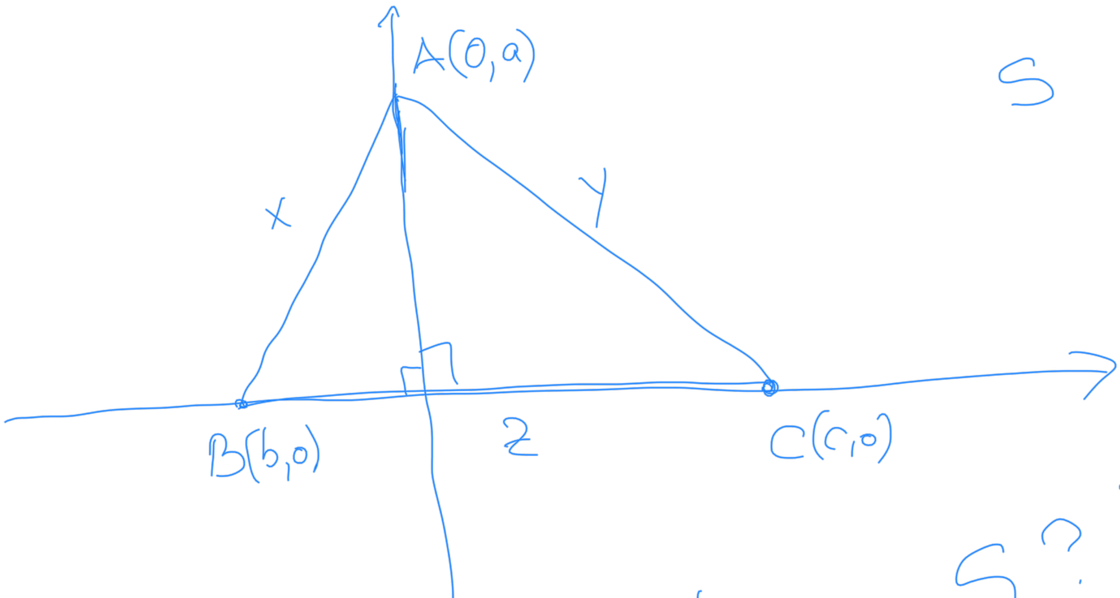
FOR FUN!!



S

S ? x, y, z

FORMULA LUI HERON!

POT CALCULA ARIA ΔABC ÎN FUNCȚIE DE LATURI!!

$z = c - b$

$x^2 = a^2 + b^2$

$y^2 = a^2 + c^2$

$$S = \frac{a \cdot (c-b)}{2}$$

$$S = \sqrt{\frac{x+y+z}{2} \cdot \frac{x-y+z}{2} \cdot \frac{x+z-y}{2} \cdot \frac{y+z-x}{2}}$$

$$16S^2 = (x+y+z)(x-y+z)(x+z-y)(y+z-x)$$

$$(x+y+z)(x-y+z)(x+z-y)(y+z-x) - 16S^2$$

singular.uni-kl.de/index.php

cocoa.dima.unige.it

www2.macaulay2.com/Macaulay2

Curs 1 (Mulțimi)

Curs 2

12.10.2021

A mulțime, $\mathcal{P}(A) \to$ reprezintă mulțimea părților mulțimii A

$\mathcal{P}(A) \overset{def}{:=} \{B \mid B \subseteq A\}$ $\quad \emptyset \in \mathcal{P}(A)$ $\quad (\emptyset \subseteq A \ (\forall)\ A$ – mulțime$)$

Ex 1) $A = \{1,2,\dots,n\} \Rightarrow \mathcal{P}(A) \left(\overset{not}{=} 2^{[n]}\right)$ $\quad \mathcal{P}(A) = \{B \mid B \subseteq \{1,2,\dots,n\}\}$

$(|A| = n)$

$\underbrace{\emptyset}_{0\ elem}, \underbrace{\{1\}, \dots, \{n\}}_{1\ elem}, \underbrace{\{1,2\}, \{1,3\}, \dots, \{n-1,n\}}_{2\ elem}, \dots \underbrace{\{1,2,\dots,n\}}_{n\ elem}$

$|\mathcal{P}(A)| = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n$

2) $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$; $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)) = \{\underbrace{\emptyset}_{a}, \underbrace{\{\emptyset\}}_{b}\}$

$\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$

$\{a\} = \{\emptyset\}$, $\{b\} = \{\{\emptyset\}\}$, $\{a,b\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

$= \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$

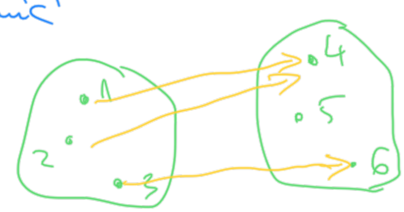
Def Fie A și B 2 mulțimi. O funcție f de la A la B (notație: $f: A \to B$) este o submulțime a produsului cartezian $A \times B$ cu proprietatea:

$(\forall)\, x \in A \ (\exists!)\, b_x \in B$ a.î. $(x, b_x) \in f$

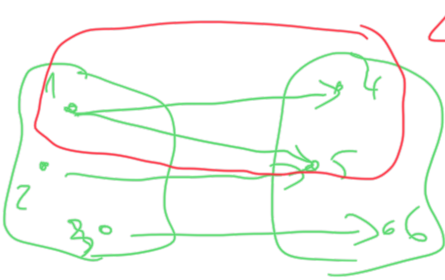
Obs 1) f asociază fiecărui element al lui A $(x \in A)$ un unic elem al lui B $(b_x \in B)$, pe care-l vom nota cu $f(x)$.

2) $f: A \to B$ funcție $\quad x \in A \longmapsto \underset{unic}{f(x)} \in B$

Ex 1) $f: \{1,2,3\} \to \{4,5,6\}$ funcție $\quad f(1) = 4$, $f(2) = 4$, $f(3) = 6$



2)



NU E FUNCȚIE!

Notație Dc. $f: A \to B$ o funcție, atunci

$A \to$ s.n. domeniul de definiție al lui f

$B \to$ s.n. codomeniul (sau domeniul valorilor) lui f

Graficul funcției f este mulțimea $\{(a, f(a)) \mid a \in A\}$

$Im(f) = \{f(a) \mid a \in A\} \subseteq B$.

imaginea funcției f

Obs 2 funcții $f: A \to B$, $g: C \to D$ sunt egale dacă: $A = C$, $B = D$, $f(a) = g(a)$ $(\forall)$ $a \in A$.

Ex ① $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = x$ $(\forall)$ $x \in \mathbb{R}$

$g: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ $\quad g(x) = x$ $(\forall)$ $x \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow f \neq g$ (f și g nu sunt egale)

② $f: \{1,2\} \to \mathbb{R}$ $\quad f(1) = f(2) = 0$

$g: \{1,2\} \to \mathbb{R}$ $\quad g(x) = x^2 - 3x + 2$ $(\forall)$ $x \in \{1,2\}$ $\Rightarrow g(1) = 0 = g(2)$ $\Rightarrow$ $\boxed{f = g}$

Def Fie $f: A \to B$, $g: B \to C$ 2 funcții. Compunerea funcțiilor g și f, notată cu $g \circ f$, este funcția $g \circ f: A \to C$ definită

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \quad (\forall)\ x \in A$$

Propr $f: A \to B$, $g: B \to C$, $h: C \to D$ funcții. Atunci:

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

(compunerea fct. e asociativă)

Def Fie $f: A \to B$ o funcție.

- f s.n. injectivă dacă $(\forall)$ $x_1, x_2 \in A$ cu $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ (echivalent pt $(\forall)$ $x, y \in A$ cu $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$)
- f s.n. surjectivă dacă $Im(f) = B$ (echivalent $(\forall)$ $y \in B$ $(\exists)$ $x_y \in A$ a.î. $f(x_y) = y$)

f s.n. **bijectivă** dacă f e simultan inj. și surj.

Ex 1) $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ $\quad f(x)=2x$ $\quad$ f inj și nu e surj $\left(\mathrm{Im}(f)=2\mathbb{N} \neq \mathbb{R}\right)$

2) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$ $\quad f(x)=x^2$ $\quad$ f nu e inj și e surj.

3) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\quad f(x)=3x-4$ $\quad$ f e bij.

Funcții speciale

1) Fct. caracteristică a unei submulțimi:

$A\subseteq X$; $\varphi_A: X\to\{0,1\}$ $\quad \varphi_A(x)=\begin{cases}1, & x\in A\\ 0, & x\notin A\end{cases}$

(Obs $A,B\subseteq X$. Atunci $A=B \Leftrightarrow \varphi_A=\varphi_B$)

eg. mulțimi $\quad$ eg. de funcții

2) "$\varphi(n)$" → funcția indicatorul lui Euler $\quad \varphi:\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}$

$\varphi(n)$ = # nr. naturale nenule mai mici sau egale cu n și care sunt relativ prime cu n $\qquad \varphi(1)=1$

$\varphi(n)=|\{k \mid 1\le k\le n \text{ și } (k,n)=1\}|$ $\quad$ → vezi dem. seminar

$n\geq 2$ $\quad n=p_1^{\alpha_1}\cdots p_k^{\alpha_k}$ $\quad \boxed{\varphi(n)=n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{p_k}\right)}$

$p_1,\dots,p_k$ prime $\neq$ $\qquad = p_1^{\alpha_1-1}\cdots p_k^{\alpha_k-1}(p_1-1)\cdot\ldots\cdot(p_k-1)$

$\alpha_1,\dots,\alpha_k\geq 1$

$k\geq 1$

3) $A\subseteq B$, fct. incluziune $\quad i_A: A\to B$ $\quad i_A(x)=x \ (\forall)x\in A$

4) A,B mulțimi, proiecția canonică pe mulțimea A $\quad p_A: A\times B\to A$

$p_A(a,b)=a$

$(\forall)(a,b)\in A\times B$