1 Modelagem

1.1 Modelo não linear

Considere o quadricóptero com mecanismo de vetorização do empuxo ilustrado na Figura 1.

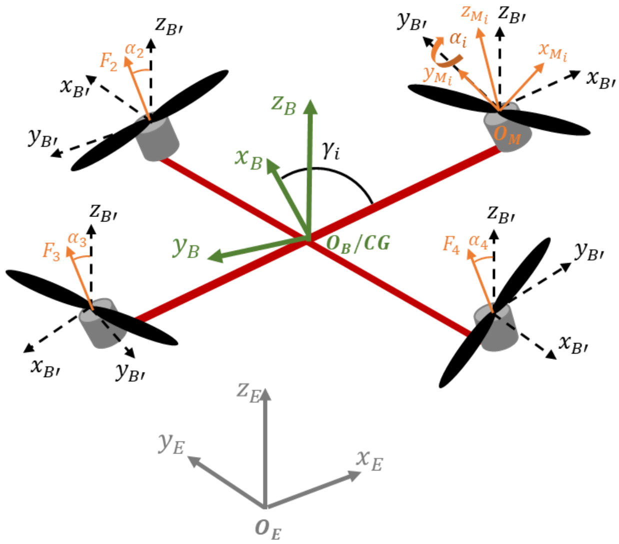

Figure 1: Quadricóptero com mecanismo de vetorização de empuxo.

- **Movimento linear**

Aplicando a segunda lei de Newton, é possível escrever

$$F_B(t) = \begin{bmatrix} \sum F_x(t) \\ \sum F_y(t) \\ \sum F_z(t) \end{bmatrix} = m \begin{bmatrix} \dot{u}(t) - r(t)v(t) + q(t)w(t) \\ \dot{v}(t) - p(t)w(t) + r(t)u(t) \\ \dot{w}(t) - q(t)u(t) + p(t)v(t) \end{bmatrix} \tag{1}$$

em que $(u \ v \ w)$ e $(p \ q \ r)$ representam as velocidades lineares e angulares ao longo (em torno) dos eixos x, y e z, respectivamente. O o subíndice B indica que essas forças estão presentadas no sistema de coordenada do veículo (BCS – *Body fixed Coordinate System*).

Considerar-se-á que F_B é resultante da ação das forças de empuxo F_T, arrasto F_D e gravitacional F_G. Logo,

$$m \begin{bmatrix} \dot{u}(t) - r(t)v(t) + q(t)w(t) \\ \dot{v}(t) - p(t)w(t) + r(t)u(t) \\ \dot{w}(t) - q(t)u(t) + p(t)v(t) \end{bmatrix} = F_{T_B}(t) + F_{D_B}(t) + F_{G_B}(t) \tag{2}$$

Para determinar F_{T_B}, F_{D_B} e F_{G_B}, as seguintes hipóteses são assumidas:

- Os rotores são posicionados com ângulos de $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 = \pi/2$, $\gamma_3 = \pi$ e $\gamma_4 = 3\pi/2$ em relação à x_B;

- Os sentidos de rotação dos motores 1 e 3 é positivo (ccw). Já os motores 2 e 4 giram no sentido negativo (cw);

- Os rotores podem ser inclinados longitudinalmente em ângulos α_1, α_2, α_3 e α_4;

- As variações nos ângulos de tilt e na rotação das hélices são lentas: $\dot{\alpha}_i(t) = 0$, $i = 1,\ 2, 3$ e 4 e $\dot{\Omega}_i(t) = 0$, $i = 1,\ 2, 3$ e 4

- A distância vertical do rotor até o CG é nula, isto é, $z_{CG_i} = 0$, $i = 1,\ 2, 3$ e 4.

Com o devido procedimento, é possível obter

$$F_{T_B}(t) = \begin{bmatrix} k_p\big(\sin(\alpha_1(t))\Omega_1^2(t) - \sin(\alpha_3(t))\Omega_3^2(t)\big) \\ \\ k_p\big(\sin(\alpha_2(t))\Omega_2^2(t) - \sin(\alpha_4(t))\Omega_4^2(t)\big) \\ \\ k_p\sum_{i=1}^{4}\cos(\alpha_i(t))\Omega_i^2(t) \end{bmatrix} \tag{3}$$

$$F_{D_B}(t) = \begin{bmatrix} -k_{d_x}u(t) \\ -k_{d_y}v(t) \\ -k_{d_z}w(t) \end{bmatrix} \tag{4}$$

$$F_{G_B}(t) = mg\begin{bmatrix} \sin(\theta(t)) \\ -\sin(\phi(t))\cos(\theta(t)) \\ -\cos(\phi(t))\cos(\theta(t)) \end{bmatrix} \tag{5}$$

em que ϕ, θ e ψ representam os ângulos de rolagem, arfagem e guinada, respectivamente.

Combinando as equações (2), (3), (4) e (5) é possível descrever a dinâmica de movimento linear do quadricóptero.

- **Movimento angular**

Aplicando a segunda lei de Newton para o movimento angular, tem-se que

$$\begin{bmatrix} J_{xx}\dot{p}(t) + q(t)r(t)\big(J_{zz} - J_{yy}\big) \\ J_{yy}\dot{q}(t) + p(t)r(t)\big(J_{xx} - J_{zz}\big) \\ J_{zz}\dot{r}(t) + p(t)q(t)\big(J_{yy} - J_{xx}\big) \end{bmatrix} = M_B = M_{T_B}(t) + M_{G_B}(t) + M_{F_B}(t) \tag{6}$$

sendo M_{T_B}, M_{G_B} e M_{F_B} os momentos gerados pela força de empuxo, pelo efeito giroscópico e pelo arrasto da hélice, respectivamente.

É possível escrever

$$M_{T_B}(t) = \begin{bmatrix} lk_p\big(\cos(\alpha_2(t))\Omega_2^2(t) - \cos(\alpha_4(t))\Omega_4^2(t)\big) \\ lk_p\big(-\cos(\alpha_1(t))\Omega_1^2(t) + \cos(\alpha_3(t))\Omega_3^2(t)\big) \\ 0 \end{bmatrix} \tag{7}$$

$$M_{G_B}(t) = \begin{bmatrix} H_x(t) \\ H_y(t) \\ H_z(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tau_x(t) \\ \tau_y(t) \\ \tau_z(t) \end{bmatrix} \tag{8}$$

sendo

$$H_x(t) = 0 \tag{9}$$

$$H_y(t) = 0 \tag{10}$$

$$H_z(t) = 0 \tag{11}$$

$$\tau_x(t) = \sum_{i=1}^{4}\{q(t)\cos(\alpha_i(t)) - r(t)\sin(\gamma_i(t))\sin(\alpha_i(t))\}J_{M_i}\Omega_i(t) \tag{12}$$

$$\tau_y(t) = \sum_{i=1}^{4}\{-p(t)\cos(\alpha_i(t)) + r(t)\cos(\gamma_i(t))\sin(\alpha_i(t))\}J_{M_i}\Omega_i(t) \tag{13}$$

$$\tau_z(t) = \sum_{i=1}^{4}\{p(t)\sin(\gamma_i(t))\sin(\alpha_i(t)) - q(t)\cos(\gamma_i(t))\sin(\alpha_i(t))\}J_{M_i}\Omega_i(t) \tag{14}$$

$$M_{F_B}(t) = \begin{bmatrix} b\left(-\Omega_1^2(t)\sin(\alpha_1(t)) + \Omega_3^2(t)\sin(\alpha_3(t))\right) \\ \\ b\left(\Omega_2^2(t)\sin(\alpha_2(t)) - \Omega_4^2(t)\sin(\alpha_4(t))\right) \\ \\ b\sum_{i=1}^{4} -\mathrm{sign}(\Omega_i(t))\cos(\alpha_i(t))\Omega_i^2(t) \end{bmatrix} \tag{15}$$

Por fim, a seguinte relação cinemática entre a derivada dos ângulos de Euler e a velocidade angular pode ser escrita

$$\begin{bmatrix} p(t) \\ q(t) \\ r(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin(\theta(t)) \\ 0 & \cos(\phi(t)) & \sin(\phi(t))\cos(\theta(t)) \\ 0 & -\sin(\phi(t)) & \cos(\theta(t))\cos(\phi(t)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi}(t) \\ \dot{\theta}(t) \\ \dot{\psi}(t) \end{bmatrix} \tag{16}$$

Multiplicando pela esquerda pela matriz inversa, obtém-se

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi}(t) \\ \dot{\theta}(t) \\ \dot{\psi}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \sin(\phi(t))\tan(\theta(t)) & \cos(\phi(t))\tan(\theta(t)) \\ 0 & \cos(\phi(t)) & -\sin(\phi(t)) \\ 0 & \sin(\phi(t))\sec(\theta(t)) & \cos(\phi(t))\sec(\theta(t)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p(t) \\ q(t) \\ r(t) \end{bmatrix} \tag{17}$$

Em resumo, as equação (2), (6) e (16) descrevem o movimento linear e rotacional do quadricóptero. O movimento de translação em relação a um referencial inercial é descrito por

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_E(t) \\ \dot{y}_E(t) \\ \dot{z}_E(t) \end{bmatrix} = R_B^I \begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{bmatrix} \tag{18}$$

sendo

$$R_B^I = \begin{bmatrix} \cos(\psi(t)) & -\sin(\psi(t)) & 0 \\ \sin(\psi(t)) & \cos(\psi(t)) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta(t)) & 0 & \sin(\theta(t)) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta(t)) & 0 & \cos(\theta(t)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi(t)) & -\sin(\phi(t)) \\ 0 & \sin(\phi(t)) & \cos(\phi(t)) \end{bmatrix} \tag{19}$$

2 Estrutura de controle

Um LQR será empregado para manter o veículo em uma certa atitude de equilíbrio manipulando as velocidades de rotação dos motores. Mais ainda, o rastreamento de trajetória será realizado por meio de um MPC cujas entradas serão os ângulos de tilt e uma rotação somada em todos os motores. O diagrama de blocos 2 ilustra a estrutura de controle.

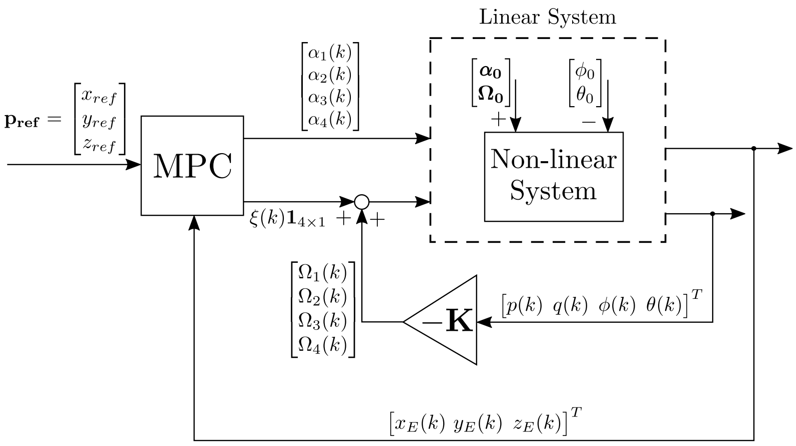

Figure 2: Diagrama de blocos mostrando a estrutura de controle.

3 Linearização no espaço de estados

Para o projeto do controlador, realizar-se-á uma linearização do modelo matemático obtido na seção anterior. Com esse propósito, definem-se os seguintes vetores de estado e controle:

$$x = \begin{bmatrix} p & q & \phi & \theta & \end{bmatrix}^T \tag{20}$$

$$u = \begin{bmatrix} \Omega_1 & \Omega_2 & \Omega_3 & \Omega_4 \end{bmatrix}^T \tag{21}$$

Linearizando o sistema, é possível escrever

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \sin(\phi_0)\tan(\theta_0) & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi_0) & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{22}$$

sendo

$$a_{12} = \frac{J_{m_1}\omega_{1_0}\cos(\alpha_{1_0}) + J_{m_2}\omega_{2_0}\cos(\alpha_{2_0}) + J_{m_3}\omega_{3_0}\cos(\alpha_{3_0}) + J_{m_4}\omega_{4_0}\cos(\alpha_{4_0})}{J_{xx}} \tag{23}$$

$$a_{21} = \frac{-J_{m_1}\omega_{1_0}\cos(\alpha_{1_0}) - J_{m_2}\omega_{2_0}\cos(\alpha_{2_0}) - J_{m_3}\omega_{3_0}\cos(\alpha_{3_0}) - J_{m_4}\omega_{4_0}\cos(\alpha_{4_0})}{J_{yy}} \tag{24}$$

$$B = \begin{bmatrix} -\frac{2\omega_{1_0} b \sin\left(\alpha_{1_0}\right)}{J_{xx}} & \frac{2\omega_{2_0} k_p l \cos\left(\alpha_{2_0}\right)}{J_{xx}} & \frac{2\omega_{3_0} b \sin\left(\alpha_{3_0}\right)}{J_{xx}} & -\frac{2\omega_{4_0} k_p l \cos\left(\alpha_{4_0}\right)}{J_{xx}} \\ -\frac{2\omega_{1_0} k_p l \cos\left(\alpha_{1_0}\right)}{J_{yy}} & \frac{2\omega_{2_0} b \sin\left(\alpha_{2_0}\right)}{J_{yy}} & \frac{2\omega_{3_0} k_p l \cos\left(\alpha_{3_0}\right)}{J_{yy}} & -\frac{2\omega_{4_0} b \sin\left(\alpha_{4_0}\right)}{J_{yy}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{25}$$