建模探索

基于信息熵的 n 人合作博弈效益分配模型

吴黎军，项海燕
（新疆大学 数学与系统科学学院，新疆 乌鲁木齐 830046）

摘　要：以 n 人合作博弈的效益分配为主要研究对象，从最大熵原理出发，将数学与物理学原理结合，采用概率论的方法，在只知道 $n-1$ 方信息的情况下提出新的利益分配方法，克服了 Shapley 值法所需信息量大的弊端。实例表明，该方法能够用较少的信息得到和 Shapley 值法接近的结果，具有很好的科学性和实用性，为合作博弈的效益分配问题提供了新的思路。

关键词：合作博弈；信息不完全；利益分配；Shapley 值法；最大熵；平均信息熵

中图分类号：O29　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：2095-3070(2013)5-6-0050-05

0 引言

用于解决 n 人合作博弈问题的 Shapley 值法模型是根据协同各方在经济效益产生过程中的重要程度进行利益分配的一种方法。此方法既不同于平均分配，也不同于按投资额进行的比例分配。然而，用 Shapley 值法进行利益分配也存在缺陷，即需要知道所有合作的获利，这在现实中常常做不到。利益分配通常采用近似解法，如：协商解、纳什解、最小距离解等，其核心思想是将分配"余额"平均分给各方。文献[1]认为，制约合作博弈的关键因素并不是现有技术水平，而是组织管理水平和企业间的知识程度。采取合作博弈的各方在实践中依然存在较多的问题，其主要原因就是没有设计出一套合理的风险分担和利益分配方案，因而影响了合作博弈的持续健康发展。近年来，信息熵在电子、科技、物理、天文的应用越来越广泛，也证实了最大熵原理在处理实际问题时的合理性和有效性。文献[2]用企业价值概括收益和风险，并以此确立分配机制，同时也指出，由于合作伙伴认识上的差距，在实际应用中，价值很难明确与统一。本文对 Shapley 值法[3]在合作博弈中的应用进行了分析，针对此方法的不足，结合信息熵方法提出了基于信息熵的合作分配模型，并用案例比较说明了信息熵模型的合理性和优越性。

1 Shapley 值法模型

Shapley 值法是由 Shapley 在 1953 年提出的解决 n 个人合作对策（cooperative n-person game）问题的一种数学方法。

设有 n 人集合 $I=\{1,2,\cdots,n\}$，每一子集 $s\subseteq I$（n 人集合中的任一组合）都可以确定一个实值函数 $v(s)$，其中 $v(s)$ 为 s 组合时合作博弈的收益，是合作对策 $[I,v]$ 的特征函数，满足：

1) $v(\varnothing)=0$（无人参加合作则无收益）；

2) 超可加性 $v(s_1\cup s_2)\geqslant v(s_1)+v(s_2)$，$s_1\cap s_2=\varnothing$（$s_1$，$s_2$ 是 I 的子集）；

3) 若 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是合作对策分配，其中 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$ 表示 I 的成员 i 从合作的收益 $v(I)$ 中应得的收入，则 $x_i\geqslant v(i)$（个体合理性，即协作优于单干）；

4) $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=v(I)$（总体合理性）。

收稿日期：2013-03-24
基金项目：国家自然基金专项资金项目(J1103108)；21 世纪高等教育教学改革工程三期项目(XJU2013JGY15)
通讯作者：吴黎军，E-mail：xjmath@xju.edu.cn

合作效益的 Shapley 解[3] 设 $\Phi_i(v)$ 为在协同 I 下第 i 成员所得的分配，则协同 I 下的各个伙伴所得利益分配的 Shapley 值为

$$\Phi(v)=(\Phi_1(v),\Phi_2(v),\cdots,\Phi_n(v)),\Phi_i(v)=\sum_s\{w(|s|)[v(s)-v(s\backslash i)]\}。\tag{1}$$

其中：$w(|s|)=\frac{(|s|-1)!(n-|s|)!}{n!}$ 表示权重；$|s|$ 是组合 s 中的元素个数；$v(s\backslash i)$ 是组合 s 中除去 i 后可取得的收益。

2 极大信息熵原理构造的信息熵模型

2.1 信息熵模型

关于信息熵，Shannon 提出 4 条基本性质，不妨称为公理[4-5]。

公理 1 信息量是事件发生概率的连续函数。

公理 2 如果事件 A 发生必有事件 B 发生，则得知事件 A 发生的信息量大于或等于事件 B 发生的信息量。

公理 3 如果事件 A 和事件 B 的发生是相互独立的，则获知 A、B 事件将同时发生的信息量应为单独获知两事件发生的信息量之和。

公理 4 任何信息的信息量均是有限的，它是信息对消除问题的不确定性的度量。

设某一实验可能有多种结果，它们出现的概率分别为 $p_1,p_2,\cdots,p_n$，则该实验的不确定性可用这组信息的平均信息量(或熵)来表示：$H=-\sum_{i=1}^n p_i\ln p_i$。

最大熵原理[4] 若实验仅有有限结果 $Q_1,Q_2,\cdots,Q_n$，其发生的概率分别为 $p_1,p_2,\cdots,p_n$，则当 $p_1=p_2=\cdots=p_n=\frac{1}{n}$ 时，此实验具有最大熵。

最大熵原理说明，自然现象总是从不均匀逐步趋于均匀的，在不加任何限制的情况下，系统将处于熵最大的均匀状态。

单位时间内信息通道能够传递的最大平均信息量称为此信息通道的容量。每一符号的平均信息量为 $H=-\sum_{i=1}^n p_i\ln p_i$，每一符号传递所需的平均时间为 $\bar{t}=\sum_{i=1}^n p_it_i$，故单位时间传递的信息量为 $\frac{-\sum_{i=1}^n p_i\ln p_i}{\sum_{i=1}^n p_it_i}$，于是问题化为

$$\max_{p_i}\frac{H}{t}=\frac{-\sum_{i=1}^n p_i\ln p_i}{\sum_{i=1}^n p_it_i}。\tag{2}$$

$$\text{s.t.}\ \sum_{i=1}^n p_i=1$$

利用拉格朗日乘子法，式(2) 化为无约束极值问题：

$$\max_{p_i}\left[\frac{-\sum_{i=1}^n p_i\ln p_i}{\sum_{i=1}^n p_it_i}+\lambda(\sum_{i=1}^n p_i-1)\right]\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial p_i}=0\\ \frac{\partial f}{\partial\lambda}=0\end{cases}。\tag{3}$$

则方程组的解为

$$\lambda=\frac{1}{t},p_i=\mathrm{e}^{-\frac{t_i}{t}H}。\tag{4}$$

实际计算时，可通过 $\sum p_i=1$ 解出 $A=\mathrm{e}^{\frac{H}{t}}$，进而得到 $p_i,i=1,2,\cdots,n$。

2.2 基于信息熵原理的最优概率分布的确定

Shapley 值法在合作博弈利益分配中的应用避免了平均分配、吃大锅饭的现象，调动了各协同企业的积极性。由于 Shapley 值法是基于各方在合作博弈中的重要程度进行利益分配的，因此也避免了仅按投资比例进行利益分配的一些局限性。但它需要知道所有合作的获利，即要定义 $I=\{1,2,\cdots,n\}$ 的所有子集的特征函数（共 2^n-1 条信息），这实际上常常做不到。文献[5-8] 介绍了各种近似解法，基本思想是：知道全体合作的获利 $v(I)=B$，以及无 i 参加时其余 $n-1$ 方合作的获利（共 $n+1$ 条信息），建立优化模型，给出初次分配，然后将“多余”部分平均分配给各方。

平均分配“余额”过于简单，没有充分利用合作各方的贡献，初次分配可以选择协商解、纳什解等方法，对“多余”部分则应当考虑合作各方的贡献。记第 i 方的贡献为 $v(I\backslash i)=b_i(i=1,2,\cdots,n)$，$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$，各方初次分配利益为 $\boldsymbol{X}=(\underline{x}_1,\underline{x}_2,\cdots,\underline{x}_n)$，此时有最大信息熵：

$$\max \frac{-\sum_{i=1}^{n}p_i\ln(p_i)}{\sum_{i=1}^{n}\underline{x}_i p_i}\quad。\tag{5}$$

$$\text{s.t.}\ \sum_{i=1}^{n}p_i=1$$

求解上述模型，按比例分配余额 $B-\sum_{i=1}^{n}\underline{x}_i$。

协商解、纳什解等方法对合作剩余采用平均分配办法处理，即 $p_i=\frac{1}{n}$，$i=1,2,\cdots,n$。以协商解为例，分配按两步进行。首先，从 $n-1$ 方合作的获利 $v(I\backslash i)=b_i$ 得出各方分配的下限 $\boldsymbol{X}=(\underline{x}_1,\underline{x}_2,\cdots,\underline{x}_n)$，即解方程组 $\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}x_j-x_1=b_1\\ \cdots\\ \sum_{j=1}^{n}x_j-x_n=b_n\end{cases}$，分配下限 $\underline{x}_i=\frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}b_j-b_i$，$i=1,2,\cdots,n$；然后，计算按下限 $\boldsymbol{X}$ 分配后全体合作获利的剩余 $B-\sum_{i=1}^{n}\underline{x}_i$，将其按式(5) 解 $\boldsymbol{P}=(p_1,p_2,\cdots,p_n)$，于是最终的分配结果为

$$x_i=\underline{x}_i+p_i(B-\sum_{j=1}^{n}\underline{x}_j),i=1,2,\cdots,n。\tag{6}$$

3 实例分析

实例 1[8] 某机械厂（记为 A）是一专门生产冶金设备的大型国有企业，因生产发展的需要，决定与某设计院（记为 B）以及钢铁厂（记为 C）合作开发新产品。开发之前每个企业都有一定的开发投入，开发成功后将获得一大笔收益，包括经济效益和社会效益，在此只简单考虑经济效益，这也符合可转移支付条件。当然各企业都可单独与另一企业合作组成联盟，但此时成本较高。现将 A，B，C 这 3 个企业的联盟记为 $I=\{1,2,3\}$，其中，AB 合作、AC 合作、BC 合作和 3 方合作分别记为 $1\cup2$、$1\cup3$、$2\cup3$ 和 $1\cup2\cup3$。不同的联盟所获得的收益情况如表 1 所示。

3.1 Shapley 值法的应用

按 Shapley 值法求解时需要增添信息：若一方单干，$V(1)=20$，$V(2)=30$，$V(3)=10$，按 Shapley 值法求 $\Phi_i(v)$ 的值，机械厂的分配利益 $\Phi_1(v)$ 如表 1 所示。

将表格最后一列相加，得 $\Phi_1(v)=35$ 万元，同理可得 $\Phi_2(v)=45$ 万元，$\Phi_3(v)=20$ 万元。易验证，$\Phi_1(v)+\Phi_2(v)+\Phi_3(v)=100$ 万元，且 $\Phi_i(v)$ 的值均大于单独创新时的收益。同时，任意两企业所分配的收益之和大于这两个企业单独组合的收益，也就是说，机械厂、设计院和钢铁厂 3 家协同的收益比单独一家或两家取得的收益都好，于是 3 家合作联盟的积极性会比较高，稳定性也比较好。

表 1　机械厂的分配利益 $\Phi_1(v)$ 表　　万元

s	$v(s)$	$v(s\backslash 1)$	$v(s)-v(s\backslash 1)$	$\lvert s\rvert$	$w(\lvert s\rvert)$	$w(\lvert s\rvert)[v(s)-v(s\backslash 1)]$
1	20	0	20	1	1/3	20/3
1∪2	70	30	40	2	1/6	20/3
1∪3	40	10	30	2	1/6	5
1∪2∪3	100	50	50	3	1/3	50/3

3.2　信息熵法的应用

采用信息熵法时，则不需要增添单干信息。

第一步，计算分配下限 $\boldsymbol{X}$，即解方程 $\begin{cases}\underline{x}_1+\underline{x}_2=70\\ \underline{x}_2+\underline{x}_3=50\\ \underline{x}_1+\underline{x}_3=40\end{cases}$，得 $\underline{x}_1=30$，$\underline{x}_2=40$，$\underline{x}_3=10$，剩余的利益为 $B-\sum_{i=1}^{3}\underline{x}_i=100-(30+40+10)=20$。

第二步，求解模型(5)，得最优概率分布 $\boldsymbol{P}$，其中：$p_1=0.24$，$p_2=0.15$，$p_3=0.61$，从而 $x_1=\underline{x}_1+p_1\times 20=34.8$，$x_2=\underline{x}_2+p_2\times 20=43.0$，$x_3=\underline{x}_3+p_3\times 20=22.2$，即分配向量为(34.8,43.0,22.2)。可以发现此分配结果与 Shapley 值方法结果(35,45,20) 接近，优于协商解(36.6,46.6,16.6)。

实例 2　甲、乙、丙 3 个城镇要建立污水处理厂，每个城镇可以单干，也可以联合建厂。若单干，每个单位仅能节省 10 万元，甲、乙联合可节省 70 万元，乙、丙联合可节省 40 万元，甲、丙联合可节省 50 万元，甲、乙、丙 3 方联合可节省 110 万元。如果 3 个城镇联合，该如何分配这 110 万元?

计算合作效益分配的方法很多，此处只列出几种方法的对比结果，具体计算及理论请参考文献[3,6-7]。计算结果见表 2。

表 2　6 种合作效益分配方法结果对比表　　万元

方法	甲	乙	丙
Shapley 值法	43.3	38.3	28.4
协商解	50.0	40.0	20.0
最小距离解	50.0	40.0	20.0
满意解	45.3	38.8	25.9
Raiffa 解	46.7	39.2	24.1
信息熵解	44.4	37.1	28.5

通过对比可以发现，协商解和最小距离解相同，与 Shapley 值解相差较大；满意解、Raiffa 解、信息熵解与 Shapley 值解较接近，但比较而言，信息熵解与 Shapley 值解是最接近的，且信息熵解只需要知道其余两方的信息。在实际应用中，信息往往是不完全的，因而信息熵解具有更大的科学性和优越性，在以后的合作博弈效益分配中有很好的实用性。

4　结论

合作是当今世界的主题。随着我国经济的发展，合作联盟的参与者也会越来越多，效益的分配也越来越复杂。长期以来，制约我国合作联盟发展的瓶颈就是合作效益的分配问题。合理科学的分配方法，可以很好地促进我国合作联盟的发展。

随着参与者的增多，Shapley 值法需要的信息量是呈指数增加的，而现实中无法获知所有的信息，这无疑制约了合作联盟的形成。在我国，不论是企业之间，还是企业与科研机构之间的合作失败率居高不下，其原因是多方面的，但信息的不对称、不完全是其中的重要因素之一。信息熵法有效克服了 Shapley 值法所需

信息量大的弊端，对于 n 人合作的效益分配，只需 n 个信息就可得到和 Shapley 值法接近的结果，其优越性和实用性是显而易见的，并且它还可为国内联盟甚至是国际大联盟提供新的效益分配思路，为我国 n 人合作效益分配开辟新局面。此外，信息熵法是从最大熵原理出发，结合概率论得出的新方法，其分配方法具有很好的科学性和合理性。此方法不仅可以用于企业与企业间的利益分配，还可用于解决同一企业不同部门间的利益分配以及各类合作项目的利益分配问题。最后本文只是对协商解给出改进，同样可以改进其他近似解法，读者可以自行尝试。

参考文献

[1] Huang G Q, Mak K L. Modelling the customer-supplier interface over the world-wide web to facilitate early supplier involvement in the new product development[J]. Research Policy, 2000, 214(9): 759-769.

[2]郝海，郑丕锷. 基于 Shapley 值的供应链合作伙伴利益风险分配机制[J]. 哈尔滨工业大学学报：社会科学版，2005, 7(5): 71-75.

[3]姜启源，谢金星，叶俊. 数学模型[M]. 3版. 北京：高等教育出版社，2003.

[4]李梅，李亦农. 信息论基础教程[M]. 2版. 北京：北京邮电大学出版社，2008.

[5]Cover M T, Joy A T. 信息论基础[M]. 阮吉寿，张华，译. 北京：机械工业出版社，2008.

[6]刘浪，唐海军，陈仲君. Shapley 值在动态联盟利益分配博弈分析中的应用[J]. 工业工程，2006, 9(6): 118-121.

[7]Ringo T. IBM explores new frontiers in collaborative innovation[J]. Research Technology Management, 2007, 50(5): 5-7.

[8]李霞，宋素玲，穆喜产. 合作博弈的风险分摊与利益分配问题研究[J]. 科技进步与对策，2008, 25(12): 10-15.

Model of n-person Cooperative Game Benefit Allocation Based on Information Entropy

Wu Lijun, Xiang Haiyan

(College of Mathematics and System Science, Xinjiang University, Wulumuqi, Xinjiang 830046, China)

Abstract: The aim of this paper is to investigate the benefit allocation of cooperative n-person game. To do this, based on the principle of maximum entropy we melt mathematics and physics principles, and use probability theory to build a new benefit allocation method when there is only n-1 persons' information. This method overcomes the drawback of Shapley value which needs a large amount of information. Also, examples show that the result obtained through the new method is very close to the Shapley value. These demonstrate that this new method is scientific and practicability, and also it leads to a new idea to solve the benefit allocation of cooperative n-person game.

Key words: cooperative game; incomplete information; benefit allocation; Shapley; maximum entropy; average information entropy

作者简介

吴黎军(1961—)，男，学士，教授，主要研究方向：精算数学、数学建模和概率论教学。

项海燕(1991—)，女，本科生。主要研究方向：应用数学。