Laborator 7

17.11.2021

1. Repartiții și elemente aleatoare în R

Considerăm v.a. $X \sim Bin(\underset{n}{3}, \underset{p}{0.4})$. Știm că X modelează nr. de H-uri apărute în $n=3$ aruncări consecutive ale unui ban ce are: $\mathbb{P}(\text{apare } H) = \mathbb{P}(H) = \underset{p}{0.4}$. Astfel, X poate lua valorile 0, 1, 2 sau 3 cu probabilitățile:

$$\mathbb{P}(X=k) = C_n^k \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}, \quad \forall k \in \{0,1,2,3\} \qquad \text{(și zero în rest)}$$

$$= C_3^k \cdot \left(\tfrac{2}{5}\right)^k \cdot \left(\tfrac{3}{5}\right)^{3-k}$$

adică:

$$\mathbb{P}(X=0) = C_3^0 \cdot \left(\tfrac{2}{5}\right)^0 \cdot \left(\tfrac{3}{5}\right)^3 = 1 \cdot \left(\tfrac{3}{5}\right)^3 = (0.6)^3 = \boxed{0.216}$$

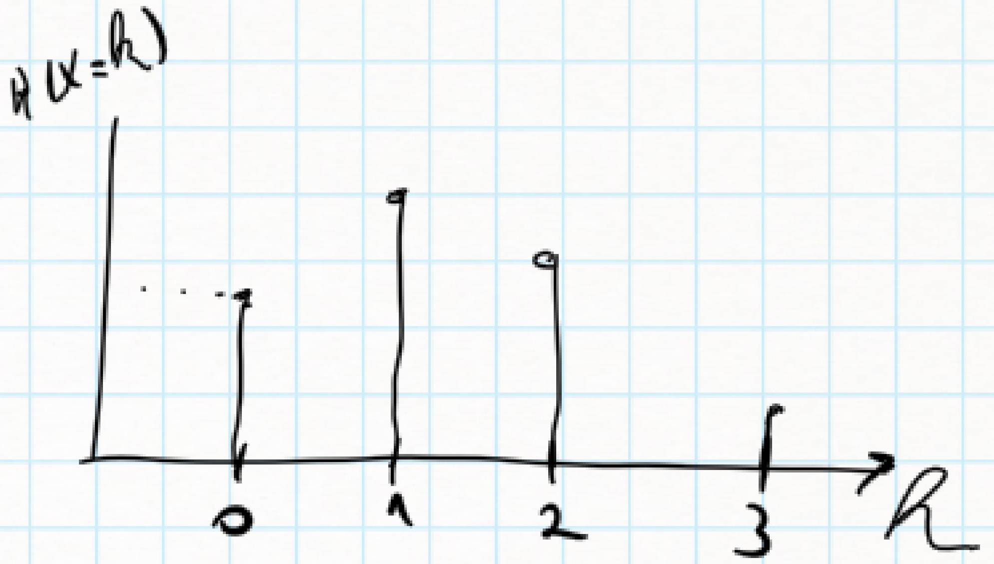
$$\mathbb{P}(X=1) = C_3^1 \cdot \left(\tfrac{2}{5}\right)^1 \cdot \left(\tfrac{3}{5}\right)^2 = 3 \cdot \tfrac{2}{5} \cdot \tfrac{9}{25} = \tfrac{54}{125} = \boxed{0.432}$$

$$\mathbb{P}(X=2) = C_3^2 \cdot \left(\tfrac{2}{5}\right)^2 \cdot \left(\tfrac{3}{5}\right) = 3 \cdot \tfrac{4}{25} \cdot \tfrac{3}{5} = \tfrac{36}{125} = \boxed{0.288}$$

$$\mathbb{P}(X=3) = C_3^3 \cdot \left(\tfrac{2}{5}\right)^3 \cdot \left(\tfrac{3}{5}\right)^0 = 1 \cdot (0.4)^3 = \boxed{0.064}$$

Altfel scris, distribuția lui X este:

$$\begin{pmatrix} 0 & \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 0.432 \end{matrix}} & 2 & 3 \\ 0.216 & & 0.288 & 0.064 \end{pmatrix}$$



În R: dbinom(1, size=3, prob=0.4) = 0.432.

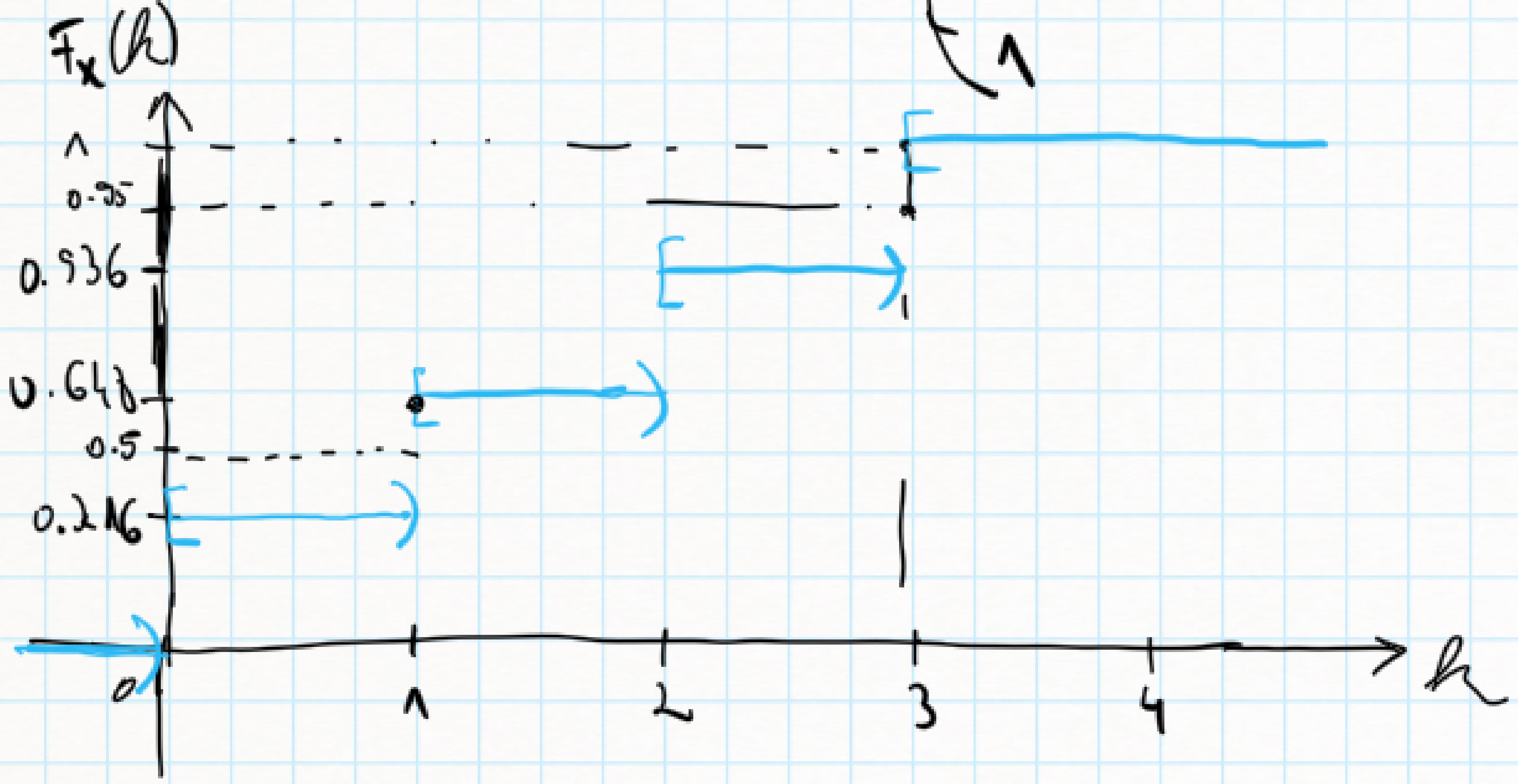
funcția de repartiție = funcția cumulativă asociată (cdf)

Mai departe, funcția de repartiție a lui X este

$F_X : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$

$$F_X(k) = \mathbb{P}(X \leq k) = \begin{cases} 0 & , \text{ dacă } k < 0 \\ 0.216 & , \text{ dacă } k \in [0,1) \\ 0.648 = 0.216 + 0.432 & , \text{ dacă } k \in [1,2) \\ 0.936 = 0.216 + 0.432 + 0.288 & , \text{ dacă } k \in [2,3) \\ 1 & , \text{ dacă } k \geq 3 \end{cases}$$

0, 1, 2, 3



În R: pbinom(2, size = 3, prob = 0.4) = 0.936 $(= F_X(2))$

În R: qbinom(0.936, size = 3, prob = 0.4) = 2

i.e. Am obținut acel k pt. care $F_X(k) = 0.936$.

? qbinom(0.5, size = 3, prob = 0.4)

Obs: F_X nu ia valoarea 0.5.

Răspuns: qbinom întoarce cel mai mic $k \in \mathbb{N}$ pt care $\mathbb{P}(X \leq k) \geq 0.5$. La noi qbinom(0.5, ...) = 1.

În acest caz concret, putem scrie explicit funcția cuantilă. O vom nota cu F_X^{-1}, dar (atenție!) e doar o notație; F_X nu e în general inversabilă.

$$F_X^{-1} : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$F_X^{-1}(u) = \inf\{ x \;/\; F_X(x) \geq u \}$$

$$F_X^{-1}(u) = \begin{cases} 0 & , \text{ dacă } u \in [0, 0.216] \\ 1 & , \text{ dacă } u \in (0,216, 0.648] \\ 2 & , \text{ dacă } u \in (0.648, 0.936] \\ 3 & , \text{ dacă } u \in (0.936, 1]. \end{cases}$$

Fun fact: $S_X(x) = 1 - F_X(x) = 1 - \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(X > x)$ funcția de supraviețuire

1.2. <u>Repartiția binomială</u>

(Exc) Pentru $n \in \mathbb{N}^*$ și $p \in [0,1]$ date, găsiți k care maximizează $\mathbb{P}(X = k)$ când $X \sim Bin(n, p)$.

<u>sol</u>:

$X \sim Bin(n,p) \Rightarrow \mathbb{P}(X = k) = C_n^k \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$

Calculăm raportul (pt $k \in \{1, \dots, n\}$):

$$\frac{P(X=k)}{P(X=k-1)} = \frac{C_n^k \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}}{C_n^{k-1} \cdot p^{k-1} \cdot (1-p)^{n-(k-1)}} = \frac{C_n^k}{C_n^{k-1}} \cdot \frac{p^k}{p^{k-1}} \cdot \frac{(1-p)^{n-k}}{(1-p)^{n-k+1}} =$$

$$= \frac{\cancel{n!}}{\cancel{k!} \cdot \cancel{(n-k)!}} \cdot \frac{\cancel{(k-1)!} \cdot (n-k+1)!}{\cancel{n!}} \cdot p \cdot \frac{1}{1-p}$$

$$= \frac{n-k+1}{k} \cdot \frac{p}{1-p}$$

$$= \frac{(n-k+1) \cdot p}{k \cdot (1-p)}$$

Deci atât timp cât raportul este supraunitar, avem $P(X=k) > P(X=k-1)$, adică probabilitățile cresc. Când raportul devine subunitar avem: $P(X=k-1) > P(X=k)$.

Punctul de întoarcere corespunde celui mai mare k întreg pt. care:

$$\frac{P(X=k)}{P(X=k-1)} \boxed{\geq} 1$$

$$\Leftrightarrow (n-k+1) \cdot p \boxed{\geq} k \cdot (1-p)$$

$$\Leftrightarrow np - \cancel{kp} + p \boxed{\geq} k - \cancel{kp}$$

$$\Leftrightarrow (n+1) \cdot p \boxed{\geq} k \quad \Rightarrow \quad k_{\text{întoarcere}} = \lfloor (n+1) \cdot p \rfloor$$

În R: rezolvăm rapid problema pe un caz concret parcurgând vectorul `dbinom(0:n, size=n, prob=p)`

Temă: Pentru $\lambda > 0$ fixat, găsiți $k \in \mathbb{N}$ care maximizează $\mathbb{P}(X = k)$ pentru $X \sim Pois(\lambda)$.