea $\mathcal{L}$) atunci există p, $1 \leq p \leq k$ astfel încît B_p are proprietatea $\mathcal{L}$.

Vom construi acum inductiv un şir $(y_n)_n$ în X şi un şir descrescător $(A_n)_n$ de submulţimi ale lui A astfel încît A_n are proprietatea $\mathcal{L}$) şi

$$A_n \subset B(y_n ; \tfrac{1}{n})$$

Intr-adevăr întrucît A este precompactă există $F_1 \subset X$ finită cu proprietatea

$$A \subset \bigcup_{y \in F_1} B(y, 1)$$

Avem

$$A = \bigcup_{y \in F_1} (A \cap B(y; 1))$$

şi deoarece A are proprietatea α) rezultă că există $y_1 \in F$ astfel încît $A \cap B(y_1; 1)$ să aibe de asemenea proprietatea α). Punem

$$A_1 = A \cap B(y_1; 1)$$

Presupunem că a fost construit sistemul $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ şi $(A_1, A_2, \dots, A_n)$ cu proprietăţile de mai sus. Intrucît A_n este precompactă rezultă că există $F_{n+1} \subset X$ finită astfel încît

$$A_n \subset \bigcup_{y \in F_{m+1}} B(y; \frac{1}{n+1})$$

Din

$$A_m = \bigcup_{y \in F_{n+1}} A_n \cap B(y; \frac{1}{n+1})$$

şi din faptul că A_n are proprietatea α) rezultă că există $y_{n+1} \in F_{n+1}$ astfel încît

$$A_n \cap B(y_{n+1}; \frac{1}{n+1})$$

să aibe proprietatea α). Punem

$$A_{n+1} = A_n \cap B(y_{n+1}; \frac{1}{n+1})$$

Avem evident

$$A_{n+1} \subset B(y_{n+1}; \frac{1}{n+1}), \quad A_{n+1} \subset A_m$$

Fie acum $(x_n)_n$ un şir în A astfel încît să avem $x_n \in A_n$ $(\forall)$ $n \in \mathbb{N}$. Acest şir este un şir Cauchy. Intr-adevăr pentru $\varepsilon > 0$ şi $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încît $\frac{2}{n_\varepsilon} < \varepsilon$ avem

$$n, m \geq n_\varepsilon \Longrightarrow x_n, x_m \in A_{n_\varepsilon} \Longrightarrow x_n, x_m \in B(y_{n_\varepsilon}; \frac{1}{n_\varepsilon})$$

şi deci

$$n, m \geq n_\varepsilon \Longrightarrow d(x_n, x_m) < \frac{2}{n_\varepsilon} < \varepsilon .$$

Intrucît din 3) rezultă că orice şir Cauchy din A converge la un punct din A rezultă că există $a \in A$ astfel încît $x_n \to a$. Dar $(G_i)_{i \in I}$ este o acoperire a lui A şi deci există $i_0 \in I$ cu proprietatea $G_{i_0} \ni a$.

Intrucît G_{i_0} este deschisă rezultă că există $r_0 > 0$ astfel încît $B(a; r_0) \subset G_{i_0}$. Din faptul că $x_n \to a$ deducem că există $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încît

$$\frac{2}{n_0} < \frac{r_0}{2} \quad \text{şi} \quad d(x_{n_0}, a) < \frac{r_0}{2} .$$

Vom arăta că $A_{n_0} \subset B(a; r_0)$ şi deci $A_{n_0} \subset G_{i_0}$ ceea ce contrazice faptul că A_{n_0} are proprietatea α).

Intr-adevăr din $x \in A_{n_0}$ şi $x_{n_0} \in A_{n_0}$ avem

$$x, x_{n_0} \in B(y_{n_0}, \frac{1}{n_0})$$

şi deci

$$d(x, x_{n_0}) \leq \frac{2}{n_0} < \frac{r_0}{2}$$

De aici rezultă că pentru $x \in A_{n_0}$ avem

$$d(x, a) \leq d(x, x_{n_0}) + d(x_{n_0}, a) < \frac{r_0}{2} + \frac{r_0}{2} = r_0$$

adică

$$A_{n_0} \subset B(a; r_0) .$$

<u>Corolar 15.</u> O mulţime $A \subset \mathbb{R}$ este compactă în $\mathbb{R}$ dacă şi numai dacă este închisă şi mărginită.

<u>Corolar 16.</u> O mulţime $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ este compactă în $\overline{\mathbb{R}}$ dacă şi numai dacă este închisă.

Exerciţii. 1) Fie X o mulţime şi $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$. In spaţiul topologic $(X,\mathcal{T})$ o submulţime A va fi compactă dacă şi numai dacă A este finită.

2) Fie X un spaţiu topologic şi $A \subset X$. Atunci A este compactă dacă şi numai dacă pentru orice familie $(F_i)_{i\in I}$ de mulţimi închise cu proprietatea

$$A \cap (\bigcap_{i\in I} F_i) = \emptyset$$

există $J \subset I$ finită astfel încît

$$A \cap (\bigcap_{j\in J} F_j) = \emptyset.$$

Indicaţie. Condiţia

$$A \cap (\bigcap_{i\in I} F_i) = \emptyset$$

este echivalentă cu faptul că familia $(\complement F_i)_{i\in I}$ este o acoperire (deschisă) a lui A.

3) Presupunem că X este un spaţiu topologic separat. Atunci pentru orice familie $(K_i)_{i\in I}$ de mulţimi compacte din X astfel încît

$$\bigcap_{i\in I} K_i = \emptyset$$

există $J \subset I$ finită cu proprietatea

$$\bigcap_{j\in J} K_j = \emptyset.$$

4) Fie $([a_i, b_i])_{i\in I}$ o familie de intervale închise din $\mathbb{R}$ astfel încît

$$i, j \in I \Longrightarrow [a_i, b_i] \cap [a_j, b_j] \neq \emptyset.$$

Atunci

$$\bigcap_{i\in I} [a_i, b_i] \neq \emptyset$$

<u>Indicație</u>. Aplicînd propoziția 3) va fi suficient să arătăm că pentru orice $J \subset I$ finită avem $\bigcap_{j \in J} [a_j, b_j] \neq \emptyset$. Pentru a arăta această din urmă proprietate este suficient să se arate această proprietate pentru cazul cînd J are cel mult trei elemente.

5) Fie X un spațiu topologic separat și $A \subset X$ o mulțime compactă și infinită. Atunci A are cel puțin un punct de acumulare.

6) Fie A o mulțime mărginită din $\mathbb{R}$ astfel încît A nu are puncte de acumulare. Atunci A este finită.

7) Se consideră în $\mathbb{R}$ mulțimile :

$$\mathbb{N} \ ; \ (0, 1] \ ; \ \left\{ \frac{1}{n} \middle| n \in \mathbb{N}^* \right\} ; \ \{0\} \cup \left\{ \frac{1}{n} \middle| n \in \mathbb{N}^* \right\} ;$$

Să se decidă care din aceste mulțimi sînt compacte și care din ele nu sînt compacte.

8) Fie $A \subset \mathbb{R}$. Să se arate că A este compactă în $\mathbb{R}$ dacă și numai dacă considerată ca submulțime în $\overline{\mathbb{R}}$ este compactă în $\overline{\mathbb{R}}$.

9) Se consideră în $\overline{\mathbb{R}}$ mulțimile

$$\mathbb{N} \cup \{+\infty\} ; \quad \mathbb{Z} \cup \{-\infty, +\infty\} ; \ \overline{\mathbb{R}}$$

Să se arate că fiecare din aceste mulțimi este compactă în $\overline{\mathbb{R}}$.

10) Fie X un spațiu topologic separat și $(K_i)_{i \in I}$ o familie oarecare de mulțimi compacte. Să se arate că mulțimea $\bigcap_{i \in I} K_i$ este de asemenea compactă.

<u>Indicație</u>. Se utilizează faptul că într-un spațiu topologic separat mulțimile compacte sînt închise.

4. <u>Mulţimi conexe</u>

In acest paragraf X va fi un spaţiu topologic.

<u>Definiţie</u>. Două mulţimi A, B din X se numesc <u>separate</u> dacă $\bar{A}\cap B = \phi$ şi $A \cap \bar{B} = \phi$. O mulţime $A \subset X$ se numeşte <u>neconexă</u> dacă există două mulţimi A_1, A_2, nevide, separate astfel încît $A = A_1 \cup A_2$. O mulţime $A\subset X$ se va numi <u>conexă</u> dacă nu este neconexă. Spaţiul topologic X se numeşte conex dacă X este o submulţime conexă în X.

<u>Remarcă.</u> 1) Din definiţie rezultă direct că mulţimea vidă este conexă şi că orice mulţime formată dintr-un singur punct este de asemenea conexă.

2) Fie $A\subset X$. Intrucît pentru orice parte $C\subset A$ aderenţa lui C în A coincide cu $\bar{C}\cap A$ unde $\bar{C}$ este aderenţa lui C în X deducem că două submulţimi C_1, C_2 ale lui A vor fi separate în X atunci şi numai atunci cînd sînt separate în X. De aici rezultă că dacă $A\subset X$ atunci A este conexă ca submulţime a lui X dacă şi numai dacă A este conex ca spaţiu topologic.

<u>Propoziţia 17.</u> Fie $F \subset X$ o mulţime închisă. Atunci condiţia necesară şi suficientă pentru F să fie neconexă este ca să existe două mulţimi închise nevide şi disjuncte F_1, F_2 astfel încît $F = F_1 \cup F_2$.

<u>Demonstraţie</u>. Presupunem că F este neconexă. Atunci există două mulţimi nevide şi separate F_1, F_2 astfel încît

$$F = F_1 \cup F_2$$

Evident $F_1 \cap F_2 \subset \bar{F}_1 \cap F_2 = \phi$. Vom arăta că F_1 şi F_2 sînt închise. Intr-adevăr avem

$$\bar{F}_1 \subset \bar{F} = F \quad , \quad \bar{F}_2 \subset \bar{F} = F$$

$$\bar{F}_1 = \bar{F}_1 \cap F = \bar{F}_1 \cap (F_1 \cup F_2) = (\bar{F}_1 \cap F_1) \cup (\bar{F}_1 \cap F_2) =$$
$$= \bar{F}_1 \cap F_1 = F_1$$

adică $\bar{F}_1 = F_1$ ceea ce arată că F_1 este închisă. Analog vom avea $\bar{F}_2 = F_2$ şi deci F_2 este închisă.

Presupunem că F_1, F_2 sînt închise, nevide, disjuncte astfel încît $F = F_1 \cup F_2$. Din

$$\bar{F}_1 = F_1 \quad , \quad \bar{F}_2 = F_2$$

deducem $\bar{F}_1 \cap F_2 = F_1 \cap F_2 = \phi$, $F_1 \cap \bar{F}_2 = F_1 \cap F_2 = \phi$ adică F_1, F_2 sînt separate şi deci F este neconexă.

<u>Propoziţia 18.</u> Fie $G \subset X$ o mulţime deschisă. Atunci condiţia necesară şi suficientă pentru G să fie neconexă este ca să existe două mulţimi deschise nevide şi disjuncte G_1, G_2 astfel încît $G = G_1 \cup G_2$.

<u>Demonstraţie.</u> Presupunem că G este neconexă. Atunci există două mulţimi nevide şi separate G_1, G_2 astfel încît

$$G = G_1 \cup G_2 \; .$$

Evident $G_1 \cap G_2 \subset \bar{G}_1 \cap G_2 = \phi$. Vom arăta că G_1, G_2 sînt deschise. Din

$$\bar{G}_1 \cap G_2 = \phi \quad , \quad G_1 \cap \bar{G}_2 = \phi$$

şi din

$$G_2 \cap (\complement \bar{G}_2) = \phi, \quad G_1 \cap (\complement \bar{G}_1) = \phi$$

deducem

$$G \cap \complement(\bar{G}_2) = (G_1 \cap \complement(\bar{G}_2)) \cup (G_2 \cap \complement(\bar{G}_2)) = G_1$$

$$G \cap \complement(\bar{G}_1) = (G_1 \cap \complement(\bar{G}_1)) \cup (G_2 \cap \complement(\bar{G}_1)) = G_2$$

ceea ce arată că G_1, G_2 sînt deschise.

Fie G_1, G_2 două mulţimi nevide, deschise şi disjuncte astfel încît

$$G = G_1 \cup G_2$$

Vom arăta că G_1, G_2 sînt separate. Intr-adevăr din $G_1 \cap G_2 = \emptyset$ deducem

$$G_2 \subset \complement G_1 \ , \ G_1 \subset \complement G_2$$

şi deoarece $\complement G_1$ şi $\complement G_2$ sînt închise avem

$$\overline{G}_2 \subset \complement G_1 \ , \ \overline{G}_1 \subset \complement G_2$$

ceea ce arată că

$$G_1 \cap \overline{G}_2 = \emptyset \quad \text{şi} \quad \overline{G}_1 \cap G_2 = \emptyset$$

adică G_1, G_2 sînt separate.

<u>Propoziţia 19.</u> Fie $(A_i)_{i \in I}$ o familie de mulţimi conexe în X astfel încît

$$i, j \in I \Longrightarrow \overline{A}_i \cap A_j \neq \emptyset \ \text{sau} \ A_i \cap \overline{A}_j \neq \emptyset$$

atunci $\bigcup\limits_{i \in I} A_i$ este conexă.

<u>Demonstraţie</u>. Presupunem că $\bigcup\limits_{i \in I} A_i$ este neconexă.

Atunci există două mulţimi nevide şi separate B_1, B_2 astfel încît

$$\bigcup_{i \in I} A_i = B_1 \cup B_2$$

întrucît pentru orice $i \in I$, A_i este conexă,

$$A_i = (A_i \cap B_1) \cup (A_i \cap B_2) \ ,$$

iar $(A_i \cap B_1)$ şi $(A_i \cap B_2)$ sînt evident separate rezultă că avem $A_i \cap B_1 = \emptyset$ sau $A_i \cap B_2 = \emptyset$ or echivalent

$$A_i \subset B_1 \quad \text{sau} \quad A_i \subset B_2$$

Din faptul că $B_1 \neq \phi$ şi $B_2 \neq \phi$ şi din

$$\bigcup_{i\in I} A_i = B_1 \cup B_2$$

rezultă că există $i_0 \in I$ şi $j_0 \in I$ astfel încît

$$A_{i_0} \cap B_1 \neq \phi , \quad A_{j_0} \cap B_2 \neq \phi$$

Din consideraţiile precedente vom avea $A_{i_0} \subset B_1$, $A_{j_0} \subset B_2$. Pe de altă parte întrucît B_1 şi B_2 sînt separate rezultă

$$\bar{A}_{i_0} \cap A_{j_0} \subset \bar{B}_1 \cap B_2 = \phi$$

$$A_{i_0} \cap \bar{A}_{j_0} \subset B_1 \cap \bar{B}_2 = \phi$$

ceea ce contrazice ipoteza

$$\bar{A}_i \cap A_j \neq \phi \quad \text{sau} \quad A_i \cap \bar{A}_j \neq \phi \quad (\forall)\ i, j \in I$$

<u>Corolar 20.</u> Fie $(A_i)_{i\in I}$ o familie de mulţimi conexe din X astfel încît $\bigcap_{i\in I} A_i \neq \phi$. Atunci $\bigcup_{i\in I} A_i$ este conexă.

<u>Corolar 21.</u> Fie $A \subset X$ o mulţime conexă şi $B \subset X$ astfel încît $A \subset B \subset \bar{A}$. Atunci B este de asemenea conexă.

<u>Demonstraţie.</u> Dacă $A = \phi$ atunci $\bar{A} = A = \phi$ şi deci $B = \phi$. Presupunem că $A \neq \phi$. Pentru orice $b \in B$ punem

$$A_b = A \cup \{b\} .$$

Evident

$$b', b'' \in B \Longrightarrow \bar{A}_{b'} \cap A_{b''} \supset A \neq \phi$$

şi deci din propoziţia 1° deducem că $\bigcup_{b\in B} A_b$ adică B este o mulţime conexă.

<u>Definiţie.</u> Fie $A \subset X$. Se numeşte <u>componentă conexă a lui</u> A o submulţime C a lui A care, este conexă şi care are proprietatea că dacă C_1 este o submulţime conexă a lui A care include pe C atunci $C_1 = C$.

Remarcă. 1) Dacă $a \in A$ atunci reuniunea submulţimilor conexe ale lui A care conţin punctul a este o componentă conexă a lui A (vezi corolarul 20).

2) Dacă C_1, C_2 sînt componente conexe distincte ale lui A atunci ele sînt disjuncte. Intr-adevăr în caz contrar (adică dacă $C_1 \cap C_2 \neq \phi$) atunci $C_1 \cup C_2$ este de asemenea conexă şi deci $C_1 \cup C_2 = C_1 = C_2$.

3) Dacă A este închisă atunci orice componentă conexă a sa este de asemenea închisă. Intr-adevăr dacă C este o componentă conexă a lui A atunci avem $C \subset \bar{C} \subset \bar{A} = A$ adică $\bar{C}$ este o submulţime conexă a lui A care include pe C şi deci $\bar{C} = C$.

Propoziţia 22. Fie $A \subset \bar{R}$. Atunci A este conexă dacă şi numai dacă $A = \phi$ sau A este un interval în $\bar{R}$.

Demonstraţie. Presupunem că A este conexă şi $A \neq \phi$. Punem $\alpha = \inf A$ şi $\beta = \sup A$. Pentru a arata că A este un interval va fi suficient să arătăm că

$$(\alpha, \beta) \subset A$$

Intr-adevăr dacă $(\alpha, \beta) \not\subset A$ atunci există $x_0 \in (\alpha, \beta)$ cu $x_0 \notin A$ şi deci

$$A \subset [-\infty, x_0) \cup (x_0, +\infty]$$

Intrucît $\alpha < x_0$ (sup $\beta > x_0$) deducem că mulţimile

$$A_1 = A \cap [-\infty, x_0)\ ,\ A_2 = A \cap (x_0, +\infty]$$

sînt nevide. Pe de altă parte din

$$\overline{A \cap [-\infty, x_0)} \cap (A \cap (x_0, +\infty]) \subset [-\infty, x_0] \cap (x_0, +\infty) = \phi,$$

$$(A \cap [-\infty, x_0)) \cap \overline{A \cap (x_0, +\infty)]} \subset [-\infty, x_0) \cap [x_0, +\infty] = \phi$$

rezultă A_1, A_2 sînt separate. De aici şi din

$$A = A_1 \cup A_2$$

rezultă că A n-ar fi conexă.

Fie acum A un interval în $\overline{R}$. Punînd $\alpha = \inf A$, $\beta = \sup A$ avem

$$\alpha < \beta \Longrightarrow (\alpha, \beta) \subset A \subset \overline{(\alpha, \beta)} = [\alpha, \beta]$$

De aici rezultă că va fi suficient să considerăm doar cazul

$$A = (\alpha, \beta) .$$

Presupunem că A este neconexă. Intrucît A este deschisă în $\overline{R}$ rezultă că există două mulţimi nevide, deschise şi disjuncte G_1, G_2 astfel încît

$$(\alpha, \beta) = G_1 \cup G_2$$

Fie acum $x_0 \in G_1$. Atunci există $\alpha' < x_0$, $\beta' > x_0$ astfel încît $(\alpha', \beta') \subset G_1$. Notám

$$\alpha_0 := \inf \{\alpha' \in R \mid (\alpha', x_0] \subset G_1\}$$

$$\beta_0 := \inf \{\beta' \in R \mid [x_0, \beta') \subset G_1\}$$

Evident

$$(\alpha_0, \beta_0) \subset G_1$$

$$\alpha \leq \alpha_0 < x_0 < \beta_0 \leq \beta$$

Vom aráta că $G_1 = (\alpha, \beta)$ ceea ce contrazice ipoteza $G_2 \neq \phi$. Dacă $\alpha_0 \neq \alpha$ atunci din $\alpha_0 \in (\alpha, \beta)$ rezultă $\alpha_0 \in G_1$ sau $\alpha_0 \in G_2$. Nu putem avea $\alpha_0 \in G_1$ întrucît din faptul că G_1 este deschisă ar exista $\alpha' < \alpha_0$ cu proprietatea $(\alpha', \alpha_0] \subset G_1$ şi deci $(\alpha', x_0) \subset G_1$ ceea ce contrazice definiţia lui α_0. Nu putem avea însă nici $\alpha_0 \in G_2$ întrucît din faptul că G_2 este deschisă ar exista $y > \alpha_0$ cu proprietatea

$$[\alpha_0, y) \subset G_2$$

ceea ce contrazice definiţia lui α_0. Aşa dar $\alpha_0 = \alpha$.
Analog se arată că $\beta_0 = \beta$ adică $G_1 = (\alpha, \beta)$.

5. Spaţii topologice cu proprietatea Baire

Definiţie. Un spaţiu topologic X se spune că are proprietatea Baire, dacă pentru orice şir $(G_n)_n$ de mulţimi deschise dense în X mulţimea $\bigcap\limits_n G_n$ este densă în X.

Propoziţia 23. Fie X un spaţiu topologic. Atunci X are proprietatea Baire dacă şi numai dacă pentru orice şir $(F_n)_n$ de mulţimi închise din X astfel încît $\overset{\circ}{\widehat{F_n}} = \emptyset$ avem $\overset{\circ}{\widehat{\bigcup\limits_n F_n}} = \emptyset$.

Demonstraţie. Presupunem că X are proprietatea Baire şi fie $(F_n)_n$ un şir de mulţimi închise cu $\overset{\circ}{\widehat{F_n}} = \emptyset$. Atunci notînd $G_n = \complement F_n$ avem

$$\overline{G_n} = \overline{\complement F_n} = \complement(\overset{\circ}{\widehat{F_n}}) = X$$

adică G_n este o mulţime deschisă şi densă în X. De aici deducem că $\bigcap\limits_n G_n$ este densă în X, adică

$$\overline{\bigcap_n G_n} = X$$

şi deci

$$\emptyset = \complement(\overline{\bigcap_n G_n}) = \overset{\circ}{\overline{\complement(\bigcap_n G_n)}} = \overset{\circ}{\widehat{\bigcup_n F_n}} .$$

Reciproc presupunem că are loc proprietatea din enunţ şi fie $(G_n)_n$ un şir de mulţimi deschise şi dense în X. Notînd $F_n = \complement G_n$ avem

$$\overset{\circ}{\widehat{F_n}} = \overset{\circ}{\widehat{\complement G_n}} = \complement(\overline{G_n}) = \complement X = \emptyset$$

şi cum F_n este închisă rezultă, utilizînd ipoteza,

$$\overset{\circ}{\widehat{\bigcup_n F_n}} = \emptyset$$

şi deci

$$\overline{\bigcap_n G_n} = \overline{\bigcap_n (\complement F_n)} = \overline{\complement(\bigcup_n F_n)} = \complement(\overset{\circ}{\widehat{\bigcup_n F_n}}) = X$$

adică $\bigcap\limits_n G_n$ este densă în X.

<u>Propoziţia 24.</u> Dacă X este un spaţiu topologic cu proprietatea Baire atunci orice submulţime deschisă a lui X reprezintă un spaţiu topologic cu proprietatea Baire.

<u>Demonstraţie.</u> Fie D o submulţime deschisă în X. Atunci o submulţime $A \subset D$ va fi deschisă relativ la D dacă şi numai dacă există o mulţime deschisă G în X astfel încît $A = G \cap D$ adică A este o mulţime deschisă în X. Fie acum $(G_n)_n$ un şir de mulţimi deschise în X cu $G_n \subset D$. şi G_n densă în D. Punînd $B_n = G_n \cup \complement \overline{D}$ rezultă că B_n este deschisă şi densă în X. Intr-adevăr avem

$$\overline{B_n} = \overline{(G_n \cup \complement \overline{D})} = \overline{G_n} \cup \overline{\complement \overline{D}} \supset \overline{D} \cup \complement \overline{D} = X .$$

De aici rezultă că mulţimea $\bigcap_n B_n$ este densă în X şi deci

$$\overline{\bigcap_n B_n} = X ,$$

Din

$$\bigcap_n B_n = \bigcap_n G_n \cup \complement \overline{D}$$

rezultă că

$$X = \overline{\cap B_n} = \overline{\cap G_n} \cup \overline{\complement \overline{D}}$$

şi deci cum $\overline{\complement \overline{D}} = \complement (\overset{\circ}{\overline{D}}) \subset \complement D$ rezultă că

$$\overline{\bigcap_n G_n} \supset D$$

adică $\bigcap_n G_n$ este densă în D.

<u>Propoziţia 25.</u> Fie (X, d) un spaţiu metric complet. Atunci spaţiul topologic X asociat are proprietatea Baire.

<u>Demonstraţie.</u> Fie $(G_n)_n$ un şir de mulţimi deschise şi dense în X şi fie $a \in X$ şi $r > 0$. Intrucît $a \in \overline{G_1}$ rezultă că $G_1 \cap B(a; r) \neq \emptyset$ şi deci există $x_1 \in X$ şi $r_1 > 0$, $r_1 < 1$ astfel încît

$$\overline{B(x_1; r_1)} \subset G_1 \cap B(a; r)$$

Intrucît $x_1 \in \overline{G_2}$ rezultă $G_2 \cap B(x_1; r_1) \neq \emptyset$ şi deci există $x_2 \in X$ şi $r_2 > 0$, $r_2 < \frac{1}{2}$ astfel încît

$$\overline{B(x_2;\ r_2)} \subset G_2 \cap B(x_1;\ r_1)\ .$$

Continuînd acest procedeu rezultă că se poate construi un şir $(x_n)_n$ de puncte din X şi un şir $(r_n)_n$ de numere reale > 0 astfel încît $r_n < \frac{1}{n}$ şi

$$\overline{B(x_{n+1};\ r_{n+1})} \subset G_{n+1} \cap B(x_n;\ r_n)\ .$$

Sirul $(x_n)_n$ are evident proprietatea

$$m \geqslant n \Longrightarrow x_m \in B(x_n;\ r_n)$$

şi deci

$$d(x_{n+p},\ x_n) < r_n < \frac{1}{n}\ .$$

De aici rezultă că şirul $(x_n)_n$ este un şir Cauchy în X şi deci un şir convergent. Fie

$$x = \lim_n x_n\ .$$

Din

$$m \geqslant n \Longrightarrow x_n \in \overline{B(x_n;\ r_n)}$$

deducem că

$$x \in \overline{B(x_n;\ r_n)} \subset G_n \cap B(a;\ r)$$

şi deci

$$x \in (\bigcap_n G_n) \cap B(a;\ r)$$

Aşa dar

$$(\bigcap_n G_n) \cap B(a,\ r) \neq \emptyset\ (\forall)\ r > 0$$

şi deci

$$a \in \overline{\bigcap_n G_n}\ .$$

<u>Corolar 26.</u> $\mathbb{R}$ şi $\overline{\mathbb{R}}$ şi orice interval din $\mathbb{R}$ sau $\overline{\mathbb{R}}$ sînt spaţii topologice care posedă proprietatea Baire.

VI. FUNCTII CONTINUE

1. Funcţii continue

Definiţie. Fie X, Y spaţii topologice, $f : X \to Y$ o funcţie de la X la Y şi $x_0 \in X$. Spunem că f este continuă în punctul x_0 dacă pentru orice vecinătate W a lui $f(x_0)$ mulţimea $f^{-1}(W)$ este o vecinătate a lui x_0. Dacă f este continuă în fiecare punct din X se spune simplu că f este continuă.

Remarcă. 1) Dacă X, Y sînt spaţii topologice $A \subset X$, $x_0 \in A$ şi $f : A \to Y$ atunci considerînd pe A ca subspaţiu topologic a lui X şi observînd că o vecinătate în A a lui x_0 este o mulţime de forma $V \cap A$ unde V este o vecinătate în X a lui x_0 deducem că f va fi continuă în x_0 dacă şi numai dacă pentru orice vecinătate W a lui $f(x_0)$ există o vecinătate V a lui x_0 în X astfel încît

$$f(V \cap A) \subset W$$

2) Din definiţie rezultă că dacă X este un spaţiu topologic atunci aplicaţia identică a lui X (notată 1_X) este continuă. De asemenea dacă X, Y sînt spaţii topologice atunci pentru orice $y_0 \in Y$ funcţia constantă de la X la Y egală în orice x cu y_0 este continuă.

Propoziţia 1. Fie X, Y, Z trei spaţii topologice şi $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ funcţii continue în $x_0 \in X$ şi respectiv în $y_0 := f(x_0)$. Atunci funcţia $g \circ f : X \to Z$ este continuă în x_0.

Demonstraţie. Dacă U este o vecinătate a punctului $g(f(x_0)) = g(y_0)$ atunci rezultă că $g^{-1}(U)$ este o vecinătate a lui $y_0 = f(x_0)$ şi deci din faptul că f este continuă în x_0 rezultă că $f^{-1}(g^{-1}(U))$ este o vecinătate a lui x_0. Afirmaţia rezultă acum ca $(g \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U))$.

<u>Propoziţia 2.</u> Fie X, Y spaţii topologice , $A\subset X$ $x_0\in A$ şi $f: X \to Y$. Dacă f este continuă în x_0 atunci restricţia $f|_A$ este continuă în x_0. Dacă A este vecinătate în X a lui x_0 iar restricţia $f|_A$ este continuă în x_0 atunci f este de asemenea continuă în x_0 .

<u>Demonstraţie.</u> Fie U o vecinătate a lui $f(x_0)$. Din faptul că f este continuă în x_0 rezultă că $f^{-1}(U)$ este o vecinătate în X a lui x_0 . Intrucît

$$(f|_A)^{-1}(U) = f^{-1}(U) \cap A$$

deducem că $(f|_A)^{-1}(U)$ este o vecinătate în A a lui x_0 şi deci $f|_A$ este continuă în x_0 .

Presupunem acum că $f|_A$ este continuă în x_0 şi că A este o vecinătate a lui x_0 . Rezultă că pentru orice vecinătate U a lui $f(x_0) = f|_A(x_0)$ mulţimea $(f|_A)^{-1}(U)$ adică $f^{-1}(U) \cap A$ este o vecinătate în A a lui x_0 şi deci există o vecinătate V în X a lui x_0 cu proprietatea $V \cap A = f^{-1}(U) \cap A$. Deoarece A este o vecinătate în X a lui x_0 deducem că $V\cap A$ este o vecinătate în X a lui x_0 şi deci cu atît mai mult $f^{-1}(U)$ va fi o vecinătate în X a lui x_0 . Aşadar f este continuă în x_0 .

<u>Propoziţia 3.</u> Fie X, Y spaţii topologice, $f: X \to Y$ $x_0\in X$ şi $y_0 = f(x_0)$ şi fie $\mathcal{A}_{x_0}$ (resp. $\mathcal{B}_{y_0}$) un sistem fundamental de vecinătăţi ale lui x_0 (resp. y_0). Atunci f este continuă în x_0 dacă şi numai dacă pentru orice $U\in \mathcal{B}_{y_0}$ există $V\in \mathcal{A}_{x_0}$ cu proprietatea $f(V)\subset U$.

<u>Demonstraţie.</u> Fie f continuă în x_0 şi fie $U\in \mathcal{B}_{y_0}$. Atunci $f^{-1}(U)$ este o vecinătate a lui x_0 şi deci există $V\in \mathcal{A}_{x_0}$, cu proprietatea $V \subset f^{-1}(U)$ sau echivalent $f(V)\subset U$.

Reciproc presupunem că este îndeplinită proprietatea din enunţ. Dacă W este o vecinătate a lui $y_0 = f(x_0)$ atunci există $U \in \mathcal{B}_{y_0}$, $U \subset W$ iar din ipoteză există $V \in \mathcal{A}_{x_0}$ cu proprietatea $f(V) \subset U$. Aşadar $f(V) \subset W$ sau echivalent $V \subset f^{-1}(W)$ ceea ce arată că $f^{-1}(W)$ este o vecinătate a lui x_0. Deci f este continuă în x_0.

Remarcă. 1) Fie X un spaţiu topologic, $f : X \to \mathbb{R}$ şi $x_0 \in X$. Atunci f este continuă în x_0 dacă şi numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există o vecinătate V_ε a lui x_0 cu proprietatea

$$x \in V_\varepsilon \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

2) Fie (X, d), (Y, δ) spaţii metrice, $x_0 \in X$ şi $f : X \to Y$. Atunci f este continuă în x_0 dacă şi numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\eta_\varepsilon > 0$ cu proprietatea

$$d(x, x_0) < \eta_\varepsilon \Longrightarrow \delta(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

sau echivalent

$$x \in B(x_0; \eta_\varepsilon) \Longrightarrow f(x) \in B(f(x_0); \varepsilon)$$

3) Fie $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A$. Atunci f este continuă în x_0 dacă şi numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\eta_\varepsilon > 0$ cu proprietatea

$$x \in A, |x - x_0| < \eta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

4) Fie $A \subset \overline{\mathbb{R}}$, $f : A \to \mathbb{R}$, $+\infty \in A$. Atunci f este continuă în $+\infty$ dacă şi numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\eta_\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ astfel încît

$$x \in A, \quad x > \eta_\varepsilon \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

5) Fie $A \subset \overline{\mathbb{R}}$, $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$, $+\infty \in A$ şi $f(+\infty) = +\infty$. Atunci f este continuă în $+\infty$, dacă şi numai dacă pentru orice $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ există $\eta_\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ cu proprietatea

$$x \in A, \quad x > \eta_\varepsilon \Longrightarrow f(x) > \varepsilon .$$

Propoziţia 4. Fie X, Y spaţii topologice şi $f\ X \to Y$. Atunci următoarele afirmaţii sînt echivalente:

1) f este continuă

2) G deschisă în $Y \Longrightarrow f^{-1}(G)$ deschisă în X

2') F închisă în $Y \Longrightarrow f^{-1}(F)$ închisă în X

3) $B \subset Y \Longrightarrow f^{-1}(\bar{B}) \supset \overline{f^{-1}(B)}$

3') $A \subset X \Longrightarrow f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$

Demonstraţie. 1) $\Longrightarrow$ 2) Fie G deschisă în Y şi $a \in f^{-1}(G)$. Atunci $f(a) \in G$ şi deci G este vecinătate pentru $f(a)$. Intrucît f este continuă rezultă că $f^{-1}(G)$ este o vecinătate pentru a. Aşadar orice punct a din $f^{-1}(G)$ este punct interior lui $f^{-1}(G)$ şi deci $f^{-1}(G)$ este deschisă în X.

2) $\Longrightarrow$ 2') Dacă F închisă în Y atunci $\complement F$ este deschisă în Y şi din 2) rezultă că $f^{-1}(\complement F)$ este deschisă în X. Din $f^{-1}(F) = \complement(f^{-1}(F)))$ deducem că $\complement(f^{-1})(F))$ este deschisă în X şi deci $f^{-1}(F)$ este închisă în X.

2') $\Longrightarrow$ 3') Intrucît pentru orice $A \subset X$ mulţimea $\overline{f(A)}$ este închisă în Y rezultă din 2') că $f^{-1}(\overline{f(A)})$ este o mulţime închisă în X. Evident

$$f^{-1}(\overline{f(A)}) \supset f^{-1}(f(A)) \supset A$$

şi deci

$$f^{-1}(\overline{f(A)}) \supset \bar{A}$$

adică

$$f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$$

3') $\Longrightarrow$ 3) Rezultă observînd că dacă $B \subset Y$ atunci $\bar{B}$ este închisă în Y şi deci $f^{-1}(\bar{B})$ este închisă în X şi include pe $f^{-1}(B)$ ceea ce implică că include pe $\overline{f^{-1}(B)}$.

3) $\Longrightarrow$ 1) Fie $x \in X$ şi U o vecinătate în Y a lui $f(x)$. Există atunci o mulţime deschisă G în Y, astfel încît $f(x) \in G \subset U$. De aici rezultă că $Y \setminus G$ este închisă în Y. Punînd $A = f^{-1}(Y \setminus G)$ avem din 3)

$$A = f^{-1}(Y \setminus G) \supset f^{-1}(Y \setminus G) = A$$

şi deci

$$'A = \bar{A} \quad .$$

Deoarece $f(x) \in G$ rezultă că $x \notin A$ şi deci $x \in X \setminus A$. Mulţimea $X \setminus A$ este deschisă şi deci o vecinătate a lui x. In plus avem

$$f(X \setminus A) \subset G \subset U$$

ceea ce arată că f este continuă în x.

27 Propoziţia 5. Fie X, Y spaţii topologice, $A \subset X$ şi $f : A \to Y$ continuă. Atunci

A compactă $\Longrightarrow f(A)$ compactă

A conexă $\Longrightarrow f(A)$ conexă

Demonstraţie. Presupunem că A este compactă. Fie $(G_i)_{i \in I}$ o acoperire deschisă a lui $f(A)$. Intrucît f este continuă rezultă că pentru orice $i \in I$ mulţimea $f^{-1}(G_i)$ este deschisă în A şi deci există o mulţime deschisă Γ_i în X cu proprietatea

$$f^{-1}(G_i) = \Gamma_i \cap A$$

Din

$$f(A) \subset \bigcup_{i \in I} G_i$$

deducem

$$A \subset \bigcup_{i \in I} f^{-1}(G_i) = \bigcup_{i \in I} (\Gamma_i \cap A) \subset \bigcup_{i \in I} \Gamma_i$$

adică $(\Gamma_i)_{i \in I}$ este o acoperire deschisă a lui A. Intrucît A este compactă există $J \subset F$ finită ca

$$A \subset \bigcup_{j\in J} \Gamma_j$$

şi deci

$$f(A) \subset \bigcup_{j\in J} f(\Gamma_j \cap A) \subset \bigcup_{j\in J} G_j \ .$$

Aşa dar $f(A)$ este compactă.

Presupunem acum că A este conexă. Dacă $f(A)$ nu ar fi conexă ar exista două mulţimi nevide şi separate B_1, B_2 în Y cu

$$f(A) = B_1 \cup B_2$$

Fie $A_1 = f^{-1}(B_1)$ şi $A_2 = f^{-1}(B_2)$. Avem

$$A_1 \cup A_2 = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2) = f^{-1}(B_1 \cup B_2) = A$$

Din $B_i \neq 0$ rezultă $f^{-1}(B_i) \neq \phi$. Pe de altă parte din continuitatea lui f deducem

$$\bar{A}_1 \cap A_2 = \overline{f^{-1}(B_1)} \cap f^{-1}(B_2) \subset f^{-1}(\bar{B}_1) \cap f^{-1}(B_2) =$$
$$= f^{-1}(\bar{B}_1 \cap B_2) = f^{-1}(\phi) = \phi$$

şi analog

$$\bar{A}_2 \cap A_1 = \phi$$

ceea ce arată că A_1 şi A_2 sînt separate în X şi deci A este neconexă.

27 Corolar 6. (Proprietatea lui Darboux). Fie X un spaţiu topologic şi $f : X \longrightarrow \bar{R}$ o funcţie continuă. Atunci dacă $A \subset X$ este conexă atunci $f(A)$ este un interval din $\bar{R}$.

28 Propoziţia 7. Fie X, Y spaţii topologice compacte şi $f : X \longrightarrow Y$ o funcţie bijectivă şi continuă. Dacă Y este în plus Hausdorf atunci f^{-1} este de asemenea continuă.

Demonstraţie. Conform cu propoziţia 4 este suficient să arătăm că pentru orice mulţime închisă F în X mulţimea $f(F) = (f^{-1})^{-1}(F)$ este de asemenea închisă în Y . Intr-adevăr dacă $F \subset X$ este închisă atunci F este compactă în X şi deoarece f este continuă atunci $f(F)$ este de asemenea compactă în Y. Din faptul că Y este Hausdorf deducem că $f(F)$ este închisă în Y .

Propoziţia 8. Fie (X, d), (Y, δ) două spaţii metrice şi $f : X \to Y$ şi $x \in X$. Atunci f este continuă în x dacă şi numai dacă pentru orice şir $(x_n)_n$ din X care converge la x şirul $(f(x_n))_n$ converge la $f(x)$.

Demonstraţie. Presupunem că f este continuă în x şi fie $(x_n)_n$ un şir din X cu $x_n \to x$. Pentru $\varepsilon > 0$ există $\eta_\varepsilon > 0$ astfel încît

$$x' \in X,\ d(x', x) < \eta_\varepsilon \Longrightarrow \delta(f(x'), f(x)) < \varepsilon$$

Din $x_n \to x$ deducem că există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ cu proprietatea

$$n \geq n_\varepsilon \Longrightarrow d(x_n, x) < \eta_\varepsilon$$

şi deci

$$n \geq n_\varepsilon \Longrightarrow \delta(f(x_n), f(x)) < \varepsilon$$

ceea ce arată că $f(x_n) \to f(x)$.

Reciproc presupunem că

$$x_n \to x \Longrightarrow f(x_n) \to f(x)$$

Vom arăta că f este continuă în x, adică pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\eta_\varepsilon > 0$ cu proprietatea

$$d(x', x) < \eta_\varepsilon \Longrightarrow \delta(f(x'), f(x)) < \varepsilon$$

Dacă n-ar fi aşa ar rezulta că există $\varepsilon_0 > 0$ cu proprietatea că oricare ar fi $\eta > 0$ există $x'_\eta \in X$ cu $d(x'_\eta, x) < \eta$ şi $d(f(x'_\eta), f(x)) \geq \varepsilon_0$.

Punînd $\eta = \frac{1}{n}$ cu $n \in \mathbb{N}^*$ deducem că există $x_n \in X$ cu $d(x_n, x) < \frac{1}{n}$ şi $\delta(f(x_n), f(x)) \geq \varepsilon_0$. Şirul $(x_n)_n$ astfel obţinut converge la x şi relaţia

$$\delta(f(x_n), f(x)) \geq \varepsilon_0 \quad (\forall)\ n \in \mathbb{N}$$

ne arată că şirul $(f(x_n))_n$ nu converge la $f(x)$.

30 **Definiție.** Fie (X, d), (Y, δ) două spații metrice. O funcție $f : X \to Y$ se numește uniform continuă dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\eta_\varepsilon > 0$ cu proprietatea

$$x, x' \in X, \ d(x, x') < \eta_\varepsilon \Rightarrow \delta(f(x), f(x')) < \varepsilon$$

Evident dacă f este uniform continuă atunci f este continuă. Reciproca nu este în general adevărată. Astfel funcția $x \to x^2$ de la $\mathbb{R}$ la $\mathbb{R}$ este continuă dar nu este uniform continuă. Intr-adevăr dacă $x = n$, $x' = n + \frac{1}{n}$ atunci avem

$$|x - x'| = \frac{1}{n} \to 0 \quad \text{și} \quad |x^2 - x'^2| \geq 2$$

Propoziția 9. Cantor (1845-1918). Fie (X, d), (Y, δ) două spații metrice astfel încît X este o mulțime compactă în raport cu topologia lui (X, d). Atunci orice funcție $f : X \to Y$ care este continuă este uniform continuă.

Demonstrație. Dacă f n-ar fi uniform continuă ar exista $\varepsilon_0 > 0$ și două șiruri $(x_n)_n$, $(y_n)_n$ în X cu proprietatea

$$d(x_n, y_n) \leq \frac{1}{n} \quad (\forall)\, n \in \mathbb{N}$$

și cu

$$\delta(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon_0 \quad (\forall)\, n \in \mathbb{N}.$$

Intrucît X este compact există un subșir $(x_{k_n})_n$ al lui $(x_n)_n$ care este convergent. Punem

$$a = \lim_n x_{k_n}.$$

Din $d(x_n, y_n) \to 0$ deducem că șirul $(y_{k_n})_n$ este de asemenea convergent și

$$a = \lim_n y_{k_n}$$

Pe de altă parte din faptul că f este continuă în a rezultă că

$$\delta(f(x_{k_n}), f(a)) \to 0$$

$$\delta(f(y_{k_n}), f(a)) \to 0$$

şi deci $\delta(f(x_{k_n}), f(y_{k_n})) \to 0$

ceea ce contrazice ipoteza

$$\delta(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon_0 \quad (\forall)\, n \in N$$

29. Propoziţia 10. Fie X un spaţiu topologic (Y, d) un spaţiu metric, $f : X \to Y$ şi $x \in X$. Dacă f este continuă în x atunci există o vecinătate V a lui x astfel încît $f(V)$ să fie mărginită în Y.

Demonstraţie. Se consideră bila $B(f(x) ; 1)$ în Y. Intrucît această bilă este o vecinătate a lui $f(x)$ atunci din continuitatea lui f în x deducem că există o vecinătate V a lui x astfel încît $f(V) \subset B(f(x); 1))$ ceea ce arată că $f(V)$ este mărginită în Y.

31 Propoziţia 11. Fie X un spaţiu topologic, $A \subset X$

$$f : A \to R, \quad g : A \to R$$

şi $x \in A$. Dacă f şi g sînt continue în x atunci funcţiile $f+g$, $f \cdot g$, $|f|$ sînt continue în x. Dacă f este continuă în x şi $f(y) \neq 0$ pentru orice $y \in X$ atunci funcţia $\frac{1}{f}$ definită pe X prin

$$\left(\frac{1}{f}\right)(x) = \frac{1}{f(x)}$$

este continuă în x.

Demonstraţie. Fie $\varepsilon > 0$. Intrucît f şi g sînt continue în x rezultă că există vecinătăţi V şi W ale lui x cu proprietatea

$$y \in V \Longrightarrow |f(y) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$y \in W \Longrightarrow |g(y) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

şi deci

$$y \in V \cap W \Longrightarrow |(f+g)(y) - (f+g)(x)| \leqslant |f(y) - f(x)| + |g(y) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Intrucît $V \cap W$ este o vecinătate a lui x deducem că $f + g$ este continuă în x. Din

$$y \in V \Longrightarrow \big||f(y)| - |f(x)|\big| \leqslant |f(y) - f(x)| < \varepsilon$$

deducem că $|f|$ este continuă în x.

Din faptul că f şi g sînt continue în x rezultă că există o vecinătate V_0, W_0 ale lui x şi $M > 0$ astfel încît

$$y \in V_0 \Longrightarrow |f(y)| \leqslant M$$

$$y \in W_0 \Longrightarrow |g(y)| \leqslant M$$

Fie acum $\varepsilon > 0$. Din continuitatea lui f şi g în x deducem că există vecinătăţi V, W ale lui x astfel încît

$$y \in V \Longrightarrow |f(y) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2M}$$

$$y \in W \Longrightarrow |g(y) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{2M}$$

De aici rezultă că

$$y \in V \cap W \cap V_0 \cap W_0 \Longrightarrow |(fg)(y) - (fg)(x)| \leqslant$$

$$\leqslant |(f(y) - f(x))\, g(y)| + |f(x)\, (g(y) - g(x))|$$

$$< \frac{\varepsilon}{2M} \cdot M + \frac{\varepsilon}{2M} \cdot M < \varepsilon .$$

şi deci întrucît $V \cap W \cap V_0 \cap W_0$ este o vecinătate a lui x deducem că fg este continuă în x.

Presupunem acum că f este continuă în x şi că $f(y) \neq 0$ pentru orice $y \in X$. Din faptul că $|f|$ este continuă în x şi intervalul $\left(\frac{|f(x)|}{2}, +\infty\right)$ este o vecinătate a lui $|f(x)|$ deducem că există o vecinătate V_0 a lui x cu proprietatea

$$y \in V_0 \Longrightarrow |f(y)| > \frac{|f(x)|}{2} = M$$

Fie acum $\varepsilon > 0$. Din continuitatea lui f deducem că există o vecinătate V a lui x cu proprietatea

$$y \in V \Longrightarrow |f(y) - f(x)| < \varepsilon M^2$$

De aici deducem

$$y \in V \cap V_0 \Longrightarrow \left| \frac{1}{f(y)} - \frac{1}{f(x)} \right| = \frac{|f(y) - f(x)|}{|f(y)| \cdot |f(x)|} < \frac{\varepsilon M^2}{M^2} = \varepsilon$$

ceea ce arată că $\frac{1}{f}$ este continuă în x.

2. Şiruri convergente de funcţii continue

32 **Definiţie.** Fie X o mulţime şi $(f_n)_n$ un şir de funcţii reale definite pe X. Se spune că $(f_n)_n$ converge simplu dacă pentru orice $x \in X$ şirul $(f_n(x))_n$ este convergent. Se spune că $(f_n)_n$ converge uniform dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in N$ astfel încît

$$\forall\, n, m \geq n_\varepsilon \Longrightarrow |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \ (\forall)\ x \in X.$$

Dacă $(f_n)_n$ converge simplu se notează cu $\lim\limits_n f_n$ funcţia pe X definită prin

$$(\lim_n f_n)(x) = \lim_n (f_n(x))$$

şi se va numi limita şirului $(f_n)_n$.

32 **Propoziţia 12.** (Weierstrass 1815-1897) Fie X un spaţiu topologic şi $x_0 \in X$, $(f_n)_n$ un şir de funcţii reale, definite pe X care converge uniform şi $f = \lim\limits_n f_n$. Dacă f_n este continuă în x_0 pentru orice $n \in N$ atunci f este de asemenea continuă în x_0.

Demonstraţie. Fie $\varepsilon > 0$ şi $n_\varepsilon \in N$, astfel încît

$$n, m \geq n_\varepsilon \Longrightarrow |f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (\forall)\ x \in X$$

De aici rezultă că

$$m \geq n_\varepsilon \Longrightarrow |f(x) - f_n(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3} \quad (\forall)\ x \in X$$

Intrucît f_{n_ε} este continuă în x_0 rezultă că există o vecinătate V_ε a lui x_0 cu proprietatea

$$x \in V_\varepsilon \Longrightarrow |f_{n_\varepsilon}(x) - f_{n_\varepsilon}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} .$$

Din relațiile precedente deducem

$$x \in V_\varepsilon \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_{n_\varepsilon}(x)| +$$
$$+ |f_{n_\varepsilon}(x) - f_{n_\varepsilon}(x_0)| + |f_{n_\varepsilon}(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon$$

ceea ce arată că f este continuă în x_0 .

32 <u>Definiție.</u> Fie X o mulțime și $(f_n)_n$ un șir de funcții reale definită pe X . Perechea formată din șirurile $(f_n)_n$, $(\sum_{k=1}^{n} f_k)_n$ se numește <u>serie asociată șirului</u> $(f_n)_n$ și se notează prin $\sum_n f_n$.

Vom spune că seria $\sum_n f_n$ converge simplu dacă șirul $(\sum_{k=1}^{n} f_k)$ converge simplu. Vom spune că seria $\sum_n f_n$ converge uniform dacă șirul $(\sum_{k=1}^{n} f_k)$ converge uniform. Dacă seria $\sum_n f_n$ converge simplu atunci limita șirului $(\sum_{k=1}^{n} f_k)_n$ se va numi suma seriei $\sum_n f_n$ și va fi notată de asemenea prin $\sum_n f_n$.

32 <u>Propoziția 13.</u> Fie X o mulțime și $\sum_n f_n$ o serie de funcții reale definite pe X . Presupunem că există o serie numerică $\sum_n a_n$ cu termeni pozitivi

$$|(f_n(x)| \leq a_n \quad (\forall) \quad x \in X \quad , n \in \mathbb{N}$$

Atunci seria $\sum_n f_n$ converge uniform.

<u>Demonstrație.</u> Fie $\varepsilon > 0$ și $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încît

$$n \geq n_\varepsilon , \; p \in \mathbb{N} \Rightarrow |a_{n+1} + a_{n+2} + \quad + a_{n+p}| < \varepsilon$$

Din

$$n \geq n_\varepsilon \quad , p \in N \Longrightarrow |f_{n+1}(x) + f_{n+1}(x) + \ldots + f_{n+p}(x)| \leq$$
$$\leq |a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p}| < \varepsilon$$

deducem că seria $\sum_n f_n$ converge uniform.

Corolar 14. Funcțiile exp, sin, cos sînt continue.

Demonstrație. Seriile de funcții $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)}$, $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)}$, converg uniform pe fiecare interval $[a, b]$ din $\mathbb{R}$ și deoarece termenii acestor serii sînt funcții continue rezultă că sumele lor sînt de asemenea funcții continue.

Corolar 15. Funcțiile ln, arc sin, arc cos sînt continue.

Demonstrație. Afirmația rezultă din corolarul precedent și din propoziția 7.

32 Propoziția 16. Fie X un spațiu topologic compact $(f_n)_n$ un șir de funcții reale continue definite pe X care converge simplu astfel încît $\lim f_n$ este o funcție continuă. Dacă $(f_n)_n$ este crescător (sau descrescător) atunci șirul $(f_n)_n$ converge uniform.

Demonstrație. Presupunem că $(f_n)_n$ este crescător. Atunci șirul $(f - f_n)_n$ este descrescător și

$$\lim_n (f - f_n)(x) = \inf_n (f - f_n)(x) = 0$$

Fie acum $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ și $x \in X$. Din $\inf_n (f - f_n)(x) = 0$ deducem că există $n_{x,\varepsilon} \in \mathbb{N}$ cu proprietatea

$$f(x) - f_{n_{x,\varepsilon}}(x) < \varepsilon.$$

Intrucît $f - f_{n_{x,\varepsilon}}$ este continuă rezultă că există o vecinătate deschisă $U_{x,\varepsilon}$ a lui x astfel încît

$$x' \in U_{x,\varepsilon} \Longrightarrow f(x') - f_{n_{x,\varepsilon}}(x') < \varepsilon$$

Familia $(U_{x,\varepsilon})_{x\in X}$ este o acoperire deschisă a lui X şi deci există $J \subset X$ finită cu proprietatea

$$X = \bigcup_{x\in J} U_{x,\varepsilon}$$

Punînd $n_\varepsilon = \max_{x\in J} n_{x,\varepsilon}$ deducem

$$f(x') - f_{n_\varepsilon}(x') < \varepsilon \quad (\forall) \quad x' \in X$$

şi deci

$$n, m \geqslant n_\varepsilon \Rightarrow |f_n(x') - f_m(x')| \leqslant f(x') - f_n(x') \qquad (\forall) \ x' \in X$$

ceea ce arată că şirul $(f_n)_n$ converge uniform.

33

3. Limita unei funcţii într-un punct

Definiţie. Fie X, Y spaţii topologice, $A\subset X$, x_0 un punct de acumulare a lui A, $f : A \to Y$ şi $\alpha \in Y$. Spunem că f are limita α în x_0 dacă pentru orice vecinătate W a lui α există o vecinătate V a lui x_0 astfel încît

$$x \in V\cap A', x \neq x_0 \Longrightarrow f(x) \in W$$

Dacă Y este un spaţiu topologic Hausdorf atunci punctul $\alpha \in Y$ cu proprietatea de mai sus este unic determinat şi vom scrie $\alpha = \lim_{x\to x_0} f(x)$. Intr-adevăr dacă $\beta \in Y$ are aceeaşi proprietate ca şi $\alpha \neq \beta$ atunci fie W_1, o vecinătate a lui α, W_2 o vecinătate a lui β astfel încît $W_1 \cap W_2 = \emptyset$. Din definiţie ar rezulta că există vecinătăţi V_1, V_2 ale lui x_0 astfel încît

$$x' \in V_1 \cap A, x \neq x_0 \Longrightarrow f(x) \in W_1$$

$$x' \in V_2 \cap A, x \neq x_0 \Longrightarrow f(x) \in W_2$$

Pe de altă parte întrucît $V_1 \cap V_2$ este o vecinătate a lui x_0 iar x_0 este punct de acumulare pentru A deducem că există $x \in V_1 \cap V_2 \cap A$, $x \neq x_0$ şi deci

$$f(x) \in W_1 \text{ , } f(x) \in W_2$$

ceea ce contrazice relaţia $W_1 \cap W_2 = \emptyset$

Propoziţia 17. Fie X, Y spaţii topologice $A \subset X$, $x_0 \in A$ şi $f : A \to Y$. Dacă x_0 este punct de acumulare pentru A atunci f este continuă în x_0 dacă şi numai dacă f are limita $f(x_0)$ în punctul x_0 .

Demonstratie. Dacă f este continuă în x_0 şi dacă W este vecinătate a lui $f(x_0)$ atunci există V o vecinătate a lui x_0 cu proprietatea

$$f(V \cap A) \subset W$$

şi deci

$$x \in V \cap A \text{ , } x \neq x_0 \Longrightarrow f(x) \in W$$

adică f are limita $f(x_0)$ în punctul x_0 . Presupunem că f are limita $f(x_0)$ în punctul x_0. Atunci dacă W este o vecinătate a lui $f(x_0)$ rezultă că există o vecinătate V a lui x_0 cu proprietatea

$$x \in V \cap A \quad x \neq x_0 \Longrightarrow f(x) \in W$$

şi cum $f(x_0) \in W$ deducem

$$f(V \cap A) \subset W$$

ceea ce arată că f este continuă în x_0 .

Remarcă. Fie, X, Y spaţii topologice, $A \subset X$ x_0 punct de acumulare a lui A , $x_0 \notin A$, $f : A \to Y$ şi $\alpha \in Y$. Notăm cu $\tilde{A}$ mulţimea $A \cup \{x_0\}$ şi cu $\tilde{f} : \tilde{A}$ funcţia definită prin

$$\tilde{f}(x') = \begin{cases} f(x) & \text{dacă } x \neq x_0 \\ \alpha & \text{dacă } x = x_0 \end{cases}$$

Din propoziţia precedentă rezultă că afirmaţia "$\tilde{f}$ este continuă în x" este echivalentă cu afirmaţia "$\tilde{f}$ are limita α în x_0" adică cu afirmaţia "f are limita α în x_0".

Din consideraţiile de mai sus rezultă că pentru ca o funcţie $f : A \longrightarrow Y$ ca mai sus să aibe o prelungire $\tilde{f} : \tilde{A} \longrightarrow Y$ la mulţimea $\tilde{A} = A \cup \{x_0\}$ care să fie continuă în x_0 este necesar şi suficient ca f să aibe limită în punctul x_0. In acest caz $\tilde{f}$ va fi o prelungire a lui f egală în x_0 cu limita lui f în x_0.

<u>Propoziţia 18.</u> Fie X un spaţiu topologic $A \subset X$ şi x_0 un punct de acumulare pentru A şi $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : A \longrightarrow \mathbb{R}$. Presupunem că f şi g au limită în punctul x_0. Atunci $f + g$, $f.g$, $|f|$ au limita în x_0 şi avem

$$\lim_{x \to x_0} (f+g)(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x),$$

$$\lim_{x \to x_0} (f.g)(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x).$$

$$\lim_{x \to x_0} |f(x)| = \left|\lim_{x \to x_0} f(x)\right|$$

Dacă în plus $f(x) \neq 0$ pentru orice $x \in A$ şi $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq 0$ atunci funcţia $\frac{1}{f}$ are limita în x_0 şi avem

$$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{f}(x) = \frac{1}{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}$$

<u>Demonstraţie.</u> Notînd $\tilde{A} = A \cup \{x_0\}$ şi cu $\tilde{f}, \tilde{g}$ funcţiile definite pe $\tilde{A}$ cu valori în $\mathbb{R}$ prin

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{dacă } x \in A \setminus \{x_0\} \\ \lim\limits_{x \to x_0} f(x), & \text{dacă } x = x_0 \end{cases}$$

$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} g(x), & \text{dacă } x \in A \setminus \{x_0\} \\ \lim\limits_{x \to x_0} g(x), & \text{dacă } x = x_0 \end{cases}$$

atunci ipoteza este echivalentă cu faptul că $\tilde{f}, \tilde{g}$ sînt continue în punctul x_0. Atunci $\tilde{f}+\tilde{g}$, $\tilde{f}\cdot\tilde{g}$, $|\tilde{f}|$ sînt de asemenea continue în x_0 și deci

$$\lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x) = \tilde{f}(x_0) + \tilde{g}(x_0) = \lim_{x\to x_0} (\tilde{f}+\tilde{g})(x) = \lim_{x\to x_0} (f+g)(x)$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x) = \tilde{f}(x_0) \cdot \tilde{g}(x_0) = \lim_{x\to x_0} (\tilde{f}\cdot\tilde{g})(x) = \lim_{x\to x_0} (f\cdot g)(x)$$

$$\left|\lim_{x\to x_0} f(x)\right| = |\tilde{f}(x_0)| = \lim_{x\to x_0} |\tilde{f}(x)| = \lim_{x\to x_0} |f(x)| .$$

Dacă în plus $f(x) \neq 0$ pentru orice $x\in A$ și $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq 0$ atunci

$$\frac{1}{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)} = \frac{1}{\tilde{f}(x_0)} = \lim_{x\to x_0} \frac{1}{\tilde{f}}(x) = \lim_{x\to x_0} \frac{1}{f}(x)$$

<u>Propoziția 19.</u> Fie X un spațiu topologic, $A\subset X$ și x_0 un punct de acumulare pentru A și fie $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$ $g : A \to \overline{\mathbb{R}}$. Presupunem că f și g au limită în x_0.

Atunci :

1) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) > -\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} (f+g)(x) = +\infty$

2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) < +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} (f+g)(x) = -\infty$

3) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) > 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} (f\cdot g)(x) = +\infty$

4) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) < 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} (f\cdot g)(x) = -\infty$

5) $\lim\limits_{x\to x_0} (-f(x)) = -\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

Dacă în plus $f(x) \neq 0$ pentru orice $x \in A$ atunci

6) $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \Longrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$

Demonstrație.

1) Fie $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ și $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha < \lim_{x \to x_0} g(x)$. Notînd $\varepsilon' = \varepsilon + |\alpha|$ și observînd că $(\alpha, +\infty]$ este o vecinătate a lui $\lim_{x \to x_0} g(x)$ iar $(\varepsilon', +\infty)$ este o vecinătate a lui $+\infty$ deducem că există o vecinătate V a lui x_0 cu proprietatea

$$x \in V \Longrightarrow g(x) > \alpha$$

$$x \in V \Longrightarrow f(x) > \varepsilon'.$$

De aici rezultă

$$x \in V \Longrightarrow g(x) + f(x) > \varepsilon' + \alpha \geq \varepsilon$$

ceea ce arată că $\lim_{x \to x_0} (f+g)(x) = +\infty$.

2) Fie $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ și $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > \lim_{x \to x_0} g(x)$. Punînd $\varepsilon' = \varepsilon + |\alpha|$ și observînd că $[-\infty, -\varepsilon)$ este o vecinătate a lui $-\infty$ iar $[-\infty, \alpha)$ este o vecinătate a lui $\lim_{x \to x_0} g(x)$ deducem că există o vecinătate V a lui x_0 cu proprietatea

$$x \in V \Longrightarrow f(x) < -\varepsilon'$$

$$x \in V \Longrightarrow g(x) < \alpha$$

De aici rezultă că

$$x \in V \Longrightarrow f(x) + g(x) < -\varepsilon - |\alpha| + \alpha \leq -\varepsilon$$

ceea ce arată că

$$\lim_{x \to x_0} (f+g)(x) = -\infty .$$

3) Fie $\varepsilon \in R_+^*$ şi $\alpha \in R_+$, $0 < \alpha < \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$. Intrucît $(\frac{\varepsilon}{\alpha}, +\infty]$ este o vecinătate a lui $+\infty$, iar $(\alpha, +\infty]$ este o vecinătate a lui $\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$ deducem că există o vecinătate V a lui x_0 astfel încît

$$x \in V \Longrightarrow f(x) > \frac{\varepsilon}{\alpha}$$

$$x \in V \Longrightarrow g(x) > \alpha \ .$$

De aici rezultă

$$x \in V \Longrightarrow (f(g)(x) > \frac{\varepsilon}{\alpha} \cdot \alpha = \varepsilon$$

ceea ce arată că $\lim\limits_{x \to x_0} (fg)(x) = +\infty$.

4) Fie $\varepsilon \in {}_+$ şi $x \in R_+$ astfel încît

$$\lim_{x \to x_0} g(x) < -\alpha < 0 \ .$$

Intrucît $[\varepsilon, +\infty]$ este o vecinătate a lui $+\infty$ $[-\infty, -\alpha)$ este o vecinătate a $\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$ deducem că există o vecinătate V a lui V a lui x_0 astfel încît

$$x \in V \Longrightarrow f(x) > \frac{\varepsilon}{\alpha}$$

$$x \in V \Longrightarrow g(x) < -\alpha \ .$$

De aici rezultă

$$x \in V \Longrightarrow (fg)(x) < \frac{\varepsilon}{\alpha} (-\alpha) = -\varepsilon$$

ceea ce arată că $\lim\limits_{x \to x_0} (fg)(x) = -\infty$.

5) Este suficient să considerăm cazul

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \quad (\text{resp. } \lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty)$$

Fie $\varepsilon \in R_+^*$. Intrucît $(\varepsilon, +\infty]$ (resp. $[-\infty, -\varepsilon)$) este o vecinătate a lui $+\infty$ (resp. $-\infty$) rezultă că există o vecinătate V a lui x_0 astfel încît

$$x \in V \Longrightarrow f(x) > \varepsilon \quad (\text{resp. } f(x') < -\varepsilon) .$$

De aici rezultă

$$x \in V \Longrightarrow -f(x) < -\varepsilon \quad (\text{resp. } -f(x) > \varepsilon)$$

ceea ce arată că

$$\lim_{x \to x_0} -f(x) = -\infty \quad (\text{resp. } \lim_{x \to x_0} -f(x) = +\infty) .$$

6) Dacă $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ atunci pentru orice $\varepsilon \in R_+^*$ există o vecinătate V a lui x_0 astfel încît

$$x \in V \Longrightarrow f(x) > \frac{1}{\varepsilon} .$$

De aici rezultă

$$x \in V \Longrightarrow 0 < \frac{1}{f(x)} < \varepsilon \Longrightarrow \left|\frac{1}{f(x)}\right| < \varepsilon$$

ceea ce arată că

$$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{f}(x) = 0 .$$

34. 4. <u>Oscilația unei funcții reale într-un punct.</u>

<u>Definiție.</u> Fie X un spațiu topologic, $f : X \to R$ și $A \subset X$ astfel încît $f|_A$ este mărginită. Numărul pozitiv

$$\omega(f; A) = \sup_{x \in A} f(x) - \inf_{x \in A} f(x)$$

se numește <u>oscilația lui f pe A.</u> Dacă $x_0 \in X$, și f este o funcție mărginită pe o vecinătate a lui x_0 atunci numărul

$$\omega(f; x_0) = \inf_{V \in \mathcal{V}_{x_0}} \omega(f, V)$$

unde $\mathcal{V}_{x_0}$ este mulțimea vecinătăților lui x_0, se numește <u>oscilația lui f în punctul x_0</u>.

Propoziția 20. Fie X un spațiu topologic, $f : X \to R$, $x_0 \in X$ o funcție reală mărginită pe o vecinătate a lui x_0. Atunci f este continuă în x_0 dacă și numai dacă $\omega(f; x_0) = 0$

Demonstrație. Dacă f este continuă în x_0 atunci pentru orice $\varepsilon > 0$ există o vecinătate V_ε a lui x_0 cu proprietatea

$$x \in V_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon .$$

De aici rezultă că

$$\sup_{x \in V_\varepsilon} f(x) \leq f(x_0) + \varepsilon$$

$$\inf_{x \in V_\varepsilon} f(x) \geq f(x_0) - \varepsilon$$

și deci $\omega(f; V_\varepsilon) \leq \varepsilon$, $\omega(f; x_0) \leq \varepsilon$. Numărul $\varepsilon > 0$ fiind arbitrar avem $\omega(f; x_0) = 0$.

Reciproc presupunem că $\omega(f; x_0) = 0$. Atunci pentru orice $\varepsilon > 0$ există V_ε cu proprietatea $\omega(f; V_\varepsilon) < \varepsilon$ adică

$$\sup_{x \in V_\varepsilon} f(x) - \inf_{x \in V_\varepsilon} < \varepsilon$$

ceea ce implică

$$x \in V_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \omega(f; V_\varepsilon) < \varepsilon$$

adică f este continuă în x_0.

Propoziția 21. Fie X un spațiu topologic, $f : X \to R$ o funcție cu proprietatea că pentru orice $x \in X$ există o vecinătate V_x a lui x astfel ca f să fie mărginită pe V. Atunci pentru orice $\alpha > 0$ mulțimea

$$\{x \in X \mid \omega(f; x) < \alpha\}$$

este o mulțime deschisă.

Demonstrație. Fie $A = \{x \in X \mid \omega(f; x) < \alpha\}$ și $x_0 \in A$. Atunci există o vecinătate V a lui x_0 cu proprietatea

$$\omega(f; V) < \alpha .$$

Intrucît orice vecinătate a lui x_0 include o vecinătate deschisă a lui x_0 rezultă că putem presupune că V este deschisă. Atunci avem

$$x \in V \Longrightarrow \omega(f; x) \leq \omega(f; V) < \mathcal{L}$$

adică $V \subset A$. Aşadar A este vecinătate a lui x_0.

<u>Remarcă.</u> Din propoziţia 20 şi din propoziţia 21 rezultă că dacă X este un spaţiu topologic şi $f : X \to \mathbb{R}$ este spre exemplu o funcţie mărginită atunci mulţimea punctelor de continuitate ale lui f reprezintă o mulţime cu o structură specială şi anume este intersecţia unui şir descrescător de mulţimi deschise. Intr-adevăr avem

$$\{x \mid f \text{ continuă în } x\} = \{x \mid \omega(f; x) = 0\} =$$
$$= \bigcap_n \left\{x \mid \omega(f; x) < \frac{1}{n}\right\}$$

<u>Definiţie.</u> Fie X un spaţiu topologic, $f : X \to \mathbb{R}$ şi $x_0 \in X$ astfel încît f este mărginită pe o vecinătate a lui x_0. Numărul

$$\inf_{V \in \mathcal{V}_{x_0}} \left(\sup_{x \in V} f(x) \right)$$

unde $\mathcal{V}_{x_0}$ este mulţimea vecinătăţilor punctului x_0 se numeşte <u>limita superioară a lui f în x_0</u> şi se notează cu $\limsup\limits_{x \to x_0} f(x)$ iar numărul

$$\sup_{V \in \mathcal{V}_{x_0}} \left(\inf_{x \in V} f(x) \right)$$

se numeşte <u>limita inferioară a lui f în x_0</u> şi se notează cu $\liminf\limits_{x \to x_0} f(x)$.

Avem evident

$$\liminf_{x \to x_0} f(x) \leq f(x_0) \leq \limsup_{x \to x_0} f(x)$$

~~Propoziția 22.~~ Fie X un spațiu topologic, $f : X \to R$ și $x_0 \in X$ astfel încît f este mărginită pe o vecinătate a lui x_0. Avem

1) $$\omega(f; x_0) = \limsup_{x \to x_0} f(x) - \liminf_{x \to x_0} f(x)$$

2) f este continuă în x_0 dacă și numai dacă

$$\limsup_{x \to x_0} f(x) = \liminf_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Demonstrație.

1) Fie V_1, V_2 două vecinătăți ale lui x_0. Avem

$$\sup_{x \in V_1} f(x) - \inf_{x \in V_2} f(x) \geqslant \sup_{x \in V_1 \cap V_2} f(x) - \inf_{x \in V_1 \cap V_2} f(x) \geqslant \omega(f; x_0)$$

și deci

$$\omega(f; x_0) \leqslant \sup_{x \in V_1} f(x) - \inf_{x \in V_2} f(x)$$

De aici deducem

$$\omega(f; x_0) + \inf_{x \in V_2} f(x) \leqslant \sup_{x \in V_1} f(x)$$

și deci

$$\omega(f; x_0) + \sup_{V_2 \in \vartheta_x} (\inf_{x \in V_2} f(x)) = \sup_{V_2 \in \vartheta} (\omega(f; x_0) + \inf_{x \in V_2} f(x))$$

$$\leqslant \sup_{x \in V_1} f(x) ,$$

$$\omega(f; x_0) + \sup_{V_2 \in \vartheta_1} (\inf_{x \in V_2} f(x)) \leqslant \inf_{V_1 \in \vartheta_x} (\sup_{x \in V_1} f(x)) ,$$

$$\omega(f; x_0) \leqslant \limsup_{x \to x_0} f(x) - \liminf_{x \to x_0} f(x)$$

Pe de altă parte avem, pentru orice vecinătate V a lui x_0,

$$\limsup_{x \to x_0} f(x) - \liminf_{x \to x_0} f(x) \leqslant \sup_{x \in V} f(x) - \inf_{x \in V} f(x) = \omega(f; V)$$

şi deci

$$\limsup_{x\to x_0} f(x) - \liminf_{x\to x_0} f(x) \leq \inf_{V\in \mathcal{V}_{x_0}} \omega(f; V) = \omega(f, x_0)$$

2) Din propoziţia 22 rezultă că

$$f \text{ continuă în } x_0 \Longleftrightarrow \omega(f; x_0) = 0 .$$

Pe de altă parte din relaţia

$$\omega(f; x_0) = \limsup_{x\to x_0} f(x) - \liminf_{x\to x_0} f(x)$$

deducem că

$$\omega(f; x_0) = 0 \Longleftrightarrow \limsup_{x\to x_0} f(x) = \liminf_{x\to x_0} f(x) .$$

Evident din

$$\liminf_{x\to x_0} f(x) \leq f(x_0) \leq \limsup_{x\to x_0} f(x)$$

deducem că egalitatea

$$\limsup_{x\to x_0} f(x) = \liminf_{x\to x_0} f(x)$$

implică de asemenea egalitatea

$$\limsup_{x\to x_0} f(x) = \liminf_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

<u>Propoziţia 23.</u> Fie X un spaţiu topologic cu proprietatea Baire, $(f_n)_n$ un şir de funcţii reale şi continue pe X care converge simplu la o funcţie reală f pe X. Atunci mulţimea punctelor în care f este continuă este densă în X.

<u>Demonstraţie.</u> Fără a restrînge generalitatea putem presupune că avem $|f_n(x)| \leq 1$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$ şi orice $x \in X$. Intr-adevăr funcţia

$$\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow (-1, 1)$$

definită prin

$$\varphi(x) = \frac{x}{1+|x|}$$

este o bijecţie astfel încît φ şi φ^{-1} sînt continue.

Punînd $g_n := \varphi \circ f_n$; $g := \varphi \circ f$ atunci $(g_n)_n$ converge simplu la g şi $|(g_n(x)| \leq 1$ $(\forall)$ $n \in N$ şi $x \in X$. Evident g este continuă într-un punct x_o dacă şi numai dacă f este continuă în x_o. Este suficient deci să demonstrăm afirmaţia pentru şirul $(g_n)_n$ adică este suficient să considerăm doar cazul

$$|f_n(x)| \leq 1 \quad (\forall)\ x \in X \text{ şi } n \in N .$$

Punînd

$$G_n := \left\{x \in X \mid \omega(f; x) < \frac{1}{n}\right\}$$

avem că G_n este deschisă şi

$$\bigcap_n G_n = \left\{x \in X \mid \omega(f; x) = 0\right\}$$

adică

$$\bigcap_n G_n = \left\{x \in X \mid f \text{ continuă în } x\right\} .$$

Intrucît X are proprietatea Baire va fi suficient, pentru a demonstra propoziţia, să arătăm că fiecare mulţime G_n este densă în X. Fie aşa dar $n_o \in N$, $a \in X$ şi U o mulţime deschisă, $a \in U$. Vom arătă că

$$G_{n_o} \cap U \neq \phi .$$

Notăm

$$u_n(x) := \sup_{m \geq n} f_m(x) \ ; \quad v_n(x) := \inf_{m \geq n} f_m(x)$$

Evident $(u_n)_n$ (resp $(v_n)_n$) este un şir descrescător (resp. crescător) şi

$$\lim_{n \to \infty} u_n(x) = \lim_{n \to \infty} v_n(x) = f(x)$$

$$v_n(x) \leq f(x) = u_n(x) .$$

Punînd

$$F_n = \left\{x \mid u_n(x) - v_n(x) \leq \frac{1}{4n_o}\right\}$$

avem

$$\bigcup_n F_n = X .$$

Din

$$F_n = \bigcap_{p,q \geqslant n} \left\{ f_p(x) - f_q(x) \leqslant \frac{1}{4n_o} \right\}$$

rezultă că F_n este o mulţime închisă în X şi deci $F_n \cap U$ este închisă în U. Din

$$\bigcup_n (F_n \cap U) = U$$

rezultă că există $m_o \in \mathbb{N}$ astfel încît

$$\overset{\circ}{\widehat{F_{m_o} \cap U}} \neq \phi$$

şi deci

$$\overset{\circ}{\widehat{F_{m_o}}} \cap U \neq \phi .$$

Vom aráta că $\overset{\circ}{\widehat{F_{m_o}}} \cap U \subset G_{n_o}$. Intr-adevăr dacă $b \in \overset{\circ}{\widehat{F_{m_o}}} \cap U$ alegem V o vecinătate a lui b astfel încît $V \subset \overset{\circ}{\widehat{F_{m_o}}} \cap U$ şi

$$\omega(f_{m_o}, V) < \frac{1}{2n_o} .$$

Din

$$\omega(f; V) = \sup_{x,y \in V} (f(x) - f(y)) \leqslant \sup_{x,y \in V} (u_{m_o}(x) - v_{m_o}(y)) \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{x,y \in V} (v_{m_o}(x) - u_{m_o}(y)) + \frac{1}{2n_o} \leqslant \sup_{x,y \in V} (f_{m_o}(x) - f_{m_o}(y)) + \frac{1}{2n_o} =$$

$$= \omega(f_{m_o}; V) + \frac{1}{2n_o} < \frac{1}{n_o}$$

rezultă că

$$\omega(f; V) < \frac{1}{n_o}$$

şi deci

$$\omega(f; b) < \frac{1}{n_o} , \quad b \in G_{n_o} .$$

Exerciţii. 1. Fie X un spaţiu topologic, $A \subset X$ şi $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ definită prin

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } x \in A \\ 0 & \text{dacă } x \notin A \end{cases}$$

Să se arate că dacă f este continuă atunci A este în acelaşi timp mulţime închisă şi mulţime deschisă.

2. Să se arate că aplicaţia

$$\varphi : [-1, 1] \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$$

definită prin

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+|x|} & \text{dacă } x \in (-1, 1). \\ -\infty & \text{dacă } x = -1 \\ +\infty & \text{dacă } x = 1 \end{cases}$$

Să se arate că φ şi φ^{-1} sînt continue.

3. Fie $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a < b$ şi $f : [a, b] \longrightarrow [a, b]$ o funcţie continuă. Să se arate că există $x_0 \in [a, b]$ cu proprietatea $f(x_0) = x_0$.

4. Fie $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, $f, g : [a, b] \longrightarrow [a, b]$ două funcţii continue cu proprietatea $f \circ g = g \circ f$. Atunci există $x_0 \in [a, b]$ astfel încît $f(x_0) = g(x_0)$.

5. Fie $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$. Punctul $x_0 \in [a, b]$ se numeşte punct de discontinuitate de primă speţă pentru f dacă f nu este continuă în x_0 dar există $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x)$ şi există $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x)$. Să se arate că mulţimea punctelor de discontinuitate de prima speţă pentru f este cel mult numărabilă.

6. Fie $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcţie pentru care există $\lim\limits_{\substack{y \to x \\ y < x}} f(y)$, şi $\lim\limits_{\substack{y \to x \\ y > x}} f(y)$ pentru orice $x \in [a,b]$. Să se arate că mulţimea punctelor de discontinuitate pentru f este cel mult numărabilă.

7. Fie X un spaţiu topologic şi $f : X \to \mathbb{R}$. Să se arate că mulţimea punctelor de continuitate pentru f este de forma $\bigcap_n G_n$ unde G_n este o mulţime deschisă pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

8. Fie $(f_n)_n$ un şir de funcţii reale continue pe un interval $[a, b]$ care converge simplu la f . Atunci mulţimea punctelor de continuitate pentru f este densă în $[a, b]$.

---

9. Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ şi $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ o funcţie uniform continuă. Atunci există o funcţie continuă $\tilde{f} : [a, b] \to \mathbb{R}$ care reprezintă o prelungire a lui f .

10. Să se arate că funcţia $f : (0, 1] \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = \sin \frac{\pi}{x}$ nu este uniform continuă.

11. O funcţie continuă $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ se va numi perfectă dacă pentru orice punct $x \in [a, b]$ există un şir $(x_n)_n$ din $[a, b]$ care converge la x , $x_n \neq x$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$ astfel încît $f(x_n) = f(x)$, $(\forall)$ $n \in \mathbb{N}$. Să se arate că orice funcţie continuă $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ este de forma $g = f_1 + f_2$ unde f_1, f_2 sînt funcţii continue perfecte.

12. Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcţie care posedă proprietatea lui Darboux şi în plus pentru orice punct $\alpha \in \mathbb{R}$ mulţimea $f^{-1}(\{\alpha\})$ este închisă. Să se arate că f este continuă.

13. Să se arate că nu există funcţii $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ care să fie continue în orice punct raţional şi discontinue în orice punct iraţional.

14. Să se construiască o funcţie $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ care să fie continuă în orice punct iraţional şi care să fie discontinuă în orice punct raţional.

15. Fie $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ astfel încît orice funcție continuă $f : A \to \mathbb{R}$ este mărginită. Atunci A este închisă și mărginită.

16. Fie $f : [0, 1] \to [0, 1]$ o funcție continuă astfel încît $f(0)=0$, $f(1) = 1$. Se consideră șirul de funcții $(f_n)_n$ definite pe $[0, 1]$ prin

$$f_1 = f \ , \ f_{n+1} = f \circ f_n$$

Să se arate că dacă $(f_n)_n$ converge uniform atunci $f(x) = x$ pentru orice $x \in [0 , 1]$.

VII FUNCTII REALE DERIVABILE

1. Operaţii cu funcţii derivabile
2. Teoremele lui Fermat, Rolle, Lagrange, Cauchy, l'Hospital
3. Siruri convergente de f.derivabile
4. Funcţii derivabile de ordin superior. Formula Taylor. Extreme locale.

1. Operaţii cu funcţii derivabile

Definiţie. Fie A un interval din $\mathbb{R}$ cu $\mathring{A} \neq \emptyset$ şi $f : A \to \mathbb{R}$ o funcţie reală definită pe $\mathbb{R}$. Se spune că f este derivabilă într-un punct $x_0 \in A$ adică există (în $\mathbb{R}$).

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Această limită notată cu $f'(x_0)$ se numeşte derivata lui f în punctul x_0.

Remarcă. 1) Dacă funcţia

$$x \longrightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

are limită în $\overline{\mathbb{R}}$ şi

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty \quad \left(\text{resp. } \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -\infty\right)$$

atunci se spune că f are derivată în x_0 egală cu $+\infty$ (resp. $-\infty$).

2) Dacă $x_0 \in \mathring{A}$ şi există limita (în $\overline{\mathbb{R}}$)

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \qquad \left(\text{resp. } \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right.$$

atunci se spune că f are derivată la stînga (resp. la dreapta) în x_0 şi această limită se notează cu $f'_s(x_0)$ (resp. $f'_d(x_0)$). Dacă în plus $f'_s(x_0) \in \mathbb{R}$ (resp. $f'_d(x_0) \in \mathbb{R}$) atunci se spune că f este derivabilă la stînga (resp. derivabilă la dreapta) în punctul x_0. Evident f are derivată în x_0 dacă şi numai dacă are derivată la stînga şi la dreapta în x_0 şi $f'_s(x_0) = f'_d(x_0)$. Tot astfel f este derivabilă în x_0 dacă şi numai dacă, este derivabilă la stînga şi la dreapta în x_0 şi $f'_s(x_0) = f'_d(x_0)$.

3). Dacă f este derivabilă în x_0 atunci f este continuă în x_0. Intr-adevăr avem

$$f(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

şi din $\lim\limits_{x \to x_0} (x - x_0) = 0$, $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \in \mathbb{R}$ deducem

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Propoziţie. 1. Fie A un interval din $\mathbb{R}$ cu $\mathring{A} \neq 0$ şi $x_0 \in A$. Atunci o funcţie $f : A \to \mathbb{R}$ este derivabilă în x_0 dacă şi numai dacă există $\alpha \in \mathbb{R}$ şi $\mathcal{E}_f : A \to \mathbb{R}$ continuă în x_0 şi $\mathcal{E}_f(x_0) = 0$ astfel încît:

$$f(x) = f(x_0) + \alpha(x - x_0) + \mathcal{E}_f(x) \cdot |x - x_0| .$$

Numărul α şi funcţia $\mathcal{E}_f$ sînt unic determinate şi avem $\alpha = f'(x_0)$ şi

$$\mathcal{E}_f(x) = \frac{f(x) - f(x_0) - \alpha(x-x_0)}{|x - x_0|}, \quad x \in A \setminus \{x_0\}$$

Demonstraţie. Dacă f este derivabilă în x_0 atunci avem

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

şi deci punînd $\alpha = f'(x_0)$ şi $\mathcal{E}_f : A \to \mathbb{R}$, $\mathcal{E}_f(x_0) = 0$ şi

$$\mathcal{E}_f(x) = \frac{f(x) - f(x_0) - \alpha(x-x_0)}{|x - x_0|} \quad , \quad x \in A \setminus \{x_0\}$$

avem

$$f(x) = f(x_0) + \alpha(x-x_0) + \varepsilon_f(x)\,|x-x_0|$$

Continuitatea lui ε_f în x_0 rezultă din

$$\lim_{x\to x_0} |\varepsilon_f(x)| = \lim_{x\to x_0}\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - \alpha\right| = 0 .$$

Reciproc presupunem că există $\alpha \in \mathbb{R}$ şi $\varepsilon_f : A \to \mathbb{R}$ astfel încît $\varepsilon_f(x_0) = 0$, ε_f continuă în x_0 şi

$$f(x) = f(x_0) + \alpha(x-x_0) + \varepsilon_f(x)\,|x-x_0| .$$

Avem

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \alpha + \lim_{x\to x_0}\left(\varepsilon_f(x)\cdot\frac{|x-x_0|}{x-x_0}\right) = \alpha$$

şi deci f este derivabilă în x şi $f'(x_0) = \alpha$.

35. Propoziţia 2. Fie A un interval în $\mathbb{R}$ cu $\mathring{A} \neq \emptyset$ şi $x_0 \in A$. Presupunem că $f : A \to \mathbb{R}$, $g : A \to \mathbb{R}$ sînt derivabile în x_0. Atunci $f+g$, $f.g$ sînt derivabile în x_0 şi

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0),$$

$$(f.g)'(x_0) = f'(x_0)\,g(x_0) + f(x_0)\cdot g'(x_0).$$

Dacă în plus $f(x) \neq 0$, pentru orice $x \in A$ atunci $\frac{1}{f}$ este derivabilă în x_0 şi $(1/f)'(x_0) = -\dfrac{f'(x_0)}{f^2(x_0)}$.

Demonstraţie. Avem

$$\lim_{x\to x_0} \frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + \lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\right) =$$

$$= f'(x_0) + g'(x_0)$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{(fg)(x)-(fg)(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \cdot g(x)\right) +$$

$$+ f(x_0) \cdot \lim_{x\to x_0} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0).$$

Presupunem acum că $f(x) \neq 0$ pentru orice $x \in A$. Avem

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(x_0)}}{x-x_0} = - \frac{\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}{\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) \cdot f(x_0))} = -\frac{f'(x_0)}{f^2(x_0)}$$

<u>Propoziția 3.</u> Fie A un interval în $\mathbb{R}$ cu $\mathring{A} \neq \emptyset$, B un interval în $\mathbb{R}$ cu $\mathring{B} \neq \emptyset$, $x_0 \in A$, $f : A \to B \subset C$ o funcție derivabilă în x_0 și $g : B \to \mathbb{R}$ o funcție derivabilă în $f(x_0)$. Atunci funcția $g \circ f : A \to \mathbb{R}$ este derivabilă în x_0 și

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

<u>Demonstrație.</u> Intrucît g este derivabilă în $y_0 = f(x_0)$ deducem că

$$g(y) = g(y_0) + g'(y_0)(y - y_0) + \varepsilon_g(y) \cdot |y - y_0|$$

unde ε_g continuă în y_0 și $\varepsilon_g(y_0) = 0$.

Pe de altă parte din faptul că f este derivabilă în x_0 avem

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\,(x-x_0) + \varepsilon_f(x) \cdot |x-x_0|$$

unde ε_f continuă în x_0 și $\varepsilon_f(x_0) = 0$

Inlocuind pe y în relația de mai sus cu $f(x)$ avem

$$(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x_0) + g'(y_0) \cdot f'(x_0)(x-x_0) +$$

$$\left(\varepsilon_f(x) + \varepsilon_g(f(x)) \cdot \frac{|f(x)-f(x_0)|}{|x-x_0|}\right) |x-x_0|$$

Pentru a încheia demonstrația va fi suficient să arătăm că

$$\lim_{x \to x_0} \left(\varepsilon_f(x) + \varepsilon_g(f(x)) \cdot \frac{|f(x)-f(x_0)|}{|x-x_0|} \right) = 0 .$$

Această din urmă relația rezultă din

$$\lim_{x \to x_0} \varepsilon_f(x) = 0, \qquad \lim_{x \to x_0} \frac{|f(x)-f(x_0)|}{|x-x_0|} = |f'(x_0)|,$$

$$\lim_{x \to x_0} \varepsilon_g(f(x)) = \varepsilon_g(f(x_0)) = 0.$$

Propoziția 4. Fie A un interval din $\mathbb{R}$ cu $\mathring{A} \neq \emptyset$, $x_0 \in A$, B un interval din $\mathbb{R}$ cu $\mathring{B} \neq \emptyset$, $f : A \to B$ o funcție bijectivă derivabilă în x_0 și astfel încît $f^{-1} : B \to A$ este continuă în $y_0 := f(x_0)$. Dacă $f'(x_0) \neq 0$ atunci f^{-1} este derivabilă în y_0 și $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$.

Demonstrație. Avem

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \varepsilon_f(x) \cdot |x-x_0|$$

unde $\varepsilon_f : A \to \mathbb{R}$ este continuă în x_0 și $\varepsilon_f(x_0) = 0$.

Notînd, pentru $x \in A$, $y := f(x)$ relația de mai sus se scrie

$$y = y_0 + f'(x_0)\,(f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)) + \varepsilon_f \circ f^{-1}(y) . |f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)|$$

Din

$$\lim_{y \to y_0} \varepsilon_f \circ f^{-1}(y) = \varepsilon_f(f^{-1}(y_0)) = \varepsilon_f(x_0) = 0$$

deducem că există o vecinătate V a lui y_0 astfel încît

$$y \in V \Longrightarrow |\varepsilon_f \circ f^{-1}(y)| < \frac{|f'(x_0)|}{2}$$

şi deci

$$y\in V \Rightarrow |y-y_0| \geq |f'(x_0)| \cdot |f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)| - \frac{|f(x_0)|}{2}|f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)|$$

$$y\in V \Rightarrow |y-y_0| \geq \frac{|f'(x_0)|}{2} \cdot |f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)|$$

adică

$$y\in V \Longrightarrow \frac{|f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)|}{|y-y_0|} \leq \frac{2}{|f'(x_0)|}$$

Din cele precedente rezultă că funcţia $\varepsilon_{f^{-1}} : B \to R$ definită prin

$\varepsilon_{f^{-1}}(y_0) = 0$ şi

$$\varepsilon_{f^{-1}}(y) = -\varepsilon_f(f^{-1}(y)) \cdot \frac{|f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)|}{|y-y_0|}, \quad y\in B\setminus\{y_0\}$$

este continuă în y_0. Intr-adevăr avem

$$\lim_{y\to y_0} |\varepsilon_{f^{-1}}(y)| \leq \frac{2}{|f'(x_0)|} \lim_{y\to y_0} |\varepsilon_f \circ f^{-1}(y)| = 0 .$$

De aici şi din relaţia

$$f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}(y-y_0) + \varepsilon_{f^{-1}}(y) \cdot |y-y_0|$$

deducem că f^{-1} este derivabilă în y_0 şi $(f^{-1})'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$

Exerciţii: Să se arate că pentru un număr natural n funcţia $x \to x^n$ este derivabilă în orice $x\in R$ şi derivata sa este funcţia $x \to n x^{n-1}$.

2) Să se arate că pentru orice număr natural n $n \neq 0$, funcţia $x \to x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$ este derivabilă în orice $x \in R_+^*$ şi derivata sa este funcţia $x \to \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n} - 1}$.

3) Să se arate că funcţia $x \to \frac{1}{x}$ este derivabilă în orice $x \in R$, $x \neq 0$ şi derivata sa este funcţia $x \to -\frac{1}{x^2}$.

4). Să se arate că pentru orice număr raţional α funcţia $x \to x^{\alpha}$ este derivabilă în orice $x \in R_+^*$ şi derivata sa este funcţia $x \to \alpha x^{\alpha-1}$.

5) Să se arate că funcţiile sin şi cos sînt derivabile şi avem $\sin' = \cos$, $\cos' = \sin$.

6) Să se arate că funcţia $x \to e^x$ este derivabilă şi derivata sa coincide cu ea.

7) Să se arate că funcţia $x \to \ln x$ este derivabilă în orice $x \in R_+^*$ şi derivata sa este funcţia $x \to \frac{1}{x}$.

8) Să se arate că pentru orice $a \in R_+^*$, $a \neq 1$ funcţia $x \to a^x$ este derivabilă şi derivata sa este funcţia $x \to a^x \cdot \ln a$

9) Să se arate că pentru orice $a \in R_+^*$, $a \neq 1$ funcţia $x \to \log_a x$ este derivabilă şi derivata sa este funcţia $x \to \frac{1}{x} \cdot \log_a e$.

1o) Să se arate că funcţia arctg este derivabilă în orice $x \in (-\infty, +\infty)$ şi

$$(\mathrm{arctg})'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

11) Să se arate că funcţiile arcsin şi arccos sînt derivabile în orice $x \in (-1,1)$ şi

$$(\arcsin)'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad , \quad (\arccos)'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

12) Fie f o funcţie polinomială de grad 2 astfel încît $|f|$ este derivabilă. Atunci $f \geq 0$ sau $f \leq 0$.

13. Fie $a,b\in\bar{R}$, $f : (a,b) \longrightarrow R$ derivabilă în $x_0\in(a,b)$ Atunci pentru orice două şiruri $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ care converg la x_0 şi astfel încît $a_n \leq x_0 < b_n$ pentru orice $n\in N$ are loc relaţia

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n} = f'(x_0)$$

14. Să se construiască o funcţie $f : (-1,1) \longrightarrow R$ derivabilă în punctul 0 astfel încît există două şiruri $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ convergînd la 0 pentru care nu are loc relaţia

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n} = f'(x_0).$$

Indicaţie. Se consideră funcţia $f : (-1,1) \longrightarrow R$ definită prin

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{dacă } x \neq 0 \\ 0 & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$$

15. Se consideră funcţia $f : R \longrightarrow R$ definită prin

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{dacă } x\in[0,1] \\ 2-x & \text{dacă } x\in[1,2] \end{cases}$$

şi $f(x) = f(x+2)$ oricare ar fi $x\in R$. Să se arate că funcţia $g:R \longrightarrow R$ definită prin

$$g(x) = \sum_{n\in N} \left(\frac{3}{4}\right)^n f(4^n x),$$

este continuă în orice $x\in R$ dar nederivabilă în orice punct $x\in R$.

Indicaţie. Dacă $x_0\in R$ şi $n\in N$, $n\geq 0$ se notează cu k_n partea întreagă a numărului $4^n x_0$. Se pune $a_n = \frac{k_n}{4^n}$, $b_n = \frac{k_n+1}{4^n}$. Avem

$a_n \to x_0$, $b_n \to x_0$ şi $a_n \leq x_0 < b_n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$ şi

$$\frac{g(b_n) - g(a_n)}{b_n - a_n} \geq \frac{1}{2}\, 3^n$$

16. Se consideră funcţiile

$$\mathrm{sh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \mathrm{ch} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

definite prin $\mathrm{sh}\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\mathrm{ch}\, x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$. Să se arate că

$$\mathrm{sh}' = \mathrm{ch} \quad , \quad \mathrm{ch}' = \mathrm{sh}.$$

Funcţia sh este bijectivă şi inversa ei se notează cu arcsh. Să se arate că

$$\mathrm{arcsh}\, x = \ln\, (x + \sqrt{x'+1})$$

şi

$$(\mathrm{arcsh})'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

17. Fie $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ o funcţie derivabilă. Atunci pentru orice $x_1, x_2 \in (a,b)$, $x_1 < x_2$ există $c \in (x_1, x_2)$ astfel încît f' este continuă în c.

Indicaţie. Se remarcă faptul că

$$f'(x) = \lim_{n \to \infty} n\, (f(x + \tfrac{1}{n}) - f(x))$$

iar funcţiile $n(f(x + \frac{1}{n}) - f(x))$ sînt continue pe fiecare interval $(a, b - \frac{1}{n})$.

18. Se dă $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continuă. Se presupune că există o mulţime cel mult numărabilă $A \subset [a,b]$ astfel încît pentru orice $x \in [a,b) \setminus A$, f are derivată la dreapta în x şi $f'_d(x) \leq 0$. Atunci $f(b) \leq f(a)$.

Indicaţie. Presupunem $A = \{x_n / n\in N\}$ şi fie $\varepsilon > 0$. Se consideră mulţimea T a punctelor $x \in [a,b)$ cu proprietatea

$$t \leq x \Longrightarrow f(t) \leq f(a) + \varepsilon \sum_{x_k \leq t} \frac{1}{2^k} + \varepsilon(t-a).$$

Se arată că T este închisă şi că dacă $x_0 \in T$, $x_0 < b$ atunci există $\eta > 0$ astfel încît $x_0 + \eta \in T$.

2. Teoremele lui Fermat, Rolle, Lagrange, Cauchy, l'Hospital.

Definiţie. Fie A un interval în $\mathbb{R}$ cu $\mathring{A} \neq \emptyset$, $x_0 \in A$ şi $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$. Se spune că x_0 este punct de minim local (resp. de maxim local) pentru f dacă există o vecinătate V a lui x_0 astfel încît

$$x \in V \cap A \Longrightarrow f(x) \geq f(x_0) \text{ (resp. } f(x) \leq f(x_0))$$

Punctul x_0 se numeşte punct de minim local strict (resp.maxim local strict) pentru f dacă există o vecinătate V a lui x_0 astfel încît

$$x \in V \cap A,\ x \neq x_0 \Longrightarrow f(x) > f(x_0) \text{ (resp. } f(x) < f(x_0))$$

Vom spune simplu, punct de extrem local (resp.punct de extrem local strict) pentru un punct x_0 care este punct de minim local sau de maxim local (resp.punct de minim local strict sau maxim local strict).

Propoziţia 5 (Fermat(1601-1655))Fie A un interval în $\mathbb{R}$ cu $\mathring{A} \neq \emptyset$ $x_0 \in \mathring{A}$ şi $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcţie derivabilă în x_0. Dacă în plus x_0 este un punct de extrem local pentru f atunci $f'(x_0) = 0$.

Demonstraţie. Presupunem că x_0 este punct de minim local pentru f. Atunci există o vecinătate V a lui x_0 astfel încît

$$x \in V \cap A \Longrightarrow f(x) \geq f(x_0)$$

Intrucît $x_0 \in \mathring{A}$ rezultă că $V \cap A$ este o vecinătate a lui x_0 în R şi deci există $\varepsilon > 0$ cu propriétatea

$$(x_0 - \varepsilon , x_0 + \varepsilon) \subset V \cap A.$$

Avem

$$x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \Longrightarrow f(x) - f(x_0) \geqslant 0$$

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geqslant 0$$

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leqslant 0$$

şi deci $f'(x_0) = 0$.

Cazul cînd x_0 este punct de maxim local pentru f se reduce la primul întrucît x_0 va fi în acest caz punct de minim local pentru $-f$.

Propoziţia 6 (Rolle(1652-1719)). Fie $a,b \in \overline{R}$, $a < b$ şi

$$f : [a,b] \longrightarrow R$$

o funcţie continuă pe $[a,b]$ şi derivabilă în orice punct $x \in (a,b)$ şi $f(a) = f(b)$. Atunci există $c \in (a,b)$ astfel încît $f'(c) = 0$.

Demonstraţie. Intrucît f este continuă pe $[a,b]$ atunci $f([a,b])$ este o mulţime închisă şi mărginită şi deci există $x_0 \in [a,b]$, $y_0 \in [a,b]$ cu proprietatea

$$f(x_0) = \inf_{a \in [a,b]} f(x) \quad , \quad f(y_0) = \sup_{x \in [a,b]} f(x) .$$

Dacă $x_0, y_0 \in \{a,b\}$ atunci $f(x_0) = f(y_0) = f(a) = f(b)$

şi deci

$$\sup_{x \in [a,b)} f(x) = \inf_{x \in [a,b)} f(x)$$

adică f este constată. De aici deducem că în orice $c \in (a,b)$ avem $f'(c) = 0$. Presupunem deci că $x_0 \in (a,b)$ sau $y_0 \in (a,b)$. In primul caz rezultă că x_0 este punct de minim pentru f, în al doilea caz rezultă că y_0 este punct de maxim pentru f. Din propoziţia precedentă deducem $f'(x_0) = 0$ sau $f'(y_0) = 0$.

Propoziţia 7 (Lagrange(1736-1813)). Fie $a,b \in R$, $a<b$ şi

$$f : [a,b] \longrightarrow R.$$

o funcţie continuă pe $[a,b]$ şi derivabilă în orice $v \in (a,b)$. Atunci există $c \in (a,b)$ astfel încît

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

<u>Demonstraţie</u>. Se consideră funcţia $g : [a,b] \longrightarrow R$ definită prin

$$g(x) = f(x) - \alpha x$$

unde $\alpha = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$. Se verifică prin calcul că

$$g(b) = g(a).$$

Funcţia g întruneşte proprietăţile din propoziţia precedentă şi deci există $c \in (a,b)$ astfel încît

$$g(c) = 0$$

adică

$$f'(c) = \alpha = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Corolar 8. Fie $a,b \in \mathbb{R}$, $a<b$ şi $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcţie derivabilă cu $f'(x) = 0$ pentru orice $x \in (a,b)$. Atunci f este constantă.

Propoziţia 9. (Cauchy). Fie $a,b \in \mathbb{R}$, $a<b$ şi

$$f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

două funcţii continue pe $[a,b]$ derivabile în orice punct $x \in (a,b)$ şi astfel încît $g'(x) \neq 0$ pentru orice $x \in (a,b)$. Atunci există $c \in (a,b)$ cu proprietatea

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} .$$

Demonstraţie. Remarcăm mai întîi că $g(a) \neq g(b)$ întrucît în caz contrar ar exista $x_0 \in (a,b)$ cu $g'(x_0) = 0$ ceea ce contrazice ipoteza. Fie aşa dar

$$\alpha := \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

şi $h : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, unde

$$h(x) = f(x) - \alpha g(x).$$

Se vede că h este continuă pe $[a,b]$, derivabilă în orice punct $x_0 \in (a,b)$ şi

$$h(a) = h(b).$$

Din teorema lui Rolle deducem că există $c \in (a,b)$ cu proprietate

$$h'(c) = 0$$

adică

$$f'(c) = \alpha g'(c)$$

sau

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \alpha = \frac{f'(c)}{g'(c)} .$$

Cda. 105/989 Fasc. 12

Propoziţia 10. Fie $a,b \in \bar{\mathbb{R}}$, $a<b$ şi

$$f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

o funcţie continuă pe $[a,b]$ şi derivabilă pe (a,b). Atunci

1) f crescătoare $\Longleftrightarrow$ $f'(x) \geqslant 0$ pentru orice $x \in (a,b)$

2) f strict crescătoare $\Longleftrightarrow$ $f(x) \geqslant 0$ pentru orice $x \in (a,b)$ şi $\{x \in (a,b) \mid f(x) > 0\}$ densă în (a,b).

Demonstraţie. Dacă f este crescătoare atunci pentru orice $x_0 \in (a,b)$ avem

$$f'(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geqslant 0$$

Reciproc, dacă $f'(x) \geqslant 0$ pentru orice $x \in (a,b)$. Atunci dacă $a \leqslant x_1 < x_2 \leqslant b$ există $c \in (x_1,x_2)$ astfel încît

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(c) \geqslant 0$$

şi deci $f(x_2) \geqslant f(x_1)$. Deci f este crescătoare.

3) Dacă f este strict crescătoare atunci $f'(x) \geqslant 0$ pentru orice $x \in [a,b]$. Dacă pe un anumit interval deschis $(a',b') \subset [a,b]$ am avea $f'(x) = 0$ pentru orice $x \in (a',b')$ atunci $f'|_{(a',b')} =$ constant ceea ce contrazice faptul că f este strict crescătoare.

Reciproc dacă $f'(x) \geqslant 0$ pentru orice $a \in (a,b)$ şi $\{x \in (a,b) \mid f'(x) > 0\}$ este densă în (a,b) rezultă că f este crescătoare. Dar f n-ar fi strict crescătoare ar exista un interval $(a',b') \subset [a,b]$ astfel încît $f|_{(a',b')} =$ constant adică $f'(x) = 0$ pentru orice $x \in (a',b')$ ceea ce contrazice faptul că $\{x \in (a,b) \mid f'(x) > 0\}$ este densă în (a,b).

<u>Propoziția 11</u>. Fie A un interval din $\mathbb{R}$ cu $\mathring{A} \neq \emptyset$ și $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcție derivabilă. Atunci derivata f' a lui f este o funcție care posedă proprietatea Darboux, adică $f'(A)$ este de asemenea un interval.

<u>Demonstrație</u>. Fie $\alpha, \beta \in f'(A)$ $\alpha < \beta$ și fie $a,b \in A$ cu $f'(a) = \alpha$, $f'(b) = \beta$. Vom arăta pentru orice $\gamma, \alpha < \gamma < \beta$ există c între a și b cu proprietatea $f'(c) = \gamma$. Fără a restrînge generalitatea putem presupune că $a < b$. Cazul $b < a$ se obține din primul înlocuind funcția f cu funcție $-f$.

Considerăm funcția $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ definită prin $g(x) = f(x) - \gamma x$. Avem

$$g'(a) = f'(a) - \gamma = \alpha - \gamma < 0$$

$$g'(b) = f'(b) - \gamma = \beta - \gamma > 0.$$

Intrucît $g'(a) < 0$ rezultă că a nu poate fi un punct de minim local pentru g întrucît în caz contrar am avea

$$g'(a) = \lim_{\substack{x \to a \\ x > b}} \frac{g(x) - g(b)}{x - b} \geq 0 .$$

Așa dar funcția continuă g își va atinge minimumul pe intervalul $[a,b]$ într-un punct c din (a,b). Din teorema lui Fermat rezultă $g'(c) = 0$ adică $f'(c) = \gamma$.

<u>Corolar 12</u>. Fie A un interval din $\mathbb{R}$, cu $\mathring{A} \neq \emptyset$ și $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcție derivabilă cu $f'(x) \neq 0$ pentru orice $x \in A$. Atunci $f'(x) > 0$ pentru orice $x \in A$ sau $f'(x) < 0$ pentru orice $x \in A$.

<u>Propoziția 13</u>. (L'Hospital(1661-1704)) Fie A un interval deschis din $\overline{\mathbb{R}}$, $x_0 \in A' \setminus A$ și $f,g : A \to \mathbb{R}$ două funcții derivabile în orice $x \in A$ și $g'(x) \neq 0$ pentru orice $x \in A$. Presupunem că

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0 ,$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \alpha \ .$$

Atunci $g(x) \neq 0$, pentru orice $x \in A$ şi

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \alpha \ .$$

<u>Demonstraţie</u>. Din $x_0 \in A' \setminus A$ deducem că $A = (x_0, b)$ (sau $A = (b, x_0)$). Notăm cu $\tilde{f}$ şi $\tilde{g}$ funcţiile definite pe $[x_0, b)$ (sau $(b, x_0]$ definite prin

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{dacă } x \neq x_0 \\ 0 & \text{dacă } x = x_0 \end{cases}, \quad \tilde{g}(x) = \begin{cases} g(x) & \text{dacă } x \neq x_0 \\ 0 & \text{dacă } x = x_0 \ . \end{cases}$$

Fie V o vecinătate în $\overline{\mathbb{R}}$ a lui α . Atunci din

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \alpha$$

rezultă că există o vecinătate W a lui x_0 astfel încît

$$x \in W \cap A \Longrightarrow \frac{f'(x)}{g'(x)} \in V$$

In cazul $A = (x_0, b)$ relaţia precedentă este echivalentă cu faptul că există $c_V \in (x_0, b)$ cu proprietatea

$$x_0 < x < c_V \Longrightarrow \frac{f'(x)}{g'(x)} \in V.$$

Intrucît dacă $x \in (x_0, c_V)$ atunci din

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\tilde{f}(x) - \tilde{f}(x_0)}{\tilde{g}(x) - \tilde{g}(x_0)}$$

şi din teorema lui Cauchy aplicată funcţiilor $\tilde{f}$ şi $\tilde{g}$ pe intervalul

$[x_0,x]$ deducem că există $x^* \in (x_0,x)$ astfel încît

$$\frac{\tilde{f}(x) - \tilde{f}(x_0)}{\tilde{g}(x) - \tilde{g}(x_0)} = \frac{f'(x^*)}{g'(x^*)}$$

şi deci

$$x_0 < x < c_V \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x^*)}{g'(x^*)} \in V$$

adică

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \alpha$$

Propoziţia 12 (l'Hospital). Fie A un interval deschis din $\overline{\mathbb{R}}$, $x_0 \in A' \setminus A$ şi $f,g : A \to \mathbb{R}$ două funcţii derivabile în orice $x \in A$ şi $g'(x) \neq 0$ pentru orice $x \in A$. Presupunem că

$$\lim_{x \to x_0} |g(x)| = +\infty$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \alpha .$$

Atunci există o vecinătate V a lui x_0 astfel încît $g(x) \neq 0$ pentru $x \in V \cap A$ şi

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \alpha .$$

Demonstraţie. In situaţia din enunţ avem $A = (x_0,b)$ sau $A = (b,x_0)$. Intrucît $g'(x) \neq 0$ pentru orice $x \in A$ atunci g este strict crescătoare sau g este strict descrescătoare. Intrucît $\lim_{x \to x_0} |g(x)| = +\infty$ atunci vom avea $\lim_{x \to x_0} g(x) = +\infty$ dacă g este strict crescătoare şi $\lim_{x \to x_0} g(x) = -\infty$ dacă g este strict descrescătoare. Evident de aici rezultă că în fiecare caz în parte există cel mult un punct $a \in A$ cu $g(a) = 0$ şi deci există o vecinătate V a lui x_0 cu proprietatea $g(x) \neq 0$ pentru orice $x \in V \cap A$. Fără a restrînge generalitatea vom presupune $g(x) \neq 0$ pentru $x \in A$.

Presupunem $\alpha \in \mathbb{R}$. Vom considera cazul $A = (x_0, b)$. Cazul $A = (b, x_0)$ se tratează similar. Condiţia

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \alpha$$

revine la a găsi pentru orice $\varepsilon > 0$ un $c_\varepsilon \in (x_0, b)$ astfel încît

$$x \in (x_0, c_\varepsilon) \Longrightarrow \left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - \alpha \right| < \frac{\varepsilon}{3} .$$

Din teorema lui Cauchy, rezultă că dacă $x \in (x_0, c)$ atunci există $x^* \in (x, c_\varepsilon)$ cu proprietatea

$$\frac{f(x) - f(c_\varepsilon)}{g(x) - g(c_\varepsilon)} = \frac{f'(x^*)}{g'(x^*)}$$

Din relaţia

$$\frac{f(x) - f(c_\varepsilon)}{g(x) - g(c_\varepsilon)} = \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(c_\varepsilon)}{g(x)}}{1 - \frac{g(c_\varepsilon)}{g(x)}}$$

deducem că pentru $x \in (x_0, c_\varepsilon)$ avem

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x^*)}{g'(x^*)} \left(1 - \frac{g(c_\varepsilon)}{g(x)}\right) - \frac{f(c_\varepsilon)}{g(x)}$$

şi deci

$$\frac{f(x)}{g(x)}-\alpha=\frac{f'(x^*)}{g'(x^*)}-\alpha+\frac{f'(x^*)}{g'(x^*)}\,\frac{g(c_\varepsilon)}{g(x)}+\frac{f(c_\varepsilon)}{g(x)}\,.$$

Dacă acum alegem $c'_\varepsilon\in(x_0,c_\varepsilon)$ astfel încît

$$x_0<x<c'_\varepsilon\Rightarrow\left|\frac{f(c_\varepsilon)}{g(x)}\right|<\frac{\varepsilon}{3}\,,\quad\left|\frac{g(c_\varepsilon)}{g(x)}\right|(\alpha+\varepsilon)<\frac{\varepsilon}{3}\,.$$

atunci vom avea

$$x_0<x<c'_\varepsilon\Rightarrow\left|\frac{f(x)}{g(x)}-\alpha\right|<\varepsilon\,.$$

şi deci

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\alpha\,.$$

Presupunem acum că $\alpha=+\infty$ şi fie $\varepsilon>0$. Din

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=+\infty$$

deducem că există $c_\varepsilon\in(x_0,b)$ cu proprietatea

$$\forall\in(x_0,c_\varepsilon)\Rightarrow\frac{f'(x)}{g'(x)}>3\varepsilon$$

Din teorema lui Cauchy rezultă că pentru orice $x\in(x_0,c_\varepsilon)$ există $x^*\in(x,c_\varepsilon)$ astfel încît

$$\frac{f(x)-f(c_\varepsilon)}{g(x)-g(c_\varepsilon)}=\frac{f(x^*)}{g(x^*)}$$

De aici şi din relaţia

$$\frac{f(x)-f(c_\varepsilon)}{g(x)-g(c_\varepsilon)}=\frac{\dfrac{f(x)}{g(x)}-\dfrac{f(c_\varepsilon)}{g(x)}}{1-\dfrac{g(c_\varepsilon)}{g(x)}}$$

deducem că pentru orice $x \in (x_0, c_\varepsilon)$ avem

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x^*)}{g'(x^*)}\left(1 - \frac{g(c_\varepsilon)}{g(x)}\right) + \frac{f(c_\varepsilon)}{g(x)} .$$

Alegem acum $c'_\varepsilon \in (x_0, c_\varepsilon)$ cu proprietatea

$$x_0 < x < c'_\varepsilon \Longrightarrow \left|\frac{f(c_\varepsilon)}{g(x)}\right| < \varepsilon/2 , \quad \left|\frac{g(c_\varepsilon)}{g(x)}\right| < \frac{1}{2}$$

Atunci avem

$$x_0 < x < c'_\varepsilon \Longrightarrow \frac{f(x)}{g(x)} > \frac{3\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon ,$$

ceea ce arată că

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = + \infty .$$

<u>Exerciţii</u>. 1. Se consideră o funcţie $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ derivabilă. Să se arate că dacă $f' = f$ atunci $f(x) = ae^x$, $x \in \mathbb{R}$ unde a este o constantă.

2. Se consideră două funcţii $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ derivabile. Să se arate că dacă $f' = g$ şi $g' = -f$ iar $f(0) = 0$, $g(0) = 1$ atunci $f = \sin$, $g = \cos$.

3. Se consideră două funcţii $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ derivabile. Să se arate că dacă $f' = g$ şi $g' = f$ iar $f(0) = 0$, $g(0) = 1$ atunci $f = \mathrm{sh}$ şi $g = \mathrm{ch}$.

4. Să se arate că pentru orice $x \in (0, \pi)$ au loc relaţiile:

$$x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$$

$$1 - \frac{x^2}{2} < \cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$$

5. Să se arate că pentru orice $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ are loc relaţia

$$\frac{2}{\pi} < \frac{\sin x}{x} < 1 .$$

6. Fie $a,b \in \mathbb{R}$ şi $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ o funcţie derivabilă şi să se arate că pentru orice $c \in [a,b]$ cu proprietatea că c nu este punct de maxim sau punct de minim pentru f' există $x_1, x_2 \in [a,b]$ astfel încît

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c)$$

Indicaţie. In caz contrar ar exista $c \in [a,b]$ cu proprietatea că funcţia

$$x \to f(x) - f'(c)x$$

este injectivă adică strict crescătoare sau strict descrescătoare ceea ce ar duce la faptul că $f'(x) \geq f'(c)$ (resp. $f'(x) \leq f'(c)$ pentru orice $x \in [a,b]$.

7. Fie $a,b \in \mathbb{R}$, $a<b$ şi $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă pe $[a,b]$, derivabilă în orice punct $x \in (a,b)$ şi astfel încît $\lim\limits_{n \to a} f'(x) = \alpha \in \mathbb{R}$. Atunci f este derivabilă în a şi $f'(a) = \alpha$.

8. Să se calculeze următoarele limite:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} (\operatorname{tg} x)^{\cos x} ; \quad \lim_{x \searrow 0} x^{\sin x} ; \quad \lim_{x \to 1} x^{\frac{2}{x-1}}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{\sin x - x} ; \quad \lim_{x \to 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x \sin^2 x} ; \quad \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$$

9. Fie $a,b\in R$, $a<b$, $f : (a,b)\to R$ o funcţie continuă pe $(a,b]$ derivabilă pe (a,b) şi astfel încît există $\lim\limits_{\substack{x\to b\\ x<b}} f(x)$. Atunci f este derivabilă în b şi f' este continuă în b.

1o. Fie A un interval din R cu $\mathring{A}\neq 0$, $x_0\in A$ şi $f : A\to R$ o funcţie derivabilă în orice punct $x\in A$ astfel încît f' continuă în x_0. Atunci pentru orice două şiruri $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ din A care converg la x_0 şi $a_n\neq x_0$, $b_n\neq x_0$ pentru orice $n\in N$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(a_n)-f(b_n)}{a_n-b_n} = f'(x_0)$$

11. Fie $f : [a,b]\to R$ o funcţie derivabilă astfel încît f' este strict crescătoare. Atunci, pentru orice $c\in(a,b)$ cu $f'(c)=0$ există $x_1,x_2\in[a,b]$, $x_1<c<x_2$ cu proprietatea $f(x_1)=f(x_2)$.

12. Fie $f : [a,b]\to R$ o funcţie derivabilă astfel încît f' este strict crescătoare. Atunci pentru orice $c\in(a,b)$ există $x_1,x_2\in[a,b]$, $x_1<c<x_2$ astfel încît

$$f(c) = \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$$

13. Fie $f : [a,b]\to R$ o funcţie derivabilă astfel încît f' este crescătoare. Atunci pentru orice $c\in(a,b)$, există $x_1,x_2\in[a,b]$, cu $x_1<x_2$ astfel încît

$$f'(c) = \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$$

14. Fie $a,b\in R$, $a<b$, $f : [a,b]\to R$ o funcţie derivabilă astfel încît 1) $f(a)\,f(b)<0$; 2) $f'(x)<0$ $(\forall)$ $x\in[a,b]$; 3) f' este crescătoare. Atunci pentru orice $x\in[a,b]$ avem

$x-\dfrac{f(x)}{f'(x)}\in[a,b]$ şi orice şir $(x_n)_n$ forma

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

unde $x_0 \in [a,b]$ converge la unicul punct c din $[a,b]$ cu proprietatea că $f(c) = 0$.

3. Siruri de funcţii derivabile

Propoziţia 14. Fie $a,b \in \mathbb{R}$, $a<b$ şi $(f_n)_n$ un şir de funcţii reale $f_n : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ astfel încît f_n este derivabilă pe $[a,b]$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, şirul$(f_n')_n$ converge uniform la $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ şi există $x_0 \in [a,b]$ astfel încît şirul $(f_n(x_0))_n$ este convergent. Atunci $(f_n)_n$ converge uniform la o funcţie $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ care este derivabilă şi $f' = g$.

Demonstraţie. Fie $\varepsilon > 0$ şi $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încît

$$n \geq n_\varepsilon,\ p \in \mathbb{N} \Longrightarrow \begin{array}{l} |f_{n+p}'(x) - f_n'(x)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\ (\forall)\ x \in [a,b] \\ |f_{n+p}(x_0) - f_n(x_0)| < \varepsilon/2\ (\forall)\ x \in [a,b] \end{array}$$

Din teorema lui Lagrange deducem că pentru orice $x \in [a,b]$ există $x^* \in [a,b]$ (astfel încît

$$(f_{n+p}(x) - f_n(x)) - (f_{n+p}(x_0) - f_n(x_0)) =$$

$$= (f_{n+p}'(x^*) - f_n'(x^*))\ (x - x_0)$$

şi deci

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| \leq |f_{n+p}'(x^*) - f_n'(x^*)|\ |x - x_0|$$

$$+ |f_{n+p}(x_0) - f_n(x_0)|$$

De aici rezultă că

$$n \geq n_\varepsilon,\ p\in N \Longrightarrow |f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

şi deci şirul $(f_n)_n$ converge uniform la o funcţie $f : [a,b] \to R$. Fie acum $x_1 \in [a,b]$. Atunci pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in N$ cu proprietatea

$$p\in N,\ n \geq n_\varepsilon \Longrightarrow |f'_{n+p}(x) - f'_n(x)| < \varepsilon/3 \quad (\forall)\ x\in[a,b]$$

$$|g(x) - f'_n(x)| < \varepsilon/3 \qquad (\forall)\ x\in[a,b]$$

Pentru orice $x\in[a,b], x\neq x_1$ există $x^*\in[a,b]$ astfel încît

$$\frac{(f_{n+p}(x) - f_n(x)) - (f_{n+p}(x_1) - f_n(x_1))}{x - x_1} =$$

$$= f'_{n+p}(x^*) - f'_n(x^*)$$

şi deci

$$n \geq n_\varepsilon,\ p\in N \Longrightarrow \left|\frac{(f_{n+p}(x) - f_n(x)) - (f_{n+p}(x_1)-f_n(x_1))}{x - x_1}\right| < \varepsilon/3.$$

Trecînd la limită după p deducem

$$n \geq n_\varepsilon \Longrightarrow \frac{|(f(x) - f_n(x)) - (f(x_1) - f_n(x_1))|}{x - x_1} \leq \varepsilon/3.$$

Fixăm acum $n_0 \geq n_\varepsilon$. Există atunci o vecinătate V a lui x_1 astfel încît

$$\underset{x\neq x_1}{x\in V\cap[a,b]} \Longrightarrow \left|\frac{f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_1)}{x - x_1} - f'_{n_0}(x_1)\right| < \varepsilon/3\ .$$

Avem

$$x \in V \cap [a,b],\ x \neq x_1 \Longrightarrow \left| \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} - g(x_1) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} - \frac{f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_1)}{x - x_1} \right| +$$

$$+ \left| \frac{f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_1)}{x - x_1} - f'_{n_0}(x_1) \right| + \left| f'_{n_0}(x_1) - g(x_1) \right| < \varepsilon.$$

Această relaţie arată că f este derivabilă în x_1 şi că $f'(x_1) = g(x_1)$.

Definiţie. Fie A un interval din $\mathbb{R}$ cu $\mathring{A} \neq \emptyset$ şi $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$. O funcţie $g : A \longrightarrow \mathbb{R}$ derivabilă cu $g' = f$ se numeşte primitivă a lui f.

Remarcă. 1. O funcţie $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ care posedă o primitivă trebuie să aibă proprietatea Darboux.

2. Dacă g_1, g_2 sînt două primitive ale lui f atunci $g_1 - g_2$ este o funcţie constantă întrucît $(g_1 - g_2)' = g_1' - g_2' = 0$.

3. Dacă f_1, f_2 posedă o primitivă şi $\alpha \in \mathbb{R}$ atunci $\alpha f_1 + f_2$ posedă de asemenea o primitivă şi anume dacă g_1, g_2 sînt primitive ale lui f_1 şi respectiv f_2 atunci $\alpha g_1 + g_2$ este o primitivă a lui $\alpha f_1 + f_2$.

Propoziţia 15. Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ şi

$$f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

o funcţie continuă pe $[a,b]$. Atunci f posedă o primitivă.

Demonstraţie. Presupunem că există o diviziune $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ a intervalului $[a,b]$ astfel încît pentru fiecare interval $[x_k, x_{k+1}]$ există o funcţie derivabilă $g_k : [x_k, x_{k+1}] \longrightarrow \mathbb{R}$ astfel încît $g_k'(x) = f(x)$ $(\forall)\ x \in [x_k, x_{k+1}]$. Atunci există $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$

derivabilă cu $g'(x) = f(x)$ $(\forall)$ $x \in [a,b]$. Se consideră acum funcţiile $h_k : [x_k, x_{k+1}] \longrightarrow \mathbb{R}$ astfel încît $h_k = g_k + \alpha_k$ şi astfel încît

$$h_k(x_k) = h_{k-1}(x_k) \qquad (\forall)\ 0 \leq k \leq n-1 .$$

Atunci funcţia $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ astfel încît

$$g\big|_{[x_k, x_{k+1}]} = h_k \qquad (\forall)\ 0 \leq k \leq n-1$$

este derivabilă şi $g' = f$.

Fie acum $n \in \mathbb{N}$. Atunci există o diviziune $a = x_0^{n} < x_1^{(n)} < \dots < x_{p_n}^{(n)} = b$ a lui $[a,b]$ astfel încît

$$x \in [x_k^{(n)}, x_{k+1}^{(n)}] \Longrightarrow |f(x) - f(x_k)| < \frac{1}{n}$$

Atunci considerăm pe $[a,b]$ funcţia definită prin

$$x \in [x_k, x_{k+1}] \Longrightarrow g_n(x) = f(x_k) + \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}(f(x_{k+1}) - f(x_k)) .$$

Avem pentru $x \in [x_k, x_{k+1}]$

$$|g_n(x) - f(x)| \leq |f(x_k) - f(x)| + |f(x_{k+1}) - f(x_k)| < \frac{2}{n} .$$

Aşa dar $(g_n)_n$ converge uniform la f. Din consideraţiile precedente rezultă că există o funcţie $h_n : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ derivabilă cu $h_n' = g_n$ şi cu $h_n(a) = 0$. Atunci din propoziţia precedentă deducem că $(h_n)_n$ converge uniform la o funcţie $h : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ care este derivabilă şi $h' = f$.

<u>Exerciţii</u>.1). Fie $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcţie derivabilă astfel încît $f' = f$. Atunci $f(x) = \alpha e^x$ $(\forall)$ $x \in \mathbb{R}$.

2) Să se arate că pentru orice interval A cu $0 \notin A$, şi $\mathring{A} \neq \emptyset$ există o funcţie derivabilă $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatea $f' = f^2$.

3) Să se arate că nu există o funcţie derivabilă $f : (-1,1) \longrightarrow \mathbb{R}$ astfel încît $f' = f^2$.

4) Se consideră funcţia $f : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definită prin

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } x = 0 \\ 2\,x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} & \text{dacă } x \neq 0 \end{cases}$$

Să se arate că f posedă o primitivă.

Indicaţie. Se constată că funcţia $g : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ unde

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } x = 0 \\ x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{dacă } x \neq 0 \end{cases}$$

este derivabilă şi $g'(x) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } x = 0 \\ 2\,x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} & \text{dacă } x \neq 0. \end{cases}$

5). Să se arate că funcţia $f : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ unde

$$f(x) = \begin{cases} \alpha & \text{dacă } x = 0 \\ \cos \frac{1}{x} & \text{dacă } x \neq 0 \end{cases}$$

are o primitivă dacă şi numai dacă $\alpha = 0$.

6). Să se arate că dacă $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ are o primitivă atunci f are proprietatea Darboux.

Să se arate că dacă $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ are o primitivă atunci pentru orice interval deschis U există puncte din $U \cap [a,b]$ în care f este continuă.

7). Să se arate un exemplu de funcţie $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ care are proprietatea Darboux, care este continuă în orice $x \neq 0$ şi care totuşi nu are o primitivă.

Indicaţie. Funcţia $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ unde

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } x = 0 \\ \cos \frac{1}{x} & \text{dacă } x \neq 0 \end{cases}$$

este de acest tip.

8). Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ o funcţie care posedă o primitivă şi $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă. Atunci $f.g$ posedă o primitivă.

Indicaţie. Se consideră mai întîi cazul cînd g este o funcţie derivabilă şi cu g' continuă. Se consideră apoi cazul cînd există o diviziune $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ astfel încît $g|_{[x_k, x_{k+1}]}$ este derivabilă şi cu derivată continuă. Se construieşte apoi, ca în teorema 15, un şir g_n de funcţii ca în cazul precedent astfel încît $(g_n)_n$ să conveargă uniform la g. Se aplică apoi teorema 14.

9). Să se arate că în general produsul a două funcţii care posedă primitive nu este o funcţie care posedă primitivă.

Indicaţie. Se consideră funcţia $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } x = 0 \\ \cos^2 \frac{1}{x} & \text{dacă } x \neq 0 \end{cases}$$

Se arată, utilizînd exerciţiul 5, că f nu posedă o primitivă.

10). Să se arate că există funcţii $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ care posedă primitivă $\frac{1}{2} < f < 1$ astfel încît $\frac{1}{f}$ nu posedă primitivă.

Indicaţie. Se utilizează exerciţiul precedent.

4. Funcţii derivabile de ordin superior. Formula lui Taylor

Definiţie. Fie A un interval din $\mathbb{R}$, $\mathring{A} \neq \emptyset$ şi $x_0 \in A$. O funcţie $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ se spune că este derivabilă de ordinul 2 în x_0 dacă există un interval deschis U, $x_0 \in U$ astfel încît f este derivabilă pe U şi derivata sa (notată simplu f') este derivabilă în x_0. Vom scrie $f''(x_0) := (f')'(x_0)$. Numărul $f''(x_0)$ se numeşte derivata de ordinul doi a lui f în punctul x_0.

Definiţie. Fie A un interval din $\mathbb{R}$, $\mathring{A} \neq \emptyset$. O funcţie $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ se numeşte convexă (resp.concavă) dacă

$$x < z < y \Longrightarrow f(z) \leq \frac{y-z}{y-x} f(x) + \frac{z-x}{y-x} f(y)$$

$$(\text{resp.}) \qquad f(z) \geq \frac{y-z}{y-x} f(x) + \frac{z-x}{y-x} f(y)$$

Remarcă. Funcţia $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ va fi convexă dacă şi numai dacă -f va fi concavă.

Propoziţia 16. Fie A un interval din $\mathbb{R}$, $\mathring{A} \neq \emptyset$ şi $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$. Următoarele afirmaţii sînt echivalente

1) f este convexă

2) $x < y < z \Longrightarrow \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \geq \frac{f(z)-f(y)}{z-y}$

2") $x < y < z \Longrightarrow \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \geq \frac{f(z)-f(x)}{z-x}$

2"') $x < y < z \Longrightarrow \frac{f(x)-f(z)}{x-z} \geq \frac{f(y)-f(z)}{y-z}$

Demonstraţie. Se verifică simplu că fiecare din relaţiile 2'), 2"), 2"') este echivalentă cu relaţia

$$x < y < z \Longrightarrow f(y) \leq \frac{z-y}{z-x} f(x) + \frac{y-x}{z-x} f(z)$$

ceea ce exprimă faptul că f este convexă.

Remarcă. 1) Din propoziţia precedentă rezultă că f este convexă dacă şi numai dacă pentru orice $x_0 \in A$ funcţia $x \longrightarrow \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ este descrescătoare şi deci pentru orice $x_0 \in \mathring{A}$ există în R

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'_s \quad , \quad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x)-f(x)}{x-x_0} = f'_d(x_0)$$

şi pentru $x_0, y_0 \in \mathring{A}$, $x_0 < y_0$ avem

$$f'_s(x_0) \geq f'_d(x_0) > f_s(y_0) \geq f'_d(y_0).$$

2) Intrucît funţiile pe $\mathring{A}$ definite prin

$$x \longrightarrow f'_s(x), \quad x \longrightarrow f'_d(x)$$

sînt descrescătoare rezultă că există o mulţime B cel mult numărabilă, $B \subset \mathring{A}$, cu proprietatea că pentru orice $x_0 \in \mathring{A} \setminus B$, f'_s şi f'_d sînt continue în x_0. De aici şi din relaţia

$$x_0 < y_0 \Longrightarrow f'_s(x_0) \geq f'_d(x_0) \geq f'_s(y_0) \geq f'_d(y_0)$$

deducem că

$$x_0 \in \mathring{A} \setminus B \Longrightarrow f'_s(x_0) = f'_d(x_0)$$

şi deci f este derivabilă în orice $x_0 \in \mathring{A} \setminus B$.

Propoziţia 17. Fie A un interval din R, $\mathring{A} \neq \emptyset$ şi $f : A \longrightarrow R$ o funcţie derivabilă. Atunci f este convexă dacă şi numai dacă f' este descrescătoare.

Dacă f este derivabilă de ordinul doi în orice punct din $\mathring{A}$ atunci f este convexă dacă şi numai dacă $f'' \leq 0$.

Demonstraţie. Presupunem f convexă şi fie $x_0, y_0 \in A$, $x_0 < y_0$. Intrucît pentru $x, y \in A$ cu

$$x_0 < x < y < y_0$$

avem

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq \frac{f(y)-f(y_0)}{y-y_0}$$

deducem

$$f'(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x)-f(x)}{x-x_0} \geq \lim_{\substack{y \to y_0 \\ y < y_0}} \frac{f(y)-f(y_0)}{y-y_0} = f'(y_0)$$

adică

$$f'(x_0) \geq f'(y_0) .$$

Reciproc presupunem că f' este descrescătoare şi fie $x,y,z \in A$ cu $x < y < z$. Atunci există $c_1 \in (x,y)$, $c_2 \in (y,z)$ astfel ca

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} = f'(c_1) , \quad \frac{f(z)-f(y)}{z-y} = f'(c_2) .$$

Din $c_1 < c_2$ şi $f'(c_1) \geq f'(c_2)$ deducem

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \geq \frac{f(z)-f(y)}{z-y} ,$$

ceea ce arată că f este convexă.

Presupunem acum că f este derivabilă de ordinul doi pe A. Atunci avem

$$f \text{ convexă} \iff f' \text{ descrescătoare} \iff f'' \leq 0.$$

Definiţie. Fie A un interval din $\mathbb{R}$ cu $\mathring{A} \neq \emptyset$ şi $f : A \to \mathbb{R}$. Noţiunile "f derivabilă de ordin $n \geq 1$" şi "derivată de ordin n (notată $f^{(n)}$)" se definesc inductiv. Pentru $n = 1$, f este derivabilă de ordin 1 dacă f este derivabilă. Funcţia f este derivabilă de ordin $n+1$ dacă este derivabilă de ordin n şi $f^{(n)}$ este derivabilă pe A. Punem $f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$.

Se spune că f este derivabilă de ordin n+1 într-un punct $x_0 \in A$ dacă există un interval deschis U, $x_0 \in U$ astfel încît f este derivabilă de ordin n pe intervalul $U \cap A$ şi $f^{(n)}$ este derivabilă în x_0. Punem $f^{(n+1)}(x_0) = (f^{(n)})'(x_0)$.

<u>Definiţie</u>. Fie A un interval din $\mathbb{R}$ cu $\mathring{A} \neq \emptyset$ şi $f : A \to \mathbb{R}$ o funcţie derivabilă de ordin $n \geq 1$ în $x_0 \in A$. Funcţia

$$T_{f,n,x_0}(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1}(x-x_0) + \frac{f''(x)}{2}(x-x)^2 + \ldots$$
$$+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

se numeşte <u>polinomul Taylor de rang n</u> asociat funcţiei f şi punctului x_0.

Funcţia

$$f - T_{f,n,x_0}$$

se numeşte <u>restul lui Taylor de rang n</u> asociat funcţiei f şi punctului x_0 şi se notează cu R_{f,n,x_0}

<u>Propoziţia 18</u>(Formula lui Taylor (1685-1731)). Fie A un interval în $\mathbb{R}$ cu $\mathring{A} \neq \emptyset$, $f : A \to \mathbb{R}$ o funcţie derivabilă de ordin n în x_0. Atunci există o funcţie $\varepsilon_{f,n,x_0} : A \to \mathbb{R}$ continuă în x_0 şi cu $\varepsilon_{f,n,x_0}(x_0)=0$ astfel încît

$$f(x) = T_{f,n,x_0}(x) + (x-x_0)^n \varepsilon_{f,n,x_0}(x) \ (\forall)\ x \in A.$$

Funcţia ε_f este unic determinată prin această relaţie.

Avem

$$\varepsilon_{f,n,x_0}(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)-T_{n,f,x_0}(x)}{(x-x_0)^n} & \text{dacă } x \neq x_0 \\ 0 & \text{dacă } x = x_0. \end{cases}$$

Demonstrație. Propoziția este adevărată pentru n=1. Intr-adevăr dacă f este derivabilă în x_0 avem

$$\lim_{x\to x_0} \varepsilon_{f,1,x_0}(x) = \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x-x_0)}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x\to x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0)\right) = 0.$$

Presupunem propoziția adevărată pentru orice funcție derivabilă de ordin n în x_0 și fie f derivabilă de ordin n+1 în x_0. Atunci există un interval deschis U, $x_0 \in U$ astfel încît f este derivabilă de ordin n pe $U \cap A$ și $f^{(n)}$ este derivabilă în x_0 sau echivalent, f este derivabilă pe $U \cap A$ și f' este derivabilă de ordin n în x_0.

Prin ipoteza de inducție avem că

$$\lim_{x\to x_0} \varepsilon_{f',n,x_0}(x) = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)-T_{f',n,x_0}(x)}{(x - x_0)^n} = 0.$$

Pe de altă parte avem

$$(T_{f,n+1,x_0})'(x) = T_{f',n,x_0}(x) \quad (\forall)\ x \in U \cap A$$

și deci din teorema lui l'Hospital

$$\lim_{x\to x_0} \varepsilon_{f,n+1,x_0}(x) = \lim_{n\to n_0} \frac{f(x)-T_{f,n+1,x_0}(x)}{(x-x_0)^{n+1}} =$$

$$\frac{1}{n+1} \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x) - T_{f',n,x_0}(x)}{(x - x_0)^n} = 0$$

ceea ce arată că afirmația din enunț este adevăarată pentru n+1.

Remarcă. Formula lui Taylor ne spune că dacă $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ este derivabilă de ordin n în x_0 atunci

$$R_{f,n,x_0}(x) = (x-x_0)^n \cdot \varepsilon_{f,n,x_0}(x)$$

unde ε_{f,n,x_0} este continuă în x_0 și egală cu zero în x_0.

Propoziția 19. (Formula lui Taylor cu restul lui Lagrange).

Fie A un interval din $\mathbb{R}$, $\overset{\circ}{A} \neq \emptyset$ și $x_0 \in A$ și $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcție derivabilă de ordin n+1 pe A. Atunci pentru orice $x \in A$, $x \neq x_0$ există x^* între x_0 și x astfel încît să avem

$$R_{f,n,x_0}(x) = \frac{1}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \cdot f^{(n+1)}(x^*)$$

Demonstrație. Vom considera cazul $x_0 < x$. Cazul $x < x_0$ se tratează analog. Se consideră pe intervalul $[x_0, x]$ funcția

$$t \longrightarrow g(t) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{n!}(x-t)^k + \alpha \cdot (x-t)^{n+1}$$

Se verifică simplu că g este derivabilă și

$$g'(t) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n + \alpha(n+1)(x-t)^n.$$

Alegem acum pe α astfel încît

$$g(x_0) = 0$$

Aceasta revine la a alege pe α astfel încît

$$f(x) = T_{f,n,x_0}(x) + \alpha(x-x_0)^{n+1}.$$

Deoarece $g(x) = 0$ rezultă aplicînd teorema lui Rolle că există x^* între x_0 şi x astfel ca

$$g'(x^*) = 0,$$

adică

$$\frac{f^{(n+1)}(x^*)}{(n+1)!} = \alpha .$$

Propoziţia 20. Fie $a,b \in \mathbb{R}$, $a<b$, $x_0 \in (a,b)$ şi $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ o funcţie derivabilă de ordin n în x_0 unde $n \geq 2$. Avem:

1) Dacă x_0 este punct de minim local pentru f, dacă n este impar şi $f^{(k)}(x_0) = 0$ pentru orice $1 \leq k \leq n-1$ atunci $f^{(n)}(x_0) = 0$.

2) Dacă x_0 este punct de minim local pentru f, dacă n este par şi $f^{(k)}(x_0) = 0$ pentru orice $1 \leq k \leq n-1$ atunci $f^{(n)}(x_0) \geq 0$.

3) Dacă n este par, $f^{(k)}(x_0) = 0$ pentru orice $1 \leq k \leq n-1$ şi $f^{(n)}(x_0) > 0$ atunci x_0 este punct de minim local strict pentru f.

Demonstraţie. 1) Scriem formula lui Taylor relativ la f şi x_0. Avem

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n +$$

$$+ (x-x_0)^n \cdot \varepsilon_{f,n,x_0}(x)$$

unde $\mathcal{E}_{f,n,x_0}$ este continuă în x_0 şi egală cu 0 în x_0. Prin ipoteză $f^{(k)}(x_0) = 0$ $(\forall)$ $1 \leq k \leq n-1$. Deci

$$f(x) = f(x_0) + (x-x_0)^n \left(\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + \mathcal{E}_{f,n,x_0}(x) \right)$$

Intrucît x_0 este punct de minim local există $r>0$ astfel încît $(x_0-r,\ x_0+r) \subset (a,b)$ şi

$$x \in (x_0-r, x_0+r) \Longrightarrow f(x) \geq f(x_0) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow (x-x_0)^n \left(\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + \mathcal{E}_{f,n,x_0}(x) \right) \geq 0$$

Dacă $\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \neq 0$ atunci micşorînd eventual pe r funcţia

$$\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + \mathcal{E}_{f,n,x_0}(x)$$

are un semn constant pe $(x_0-r,\ x_0+r)$. Pe de altă parte din faptul că n este impar funcţia $(x-x_0)^n$ este strict negativă pe (x_0-r, x_0) şi strict pozitivă pe (x_0, x_0+r) ceea ce contrazice relaţia

$$x \in (x_0-r, x_0+r) \Longrightarrow (x-x_0)^n \left(\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + \mathcal{E}_{f,n,x_0}(x) \right) \geq 0.$$

Aşa dar $f^{(n)}(x_0) = 0$.

2) Presupunem că x_0 este punct de minim local pentru f, că n este par şi $f^{(k)}(x_0) = 0$ pentru orice $1 \leq k \leq n-1$. Fie deci $r > 0$ astfel încît $(x_0-r,\ x_0+r) \subset (a,b)$ şi astfel încît

$$x \in (x_0-r,\ x_0+r) \Longrightarrow f(x) \geq f(x_0)\ .$$

Din formula lui Taylor relativ la f şi x_0 şi din ipoteză deducem

$$f(x) = f(x_0) + (x-x_0)^n \left(\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + \varepsilon_{f,n,x_0}(x)\right)$$

unde ε_{f,n,x_0} este continuă în x_0 şi egală cu 0 în x_0.

Intrucît

$$x \in (x_0-r, x_0+r) \Longrightarrow (x-x_0)^n \left(\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + \varepsilon_{f,n,x_0}(x)\right) \geq 0$$

şi cum $(x-x_0)^n > 0$ pentru orice $x \neq x_0$ deducem

$$\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + \varepsilon_{f,n,x_0}(x) \geq 0 \quad (\forall)\ x \in (x_0-r, x_0+r),\ x \neq x_0$$

şi deci trecînd la limită în x_0 avem

$$\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \geq 0\ , \quad f^{(n)}(x_0) \geq 0.$$

3). Dacă n este par şi $f^{(k)}(x_0) = 0$ $(\forall)$ $1 \leq k \leq n-1$ şi $f^{(n)}(x_0) > 0$ atunci din formula Taylor avem

$$f(x) = f(x_0) + (x-x_0)^n \left(\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + \varepsilon_{f,n,x_0}(x)\right)$$

Intrucît ε_{f,n,x_0} este continuă în x_0 şi egală cu 0 în x_0 rezultă că există $r>0$ cu proprietatea

$$(x_0-r,\ x_0+r) \subset (a,\ b)$$

$$x \in (x_0-r,\ x_0+r) \Longrightarrow \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + \varepsilon_{f,n,x_0}(x) > 0 .$$

De aici deducem că

$$\begin{matrix} x \in (x_0-r,\ x_0+r) \\ x \neq x_0 \end{matrix} \Longrightarrow f(x) > f(x_0)$$

adică x_0 este punct de minim local strict pentru f.

<u>Propoziţia 21</u>. Fie A un interval în R cu $\mathring{A} \neq \emptyset$ şi $f,g: A \longrightarrow R$ două funcţii derivabile de ordin $n \geqslant 1$ în x_0. Atunci fg este de asemenea derivabilă de ordin n în x_0 şi are loc formula

$$(fg)^{(n)}(x_0) = \sum_{p=0}^{n} C_n^p\ f^{(n-p)}(x_0) \cdot g^{(p)}(x_0)$$

unde $f^{(o)}(x_0) = f(x_0)$, $g^{(o)}(x_0) = g(x_0)$.

<u>Demonstraţie</u>. Pentru n=1 propoziţia a fost deja demonstrată. Presupunem că este adevărată pentru numărul natural n. Atunci dacă f,g sînt derivabile de ordin n+1 în x_0 rezultă că există un interval deschis U, $x_0 \in U$ astfel încît f,g sînt derivabile de ordin n pe intervalul $U \cap A$ şi $f^{(n)}$ şi $g^{(n)}$ sînt derivabile în x_0. Din ipoteza de inducţie avem pentru $x \in U \cap A$

$$(fg)^{(n)}(x) = \sum_{p=0}^{n} C_n^p\ f^{(n-p)}(x)\ g^{(p)}(x)$$

De aici rezultă că $(fg)^{(n)}$ este derivabilă în x_0 şi avem

$$(fg)^{(n+1)}(x_0) = ((fg)^{(n)})'(x_0) =$$

$$f^{(n+1)}(x_0)g(x_0) + \sum_{p=1}^{n}(C_n^p + C_n^{p-1})\, f^{(n-p+1)}(x_0)g^{(p)}(x_0) +$$

$$+ f(x_0)g^{(n+1)}(x_0) = \sum_{p=0}^{n+1} C_{n+1}^p\, f^{(n+1-p)}(x_0)g^{(p)}(x_0).$$

<u>Propoziţia 22.</u> Fie A,B intervale din $\mathbb{R}$ cu $\mathring{A} \neq \emptyset$, $\mathring{B} \neq \emptyset$, $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow \mathbb{R}$ funcţii derivabile de ordin n în $x_0 \in A$ şi respectiv în $y_0 = f(x_0) \in B$. Atunci $g \circ f$ este derivabilă de ordin n în x_0.

<u>Demonstraţie.</u> Pentru $n = 1$ afirmaţia a fost deja demonstrată şi avem

$$(g \circ f)(x_0) = g'(f(x_0)) \,.\, f'(x_0).$$

Presupunem că afirmaţia este adevărată pentru n şi fie f,g derivabile de ordin $n+1$ în x_0. Atunci există un interval deschis U, $x_0 \in U$ astfel încît f,g sînt derivabile de ordin n pe $U \cap A$ şi $f^{(n)}, g^{(n)}$ sînt derivabile în x_0 sau echivalent f,g sînt derivabile pe $U \cap A$ şi derivatele f', g' sînt derivabile de ordin n în x_0.
De aici şi din ipoteza de inducţie rezultă că funcţiile $g \circ f$ şi f' sînt derivabile de ordin n în x_0 şi deci din teorema precedentă deducem că $(g' \circ f) \,.\, f'$ este derivabilă de ordin n în x_0. Aşa dar funcţia

$$(g \circ f)' = (g' \circ f) \,.\, f'$$

este derivabilă de ordin n în x_0 ceea ce înseamnă că $g \circ f$ este derivabilă de ordin $n+1$ în x_0.

Propoziţia 23. Fie A,B intervale din $\mathbb{R}$ cu $\mathring{A} \neq \emptyset$, $\mathring{B} \neq \emptyset$, $F: A \longrightarrow B$ o funcţie bijectivă, $x_0 \in A$ astfel încît F este derivabilă de ordin n în x_0, F^{-1} este continuă în $y_0 = F(x_0)$ şi $F'(x_0) \neq 0$. Atunci F^{-1} este derivabilă de ordin n în y_0.

Demonstraţie. Dacă n = 1 afirmaţie a fost deja demonstrată şi avem

$$(F^{-1})'(y_0) = \frac{1}{F'(x_0)} .$$

Presupunem că afirmaţia este adevărată pentru n şi fie F derivabilă de ordin n+1 în x_0. Atunci există un interval deschis U, $x_0 \in U$ astfel încît F este derivabilă de ordin n în $U \cap A$ şi $F^{(n)}$ este derivabilă în x_0 sau echivalent F este derivabilă $U \cap A$ şi F este derivabilă de ordin n în x_0. In acest caz F' este continuă în x_0 şi deci din $F'(x_0) \neq 0$ deducem, micşorînd eventual pe U, că $F'(x) \neq 0$ pe $U \cap A$. Din faptul că F este derivabilă pe $U \cap A$ rezultă că există un interval deschis V, $y_0 \in V$ astfel încît $F(U \cap A) = V \cap B$, F^{-1} este continuă în orice punct din $V \cap B$ şi

$$(F^{-1})'(y) = \frac{1}{F'(F^{-1}(y))} \qquad (\forall)\ y \in V \cap B.$$

Afirmaţia rezultă acum din propoziţia precedentă, aplicată funcţiilor derivabile de ordin n în x_0 şi respectiv y_0 date de $g(x) = \frac{1}{F'(x)}$ şi $f(y) = F^{-1}(y)$, întrucît avem

$$(F^{-1})^{(n+1)}(y_0) = ((F^{-1})')^{(n)}(y_0) = (g \circ f)^{(n)}(y_0)$$

Exerciţii

1. Să se arate că pentru orice $n\in\mathbb{N}$ şi $x\in\mathbb{R}$ avem

$$(\sin)^{(n)}(x) = \sin(x + n\frac{\pi}{2})$$

$$(\cos)^{(n)}(x) = \cos(x + n\frac{\pi}{2})$$

2. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definită prin

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } x\leqslant 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} & \text{dacă } x>0 \end{cases}$$

Să se arate că f este derivabilă de orice ordin pe $\mathbb{R}$.

3. Fie $f : [a,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ derivabilă de ordinul doi pe $[a,\infty)$ astfel încît $f(a)<0$, $f'(a)>0$ şi $f''(x)\geqslant 0$ $(\forall)$ $x\in[a,\infty)$. Atunci există $b\in(a,\infty)$, unic determinat astfel încît $f(b) = 0$.

4. Fie $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcţie derivabilă de ordinul doi astfel încît $f\geqslant 0$ şi $f''\leqslant 0$. Atunci f este constantă.

5. Să se calculeze

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lim(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x)}{\ln x}$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} (1 - \frac{\sin x}{x})^{e^{\frac{1}{2}}}, \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (1 - \frac{\sin x}{x})^{e^{\frac{1}{x}}}$$

6. Să se arate că

$$(\frac{x+y}{2})^n \leqslant \frac{x^n+y^n}{2} \qquad (\forall)\ x,y\in\mathbb{R}_+ \text{ şi } n\in\mathbb{N}$$

Indicaţie. Se verifică faptul că x^n este convexă.

7. Se consideră o funcţie polinomiată f de grad n. Să se arate că derivata de ordin m a funcţiei $g(x) = e^x.f(x)$ este de forma $g^{(m)}(x) = e^x f_m(x)$ unde f_m este de asemenea o funcţie polinomială de grad n. Să se arate că dacă există $x_0 \in \mathbb{R}$ cu proprietatea că $g(x_0) = 0$, $g'(x_0) = 0,\dots,g^{(n-1)}(x_0) = 0$ atunci $f(x) = \alpha(x-x_0)^n$.

8. Fie $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ o funcţie derivabilă de ordin n. Să se arate că există o funcţie polinomială P de grad $\leq n+1$ astfel încît funcţia $g : [-1, \infty) \to \mathbb{R}$ definită prin

$$g\big|_{[-1,1]} = f \text{ şi } g\big|_{[1,\infty)} = P$$

să fie de asemenea derivabilă de ordin n.

9. Să se arate că există două funcţii indefinit derivabile f,g pe $\mathbb{R}$ astfel încît $f \neq 0$, $g \neq 0$ şi $f.g = 0$.

10. Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ o funcţie indefinit derivabilă astfel încît şirul derivatelor sale $(f^{(n)})_n$ converge uniform. Să se arate că există $\alpha \in \mathbb{R}$ astfel încît

$$\lim_{n\to\infty} f^{(n)}(x) = \alpha e^x \qquad (\forall)\ x \in [a,b]$$

11. Fie $[a,b] \subset \mathbb{R}$, $a<b$ şi $\mathcal{D}([a,b])$ mulţimea funcţiilor derivabile de ordinul 2 pe $[a,b]$ cu f'' mărginită. Să se arate că pentru că pentru orice $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \leq \frac{b-a}{2}$ are loc relaţia

$$\|f'\| \leq \frac{\|f\|}{\varepsilon} + \varepsilon \|f''\| \qquad (\forall)\ f \in \mathcal{D}_2([a,b])$$

unde pentru orice funcţie mărginită g pe $[a,b]$ am notat

$\|g\| = \sup_{x\in[a,b]} |g(x)|$.

12. Fie $(f_n)_n$ un şir de funcţii derivabile de ordinul 2 pe un interval $[a,b] \subset \mathbb{R}$ astfel încît şirul $(f_n'')_n$ converge uniform şi există $x', x'' \in [a,b]$ cu $x' \neq x''$ astfel încît şirurile $(f_n(x'))_n$, $(f_n(x''))_n$ sînt convergente. Să se arate că şirurile $(f_n)_n, (f_n')_n$ converg uniform.

13. Fie $(f_n)_n$ un şir de funcţii indefinit derivabile pe un interval $[a,b] \subset \mathbb{R}$ astfel încît şirul $(f^{(2n)})_n$ al derivatelor de ordin par ale lui f este uniform convergent la o funcţie u. Să se arate că şirul $(f^{(2n+1)})_n$ al derivatelor de ordin impar ale lui f este de asemenea uniform convergent la o funcţie v. Să se arate că există $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ cu proprietatea $u = \alpha e^x + \beta e^{-x}$, $v = \alpha e^x - \beta e^{-x}$.

14. Fie f o funcţie indefinit derivabilă pe $\mathbb{R}$ astfel încît pentru orice $x \in \mathbb{R}$ există $n_x \in \mathbb{N}$ cu proprietatea $f^{(n)}(x) = 0$ pentru orice $n \geq n_x$. Să se arate că f este o funcţie polinomială.

15. Fie $f : [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcţie indefinit derivabilă astfel încît $f \geq 0$ şi $(-1)^n f^{(2n)} \geq 0$ $(\forall)$ $n \geq 1$ şi astfel încît $f^{(2n)}(0) = f^{(2n)}(\pi) = 0$. Să se arate că există $\alpha > 0$ cu proprietatea $f(x) = \alpha \sin x$ $(\forall)$ $x \in [0, \pi]$.

VIII FUNCTII REALE ANALITICE

1. Serii de puteri

2. Funcţii reale analitice

1. Serii de puteri

Definiție. Se numește serie de puteri o serie de funcții de forma $\sum_n a_n x^n$. Numărul

$$\rho := \sup \left\{ r \geqslant 0 \,\middle|\, \sum_n |a_n| r^n \text{ este convergentă} \right\}$$

se numește raza de convergență a seriei de puteri, iar intervalul $(-\rho, \rho)$, intervalul de convergență al seriei de puteri

Propoziția 1 (Cauchy-Hadamard). Raza de convergență ρ a seriei de puteri $\sum_n a_n x^n$ este dată de formula

$$\rho = \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

(cu convenția $\frac{1}{0} = +\infty$, $\frac{1}{+\infty} = 0$).

Demonstrație. Fie $0 \leqslant r < \rho$. Atunci seria $\sum_n |a_n| r^n$ este convergentă și deci

$$\overline{\lim} \left(\sqrt[n]{|a_n| r^n} \right) \leqslant 1$$

adică

$$r \leqslant \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}} .$$

Așa dar

$$0 \leqslant r < \rho \Longrightarrow r \leqslant \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

și deci

$$\rho \leqslant \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}} .$$

Reciproc dacă $0 \leq r < \dfrac{1}{\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}}$ atunci

$$\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|r^n} < 1$$

şi deci seria $\sum\limits_n |a_n| r^n$ este convergentă ceea ce implică $r \leq \rho$. Aşa dar

$$0 \leq r < \frac{1}{\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}} \Rightarrow r \leq \rho$$

şi deci

$$\frac{1}{\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}} \leq \rho .$$

Abel

<u>Propoziţia 2</u>. Fie $\sum\limits_n a_n x^n$ o serie de puteri şi ρ raza sa de convergenţă. Atunci

i) Pentru orice $x_0 \in (-\rho, \rho)$ seria numerică $\sum\limits_n a_n x_0^n$ este absolut convergentă.

ii) Pentru orice $x_0 \notin [-\rho, \rho]$ seria numerică $\sum\limits_n a_n x_0^n$ nu este convergentă.

iii) Pentru orice $0 < r < \rho$ seria de funcţii $\sum\limits_n a_n x^n$ converge uniform pe intervalul închis $[-r, r]$.

<u>Demonstraţie.</u> i) Dacă $x_0 \in (-\rho, \rho)$ avem $|x_0| < \rho$ şi deci seria $\sum\limits_n |a_n| |x_0|^n$ este convergentă adică seria $\sum\limits_n a_n x_0^n$ este absolut convergentă.

ii) Dacă $x_0 \notin [-\rho, \rho]$ atunci seria $\sum a_n x_0^n$ nu este convergentă întrucît în caz contrar am avea din criteriul rădăcinii

$$\overline{\lim_n}\sqrt[n]{|a_n x_0^n|} \leq 1$$

adică

$$|x_0| \leq \frac{1}{\overline{\lim_n} \sqrt[n]{|a_n|}} = \rho$$

ceea ce contrazice ipoteza.

iii) Fie $0 \leq r < \rho$. Atunci seria $\sum_n |a_n| r^n$ este convergentă. Pe de altă parte avem

$$|x| \leq r \Longrightarrow |a_n x^n| \leq |a_n| r^n$$

şi deci pe mulţimea $[-r,r]$ seria de funcţii $\sum_n a_n x^n$ converge uniform (termenii săi sînt majoraţi în modul de termenii unei serii numerice convergente).

Remarcă. Propoziţia precedentă justifică denumirea pentru intervalul $(-\rho, \rho)$ de interval de convergenţă al seriei de puteri $\sum_n a_n x^n$.

Corolar 3. Fie $\sum_n a_n x^n$ o serie de puteri, ρ raza sa de convergenţă şi presupunem că $\rho > 0$. Atunci funcţia definită pe $(-\rho, \rho)$ prin

$$S(x) := \sum_n a_n x^n$$

este continuă.

Propoziţia 4. Fie $\sum_n a_n x^n$ o serie de puteri. Atunci seria de puteri $\sum_n (n+1) a_{n+1} x^n$ are aceiaşi rază de convergenţă ρ ca şi seria $\sum_n a_n x^n$. Dacă $\rho > 0$ atunci funcţia $S : (-\rho, \rho) \longrightarrow \mathbb{R}$

$$S(x) := \sum_n a_n x^n$$

este derivabilă şi

$$S'(x) = \sum_n (n+1) a_{n+1} x^n .$$

Demonstrație. Avem

$$\overline{\lim_n} \sqrt[n]{(n+1)|a_{n+1}|} = \overline{\lim}(\sqrt[n]{n+1} \cdot \sqrt[n]{|a_{n+1}|}$$

$$= \overline{\lim_n} \sqrt[n]{|a_{n+1}|} = \overline{\lim_n} \sqrt[n+1]{|a_{n+1}|}$$

ceea ce arată că seriile de puteri $\sum_n a_n x^n$, $\sum_n (n+1)\, a_{n+1}\, x^n$ au aceiași rază de convergență.

Pe de altă parte dacă $\rho > 0$ atunci luînd $0 \leqslant r < \rho$ atunci seriile $\sum_n a_n x^n$ și $\sum_n (n+1) a_{n+1}\, x^n$ converg uniform pe $[-r,r]$ și cum

$$(n+1) a_{n+1}\, x^n = (a_{n+1}\, x^{n+1})'$$

rezultă că funcția $S(x) = \sum_n a_n\, x^n$ este derivabilă pe $[-r,r]$ și avem

$$x \in [-r,r] \Rightarrow S'(x) = \sum_n (n+1)\, a_{n+1}\, x^n$$

Cum r este arbitrar $< \rho$ deducem că S este derivabilă pe $(-\rho, \rho)$ și are loc egalitatea

$$x \in (-\rho, \rho) \Rightarrow S'(x) = \sum_n (n+1)\, a_{n+1}\, x^n = \sum_{n \geqslant 1} n\, a_n\, x^{n-1}$$

Corolar 5. Fie $\sum_n a_n\, x^n$ o serie de puteri cu raza de convergență $\rho > 0$. Atunci suma acestei serii S reprezintă pe $(-\rho, \rho)$ o funcție derivabilă de orice ordin și avem

$$x \in (-\rho, \rho) \Longrightarrow S^{(p)}(x) = \sum_{n \geqslant p} n(n-1)\ldots(n-p+1)\, x^{n-p}$$

Propoziția 6. Fie $\sum_n a_n x^n$, $\sum_n b_n\, x^n$ două serii de puteri cu razele de convergență strict pozitive. Presupunem că există un șir $(x_n)_n \longrightarrow 0$ cu $x_n \neq 0$ astfel încît

$$\sum_n a_n x_k^n = \sum_n b_n x_k^n \qquad (\forall)\ k\in\mathbb{N}$$

Atunci $a_n = b_n$ $(\forall)$ $n\in\mathbb{N}$.

Demonstrație. Presupunem că există $n_0\in\mathbb{N}$ astfel încît $a_n = b_n$ $(\forall)$ $n<n_0$ și $a_{n_0} \neq b_{n_0}$. Fie $r_0>0$ astfel încît $(-r_0,r_0)$ să fie inclus în intersecția intervalelor de convergență ale celor două serii de puteri. Avem

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=n_0}^{\infty} (a_n-b_n)\, x^n =$$

$$= x^{n_0}\Big(\sum_{n=n_0}^{\infty} (a_n-b_n)\, x^{n-n_0}\Big)$$

Pe de altă parte seria de puteri

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} (a_n-b_n)\, x^{n-n_0}$$

este convergentă pentru orice $x\in\mathbb{R}$ cu $|x|<r$ și deci suma acestei serii φ este continuă pe intervalul $(-r_0,r_0)$. Intrucît prin ipoteză

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_k^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x_k^n \qquad (\forall)\ k\in\mathbb{N}$$

deducem că

$$\varphi(x_k) = \sum_{n=n_0}^{\infty} (a_n-b_n)\, x_k^{n-n_0} = 0 \qquad (\forall)\ k\in\mathbb{N}$$

și deci din faptul că $x_k \longrightarrow 0$ avem $\varphi(0) = 0$ adică $a_{n_0}-b_{n_0} = 0$ ceea ce contrazice definiția lui n_0. Prin urmare $a_n = b_n$ oricare ar fi $n\in\mathbb{N}$.

47

2. Funcții reale analitice

Definiție. Fie $a,b\in\overline{\mathbb{R}}$, $a<b$ și $f:(a,b)\longrightarrow\mathbb{R}$ o funcție indefinit derivabilă. Pentru orice $x_0\in(a,b)$ seria de puteri $\sum_n \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}x^n$ se numește seria Taylor asociată funcției f în x_0.

Funcția f se numește analitică dacă pentru orice $x_0\in(a,b)$ există $r_0>0$ astfel încît seria Taylor asociată funcției f în x_0 are raza de convergență $\geqslant r_0$ și în plus

$$x\in(a,b)\ ,\ |x-x_0|<r_0 \Longrightarrow f(x)=\sum_n \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

Propoziția 7. Fie $\sum_n a_n x^n$ o serie de puteri cu raza de convergență $\rho>0$. Atunci funcția

$$S:(-\rho,\rho)\longrightarrow\mathbb{R},$$

dată de suma acestei serii de puteri este analitică. In plus dacă $x_0\in(-\rho,\rho)$ atunci raza de convergență a seriei Taylor asociată lui S în x_0 este $\geqslant \rho-|x_0|$ și

$$|x-x_0|<\rho \Longrightarrow S(x)=\sum_n \frac{S^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

Demonstrație. Fie $x_0\in(-\rho,\rho)$ și $0\leqslant r<\rho-|x_0|$. Atunci $0\leqslant r+|x_0|<\rho$ și deci seria numerică

$$\sum_n |a_n|(r+|x_0|)^n$$

este convergentă. Dezvoltînd binomul $(r+|x_0|)^n$ avem

$$\sum_n |a_n|(|x_0|^n+C_n^1|x_0|^{n-1}r+\ldots+C_n^p|x_0|^{n-p}r^p+\ldots+r^n)$$

și deci pentru orice $p\in\mathbb{N}$, seria cu termeni pozitivi

$$\sum_{n \geq p} C_n^p \, |a_n| \, |x_0|^{(n-p)} \, r^p$$

este convergentă şi avem pentru orice $m \in \mathbb{N}$

$$\sum_{p+q \leq m} C_{p+q}^p \, |a_{p+q}| \, |x_0|^q \, r^p \leq \sum_n |a_n| (r + (x_0)^p) .$$

De aici şi din

$$\sum_{n \geq p} C_n^p \, a_n \, x_0^n = \frac{S^{(p)}(x_0)}{p!}$$

$$\left| \frac{S^{(p)}(x_0)}{p!} \right| \leq \sum_{n \geq p} C_n^p \, |a_n| \, |x_0^n|$$

rezultă că seria

$$\sum_n \frac{|S^{(p)}(x_0)|}{p!} \, r^p$$

este convergentă. Aşa dar seria Taylor asociată lui S în x_0 are raza de convergenţă $\geq \rho - |x_0|$.

Pe de altă parte dacă $x \in (|x_0| - \rho, \ \rho - |x_0|)$ atunci $|x - x_0| < \rho$ şi deci

$$\sum_p \frac{S^{(p)}(x_0)}{p!} (x - x_0)^p = \sum_p \left(\sum_{n \geq p} C_n^p \, a_n \, x_0^{n-p} (x - x_0)^p \right) =$$

$$\sum_n a_n \left[x_0^n + C_n^1 \, x_0^{n-1} (x - x_0) + \ldots + C_n^p \, x_0^{n-p} (x - x_0)^p + \ldots + (x - x_0)^n \right]$$

$$= \sum_n a_n \, x^n = S(x).$$

<u>Corolar</u> 8. Fie $\sum_n a_n x^n$ o serie de puteri cu raza de convergenţă $\rho > 0$ şi S suma acestei serii pe intervalul $(-\rho, \rho)$. Atunci pentru orice $x_0 \in \mathbb{R}$ funcţia $x \to S(x - x_0)$ este analitică pe $(x_0 - \rho, x_0 + \rho)$.

<u>Demonstrație.</u> Dacă $y_0 \in (x_0 - \rho, x_0 + \rho)$ atunci $y_0 - x_0 \in (-\rho, \rho)$ și deci luînd $r_0 \in R_+$, $r_0 < \rho - (y_0 - x_0)$ avem

$$|z - (y_0 - x_0)| < r_0 \Longrightarrow S(z) = \sum_n \frac{S^{(n)}(y_0 - x_0)}{n!} (z - (y_0 - x_0))^n$$

Notînd $f(x) = S(x - x_0)$ avem

$$f^{(p)}(y_0) = S^{(p)}(y_0 - x_0) \qquad (\forall)\ p \in N$$

și deci

$$|x - y_0| < r_0 \Longrightarrow |(x - x_0) - (y_0 - x_0)| < r_0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow f(x) = S(x - x_0) = \sum_n \frac{S^{(n)}(y_0 - x_0)}{n!} ((x - x_0) - (y_0 - x_0))^n$$

$$= \sum_n \frac{f^{(n)}(y_0)}{n!} (x - y_0)^n$$

19 <u>Propoziția 9.</u> Fie $f, g : (a,b) \longrightarrow R$ analitice. Atunci $f+g$, $f \cdot g$, f' sînt analitice. Dacă în plus $f(x) \neq 0$ atunci $1/f$ analitică.

<u>Demonstrație.</u> Fie $x_0 \in (a,b)$ și $r_0 > 0$ astfel încît $(x_0 - r_0, x_0 + r_0) \subset (a,b)$ și

$$|x - x_0| < r_0 \Longrightarrow \begin{array}{l} f(x) = \sum_n \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \\ g(x) = \sum_n \frac{g^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n . \end{array}$$

De aici rezultă

$$|x - x_0| < r_0 \Longrightarrow (f+g)(x) = \sum_n \frac{(f+g)^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

$$|x-x_0| < r_0 \Longrightarrow (f.g)(x) = \sum_n \left(\frac{\sum_{p=0}^{n} C_n^p \frac{f^{(p)}(x_0)}{p!} \frac{g^{(n-p)}(x_0)}{(n-p)!}}{n!} (x-x_0)^n \right)$$

$$= \sum_n \frac{(f.g)^n(x_0)}{n!} (x-x_0)^n$$

$$|x-x_0|<r_0 \Longrightarrow f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(f')^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n$$

ceea ce arată că $f+g$ şi fg şi f' sînt analitice.

Presupunem că $f(x) \neq 0$ pentru orice $x \in (a,b)$ şi fie $x_0 \in (a,b)$ şi $r_0 > 0$ astfel încît $(x_0-r_0,\ x_0+r_0) \subset (a,b)$ şi

$$|x - x_0| \leqslant r_0 \Longrightarrow f(x) = \sum_n \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n.$$

Există atunci o serie de puteri $\sum_n a_n x^n$ cu proprietatea

$$\sum_n a_n x^n . \sum_n \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} x^n = 1 .$$

Intr-adevăr va trebui ca

$$a_0 f(x_0) = 1, \qquad a_0 = \frac{1}{f(x_0)}$$

şi pentru orice $n \geqslant 1$

$$a_0 \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + a_1 \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!} + \dots + a_{n-1} \frac{f(x_0)}{1!} + a_n f(x_0) = 0$$

ceea ce permite determinarea inductivă a şirului $(a_n)_n$ ţinînd seama că $f(x_0) \neq 0$.

Pe de altă parte din $(f \cdot \frac{1}{f}) = 1$ rezultă că, pentru $n \geq 1$, avem

$$C_n^0 \frac{1}{f(x_0)} \cdot f^{(n)}(x_0) + C_n^1 \left(\frac{1}{f}\right)'(x_0)\, f^{(n-1)}(x_0) + \dots$$

$$+ C_n^n \left(\frac{1}{f}\right)^{(n)}(x_0)\, f(x_0) = 0$$

şi deci
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(n-k)}(x_0)}{(n-k)!} \cdot \frac{1}{k!} \left(\frac{1}{f}\right)^{(k)}(x_0) = 0$$

ceea ce arată că $a_k = \frac{1}{k!} \left(\frac{1}{f}\right)^{(k)}(x_0)$.

Pentru a încheia demonstraţia va fi suficient să arătăm că seria de puteri $\sum_n a_n x^n$ are raza de convergenţă strict pozitivă.

Din relaţia

$$a_0 \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + a_1 \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!} + \dots + a_n f(x_0) = 0$$

adevărată pentru $n \geq 1$ deducem

$$|a_n| \leq \frac{1}{|f(x_0)|} \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| \frac{|f^{(n-k)}(x_0)|}{(n-k)!} .$$

Intrucît seria $\sum_n \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} r_0^n$ este convergentă rezultă că există $M > 0$ astfel încît

$$\frac{|f^{(n)}(x_0)|}{n!} r_0^n < M \qquad (\forall)\ n \in N$$

şi deci există $0 < r_1 < r_0$ astfel încît

$$\frac{|f^{(n)}(x_0)|}{n!} r_1^n < \frac{1}{2^n} |f(x_0)| \qquad (\forall)\ n \geq 1.$$

$$|a_0| = \frac{1}{|f(x_0)|} \leq \frac{1}{r_1}$$

De aici deducem inductiv că

$$|a_n| \leq \frac{1}{r_1^{n+1}} \qquad (\forall)\ n \geq 1.$$

Intr-adevăr avem

$$|a_1| = \frac{1}{|f(x_0)|} \cdot |a_0| \cdot |f'(x_0)| \leq \frac{1}{r_1^2}$$

Presupunînd că avem

$$|a_p| \leq \frac{1}{r_1^{p+1}} \qquad (\forall)\ p \leq n$$

deducem

$$|a_{n+1}| \leq \frac{1}{|f(x_0)|} \sum_{k=0}^{n} |a_k| \frac{|f^{(n+1-k)}(x_0)|}{(n+1-k)!} \leq$$

$$\leq \frac{1}{|f(x_0)|} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{r_1^{k+1}} \cdot \frac{|f(x_0)|}{2^{n+1-k} r_1^{n+1-k}} \leq \frac{1}{r_1^{n+2}}.$$

Aşa dar

$$|a_n| \leq \frac{1}{r_1^{n+1}} \qquad (\forall)\ n \geq 1$$

şi deci seria de puteri

$$\sum_n a_n x^n$$

are raza de convergenţă strict pozitivă ($> r_1$).

48' **Propoziția lo.** Fie $a,b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a<b$ și $f,g:(a,b) \to \mathbb{R}$ analitice astfel încît mulțimea

$$\{x \in (a,b) \mid f(x) = g(x)\}$$

are un punct de acumulare în (a,b). Atunci $f = g$.

<u>Demonstrație.</u> Fie $A = \{x \in (a,b) \mid f(x) = g(x)\}$. Prin ipoteză există $x_0 \in A' \cap (a,b)$. Vom arăta că pentru un punct $x_0 \in A' \cap (a,b)$ există $r>0$ astfel încît

$$(x_0-r,\ x_0+r) \subset (a,b)$$

și

$$x \in (x_0-r,\ x_0+r) \Longrightarrow f(x) = g(x)\ .$$

Fie pentru aceasta $r>0$ cu $(x_0-r,\ x_0+r) \subset (a,b)$ și

$$x \in (x_0-r,\ x_0+r) \Longrightarrow f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n\ ,$$

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{n}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n\ .$$

Intrucît există un șir $(x_n)_n$ din (a,b), $x_n \to x_0$ cu $x_n \neq x_0$ $(\forall)$ $n \in \mathbb{N}$ astfel încît $f(x_n) = g(x_n)$ deducem că $x_n - x_0 \to 0$ și $x_n - x_0 \neq 0$ $(\forall)$ $n \in \mathbb{N}$ și

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x_k-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(x_0)}{n!}(x_k-x_0)^n$$

pentru orice $k \in \mathbb{N}$. Din propoziția 6 rezultă că

$$f^{(n)}(x_0) = g^{(n)}(x_0) \qquad (\forall)\ n \in \mathbb{N}$$

şi deci

$$x \in (x_0 - r,\ x_0 + r) \Longrightarrow f(x) = g(x).$$

Fie acum B mulţimea punctelor $x \in (a,b)$ cu proprietatea că există $r_x > 0$ astfel încît

$$(x - r_x,\ x + r_x) \subset (a,b)$$

şi

$$y \in (x - r_x,\ x + r_x) \Longrightarrow f(y) = g(y) .$$

Din consideraţiile precedente rezultă că B este nevidă întrucît conţine orice punct $x_0 \in A' \cap (a,b)$. Din definiţia lui B rezultă că B este deschisă. Pe de altă parte avem evident

$$\overline{B} \cap (a,b) \subset A' \cap (a,b) \subset B$$

Punînd $C = (a,b) \setminus B$ deducem, din relaţia precedentă

$$\overline{B} \cap C = \emptyset$$

Pe de altă parte întrucît B este deschisă şi

$$B \cap C = \emptyset$$

atunci $B \cap \overline{C} = \emptyset$. Aşa dar B şi C sînt separate şi

$$(a,b) = B \cup C.$$

Intrucît $B \neq \emptyset$ iar (a,b) este conexă rezultă $C = \emptyset$ adică $B = (a,b)$ şi deci

$$x \in (a,b) \Longrightarrow f(x) = g(x)$$

<u>Propoziţia 11</u>. Fie $a,b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a < b$ şi $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$, o funcţie indefinit derivabilă. Atunci condiţia necesară şi suficientă pentru ca f să fie analitică este ca pentru orice $x_0 \in (a,b)$ să existe $r_0 > 0$

astfel încît $(x_0-r_0, x_0+r_0)\subset(a,b)$ şi

$$n\in N\ ,\ |x-x_0|<r_0 \Longrightarrow |f^{(n)}(x)| \leqslant \frac{n!}{r_0^{n+1}}$$

Demonstrație. Presupunem că f este analitică şi fie $x_0\in(a,b)$. Atunci există $r>0$ astfel încît $(x_0-r, x_0+r)\subset(a,b)$ şi

$$x\in(x_0-r,\ x+r) \Longrightarrow f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\ (x-x_0)^n .$$

De aici rezultă că

$$x\in(x_0-r,\ x_0+r)\Longrightarrow f^{(p)}(x) = \sum_{n=p} \frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{n!}\ f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n,$$

Alegem $0<r_1<r$. Deoarece seria

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|f^{(n)}(x_0)|}{n!}\ r_1^n$$

este convergentă rezultă că există $M>0$ astfel încît

$$\frac{|f^{(n)}(x_0)|}{n!}\ r_1^n \leqslant M \quad (\forall)\ n\in N$$

De aici deducem că

$$x\in(x_0-r_1,\ x_0-r_1)\Longrightarrow |f^{(p)}(x)| \leqslant M\sum_{n=p}^{\infty} n(n-1)\ldots(n-p+1)\ \frac{|x-x_0|^{n-p}}{r_1^n}$$

$$\leqslant \frac{M}{r_1^p}\cdot\sum_{n=p} n(n-1)\ldots(n-p+1).\ \left(\frac{|x-x_0|}{r_1}\right)^{n-p} =$$

$$= \frac{M}{r_1^p}\left(\sum_{n=0}^{\infty} t^n\right)^{(p)}\left(\frac{|x-x_0|}{r_1}\right) = \frac{M}{r_1^p}\left(\frac{1}{1-t}\right)^{(p)}\left(\frac{|x-x_0|}{r_1}\right) =$$

$$= \frac{M}{r_1^p}\cdot\frac{p!}{\left(1-\frac{|x-x_0|}{r_1}\right)^{p+1}}$$

şi deci punînd

$$r_o = \min\left(\frac{r_1}{2}, \frac{1}{2M}\right) .$$

avem

$$|x-x_o| < r_o \Longrightarrow \frac{|x-x_o|}{r_1} < \frac{1}{2} .$$

De aici deducem,

$$|x-x_o|<r_o \Longrightarrow \frac{M}{r_1^p} \frac{1}{\left(1 - \frac{|x-x_o|}{r_1}\right)^{p+1}} \leqslant \frac{M}{r_1^p \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{p+1}} \leqslant \frac{1}{r_o^{p+1}}$$

$$|x-x_o|<r_o \Longrightarrow |f^{(p)}(x)| \leqslant \frac{p!}{r_o^{p+1}} \qquad (\forall)\ p\in N .$$

Reciproc presupunem că pentru orice $x_o \in (a,b)$ există $r_o > 0$ astfel încît $(x_o-r_o,\ x_o+r_o) \subset (a,b)$ şi

$$x\in(x_o-r_o,\ x_o+r_o) \Longrightarrow |f^{(n)}(x)| \leqslant \frac{n!}{r_o^{n+1}} ,(\forall)\ n\in N$$

De aici rezultă în particular că

$$\frac{|f^{(n)}(x_o)|}{n!} \leqslant \frac{1}{r_o^{n+1}}$$

şi deci că seria de puteri

$$\sum_n \frac{f^{(n)}(x_o)}{n!} x^n$$

are raza de convergenţă $\geqslant r_o$. Pe de altă parte pentru $x\in(x_o-r_o, x_o+r_o)$ şi $n\in N$ există x_n între x_o şi x astfel încît

$$f(x) - \sum_{k=o}^{n} \frac{f^{(k)}(x_o)}{k!} (x-x_o)^k = \frac{(x-x_o)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_n) .$$

Din
$$\frac{\left|f^{(n+1)}(x_n)\right|}{(n+1)!} \leqslant \frac{1}{r_0^{n+2}}$$

rezultă că pentru $|x-x_0|<r_0$ avem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x-x_0|^{n+1}}{r_0^{n+1}} = 0$$

şi deci

$$\lim_{n} \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot f^{(n+1)}(x_n) = 0,$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n,$$

adică f este analitică pe (a,b).

<u>Propoziţia 12</u>. Fie D un interval deschis din $\mathbb{R}$ şi $f : D \to \mathbb{R}$ o funcţie indefinit derivabilă pe D astfel încît există $r>0$ cu proprietatea că pentru orice $a\in D$ seria de puteri $\sum_{n=0} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} X^n$ are raza de convergenţă $\geqslant r$. Atunci f este analitică pe D. Mai mult dacă $D=(\alpha,\beta)$ atunci f este restricţia la (α,β) a unei funcţii analitice pe $(\alpha-r, \beta+r)$.

<u>Demonstraţie</u>. Intrucît pentru fiecare $a\in D$ raza de convergenţă a seriei $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} X^n$ este $\geqslant r$ atunci rezultă că

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{\left|f^{(n)}(a)\right|}{n!}} \leqslant \frac{1}{r}$$

şi deci pentru orice $\rho < \min(r,1), \rho>0$ există un rang $n_{a,\rho}\in\mathbb{N}$ astfel încît

$$\left|f^{(n)}(a)\right| < \frac{n!}{\rho^{n+1}} \qquad (\forall)\ n \geqslant n_{a,\rho}\ .$$

Notăm pentru $m\in\mathbb{N}$

$$M_{m,\rho} = \bigcap_{n\geq m}\left\{a\in D \mid |f^{(n)}(a)| \leqslant \frac{n!}{\rho^{n+1}}\right\}$$

Evident $M_{m,\rho}$ este o mulţime închisă şi din consideraţiile precedente rezultă că

$$\bigcup_{m\in\mathbb{N}} M_{m,\rho} = D \quad .$$

Intrucît D are proprietatea Baire deducem că mulţimea deschisă

$$\bigcup_{m} \overset{\circ}{\widehat{M_{m,\rho}}}$$

este o parte densă în D. Dacă U este un interval deschis astfel încît există $m\in\mathbb{N}$ cu $U\subset M_{m,\rho}$ atunci pe U avem

$$\left|f^{(n)}(x)\right| \leqslant \frac{n!}{\rho^{n+1}} \qquad (\forall)\ n\geq m \quad .$$

Rezultă că restricţia lui f la U îndeplineşte criteriul din propoziţia 11 şi deci este analitică pe U. Vom arăta că

$$\bigcup_{m} \overset{\circ}{\widehat{M_{m,\rho/2}}} = D \quad .$$

şi deci f este analitică pe D.

Considerăm mulţimea închisă în D, $F := D\setminus\bigcup_{m}\overset{\circ}{\widehat{M_{m,\rho/2}}}$.
Presupunem că $F\neq\emptyset$. Din

$$F\subset \bigcup_{m\in\mathbb{N}} M_{m,\rho}$$

şi din faptul că F are de asemenea proprietatea Baire rezultă că există un interval V cu $\overline{V}\subset D$ astfel încît $F\cap V\neq\emptyset$ şi $m\in\mathbb{N}$ astfel încît $F\cap\overline{V}\subset M_{m,\rho}$. Fără a restrînge generalitatea putem presupune că lungimea lui V este $\leqslant \frac{\rho}{2}$.

Considerăm acum un interval (a,b) componentă conexă a mulţimii $V \setminus F$. Prin construcţie pentru orice $c \in (a,b)$ avem $(a,b) \subset \subset (c-r, c+r)$. Vom arăta că

$$x \in (a,b) \Longrightarrow |f^{(n)}(x)| \leq \frac{n!}{(\delta/2)^{n+1}} \qquad (\forall)\ n \geq m .$$

Intr-adevăr considerînd funcţia definită pe $(a-r,\ a+r)$ prin

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$$

observăm că φ este analitică pe $(a-r,\ a+r)$ şi

$$\varphi^{(n)}(a) = f^{(n)}(a) \qquad (\forall)\ n \geq 0 .$$

Pe de altă parte dacă $c \in (a,b)$ atunci întrucît f este analitică pe (a,b) rezultă că f coincide pe $(a,b) \cap (c-r, c+r) = (a,b)$, cu funcţia analitică definită pe $(c-r, c+r)$ prin

$$\psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x-c)^n .$$

De aici rezultă că

$$\psi^{(n)}(a) = f^{(n)}(a) = \varphi^{(n)}(a) \qquad (\forall)\ n \geq 0$$

ceea ce implică faptul că $\psi(x) = f(x) = \varphi(x)$ pentru $x \in [a,b]$.
Deci pentru orice $k \in \mathbb{N}$ şi $x \in (a,b)$ avem

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)\ n(n-1)\ldots(n-k+1)}{n!} \cdot (x-a)^{n-k}$$

şi deci pentru $k \geq m$

$$|f^{(k)}(x)| \leq \sum_{n=k}^{\infty} \frac{|f^{(n)}(a)|\ n(n-1)\ldots(n-k+1)}{n!} \left(\frac{\delta}{2}\right)^{n-k} \leq$$

$$\leq \frac{1}{\rho^{k+1}} \sum_{n=k}^{\infty} (\tfrac{1}{2})^{n-k}\, n(n-1)\ldots(n-k+1) =$$

$$= \frac{1}{\rho^{k+1}} \left(\frac{1}{1-x}\right)^{(k)} \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{k!}{\rho^{k}} \cdot 2^{k+1} .$$

Intrucît componenta conexă (a,b) a mulţimii deschise $V \setminus F$ este arbitrară deducem că pentru orice $x \in V$ avem

$$k \geq m \Longrightarrow |f^{(k)}(x)| \leq \frac{k!}{\rho^{k+1}}\, 2^{k+1} \leq \frac{k!}{(\rho/2)^{k+1}}$$

ceea ce implică faptul că $V \subset \overset{\circ}{\widehat{M_{m,\ \rho/2}}}$; contradicţie!

Ultima parte a afirmaţiei rezultă observînd că dacă $D=(\alpha,\beta)$ şi a este un punct suficient de aproape de α atunci funcţia analitică f coincide pe intervalul (α,a) cu restricţie la (α,a) a funcţiei analitice pe intervalul $(a-r,a+r)$ definită prin

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^{n}$$

Analog dacă b este suficient de aproape de β atunci f coincide pe intervalul (b,β) cu restricţia la (b,β) a funcţiei analitice pe $(b-r,b+r)$, definită prin

$$\psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(b)}{n!} (x-b)^{n}$$

<u>Corolarul 13</u>. Fie D un interval deschis din $\mathbb{R}$ şi

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R}$$

o funcţie indefinit derivabilă. Atunci f este analitică dacă şi numai dacă pentru orice compact $K \subset D$ există un număr $\rho_k > 0$ astfel încît raza de convergenţă a seriei de puteri $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} x^{n}$ să fie $\geq \rho_k$ oricare ar fi $a \in K$.

<u>Exerciţii</u>

1. Să se arate că funcţiile e^x, $\sin x$, $\cos x$ sînt analitice pe R.

2. Fie $f : (a,b) \to R$ o funcţie derivabilă astfel încît derivata sa f' este analitică. Să se arate că f este de asemenea analitică.

3. Să se arate că $\ln x$ este analitică pe R_+^*. Să se scrie seria Taylor asociată lui $\ln x$ în punctul $x = 1$.

4. Să se arate că $\operatorname{arctg} x$ este analitică pe intervalul $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Are loc relaţia

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots$$

5. Să se arate că $\arcsin x$, $\arccos x$ sînt analitice pe intervalul $(-1,1)$. Să se găsească seria Taylor asociată acestor funcţii în punctul $x = 0$.

6. Să se arate că dacă funcţiile

$$f : (a,b) \to (c,d), \quad g : (c,d) \to R$$

sînt analitice atunci $g \circ f$ este analitică.

7. Să se arate că dacă funcţia

$$f : (a,b) \to (c,d)$$

este bijectivă, analitică şi $f'(x) \neq 0$ pentru orice $x \in (a,b)$ atunci inversa ei f^{-1} este de asemenea analitică.

8. Se consideră funcţia

$$f : R \to R$$

unde

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{dacă } x > 0 \\ 0 & \text{dacă } x \leq 0 \end{cases}$$

Să se arate că f este indefinit derivabilă, este analitică pe $(-\infty, 0)$ şi pe $(0, \infty)$ dar nu este analitică pe R.

9. Fie $f,g : (a,b) \to R$ analitice. Să se arate că dacă $f.g = 0$ atunci $f \equiv 0$ sau $g \equiv 0$.

10. Fie $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ analitică $f \neq 0$ şi $x_0 \in (a,b)$, astfel încît $f(x_0) = 0$. Atunci există $n_0 \in \mathbb{N}$, $n_0 \geq 1$ şi $g : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ analitică, $g(x_0) \neq 0$ astfel încît

$$f(x) = (x-x_0)^{n_0} \cdot g(x)$$

11. Să se arate că există o funcţie analitică f pe $(-1,1)$ astfel încît

$$x \neq 0 \Longrightarrow \ln(1-x) = x \cdot f(x)$$

Să se calculeze seria Taylor asociată lui f în punctul $x = 0$.

12. Se consideră funcţia $\zeta : (1,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definită prin

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$

Să se arate că ζ este analitică (este funcţia zeta lui Riemann)

Să se arate că au loc relaţiile

i) $$\zeta(x) = \lim_{m\to\infty} \prod_{p\in P_m} \left(1 - \frac{1}{p^x}\right)^{-1}$$

$$\ln \zeta(x) = - \lim_{m\to\infty} \left(\sum_{p\in P_m} \left(1 - \frac{1}{p^x}\right)\right)$$

unde pentru $m \in \mathbb{N}^+$, P_m este mulţimea numerelor prime $\leq m$.

ii) $$\zeta^2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n)}{n^x}$$

unde $\tau(n)$ este numărul divizorilor lui n.

iii) $$\frac{1-2^{1-x}}{1-2^{-x}} \zeta(x-1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^x} \qquad n>2$$

unde $a(n)$ este cel mai mare divizor impar al lui n.

iv) $$\frac{\zeta'(x)}{\zeta(x)} = - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ell(n)}{n^x}$$

unde $\ell(n) = \ln p$ dacă p este unicul divizor prim a lui n și $\ell(n)=0$ dacă n are cel puțin doi divizori primi.

v) $$\frac{\zeta(x-1)}{\zeta(x)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{n^x}, \quad x > 2$$

unde $\varphi(n)$ este numărul numerelor $< n$ și prime cu n.

IX. FUNCTII INTEGRABILE RIEMANN

1. Integrabilitatea Riemann. Criteriul lui Darboux.
2. Operaţii algebrice cu funcţii integrabile Riemann. Criteriul lui Lebesgue.
3. Proprietăţi ale funcţiilor integrabile Riemann. Proprietăţi de medie; Formula Leibniz-Newton; Formula schimbării de variabilă.
4. Serii trigonometrice.
5. Integrale improprii.

1. FUNCTII INTEGRABILE RIEMANN (1826-1866)

<u>Definiţie</u>. Se consideră un interval închis $[a,b]$ în $\mathbb{R}$. Se numeşte <u>diviziune</u> a lui $[a,b]$ un sistem ordonat de puncte $d := (x_i)_{0 \leq i \leq n}$ $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Numărul

$$\nu(d) := \sup \{ (x_{i+1} - x_i) \mid i = 0, 1, \ldots, n-1 \}$$

se numeşte norma diviziunii d. O diviziune d se spune că este <u>mai fină</u> decît o diviziune δ dacă orice punct al diviziunii δ este şi punct al diviziunii d şi se notează acest fapt prin $\delta \prec d$. Relaţia $\prec$ este o relaţie de ordine în mulţimea diviziunilor lui $[a,b]$.

Dacă $d := (x_i)_{0 \leq i \leq n}$ este o diviziune a lui $[a,b]$ atunci un sistem de puncte $\xi = (\xi_i)_{0 \leq i \leq n-1}$ cu proprietatea $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ se numeşte <u>sistem de puncte intermediare</u> asociat diviziunii d. Mulţimea sistemelor de puncte intermediare asociate diviziunii d se va nota cu $\xi(d)$.

<u>Remarcă 1</u>. Dacă A este o mulţime finită de puncte din intervalul $[a,b]$ care conţine pe a şi b, atunci există o unică diviziune a lui $[a,b]$ avînd punctele din A drept puncte de diviziune. Această diviziune notată d_A se obţine scriind punctele lui A în ordine crescătoare. Dacă A şi B sînt mulţimile de puncte ale diviziunilor d şi respectiv δ atunci $\delta \prec d$ dacă şi numai dacă $B \subset A$. Dacă d şi δ sînt două diviziuni ale lui $[a,b]$ atunci există (în raport cu ordinea $\prec$) supremumul între d şi δ notat $d \cup \delta$ şi există infimumul între d şi δ notat $d \cap \delta$. Diviziunea $d \cup \delta$ (resp. $d \cap \delta$) este diviziunea determinată de reuniunea (resp. intersecţia) mulţimilor punctelor diviziunilor d şi δ.

2. Fie $\varepsilon > 0$. Atunci există o diviziune d a lui $[a,b]$ cu $\nu(d) < \varepsilon$. Intr-adevăr, se alege $n \in \mathbb{N}$ astfel încît $\frac{b-a}{n} < \varepsilon$. Atunci

sistemul de puncte $(x_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ unde

$$x_k = a + \frac{k}{n}(b-a)$$

este o diviziune d cu $\nu(d) = \frac{b-a}{n} < \varepsilon$.

3. Fie $(d_k)_{1 \leqslant k \leqslant p}$ un sistem finit de diviziuni ale lui $[a,b]$. Atunci pentru orice $\varepsilon > 0$ există o diviziune d mai fină ca fiecare din diviziunile d_k şi cu norma mai mică ca ε. Intr-adevăr, se consideră o diviziune δ cu $\nu(\delta) < \varepsilon$ şi se ia apoi diviziunea

$$d = d_1 \cup \ldots \cup d_n \cup \delta$$

care va satisface cerinţele formulate.

<u>Definiţie</u>. Fie $[a,b]$ un interval din $\mathbb{R}$ cu $a<b$ şi $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $d = (x_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ o diviziune a lui $[a,b]$ şi $\xi = (\xi_i)_{0 \leqslant i \leqslant n-1} \in \xi(d)$

Numărul

$$\sigma_d(f;\xi) := \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i)$$

se numeşte <u>suma Riemann</u> asociată funcţiei f, diviziunii d şi sistemului de puncte intermediare ξ.

Dacă f este mărginită atunci numărul

$$S_d(f) = \sum_{i=0}^{n-1} M_i(x_{i+1}-x_i) \text{ (resp. } s_d(f) = \sum_{i=0}^{n-1} m_i(x_{i+1}-x_c))$$

unde $M_i = \sup\{f(x) \mid x \in [x_i, x_{i+1}]\}$ (resp. $m_i = \inf\{f(x) \mid x \in [x_i, x_{i+1}]\}$) se numeşte <u>sumă Darboux superioară</u> (resp. <u>suma Darboux inferioară</u>) asociată funcţiei f şi diviziunii d.

<u>Remarcă</u>. Dacă f,g sînt funcţii reale pe $[a,b]$ d este o diviziune a lui $[a,b]$ şi $\xi \in \xi(d)$ atunci pentru orice $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ avem

$$\sigma_d(\alpha f + \beta g; \xi) = \alpha\,\sigma_d(f;\xi) + \beta\,\sigma_d(g,\xi)$$

$$f \leqslant g \Longrightarrow \sigma_d(f;\xi) \leqslant \sigma_d(g;\xi)$$

$$f_n \longrightarrow f \Longrightarrow \sigma_d(f_n;\xi) \longrightarrow \sigma_d(f,\xi)$$

Dacă în plus f este mărginită atunci

$$s_d(f)=\inf_{\xi} \sigma_d(f;\xi) \leq \sup_{\xi} \sigma_d(f,\xi) = S_d(f)$$

$$S_d(-f) = -s_d(f), \quad s_d(-f) = -S_d(f)$$

$$s_d(\alpha f) = \alpha\, s_d(f), \quad S_d(\alpha f) = \alpha\, S_d(f) \; (\forall)\; \alpha \geq 0$$

$$s_d(f+g) \geq s_d(f) + s_d(g), \quad S_d(f+g) \leq S_d(f) + S_d(g)$$

Propozitia 1. Fie $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ şi d, δ diviziune ale lui $[a,b]$. Atunci

i) $d \prec \delta \Longrightarrow s_d(f) \leq s_\delta(f), \quad S_d(f) \geq S_\delta(f)$

ii) $s_d(f) \leq S_\delta(f)$

Demonstraţie. i) Fie $d \prec \delta$ şi $\delta = (x_i)_{0 \leq i \leq n}$. Atunci există un sistem strict crescător de numere naturale $(k_j)_{0 \leq j \leq m}$ astfel încît $k_0=0$, $k_m=n$ şi astfel încît $d = (x_{k_j})_{0 \leq j \leq m}$.

Punînd $m'_j = \inf\{f(x) \mid x \in [x_{k_j}, x_{k_{j+1}}]\}$, $m_i = \inf\{f(x) \mid x \in [x_i, x_{i+1}]\}$

avem

$$s_d(f) = \sum_{j=0}^{m-1} m'_j\,(x_{k_{j+1}} - x_{k_j}) =$$

$$= \sum_{j=0}^{m-1} m'_j \Big(\sum_{i=k_j}^{k_{j+1}-1} (x_{i+1} - x_i)\Big) = \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{i=k_j}^{k_{j+1}-1} m'_j (x_{i+1} - x_i) \leq$$

$$\leq \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{i=k_g}^{k_{j+1}-1} m_i (x_{i+1} - x_i) = \sum_{i=0}^{n} m_i (x_{i+1} - x_i) = s_\delta(f)$$

adică $s_d(f) \leq s_\delta(f)$. Relaţia $S_d(f) \geq S_\delta(f)$ rezultă din

$$S_d(f) = -s_d(-f) \geq -s_\delta(-f) = S_\delta(f)$$

ii) Dacă d şi δ sînt arbitrare avem

$$s_d(f) \leq s_{d \cup \delta}(f) \leq S_{d \cup \delta}(f) \leq S_\delta(f)$$

Remarcă. Dacă d este diviziunea $\{a,b\}$ atunci orice altă diviziune δ a lui $[a,b]$ este mai fină ca d şi deci

$$m(b-a) \leq s_\delta(f) \leq S_\delta(f) \leq M(b-a)$$

Cda. 105/989 Fasc. 15

unde $m = \inf \{f(x) \mid x \in [a,b]\}$, $M = \sup \{f(x) \mid x \in [a,b]\}$.

Definiţie. O funcţie $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ se numeşte integrabilă Riemann dacă există un număr real $I(f)$ astfel încît să aibe loc următoarea proprietate: pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\eta_\varepsilon > 0$ astfel încît să avem $|\sigma_d(f,\xi) - I(f)| < \varepsilon$ oricare ar fi diviziunea d cu $\nu(d) < \eta_\varepsilon$ şi oricare ar fi sistemul de puncte intermediare ξ asociat lui d. Numărul $I(f)$ este unic determinat, se numeşte integrala (Riemann) a lui f pe intervalul $[a,b]$ şi se notează prin $\int_a^b f(x)dx$.

Propoziţia 2. Dacă $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ este integrabilă Riemann atunci f este mărginită.

Demonstraţie. Fie $\alpha := \int_a^b f(x)dx$. Atunci pentru $\varepsilon = 1$ există $\eta > 0$ astfel încît

$$|\sigma_d(f;\xi) - \alpha| < 1$$

pentru orice diviziune d a lui $[a,b]$ cu $\nu(d) < \eta$ şi pentru orice sistem ξ de puncte intermediare asociat lui d.

Alegem o diviziune $d = (x_i)_{1 \le i \le n}$ cu $\nu(d) < \eta$. Avem

$$\alpha - 1 \le \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i) \le \alpha + 1$$

pentru orice sistem ξ asociat lui d. Fixînd punctele intermediare $\xi_0, \xi_1, \dots \xi_{j-1}\, \xi_{j+1}, \dots \xi_{n-1}$ şi lăsînd pe ξ_j să parcurgă intervalul $[x_j, x_{j+1}]$ avem pentru $x \in [x_j, x_{j+1}]$.

$$A' = \alpha - 1 - \sum_{i \ne j} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i) \le f(x)(x_{j+1} - x_j) \le \alpha + 1 - \sum_{i \ne j} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i) = A''$$

şi deci

$$\frac{A'}{x_{j+1} - x_j} \le f(x) \le \frac{A''}{x_{j+1} - x_j}$$

ceea ce arată că f este mărginită pe $[x_j, x_{j+1}]$. Deoarece j este arbitrar deducem că f este mărginită.

Propoziţia 3. Fie $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ o funcţie integrabilă Riemann. Atunci pentru orice şir $(d_n)_n$ de diviziuni ale lui $[a,b]$ cu $\nu_d(d_n) \to 0$ pentru orice şir $(\xi^{(n)})_n$ cu $\xi^{(n)} \in \xi(d_n)$ avem

$$\sigma_{d_n}(f; \xi^{(n)}) \to \int_a^b f(x)dx$$

$$s_{d_n}(f) \to \int_a^b f(x)dx$$

$$S_{d_n}(f) \to \int_a^a f(x)dx$$

In plus avem

$$\sup_d s_d(f) = \int_a^b f(x)dx = \inf_d S_d(f)$$

Demonstrație. Fie $(d_n)_n$ un șir de diviziuni ale lui $[a,b]$ cu $\nu(d_n) \to 0$ și pentru fiecare n fie $\xi^{(n)} \in \xi(d_n)$. Pentru $\varepsilon > 0$ alegem $\eta_\varepsilon > 0$ astfel încît

$$\nu(d) < \eta_\varepsilon,\ \xi \in \xi(d) \Longrightarrow \left|\sigma_d(f; \xi) - \int_a^b f(x)dx\right| < \varepsilon$$

Intrucît $\nu(d_n) \to 0$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încît

$$n \geq n_\varepsilon \Longrightarrow \nu(d_n) < \eta_\varepsilon$$

și deci

$$n \geq n_\varepsilon \Longrightarrow \left|\sigma_{d_n}(f; \xi^{(n)}) - \int_a^b f(x)dx\right| < \varepsilon$$

ceea ce arată că $\sigma_{d_n}(f; \xi^{(n)}) \to \int_a^b f(x)dx$

Pe de altă parte din

$$s_{d_n}(f) = \inf_{\xi} \sigma_{d_n}(f, \xi)\ , \quad S_{d_n}(f) = \sup_{\xi} \sigma_{d_n}(f, \xi)$$

deducem

$$n \geq n_\varepsilon \Longrightarrow \left|s_{d_n}(f) - \int_a^b f(x)dx\right| \leq \varepsilon$$

$$n \geq n_\varepsilon \Longrightarrow \left|S_{d_n}(f) - \int_a^b f(x)dx\right| \leq \varepsilon$$

și deci

$$s_{d_n}(f) \to \int_a^b f(x)dx\ ,\quad S_{d_n}(f) \to \int_a^b f(x)dx$$

Fie acum d o diviziune arbitrară a lui $[a,b]$. Din $\nu(d_n) \to 0$ rezultă $\nu(d_n \cup d) \to 0$ şi

$$s_d(f) \leq s_{d_n \cup d} \leq S_{d_n \cup d} \leq S_d(f)$$

De aici deducem, trecînd la limită,

$$s_d(f) \leq \int_a^b f(x)dx \leq S_d(f)$$

şi în plus

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} s_{d_n}(f) \leq \sup_d s_d(f) \leq \int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx \leq \inf_d S_d(f) \leq \lim_{n\to\infty} S_{d_n}(f) = \int_a^b f(x)dx$$

<u>Propoziţia 4</u>. (Criteriul lui Cauchy) Fie $f: [a,b] \to \mathbb{R}$. Condiţia necesară şi suficientă ca f să fie integrabilă Riemann este că pentru orice $\varepsilon > 0$ să existe $\eta_\varepsilon > 0$ astfel încît

$$|\sigma_d(f;\xi) - \sigma_\delta(f;\xi')| < \varepsilon$$

pentru orice diviziunii d şi δ ale lui $[a,b]$ cu $\nu(d) < \eta_\varepsilon$, $\nu(\delta) < \eta_\varepsilon$ şi pentru orice $\xi \in \xi(d)$, $\xi' \in \xi(\delta)$.

<u>Demonstraţie</u>. Presupunem f integrabilă Riemann şi fie $\alpha = \int_a^b f(x)dx$. Atunci pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\eta_\varepsilon > 0$ astfel încît

$$\nu(d) < \eta_\varepsilon,\ \xi \in \xi(d) \implies |\sigma_d(f,\xi) - \alpha| < \varepsilon/2.$$

De aici rezultă că

$$\begin{matrix}\nu(d) < \eta_\varepsilon,\ \nu(\delta) < \eta_\varepsilon \\ \xi \in \xi(d),\ \xi' \in \xi(\delta)\end{matrix} \implies |\sigma_d(f,\xi) - \sigma_\delta(f,\xi')| \leq |\sigma_d(f,\xi) - \alpha| + |\alpha - \sigma_\delta(f,\xi')| < \varepsilon.$$

Reciproc, să presupunem că este îndeplinită condiţia din enunţ şi fie $(d_n)_n$ un şir de diviziuni ale lui $[a,b]$ cu $\nu(d_n) \to 0$. Alegem pentru fiecare $n \in N$, $\xi^{(n)} \in \xi(d_n)$. Vom arăta mai întîi că $(\sigma_{d_n}(f;\xi^{(n)}))_n$ este un şir convergent. Intr-adevăr, pentru $\varepsilon > 0$ există η_ε astfel încît

$$\left.\begin{array}{l} \nu(d) < \eta_\varepsilon,\ \nu(\delta) < \eta_\varepsilon \\ \xi \in \xi(d),\ \xi' \in \xi(\delta) \end{array}\right\} \Longrightarrow |\sigma_d(f;\xi) - \sigma_\delta(f;\xi')| < \varepsilon .$$

Din $\nu(d_n) \to 0$ deducem că există $n_\varepsilon \in N$ cu proprietatea $n \geq n_\varepsilon \Longrightarrow \nu(d_n) < \eta_\varepsilon$ şi deci

$$n,m \geq n_\varepsilon \Longrightarrow |\sigma_{d_n}(f;\xi^{(n)}) - \sigma_{d_m}(f;\xi^{(m)})| < \varepsilon$$

ceea ce arată că şirul $(\sigma_{d_n}(f,\xi^{(n)}))_n$ este un şir Cauchy şi deci convergent. Punînd $\mathcal{L} := \lim\limits_n \sigma_{d_n}(f,\xi^{(n)})$ avem

$$\left.\begin{array}{l} \nu(d) < \eta_\varepsilon,\ n \geq n_\varepsilon \\ \xi \in \xi(d) \end{array}\right\} \Longrightarrow |\sigma_d(f,\xi) - \sigma_{d_n}(f,\xi^{(n)})| < \varepsilon$$

şi deci, trecînd la limită după n,

$$\left.\begin{array}{l} \nu(d) < \eta_\varepsilon \\ \xi \in \xi(d) \end{array}\right\} \Longrightarrow |\sigma_d(f,\xi) - \mathcal{L}| \leq \varepsilon$$

ceea ce arată că f este integrabilă Riemann.

<u>Definiţie</u>. Pentru orice funcţie mărginită $f: [a,b] \to R$ numărul

$$\sup_d s_d(f) \quad (\text{resp. } \inf_d S_d(f))$$

se numeşte <u>integrala Darboux inferioară</u> (resp. <u>integrala Darboux superioară</u>) a lui f şi se notează prin

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx \quad (\text{resp. } \overline{\int_a^b} f(x)dx) .$$

<u>Remarcă</u>. 1) Intrucît pentru orice două diviziuni d, δ ale lui $[a,b]$ avem

$$m(b-a) \leq s_d(f) \leq S_\delta(f) \leq M(b-a)$$

unde $m = \inf\{f(x) \mid x\in[a,b]\}$, $M = \sup\{f(x) \mid x\in[a,b]\}$ rezultă să avem

$$m(b-a) \leqslant s_d(f) \leqslant \int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b f(x)dx \leqslant S_\delta(f) \leqslant M(b-a)$$

2) Din propoziţia 3) rezultă că dacă f este integrabilă Riemann atunci

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx$$

3) Intrucît pentru orice diviziune d a lui $[a,b]$ avem $s_d(-f) = -S_d(f)$ deducem relaţia

$$\underline{\int_a^b} (-f)dx = -\overline{\int_a^b} f\,dx\,,\quad \overline{\int_a^b} (-f)dx = -\underline{\int_a^b} f\,dx$$

Propoziţia 5. Fie $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ o funcţie mărginită. Atunci pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\eta_\varepsilon > 0$ astfel încît

$$\nu(d) < \eta_\varepsilon \Longrightarrow S_d(f) - \overline{\int_a^b} f(x)dx < \varepsilon,\quad \underline{\int_a^b} f(x)dx - s_d(f) < \varepsilon .$$

Demonstraţie. A doua inegalitate va rezulta din prima înlocuind pe f cu $-f$. Fie $\varepsilon > 0$. Din definiţia integralei Darboux superioare rezultă că există o diviziune d_o a lui $[a,b]$ astfel încît

$$S_{d_o}(f) - \overline{\int_a^b} f(x)dx < \varepsilon/2$$

Fie $d_o = (x_n^{(o)})_{o\leqslant i\leqslant n_o}$. Alegem $\eta_\varepsilon > 0$ astfel încît

$$\eta_\varepsilon < \inf\left\{x_{i+1}^{(o)} - x_i^{(o)} \mid i=o,1,\dots,n_o-1\right\}$$

$$4\cdot\|f\|\cdot n_o\cdot\eta_\varepsilon < \varepsilon$$

unde $\|f\| := \sup\left\{|f(x)| \mid x\in[a,b]\right\}$. Vom arăta că

$$\nu(d) < \eta_\varepsilon \Longrightarrow S_d(f) - \overline{\int_a^b} f(x)dx < \varepsilon$$

Intr-adevăr, considerăm o diviziune d a lui $[a,b]$ cu $\nu(d) < \eta_\varepsilon$ şi fie $d' = d\cup d_o$. Avem

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx \leq S_{d'}(f) \begin{matrix} \leq S_{d_o}(f) \\ \leq S_d(f) \end{matrix}$$

şi deci

$$S_d(f) - \overline{\int_a^b} f(x)dx = S_{d'}(f) - \overline{\int_a^b} f(x)dx + S_d(f) - S_{d'}(f) \leq$$

$$\leq S_{d_o}(f) - \overline{\int_a^b} f(x)dx + S_d(f) - S_{d'}(f) \leq \frac{\varepsilon}{2} + S_d(f) - S_{d'}(f).$$

Va fi deci suficient să arătăm că

$$S_d(f) - S_{d'}(f) \leq \varepsilon/2$$

Presupunem $d = (x_k)_{o \leq k \leq n}$. Intrucît $\nu(d) < \eta_\varepsilon$ şi

$$\eta_\varepsilon < x^o_{k+1} - x^o_k \quad (\forall) \quad k = o,1,\ldots,n_o-1$$

deducem că în orice interval $[x_k, x_{k+1}]$ nu poate exista decît cel mult un punct al diviziunii d_o. Intrucît diviziunea d' este mai fină ca diviziunea d_o rezultă că

$$S_d(f) - S_{d'}(f) = \sum_{i \in I'} M_i(x_{i+1}-x_i) - \sum_{i \in I'} M''(x_{i+1}-y_i) -$$

$$- \sum_{i \in I'} M'_i(y_i - x_i) = \sum_{i \in I'} (M_i - M''_i)(x_{i+1}-y_i) + \sum_{i \in I'} (M_i - M'_i)(y_i - x_i)$$

unde I' este mulţimea indicilor $i \in \{o,1,2,\ldots n\}$ astfel încît în intervalul deschis (x_i, x_{i+1}) există un punct şi anume y_i al diviziunii d_o şi unde

$$M_i = \sup\{f(x) \mid x \in [x_i, x_{i+1}]\}$$
$$M'_i = \sup\{f(x) \mid x \in [x_i, y_i]\}$$
$$M''_i = \sup\{f(x) \mid x \in [y_i, x_{i+1}]\}.$$

Evident, punctele y_i sînt puncte ale diviziunii d_o şi deci numărul elementelor lui I este cel mult n_o.

Intrucît $x_{i+1}-x_i < \eta_\varepsilon$ şi $M_i - M'_i \leq 2\,\|f\|$, $M_i - M''_c \leq 2\,\|f\|$ deducem că

$$S_d(f) - S_{d'}(f) \leq 2\,\|f\| \cdot \eta_\varepsilon \cdot n_o < \varepsilon/2$$

Propoziţia 6. (Criteriul lui Darboux (1842-1917)). Fie $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ o funcţie mărginită. Atunci următoarele afirmaţii sînt echivalente:

i) f este integrabilă Riemann

ii) $\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx$

iii) pentru orice $\varepsilon > 0$ există o diviziune d a lui $[a,b]$ cu proprietatea $S_d(f) - s_d(f) < \varepsilon$.

iv) pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\eta_\varepsilon > 0$ astfel încît

$$\nu(d) < \eta_\varepsilon \Longrightarrow S_d(f) - s_d(f) < \varepsilon$$

Demonstraţie. i) $\Longrightarrow$ ii) rezultă din propoziţia 3); ii) $\Longleftrightarrow$ iv rezultă din propoziţia 5); iv) $\Longrightarrow$ iii) trivială; iii) $\Longrightarrow$ i). Fie $\varepsilon > 0$ şi d_0 o diviziune a lui $[a,b]$ cu

$$S_{d_0}(f) - s_{d_0}(f) < \varepsilon/2$$

Pe de altă parte, din propoziţia 5) există $\eta_\varepsilon > 0$ astfel încît

$$\nu(d) < \eta_\varepsilon \Rightarrow S_d(f) - \overline{\int_a^b} f(x)dx < \varepsilon/4, \quad \underline{\int_a^b} f(x)dx - s_d(f) < \varepsilon/4$$

De aici deducem că

$$\begin{matrix}\nu(d) < \eta_\varepsilon \\ \nu(\delta) < \eta_\varepsilon\end{matrix} \Longrightarrow S_d(f) - s_\delta(f) \leq S_d(f) - \overline{\int_a^b} f(x)dx + \underline{\int_a^b} f(x)dx - s_\delta(f) +$$

$$+ \overline{\int_a^b} f(x)dx - \underline{\int_a^b} f(x)dx \leq \varepsilon/4 + \varepsilon/4 + S_{d_0}(f) - s_{d_0}(f) < \varepsilon$$

şi deci

$$\begin{matrix}\nu(d) < \eta_\varepsilon, \ \nu(\delta) < \eta_\varepsilon \\ \xi \in \Xi(d) \ \xi' \in \Xi(\delta)\end{matrix} \Longrightarrow |\sigma_d(f,\xi) - \sigma_\delta(f,\xi')| \leq S_d(f) - s_\delta(f) < \varepsilon$$

adică f este integrabilă Riemann conform cu criteriul lui Cauchy din propoziţia 4.

2. Operații algebrice cu funcții integrabile Riemann. Criteriul lui Lebesgue de integrabilitate Riemann.

Propoziția 7. Fie f,g integrabile Riemann pe $[a,b]$. Atunci $f+g$, $|f|$ sînt integrabile Riemann pe $[a,b]$ şi

$$\int_a^b (f+g)\,dx = \int_a^b f\,dx + \int_a^b g\,dx$$

In plus, dacă există $\alpha > 0$ astfel încît $|f| \geq \alpha$ atunci $1/f$ este de asemenea integrabilă Riemann pe $[a,b]$.

Demonstrație. Fie $(d_n)_n$ un şir de diviziuni ale lui $[a,b]$ cu $\nu(d_n) \longrightarrow 0$. Avem

$$\overline{\int_a^b}(f+g)dx = \lim_{n\to\infty} S_{d_n}(f+g) \leq \lim_{n\to\infty} S_{d_n}(f) + \lim_{n\to\infty} S_{d_n}(g) = \overline{\int_a^b} f\,dx +$$

$$+ \overline{\int_a^b} g(x)dx = \int_a^b f\,dx + \int_a^b g\,dx$$

$$\underline{\int_a^b}(f+g)dx = \lim_{n\to\infty} s_{d_n}(f+g) \geq \lim_{n\to\infty} s_{d_n}(f) + \lim_{n\to\infty} s_{d_n}(g) =$$

$$= \underline{\int_a^b} f\,dx + \underline{\int_a^b} g\,dx = \int_a^b f\,dx + \int_a^b g\,dx$$

şi deci

$$\overline{\int_a^b}(f+g)dx = \underline{\int_a^b}(f+g)dx = \int_a^b f(x) + \int_a^b g\,dx$$

ceea ce implică faptul că $f+g$ este integrabilă Riemann şi

$$\int_a^b (f+g)dx = \int_a^b f\,dx + \int_a^b g\,dx.$$

Pentru orice diviziune $d = (x_i)_{0\leq i\leq n}$ a lui $[a,b]$ avem

$$\sup_{x\in[x_k,x_{k+1}]} (fg)(x) - \inf_{x\in[x_k,x_{k+1}]} (fg)(x) = \sup_{x,y\in[x_k,y_k]} ((fg)(x) - (fg)(y)) =$$

$$= \sup_{xy\in[x_k,y_k]} \left[(f(x) - f(y))\, g(x) + \quad + (g(x) - f(y))f(y)\right]$$

$$\leqslant \sup_{x,y\in[x_k,y_{k+1}]}(f(x) - f(y)) \cdot \|g\| + \sup_{x,y\in[x_k,y_{k+1}]} (g(x) - g(y)) \cdot \|f\| \leqslant$$

$$\leqslant (\sup_{x\in[x_k,x_{k+1}]} f(x) - \inf_{x\in[x_k,x_{k+1}]} f(x)) \|g\| + (\sup_{x\in[x_k,x_{k+1}]} g(x) - \inf_{x\in[x_k,x_{k+1}]} g(x)) \|f\|$$

şi deci

$$S_d(fg) - s_d(fg) \leqslant (S_d(f) - s_d(f)) \|g\| + (S_d(g) - s_d(g)) \|f\| \; -$$

ceea ce arată că fg este integrabilă Riemann, utilizînd criteriul lui Darboux.

De asemenea, din

$$\sup_{x\in[x_k x_{k+1}]} |f(x)| - \inf_{x\in[x_k,x_{k+1}]} |f(x)| \leqslant \sup_{x,y\in[x_k,x_{k+1}]} (|f(x)| - |f(y)|) \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{x,y\in[x_k,x_{k+1}]} |f(x) - f(y)| = \sup_{x,y\in[x_k,x_{k+1}]} (f(x) - f(y))$$

$$\sup_{x\in[x_k,x_{k+1}]} \frac{1}{f(x)} - \inf_{x\in[x_k,x_{k+1}]} \frac{1}{f(x)} \leqslant \sup_{x,y\in[x_k,x_{k+1}]} \left(\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(y)}\right) =$$

$$= \sup_{x,y\in[x_k,x_{k+1}]} \frac{f(x)-f(y)}{f(x).f(y)} \leqslant \frac{\sup\limits_{x\in[x_k,x_{k+1}]} f(x) - \inf\limits_{x\in[x_k,x_{k+1}]} f(x)}{\alpha^2}$$

deducem relaţiile

$$S_d(|f|) - s_d(|f|) \leqslant S_d(f) - s_d(f)$$

$$S_d(\tfrac{1}{f}) - s_d(\tfrac{1}{f}) \leqslant \frac{1}{\alpha^2} (S_d(f - s_d(f))$$

şi deci, din criteriul lui Darboux, rezultă că $|f|$ şi $1/f$ sînt integrabile Riemann.

Propoziţia 8. Orice funcţie continuă şi orice funcţie monotonă pe $[a,b]$ este integrabilă Riemann.

Demonstraţie. Fie $f: [a,b] \to R$ continuă şi fie $\varepsilon > 0$. Intrucît f este uniform continuă rezultă că există $\eta_\varepsilon > 0$ astfel încît

$$x', x'' \in [a,b], \ |x'-x''| < \eta_\varepsilon \ \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Dacă $d = (x_i)_{0 \leq i \leq n}$ este o diviziune a lui $[a,b]$ cu normă mai mică ca η_ε, atunci avem

$$S_d(f) - s_d(f) = \sum_{x=0}^{n-1} (M_i - m_i)(x_{i+1} - x_i)$$

unde $M_i = \sup_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x)$, $m_i = \inf_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x)$. Deoarece $x_{i+1} - x_i < \eta_\varepsilon$ rezultă

$$M_i - m_i \leqslant \sup_{x,y \in [x_i, x_{i+1}]} (f(x) - f(y)) \leq \frac{\varepsilon}{b-a}$$

şi deci

$$S_d(f) - s_d(f) < \varepsilon$$

Integrabilitatea Riemann a lui f rezultă din criteriul lui Darboux.

Fie acum $f: [a,b] \to R$ o funcţie crescătoare şi fie $\varepsilon > 0$. Dacă $d = (x_i)_{0 \leq i \leq n}$ este o diviziune a lui $[a,b]$ cu $\nu(d) < \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a) + 1}$ avem

$$S_d(f) = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1})\,(x_{i+1}-x_i), \quad s_d(f) = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\,(x_{i+1}-x_i)$$

şi deci

$$S_d(f) - s_d(f) = \sum_{i=0}^{n-1} (f(x_{i+1}) - f(x_i))\,(x_{i+1}-x_i) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)+1} \sum_{i=0}^{n-1} (f(x_{i+1})-f(x_i)) < \varepsilon.$$

De aici şi din criteriul lui Darboux rezultă că f este integrabilă Riemann.

Definiţie. O mulţime $A \subset R$ se numeşte neglijabilă Lebesgue dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există un şir de intervale deschise (a_n, b_n) astfel încît $A \subset \bigcup_n (a_n, b_n)$ şi $\sum_n (b_n - a_n) < \varepsilon$.

Remarcă. 1) Dacă A este neglijabilă Lebesgue şi $B \subset A$ atunci B este neglijabilă Lebesgue.

2) Dacă $(A_n)_n$ este un şir de mulţimi neglijabile Lebesgue, atunci $\bigcup_n A_n$ este de asemenea neglijabilă Lebesgue. Intr-adevăr, fie $\varepsilon > 0$. Atunci există pentru fiecare $n \in N$ un şir $(a_m^{(n)}, b_m^{(n)})_{m \in N}$ de intervale deschise astfel încît

$$A_n \subset \bigcup_m (a_m^{(n)}, b_m^{(n)})$$

şi

$$\sum_m (b_m^{(n)} - a_m^{(n)}) < \frac{\varepsilon}{2^m}$$

Intrucît mulţimea de intervale deschise $((a_m^{(n)}, b_m^{(n)}))_{n,m}$ este numărabilă ea poate fi reprezentată ca termenii unui şir $((a_n, b_n))_n$ de intervale deschise. Evident că

$$\sum_{n=1}^{p} (b_n - a_n) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2^2} + \dots + \frac{\varepsilon}{2^n} + \dots = \varepsilon$$

şi

$$\bigcup_n A_n \subset \bigcup_{k \in N} (a_k, b_k)$$

ceea ce arată că $\bigcup_n A_n$ este neglijabilă la Lebesgue.

3) Orice mulţime finită sau numărabilă este neglijabilă Lebesgue.

4) O mulţime A este neglijabilă Lebesgue dacă şi numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există un şir de intervale închise $([a_n,b_n])$ cu $\sum_n (b_n-a_n) < \varepsilon$ şi $A \subset \bigcup_n [a_n,b_n]$.

Propoziţia 9. (Criteriul lui Lebesgue [1875-1941]). Fie $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcţie mărginită. Atunci f este integrabilă Riemann dacă şi numai dacă mulţimea punctelor în care f nu este continuă este neglijabilă Lebesgue.

Demonstraţie. Presupunem că f este integrabilă Riemann şi pentru $a > 0$ fie $D_a = \{x \in [a,b] \mid \omega(f;x) \geq a\}$ unde $\omega(f;x)$ reprezintă oscilaţia lui f în punctul x. Pentru orice $\varepsilon > 0$ există o diviziune $d = (x_i)_{0 \leq i \leq n}$ a lui $[a,b]$ astfel încît

$$S_d(f) - s_d(f) < \varepsilon \cdot a$$

Punînd $M_i = \sup\limits_{x \in [x_i,x_{i+1}]} f(x)$, $m_i = \inf\limits_{x \in [x_i,x_{i+1}]} f(x)$ avem

$$S_d(f) - s_d(f) = \sum_{i=0}^{n-1} (M_i-m_i)(x_{i+1}-x_i)$$

Punînd $I = \{i \in \{0,1,\dots n-1\} \mid (x_i,x_{i+1}) \cap D_a \neq \emptyset\}$ avem

$$D_a \subset \bigcup_{i \in I} [x_i,x_{i+1}]$$

şi

$$\sum_{i \in I} a\,(x_{i+1}-x_i) \leq \sum_{i \in I} (M_i-m_i)(x_{i+1}-x_i) < \varepsilon\ a,$$

$$\sum_{i \in I} (x_{i+1}-x_i) < \varepsilon.$$

Aşadar, D_a este neglijabilă Lebesgue. Întrucît mulţimea punctelor de discontinuitate ale funcţiei f este mulţimea

$$\{x \in [a,b] \mid \omega(f;x) > 0\} = \bigcup_n D_{\frac{1}{n}}$$

deducem că această mulţime este neglijabilă Lebesgue.

Reciproc, presupunem că mulţimea

$$D = \{x \in [a,b] \mid \omega(f,x) > 0\}$$

este neglijabilă Lebesgue şi fie $\varepsilon > 0$. Fie acum $\alpha > 0$ astfel încît $\alpha(b-a) < \varepsilon/2$. Punem

$$D_\alpha = \{x \in [a,b] \mid \omega(f,x) \geq \alpha\}$$

Deoarece $D_\alpha \subset D$ rezultă că D_α este neglijabilă Lebesgue şi deci există un şir $((a_n,b_n))_n$ de intervale deschise cu

$$D_\alpha \subset \bigcup_n (a_n,b_n) \quad \text{şi} \quad \sum_n (b_n-a_n) < \frac{\varepsilon}{4\|f\|+1}$$

Din faptul că D_α este închisă şi deci compactă rezultă că există $n_0 \in N$ astfel încît

$$D_\alpha \subset \bigcup_{k=1}^{n_0} (a_k,b_k)$$

Considerăm acum o diviziune d a lui $[a,b]$ care să conţină printre punctele sale de diviziune şi punctele a_k, b_k cu $k \in \{1,2,\dots n_0\}$. Fie $d = (x_i)_{0 \leq i \leq n}$. Punînd $M_i = \sup\{f(x) \mid x \in [x_i,x_{i+1}]\}$, $m_i = \inf\{f(x) \mid x \in [x_i,x_{i+1}]\}$ avem

$$S_d(f) - s_d(f) = \sum_{i=0}^{n-1} (M_i-m_i)(x_{i+1}-x_i) \leq$$

$$\sum_{i\in I'} (M_i-m_i)(x_{i+1}-x_i) + 2\|f\| \sum_{i\in I''} (x_{i+1}-x_i)$$

unde

$$I'' = \{i \in \{0,1,\dots n-1\} \mid (x_i,x_{i+1}) \subset \bigcup_{k=1}^{n_0} (a_k,b_k)\}$$

$$I' = \{i \in \{0,1,\dots n-1\} \mid i \notin I''\}$$

Dar

$$\sum_{i\in I''} (x_{i+1}-x_i) \leq \sum_{k=1}^{n} (b_k-a_k) < \frac{\varepsilon}{4\|f\|+1}.$$

Pe de altă parte din

$$i \in I' \Longrightarrow M_i - m_i < \alpha$$

rezultă

$$\sum_{i \in I}(M_i - m_i)(x_{i+1} - x_i) < \alpha\,(b-a) < \varepsilon/2$$

şi deci

$$S_d(f) - s_d(f) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

De aici rezultă utilizînd criteriul lui Darboux că f este integrabilă Riemann.

3. Proprietăţi ale funcţiilor integrabile Riemann

Propoziţia lo. Fie $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ şi $c \in (a,b)$. Atunci f este integrabilă Riemann pe $[a,b]$ dacă şi numai dacă f este integrabilă Riemann pe $[a,c]$ şi f este integrabilă Riemann pe $[c,b]$. In plus, are loc formula

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Demonstraţie. Intrucît orice funcţie integrabilă pe un interval este mărginită pe acel interval va fi suficient să considerăm f mărginită. Fie acum d_n' (resp. d_n'') o diviziune a intervalului $[a,c]$ (resp. $[c,b]$) cu $\nu(d_n') < \frac{1}{n}$ (resp. $\nu(d_n'') < \frac{1}{n}$). Notăm cu d_n diviziunea lui $[a,b]$ obţinută reunind punctele de diviziune din d_n' şi d_n''. Avem evident $\nu(d_n) < \frac{1}{n}$ şi pe de altă parte

$$S_{d_n}(f) = S_{d_n'}(f) + S_{d_n''}(f)$$

$$s_{d_n}(f) = s_{d_n'}(f) + s_{d_n''}(f).$$

Trecînd la limită după n obţinem

$$\overline{\int_a^b} f\,dx = \overline{\int_a^c} f\,dx + \overline{\int_a^b} f\,dx$$

$$\underline{\int_a^b} f\,dx = \underline{\int_a^c} f\,dx + \underline{\int_c^b} f\,dx$$

De aici rezultă că f este integrabilă Riemann pe $[a,b]$ adică $\overline{\int_a^b} f\,dx = \underline{\int_a^b} f\,dx$ dacă şi numai dacă $\underline{\int_a^c} f(x)dx = \overline{\int_a^c} f(x)dx$ şi $\underline{\int_c^b} f\,dx = \overline{\int_c^b} f\,dx$ adică dacă şi numai dacă f este integrabilă Riemann pe $[a,c]$ şi $[c,b]$.

In plus, dacă f este integrabilă Riemann pe $[a,b]$ atunci avem

$$\int_a^b f\,dx = \int_a^c f\,dx + \int_c^b f\,dx$$

Propoziţia 11. Fie $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ integrabilă Riemann. Atunci funcţia F definită pe $[a,b]$ prin

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

este continuă. Mai mult, are loc relaţia

$$x < y \Longrightarrow |F(y) - F(x)| \leq \|f\| (y-x)$$

unde $\|f\| = \sup \{|f(x)| \mid x \in [a,b]\}$.

Dacă f este continuă într-un punct $x_0 \in [a,b]$ atunci F este derivabilă în x_0 şi are loc relaţia $F'(x_0) = f(x_0)$.

Demonstraţie. Avem

$$x < y \Longrightarrow |F(y) - F(x)| = \left| \int_x^y f(t)dt \right| \leq \|f\| (y-x).$$

De aici rezultă că F este continuă.

Presupunem acum că f este continuă în x_0. Atunci pentru $\varepsilon>0$ există $\eta_\varepsilon > 0$ astfel încît

$$|x-x_0|<\eta_\varepsilon \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)|<\varepsilon.$$

Avem, pentru $|x-x_0|<\eta_\varepsilon$, $x<x_0$

$$x<x_0 \Longrightarrow \int_x^{x_0} f(t)dt = \int_x^{x_0} (f(t) - f(x_0))dt + f(x_0)(x_0-x)$$

şi deci

$$x<x_0 \Longrightarrow \left| \frac{\int_x^{x_0} f(t)dt}{x_0-x} - f(x_0) \right| = \frac{\left|\int_x^{x_0} (f(t)-f(x_0))dt\right|}{x_0-x} \leqslant \varepsilon$$

şi analog

$$x_0<x \Longrightarrow \left| \frac{\int_{x_0}^{x} f(t)dt}{x-x_0} - f(x_0) \right| \leqslant \varepsilon$$

ceea ce arată că

$$F'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x-x_0} = f(x_0)$$

Propoziţia 12. Fie $f: [a,b]\to \mathbb{R}$ o funcţie integrabilă Riemann, $f\geqslant 0$ şi $\int_a^b f\, dx = 0$. Atunci $f(x_0)=0$ în orice punct x_0 în care f este continuă.

Demonstraţie. Punînd

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

avem $F(x)=0$ $(\forall)$ x şi deci dacă x_0 este un punct în care f este continuă atunci

$$f(x_0) = F'(x_0) = 0$$

Propoziţia 13. Fie f, g integrabile pe $[a,b]$ astfel încît $g \geq 0$. Atunci

$$m \int_a^b g\, dx \leq \int_a^b f\, g\, dx \leq M \int_a^b g\, dx$$

unde $M = \sup\{f(x) \mid x \in [a,b]\}$, $m = \inf\{f(x) \mid x \in [a,b]\}$.

Dacă în plus f are proprietatea lui Darboux, atunci există $\xi \in [a,b]$ astfel încît

$$\int_a^b f\, g\, dx = f(\xi) \int_a^b g\, dx$$

Demonstraţie. Avem

$$m\, g \leq f\, g \leq M\, g$$

şi deci

$$m \int_a^b g\, dx \leq \int_a^b f\, g\, dx \leq M \int_a^b g\, dx .$$

Presupunem că f are proprietatea Darboux şi că $\int_a^b g\, dx > 0$ atunci din

$$m < \int_a^b f\, g\, dx \Big/ \int_a^b g\, dx < M ,$$

deducem că există $\xi \in [a,b]$ astfel încît

$$\int_a^b f\, g\, dx \Big/ \int_a^b g\, dx = f(\xi)$$

Dacă

$$\int_a^b f\, g\, dx \Big/ \int_a^b g\, dx = M$$

atunci

$$\int_a^b (M-f)g\,dx = 0$$

şi deci din propoziţia 12 deducem că $(M-f)(x).g(x)=0$ în orice punct x de continuitate pentru $(M-f)g$. Dacă în orice astfel de punct $(M-f)(x)\neq 0$ atunci $g(x)=0$ şi deci cum această mulţime de puncte este densă rezultă că $\int_a^b g(x)dx = 0$ ceea ce contrazice ipoteza de lucru. Aşadar există $\xi\in[a,b]$ cu $f(\xi)=M$ şi deci

$$\int_a^b f\,g\,dx = f(\xi)\int_a^b g\,dx.$$

Un raţionament analog în cazul cînd

$$\int_a^b f\,g\,dx \Big/ \int_a^b g\,dx = m$$

conduce la existenţa unui punct $\xi\in[a,b]$ astfel încît $m=f(\xi)$ şi deci la relaţia

$$\int_a^b f\,g\,dx = f(\xi)\int_a^b g\,dx.$$

Dacă $\int_a^b g\,dx = 0$ atunci $\int_a^b f\,g\,dx = 0$ şi deci relaţia

$$\int_a^b f\,g\,dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx$$

are loc pentru orice $\xi\in[a,b]$.

<u>Propoziţia 14.</u> Fie $f,g : [a,b]\longrightarrow R$ funcţii integrabile Riemann cu g monotonă. Atunci există $\xi\in[a,b]$ astfel încît

$$\int_a^b f\,g\,dx = g(a)\int_a^{\xi} f\,dx + g(b)\int_{\xi}^b f\,dx.$$

Demonstrație. Presupunem, pentru a face o alegere, că g este descrescătoare. Atunci notînd $g_1 = g - g(b)$ avem g_1 este descrescătoare, $g_1 \geq 0$ și $g_1(b)=0$. Relația din enunț este echivalentă cu

$$\int_a^b f\, g_1 dx = g_1(a)\int_a^{\xi} f\, dx + g_1(b)\int_{\xi}^b f\, dx$$

adică o relație de același tip pentru g_1. Putem deci presupune în plus că $g \geq 0$ și $g(b)=0$.

Notăm cu F funcția definită pe $[a,b]$ prin

$$F(x) = \int_a^x f\, dt$$

Din propoziția 11 rezultă că F este continuă. Vom arăta că

$$g(a)m \leq \int_a^b f\, g\, dx \leq g(a)M$$

unde $M = \sup\{F(x) \mid x \in [a,b]\}$, $m = \inf\{F(x) \mid x \in [a,b]\}$. De aici și din proprietatea lui Darboux pentru $g(a)\cdot F$ deducem că există $\xi \in [a,b]$ astfel încît

$$\int_a^b f\, g\, dx = g(a)\int_a^{\xi} f\, dx$$

ceea ce va încheia demonstrația teoremei.

Fie $\varepsilon > 0$ și $d = (x_k)_{0 \leq k \leq n}$ o diviziune a lui $[a,b]$ astfel încît pentru orice $\xi \in \xi(d)$ să avem

$$\left|\int_a^b fg\, dx - \sigma_d(fg;\xi)\right| < \frac{\varepsilon}{2},\quad \sum_{k=0}^{n-1}(M_k - m_k)(x_{k+1}-x_k) < \frac{\varepsilon}{2(\|g\|+1)}$$

unde $M_k = (\sup\{f(x) \mid x \in [x_k, x_{k+1}]\}$, $m_k = \inf\{f(x) \mid x \in [x_k, x_{k+1}]$ și $\|g\| = \sup\{|f(x)| \mid x \in [a,b]\}$.

Avem

$$m_k(x_{k+1}-x_k) \leq \int_{x_k}^{x_{k+1}} f\, dx = F(x_{k+1}) - F(x_k) \leq M_k(x_{k+1}-x_k)$$

și deci

$$-\frac{\varepsilon}{2}+\int_a^b f\, g\, dx \leqslant \sum_{k=o}^{n-1} f(x_k)g(x_k)(x_{k+1}-x_k) \leqslant \sum_{k=o}^{n-1} m_k\cdot g(x_k)(x_{k+1}-x_k) +$$

$$+\sum_{k=o}^{n-1}(M_k-m_k)g(x_k)(x_{k+1}-x_k) \leqslant \sum_{k=o}^{n-1} g(x_k)(F(x_{k+1})-F(x_k))+\frac{\varepsilon}{2} =$$

$$=\sum_{k=o}^{n-1} F(x_{k+1})(g(x_k)-g(x_{k+1}) + \varepsilon/2 \leqslant g(a)\cdot M + \varepsilon/2$$

Analog

$$-\frac{\varepsilon}{2}+\int_a^b f\, g\, dx \geqslant \sum_{k=o}^{n-1} f(x_{k+1})g(x_{k+1})(x_{k+1}-x_k) \geqslant \sum_{k=o}^{n-1} M_k g(x_{k+1})(x_{k+1}-x_k) -$$

$$-\sum_{k=o}^{n-1}(M_k-m_k)g(x_{k+1})(x_{k+1}-x_k) \geqslant \sum_{k=o}^{n-1} g(x_{k+1})(F(x_{k+1}) - F(x_k) - \varepsilon/2 =$$

$$=\sum_{k=o}^{n-1} F(x_k)(g(x_k)-g(x_{k+1})) - \varepsilon/2 \geqslant g(a)\cdot m - \varepsilon/2$$

Aşadar

$$g(a)m - \varepsilon \leqslant \int_a^b f\, g\, dx \leqslant g(a)M + \varepsilon$$

şi cum ε este arbitrar deducem

$$g(a)m \leqslant \int_a^b f\, g\, dx \leqslant g(a)M$$

<u>Propoziţia 15.</u> (Formula Leibniz-Newton). Fie f o funcţie derivabilă pe $[a,b]$ astfel încît derivata sa f' este integrabilă Riemann. Atunci

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$$

Mai mult, pentru orice diviziune $d = (x_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ a lui $[a,b]$ există un sistem $\xi = (\xi_k)_{1 < k \leqslant n+1} \in \xi(d)$ astfel încît

$$\int_a^b f'(x)\,dx = \sum_{k=o}^{n-1} f'(\xi_k)(x_{k+1}-x_k)$$

Demonstrație. Fie $d=(x_k)_{1\leq k\leq n}$ o diviziune a lui $[a,b]$ și $\xi=(\xi_k)_{o\leq k\leq n-1}\in \xi(d)$ astfel încît

$$f(x_{k+1}) - f(x_k) = f'(\xi_k)(x_{k+1}-x_k)$$

De aici rezultă că

$$f(b)-f(a) = \sum_{k=o}^{n-1} f(x_{k+1})-f(x_k) = \sum_{k=o}^{n-1} f'(\xi_k)(x_{k+1}-x_k) = \sigma_d(f';\xi)$$

Afirmația rezultă alegînd un șir $(d_n)_n$ de diviziune ale lui $[a,b]$ cu $\nu(d_n)\to 0$ și observînd că

$$\int_a^b f'\,dx = \lim_n \sigma_{d_n}(f';\xi^{(n)})$$

Propoziția 16. (Formula de integrare prin părți). Fie f,g două funcții derivabile cu derivatele f', g' integrabile, atunci

$$\int_a^b f'g\,dx = (fg)(b)-(fg)(a) - \int_a^b f\,g'\,dx$$

Demonstrație. Avem din teorema precedentă

$$\int_a^b f'g\,dx + \int_a^b fg'\,dx = \int_a^b (fg)'\,dx = (fg)(b) - (fg)(a)$$

54 Propoziția 17. (Formula schimbării de variabilă). Fie f o funcție continuă pe $[a,b]$ și $g: [c,d]\to[a,b]$ o funcție derivabilă cu derivata integrabilă Riemann. Atunci

$$\int_a^b f(x)\,dx = \begin{cases} \int_c^d (f\circ g)\cdot g'\,dx & \text{dacă } g(c)=a \text{ și } g(d)=b \\ \int_c^d (f\circ g)g'\,dx & \text{dacă } g(c)=b \text{ și } g(d)=a \end{cases}$$

Demonstrație. Se consideră o funcție $F: [a,b] \to R$ derivabilă cu $F' = f$. Atunci avem

$$\int_c^d (f\circ g).g'\,dx = \int_c^d (F\circ g)'\,dx = (F\circ g)(d) - (F\circ g)(c) =$$

$$= \begin{cases} F(b) - F(a) = \int_a^b f\,dx & \text{dacă } g(c)=a \text{ şi } g(d)=b \\ F(a) - F(b) = \int_a^b f\,dx & \text{dacă } g(c)=b \text{ şi } g(d)=a \end{cases}$$

Remarcă. 1) Din demonstrație rezultă că formula schimbării de variabilă are loc pentru orice funcție integrabilă f cu condiția ca funcția $f\circ g.g'$ să fie integrabilă Riemann. şi f să posede o primitivă.

2) In general, dacă f este doar funcție integrabilă Riemann, iar g este ca în enunțul propoziției, atunci funcția $(f\circ g).g'$ îşi pierde proprietatea de a fi integrabilă Riemann.

55 Propoziția 18. Fie $(f_n)_n$ un şir de funcții integrabile Riemann pe $[a,b]$ care converge uniform la o funcție f. Atunci f este integrabilă Riemann pe $[a,b]$ şi

$$\int_a^b f\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n\,dx$$

Demonstrație. Fie $\varepsilon > 0$ şi $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încît

$$n \geq n_\varepsilon \Longrightarrow |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{4(b-a)} \quad (\forall)\ x \in [a,b]$$

De aici rezultă că dacă d este o diviziune a lui $[a,b]$ astfel încît $S_d(f_{n_\varepsilon}) - s_d(f_{n_\varepsilon}) < \varepsilon/2$ atunci din

$$S_d(f) \leq S_d(f_{n_\varepsilon}) + \varepsilon/4$$

$$s_d(f) \geq s_d(f_{n_\varepsilon}) - \varepsilon/4$$

deducem

$$S_d(f) - s_d(f) \leq S_d(f_n) - s_d(f_n) + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

De aici rezultă, utilizînd criteriul lui Darboux, că f este integrabilă Riemann.

Avem

$$n \geq \eta_\varepsilon \Longrightarrow \left| \int_a^b f\,dx - \int_a^b f_n dx \right| = \int_a^b |f-f_n|\,dx \leq \varepsilon/4$$

și deci

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n\,dx = \int_a^b f\,dx$$

Exerciţii

1. Fie $f: [0,1] \to R$ o funcţie egală cu 0 în punctele raţionale şi egală cu 1 în punctele iraţionale. Să se arate că f nu este integrabilă Riemann. Să se calculeze

$$\overline{\int_0^1} f(x)dx\ , \quad \underline{\int_0^1} f(x)dx$$

2. Fie $f: [a,b] \to R$ o funcţie integrabilă Riemann şi $g: [a,b] \to R$ o funcţie integrabilă Riemann astfel încît mulţimea $\{x \in [a,b] \mid f(x) = g(x)\}$ este densă în $[a,b]$. Să se arate că

$$\int_a^b f\,dx = \int_a^b g\,dx$$

3. Fie $f: [a,b] \to R$ o funcţie integrabilă Riemann astfel încît mulţimea $\{x \mid f(x) \geq 0\}$ este densă în $[a,b]$. Să se arate că

$$\int_a^b f\,dx \geq 0$$

4. Fie $f, g: [a,b] \to R$ funcţii integrabile Riemann astfel încît $g(x) \neq 0$ $(\forall)$ $x \in [a,b]$ şi funcţie f/g este mărginită. Atunci f/g este integrabilă Riemann pe $[a,b]$.

5. Fie $f: [c,d] \to \mathbb{R}$ integrabilă Riemann şi

$$g: [a,b] \to [c,d]$$

o aplicaţie bijectivă cu proprietatea că g este continuă şi există $\mathcal{L} > 0$ astfel încît

$$|g(x') - g(x'')| \geq \mathcal{L}\,|x'-x''| \quad (\forall)\ x', x'' \in [a,b]$$

Atunci $f \circ g$ este integrabilă Riemann pe $[a,b]$.

6. Să se arate că pentru orice $n \in \mathbb{N}$ avem

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x\,dx = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\,\frac{\pi}{2}\,; \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x\,dx = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$$

Să se determine de aici, formula lui Wallis,

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2 \frac{1}{2n+1}$$

7. Să se arate că dacă $n,m \in \mathbb{N}$ atunci

$$\int_0^1 x^m (1-x)^n dx = \frac{n!\,m!}{(n+m+1)!}$$

8. Fie $f: [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ o funcţie bijectivă astfel încît f este strict crescătoare. Atunci pentru orice $a,b > 0$ are loc relaţia

$$ab \leq \int_0^a f(x)dx + \int_0^a f^{-1}(x)dx$$

(inegalitatea lui Young).

9. Fie $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ o funcţie integrabilă Riemann astfel încît pentru orice $x \in [a,b]$ are loc relaţia

$$\int_a^x f(t)dt = 0 \ .$$

Să se arate că în orice punct x de continuitate pentru f avem $f(x) = 0$.

10. Fie $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ o funcţie integrabilă Riemann şi $g: [a,b] \to \mathbb{R}$ o funcţie astfel încît mulţimea

$$\{x \in [a,b] \mid g(x) \neq f(x)\}$$

este finită. Atunci g este integrabilă Riemann şi

$$\int_a^b g\,dx = \int_a^b f\,dx$$

11. Fie $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ o funcţie integrabilă Riemann şi $g: [a,b] \to \mathbb{R}$ o funcţie mărginită astfel încît mulţimea

$$\{x \in [a,b] \mid g(x) \neq f(x)\}$$

are un număr finit de puncte de acumulare. Atunci g este de asemenea integrabilă Riemann şi

$$\int_a^b g\,dx = \int_a^b f\,dx$$

12. Fie $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ o funcţie mărginită astfel încît pentru orice $c \in (a,b)$ funcţia $f|_{[a,c]}$ este integrabilă Riemann. Atunci f este integrabilă Riemann şi are loc relaţia

$$\int_a^b f\,dx = \lim_{\substack{c \to b \\ c < b}} \int_a^c f\,dx$$

13. Fie $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ o funcţie derivabilă de ordin n+1 astfel încît derivata $f^{(n+1)}$ de ordin n+1 a lui f este integrabilă Riemann. Atunci are loc formula

$$f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + \frac{1}{n!}\int_a^b (b-x)^n f^{(n+1)}(x)dx$$

14. Fie $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ o funcţie derivabilă de ordinul doi cu f" integrabilă Riemann. Atunci

$$\int_a^b f\,dx = \frac{b-a}{2}(f(a)+f(b)) + \int_a^b f''(x)(x-a)(x-b)dx$$

Dacă în plus f" are proprietatea Darboux, atunci există $\xi \in [a,b]$ astfel încît

$$\int_a^b f\,dx = \frac{b-a}{2}(f(a)+f(b)) - \frac{(b-a)^3}{12}f''(\xi)$$

15. Fie $f,g: [a,b] \to$ două funcţii integrabile Riemann şi $(d_n)_n$ un şir de diviziuni cu $\nu(d_n) \to 0$. Pentru fiecare diviziune $d_n = (x_k^{(n)})_{0 \le k \le p_n}$ fie

$$m_k^f \le \alpha_k^{(n)} \le M_k^f, \quad m_k^g \le \beta_k^{(n)} \le M_k^g$$

unde pentru o funcţie h pe $[a,b]$ s-a notat

$$m_k^h = \inf\left\{h(x) \mid x \in [x_k^{(n)}, x_{k+1}^{(n)}]\right\},$$

$$M_k^h = \sup\left\{h(x) \mid x \in [x_k^{(n)}, x_{k+1}^{(n)}]\right\}$$

Să se arate că

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \beta_k (x_{k+1} - x_k) = \int_a^b f\,g\,dx$$

16. Fie $(f_n)_n$ un şir de funcţii integrabile Riemann pe $[a,b]$ astfel încît

i) există $M > 0$ cu proprietatea

$$|f_n(x)| \le M \quad (\forall)\ n \in N \text{ şi } x \in [a,b]$$

ii) $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ pentru orice $n\in\mathbb{N}$

Atunci

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n \, dx = 0.$$

17. Fie $(f_n)_n$ un şir de funcţii integrabile Riemann pe $[a,b]$ care converge simplu la o funcţie integrabilă Riemann f pe $[a,b]$ şi astfel încît există $M>0$ cu proprietatea

$$|f_n(x)| \leq M \quad (\forall) \; n\in\mathbb{N} \text{ şi } x\in[a,b]$$

Să se arate că

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n \, dx = \int_a^b f \, dx .$$

4. Serii trigonometrice

Definiţie. Se numeşte serie trigonometrică o serie de funcţii de forma

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\,x) + b_n \sin(n\,x))$$

unde $a_n\in\mathbb{R}$, $b_n\in\mathbb{R}$. Coeficienţii a_n, b_n se numesc coeficienţii seriei trigonometrice. Dacă există $n_0\in\mathbb{N}$ astfel încît $a_n=b_n=0$ pentru $n\geq n_0$ atunci seria de funcţii se numeşte polinom trigonometric de rang n_0. Se spune că seria trigonometrică de coeficienţi a_n, b_n $n\in\mathbb{N}$ este convergentă (resp. absolut convergentă) dacă punînd $A_n(x) = a_n\cos(n\,x) + b_n \sin(n\,x)$ atunci seria $\sum_n A_n(x)$ este convergentă (resp. absolut convergentă).

Remarcă. 1. Dacă seria trigonometrică

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

este convergentă pentru orice $x \in [-\pi, \pi]$ atunci ea este convergentă pentru orice $x \in \mathbb{R}$ şi suma seriei reprezintă o funcţie periodică de perioadă 2π.

2. Dacă

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

este o serie trigonometrică atunci pentru orice $n \in \mathbb{N}$ suma parţială de rang n a acestei serii

$$s_n = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos(kx) + b_x \sin(kx))$$

este un polinom trigonometric de rang n şi reprezintă o funcţie periodică de perioadă 2π.

Propoziţia 19. Fie $a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$ o serie trigonometrică care converge uniform pe intervalul $[-\pi, \pi]$ la o funcţie f. Atunci avem

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx,$$

$$n \geq 1 \Longrightarrow a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x).\cos(nx)dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx.$$

Demonstraţie. Fie

$$s_n = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$$

Un calcul direct ne dă

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} s_n(x)dx = a_0 \text{ şi deci } \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\, dx = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} s_n dx = a_0$$

$$n \geq k \Longrightarrow \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} s_n(x).\cos(kx)dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} a_k \cos^2(kx)dx = a_k$$

$$n \geq k \Longrightarrow \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_n(x).\sin(kx)dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} b_k \sin^2(kx)dx = b_k$$

şi deci

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x).\cos(kx)dx = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} s_n(x).\cos(kx)dx = a_k$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)dx = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} s_n(x)\sin(kx)dx = b_k$$

Remarcă. 1) Dacă $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este periodică cu perioada 2π atunci restricția lui f la orice interval $[a,b]$ de lungime 2π determină complet funcția f. Cel mai adesea se preferă intervalul $[-\pi,\pi]$. In cele ce urmează vom presupune că f este integrabilă pe intervalul $[-\pi,\pi]$ și deci integrabilă pe orice interval din $\mathbb{R}$.

2) Reciproc, dacă g este o funcție integrabilă pe $[-\pi,\pi]$, atunci înlocuind valoarea lui g în π prin valoarea lui g în $-\pi$ există o funcție periodică f de perioadă 2π astfel în $f=g$ pe $[-\pi,\pi)$.

Definiție. Fie $f: [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ o funcție integrabilă Riemann. Numerele

$$a_0^f = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx\ ;\quad a_n^f = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\cos(nx)dx,\quad b_n^f = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx$$

se numesc coeficienții Fourier (1768-1830) ai funcției f.

Seria trigonometrică

$$a_0^f + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^f\cos(nx) + b_n^f\sin(nx))$$

se numește seria trigonometrică asociată funcției f sau seria Fourier a funcției f.

Remarcă. Este naturală problema găsirii de condiții pentru ca suma seriei Fourier a unei funcții integrabile Riemann pe $[-\pi,\pi]$ să coincidă cu această funcție.

Propoziția 20. Fie $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ integrabilă Riemann. Atunci

$$\lim_{\alpha\to\infty}\int_a^b f(x)\cos(\alpha x)dx = \lim_{\alpha\to\infty}\int_a^b f(x)\sin(\alpha x)dx = 0.$$

Demonstrație. Fie $\varepsilon > 0$ și $d = (x_k)_{0\le k\le n}$ o diviziune a intervalului $[a,b]$ astfel încît

$$\int_a^b f\,dx - s_d(f) < \varepsilon/2$$

Considerăm funcţia

$$g:\ [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

definită prin

$$g(x) = \begin{cases} m_i^f & \text{dacă } x \in [x_i,\ x_{i+1}) \\ f(b) & \text{dacă } x = b \end{cases}$$

unde $m_i^f = \inf\left\{f(x)\ \middle|\ x \in [x_i,\ x_{i+1}]\right\}$

Evident g este integrabilă Riemann şi

$$\int_a^b g\,dx = s_d(f)$$

Avem $g \leqslant f$ şi

$$\int_a^b (f-g)dx = \int_a^b f - s_d(f) < \varepsilon/2\ ,$$

$$\left|\int_a^b (f-g)\cos(\alpha x)dx\right| \leqslant \int_a^b (f-g)dx < \varepsilon/2$$

$$\left|\int_a^b (f-g)\sin(\alpha x)dx\right| \leqslant \int_a^b (f-g)dx < \varepsilon/2$$

şi

$$\left|\int_a^b g\cos(\alpha x)dx\right| = \left|\sum_{i=0}^{n-1} m_i^f \int_{x_i}^{x_{i+1}} \cos(\alpha x)dx\right| \leqslant \left(\sum_{i=0}^{n-1} |m_i^f|\right)\frac{2}{\alpha}$$

$$\left|\int_a^b g\sin(\alpha x)dx\right| = \left|\sum_{i=0}^{n-1} m_i^f \int_{x_i}^{x_{i+1}} \sin \alpha x\,dx\right| \leqslant \left(\sum_{i=0}^{n-1} |m_i^f|\right)\frac{2}{\alpha}$$

De aici rezultă că există $n_\varepsilon \in N$ astfel încît

$$\alpha \geq n_\varepsilon \Longrightarrow \left(\sum_{i=0}^{n-1}(m_i^f)\right)\frac{2}{\alpha} < \varepsilon/2$$

şi deci

$$\alpha \geq n_\varepsilon \Rightarrow \left|\int_a^b f(x)\cos(\alpha x)dx\right| \leq \left|\int_a^b (f-g)\cos(\alpha x)dx\right| + \left|\int_a^b g\cos(\alpha x)dx\right| < \varepsilon$$

$$\alpha \geq n_\varepsilon \Rightarrow \left|\int_a^b f(x)\sin(\alpha x)dx\right| \leq \left|\int_a^b (f-g)\sin(\alpha x)dx + \left|\int_a^b g\sin(\alpha x)dx\right|\right| < \varepsilon$$

Propoziţia 21. Fie $f: [-\pi, \pi]$ o funcţie integrabilă Riemann,

$$a_0^f + \sum_{k=1}^{\infty}(a_n^f\cos(nx) + b_n^f(\sin nx))$$

seria Fourier a funcţiei f şi pentru $n \in N$

$$s_n^f = a_o^f + \sum_{k=1}^{n}(a_k^f\cos(kx) + b_k^f\sin(kx)dx).$$

Atunci pentru orice polinom trigonometric s_n de rang n are loc relaţia

$$\int_{-\pi}^{\pi}(f-s_n)^2dx = \int_{-\pi}^{\pi}(f-s_n^f)^2dx + \int_{-\pi}^{\pi}(s_n-s_n^f)^2dx.$$

In particular

$$\int_{-\pi}^{\pi}(f-s_n)^2dx \geq \int_{-\pi}^{\pi}(f-s_n^f)^2dx$$

şi egalitatea are loc numai dacă $s_n = s_n^f$.

Demonstraţie. Avem pentru $1 \leq k \leq n$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f-s_n^f)\cos kx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\cos(kx)dx - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}s_n^f\cos kx\,dx = 0$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f-s_n^f)\sin(kx)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\sin(kx)dx - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}s_n^f\sin(kx)dx = 0$$

şi deci

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f-s_n^f)(s_n^f - s_n)dx = 0$$

ceea ce arată că

$$\int_{-\pi}^{\pi}(f-s_n)^2dx = \int_{-\pi}^{\pi}(f-s_n^f)^2dx + \int_{-\pi}^{\pi}(s_n^f - s_n)^2dx.$$

Evident

$$\int_{-\pi}^{\pi}(f-s_n)^2dx \geqslant \int_{-\pi}^{\pi}(f-s_n^f)^2dx$$

Dacă

$$\int_{-\pi}^{\pi}(f-s_n)^2dx = \int_{-\pi}^{\pi}(f-s_n^f)^2dx$$

atunci din considerațiile precedente rezultă

$$\int_{-\pi}^{\pi}(s_n^f - s_n)^2dx = 0$$

și deci $s_n = s_n^f$.

<u>Propoziția 22</u>. (Inegalitatea Bessel). Fie $f: [-\pi,\pi] \longrightarrow R$ o funcție integrabilă Riemann și

$$a_o^f + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^f \cos(nx) + b_n^f \sin(nx))$$

seria Fourier a lui f. Atunci

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2dx = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f-s_n^f)^2dx + 2(a_o^f)^2 + \sum_{k=1}^{\infty}\left[(a_k^f)^2 + (b_k^f)^2\right].$$

In particular

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2dx \geqslant 2(a_o^f)^2 + \sum_{k=1}\left[(a_k^f)^2 + (b_k^f)^2\right]$$

<u>Demonstrație</u>. Avem

$$\int_{-\pi}^{\pi}f^2dx = \int_{-\pi}^{\pi}(f-s_n^f)^2dx + \int_{-\pi}^{\pi}(s_n^f)^2dx ,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}(s_n^f)^2dx = a_o^f\int_{-\pi}^{\pi}s_n^f dx + \sum_{k=1}^{n}\int_{-\pi}^{\pi}s_n^f \cos(kx)dx + \sum_{k=1}^{n}\int_{-\pi}^{\pi}s_n^f \sin(kx) =$$

$$= 2\pi(a_o^f)^2 + \pi\sum_{k=1}^{n}(a_k^f)^2 + \pi\sum_{k=1}^{n}(b_k^f)^2dx$$

și deci

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2 dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f-s_n^f)^2 dx + 2(a_0^f)^2 + \sum_{k=1}^{n}[(a_k^f)^2 + (b_k^f)^2] \quad (\forall)\ n \in \mathbb{N}.$$

<u>Lemă</u>. Pentru orice $x \in [-\pi,\pi]$ are loc relația

$$\sin(nx + \tfrac{1}{2}x) = (\sin \tfrac{x}{2})(1 + 2\sum_{k=1}^{n}\cos(kx)$$

<u>Demonstrație</u>. Afirmația se demonstrează inductiv. Dacă $n=1$ avem

$$\sin(x+\tfrac{1}{2}x) = \sin x \cos \tfrac{x}{2} + \cos x.\sin \tfrac{x}{2} = 2 \sin \tfrac{x}{2} \cos^2 \tfrac{x}{2} +$$

$$+ \cos x \sin \tfrac{x}{2} = \sin \tfrac{x}{2} (1+ \cos x + \cos x) = \sin \tfrac{x}{2} (1 + 2 \cos x)$$

Presupunem că relația este adevărată pentru n. Atunci avem

$$\sin \tfrac{x}{2} (1+ 2\sum_{k=1}^{n+1}\cos(kx)) = \sin(nx + \tfrac{x}{2}) + 2 \sin \tfrac{x}{2} \cos((n+1)x) =$$

$$= \sin(nx+\tfrac{x}{2}) + \sin((n+1)x + \tfrac{x}{2}) - \sin(nx - \tfrac{x}{2}) = \sin((n+1)x + \tfrac{x}{2})$$

adică relația anunță pentru n+1.

<u>Propoziția 23</u>. Fie $f: [-\pi, \pi] \to R$ o funcție integrabilă și $x_0 \in (-\pi, \pi)$ astfel încît există două funcții $g_1:[-\pi, x_0] \to R$, $g_2:[x_0,\pi] \to R$ derivabile în x_0 cu $g_1|[-\pi,x_0) = f|[-\pi,x_0)$, $g_2|(x_0,\pi] = f|(x_0,\pi]$. Atunci seria Fourier a funcției f converge în punctul x_0 și are loc relația

$$a_0^f + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^f \cos(n\,x_0) + b_n^f \sin(n\,x_0)) = \tfrac{1}{2}\,(f(x_0-0) + f(x_0+0))$$

unde

$$f(x_0-0) = g_1(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x), \quad f(x_0+0) = g_2(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x)$$

In particular, dacă f este derivabilă la dreapta și la stînga în punctul x_0 atunci

$$a_0^f + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^f \cos(n\,x_0) + b_n^f \sin(n\,x_0)) = f(x_0)$$

Demonstrație. Punînd

$$S_n^f(x) = a_0^f + \sum_{k=1}^{n}(a_k^f \cos(k\,x) + b_k^f \sin(k\,x))$$

avem

$$S_n^f(x_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)(1 + 2\sum_{k=1}^{n}(\cos(k\,x)\cos(k\,x_0) + \sin(k\,x)\sin(k\,x_0))dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)(1 + 2\sum_{k=1}^{n}\cos(k(x-x_0))) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\frac{\sin(n(x-x_0) + \frac{x-x_0}{2})}{\sin\frac{x-x_0}{2}}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{x_0}^{\pi} f(x)\,\frac{\sin(n(x-x_0) + \frac{x-x_0}{2})}{\sin\frac{x-x_0}{2}}\,dx + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{x_0} f(x)\,\frac{\sin(n(x-x_0) + \frac{x-x_0}{2})}{\sin\frac{x-x_0}{2}}\,dx$$

Notînd cu $\tilde{f}$ funcția periodică pe $\mathbb{R}$ de perioadă 2π care coincide cu f pe $[-\pi, \pi)$ avem

$$S_n^f(x_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{x_0+\pi} f(u+x_0)\,\frac{\sin(nu + \frac{u}{2})}{\sin\frac{u}{2}}\,du + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi+x_0} f(x_0-u)\,\frac{\sin(nu + \frac{u}{2})}{\sin\frac{u}{2}}\,du\,.$$

Din

$$\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{x_0+\pi}\frac{\sin(nu + \frac{u}{2})}{\sin\frac{u}{2}}\,du = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{\sin(nu + \frac{u}{2})}{\sin\frac{u}{2}}\,dx + \frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{x_0+\pi}\frac{\sin(nu + \frac{u}{2})}{\sin\frac{u}{2}}\,dx,$$

și din

$$\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{\sin(nu + \frac{u}{2})}{\sin\frac{u}{2}}\,du = \frac{1}{2}$$

rezultă utilizînd propoziția 2o,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{x_0+\pi} \frac{\sin(nu+\frac{u}{2})}{\sin\frac{u}{2}}\,du = \frac{1}{2}.$$

Pentru a încheia demonstrația va fi suficient să arătăm că

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{x_0+\pi} \left(\frac{f(x_0+u)-f(x_0+o)}{\sin\frac{u}{2}}\right)\sin(nu+\frac{u}{2})du = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi+x_0} \frac{(f(x_0-u)-f(x_0-o)}{\sin\frac{u}{2}} \sin(nu+\frac{u}{2})du = 0.$$

Funcțiile

$$u \to \frac{f(x_0+u)-f(x_0+o)}{u} \qquad u \to f\,\frac{(x_0-u)-f(x_0-o)}{u}$$

sînt mărginite pe $(o,\ x_0+\pi]$ și deci funcțiile

$$u \to \frac{f(x_0+u)-f(x_0+u)}{\sin\frac{u}{2}}, \qquad u \to \frac{f(x_0-u)-f(x_0-o)}{\sin\frac{u}{2}}$$

sînt mărginite pe $(o,x_0+\pi]$. De aici rezultă că ele sînt restricțiile la $(o,x_0+\pi]$ a unor funcții integrabile Riemann pe $[o,x_0+\pi]$. De aici și din propoziția 20 deducem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{x_0+\pi} \frac{f(x_0+u)-f(x_0+o)}{\sin\frac{u}{2}} \sin(nu+\frac{u}{2})dx = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(x_0-u)-f(x_0-o)}{\sin\frac{u}{2}} \sin(nu+\frac{u}{2})du = 0.$$

<u>Definiție</u>. O funcție $f: [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ se numește <u>derivabilă pe porțiuni</u> dacă există o diviziune $d=(x_k)_{0\le k\le n}$ astfel încît $f|_{[x_k,x_{k+1}]}$ este derivabilă. Dacă în plus $f'_{[x_k,x_{k+1}]}$ este integrabilă

Riemann atunci există o funcţie integrabilă Riemann g pe $[-\pi,\pi]$ astfel încît $g|_{(x_k,x_{k+1})} = f'|_{(x_k,x_{k+1})}$. Vom spune atunci că derivata lui f este integrabilă Riemann pe $[-\pi,\pi]$.

Remarcă. Dacă $f: [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ este o funcţie derivabilă pe porţiuni şi $f(-\pi)=f(\pi)$ atunci din propoziţia precedentă rezultă că seria Fourier a lui f converge în fiecare punct la f.

Propoziţia 25. Fie $f: [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ o funcţie derivabilă pe porţiuni şi $f(-\pi)=f(\pi)$ şi astfel încît derivata lui f este integrabilă Riemann. Atunci seria Fourier a lui f converge uniform la f. Mai precis pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ avem

$$a_n^f = -\frac{1}{n} b_n^{f'}, \qquad b_n^f = \frac{1}{n} a_n^{f'}$$

unde a_n^f, b_n^f (resp. $a_n^{f'}$, $b_n^{f'}$) sînt coeficienţii Fourier asociaţi funcţiei f (resp. f').

Demonstraţie. Fie

$$a_0^f + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^f \cos(n\,x) + b_n^f \sin(n\,x))$$

$$(\text{resp. } a_0^{f'} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^{f'} \cos(n\,x) + b_n^{f'} \sin(n\,x))$$

seria Fourier a lui f (resp. f'). Fie $d=(x_k)_{0\leq k\leq p}$ o diviziune a lui $[-\pi,\pi]$ cu proprietatea că $f|_{[x_k,x_{k+1}]}$ este derivabilă şi cu derivata integrabilă Riemann. Avem, integrînd prin părţi,

$$a_n^f = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx = \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{p-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\cos(nx)dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{p-1}\frac{1}{n}(f(x)\sin(nx)\Big|_{x_k}^{x_{k+1}}) - \frac{1}{\pi}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{p-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f'(x)\sin(nx)dx =$$

$$= -\frac{1}{n}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin(nx)dx = -\frac{1}{n} b_n^{f'},$$

$$b_n^f = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx = \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{p-1}\int_{x}^{x_{k+1}} f(x)\sin(nx)dx =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{p-1}\frac{1}{n}\left(f(x)\cos(nx)\Big|_{x_k}^{x_{k+1}}\right) + \frac{1}{\pi}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{p-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f'(x)\cos(nx)dx =$$

$$= \frac{1}{n}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos(nx)dx = \frac{1}{n}a_n^{f'}.$$

De aici şi din

$$|a_n^f| = \frac{1}{n}|b_n^{f'}| \leqslant \frac{1}{n^2} + (b_n^{f'})^2$$

$$|b_n^f| = \frac{1}{n}|a_n^{f'}| \leqslant \frac{1}{n^2} + (a_n^{f'})^2$$

deducem, utilizînd inegalităţile lui Bessel pentru f', că seria

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n^f| + |b_n^f|$$

este convergentă şi deci seria Fourier a lui f converge uniform.

Propoziţia 26. Fie $f:[-\pi,\pi] \to R$ o funcţie continuă astfel încît $f(-\pi) = f(\pi)$. Atunci există un şir de polinoame trigonometrice care converge uniform la f.

Demonstraţie. Fie $\varepsilon > 0$. Intrucît f este uniform continuă rezultă că există $\eta_\varepsilon > 0$ astfel încît

$$|x'-x''| < \eta_\varepsilon \Rightarrow |f(x')-f(x'')| < \varepsilon/4$$

Fie $d = (x_k)_{0 \leqslant k \leqslant p}$ o diviziune a lui $[-\pi,\pi]$ cu norma mai mică ca η_ε. Considerăm funcţia $g: [-\pi,\pi] \to R$ astfel încît

$$x \in [x_k, x_{k+1}] \Longrightarrow g(x) = f(x_k) + (x-x_k)\cdot\frac{f(x_{k+1})-f(x_k)}{x_{k+1}-x_k}$$

Evident $g|_{[x_k,x_{k+1}]}$ este derivabilă şi

$$(g|_{[x_k,x_{k+1}]})' = \alpha_k = \frac{f(x_{k+1}) - f(x_k)}{x_{k+1}-x_k}$$

Aşadar, g este derivabilă pe porţiuni şi are derivata integrabilă Riemann. In plus avem $g(-\pi) = g(\pi) = f(\pi) = f(-\pi)$. Avem

$$x \in [x_k,x_{k+1}] \Longrightarrow |g(x) - f(x)| \leq |g(x) - g(x_k)| + |f(x)-f(x_k)|$$

$$\leq |f(x_{k+1}) - f(x_k)| + |f(x) - f(x_k)| < \varepsilon/4 + \varepsilon/4 = \varepsilon/2$$

Pe de altă parte, din propoziţia 25 aplicată funcţiei g rezultă că există $n_o \in N$ astfel încît să avem

$$|s^g_{n_o}(x) - g(x)| < \varepsilon/2 \quad (\forall) \quad x \in [-\pi, \pi].$$

Din consideraţiile precedente rezultă că

$$|s^g_{n_o}(x) - f(x)| \leq |s^g_n(x) - g(x)| + |g(x)-f(x)| < \varepsilon$$

pentru orice $x \in [a,b]$ unde $s^g_{n_o}$ reprezintă suma parţială de rang n_o a seriei Fourier a lui g.

<u>Propoziţia 27</u>. Fie $f: [-\pi, \pi] \longrightarrow R$ o funcţie integrabilă Riemann. Atunci există un şir de polinoame trigonometrice $(s_{p_n})_n$ astfel încît

$$\int_{-\pi}^{\pi} (f-s_{p_n})^2 dx \longrightarrow 0.$$

<u>Demonstraţie</u>. Evident fără a restrînge generalitatea putem presupune că $|f| < \frac{1}{2}$. Fie $\varepsilon > 0$ şi $d = (x_k)_{0 \leq x \leq p}$ o diviziune a lui $[-\pi, \pi]$ cu proprietatea

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx - s_d(f) < \varepsilon$$

unde

$$s_d(f) = \sum_{k=0}^{p-1} m_k^f (x_{k+1}-x_k),$$

şi

$$m_k^f = \inf\left\{f(x) \mid x \in [x_k, x_{k+1}]\right\}.$$

Notăm cu g funcţia definită pe $[-\pi, \pi]$ prin

$$x \in [x_k, x_{k+1}) \Longrightarrow g(x) = m_k^f$$

$$g(\pi) = m_{p-1}^f$$

Avem

$$g \leqslant f \quad \text{şi} \quad f-g \leqslant 1,$$

$$\int_a^b (f-g)^2 dx \leqslant \int_a^b (f-g)dx = \int_a^b f\,dx - s_d(f) < \frac{\varepsilon}{4}$$

Alegem acum, pentru fiecare $k \in \{o, 1, \dots p-2\}$, un punct $y_k \in [x_k, x_{k+1})$ astfel încît să avem

$$\sum_{k=o}^{p-2} (x_{k+1} - y_k) < \varepsilon/2$$

şi apoi un punct $y_{n-1} \in (x_{n+1}, x_n]$ astfel încît

$$x_n - y_{n-1} < \varepsilon/2 .$$

Construim acum funcţia h pe $[-\pi, \pi]$ astfel încît

$$k \leqslant n-1 \Rightarrow x \in [x_k, y_k] \Rightarrow h(x) = g(x)$$

$$k \leqslant n-2 \Rightarrow x \in [y_k, x_{k+1}] \Rightarrow h(x) = g(x_k) + (x-x_k)\frac{g(x_{k+1})-g(x_k)}{x_{k+1}-x_k}$$

$$x \in [y_{n-1}, x_n] \Rightarrow h(x) = g(x_{n-1}) + (x-x_{n-1})\frac{g(x_o)-g(x_{n-1})}{x_n-x_{n-1}}.$$

Din construcţie rezultă că

$$\int_a^b (g-h)^2 dx \leqslant \sum_{k=o}^{p-1}(x_{k+1}-y_k) + (x_n - y_{n-1}) < \varepsilon$$

Pe de altă parte, h este o funcţie derivabilă pe porţiuni, $h(\pi)=h(-\pi)$ şi cu derivata integrabilă Riemann. Din propoziţia 25 rezultă că există $n_0 \in N$ astfel încît

$$|s^h_{n_0}(x)-h(x)|^2 < \frac{\varepsilon}{2\pi} \quad (\forall) \quad x \in [-\pi, \pi]$$

unde $s^h_{n_0}$ este suma parţială de rang n_0 a lui h. Aşadar avem

$$(f-s^h_{n_0})^2 \leq 2\left[(f-g)^2 + (g-s^h_{n_0})^2\right] \leq$$

$$\leq 2\left[(f-g)^2 + 2(g-h)^2 + 2(h-s^h_{n_0})^2\right]$$

şi deci

$$\int_{-\pi}^{\pi} (f-s^h_{n_0})^2 dx \leq 2\varepsilon + 4\varepsilon + 4\varepsilon = 10\varepsilon.$$

Propoziţia 28. (Egalitatea lui Parseval)

Fie $f: [-\pi, \pi] \to R$ o funcţie integrabilă Riemann. Atunci are loc relaţia

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2 dx = 2(a^f_0)^2 + \sum_{k=1}^{\infty}(a^f_k)^2 + (b^f_k)^2$$

unde a^f_0, a^f_k, b^f_k sînt coeficienţii Fourier asociaţi lui f.

Demonstraţie. Există un şir crescător de numere naturale $p_n \to \infty$ şi un şir de polinoame trigonometrice $(s_{p_n})_n$ astfel încît

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (f-s_{p_n})^2 dx \to 0$$

Intrucît

$$\int_{-\pi}^{\pi} (f-s^f_{p_n})^2 \leq \int_{-\pi}^{\pi} (f-s_{p_n})^2 dx$$

rezultă că

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (f-s^f_{p_n})^2 dx = 0.$$

şi deci din propoziţia 22

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2 dx = 2(a_o^f)^2 + \sum_n \left[(a_n^f)^2 + (b_n^f)^2\right]$$

unde am notat cu a_n^f, b_n^f coeficienţii Fourier ai lui f, iar s_n^f suma parţială de rang a seriei Fourier a lui f.

Exerciţii. 1) Fie $f: [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ unde $f(x)=x$. Atunci seria sa Fourier este

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2}{n} \sin(nx).$$

Să se deducă de aici că

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2}{n} \sin(nx) \quad (\forall) \quad x \in (-\pi, \pi)$$

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}$$

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

2) Fie $F: [a,b] \to \mathbb{R}$ o funcţie derivabilă pe porţiuni astfel încît derivata sa f este integrabilă Riemann. Dacă

$$a_o^f + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^f \cos(nx) + b_n^f \sin(nx))$$

este seria sa Fourier şi dacă $F(o)=0$ atunci coeficienţii Fourier ai funcţiei F sînt daţi de formulele

$$a_o^F = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n^f}{n}, \quad a_n^F = -\frac{b_n^f}{n}, \quad b_n^F = \frac{a_n^f + (-1)^{n+1} a_o^f}{n}$$

şi

$$F(x) = a_o^F + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^F \cos(nx) + b_n^F \sin(nx)) \quad (\forall) \quad x \quad (-\pi, \pi)$$

3) Fie $f: [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ unde $f(x)=x^2$. Atunci seria sa Fourier este

$$\frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 4}{n^2} \cos(nx)$$

Să se deducă de aici că

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 4}{n^2} \cos(nx) \quad (\forall) \quad x \in [-\pi, \pi]$$

$$\frac{\pi^2}{12} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2}$$

$$\frac{\pi^4}{90} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$$

4) Fie $f: [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ dată de $f(x) = \pi x - x^3$. Seria sa Fourier este

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 12}{n^3} \sin(nx) ,$$

Să se deducă de aici că

$$\pi^2 x - x^3 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 12}{n^3} \sin(nx), \quad (\forall) \quad x \in [-\pi, \pi]$$

$$\frac{\pi^3}{32} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)^3} , \quad \frac{\pi^6}{945} = \sum_{n=1} \frac{1}{n^6} .$$

5) Se consideră seriile trigonometrice

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx), \qquad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$$

astfel încît $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ sînt şiruri descrescătoare cu termeni pozitivi şi cu $\lim_n a_n = \lim_n b_n = 0$. Atunci aceste serii converg pentru orice $x \in (0, 2\pi)$ şi convergenţa este uniformă pe orice interval $[a,b] \subset (0, 2\pi)$.

6) Se consideră seria trigonometrică

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$$

Să se arate că această serie converge în orice punct $x \in [-\pi, \pi]$, dar ea nu reprezintă seria Fourier a unei funcţii integrabile Riemann.

7) Se consideră seria trigonometrică

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{n \sin(n\,x)}{n^2-1}$$

Să se arate că există o funcţie derivabilă $f: (-\pi, \pi) \longrightarrow \mathbb{R}$ astfel încît

$$f'(x) = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{n \sin(n\,x)}{n^2-1}$$

8) Fie $a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$

o serie trigonometrică care este absolut convergentă într-un punct $x_0 \in \mathbb{R}$ şi fie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ puncte simetrice faţă de x_0. Atunci seria dată este convergentă (resp. absolut convergentă) în α dacă şi numai dacă ea este convergentă (resp. absolut convergentă) în β.

<u>Indicaţie</u>: Dacă $\alpha = x_0 - h$ atunci $\beta = x_0 + h$ şi avem

$$\left[a_n \cos n(x_0+h) + b_n \sin n(x_0+h)\right] - \left[a_n \cos n(x_0-h) + b_n \sin n(x_0-h)\right] =$$

$$= 2(a_n \cos(n\,x_0) + b_n \sin(n\,x_0)).\cos(n\,h)$$

9) Fie $(c_n)_n$ un şir de numere reale şi $[a,b] \subset \mathbb{R}$ cu $a < b$. Să se arate că

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \cos^2(nx + c_n)\,dx = \frac{1}{2}(b-a)$$

10) Fie

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

o serie trigonometrică astfel încît există un interval $(\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$ cu $\alpha < \beta$ astfel încît seria trigonometrică dată este absolut convergentă în orice punct $x \in (\alpha, \beta)$. Atunci seria este absolut convergentă în orice punct din $\mathbb{R}$. Mai mult, seria $\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|)$ este convergentă.

<u>Indicație</u>. Se pune

$$a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx) = r_n\cos(nx + C_n)$$

unde $r_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$, iar C_n este astfel încît

$$\cos(C_n) = \frac{a_n}{n}, \qquad \sin(C_n) = -\frac{b_n}{n}$$

Intrucît se presupune că seria

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\,|\cos(nx + C_n)|$$

este convergentă pentru orice $x \in (\alpha, \beta)$ rezultă că există un interval $(\alpha', \beta') \subset (\alpha, \beta)$ cu $\alpha < \beta$ și $M > 0$ astfel încît

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\,|\cos(nx + C_n)| \leqslant M \quad (\forall)\ x \in (\alpha', \beta')$$

Intrucît

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\alpha'}^{\beta'} \cos^2(nx + C_n)dx = \frac{1}{2}(\beta' - \alpha')$$

rezultă că

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\alpha'}^{\beta'} |\cos(nx + C_n)|\,dx \geqslant \frac{1}{2}(\beta' - \alpha')$$

și deci există $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încît

$$n \geqslant n_0 \Longrightarrow \int_{\alpha'}^{\beta'} |\cos(nx + C_n)|\,dx \geqslant \frac{1}{4}(\beta' - \alpha').$$

Intrucît

$$\sum_{k=1}^{n} \int_{\alpha'}^{\beta'} r_k\,|\cos(kx + C_k)|\,dx \leqslant \int_{\alpha'}^{\beta'} M\,dx = M(\beta' - \alpha')$$

pentru $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încît

$$n \geq n_\varepsilon,\ p \in \mathbb{N} \Rightarrow \sum_{k=n}^{n+p} \int_{\alpha'}^{\beta'} r_k |\cos(kx + \theta_k)|\, dx < \frac{1}{4}\, \varepsilon (\beta' - \alpha')$$

De aici rezultă

$$n \geq n_\varepsilon,\ p \in \mathbb{N} \Longrightarrow \sum_{k=n}^{n+p} r_k < \varepsilon$$

11) Să considerăm seria trigonometrică

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \sin(n x)$$

Să se arate că această serie este absolut convergentă în orice punct de forma $x = r\pi$ unde r este rațional și nu este convergent dacă $x = s\pi$ unde s este irațional.

12) Se consideră seria trigonometrică

$$\sum_{n=3}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

unde

$$a_n = \frac{\cos(n \ln n)}{\ln n}, \qquad b_n = \frac{\sin(n \ln n)}{\ln n}$$

Să se arate că $a_n \longrightarrow 0$, $b_n \longrightarrow 0$, dar nu există puncte $x \in \mathbb{R}$ astfel încît seria dată să fie convergentă în x.

13. Fie f, g două funcții integrabile pe $[-\pi, \pi]$ și $x_0 \in (-\pi, \pi)$ și

$$a_0^f + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^f \cos(nx) + b_n^f \sin(nx))$$

$$a_0^g + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^g \cos(nx) + b_n^g \sin(nx))$$

seriile Fourier ale lui f și respectiv g.

Presupunem că există o vecinătate U a lui x_0 astfel încît $f(x) = g(x)$ $(\forall)$ $x \in U$. Atunci seria Fourier a lui f este convergentă în x_0 dacă și numai dacă seria Fourier a lui g este convergentă în x_0.

In plus, în cazul convergenţei în x_0 ele au aceeaşi sumă.

5. Integrale proprii

S-a dezvoltat pînă acum integrala Riemann pentru funcţii mărginite definite pe intervale închise şi mărginite. De dorit ar fi să lărgim cît mai mult clasa funcţiilor pentru care să se poată aplica o tehnică (generalizată) a integrării în care multe din proprietăţile integralei Riemann să fie încă satisfăcută.

Definiţie. Fie $a \in \mathbb{R}$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a < b$ şi $f: [a,b) \to \mathbb{R}$. Funcţia f se numeşte *local integrabilă* dacă pentru orice $c \in (a,b)$ funcţia f este integrabilă Riemann pe $[a,c]$. Se spune că f este *integrabilă în sens generalizat pe $[a,b)$* dacă f este local integrabilă şi există în $\mathbb{R}$

$$\lim_{c \to b} \int_a^c f(x)dx$$

Această limită se notează cu $\int_a^b f(x)dx$ şi se numeşte *integrala improprie a funcţiei f*. Dacă limita

$$\lim_{c \to b} \int_a^c f(x)dx$$

există în $\overline{\mathbb{R}}$ şi este egală cu $-\infty$ (resp. $+\infty$) atunci vom pune

$$\int_a^b f(x)dx = -\infty \quad (\text{resp. } \int_a^b f(x)dx = +\infty)$$

Dacă funcţia f este integrabilă în sens generalizat pe $[a,b)$ atunci se mai spune că *integrala improprie* $\int_a^b f(x)dx$ *este convergentă*.

Fie $a \in \overline{\mathbb{R}}$, $b \in \mathbb{R}$, $a < b$ şi $f: (a,b] \to \mathbb{R}$. Funcţia f se numeşte *local integrabilă* dacă pentru orice $c \in (a,b)$ funcţia f este integrabilă Riemann pe $[a,b]$. Se spune că f este *integrabilă în sens generalizat pe $(a,b]$* dacă f este local integrabilă şi există în $\mathbb{R}$ limita

$$\lim_{c \to a} \int_c^b f(x)dx$$

Această limită se notează cu $\int_a^b f(x)dx$ şi se numeşte <u>integrala improprie a lui f pe (a,b]</u>. Dacă limita

$$\lim_{c \to a} \int_a^b f(x)dx$$

există în $\bar{\mathbb{R}}$ şi este egsă cu $-\infty$ (resp. $+\infty$) atunci vom pune

$$\int_a^b f(x)dx = -\infty \quad (\text{resp. } \int_a^b f(x)dx = +\infty)$$

Dacă f este integrabilă în sens generalizat pe (a,b] atunci se mai spune că <u>integrala improprie</u> $\int_a^b f(x)dx$ <u>este convergentă</u>.

In cele ce urmează vom considera numai cazul funcţiilor local integrabile pe [a,b) unde $a \in \mathbb{R}$, $b \in \bar{\mathbb{R}}$, $a<b$. Cazul funcţiilor local integrabile pe (a,b] cu $a \in \bar{\mathbb{R}}$, $b \in \mathbb{R}$, $a<b$ se tratează analog.

<u>Propoziţia 27</u>. Fie $a,b \in \mathbb{R}$, $a<b$ şi $f: [a,b) \to \mathbb{R}$ o funcţie local integrabilă şi mărginită. Atunci f este integrabilă în sens generalizat şi în plus orice prelungire $\tilde{f}: [a,b] \to \mathbb{R}$ a lui f pe [a,b] este integrabilă Riemann şi are loc relaţia

$$\int_a^b \tilde{f}(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

<u>Demonstraţie</u>. Fie $\tilde{f}$ o prelungire a lui f la [a,b] şi fie $c \in [a,b)$. Avem

$$\overline{\int_a^b} \tilde{f}\, dx = \overline{\int_a^c} \tilde{f}\, dx + \overline{\int_c^b} \tilde{f}\, dx = \int_a^c f(x)dx + \overline{\int_c^b} \tilde{f}\, dx$$

şi analog

$$\underline{\int_a^b} \tilde{f}\, dx = \int_a^c f(x)dx + \underline{\int_a^b} \tilde{f}\, dx$$

Pe de altă parte din

$$\left|\overline{\int_c^b} \tilde{f}\, dx\right| \leqslant \|\tilde{f}\|\, (b-c)$$

$$\left|\underline{\int_c^b} \tilde{f}\, dx\right| \leqslant \|\tilde{f}\|\, (b-c)$$

unde

$$\|\tilde{f}\| = \sup \left\{ |\tilde{f}(x)| \mid x \in [a,b] \right\}$$

deducem

$$\overline{\int_a^b} \tilde{f}\, dx - \underline{\int_a^b} \tilde{f}\, dx \leqslant 2\, \|\tilde{f}\|\, (b-c) \qquad (\forall)\ c \in (a,b).$$

De aici rezultă că

$$\overline{\int_a^b} \tilde{f}\, dx = \underline{\int} \tilde{f}(x) dx$$

adică $\tilde{f}$ este integrabilă Riemann pe $[a,b]$ şi în plus

$$\int_a^b \tilde{f}\, dx = \lim_{c \to b} \int_a^c f(x) dx$$

adică f este integrabilă în sens generalizat şi

$$\int_a^b \tilde{f}\, dx = \int_a^b f\, dx$$

<u>Propoziţia 28</u>. Fie $f,g : [a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ funcţii integrabile în sens generalizat şi $\alpha \in \mathbb{R}$. Atunci $f+g$, αf sînt integrabile în sens generalizat şi

$$\int_a^b (f+g) dx = \int_a^b f\, dx + \int_a^b g\, dx$$

$$\int_a^b (\alpha f)dx = \alpha \int_a^b f\,dx$$

<u>Demonstrație</u>. Avem

$$\int_a^b (f+g)dx = \lim_{c\to b} \int_a^c (f+g)dx - \lim_{c\to b} \left(\int_a^c f\,dx + \int_a^c g\,dx\right) =$$

$$= \lim_{c\to b} \int_a^c f\,dx + \lim_{c\to b} \int_a^c g\,dx = \int_a^b f\,dx + \int_a^b g\,dx$$

$$\int_a^b (\alpha f)dx = \lim_{c\to b} \int_a^c (\alpha f)dx = \lim_{c\to b} \alpha \int_a^c f\,dx =$$

$$= \alpha \lim_{c\to b} \int_a^c f\,dx = \alpha \int_a^b f\,dx$$

<u>Remarcă</u>. In general, dacă f este integrabilă în sens generalizat pe $[a,b)$ atunci $|f|$ nu mai are această proprietate. Tot astfel dacă f,g sînt integrabile în sens generalizat pe $[a,b)$ atunci $f.g$ nu mai este integrabilă în sens generalizat pe $[a,b)$.

<u>Propoziția 29</u>. Fie $f: [a,b) \to R$ unde $a \in R$, $b \in \bar{R}$, $a<b$ o funcție local integrabilă și $c \in (a,b)$. Atunci integrala improprie $\int_a^b f\,dx$ există dacă și numai dacă există integrala improprie $\int_c^b f\,dx$.

In plus avem

$$\int_a^b f\,dx = \int_a^c f\,dx + \int_c^b f\,dx\ .$$

<u>Demonstrație</u>. Avem, pentru $c' \in (c,b)$,

$$\int_a^{c'} f\,dx = \int_a^c f\,dx + \int_c^{c'} f\,dx$$

şi deci există limita

$$\lim_{c\to b}\int_a^{c'} f\,dx$$

dacă şi numai dacă există limita

$$\lim_{c\to b}\int_c^{c'} f\,dx .$$

In plus avem

$$\int_a^b f\,dx = \lim_{c'\to b}\int_c^{c'} f\,dx = \int_a^c f\,dx + \lim_{c'\to b}\int_c^{c'} f\,dx = \int_a^c f\,dx + \int_c^b f\,dx$$

Definiţie. Fie $f:(a,b) \to R$, $a,b \in \bar{R}$, $a<b$. Funcţia f se numeşte local integrabilă dacă pentru orice interval închis $[a',b']\subset(a,b)$ funcţia $f|_{[a,b]}$ este integrabilă Riemann. Se spune că f este integrabilă în sens generalizat dacă există $c\in(a,b)$ astfel încît funcţiile $f|_{(a,c]}$, $f|_{[c,b)}$ sînt integrabile în sens generalizat. Propoziţia precedentă ne arată că această proprietate nu depinde de punctul $c\in(a,b)$. In acest caz, numărul real

$$\int_a^c f\,dx + \int_c^b f\,dx$$

nu depinde de c se numeşte integrala improprie a lui f şi se notează prin

$$\int_a^b f\,dx.$$

Mai general, spunem că există integrala improprie $\int_a^b f\,dx$ dacă există $c\in(a,b)$ (sau echivalent pentru orice $c\in(a,b)$ astfel încît există $\int_a^c f\,dx$, $\int_c^b f\,dx$ şi expresia

$$\int_a^c f\,dx + \int_c^b f\,dx$$

are sens. In acest caz numărul (din $\overline{\mathbb{R}}$)

$$\int_a^c f\,dx + \int_c^b f\,dx$$

nu depinde de $c \in (a,b)$ şi se notează cu $\int_a^b f\,dx$.

Exerciţii

1. Integralele improprii

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx, \quad \int_0^1 \ln x\,dx, \quad \int_0^\infty e^{-x}dx$$

sînt convergente.

2. Avem

$$\int_0^\infty x\,dx = +\infty, \int_0^{\pi/2} \operatorname{tg} x = +\infty, \quad \int_0^\infty \ln x = +\infty$$

3. Nu există integralele improprii

$$\int_0^\infty \sin x\,dx, \int_{-1}^1 \frac{x}{1-x^2}\,dx, \quad \int_0^\infty \frac{1}{x}\,dx$$

Propoziţia 30. (Formula Leibniz-Newton). Fie $f: [a,b) \to \mathbb{R}$ o funcţie local integrabilă care admite o primitivă F. Atunci există integrala improprie $\int_a^b f\,dx$ dacă şi numai dacă există $\lim_{c \to b} F(c)$. In acest caz avem

$$\int_a^b f\,dx = (\lim_{c\to b} F(c)) - F(a)$$

Demonstraţie. Pentru $c \in (a,b)$ avem

$$\int_a^c f\,dx = F(c) - F(a)$$

şi de aici rezultă că

$$\lim_{c \to b} \int_a^c f\, dx = (\lim_{c \to b} F(c)) - F(a)$$

Propoziţia 31. (Formula de integrare prin părţi). Fie f,g funcţii derivabile pe $[a,b)$ cu $a \in \mathbb{R}$, $b \in \bar{\mathbb{R}}$ astfel încît f' şi g' sînt local integrabile pe $[a,b)$ şi în plus există

$$(fg)(b-0) = \lim_{c \to b} (fg)(c)$$

Atunci dacă $g.f'$ este integrabilă în sens generalizat rezultă că şi fg' este integrabilă în sens generalizat şi are loc relaţia

$$\int_a^b fg'\,dx + \int_a^b gf'\,dx = (fg)(b-0) - (fg)(a)$$

Demonstraţie. Avem pentru $c \in (a,b)$

$$\int_a^c fg'\,dx + \int_a^c gf'\,dx = (fg)(c) - (fg)(a)$$

$$\int_a^b gf'\,dx = \lim_{c \to b} \int_a^c gf'\,dx$$

şi deci există $\int_a^b fg'\,dx$ şi

$$\int_a^b fg'\,dx + \int_a^b gf'\,dx = (fg)(b-0) - (fg)(a)$$

Propoziţia 32. (Formula schimbării de variabile). Fie $f: [a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcţie continuă şi $g : [\alpha,\beta) \longrightarrow [a,b)$ o funcţie bijectivă derivabilă cu g local integrabilă. Atunci există integrala improprie $\int_a^b f\,dx$ dacă şi numai dacă există integrala improprie

$\int_{\alpha}^{\beta} f\circ g \cdot g' dx$ şi are loc relaţia

$$\int_{\alpha}^{\beta} f\circ g \cdot g' dx = \int_{a}^{b} f\, dx$$

Demonstraţie. Din ipoteză rezultă că $\varphi(\alpha) = a$, φ este strict crescătoare şi $g(\beta - 0) = \lim_{\vartheta \to \beta} g(\vartheta) = b$. Deoarece pentru $\vartheta \in (\alpha, \beta)$ avem

$$\int_{\alpha}^{\vartheta} f\circ g \cdot g' dx = \int_{a}^{g(\vartheta)} f\, dx$$

rezultă că limitele

$$\lim_{\vartheta \to \beta} \int_{\alpha}^{\vartheta} f\circ g \cdot g' dx, \quad \lim_{c \to b} \int_{a}^{c} f\, dx$$

există doar simultan şi sînt egale, adică

$$\int_{\alpha}^{\beta} f\circ g \cdot g' dx = \int_{a}^{b} f\, dx$$

Propoziţia 33. (Criteriul lui Cauchy). Fie $f: [a,b) \longrightarrow R$ o funcţie local integrabilă. Atunci f este integrabilă în sens generalizat dacă şi numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $c_{\varepsilon} \in (a,b)$ cu proprietatea

$$c_{\varepsilon} \leq c' < c'' < b \Longrightarrow \left| \int_{c'}^{c''} f\, dx \right| < \varepsilon$$

Demonstraţie. Dacă f este integrabilă în sens generalizat şi $\alpha := \int_{a}^{b} f\, dx$ atunci din

$$\lim_{c \to b} \int_{a}^{c} f\, dx = \alpha$$

rezultă că pentru orice $\varepsilon > 0$ există $c_{\varepsilon} \in (a,b)$ astfel încît

$$c_{\varepsilon} \leq c < b \Longrightarrow \left| \int_{a}^{c} f\, dx - \alpha \right| < \varepsilon/2$$

şi deci

$$c_\varepsilon \leqslant c' < c'' < b \Longrightarrow \left|\int_{c'}^{c''} f\,dx\right| = \left|\int_a^{c'} f\,dx - \int_a^{c''} f\,dx\right| =$$

$$\leqslant \left|\int_a^{c'} f\,dx - \mathcal{L}\right| + \left|\mathcal{L} - \int_a^{c''} f\,dx\right| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Reciproc, dacă condiţia din enunţ are loc atunci alegînd un şir $(c_n)_n$, $c_n \in (a,b)$ cu $c_n \to b$ rezultă că şirul $\left(\int_a^{c_n} f\,dx\right)_n$ este convergent şi punînd

$$\mathcal{L} := \lim_{n\to\infty} \int_a^{c_n} f\,dx$$

avem

$$\lim_{c\to b} \int_a^{c} f\,dx = \mathcal{L}$$

ceea ce arată că f este integrabilă în sens generalizat.

<u>Propoziţia 34</u>. (Criteriul lui Abel-Dirichlet). Fie $f,g: [a,b) \to \mathbb{R}$ două funcţii local integrabile astfel încît

i) f este descrescătoare şi $f(b-0) = \lim\limits_{c\to b} f(c) = 0$

ii) există $M>0$ cu proprietatea

$$\left|\int_a^{c} g\,dx\right| \leqslant M \quad (\forall)\ c\in(a,b)$$

Atunci $f.g$ este integrabilă în sens generalizat.

<u>Demonstraţie</u>. Fie $\varepsilon > 0$. Alegem acum c_ε cu proprietatea

$$c_\varepsilon \leqslant c < b \Longrightarrow f(c) < \frac{\varepsilon}{4M}$$

şi fie $c', c'' \in [c_\varepsilon, b)$, $c' < c''$. Utilizînd formula de medie pentru funcţia $f.g$ pe $[c',c'']$ deducem că există $\xi \in [c',c'']$ astfel încît

$$\int_{c'}^{c''} fg\,dx = f(\alpha)\int_{c'}^{\xi} g\,dx + f(\beta)\int_{\xi}^{c''} g\,dx .$$

De aici rezultă

$$\left|\int_{c'}^{c''} fg\,dx\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{4M}\left(\left|\int_a^{\xi} g\,dx\right| + \left|\int_a^{c'} g\,dx\right| + \left|\int_a^{c''} g\,dx\right| + \left|\int_a^{\xi} g\,dx\right|\right) < \varepsilon .$$

şi deci din criteriul lui Cauchy deducem că fg este integrabilă în sens generalizat.

Propoziţia 35. Fie $f,g: [a,b) \to \mathbb{R}$ funcţii local integrabile astfel încît f este descrescătoare şi $f(b-0) > -\infty$ iar g este integrabilă în sens generalizat. Atunci fg este integrabilă în sens generalizat.

Demonstraţie. Fie $\alpha = \lim\limits_{c\to b} f(c) = f(b-0)$. Intrucît

$$\lim_{c\to b}\int_a^c g\,dx = \int_a^b g\,dx \in \mathbb{R}$$

rezultă că există $M>0$ astfel încît

$$\left|\int_a^c g\,dx\right| < M \qquad (*) \qquad c\in[a,b] .$$

Din propoziţia precedentă rezultă că funcţia $(f-\alpha)\cdot g$ este integrabilă în sens generalizat pe $[a,b)$. Intrucît $fg = (f-\alpha)g + \alpha g$ şi αg este de asemenea integrabilă în sens generalizat pe $[a,b)$ deducem că funcţia fg este integrabilă în sens generalizat pe $[a,b)$.

Exemple. 1) Să se arate că integralele improprii

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx\ ,\quad \int_0^{\infty} e^{-x}\sin x\,dx,\quad \int_0^{\infty} e^{-x}\cos x\,dx$$

sînt convergente .

2) Să se arate că integralele improprii

$$\int_0^\infty \sin(x^2)dx \ , \quad \int_0^\infty \cos(x^2)dx$$

sînt convergente.

<u>Propoziţia 36</u>. Fie $f: [a,b)$ o funcţie local integrabilă astfel încît funcţia $|f|$ este integrabilă în sens generalizat. Atunci f este integrabilă în sens generalizat şi

$$\left|\int_a^b f\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f|\,dx$$

<u>Demonstraţie</u>. Se utilizează criteriul lui Cauchy. Pentru $\varepsilon > 0$ alegem $c_\varepsilon \in (a,b)$ astfel încît

$$c_\varepsilon \leqslant c' < c'' < b \Longrightarrow \int_{c'}^{c''} |f|\,dx < \varepsilon .$$

Din

$$c_\varepsilon \leqslant c' < c'' < b \Longrightarrow \left|\int_{c'}^{c''} f\,dx\right| \leqslant \int_{c'}^{c''} |f|\,dx < \varepsilon .$$

rezultă că f este integrabilă în sens generalizat.

Avem

$$\left|\int_a^b f\,dx\right| = \lim_{c\to b}\left|\int_a^c f\,dx\right| \leqslant \lim_{c\to b}\int_a^c |f|\,dx = \int_a^b |f|\,dx$$

<u>Definiţie</u>. Fie $f: [a,b)$ o funcţie local integrabilă astfel încît $|f|$ este integrabilă în sens generalizat. In acest caz se spune că integrala improprie $\int_a^b f\,dx$ este <u>absolut convergentă</u>.

Remarcă. 1. Dacă $f:[a,b)\to\mathbb{R}$ este astfel încît integrala improprie $\int_a^b f\,dx$ este absolut convergentă atunci ea este convergentă.

2. Dacă $f:[a,b)\to\mathbb{R}$ este local integrabilă şi există $c\in(a,b)$ astfel încît integrala improprie $\int_c^b f\,dx$ este absolut convergentă, atunci $\int_a^b f\,dx$ este absolut convergentă.

Propoziţia 37. Fie $f:[a,b)\to\mathbb{R}$ o funcţie local integrabilă. Atunci integrala improprie $\int_a^b f\,dx$ este absolut convergentă dacă şi numai dacă există $M>0$ cu proprietatea

$$\int_a^c |f|\,dx \leq M \qquad (\forall)\quad c\in(a,b)$$

Demonstraţie. Intrucît funcţia

$$c \to \int_a^c |f|\,dx$$

este crescătoare, atunci

$$\lim_{c\to b}\int_a^c |f|\,dx = \sup_c \int_a^c |f|\,dx$$

şi deci $\int_a^b |f|\,dx$ va fi convergentă dacă şi numai dacă funcţia $c\to\int_a^c |f|\,dx$ va fi mărginită.

Propoziţia 38. (Criteriul comparaţiei). Fie $f,g:[a,b)\to\mathbb{R}$ două funcţii local integrabile astfel încît

$$|f(x)|\leq|g(x)| \qquad (\forall)\quad x\in[a,b)$$

şi $\int_a^b g\,dx$ este absolut convergentă. Atunci $\int_a^b f\,dx$ este de asemenea absolut convergentă.

Demonstrație. Avem

$$\int_a^c |f|\,dx \leqslant \int_a^c |g|\,dx$$

și deoarece $\int_a^b g\,dx$ este absolut convergentă rezultă că funcția

$$c \longrightarrow \int_a^c |g|\,dx$$

este mărginită și deci și funcția

$$c \longrightarrow \int_a^c |f|\,dx$$

este mărginită, adică $\int_a^b f\,dx$ este absolut convergentă.

Propoziția 39. Dacă $f,g: [a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ sînt funcții local integrabile și $\int_a^b f\,dx$, $\int_a^b g\,dx$ sînt absolut convergente atunci $\int_a^b (f+g)dx$ este de asemenea absolut convergentă. Dacă g este mărginită, atunci $\int_a^b (fg)dx$ este și ea absolut convergentă.

Demonstrație. Prima parte a propoziției rezultă din

$$|f+g| \leqslant |f| + |g|$$

iar a doua parte rezultă din

$$|f\cdot g| \leqslant M|f|$$

unde $M>0$ este astfel încît

$$|g(x)| \leqslant M \quad (\forall) \quad x \in [a,b)$$

Exerciții. 1. Fie $a>0$. Atunci integrala improprie

$$\int_0^a \frac{1}{x^{\alpha}}\,dx$$

va fi convergentă dacă şi numai dacă $\alpha < 1$.

2. Fie $a>0$. Atunci integrala improprie

$$\int_a^\infty \frac{1}{x^\alpha}\, dx$$

va fi convergentă dacă şi numai dacă $\alpha > 1$.

3. Fie $0 < \alpha < 2$. Să se arate că integrala improprie

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha}\, dx$$

este convergentă, dar nu este absolut convergentă.

4. Să se arate că integralele improprii

$$\int_0^\infty \sin x^2\, dx, \qquad \int_0^\infty \cos x^2\, dx$$

sînt convergente, dar nu sînt absolut convergente.

5. Să se arate că integrala improprie

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{\sin x}}\, dx$$

este convergentă.

Propoziţia 4o. Fie $f: [a,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \geqslant 0$ o funcţie descrescătoare şi pozitivă. Atunci integrala improprie $\int_a^\infty f\, dx$ va fi convergentă dacă şi numai dacă seria

$$\sum_{n \geqslant a+1} f(n)$$

este convergentă.

Demonstraţie. Avem pentru $n \geqslant a+1$

$$f(n-1) \leqslant \int_{n-1}^{n} f\, dx \leqslant f(n)$$

şi deci

$$\sum_{k=n-1}^{n+p} f(k) \leq \int_{n-1}^{n+p} f\, dx \leq \sum_{k=n}^{n+p+1} f(k).$$

Afirmaţia din cuvîntul propoziţiei rezultă acum aplicînd criteriul lui Cauchy pentru convergenţa seriilor şi pentru convergenţa integralelor improprii.

Propoziţia 41. (Funcţia lui Euler). Fie pentru $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$

$$\Gamma(\alpha) := \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x}\, dx$$

Să se arate că integrala improprie $\int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x}\, dx$ este convergentă şi au loc relaţiile

1) $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha) \quad (\forall) \quad \alpha \in \mathbb{R}_+^*$

2) $\Gamma(n+1) = n! \quad (\forall) \quad n \in \mathbb{N}$

Demonstraţie. Intrucît

$$x^{\alpha-1} e^{-x} \leq x^{\alpha-1} \quad (\forall) \quad x \in (0,1]$$

rezultă că integrala improprie

$$\int_0^1 x^{\alpha-1} e^{-x}\, dx$$

este convergentă. Pe de altă parte, pentru orice $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ există $M_\alpha > 0$ astfel încît

$$x^{\alpha-1} e^{-x} \leq M e^{-\frac{x}{2}} \qquad x \in [1,\infty)$$

şi deci integrala improprie $\int_1^\infty x^{\alpha-1} e^{-x}\, dx$ este de asemenea convergentă.

Avem, integrînd prin părţi

$$\Gamma(\alpha+1) = \int_0^\infty x^{\alpha} e^{-x} dx = -x^{\alpha} e^{-x}\Big|_0^\infty + (\alpha)\int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx = \alpha\Gamma(\alpha)$$

Dacă $n \in N$ atunci aplicînd succesiv formula precedentă obţinem

$$\Gamma(n+1) = n(n-1)\ldots\ 2.\int_0^\infty e^{-x}dx = n!$$

Exerciţii

1. Să se arate că integrala $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}\,dx$ este convergentă şi să se calculeze valoarea ei.

2. Dacă $f: R_+ \to R_+$ o funcţie continuă şi periodică. Atunci $\int_0^\infty f\,dx$ este convergenta dacă şi numai dacă $f=0$.

3. Fie $f: [a,\infty) \to R$ o funcţie local integrabilă astfel încît există $\lim_{x\to\infty} f(x)$ astfel încît integrala sa improprie este convergentă. Atunci

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0.$$

4. Să se arate că integralele improprii

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^4\cos^2 x},\quad \int_0^\infty e^{-ax}\sin bx\quad -$$

sînt convergente.

5. Să se arate că

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$$

6. Să se arate că

$$\lim_{\alpha\to 0} \alpha\Gamma(\alpha) = 0$$

7. Să se arate că pentru orice $n \in N$ funcţia definită pe $(-(n+1),\infty)$ prin

$$x \to \frac{\Gamma(x+n+1)}{x(x+1)\ldots(x+n)}$$

coincide cu $\Gamma(x)$ pe intervalul $(0,\infty)$.

8. Să se arate că Γ este analitică pe $(0,\infty)$.

9. Să se arate că pentru $\alpha, \beta \in R_+^*$ integrala improprie

$$\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta}dx$$

este convergentă şi valoarea ei este egală cu

$$\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

X. Funcţii cu variaţie mărginită

1. Funcţii cu variaţie mărginită.

2. Integrabilitatea Stieltjes-Riemann.

1. Funcţii cu variaţie mărginită

Definiţie. Fie $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$ şi $f: [a,b] \to \mathbb{R}$. Dacă $d = (x_i)_{0 \le i \le n}$ este o diviziune a lui $[a,b]$, numărul real

$$V_d(f) := \sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)|,$$

se numeşte variaţia lui f relativă la d. Numărul

$$V_a^b(f) := \sup_d V_d(f)$$

se numeşte variaţia lui f pe $[a,b]$. Funcţia f se numeşte cu variaţie mărginită dacă $V_a^b(f) < \infty$.

Remarcă. 1. Există funcţii $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ care nu sînt cu variaţie mărginită. Spre exemplu funcţia $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ unde $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ dacă $x \neq 0$ şi $f(0)=0$. Intr-adevăr, considerăm şirul $(a_n)_n$ unde $a_n = \frac{2}{\pi n}$ şi d_n diviziunea lui $[0,1]$ dată de

$$d_n := 0 < a_{2n+1} < a_{2n} < \dots < a_1 < 1.$$

Avem $V_{d_n}(f) \geq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{a_{2k+1}} > \frac{\pi}{2} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2k+1} \right)$ şi deci $V_a^b(f) = +\infty$.

2. Dacă d, δ sînt două diviziuni ale lui $[a,b]$ cu δ mai fină ca d atunci pentru orice $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ avem $V_d(f) \le V_\delta(f)$. Intr-adevăr, este suficient să considerăm doar cazul cînd δ are doar un singur punct de diviziune în plus faţă de d. Dacă $d = (x_k)_{0 \le i \le n}$ atunci

$$\delta = a = x_0 < x_1 < \dots < x_k < c < x_{k+1} < \dots < x_n = b$$

şi din

$$|f(x_{k+1}) - f(x_k)| \le |f(x_{k+1}) - f(c)| + |f(c) - f(x_k)|$$

deducem

$$V_d(f) \le V_\delta(f)$$

3. Dacă $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ atunci există un şir $(d_n)_n$ de diviziuni cu $\nu(d_n) \to 0$ astfel încît

$$V_{d_n}(f) \to V_a^b(f).$$

Intr-adevăr, există un şir $(\delta_n)_n$ de diviziuni ale lui $[a,b]$ cu $V_{\delta_n}(f) \to V_a^b(f)$. Alegînd acum d_n mai fină ca δ_n şi cu $\nu(d_n) < \frac{1}{n}$ avem

$$V_{\delta_n}(f) \leqslant V_{d_n}(f) \leqslant V_a^b(f)$$

şi deci

$$V_{d_n}(f) \to V_a^b(f)$$

<u>Propoziţia 1</u>. Fie $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ funcţie derivabilă cu derivata mărginită. Atunci f este cu variaţie mărginită şi are loc relaţia

$$\underline{\int_a^b} |f'(x)|\,dx \leqslant V_a^b(f) \leqslant \overline{\int_a^b} |f'(x)|\,dx.$$

Dacă în plus $|f'|$ este integrabilă Riemann atunci

$$V_a^b(f) = \int_a^b |f'(x)|\,dx$$

<u>Demonstraţie</u>. Fie $d = (x_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ o diviziune a intervalului $[a,b]$. Atunci există un sistem $(\xi_i)_{0 \leqslant i \leqslant n-1}$ de puncte intermediare asociate lui d astfel încît

$$\sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| = \sum_{i=0}^{n-1} |f'(\xi_i)|(x_{i+1} - x_i).$$

De aici deducem

$$s_d(|f'|) \leqslant V_d(f) \leqslant S_d(|f'|).$$

Alegem acum un şir $(d_n)_n$ de diviziuni ale lui $[a,b]$ cu $\nu(d_n) \to 0$, astfel încît

$$V_{d_n}(f) \to V_a^b(f)$$

Avem

$$s_{d_n}(|f'|) \to \underline{\int_a^b} |f'|\,dx\ , \quad S_{d_n}(|f'|) \to \overline{\int_a^b} |f'|\,dx$$

şi deci

$$\underline{\int_a^b} |f'|\,dx \leqslant V_a^b(f) \leqslant \overline{\int_a^b} |f'|\,dx\,.$$

Dacă în plus $|f'|$ este integrabilă Riemann atunci

$$V_a^b(f) = \int_a^b |f'|\,dx\,.$$

Propoziţia 2. Fie $f: [a,b] \to R$ o funcţie cu variaţie mărginită. Atunci f este mărginită şi pentru orice $c \in [a,b]$ avem

$$|f(x)| \leqslant |f(c)| + V_a^b(f) \qquad (*) \qquad x \in [a,b]$$

Demonstraţie. Fie $x \in [a,b]$, $x \neq c$ şi fie d o diviziune a lui $[a,b]$ care conţine pe x şi c printre punctele sale de diviziune. Atunci avem

$$|f(x)| - |f(c)| \leqslant |f(x) - f(c)| \leqslant V_d(f) \leqslant V_a^b(f)\,.$$

Propoziţia 3. Fie $f,g : [a,b] \to R$ două funcţii cu variaţie mărginită. Atunci $f+g$ şi $f.g$ şi $|f|$ sînt cu variaţie mărginită şi avem

$$V_a^b(f+g) \leqslant V_a^b(f) + V_a^b(g)$$

$$V_a^b(fg) \leqslant \|g\|\, V_a^b(f) + \|f\|\, V_a^b(g)$$

$$V_a^b(|f|) \leqslant V_a^b(f)$$

unde pentru orice funcţie h pe $[a,b]$ am notat

$$\|h\| = \sup\{|h(x)| \mid x \in [a,b]\}\,.$$

Demonstraţie. Fie $d = (x_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ o diviziune a lui $[a,b]$. Avem

$$V_d(f+g) = \sum_{i=0}^{n-1} |(f+g)(x_{i+1}) - (f+g)(x_i)| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=0}^{n-1}|f(x_{i+1})-f(x_i)| + \sum_{i=0}^{n-1}|g(x_{i+1})-g(x_i)| = V_d(f)+V_d(g),$$

$$V_d(f.g) = \sum_{i=0}^{n-1}|(fg)(x_{i+1}) - (fg)(x_i)| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=0}^{n-1}|g(x_{i+1})|\,(|f(x_{i+1})-f(x_i)|) + \sum_{i=0}^{n-1}|f(x_i)|\,|g(x_{i+1})-g(x_i)|$$

$$\leqslant \|g\|\ V_d(f) + \|f\|\ V_d(g),$$

$$V_d(|f|) \leqslant \sum_{i=0}^{n-1}\big||f(x_{i+1})| - |f(x_i)|\big| \leqslant \sum_{i=0}^{n-1}|f(x_{i+1})-f(x_i)| = V_{\delta}(f).$$

De aici rezultă

$$V_d(f+g) \leqslant V_a^b(f) + V_a^b(g)$$

$$V_d(fg) \leqslant \|g\|\ V_a^b(f) + \|f\|\ V_a^b(g)$$

$$V_d(|f|) \leqslant V_a^b(f)$$

şi deci inegalităţile din enunţul propoziţiei.

Propozitia 4. Fie $f: [a,b] \to \mathbb{R}$. Atunci pentru orice $c \in (a,b)$ avem

$$V_a^b(f) = V_a^c(f) + V_c^b(f)$$

Demonstratie. Fie d o diviziune a lui $[a,b]$ şi δ o diviziune a lui $[a,b]$ mai fină ca d care conţine şi punctul c ca punct de diviziune. Punem

$$\delta:\ a = x_0 < x_1 < \dots < x_k = c < x_{k+1} < \dots < x_n = b$$

şi notăm cu δ', δ'' diviziunile lui $[a,c]$ şi respectiv $[c,b]$ date de

$$\delta':\ a = x_0 < x_1 < \dots < x_k = c$$

$$\delta'':\ c = x_k < x_{k+1} < \dots < x_n = b\ .$$

Avem

$$V_d(f) \leq V_\delta(f) = V_{\delta'}(f) + V_{\delta''}(f) \leq V_a^c(f) + V_c^b(f)$$

şi deci

$$V_a^b(f) \leq V_a^c(f) + V_c^b(f).$$

Reciproc, fie δ', δ'' diviziuni ale lui $[a,c]$ şi respectiv $[c,d]$ şi fie δ diviziunea lui $[a,b]$ obţinută reunind mulţimile punctelor de diviziune ale lui δ' şi δ''. Avem

$$V_{\delta'}(f) + V_{\delta''}(f) = V_\delta(f) \leq V_a^b(f)$$

şi deci trecînd la supremum după δ' şi δ'' avem

$$V_a^c(f) + V_c^b(f) \leq V_a^b(f)$$

<u>Corolar 5</u>. Fie $f: [a,b] \to R$ şi $c \in (a,b)$. Atunci f este cu variaţie mărginită pe $[a,b]$ dacă şi numai dacă este cu variaţie mărginită pe $[a,c]$ şi $[c,b]$.

<u>Propoziţia 6</u>. Fie $f: [a,b] \to R$. Atunci f este cu variaţie mărginită dacă şi numai dacă există două funcţii crescătoare f_1, f_2 astfel încît $f = f_1 - f_2$.

<u>Demonstraţie</u>. Dacă f_1, f_2 sînt crescătoare, atunci ele sînt cu variaţie mărginită şi deci $f = f_1 - f_2$ este de asemenea cu variaţie mărginită în virtutea propoziţiei 3 . Reciproc, presupunem că f este cu variaţie mărginită.

Notăm cu f_1 funcţia pe $[a,b]$ definită prin

$$f_1(x) = f(x) + V_a^x(f)$$

şi cu f_2 funcţia pe $[a,b]$ definită prin

$$f_2(x) = V_a^x(f).$$

Din propoziţia 4 rezultă că f_2 este crescătoare întrucît dacă $a \leq x < y \leq b$ avem

$$f_2(y) = V_a^y(f) = V_a^x(f) + V_x^y(f) = f_2(x) + V_x^y(f) \geq f_2(x)$$

Pe de altă parte dacă $a \leqslant x < y \leqslant b$ avem

$$|f(y) - f(x)| \leqslant V_x^y(f)$$

şi deci

$$f_1(y) - f_1(x) = f(y) - f(x) + V_a^y(f) - V_a^x(f) =$$

$$= f(y) - f(x) + V_x^y(f) \geqslant -|f(y) - f(x)| + V_x^y(f) \geqslant 0$$

ceea ce arată că f_1 este de asemenea crescătoare.

Afirmaţia rezultă observînd că

$$f = f_1 - f_2 .$$

Exerciţii. 1. Fie $f: [a,b] \to R$ cu variaţie mărginită astfel încît există $\alpha > 0$ cu $|f(x)| \geqslant \alpha$ pentru orice $x \in [a,b]$. Atunci $1/f$ este de asemenea cu variaţie mărginită şi

$$V_a^b(1/f) \leqslant \frac{1}{\alpha^2} V_a^b(f)$$

2. Fie $g: [c,d] \to R$ o funcţie derivabilă cu derivata mărginită şi $f: [a,b] \to [c,d]$ o funcţie cu variaţie mărginită. Să se arate că $g \circ f$ este cu variaţie mărginită şi

$$V_a^b(g \circ f) \leqslant \|g'\| V_a^b(f)$$

unde $\|g'\| = \sup \{ |g'(x)| \mid x \in [a,b] \}$.

3. Se consideră funcţia $f: [0,1] \to R$ egală cu 1 în punctele raţionale şi egală cu 0 în punctele raţionale. Să se arate că pentru orice interval $[a,b] \subset [0,1]$, $a < b$ funcţia $f|_{[a,b]}$ nu este cu variaţie mărginită.

4. Să se construiască o funcţie continuă pe $[0,1]$ astfel încît oricare ar fi $a,b \in [0,1]$ cu $a < b$ funcţia $f|_{[a,b]}$ să nu fie cu variaţie mărginită.

5. Să se arate că dacă $f: [a,b] \to R$ este cu variaţie mărginită atunci f este continuă dacă şi numai dacă funcţia $x \to V_a^x(f)$ este continuă.

6. Fie $(f_n)_n$ un şir de funcţii reale pe $[a,b]$ cu variaţie mărginită şi $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ astfel încît $(f_n)_n$ converge simplu la f şi există $\alpha > 0$ cu proprietatea

$$V_a^b(f_n) \leqslant \alpha \quad (\forall) \; n \in \mathbb{N} .$$

Atunci f este de asemenea cu variaţie mărginită şi

$$V_a^b(f) \leqslant \alpha$$

7. Fie $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ o funcţie cu variaţie mărginită. Să se arate că în orice punct $x \in [a,b]$ există

$$f(x-0) := \lim_{\substack{y \to x \\ y < x}} f(y) , \quad \lim_{\substack{y \to x \\ y > x}} f(y) = : f(x+0)$$

şi mulţimea punctelor de discontinuitate pentru f este finită sau numărabilă.

2. Integrabilitatea Stieltjes-Riemann

Definiţie. Fie $f,g: [a,b] \to \mathbb{R}$ două funcţii definite pe un interval $[a,b] \subset \mathbb{R}$, $a < b$. Dacă $d = (x_k)_{0 \leqslant k \leqslant a}$ este o diviziune a intervalului $[a,b]$ şi dacă $\xi_i = (\xi_k)_{0 \leqslant k \leqslant n-1}$ este un sistem de puncte intermediare asociate diviziunii d atunci numărul

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi)(g(x_{i+1}) - g(x_i))$$

se numeşte sumă Stieltjes-Riemann (pe scurt sumă S-R) asociată perechii ordonate de funcţii (f,g) diviziunii d şi sistemului ξ, şi se notează prin

$$\sigma_d(f,g, \xi)$$

Funcţia f se numeşte integrabilă Stieltjes-Riemann (pe scurt integrabilă S-R) în raport cu g pe $[a,b]$ dacă există un număr real I cu proprietatea: pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\eta_\varepsilon > 0$ astfel încît

$$\nu(d) < \eta_\varepsilon , \quad \xi \in \xi(d) \Rightarrow |\sigma_d(f,g\,\xi) - I| < \varepsilon .$$

Numărul I cu această proprietate este unic determinat şi se numeşte integrala Stieltjes-Riemann (pe scurt integrala S-R) a lui f în raport cu g şi se notează

$$\int_a^b f\,dg\,.$$

Remarcă. 1) Dacă g este funcţie pe $[a,b]$ dată de $g(x)=x$ atunci $\sigma_d(f,g,\xi)=\sigma_d(f,\xi)$ şi integrabilitatea S-R a lui f în raport cu g este integrabilitatea Riemann a lui f.

2) Dacă g_1, g_2 sînt două funcţii pe $[a,b]$, d este o diviziune a lui $[a,b]$ şi $\xi\in\xi(d)$ atunci avem

$$\sigma_d(f,g_1+g_2,\xi)=\sigma_d(f,g_1,\xi)+\sigma_d(f,g_1,\xi)$$

$$\sigma_d(\alpha f,g,\xi)=\sigma_d(f,\alpha g,\xi)=\alpha\sigma_d(f,g,\xi)\quad(\forall)\alpha\in R$$

$$\sigma_d(g_1+g_2,f,\xi)=\sigma_d(g_1,f,\xi)+\sigma_d(g_1,f,\xi).$$

De aici rezultă că dacă f este integrabilă S-R în raport cu g_1 şi cu g_2 atunci f este integrabilă S-R în raport cu g_1+g_2 şi

$$\int_a^b f\,d(g_1+g_2)=\int_a^b f\,d\,g_1+\int_a^b f\,d\,g_2\,;$$

dacă f este integrabilă S-R în raport cu g_1 atunci α f este integrabilă S-R în raport cu g_1, f este integrabilă S-R în raport cu $\alpha\,g_1$ şi avem

$$\int_a^b(\alpha f)d\,g_1=\alpha\int_a^b f\,d\,g_1=\int_a^b f\,d(\alpha\,g_1);$$

Dacă g_1,g_2 sînt integrabile S-R în raport cu f atunci g_1+g_2 este integrabilă S-R în raport cu f şi

$$\int_a^b(g_1+g_2)df=\int_a^b g_1df+\int_a^b g_2df.$$

3) Dacă f,g sînt funcţii reale pe $[a,b]$, d este o diviziune a lui $[a,b]$ şi $\xi\in\xi(d)$ atunci avem

$$|\sigma_d(f,g,\xi)| \leqslant \|f\|\, V_d(g)$$

unde $\|f\| = \sup\{|f(x)|\ |\ x\in[a,b]\}$. De aici rezultă că dacă f este integrabilă S-R în raport g şi g este cu variaţie mărginită atunci

$$\left|\int_a^b f\, dg\right| \leqslant \|f\|\, V_a^b(g).$$

4) Dacă f,g sînt funcţii reale pe $[a,b]$ astfel încît f este integrabilă S-R în raport cu g atunci pentru orice şir $(d_n)_n$ de diviziuni ale intervalului $[a,b]$ şi pentru orice alegere $\xi^{(n)}\in\xi(d_n)$ are loc relaţia

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_{d_n}(f,g,\xi^{(n)}) = \int_a^b f\, dg$$

<u>Propoziţia 7</u>. (Formula integrării prin părţi). Fie f,g funcţii reale pe $[a,b]$ astfel încît f este integrabilă S-R în raport cu g. Atunci g este integrabilă S-R în raport cu f şi are loc relaţia

$$\int_a^b f dg + \int_a^b g df = (fg)(b) - (fg)(a)$$

<u>Demonstraţie</u>. Fie $\mathcal{L} := \int_a^b f\, dg$ şi fie $\varepsilon > 0$. Atunci există $\eta_\varepsilon > 0$ cu proprietatea

$$\nu(d) < 2\eta_\varepsilon,\ \xi\in\xi(d) \Longrightarrow |\sigma_d(f,g,\xi) - \mathcal{L}| < \varepsilon.$$

Fie acum $d = (x_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ o diviziune a lui $[a,b]$ cu $\nu(d) < \eta_\varepsilon$ şi fie $\xi = (\xi_k)_{0\leqslant k\leqslant n-1} \in \xi(d)$. Notăm cu δ diviziunea lui $[a,b]$ dată de punctele $x_0, \xi_0, \xi_1, \dots \xi_{n-1}, x_n$ adică

$$\delta:\ a = x_0 \leqslant \xi_0 \leqslant \xi_1 \leqslant \xi_2 \leqslant \dots \leqslant \xi_{n-1} \leqslant x_n = b.$$

Avem $\nu(\delta) \leqslant 2\eta_\varepsilon$. Deoarece

$$x_0 \leqslant x_0 \leqslant \xi_0,\ \xi_0 \leqslant x_1 \leqslant \xi_1,\ \xi_1 \leqslant x_2 \leqslant \xi_2, \dots\ \xi_{n-2} \leqslant x_{n-1} \leqslant \xi_{n-1} \leqslant x_n \leqslant x_n$$

rezultă că $\theta = (x_k)_{0 \leq k \leq n}$ este un sistem de puncte intermediare asociat lui δ. Din

$$\sigma_d(g,f,\xi) + \sigma_\delta(f,g,\theta) = \sum_{k=0}^{n-1} g(\xi_k)(f(x_{k+1}) - f(x_k)) +$$

$$+ f(x_0)(g(\xi_0) - g(x_0)) + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)(g(\xi_i) - g(\xi_{i-1}) + f(x_n)(g(x_n) -$$

$$- g(\xi_{n-1})) = (fg)(x_n) - (fg)(x_0) = (f.g)(b) - (fg)(a)$$

şi din

$$|\sigma_\delta(f,g,\theta) - \mathcal{L}| < \varepsilon$$

rezultă

$$\left|[(fg)(b) - (f.g)(a) - \mathcal{L}] - \sigma_d(g,f,\xi)\right| < \varepsilon$$

ceea ce arată că g este integrabilă S-R în raport cu f şi în plus

$$\int_a^b g df = (fg)(b) - (fg)(a) - \mathcal{L}$$

adică

$$\int_a^b f\, dg + \int_a^b g\, df = (fg)(b) - (fg)(a) .$$

<u>Propoziţia 8</u>. Fie f,g funcţii reale pe $[a,b]$. Atunci condiţia necesară şi suficientă ca f să fie integrabilă S-R în raport cu g este ca pentru orice $\varepsilon > 0$ să existe $\eta_\varepsilon > 0$ cu proprietatea

$$\left.\begin{array}{l}\nu(d') < \eta_\varepsilon,\ \nu(d'') < \eta_\varepsilon \\ \xi' \in \xi(d'),\ \xi'' \in \xi(d'')\end{array}\right\} \Rightarrow |\sigma_{d'}(f,g,\xi') - \sigma_{d''}(f,g,\xi'')| < \varepsilon$$

<u>Demonstraţie</u>. Dacă f este integrabilă S-R în raport cu g atunci pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\eta_\varepsilon > 0$ cu proprietatea

$$\left.\begin{array}{l}\nu(d) < \eta_\varepsilon \\ \xi \in \xi(d)\end{array}\right\} \Rightarrow \left|\sigma_d(f,g,\xi) - \int_a^b f\, dg\right| < \varepsilon/2$$

De aici rezultă

$$\begin{matrix}\nu(d')<\eta_\varepsilon, & \nu(d'')<\eta_\varepsilon \\ \xi'\in\xi(d'), & \xi''\in\xi(d'')\end{matrix} \Rightarrow |\sigma_{d'}(f,g,\xi')-\sigma_{d''}(f,g,\xi'')| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\sigma_{d'}(f,g,\xi') - \int_a^b f\,dg\right| + \left|\sigma_{d''}(f,g,\xi'') - \int_a^b f\,dg\right| < \varepsilon.$$

Presupunem acum că este îndeplinită condiția din enunț și fie $(d_n)_n$ un șir de diviziuni ale lui $[a,b]$ cu $\nu(d_n) \to 0$ și pentru fiecare n, $\xi^{(n)} \in \xi(d_n)$. Dacă $\varepsilon > 0$ atunci există $\eta_\varepsilon > 0$ cu proprietatea

$$\begin{matrix}\nu(d')<\eta_\varepsilon, \nu(d'')<\eta_\varepsilon \\ \xi'\in\xi(d'), \xi''\in\xi(d'')\end{matrix} \Rightarrow |\sigma_{d'}(f,g,\xi') - \sigma_{d''}(f,g,\xi'')| < \varepsilon/2.$$

Din $\nu(d_n) \to 0$ rezultă că există $n_\varepsilon \in N$ astfel încît

$$n \geqslant n_\varepsilon \Rightarrow \nu(d_n) < \eta_\varepsilon$$

și deci

$$n,m \geqslant n_\varepsilon \Rightarrow |\sigma_{d_n}(f,g,\xi^{(n)}) - \sigma_{d_m}(f,g,\xi^{(m)})| < \varepsilon/2.$$

Așadar, șirul $(\sigma_{d_n}(f,g,\xi^{(n)}))_n$ este un șir Cauchy și deci un șir convergent de numere reale. Notînd

$$\mathcal{L} = \lim_{n\to\infty} \sigma_{d_n}(f,g,\xi^{(n)})$$

avem pentru $n \geqslant n_\varepsilon$

$$|\sigma_{d_n}(f,g,\xi^{(n)}) - \mathcal{L}| \leqslant \varepsilon/2, \quad \nu(d_n) < \eta_\varepsilon$$

și deci

$$\begin{matrix}\nu(d)<\eta_\varepsilon \\ \xi\in\xi(d)\end{matrix} \Rightarrow |\sigma_d(f,g,\xi) - \mathcal{L}| \leqslant |\sigma_d(f,g,\xi) - \sigma_{d_n}(f,g,\xi^{(n)})| +$$

$$+ |\sigma_{d_n}(f,g,\xi^{(n)}) - \mathcal{L}| < \varepsilon.$$

De aici rezultă că f este integrabilă S-R în raport cu g.

Propoziția 9. Fie f,g funcții reale pe $[a,b]$. Dacă g este cu variație mărginită și f este continuă atunci f este integrabilă S-R în raport cu g și g este integrabilă S-R în raport cu f.

Demonstrație. Va fi suficient, ținînd seama de propoziția 7, să arătăm că f este integrabilă S-R în raport cu g. Vom folosi criteriul dat în propoziția 8. Intrucît f este uniform continuă pe $[a,b]$ rezultă că pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\eta_\varepsilon > 0$ astfel încît

$$x', x'' \in [a,b], \quad |x'-x''| < 2\eta_\varepsilon \Rightarrow |f(x')-f(x'')| < \frac{\varepsilon}{\alpha}$$

unde $\alpha > V_a^b(g)$. Fie acum d', d'' diviziuni ale lui $[a,b]$ cu $\nu(d') < \eta_\varepsilon$, $\nu(d'') < \eta_\varepsilon$ și fie $\xi' \in \xi(d')$, $\xi'' \in \xi(d'')$. Vom arăta că

$$|\sigma_{d'}(f,g,\xi') - \sigma_{d''}(f,g,\xi'')| < \varepsilon .$$

Punem

$$d' = (x'_k)_{0 \leq k \leq n'}, \quad d'' = (x''_\ell)_{0 \leq \ell \leq n''}$$

$$\xi' = (\xi'_k)_{0 \leq k \leq n'-1}, \quad \xi'' = (\xi''_\ell)_{0 \leq \ell \leq n''-1}$$

și fie $d = (x_i)_{0 \leq i \leq n}$ diviziunea $d' \cup d''$. Pentru fiecare $0 \leq i \leq n$ există un unic indice k_i, $0 \leq k_i \leq n'$ astfel încît

$$[x_i, x_{i+1}] \subset [x'_{k_i}, x'_{k_i+1}]$$

și există un unic indice ℓ_i, $0 \leq \ell_i \leq n''$ astfel încît

$$[x_i, x_{i+1}] \subset [x''_{\ell_i}, x''_{\ell_i+1}]$$

Notăm pentru $i \in \{0,1,\dots n\}$,

$$\bar{\xi}'_i = \xi'_{k_i}, \quad \bar{\xi}''_i = \xi''_{\ell_i}$$

Din $\bar{\xi}'_i \in [x'_{k_i}, x'_{k_i+1}]$, $\bar{\xi}''_i \in [x''_{\ell_i}, x''_{\ell_i+1}]$ și din relațiile de definiție ale lui k_i și ℓ_i rezultă că

$$|\bar{\xi}'_i - \bar{\xi}''_i| \leq |\bar{\xi}'_i - x_i| + |x_i - \bar{\xi}''_i| < 2\eta_\varepsilon$$

şi deci

$$|f(\xi_i') - f(\xi_i'')| < \varepsilon/\mathcal{L} .$$

Avem

$$\sigma_{d'}(f,g,\xi') = \sum_{k=0}^{n'-1} f(\xi_k')(g(x_{k+1}') - g(x_k')) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\overline{\xi}_i')(g(x_{i+1}) - g(x_i))$$

$$\sigma_{d''}(f,g,\xi'') = \sum_{\ell=0}^{n''-1} f(\xi_\ell'')(g(x_{\ell+1}'') - g(x_\ell'')) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\overline{\xi}_i'')(g(x_{i+1}) - g(x_i))$$

şi deci

$$|\sigma_{d'}(f,g,\xi') - \sigma_{d''}(f,g,\xi'')| \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} |f(\overline{\xi}_i') - f(\overline{\xi}_i'')|\, |g(x_{i+1}) - g(x_i)| \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon/\mathcal{L} \sum_{i=0}^{n-1} |g(x_{i+1}) - g(x_i)| \leqslant \varepsilon/\mathcal{L}\, V_a^b(g) < \varepsilon .$$

<u>Propoziţia 10</u>. Dacă f,g sînt funcţii reale pe $[a,b]$ astfel încît f este integrabilă Riemann, iar g este derivabilă şi cu derivata g' integrabilă Riemann, atunci f este integrabilă S-R în raport cu g şi are loc relaţia

$$\int_a^b f\,dg = \int_a^b f.g'\,dx .$$

<u>Demonstraţie</u>. Din ipoteză rezultă că $f.g'$ este integrabilă Riemann pe $[a,b]$. Fie $\varepsilon > 0$. Intrucît f este integrabilă Riemann pe $[a,b]$ rezultă că există $\eta_\varepsilon > 0$ astfel încît

$$\nu(d) < \eta_\varepsilon \Longrightarrow S_d(f) - s_d(f) < \varepsilon/\mathcal{L}$$

unde $\mathcal{L} > \|g'\| = \sup\{|g'(x)| \mid x \in [a,b]\}$. Vom arăta că

$$\begin{matrix}\nu(d) < \eta_\varepsilon \\ \xi \in \xi(d')\end{matrix} \Longrightarrow \left|\sigma_d(f,g,\xi) - \int_a^b f.g'\,dx\right| < \varepsilon .$$

ceea ce va încheia demonstrația. Punînd

$$d = (x_k)_{0 \leq k \leq n}, \quad \xi = (\xi_k)_{0 \leq k \leq n-1}$$

avem

$$\sigma_d(f,g,\xi) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(g(x_{i+1}) - g(x_i)) = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \int_{x_i}^{x_{i+1}} g'(x)dx$$

De aici rezultă că

$$\sigma_d(f,g,\xi) - \int_a^b f.g'\,dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (f(x_i) - f(x))g'(x)dx$$

și deci

$$|\sigma_d(f,g,\xi) - \int_a^b fg'\,dx| \leq \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} |f(x_i) - f(x)|\,|g'(x)|\,dx \leq$$

$$\leq \|g'\| \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} |f(x_i) - f(x)|\,dx \leq$$

$$\leq \|g'\| \, (S_d(f) - s_d(f)) \leq (\varepsilon/\alpha) \, \|g'\| < \varepsilon .$$

<u>Propoziția 11</u>. Fie $f: [a,b] \to R$ o funcție integrabilă S-R în raport cu $g: [a,b] \to R$ și fie $c \in (a,b)$. Atunci $f|_{[a,c]}$ și $f|_{[c,b]}$ sînt integrabile S-R în raport cu $g|_{[a,c]}$ și respectiv $g|_{[c,b]}$ și

$$\int_a^b fdg = \int_a^c fdg + \int_c^b fdg$$

Reciproc, dacă $f|_{[a,c]}$ și $f|_{[c,b]}$ sînt integrabile S-R în raport cu $g|_{[a,c]}$ și respectiv $g|_{[c,b]}$, dacă g este continuă în c și f este mărginită pe o vecinătate a lui c, atunci f este integrabilă S-R relativ la g.

<u>Demonstrație</u>. Fie $\varepsilon > 0$. Atunci există $\eta_\varepsilon > 0$ astfel încît pentru orice diviziune d a lui $[a,b]$ cu $\nu(d) < \eta_\varepsilon$ și pentru orice

$\xi \in \xi(d)$ avem

$$\left|\sigma_d(f,g,\xi) - \int_a^b fdg\right| < \varepsilon/2 .$$

Fie acum d', d" două diviziuni ale lui $[a,c]$ şi fie δ o diviziune a lui $[c,b]$ cu normele $< \eta_\varepsilon$. Atunci $d' \cup \delta$, $d'' \cup \delta$ sînt diviziuni ale lui $[a,b]$ cu normele mai mici ca η_ε. De aici rezultă că alegînd ξ', ξ'' şi θ sisteme de puncte intermediare asociate lui d', d" şi δ atunci

$$\left|\sigma_{d'}(f,g,\xi') + \sigma_\delta(f,g,\theta) - \int_a^b fdg\right| < \varepsilon/2$$

$$\left|\sigma_{d''}(f,g,\xi'') + \sigma_\delta(f,g,\theta) - \int_a^b fdg\right| < \varepsilon/2$$

şi deci

$$\left|\sigma_{d'}(f,g,\xi') - \sigma_{d''}(f,g,\xi'')\right| < \varepsilon$$

ceea ce arată că $f|_{[a,c]}$ este integrabilă S-R în raport cu $g|_{[a,c]}$. Analog $f|_{[c,b]}$ este integrabilă S-R în raport cu $g|_{[c,b]}$. Luînd acum $(d'_n)_n$ un şir de diviziuni ale lui $[a,c]$ cu $\nu(d'_n) \to 0$ şi $(\delta_n)_n$ un şir de diviziuni ale lui $[c,b]$ cu $\nu(\delta'_n) \to 0$ şi apoi pentru fiecare n, $\xi^{(n)} \in \xi(d'_n)$, $\overline{\xi}^{(n)} \in \xi(\delta'_n)$, avem

$$\int_a^b fdg = \lim_{n\to\infty} \left(\sigma_{d'_n}(f,g,\xi^{(n)}) + \sigma_{\delta'_n}(f,g,\overline{\xi}^{(n)})\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sigma_{d'_n}(f,g,\xi^{(n)}) + \lim_{n\to\infty} \sigma_{\delta'_n}(f,g,\overline{\xi}^{(n)}) = \int_a^c fdg + \int_c^b fdg.$$

Reciproc, presupunem că $f|_{[a,c]}$ este integrabilă S-R în raport cu $g|_{[a,c]}$ şi că $f|_{[c,b]}$ este integrabilă S-R în raport cu $g|_{[c,b]}$. Fie $\eta > 0$ şi $\mathcal{L} > 0$ astfel încît

$$|f(y)| \le \mathcal{L} \quad (\forall) \quad y \in [a,b] \text{ cu } |y-x| < \eta .$$

Din ipoteză, pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\eta_\varepsilon > 0$, $\eta_\varepsilon < \eta$ cu proprietatea că pentru orice diviziune d' (resp. d") a lui $[a,c]$ (resp. $[c,b]$) cu $\nu(d') < \eta_\varepsilon$, $\nu(d'') < \eta_\varepsilon$ să avem

$$\xi' \in \xi(d') \Longrightarrow \left|\sigma_{d'}(f,g,\xi') - \int_a^b f dg\right| < \varepsilon/2$$

$$\xi'' \in \xi(d'') \Longrightarrow \left|\sigma_{d''}(f,g,\xi'') - \int_a^b f dg\right| < \varepsilon/2$$

$$|x-c| < \eta_\varepsilon \Longrightarrow |g(x)-g(c)| < \varepsilon/4\alpha .$$

Fie acum $d = (x_i)_{0 \le i \le n}$ o diviziune a lui $[a,b]$ cu $\nu(d) < \eta_\varepsilon$ şi $\xi = (\xi_k)_{0 \le k \le n-1} \in \xi(d)$. Fie $k \in \{0,1,\dots n-1\}$ astfel încît $x_k \le c < x_{k+1}$. Dacă $c = x_k$ atunci notînd cu d' (resp. d") diviziunea lui $[a,c]$ (resp. $[c,b]$) dată de

$$d' : a = x_0 < x_1 < \dots < x_k = c, \quad d'' : c = x_k < x_{k+1} < \dots < x_n = b$$

$$\xi' = (\xi_i)_{0 \le i \le k-1}, \quad \xi'' = (\xi_i)_{k \le i \le n-1}$$

avem $\nu(d') < \eta_\varepsilon$, $\nu(d'') < \eta_\varepsilon$ şi deci

$$\sigma_d(f,g,\xi) = \sigma_{d'}(f,g,\xi') + \sigma_{d''}(f,g,\xi''),$$

$$\left|\sigma_d(f,g,\xi) - \int_a^c f dg - \int_c^b f dg\right| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Dacă $x_k < c < x_{k+1}$ atunci notînd cu d' (resp. d") diviziunea lui $[a,c]$ (resp. $[c,b]$) dată de

$$d' : a = x_0 < \dots < x_k < c, \quad d'' : c < x_{k+1} < \dots < x_n = b$$

avem $\nu(d') < \eta_\varepsilon$, $\nu(d'') < \eta_\varepsilon$ şi deci punînd

$$\xi' = (\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{k-1}, c), \quad \xi'' = (c, \xi_{k+1}, \xi_{k+2}, \dots, \xi_{n-1})$$

avem $\xi' \in \xi(d')$, $\xi'' \in \xi(d'')$ şi

$$|\sigma_d(f,g,\xi) - \sigma_{d'}(f,g,\xi') - \sigma_{d''}(f,g,\xi'')| =$$

$$= |f(\xi_k)(g(x_{k+1}) - g(x_k)) - f(c)(g(c) - g(x_k) - f(c)(g(x_{kn}) - g(c))|$$

$$\leqslant (|g(x_{k+1}) - g(c)| + |g(c) - g(x_k)|)\ |f(\xi_k) - f(c)| \leqslant$$

$$\leqslant 2 \cdot \varepsilon/4\mathcal{L} \ . \ 2\mathcal{L} = \varepsilon .$$

De aici rezultă că

$$\left|\sigma_d(f,g,\xi) - \int_a^c f dg - \int_c^b f dg\right| \leqslant 2\varepsilon$$

ceea ce arată că f este integrabilă S-R în raport cu g.

Remarcă. Dacă g nu este continuă în c sau f nu este mărginită pe o vecinătate a lui c, atunci afirmaţia din enunţul propoziţiei nu mai rămîne, în general, adevărată. Intr-adevăr, se ia $g=0$ pe $[a,c]$ şi $g=x-c$ pe $[c,a]$ şi $f=\frac{1}{c-x}$ pe $[a,c)$ şi 0 pe $[c,b]$. Evident $f|_{[a,c]}$ este integrabilă S-R relativ la $g|_{[a,c]}$ şi $\int_a^c f dg = 0$ şi $f|_{[c,b]}$ este integrabilă S-R relativ la $g|_{[c,b]}$ şi $\int_c^b f dg = 0$. Pe de altă parte, f nu este integrabilă S-R relativ la g pe $[a,b]$ întrucît există diviziuni d cu $\nu(d) < \frac{1}{n}$ şi $\xi \in \xi(d)$ cu

$$\sigma_d(f,g,\xi) = 1$$

şi deci, dacă f este integrabilă S-R relativ la g, atunci ar trebui să avem

$$\int_a^b f dg = 1$$

Exerciţii

1. Fie $g: [a,b] \to \mathbb{R}$. Să se arate că orice funcţie constantă este integrabilă S-R în raport cu g şi

$$\int_a^b dg = g(b) - g(a).$$

2. Să se arate că dacă g este cu variaţie mărginită pe $[a,b]$ şi

$$\int_a^b f dg \geqslant 0$$

pentru orice funcţie continuă şi pozitivă f pe $[a,b]$ atunci g este crescătoare.

3. Fie $g: [a,b] \longrightarrow R$. Atunci următoarele afirmaţii sînt echivalente:

i) g este integrabilă Riemann

ii) orice funcţie derivabilă cu derivata integrabilă Riemann este integrabilă S-R în raport cu g

4. Fie $f: [a,b] \longrightarrow R$. Atunci următoarele afirmaţii sînt echivalente:

i) f este continuă

ii) f este integrabilă S-R în raport cu orice funcţie cu variaţie mărginită

iii) f este integrabilă S-R în raport cu orice funcţie crescătoare

5. Fie $g: [a,b] \longrightarrow R$ o funcţie integrabilă S-R în raport cu g. Să se arate că

$$\int_a^b g dg = g^2(b) - g^2(a).$$

6. Fie $g: [a,b] \longrightarrow R$ o funcţie crescătoare şi $f: [a,b] \longrightarrow R$ o funcţie mărginită. Pentru orice diviziune $d = (x_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ punem

$$s_d(f) = \sum_{i=0} m_i^f \, (g(x_{i+1}) - g(x_i))$$

$$S_d(f) = \sum_{i=0}^{n-1} M_i^f \, (g(x_{i+1}) - g(x_i))$$

unde $m_i^f = \inf \left\{ f(x) \mid x \in [x_i, x_{i+1}] \right\}$, $M_i^f = \sup \left\{ f(x) \mid x \in [x_i, x_{i+1}] \right\}$.

Notăm de asemenea

$$\underline{\int_a^b} fdg := \sup_d s_d(f), \quad \overline{\int_a^b} fdg := \inf_d S_d(f).$$

Să se arate că

i) Pentru orice şir de diviziuni $(d_n)_n$ cu $\nu(d_n) \to 0$ avem

$$\lim_n s_{d_n}(f) = \int_{-a}^{b} fdg, \quad \lim_n S_{d_n}(f) = \int_a^{-b} fdg$$

ii) Dacă f este integrabilă S-R în raport cu g atunci

$$\int_{-a}^{b} fdg = \int_a^{-b} fdg = \int_a^b fdg$$

iii) Dacă

$$\int_{-a}^{b} fdg = \int_a^{-b} fdg$$

atunci f este integrabilă S-R în raport cu g.

7. Fie g o funcţie crescătoare pe $[a,b]$ şi f_1, f_2 două funcţii mărginite pe $[a,b]$, integrabile S-R în raport cu g. Atunci $|f_1|$ şi $f_1 \cdot f_2$ sînt de asemenea integrabile S-R în raport cu g.

8. Fie $g: [a,b] \to R$ o funcţie cu variaţie mărginită şi $(f_n)_n$ un şir de funcţii reale mărginite pe $[a,b]$ care converge uniform pe $[a,b]$ la o funcţie f. Să se arate că dacă fiecare funcţie f_n este integrabilă S-R în raport cu g atunci f este de asemenea integrabilă S-R în raport cu g şi

$$\int_a^b fdg = \lim_n \int_a^b f_n dg$$

9. Fie f,g două funcţii reale pe $[a,b]$ astfel încît f este integrabilă S-R în raport cu g şi fie $c \in [a,b]$. Atunci există o vecinătate U a lui c astfel încît g este constantă pe U sau f este mărginită pe U.

lo. Fie f,g,h trei funcţii reale pe $[a,b]$ care sînt continue şi cu variaţie mărginită. Să se arate că are loc relaţia

$$\int_a^b fd(gh) + \int_a^b gd(fh) + \int_a^b hd(fg) = (fgh)(b) - (fgh)(a)$$

BIBLIOGRAFIE

1. Bourbaki N. Fonctions d'une variable réelle (Theórie élémentaire), Paris, Herman, 1961
2. Colojoară I. Analiză matematică. Ed.Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1983
3. Dieudonné J. Éléments d'analyse I. Gauthier-Villars, Paris, 1969
4. Ganea T. Serii trigonometrice. Ed. Tehnică, Bucureşti, 1956
5. Grauert H., Lieb I, Fischer W. Differential und Integralrechnung, Springer Verlag, Berlin, 1968
6. Gussi Gh. Itinerar în analiza matematică. Ed.Albatros, Bucureşti, 197o
7. Fihtengolţ G.M. Curs de calcul diferenţial şi integral, Moscova, 196o
8. Lang S. Analysis I. Addison Wesley, Massachusetts, 1969
9. Nicolescu M., Dinculeanu N., Marcus S., Analiza matematică (I,II), Ed.Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1971
10. Rudin W. Principles of Mathematical Analysis, Mc.Graw-Hill, New York, 1964
11. Sireţchi Gh. Calcul diferenţial şi integral (I,II), Ed.Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1985
12. Stănăşilă O. Analiza matematică. Ed.Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1981
13. Zygmund A. Trigonometric Series Cambridge University Press, New York, 1959

Bun de tipar 8-II- 1989 Apărut Februarie 1989

Tiraj 725 Coli tipar (Fasc.) 18

Tipar executat sub comanda nr. 105
Tipografia Universităţii Bucureşti