09.12.2020

Wednesday, December 9, 2020 3:27 PM

Derivabilitate. Puncte de extrem

Definiție!

Fie $f: D \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ $m \geq 2$ și $x_0 \in D \cap D'$

Spunem că f admite derivată parțială în raport cu variabila x_i, $1 \leq i \leq m$ în punctul x_0 dacă f este derivabilă după direcția vectorului e_i în punctul x_0 $\left(\exists \lim\limits_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t \cdot e_i) - f(x_0)}{t} \in \mathbb{R} \right)$

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t \cdot e_i) - f(x_0)}{t} = \frac{\partial f}{\partial e_i}(x_0) \overset{not}{=\!=} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$$

Ex 1 Studiați exist. deriv. parț. ale fct.

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Rezolvare:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \left(\frac{xy}{x^2+y^2} \right)'_x = \frac{(xy)'_x \cdot (x^2+y^2) - xy(x^2+y^2)'_x}{(x^2+y^2)^2} =$$

$$= \frac{y \cdot (x^2+y^2) - xy \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2 \cdot y + y^3 - 2x^2 \cdot y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-x^2 \cdot y + y^3}{(x^2+y^2)^2} \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \left(\frac{xy}{x^2+y^2} \right)'_y = \frac{(xy)'_y \cdot (x^2+y^2) - xy \cdot (x^2+y^2)'_y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x \cdot (x^2+y^2) - xy \cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} =$$

$$= \frac{-xy^2 + x^3}{(x^2+y^2)^2} \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

f admite toate derivatele pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ (1)

În $(0,0)$ studiem existența deriv. parțiale cu definiția.

$$\lim_{t \to 0} \frac{f((0,0) + t \cdot e_1) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f((0,0) + t \cdot (1,0)) - f(0,0)}{t} =$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{\frac{t \cdot 0}{t^2+0^2} - 0}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{0-0}{t} = 0 \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \exists \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 \ (2)$$

$$\lim_{t \to 0} \frac{f((0,0) + t \cdot e_2) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f((0,0) + t \cdot (0,1)) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f((0,0) + (0,t)) - f(0,0)}{t} =$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{f(0,t) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{\frac{0 \cdot t}{0^2+t^2} - 0}{t} = 0 \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0 \ (3)$$

Din (1), (2), (3) $\Rightarrow$ f admite toate deriv. parțiale pe $\mathbb{R}^2$

$\lim_{t\to 0} \frac{\quad}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\quad}{t}$

Din (1), (2), (3) $\Rightarrow$ f admite toate deriv. parțiale pe $\mathbb{R}^2$

$e_1 \to x$

$e_2 \to y$

$\mathbb{R}^n \to (x_1, x_2, \dots, x_n)$ verif pt n deriv. parțiale.

$\frac{\partial f}{\partial x_1} \to e_1 \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} \to e_2 \quad \dots \quad \frac{\partial f}{\partial x_n} \to e_n$

$e_1 = (1, 0, 0, \dots 0) \quad e_2 = (0, 1, 0, 0 \dots 0) \quad e_n = (0, 0, \dots, 0, 1)$

Definiție!

I $f : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^m \qquad f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x))$

$f_1, f_2, \dots, f_m : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

f este diferențiabilă în $x_0 \in D \cap D'$ $\Leftrightarrow$ f este f. deriv. în x_0 $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $f_1, \dots, f_m$ sunt f. derivabile în x_0

$f'(x_0)(x) = x \cdot \underbrace{f'(x_0)}_{\text{derivata}} = x \cdot (f_1'(x_0), \dots, f_m'(x_0)) \quad \forall x \in \mathbb{R}$ Diferențiala în funcție de x_0

II $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m \quad m \geq 2 \quad f(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), f_2(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n))$

$f_1, f_2, \dots, f_m : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$f'(x_0)(x_1, \dots, x_n) = {}^t\left[\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0) \right)_{\substack{i = \overline{1,m} \\ j = \overline{1,n}}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right] \qquad (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

diferențiala în funcție de x_0

Ex. 2 Să se studieze diferențiabilitatea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Etape în rezolvare:
- f continuă pe $\mathbb{R}^2$ (I)
- f diferențiabilă pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ (II)

Etape în rezolvare: f continuă pe $\mathbb{R}^2$ (I); f diferențiabilă pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ (II); $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$ (III)

Rezolvare:

I.

$$\lim_{(x,0)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{x\cdot 0}{\sqrt{x^2+0^2}} = 0$$

$$\lim_{(0,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{y\to 0} \frac{0\cdot y}{\sqrt{0^2+y^2}} = 0$$

- $y = x$

$$\lim_{x\to 0} f(x,x) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\sqrt{2x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{|x|\cdot\sqrt{2}} = \lim_{x\to 0} |x|\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = 0$$

- $y = -x$

$$\lim_{x\to 0} f(x,-x) = \lim_{x\to 0} \frac{-x^2}{\sqrt{x^2+x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{-x^2}{\sqrt{2x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{-x^2}{|x|\cdot\sqrt{2}} = \lim_{x\to 0} -|x|\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = 0$$

- $y = x^2$

$$\lim_{x\to 0} f(x,x^2) = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{\sqrt{x^2+x^4}} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{|x|\cdot\sqrt{1+x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{|x|\cdot x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{0}{\sqrt{1+0}} = 0$$

Dem. că $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$

$\boxed{(0,0) < (0,1),\ (1,2)\ ?\ (3,-1)}$

$$0 \le |f(x,y) - 0| \le g(x,y)$$

$$0 \le |f(x,y)| = \left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| = \frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} \le \frac{|xy|}{\sqrt{x^2}} = \frac{|x|\cdot|y|}{\sqrt{x^2}} = \frac{\cancel{|x|}\cdot|y|}{\cancel{|x|}} = |y|$$

$$x^2+y^2 \ge x^2 \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2} \ge \sqrt{x^2} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \le \frac{1}{\sqrt{x^2}}$$

$$0 \le |f(x,y)| \le |y|$$

$(x,y)\to(0,0)$: $0 \to 0$, $|y| \to 0$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 \\ f(0,0) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ continuă pe } \mathbb{R}^2$$

II.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \left(\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)'_x = \frac{(xy)'_x\cdot\sqrt{x^2+y^2} - xy\cdot\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)'_x}{x^2+y^2} =$$

$$= \frac{y\cdot\sqrt{x^2+y^2} - xy\cdot\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} = \frac{y\cdot(x^2+y^2) - x^2y}{(x^2+y^2)\cdot\sqrt{x^2+y^2}} \in \mathbb{R}$$

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

Analog $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \left(\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)'_y = \frac{x\cdot(x^2+y^2) - y^2\cdot x}{(x^2+y^2)\cdot\sqrt{x^2+y^2}} \in \mathbb{R} \quad \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$

f admite toate deriv. parțiale pe $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$

$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ funcții continue $\Big\} \Rightarrow f$ diferențiabilă pe $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$

III $\lim\limits_{t\to 0}\frac{f((0,0)+t\cdot e_1)-f(0,0)}{t} = \lim\limits_{t\to 0}\frac{f((0,0)+(1,0)\cdot t)-f(0,0)}{t} = \lim\limits_{t\to 0}\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} =$

$= \lim\limits_{t\to 0}\frac{\frac{t\cdot 0}{\sqrt{t^2+0^2}}-0}{t} = 0 \quad \exists\, \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$

$\lim\limits_{t\to 0}\frac{f((0,0)+t\cdot e_2)-f(0,0)}{t} = \lim\limits_{t\to 0}\frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = \lim\limits_{t\to 0}\frac{\frac{0\cdot t}{\sqrt{0^2+t^2}}-0}{t} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\, \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$

$T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R} \quad T(x,y)=0 \quad \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{|f(x,y)-f(0,0)-T((x,y)-(0,0))|}{\|(x,y)-(0,0)\|} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}-0-0\right|}{\|(x,y)\|} =$

$= \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\underbrace{\frac{|xy|}{x^2+y^2}}_{\text{Notăm cu } g(x,y)}$

- $y=x$

  $\lim\limits_{x\to 0} g(x,x) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$

- $y=-x$

  $\lim\limits_{x\to 0} g(x,-x) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{|-x^2|}{2x^2} = \frac{1}{2}$

- $y=x^2$

  $\lim\limits_{x\to 0} g(x,x^2) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{|x^3|}{x^2+x^4} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\cancel{x^2}\cdot|x|}{\cancel{x^2}(1+x^2)} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{|x|}{1+x^2} = 0$

$\Rightarrow \nexists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) \Rightarrow f$ nu este derivabilă în $(0,0)$

$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ de calculat

Puncte de extrem

Algoritm

- Se studiază întâi continuitatea f. și se identifică pct. de discont.
- Se studiază diferențiab. f. și se identifică pct în care nu este diferenț.

- Se det. punctele critice ale fct. f egalând toate deriv. parțiale

$$(\mathrm{D})\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0\end{cases}$$ sistemul se rez. pe mulțimea D = m. pe care f este difer.

- Se studiază difer. de ordin 2 a fct. și se ident. punctele critice în care f nu este dif. de 2 ori. Se calculează $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y}$

- Se construiește HESSIANA lui f în fiecare punct critic în care f dif. de 2 ori și verificăm dacă putem să ne pronunțăm

$$H_f(x_0,y_0)=\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0)\\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y}(x_0,y_0)\end{pmatrix}$$

$\Delta_1 = a_{11}$

$\Delta_2 = \det H_f$

1) $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$ $\Rightarrow$ x_0 = min. local
2) $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 > 0$ $\Rightarrow$ x_0 = max local
3) $\Delta_1, \Delta_2 \geq 0$ sau $(\Delta_1 \leq 0$ și $\Delta_2 \geq 0)$ și cel puțin 1 este egal cu 0 $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ nu ne putem pronunța
4) orice alt caz $\Rightarrow$ $x_0 \neq$ punct extrem local

- Se aplică def. pe punctele de Extrem Local pt
  - pct. discont
  - pct nedif
  - unde nu e dif. de 2 ori
  - unde nu putem aplica H_f (3)

ex: $f(x,y)-f(0,0)\geq 0 \rightarrow$ minim local.

- Reunim rez. de ultimii 2 pași $\Rightarrow$ Mulțimea Punctelor de Extrem Local.

Ex. 3) Să se det. p.e.l pt

$$f:(0;+\infty)\times(0;+\infty)\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$f(x,y)=xy+\frac{2}{x}+\frac{1}{y}$$

Rezolvare:

f continuă pe $(0;+\infty)^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\left(xy+\frac{2}{x}+\frac{1}{y}\right)'_x = y-\frac{2}{x^2}\quad \forall (x,y)\in(0,+\infty)^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\left(xy+\frac{2}{x}+\frac{1}{y}\right)'_y = x-\frac{1}{y^2}\quad \forall (x,y)\in(0;+\infty)^2$$

$(0;+\infty)^2$ mulțime deschisă ... diferențiabilă pe $(0;+\infty)^2$

$(0;+\infty)^2$ mulțime deschisă
$\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$ f. continue
$\Big\} \Rightarrow f$ diferențiabilă pe $(0;+\infty)^2$

$(0;+\infty)^2 \quad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y-\dfrac{2}{x^2}=0 \Rightarrow y=\dfrac{2}{x^2} \\ x-\dfrac{1}{y^2}=0 \Rightarrow x-\dfrac{1}{\frac{4}{x^4}}=0 \Rightarrow x-\dfrac{x^4}{4}=0 \end{cases}$

$\Rightarrow 4x-x^4=0 \Rightarrow x(4-x^3)=0 \Rightarrow \begin{array}{l} x_1=0 \notin (0;+\infty) \\ x_2=\sqrt[3]{4} \Rightarrow y_2=\dfrac{2}{\sqrt[3]{16}} \Rightarrow y_2=\dfrac{2}{2\sqrt[3]{2}}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}} \end{array}$

$\left(\sqrt[3]{4}; \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) \in (0;+\infty)^2$

$C=\left\{\left(\sqrt[3]{4}; \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)\right\}$ mulțimea pct. critice

(1) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(x,y)=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)(x,y)=\left(y-\dfrac{2}{x^2}\right)'_x=\dfrac{4}{x^3} \quad \forall (x,y)\in(0;+\infty)^2$

(2) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y)=\left(x-\dfrac{1}{y^2}\right)'_x=1 \quad \forall (x,y)\in(0;+\infty)^2$

(3) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)=\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)(x,y)=\left(y-\dfrac{2}{x^2}\right)'_y=1 \quad \forall (x,y)\in(0;+\infty)^2$

(4) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(x,y)=\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y)=\left(x-\dfrac{1}{y^2}\right)'_y=\dfrac{2}{y^3} \quad \forall (x,y)\in(0;+\infty)^2$

$(0;+\infty)^2$ mulțime deschisă
(1),(2),(3),(4) f continue pe $(0;+\infty)^2$
$\Big\} \Rightarrow f$ dif. de 2 ori pe $(0;+\infty)^2$

$H_f\left(\sqrt[3]{4}; \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)=\begin{pmatrix} \frac{4}{4} & 1 \\ 1 & \frac{2}{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

$\Delta_1=1$
$\Delta_2=\det H_f=4-1=3$

$\Delta_1>0,\ \Delta_2>0 \Rightarrow$ $\boxed{P_0=\left(\sqrt[3]{4}; \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) \text{ punct de minim local}}$

$P_0 \in (0;+\infty)^2$