

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA

FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA

LABORATÓRIO DE AERONAVES AUTÔNOMAS

**CONTROLE PREDITIVO PARA RASTREAMENTO DE
TRAJETÓRIAS EM UM BICÓPTERO DE BANCADA COM
VETORIZAÇÃO DA FORÇA DE EMPUXO**

Relatório científico final do projeto na modalidade PIBIC

Aluno responsável: Gabriel Renato Oliveira Alves

Professor orientador responsável: Pedro Augusto Queiroz de Assis

Uberlândia, 17 de março de 2021

Informações do Projeto

- **Título do projeto:**

Controle preditivo para rastreamento de trajetórias em um bicóptero de bancada com vetorização da força de empuxo

- **Discente:**

Gabriel Renato Oliveira Alves

- **Instituição sede do projeto:**

Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia

- **Período de vigência:**

Agosto/2020 a Julho/2021

- **Período coberto por este relatório:**

Agosto/2020 a Julho/2021

- **Realizações do período:**

Foi projetado um controlador preditivo para rastrear referências de posição angular do bicóptero em torno da bancada. A estratégia de controle foi implementada em ambiente de simulação permitindo avaliar robustez quanto a ruídos de medida, descasamentos de modelo e saturação dos canais de entrada. Com o sucesso da implementação em ambiente de simulações, procedeu-se para validação experimental. A lei de controle foi implementada na prática e os resultados mostraram-se satisfatórios. Mais especificamente, foi possível rastrear as referências fornecidas ao controlador com o devido atendimento das restrições sobre os canais de entrada.

Resumo

A vetorização do empuxo gerado pelos rotores em Veículos Aéreos Não Tripulados (VANTs) aumenta a versatilidade desse tipo de aeronave possibilitando, por exemplo, pousos e decolagens verticais. Uma das grandes vantagens da inclusão do empuxo vetorial consiste no desacoplamento entre as dinâmicas de altitude e posição. Então, adotando um sistema de controle adequado, é possível rastrear trajetórias de referência de posição mantendo-se uma altitude constante ou alterar a altitude sem afetar a posição do veículo. Para o desenvolvimento de tais controladores, faz-se necessário construir equipamentos de laboratório que permitam investigar a dinâmica e o controle desse tipo de veículo. Nesse contexto, o presente trabalho envolve a modificação de uma bancada pré-existente substituindo um quadrirroto com rotores paralelos e fixos por um bicóptero dotado de mecanismos de vetorização da força de empuxo. Em particular, os rotores podem ser rotacionados longitudinalmente com respeito aos braços do veículo. Então, uma técnica de controle preditivo baseado em modelo (*Model Based Predictive Control – MPC*) será utilizada para fazer com que o veículo siga referências de posição em torno da base mantendo uma altitude constante. Mais ainda, restrições sobre os canais de entrada são consideradas no projeto do controlador. Para demonstrar a aplicabilidade do MPC, foram realizadas simulações e ensaios experimentais. Os resultados mostram que a estratégia de controle foi capaz de rastrear as referências com eliminação do erro em regime estacionário e respeito às restrições de entrada. Cabe salientar que para eliminação de tal erro, foi necessário incluir um observador de estados com estimativa de perturbação de saída. Essa técnica permite compensar eventuais descasamentos de modelo que, em regime permanente, se comportem como perturbação constante de saída.

Abstract

The vectorization of the thrust generated by the rotors in Unmanned Aerial Vehicles (UAVs) increases the versatility of this type of aircraft, enabling, for example, vertical landings and takeoffs. One of the great advantages of including the thrust vector control is the possibility of decoupling attitude and position dynamics, which can be achieved by designing a proper control system. Therefore, it is possible to track position reference trajectories while maintaining a constant attitude or to change the vehicle's attitude without affecting its position. For the development of such controllers, it is necessary to develop laboratory equipment that allows investigating the dynamics and the control of this type of vehicle. In this context, the present work involves the modification of a pre-existing equipment replacing a quadrotor with parallel and fixed rotors with a bicopter equipped with mechanisms of vectorization of the buoyant force. In particular, the rotors can be rotated longitudinally with respect to the vehicle's arms. Then, a Model-based Predictive Control approach (MPC) is designed for tracking position references around the base while maintaining a constant attitude. Furthermore, input constraints are considered during the MPC design. Simulations and experiments were carried out in order to validate the proposed control approach. The results show that the MPC was able to track the references with elimination of the steady state error and enforcing input constraints. It should be pointed out that in order to eliminate such error, a state observer was included in the control loop to estimate constant output disturbances, which were also included in the prediction model. Thereby, it is possible to eliminate the steady state errors generated by model mismatches which, in steady state, cause the same effects of constant output disturbances.

Sumário

Informações do Projeto	i
Resumo	ii
Abstract	iii
1 Introdução	1
1.1 Estrutura do texto	4
2 Controle preditivo baseado em modelo	5
2.1 Observador de estados com estimativa de perturbação	7
2.2 Inclusão da estimativa de perturbação na lei de controle	8
3 Descrição do sistema	10
4 Resultados de simulação	16
4.1 Simulações sem observador de estados	16
4.2 Simulações com observador de estados	18
5 Resultados experimentais	24
6 Conclusão	29
Referências Bibliográficas	30
Apêndices	32
Apêndice A Problema de programação quadrática	33
A.1 Escrevendo a função de custo em termos das variáveis de decisão	33
A.2 Escrevendo as restrições em termos das variáveis de decisão	37

1 Introdução

Veículos Aéreos Não Tripulados (VANTS) são empregados em diferentes tarefas. Por exemplo, monitoramento de lavouras e linhas elétricas, patrulhamento de fronteiras e prevenção de incêndios (VALAVANIS, 2007). Uma dificuldade no desenvolvimento desse tipo de veículo é que tipicamente a dinâmica de malha aberta é instável. Para estabilização deve-se implementar um controle em malha fechada (FRANKLIN; POWELL; EMAMI-NAEINI, 1994). O projeto de controladores para VANTS foi e é estudado com frequência na literatura especializada (LEE; KIM; SASTRY, 2009; ALEXIS; NIKOLA-KOPOULOS; TZES, 2011; SRIDHAR et al., 2019). Concomitantemente foram desenvolvidos equipamentos de laboratório para validação desse tipo de controlador (BOU-ABDALLAH; NOTH; SIEGWART, 2004; MARQUES, 2018). Por exemplo, a bancada mostrada na Figura 1.1 foi desenvolvida em Marques (2018) no Laboratório de Aeronaves Autônomas da UFU/FEMEC. Nessa bancada, o braço mecânico ②–③ é empregado para limitar o movimento do quadricóptero ④ em torno da base ①. Mais ainda, a atitude do veículo pode variar livremente pois uma junta esférica é utilizada para fixação do VANT. Esse sistema foi empregado com sucesso para implementação de um controlador para manter a aeronave em voo pairado.

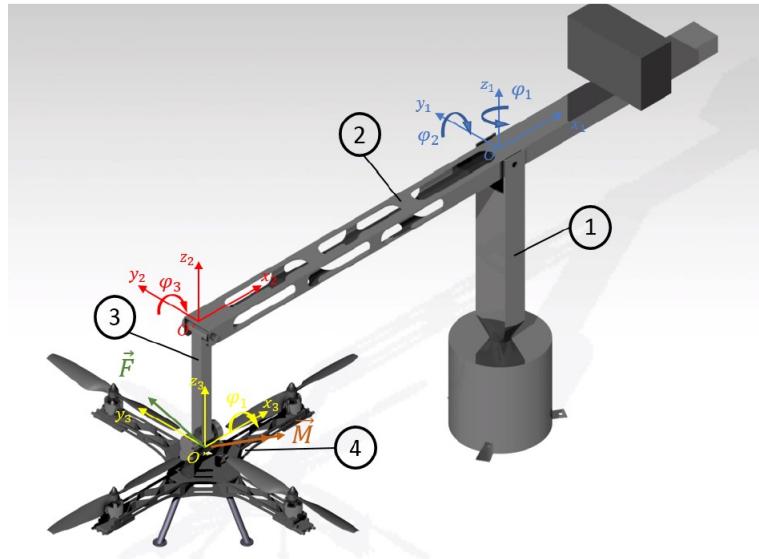


Figura 1.1: Equipamento de laboratório para validação de leis de controle em quadricóptero (MARQUES, 2018).

Um desafio no projeto de controladores para quadricópteros com rotores em fixos e paralelos é o acoplamento entre as dinâmicas de atitude e posição. Nesse tipo de VANT não é possível controlar tais dinâmicas independentemente. Isso se deve ao fato de que

há menos variáveis de entrada do que graus de liberdade, tratando-se de um sistema subatuado (BADR; MEHREZ; KABEEL, 2016). A subatuação também é observada em VANTs como bicópteros, tricópteros e hexacópteros. Uma técnica para eliminar esse problema consiste em mudar o ângulo de inclinação das hélices, como é realizado em helicópteros convencionais (CUTLER et al., 2011). Alternativamente pode-se orientar a força de empuxo gerada pelos rotores (RYLL; BÜLTHOFF; GIORDANO, 2012). Isso é realizado por meio de um mecanismo de vetorização que rotaciona o rotor com respeito ao braço do VANT, como ilustrado na Figura 1.2 para rotação lateral do rotor. Como resultado, pode-se desacoplar as dinâmicas de atitude e posição. Então, torna-se possível rastrear referências de posição mantendo-se um atitude constante ou alterar a atitude sem afetar a posição do veículo. Essa estratégia de empuxo vetorial já foi empregada com sucesso em diferentes tipos de veículos (RYLL; BÜLTHOFF; GIORDANO, 2012; KENDOUL; FANTONI; LOZANO, 2006; SERVAIS; D'ANDRÉA-NOVEL; MOUNIER, 2015).

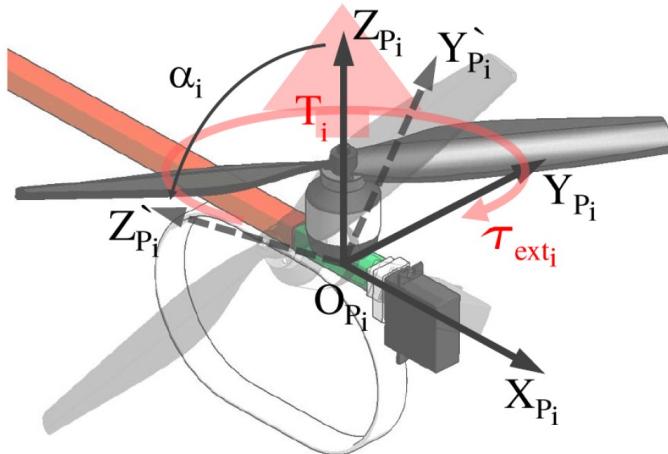


Figura 1.2: Mecanismo de vetorização lateral da força de empuxo (RYLL; BÜLTHOFF; GIORDANO, 2012)

O desenvolvimento do mecanismo de vetorização pode se mostrar uma tarefa complexa. Deve-se projetar o conjunto mecânico de modo que não haja colisões da hélice com o corpo do VANT. Mais ainda, o movimento do rotor introduz não linearidades na dinâmica do veículo devido ao efeito giroscópico (ROSKAM, 1979). Uma complexidade adicional é a saturação da entrada da planta causada por uma excursão tipicamente pequena permitida para o ângulo do rotor. A presença de restrições e a existência de múltiplas entradas e saídas motiva o emprego de técnicas de controle mais avançadas para o controle de aeronaves com empuxo vetorial. Por exemplo, pode-se adotar o controle preditivo baseado em modelo (*Model Based Predictive Control - MPC*).

A ideia fundamental do MPC consiste na utilização do modelo matemático para prever o comportamento futuro da planta ao longo de um horizonte. Com base nessas

predições, calcula-se uma sequência de controle que minimiza um certo índice de desempenho. Esse procedimento de otimização é repetido à medida que novas informações dos sensores se encontram disponíveis, seguindo uma estratégia chamada de horizonte retrocedente. As vantagens do MPC envolvem a ação ótima de controle, a aplicabilidade a sistemas multivariáveis e o tratamento sistemático de restrições, isto é, os limitantes físicos sobre as variáveis do processo são incluídos pelo projetista no projeto do controlador (ROSSITER, 2003). Essas ideias são ilustradas na Figura 1.3.

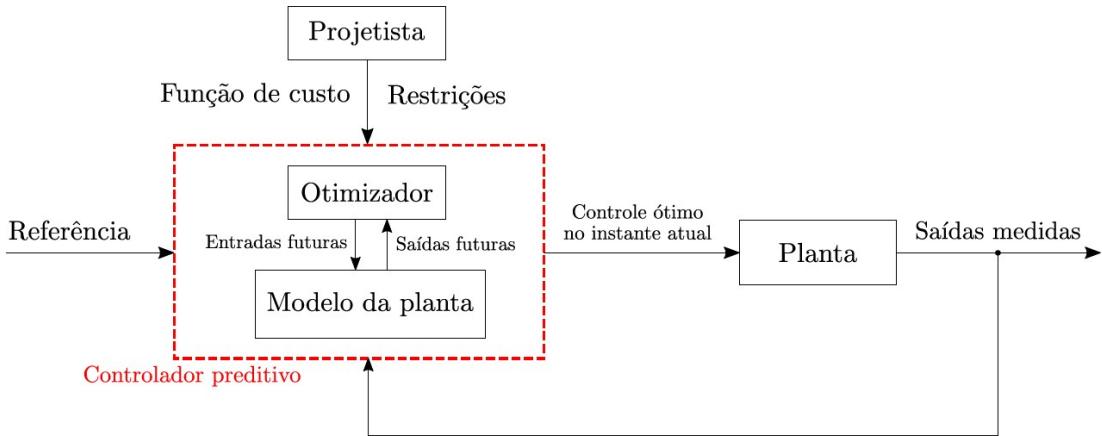


Figura 1.3: Estrutura fundamental de um controlador preditivo

Nesse contexto, o presente trabalho visa a implementação de uma abordagem de MPC no controle de um VANT com empuxo vetorial. Para isso, modificar-se-á a bancada desenvolvida em Marques (2018)(Figura 1.1) substituindo o quadricóptero pelo bicóptero com vetorização longitudinal mostrado na Figura 1.4. Então, uma técnica de MPC será implementada para fazer com que o bicóptero siga uma trajetória de referência mantendo uma atitude constante. Além disso, no projeto do MPC serão consideradas as limitações físicas de excursão para o ângulo do rotor.

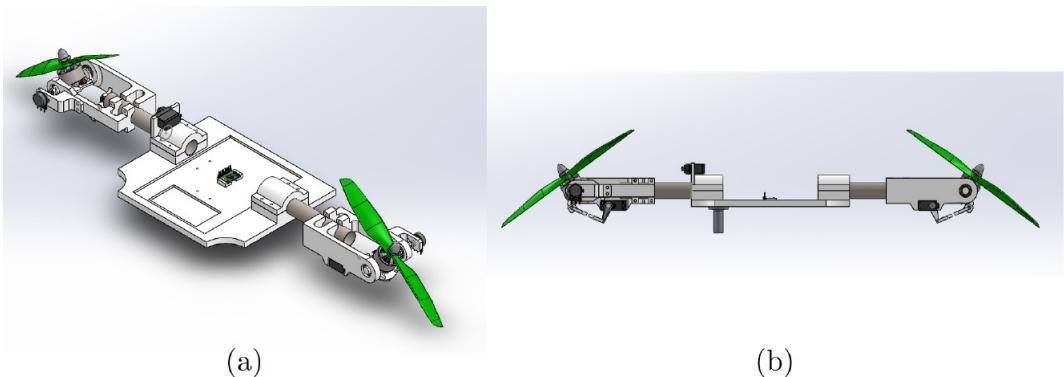


Figura 1.4: Vistas isométrica (a) e lateral (b) do bicóptero com mecanismo de vetorização do empuxo longitudinal

1.1 ESTRUTURA DO TEXTO

O restante do texto encontra-se organizado da maneira descrita a seguir.

- No Capítulo 2 descrever-se-á a formulação de controle preditivo adotada;
- No Capítulo 3 será apresentada a bancada do bicóptero;
- No Capítulo 4 serão expostos os resultados obtidos em simulação;
- No Capítulo 5 serão expostos os resultados obtidos no ensaio experimental;
- No Capítulo 6 apresentam-se as conclusões do trabalho.

2 Controle preditivo baseado em modelo

Neste trabalho, consideram-se em sistemas discretos, lineares e invariantes no tempo descritos do seguinte modo no espaço de estados:

$$\mathbf{x}(k+1) = \Phi \mathbf{x}(k) + \Gamma \mathbf{u}(k) \quad (2.1a)$$

$$\mathbf{y}(k) = C \mathbf{x}(k) \quad (2.1b)$$

em que $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^p$ e $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^q$ denotam estados, entradas de controle e saídas da planta, respectivamente. As matrizes do modelo $\Phi \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\Gamma \in \mathbb{R}^{n \times p}$ e $C \in \mathbb{R}^{n \times q}$ são constantes e com elementos conhecidos.

A entrada \mathbf{u} é composta por

$$\mathbf{u}(k) = \mathbf{u}_{lqr}(k) + \mathbf{u}_{mpc}(k) \quad (2.2)$$

sendo

$$\mathbf{u}_{lqr}(k) = -K \mathbf{x}(k) \quad (2.3)$$

em que K é um ganho de realimentação de estados estabilizante. Em particular, K é calculado considerando-se um regulador linear quadrático (OGATA, 1994). Isto é, K é calculado a partir da solução da equação de Riccati dada por

$$K = (\Gamma^T S \Gamma + R_{lqr})^{-1} (\Gamma^T S \Phi) \quad (2.4)$$

Sendo S obtido a partir de (2.5)

$$\Phi^T S \Phi - S - (\Phi^T S \Gamma)(\Gamma^T S \Gamma + R_{lqr})^{-1} (\Gamma^T S \Phi) + Q_{lqr} = 0 \quad (2.5)$$

em que $Q_{lqr} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $R_{lqr} \in \mathbb{R}^{p \times p}$, com $Q \geq 0$ e $R > 0$, são matrizes de ajuste que permitem ponderar os estados e o esforço de controle.

Já a parcela de controle preditivo é determinada minimizando-se a seguinte função de custo:

$$\begin{aligned} J(k) = & \sum_{i=1}^N ([\hat{\mathbf{y}}(k+i|k) - \mathbf{y}_{ref}]^T Q [\hat{\mathbf{y}}(k+i|k) - \mathbf{y}_{ref}]) + \\ & + \sum_{i=1}^M ([\Delta \hat{\mathbf{u}}_{mpc}(k+i-1|k)]^T R [\Delta \hat{\mathbf{u}}_{mpc}(k+i-1|k)]) \end{aligned} \quad (2.6)$$

em que \mathbf{y}_{ref} é um vetor constante de referências para as saídas, $N \in \mathbb{R}$ é o horizonte de predição, $M \in \mathbb{R}$ é o horizonte de controle, $Q \in \mathbb{R}^{q \times q}$ e $R \in \mathbb{R}^{p \times p}$, com $Q > 0$ e $R > 0$, são

matrizes de ajuste que permitem ponderar entre a minimização do erro de rastreamento e o esforço de controle. O simbolo “ $\hat{}$ ” aponta elementos preditos. A notação $(k + i|k)$ indica que a predição i passos à frente é realizada com base nas informações disponíveis em k .

O incremento de controle $\Delta\mathbf{u}_{mpc}$ é dado por

$$\Delta\mathbf{u}_{mpc}(k) = \mathbf{u}_{mpc}(k) - \mathbf{u}_{mpc}(k-1) \quad (2.7)$$

Esse incremento é determinado a partir da solução do seguinte problema de otimização:

$$\min_{\Delta\hat{\mathbf{u}}_{mpc}(k+i-1|k), i=1,\dots,M} J(k) \quad (2.8)$$

sujeito a

$$\hat{\mathbf{x}}(k+i|k) = \Phi\mathbf{x}(k+i-1) + \Gamma\hat{\mathbf{u}}(k+i-1|k), i = 1, 2, \dots, N \quad (2.9)$$

$$\hat{\mathbf{y}}(k+i|k) = C\hat{\mathbf{x}}(k+i|k), i = 1, 2, \dots, N \quad (2.10)$$

$$\hat{\mathbf{u}}(k+i-1|k) \in \mathcal{U}, i = 1, 2, \dots, N \quad (2.11)$$

$$\Delta\hat{\mathbf{u}}(k+i-1|k) \in \Delta\mathcal{U}, i = 1, 2, \dots, M \quad (2.12)$$

$$\Delta\hat{\mathbf{u}}_{mpc}(k+i-1|k) = 0, i = M+1, M+2, \dots, N \quad (2.13)$$

em que \mathcal{U} e $\Delta\mathcal{U}$ representam os conjuntos admissíveis para as variáveis de controle e incremento de controle, respectivamente. Tais conjuntos são formados por limitantes inferiores e superiores para controle e incremento de controle denotados por \mathbf{u}_{min} , $\Delta\mathbf{u}_{min}$, \mathbf{u}_{max} e $\Delta\mathbf{u}_{max}$, respectivamente.

Cabe salientar que o problema de otimização foi definido em termos da sequência de incrementos de controle $\{\Delta\hat{\mathbf{u}}_{mpc}(k+i-1|k), i = 1, 2, \dots, M\}$ para obtenção de previsões não polarizadas. Isto é, para que a solução do problema de otimização seja uma sequência nula caso $\mathbf{y} = \mathbf{y}_{ref}$. Isso proporciona robustez contra incertezas de modelo à malha de controle (ROSSITER, 2003).

Resolvendo-se o problema de otimização composto por (2.8)–(2.13) determina-se a sequência ótima $\{\Delta\hat{\mathbf{u}}_{mpc}^*(k+i-1|k), i = 1, 2, \dots, M\}$. Como mencionado anteriormente, o primeiro elemento dessa sequência é usado para calcular a ação de controle preditivo $\mathbf{u}_{mpc}(k)$, ou seja,

$$\mathbf{u}_{mpc}(k) = \Delta\hat{\mathbf{u}}_{mpc}^*(k|k) + \mathbf{u}_{mpc}(k-1) \quad (2.14)$$

No instante seguinte, $k+1$, o procedimento de otimização é repetido, seguindo a estratégia de horizonte retrocedente.

Para o emprego de pacotes de otimização numérica, pode ser necessário escrever o problema de otimização (2.8)–(2.13) como um problema de programação quadrática. Esse

procedimento é mostrado no Apêndice A e também pode ser encontrado na literatura de controle preditivo, como em Rossiter (2003).

A formulação de MPC descrita não garante a eliminação do erro em regime estacionário na presença de perturbações constantes de entrada/saída. Isso ocorre pois não há ação integral de controle. Para eliminar esse erro, incluir-se-á um observador de estados com estimativa de perturbação de saída, como descrito em Franklin (1994). O projeto desse observador é mostrado a seguir.

2.1 OBSERVADOR DE ESTADOS COM ESTIMATIVA DE PERTURBAÇÃO

A lei de controle denotada por (2.2), (2.3) e (2.14) não elimina o erro de regime estacionário que ocorre na presença de uma perturbação $\mathbf{d}(k)$ constante na saída da planta. Pode-se estimar e considerar tal perturbação no projeto do MPC introduzindo um estado adicional no observador. Com efeito, elimina-se o erro de regime.

Para isso, seja o seguinte modelo:

$$\mathbf{x}(k+1) = \bar{A}\mathbf{x}(k) + \Gamma\mathbf{u}_{mpc}(k) \quad (2.15a)$$

$$\mathbf{y}(k) = C\mathbf{x}(k) + \mathbf{d}(k) \quad (2.15b)$$

com $\mathbf{d}(k) \in \mathbb{R}^q$ constante, i.e. $\mathbf{d}(k+1) = \mathbf{d}(k)$ e \bar{A} é definida no Apêndice A.

Considere ainda um estado aumentado dado por

$$\boldsymbol{\chi}(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \mathbf{d}(k) \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

Então, de (2.15) e (2.16), com \mathbf{d} constante, é possível escrever

$$\boldsymbol{\chi}(k+1) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k+1) \\ \mathbf{d}(k+1) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \bar{A} & 0_{n \times q} \\ 0_{n \times q}^T & I_q \end{bmatrix}}_{A_\chi} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \mathbf{d}(k) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \Gamma & 0_{q \times p} \\ B_\chi & \end{bmatrix}}_{B_\chi} \mathbf{u}_{mpc}(k) \quad (2.17a)$$

Além disso, a relação entre a saída \mathbf{y} é

$$\mathbf{y}(k) = \underbrace{\begin{bmatrix} C & I_q \end{bmatrix}}_{C_\chi} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \mathbf{d}(k) \end{bmatrix} \quad (2.17b)$$

Assim, tem-se um novo modelo no espaço de estados dado por

$$\boldsymbol{\chi}(k+1) = A_\chi \boldsymbol{\chi}(k) + B_\chi \mathbf{u}_{mpc}(k) \quad (2.18a)$$

$$\mathbf{y}(k) = C_\chi \boldsymbol{\chi}(k) \quad (2.18b)$$

Pode-se então projetar um observador de estados para obter uma estimativa $\boldsymbol{\chi}$ do estado aumentado $\boldsymbol{\chi}(k)$. As equações (2.19), (2.20) e (2.21) mostram como os estados podem ser estimados em um certo instante k (MACIEJOWSKI, 2002):

$$\boldsymbol{y}_e(k|k-1) = C_\chi \boldsymbol{\chi}_e(k|k-1) \quad (2.19)$$

$$\boldsymbol{\chi}_e(k|k) = \boldsymbol{\chi}_e(k|k-1) + L'(\boldsymbol{y}(k) - \boldsymbol{y}_e(k|k-1)) \quad (2.20)$$

$$\boldsymbol{\chi}_e(k+1|k) = A_\chi \boldsymbol{\chi}_e(k|k) + B_\chi \boldsymbol{u}_{mpc}(k) \quad (2.21)$$

em que \boldsymbol{y}_e e $\boldsymbol{\chi}_e$ representam as saídas e os estados estimados, respectivamente. $L' \in \mathbb{R}^{(n+q) \times q}$ é uma matriz de ganhos para correção do erro de estimativa. Essa matriz é ajustada de modo que o erro de estimativa converja para zero assintoticamente. Isso é realizado alocando-se os autovalores de

$$A_\chi - LC_\chi \quad (2.22)$$

dentro do círculo unitário (FRANKLIN; POWELL; EMAMI-NAEINI, 1994). Posteriormente obtém-se a matriz de correção fazendo

$$L' = A_\chi^{-1} L \quad (2.23)$$

Empregando-se o observador de estados dado por (2.19)–(2.21), obtém-se uma estimativa $\boldsymbol{\chi}_e$ para $\boldsymbol{\chi}$. $\boldsymbol{\chi}_e$ é composto por estimativas não polarizadas para estado e perturbação, que serão incluídas na formulação do MPC, como detalhado a seguir.

2.2 INCLUSÃO DA ESTIMATIVA DE PERTURBAÇÃO NA LEI DE CONTROLE

Com o uso do estimador de perturbações, pode-se obter erro permanente de regime nulo. Para tanto, deve-se alterar as equações de predições de modo a incluir o efeito das perturbações de saída \boldsymbol{d} . Isso é realizado a partir de um novo estado estendido $\bar{\boldsymbol{\xi}}(k)$ dado por

$$\bar{\boldsymbol{\xi}}(k) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\chi}(k) \\ \boldsymbol{u}_{mpc}(k-1) \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

Então, basta usar $\boldsymbol{\chi}(k)$ e (A_χ, B_χ, C_χ) no lugar de $\boldsymbol{x}(k)$ e (\bar{A}, Γ, C) na formulação de MPC apresentada nesse capítulo. Mais precisamente, faz-se essa substituição na determinação das matrizes de predição (vide Apêndice A).

A Figura 2.1 mostra o diagrama de blocos da estratégia de controle completa.

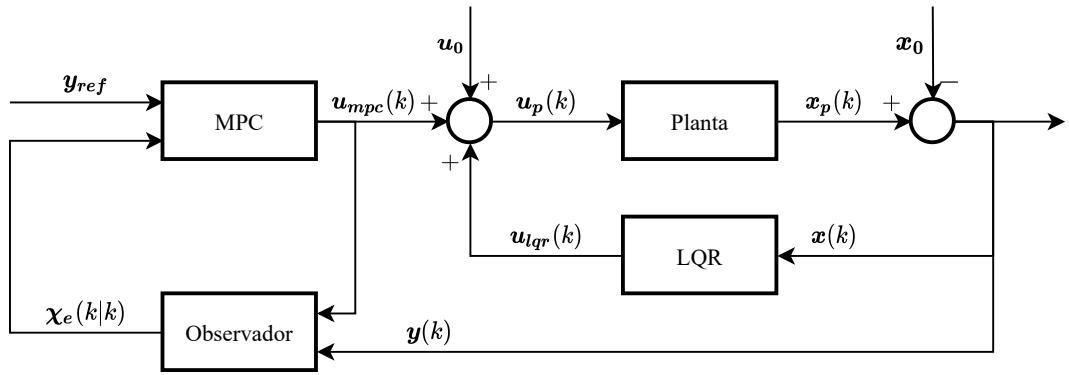


Figura 2.1: Diagrama da implementação do MPC com observador de estados.

3 Descrição do sistema

O sistema a ser controlado é representado no desenho da Figura 3.1. O braço da bancada é constituído por quatro juntas rotacionais que podem realizar as rotações representadas pelos ângulos θ_1 , θ_2 , θ_3 e θ_4 . Em uma das extremidades do braço, é fixado um bicóptero que pode girar em forno do eixo Z_p , conforme a Figura 3.2. Esse ângulo de rotação será denominado rolamento (θ_4).

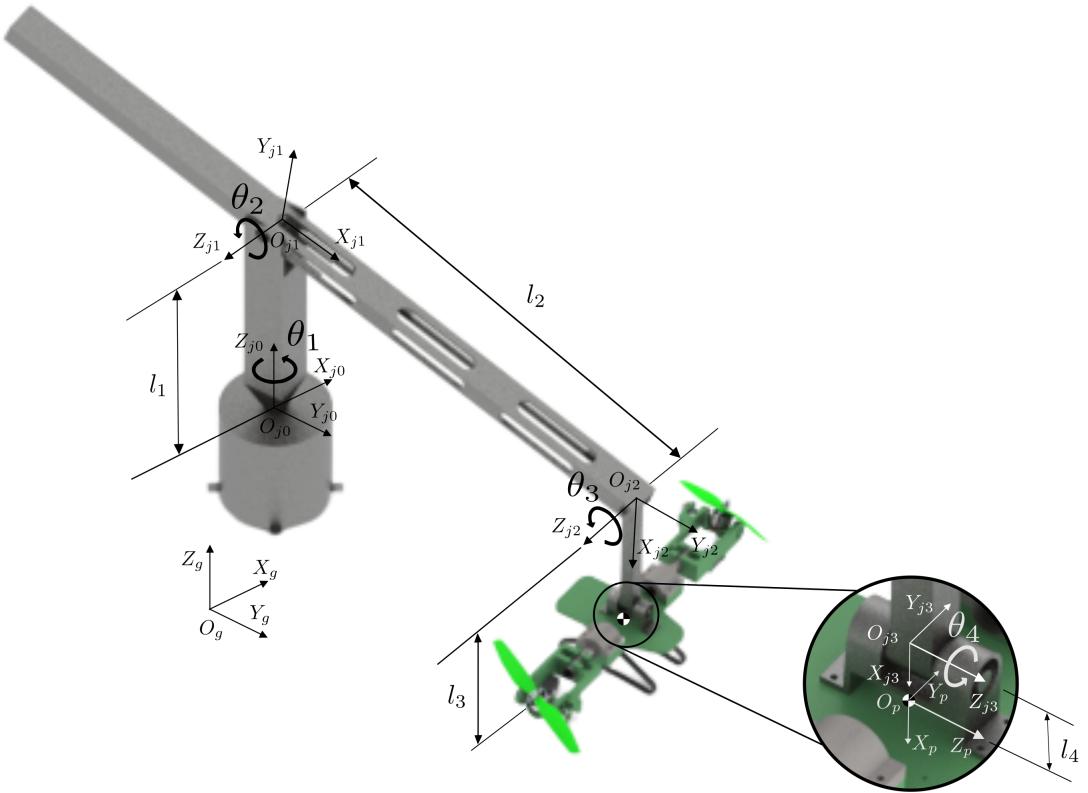


Figura 3.1: Desenho da bancada do bicóptero com identificação dos graus de liberdade.

Vale ressaltar que é possível definir uma relação algébrica entre θ_3 e θ_2 . Consequentemente não há necessidade de mensurar e nem controlar tal junta. Por essa razão, o ângulo θ_3 será desconsiderado de agora em diante.

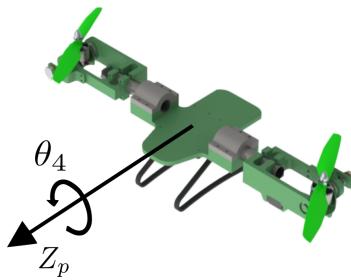


Figura 3.2: Detalhamento do eixo de rotação do bicóptero.

O sistema construído é apresentado na Figura 3.3.

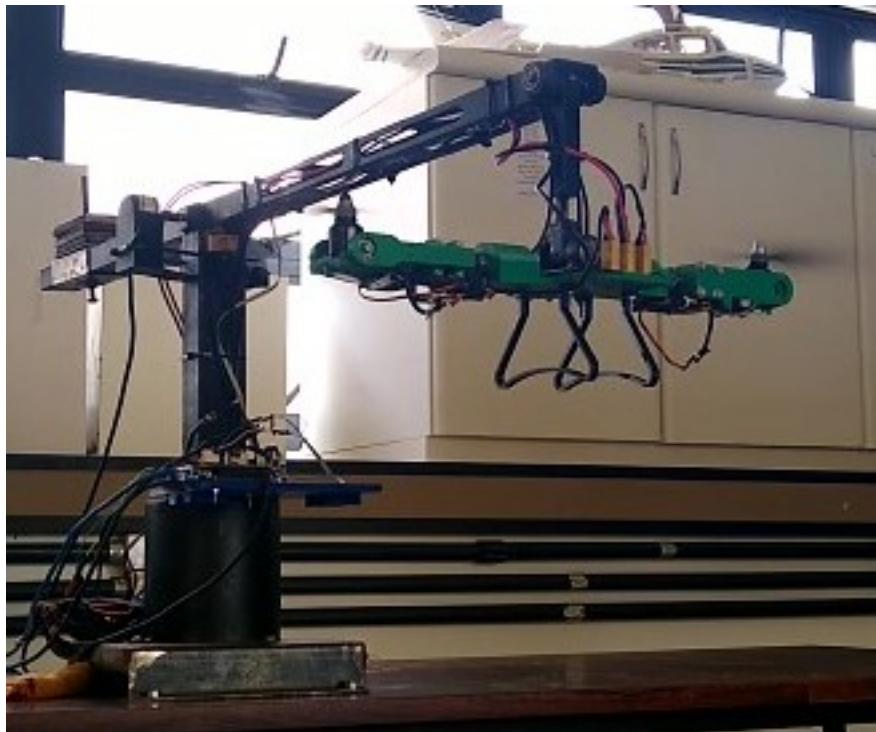


Figura 3.3: Foto do bicóptero.

A tarefa de controle consiste em rastrear referências para os ângulos θ_1 e θ_2 mantendo-se θ_4 constante. Com esse propósito, manipulam-se as forças de empuxo F_1 e F_2 geradas pelos conjuntos propulsivos e os ângulos de inclinação α_1 e α_2 desses conjuntos com respeito ao braço do veículo. Essas variáveis de entrada encontram-se apontadas na Figura 3.4.

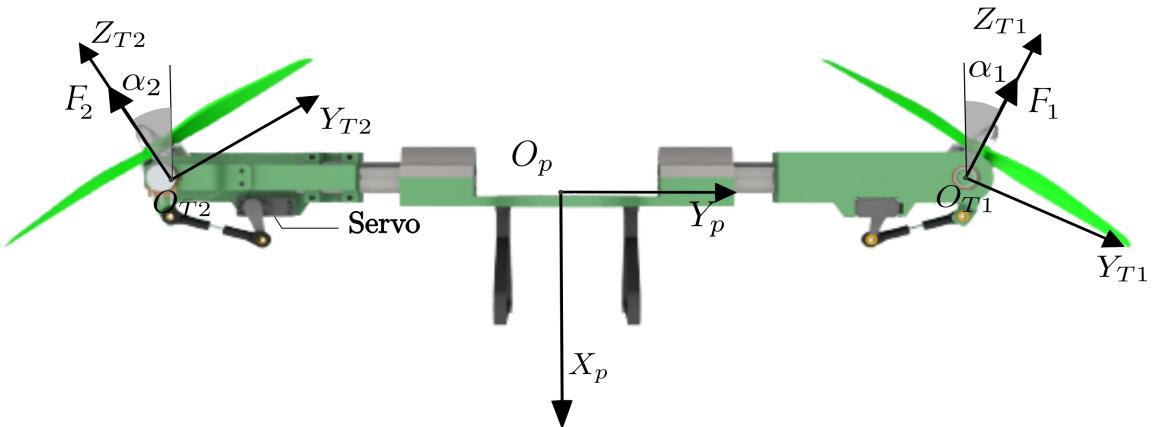


Figura 3.4: Ilustração das variáveis controladas F_1 , F_2 , α_1 e α_2

Cabe salientar que, na prática, controlam-se as velocidades de rotação dos motores variando-se os tempos em alta de ondas do tipo PWM fornecidas a controladores eletrônicos de velocidade (*Electronic Speed Controllers* – ESC), como o mostrado na Figura 3.5. Além disso, os ângulos de inclinação dos conjuntos propulsivos são variados utilizando-se um servomecanismo (Figura 3.4). As relações entre os comandos enviados aos ESCs e aos servomecanismos, e as variáveis controladas (i.e. F_1 , F_2 , α_1 e α_2) foram determinadas experimentalmente. Por brevidade, tais relações serão omitidas desse documento. Doravante considerar-se-á que manipula-se diretamente F_1 , F_2 , α_1 e α_2 .



Figura 3.5: Foto de um controlador eletrônico de velocidade utilizado no trabalho.

Para projetar o controlador descrito no Capítulo 2, deve-se obter um modelo linear e discreto para o sistema. Com esse objetivo, consideraram-se os ângulos de equilíbrio $\bar{\theta}_1 = \bar{\theta}_2 = \bar{\theta}_4 = 0^\circ$, com as entradas de equilíbrio associadas $\bar{\alpha}_1 = \bar{\alpha}_2 = 0^\circ$, \bar{F}_1 e \bar{F}_2 , sendo \bar{F}_1 e \bar{F}_2 valores que foram determinados experimentalmente.

Nesse cenário com base no modelo desenvolvido em Marques (2018), particularizado para o caso de um bicóptero com vetorização lateral da força de empuxo, é possível escrever o seguinte modelo no espaço de estados:

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{-l_2(\bar{F}_1 + \bar{F}_2)}{I_{Z_{j0}}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-\mu_2}{I_{Z_{j1}}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-\gamma_4}{I_{Z_p}} & 0 & 0 & \frac{-\mu_4}{I_{Z_p}} \end{bmatrix}}_A \boldsymbol{x}(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{l_2\bar{F}_1}{I_{Z_{j0}}} & \frac{-l_2\bar{F}_2}{I_{Z_{j0}}} \\ \frac{l_2}{I_{Z_{j1}}} & \frac{l_2}{I_{Z_{j1}}} & 0 & 0 \\ \frac{b_1}{I_{Z_p}} & \frac{-b_2}{I_{Z_p}} & 0 & 0 \end{bmatrix}}_B \boldsymbol{u}(t) \quad (3.1a)$$

$$\boldsymbol{y}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_C \boldsymbol{x}(t) \quad (3.1b)$$

em que $\boldsymbol{x} = [\theta_1 \ \theta_2 \ \theta_4 \ \dot{\theta}_1 \ \dot{\theta}_2 \ \dot{\theta}_4]^T$ e $\boldsymbol{u} = [\tilde{F}_1 \ \tilde{F}_2 \ \alpha_1 \ \alpha_2]^T$. Os valores e as descrições das constantes encontram-se na Tabela 3.1. O símbolo “~” indica valores relativos aos valores de equilíbrio.

Tabela 3.1: Descrição dos parâmetros do modelo.

Constante	Significado	Valor
l_2	Comprimento do elemento 2	0,173 m
$I_{Z_{j0}}$	Momento de inércia total em relação a Z_{j0}	0,5848 kg·m ²
$I_{Z_{j1}}$	Momento de inércia total em relação a Z_{j1}	0,3070 kg·m ²
I_{Z_p}	Momento de inércia total em relação a Z_p	0,01 kg·m ²
μ_2	Coeficiente de atrito dinâmico	1,5988 kg·m ² /s
μ_4	Coeficiente de atrito dinâmico	0,0959 kg·m ² /s
γ_4	Coeficiente atrelado ao desbalanceamento do bicóptero	0,6376 kg·m ² /s ²
b_1	Comprimento do braço esquerdo do bicóptero	0,215 m
b_2	Comprimento do braço direito do bicóptero	0,215 m
\bar{F}_1	Força de equilíbrio para o conjunto propulsivo 1	1,7 N
\bar{F}_2	Força de equilíbrio para o conjunto propulsivo 2	1,7 N

Substituindo os valores das constantes da Tabela 3.1 no modelo (3.1) obtém-se

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1,0058 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5,2078 & 0 \\ 0 & 0 & -63,76 & 0 & 0 & -9,59 \end{bmatrix}}_A \mathbf{x}(t) +$$

$$+ \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5029 & -0,5029 \\ 0,5635 & 0,5635 & 0 & 0 \\ 21,5 & -21,5 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_B \mathbf{u}(t) \quad (3.2a)$$

$$\mathbf{y}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_C \mathbf{x}(t) \quad (3.2b)$$

A discretização de (3.2) pode ser feita usando o método do segurador de ordem zero para um período de amostragem T_s (FRANKLIN; POWELL; EMAMI-NAEINI, 1998). Como resultado, obtém-se as seguintes matrizes a tempo discreto:

$$\Phi = \Phi(T_s) = e^{AT_s} \quad (3.3)$$

$$\Gamma = \Gamma(T_s) = \int_0^{T_s} e^{A\eta} d\eta B \quad (3.4)$$

Cabe relembrar que a matriz C não é alterada pela discretização.

Considerando $T_s = 0,02$ segundos, a partir de (3.3) e (3.4), obtém-se o modelo discreto

mostrado a seguir.

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x}(k+1) &= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -0,00020075 & 0,02 & 0 & -1,2776 \times 10^{-6} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0,018994 & 0 \\ 0 & 0 & 0,98805 & 0 & 0 & 0,018122 \\ 0 & 0 & -0,020035 & 1 & 0 & -0,0001885 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,90108 & 0 \\ 0 & 0 & -1,1554 & 0 & 0 & 0,81426 \end{bmatrix}}_{\Phi} \boldsymbol{x}(k) + \\
&+ \underbrace{\begin{bmatrix} -1,3869 \times 10^{-7} & 1,3869 \times 10^{-7} & 0,00010058 & -0,00010058 \\ 0,00010889 & 0,00010889 & 0 & 0 \\ 0,0040293 & -0,0040293 & 0 & 0 \\ -2,7468 \times 10^{-5} & 2,7468 \times 10^{-5} & 0,010058 & -0,010058 \\ 0,010703 & 0,010703 & 0 & 0 \\ 0,38962 & -0,38962 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\Gamma} \boldsymbol{u}(k) \quad (3.5a) \\
\boldsymbol{y}(k) &= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_C \boldsymbol{x}(k) \quad (3.5b)
\end{aligned}$$

4 Resultados de simulação

Nesta seção apresentar-se-ão resultados de simulação no modelo linear discreto representado por (3.5a). Foram realizadas simulações sem e com o observador de estados. Em alguns cenários serão incluídos descasamentos de modelo e ruído de medida aproximando a simulação do experimento. Em todas as simulações considerou-se um atraso de 10 ms para representar o tempo gasto para resolução do problema de otimização.

A tarefa de controle consiste em rastrear as referências mostradas na Figura 4.1. Cabe salientar que os valores finais de $\theta_{1,ref}$ e $\theta_{2,ref}$ correspondem a referências de 15° e -10° , respectivamente. Também vale destacar que $\theta_{1,ref}$, $\theta_{2,ref}$ e $\theta_{4,ref}$ são as referências para os três ângulos de saída do sistema.

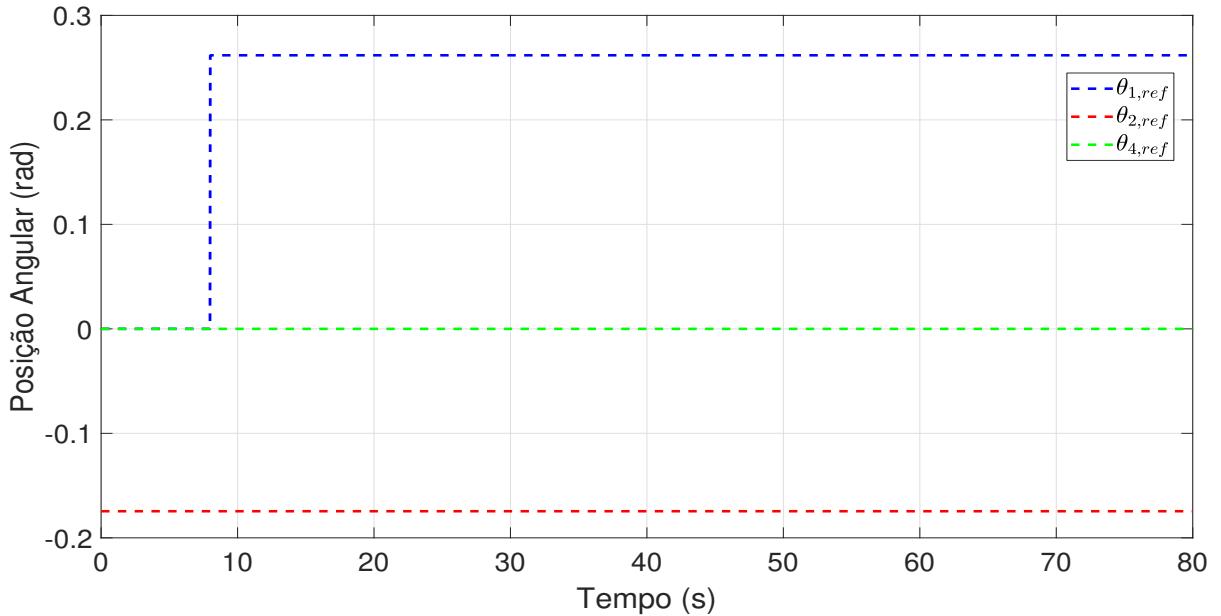


Figura 4.1: Referências de posição angular do braço robótico.

4.1 SIMULAÇÕES SEM OBSERVADOR DE ESTADOS

Supondo que todos os estados são medidos, o MPC foi projetado com $N = 10$, $M = 8$, $Q = diag([1 \ 10 \ 0,1])$ e $R = diag([15 \ 15 \ 75 \ 75])$ e considerando os seguintes limitantes $\mathbf{u}_{max} = [(2,9 - \bar{F}_1) \ (2,9 - \bar{F}_2) \ 0,5236 \ 0,5236]^T$, $\mathbf{u}_{min} = [(1,3 - \bar{F}_1) \ (1,3 - \bar{F}_2) \ 0 \ 0]^T$, $\Delta\mathbf{u}_{max} = [0,8 \ 0,8 \ 0,13 \ 0,13]^T$ e $\Delta\mathbf{u}_{min} = [-0,8 \ -0,8 \ -0,13 \ -0,13]^T$. O vetor de realimentação foi projetado considerando um regulador quadrático com pesos de estados e controle dados respectivamente por $Q_{lqr} = diag([0,2 \ 42 \ 6,5 \ 0,1 \ 128 \ 1,8])$ e $R_{lqr} =$

$diag([5 \ 5 \ 1 \ 1])$. Na Figura 4.2 apresentam-se as posições e as velocidades angulares das juntas da bancada. O controle aplicado ao sistema durante essa simulação encontra-se na Figura 4.3. Verifica-se que as restrições sobre os canais de entrada são respeitadas ao longo da simulação. Na Figura 4.4, apresentam-se os incrementos de controle.

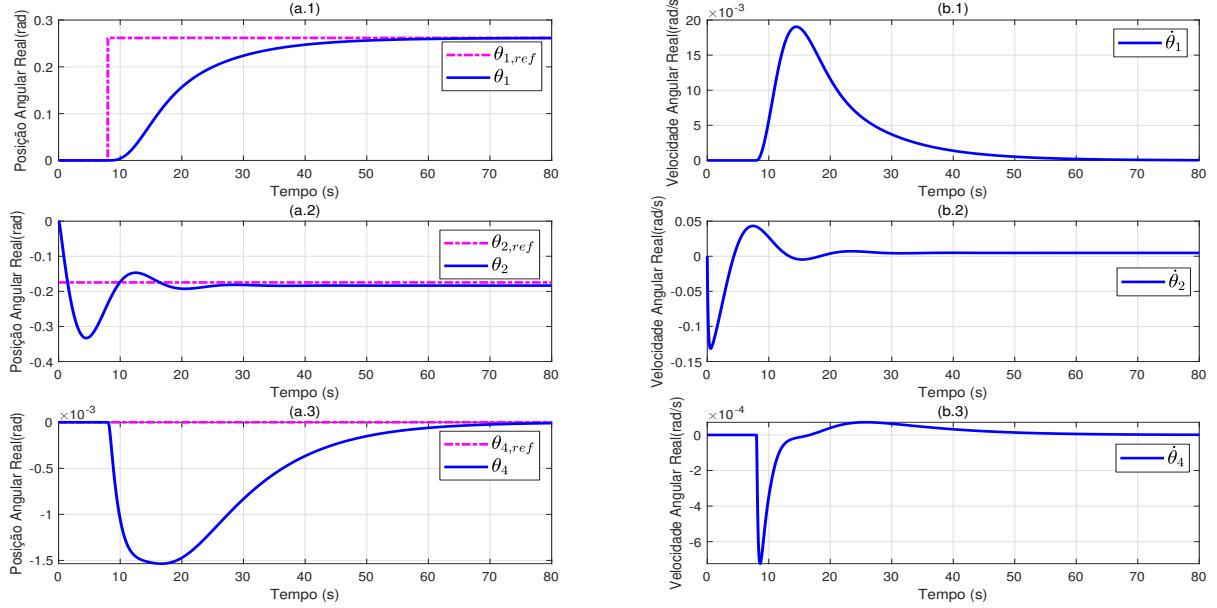


Figura 4.2: Resultados de simulação sem observador de estados. (a) Posições angulares. (b) Velocidades angulares.

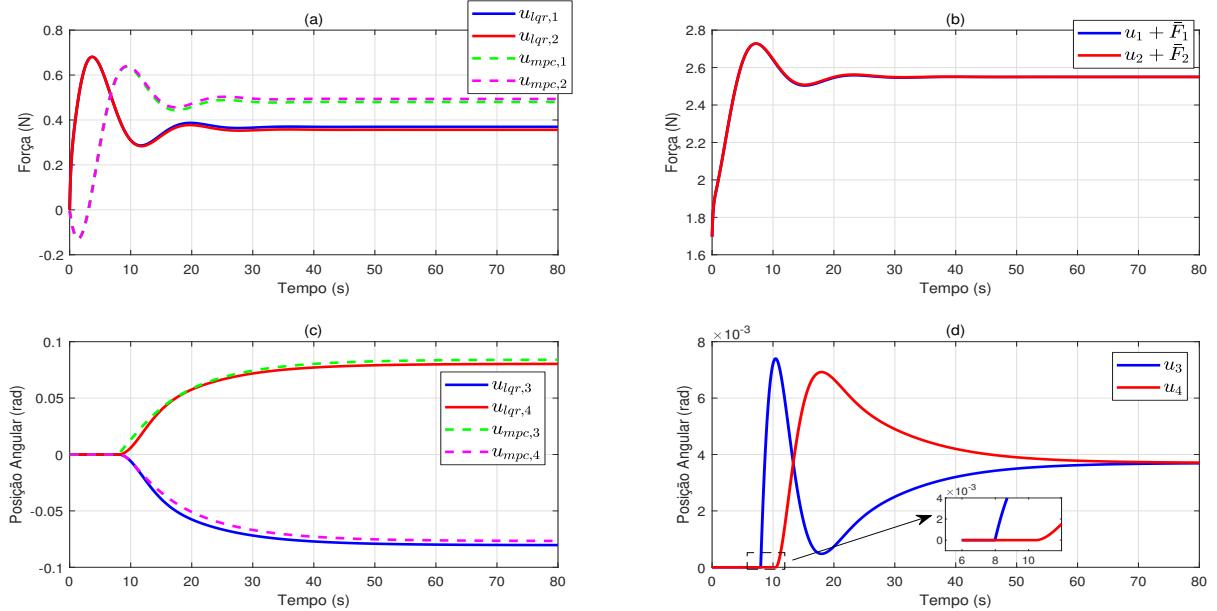


Figura 4.3: Resultados de simulação sem observador de estados. (a) e (c) Parcelas de controles. (b) e (d) Controles totais.

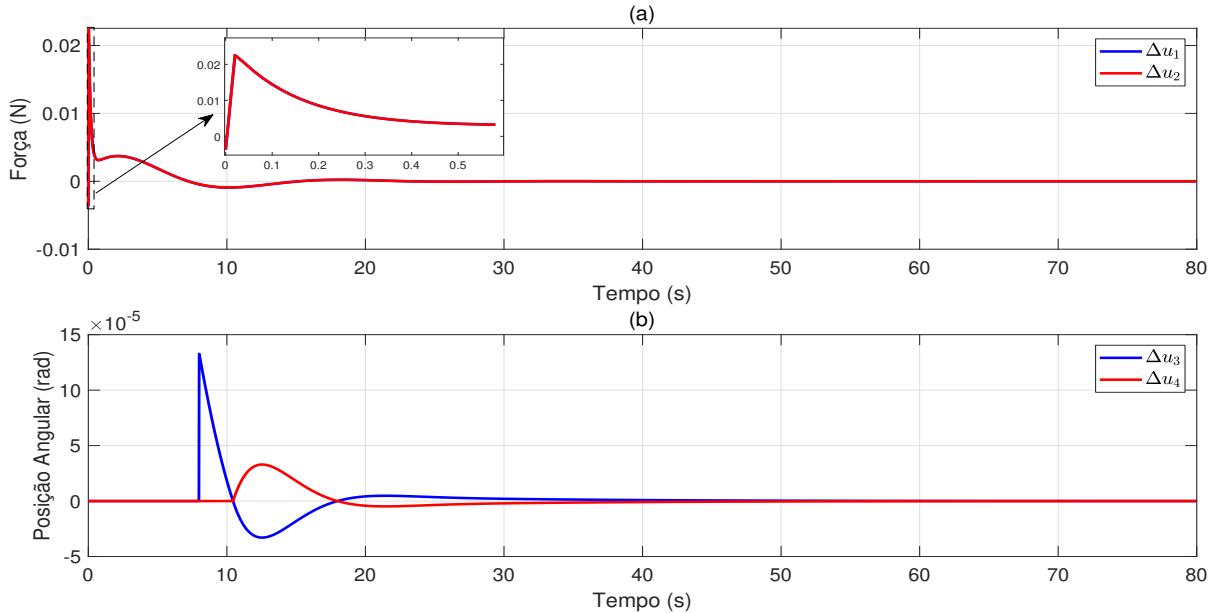


Figura 4.4: Resultados de simulação sem observador de estados. Incrementos de controle.

Vale lembrar que os controles totais apresentados na Figura 4.3b e 4.3d, bem como as próximas figuras que apresentem a totalidade das ações de controle, são resultantes da soma das parcelas de controle preditivo, do regulador linear quadrático e também os valores de equilíbrio se diferentes de zero.

4.2 SIMULAÇÕES COM OBSERVADOR DE ESTADOS

Considerando realimentação de saída e descasamentos de modelo utilizaram-se as técnicas descritas nas Seções 2.1 e 2.2, para introdução de ação integral de controle.

A alocação dos autovalores de (2.22) foi feita considerando o problema do regulador quadrático com as matrizes de ponderação associadas como $Q_{ob} = diag([1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 16 \ 16 \ 16])$ e $R_{ob} = diag([1 \ 1 \ 1])$. Posteriormente a matriz de correção do erro de estimativa foi calculada conforme (2.23). Além disso a estimativa inicial foi $\chi(0| - 1) = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$. Os parâmetros adotados para o projeto do MPC e do LQR descritos na Seção 4.1 foram mantidos. As Figuras 4.5 e 4.6 trazem a evolução temporal de estados e os controles aplicados à planta, respectivamente. Verifica-se que as referências foram rasteadas com o respeito às restrições de entrada. Nas Figura 4.7 e 4.8, apresentam-se os incrementos de controle e as perturbações de saída estimadas, respectivamente.

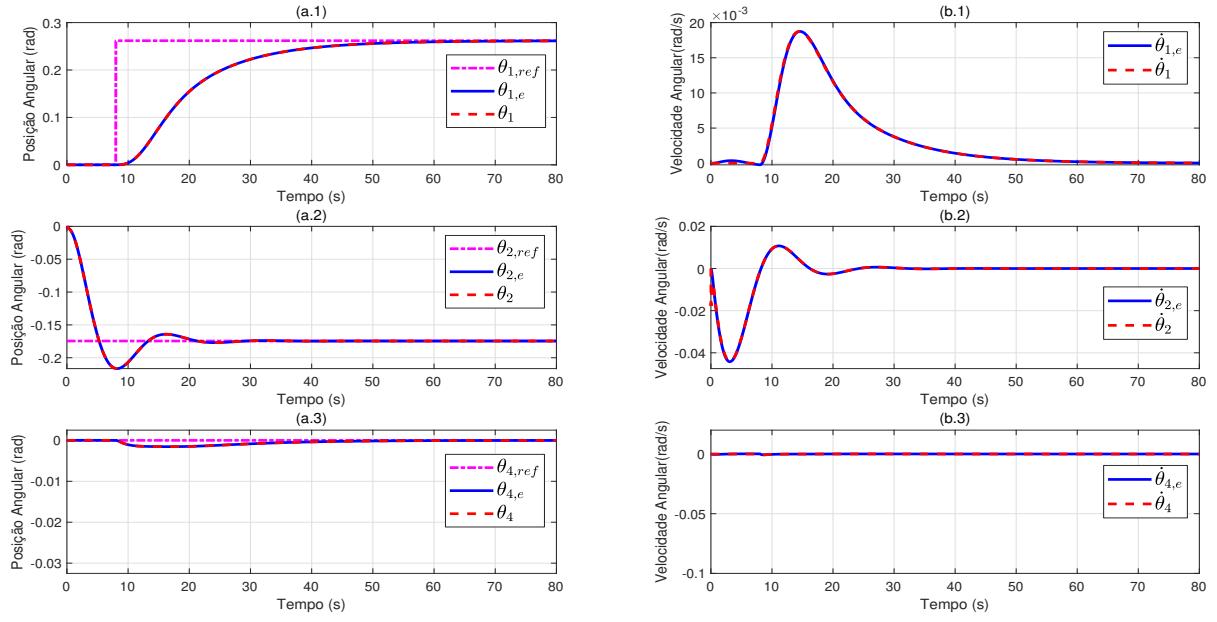


Figura 4.5: Resultados de simulação com observador de estados. (a) Posições angulares.
(b) Velocidades angulares.

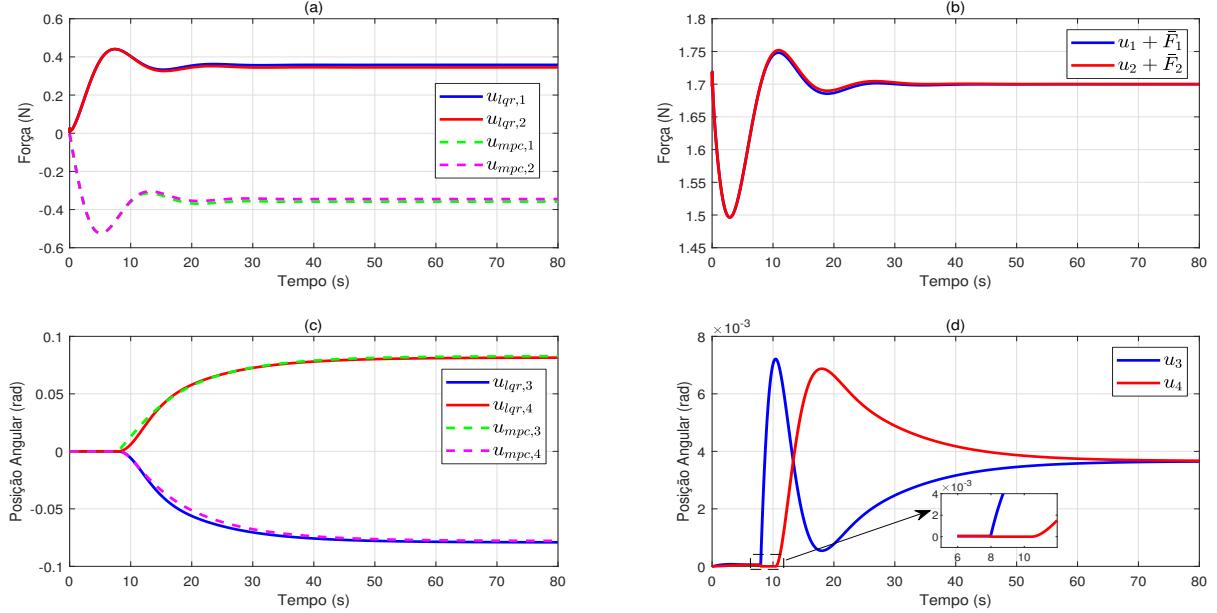


Figura 4.6: Resultados de simulação com observador de estados. (a) e (c) Parcelas de controles. (b) e (d) Controles totais.

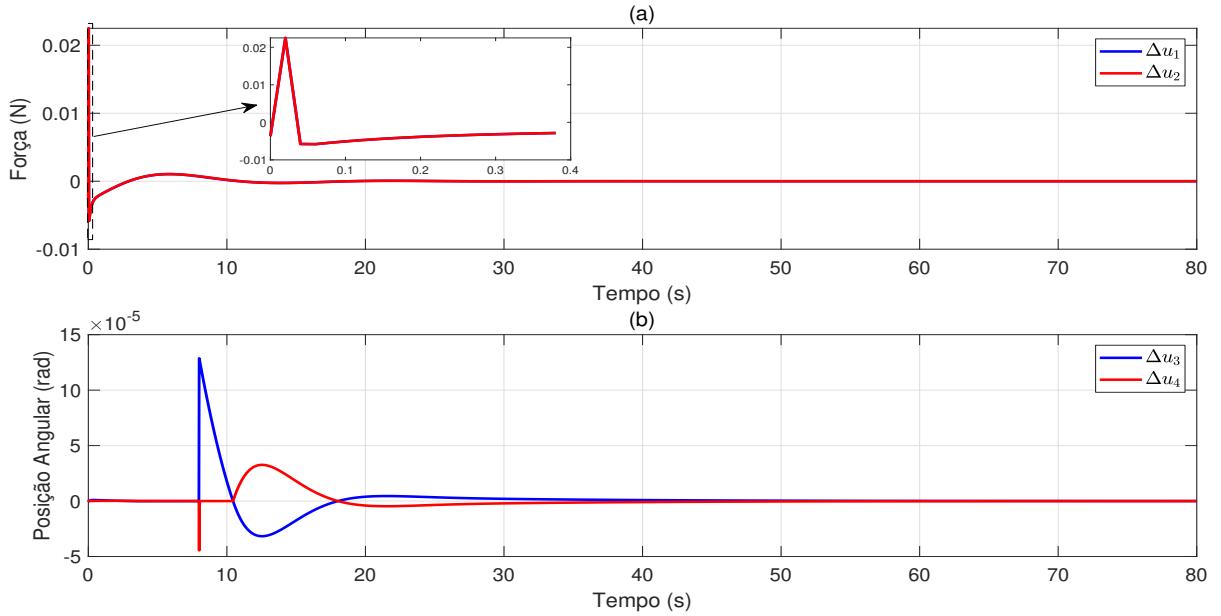


Figura 4.7: Resultados de simulação com observador de estados. Incrementos de controle

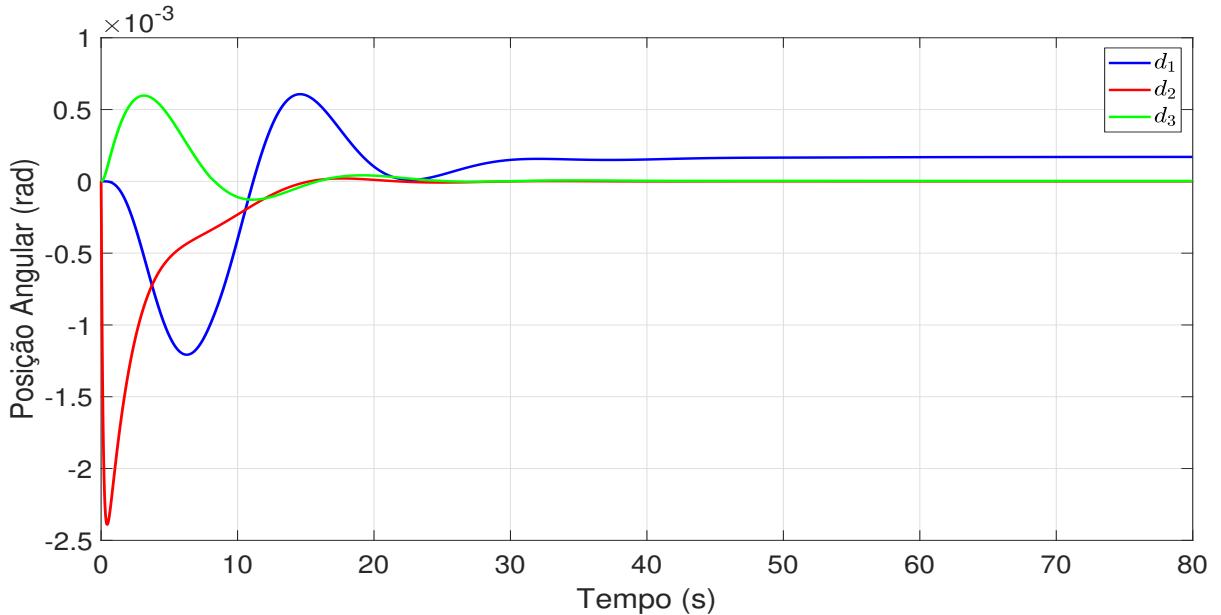


Figura 4.8: Resultados de simulação com observador de estados. Perturbações de saída estimadas.

Para avaliar a robustez do controlador, foi inserido um desfasamento entre o modelo de simulação e o modelo utilizado no projeto. Mais precisamente, no modelo de simulação, adotaram-se valores de $I_{Z_{j0}}$, $I_{Z_{j1}}$ e I_{Z_p} três vezes maior do que os considerados durante o projeto do controlador e do observador. Mais ainda, foram incluídos ruídos de medida

de posição e velocidade com distribuição de desvio padrão de 0,005 rad e 0,014 rad/s, respectivamente. Ambos com média zero. Apesar das imperfeições do modelo e dos ruídos, as saídas foram conduzidas para as referências sem erro sistemático, como pode ser observado na Figura 4.9. O controle aplicado à planta é apresentado na Figura 4.10.

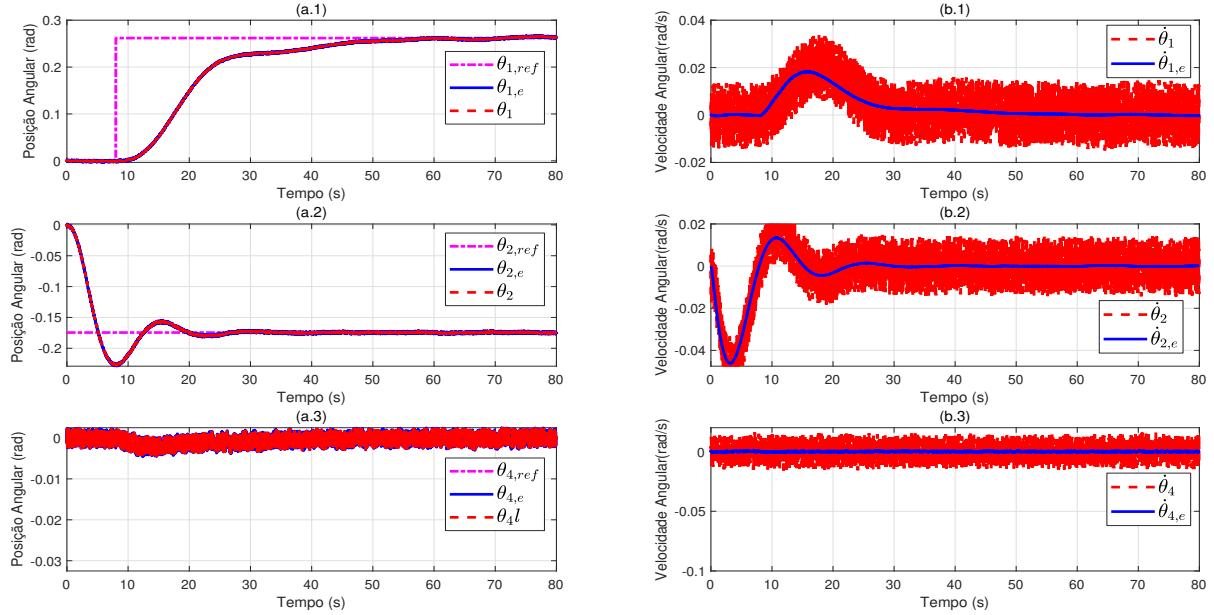


Figura 4.9: Resultados de simulação com observador de estados, descasamento no valor dos momentos de inercias e ruído de medida. (a) Posições angulares. (b) Velocidades angulares.

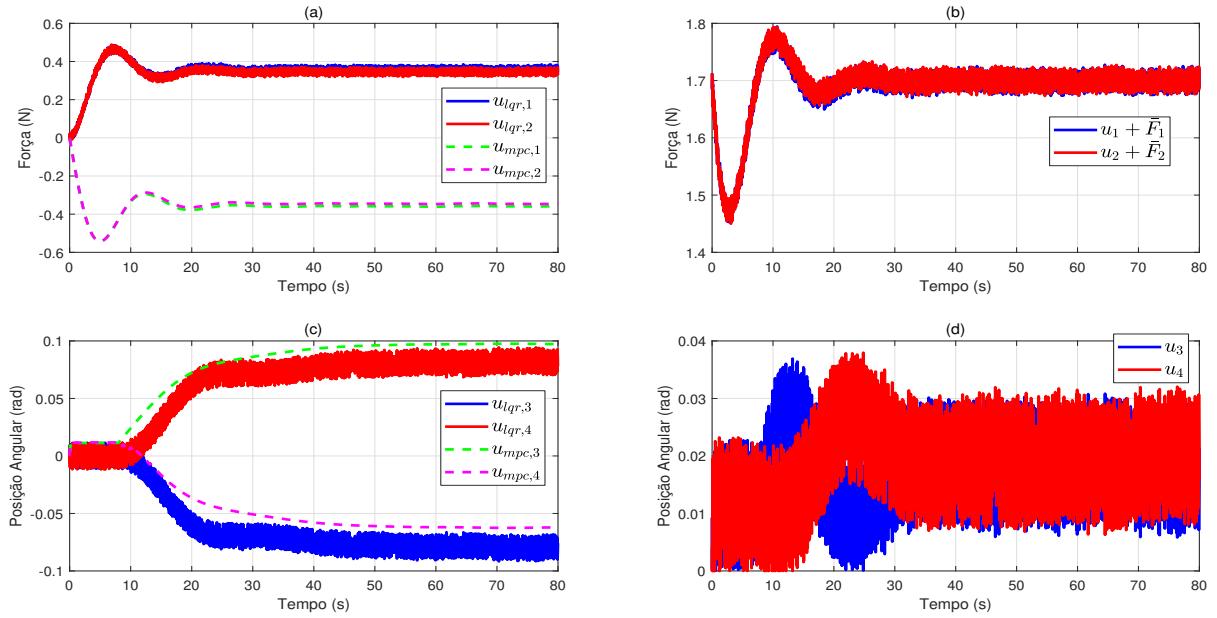


Figura 4.10: Resultados de simulação com observador de estados, descasamento no valor dos momentos de inercias e ruído de medida. (a) e (c) Parcelas de controles. (b) e (d) Controles totais.

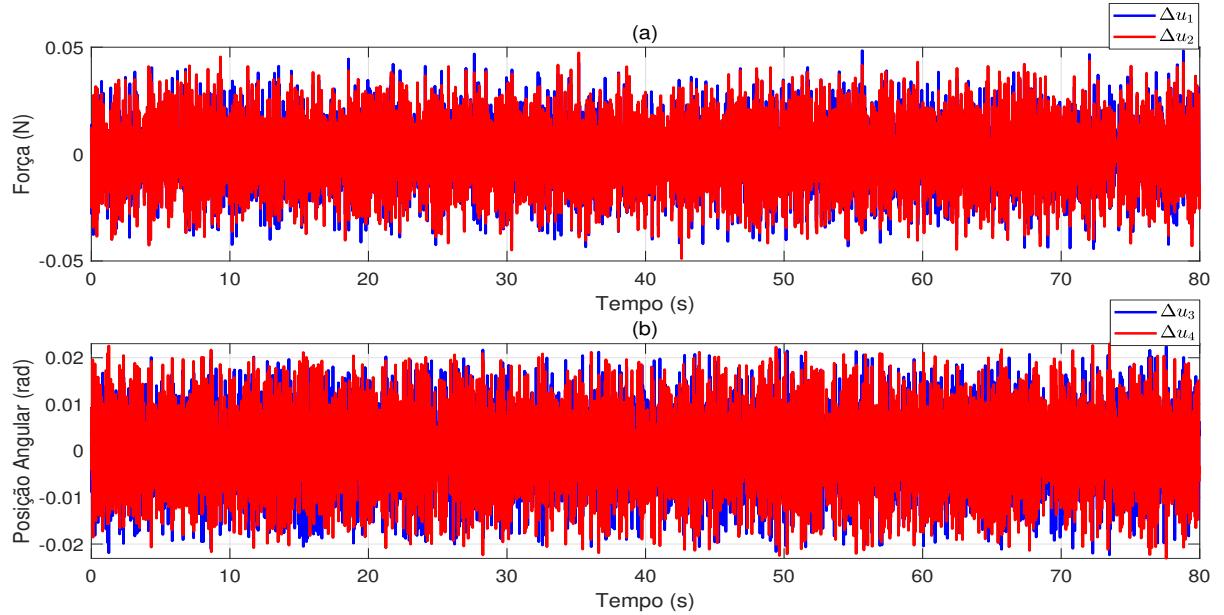


Figura 4.11: Resultados de simulação com observador de estados, descasamento no valor dos momentos de inercias e ruído de medida. Incrementos de controle.

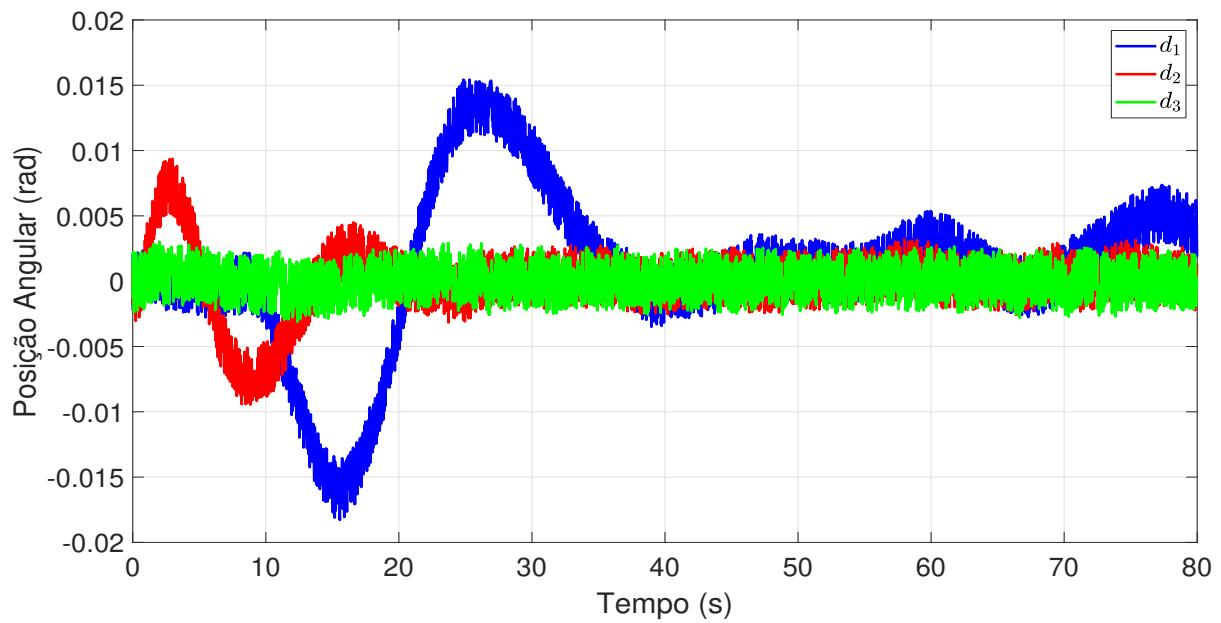


Figura 4.12: Resultados de simulação com observador de estados, descasamento no valor dos momentos de inercias e ruído de medida. Perturbações de saída estimadas.

5 Resultados experimentais

A lei de controle apresentada no Capítulo 2 foi implementada no equipamento real mostrado na Figura 3.3. O controlador foi embarcado em uma BeagleBone Green.

A BeagleBone Green é uma placa *open-source*, que pode ser adotada para embarcar sistemas de controle. A placa é dotada de GPIO dupla de 46 pinos possibilitando a utilização de módulos comuns como *bluetooth*, *displays*, sensores, e outros dispositivos. Mais ainda, possui suporte para sistemas operacionais como Debian, Android e Ubuntu.

O *hardware* da BeagleBone Green é detalhado a seguir.

- Processador AM3358 1 GHz ARM Cortex-A8;
- Memória RAM DDR3 de 512 MB;
- Armazenamento de 4 GB 8-bit eMMC *on-board flash storage*;
- Acelerador gráfico 3D;
- Acelerador NEON *floating-point*;
- Dois microcontroladores PRU 32-bit;
- Conector micro-USB para alimentação e transgerência de dados;
- Porta USB host;
- Porta Ethernet;
- Dois GPIO de 46 pinos;
- Dois conectores Grove (I2C e UART).

Para construção e resolução do problema de otimização dado por (2.8) até (2.13) foram utilizadas as bibliotecas Armadillo e qpOASES. A Armadillo é uma biblioteca de álgebra linear de alta qualidade (matemática matricial) para a linguagem C++ (SANDERSON; CURTIN, 2016). A qpOASES é uma implementação em C++ *open-source* de um método de otimização de conjunto ativo e pode ser empregada para resolver problemas de programação quadrática paramétrica. Possui vários recursos teóricos que a tornam particularmente adequada para aplicações MPC (FERREAU; POTTSCHKA; KIRCHES, 2007–2017).

O MPC foi projetado com $N = 10$, $M = 8$, $Q = \text{diag}([1 \ 10 \ 0,1])$ e $R = \text{diag}([15 \ 15 \ 75 \ 75])$ e considerando os seguintes limitantes $\mathbf{u}_{\max} = [(2,9 - \bar{F}_1) \ (2,9 - \bar{F}_2) \ 0,5236 \ 0,5236]^T$, $\mathbf{u}_{\min} = [(1,3 - \bar{F}_1) \ (1,3 - \bar{F}_2) \ 0 \ 0]^T$, $\Delta\mathbf{u}_{\max} = [0,8 \ 0,8 \ 0,13 \ 0,13]^T$ e $\Delta\mathbf{u}_{\min} = [-0,8 \ -0,8 \ -0,13 \ -0,13]^T$. O vetor de realimentação foi projetado considerando

um regulador quadrático com pesos de estados e controle dados respectivamente por $Q_{lqr} = diag([0,2 \ 42 \ 6,5 \ 0,1 \ 128 \ 1,8])$ e $R_{lqr} = diag([5 \ 5 \ 1 \ 1])$. A alocação dos autovalores de (2.22) foi feita considerando o problema do regulador quadrático com as matrizes de ponderação associadas como $Q_{ob} = diag([1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 16 \ 16 \ 16])$ e $R_{ob} = diag([1 \ 1 \ 1])$. Posteriormente a matriz de correção do erro de estimativa foi calculada conforme (2.23). Além disso a estimativa inicial foi $\chi(0| - 1) = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$. Vale salientar que esses ajustes são iguais aos da simulação.

As referências impostas são mostradas na Figura 5.1. Ressaltando que os valores finais de $\theta_{1,ref}$ e $\theta_{2,ref}$ correspondem a referências de 20° e 10° , respectivamente.

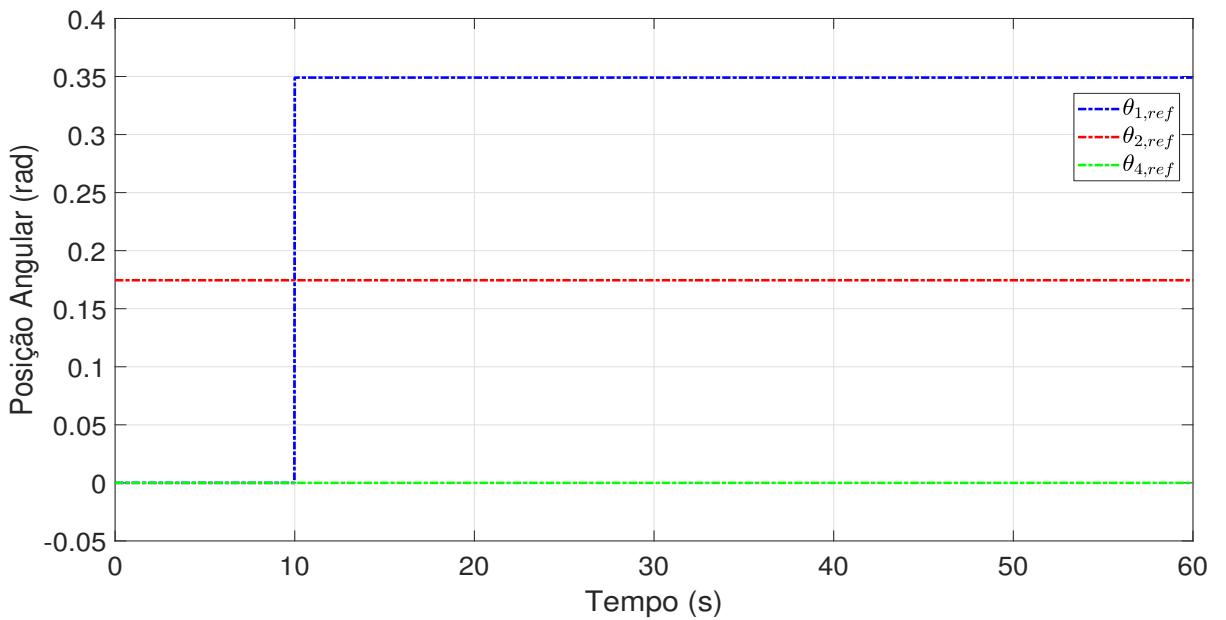


Figura 5.1: Referências de posição angular do braço robótico.

Na prática há outros efeitos que dificultam a execução da tarefa de controle como dinâmicas não modeladas e atrito seco. Mesmo assim, como pode ser verificado na Figura 5.2, a tarefa de controle foi realizada (i.e. as referências de ângulo foram rastreadas) com o devido atendimento às restrições sobre o canal de controle (vide Figura 5.3). No gráfico a.1 da Figura 5.2, é possível observar o efeito do atrito seco, pois o elemento trava e, então, se move abruptamente após a força de empuxo vetorizada superar a força de destaque. É possível observar também que o observador de estados ameniza os ruídos de medida presentes, sobretudo nas informações de velocidades angulares (vide Figura 5.2.b). Os incrementos de controle e as estimativas de perturbação são mostrados nas Figuras 5.4 e 5.5, respectivamente.

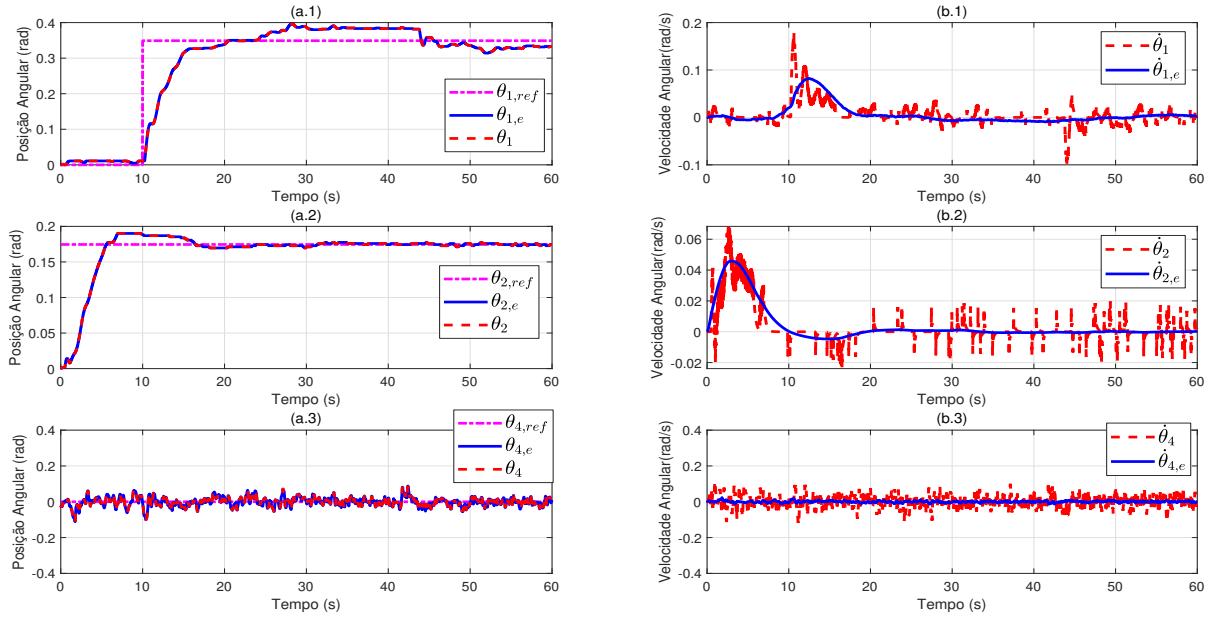


Figura 5.2: Resultados experimentais. (a) Posições angulares. (b) Velocidades angulares.

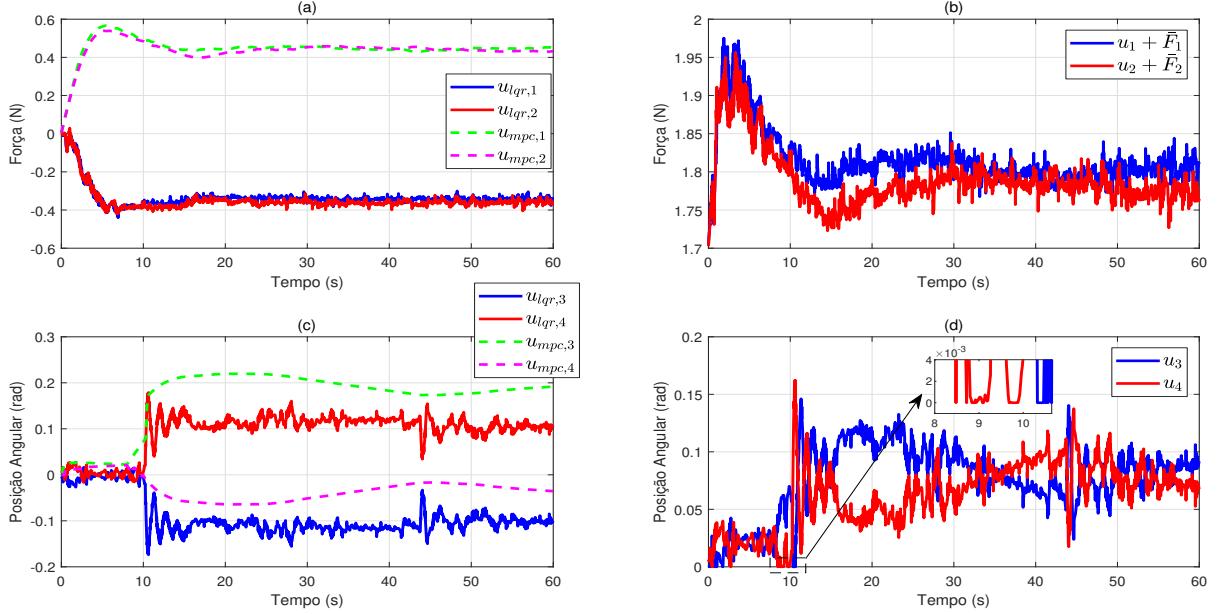


Figura 5.3: Resultados experimentais. (a) e (c) Parcelas de controles. (b) e (d) Controles totais.

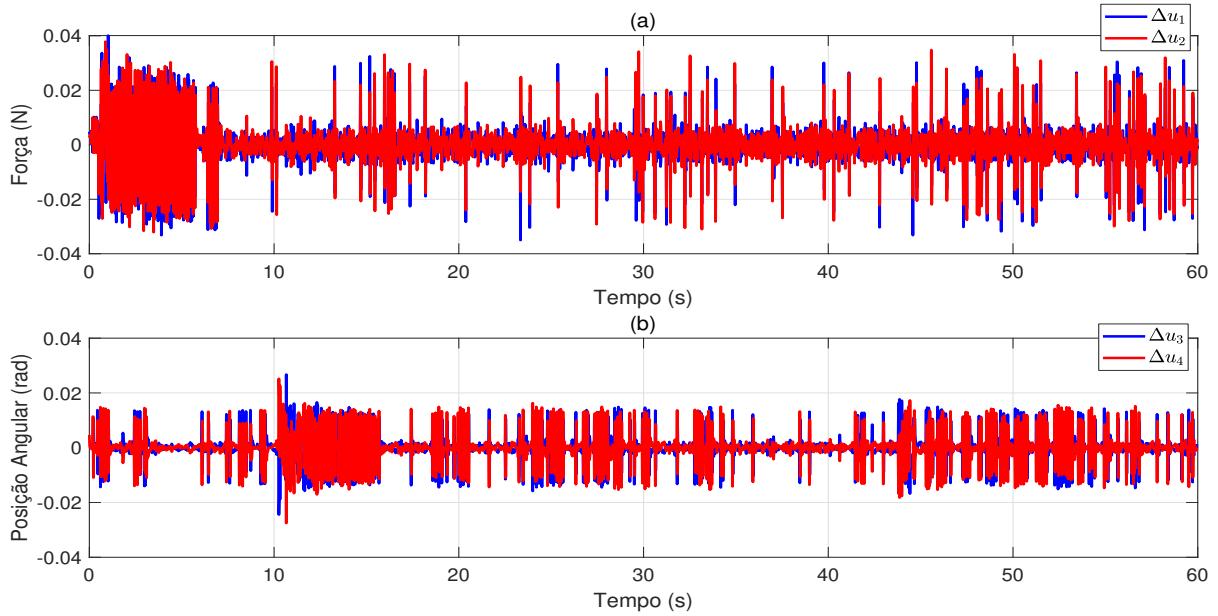


Figura 5.4: Resultados experimentais. Incrementos de controle

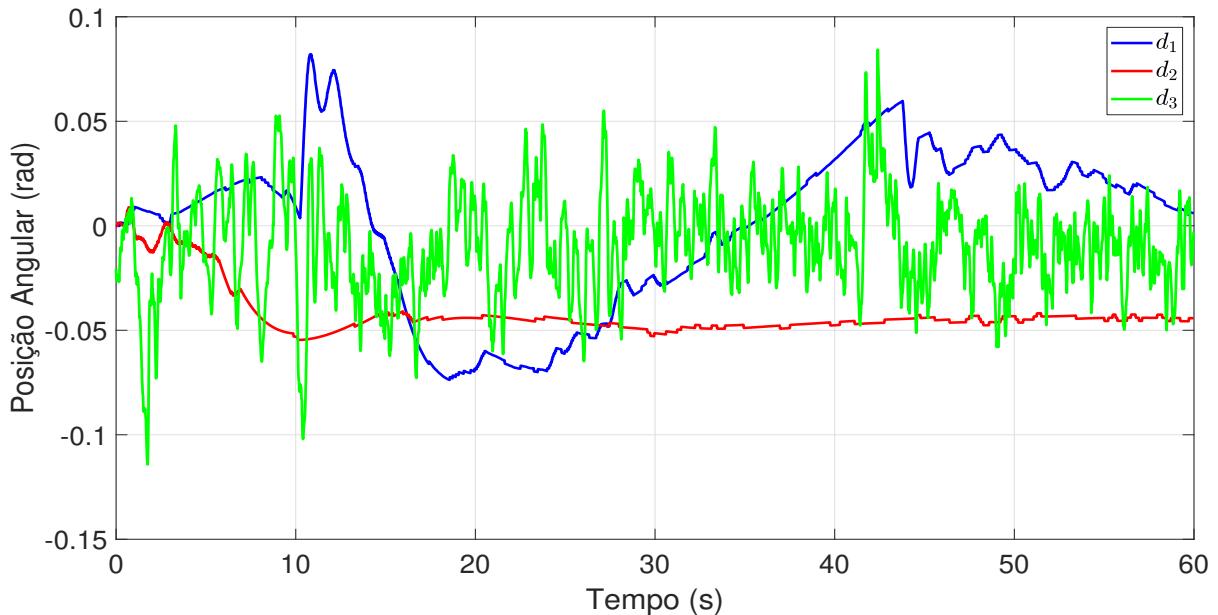


Figura 5.5: Resultados experimentais. Perturbações de saída estimadas.

Na Figura 5.6 é apresentado o tempo computacional gasto para o cálculo da lei de controle. Observa-se que há picos elevados de tempo associados a ativação das restrições de entrada. Tais picos de tempo computacional resultam em atrasos significativos na malha de controle e afetam o desempenho do sistema. De todo modo, a malha de controle projetada se mostrou robusta ao atraso gerado no cálculo da ação de controle.

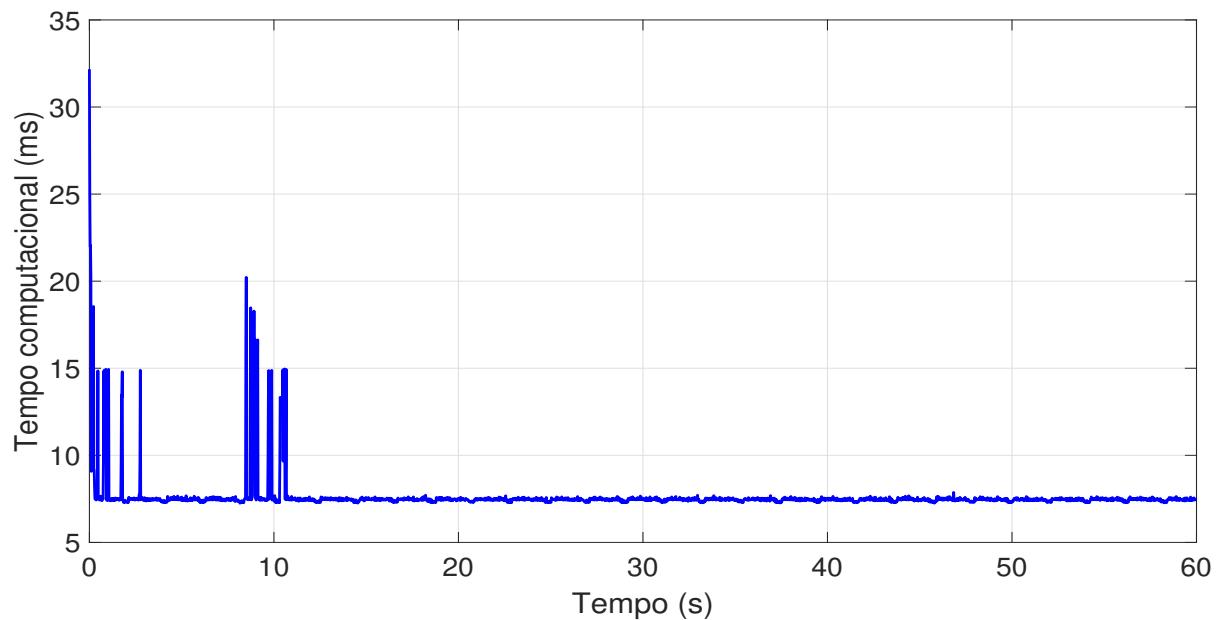


Figura 5.6: Resultados experimentais. Tempo gasto para calcular a ação de controle.

Observando os resultados experimentais, sujeitos a descasamentos de modelo, ruído de medida, dinâmicas não modeladas e atraso computacional, vê-se que o controlador atingiu resultados satisfatórios, como a estabilização do sistema e o rastreamento das referências.

6 Conclusão

Nesse trabalho investigou-se o emprego de controle preditivo baseado em modelo (MPC) para estabilização e rastreamento de referências constantes para a posição de um bicóptero com mecanismo de vetorização da força de empuxo de uma bancada de laboratório.

O controlador foi projetado considerando um modelo linear no espaço de estados incluindo perturbações constantes de saída. Com efeito, obtém-se um modelo de predição não-polarizado e elimina-se o erro de regime estacionário. Mais ainda, restrições sobre a magnitude e o incremento de controle foram consideradas no projeto do controlador.

Realizaram-se simulações em diferentes cenários. Inicialmente, considerou-se realimentação de estados (Seção 4.1). Posteriormente, supondo realimentação de saída (Seção 4.2), incluiu-se um observador de estados para estimar um vetor de estados estendido, que incluía perturbações constantes de saída. Em todos esses cenários, os resultados de simulação mostraram-se satisfatórios, isto é, as referências de posição foram rastreadas com o devido atendimento às restrições sobre o canal de controle. Isso também foi observado mesmo na presença de ruídos de medida e descasamentos de modelo.

Então, passou-se para implementação do controlador no sistema real. Com esse propósito, o controlador foi embarcado em uma BeagleBone Green utilizando as bibliotecas Armadillo (para construção do problema de otimização) e qpOASES (para resolução de tal problema). Os resultados experimentais também se mostraram satisfatórios, o que indica que o MPC é uma lei de controle que pode ser empregada no controle de aeronaves dotadas de empuxo vetorial.

Um dos maiores problemas observado na bancada foi a ocorrência de picos no tempo computacional associados à ativação das restrições. Esse problema pode motivar a realização de trabalhos futuros. Em particular, pode-se adotar técnicas de MPC explícito para redução do custo computacional ou aproximar a lei de controle preditivo por meio de funções não lineares.

Referências Bibliográficas

- ALEXIS, K.; NIKOLAKOPOULOS, G.; TZES, A. Switching model predictive attitude control for a quadrotor helicopter subject to atmospheric disturbances. *Control Engineering Practice*, Elsevier Limited, v. 19, n. 10, p. 1195–1207, out. 2011. ISSN 0967-0661.
- BADR, S.; MEHREZ, O.; KABEEL, A. E. A novel modification for a quadrotor design. In: *2016 International Conference on Unmanned Aircraft Systems (ICUAS)*. [S.l.: s.n.], 2016. p. 702–710.
- BOUABDALLAH, S.; NOTH, A.; SIEGWART, R. PID vs LQ control techniques applied to an indoor micro quadrotor. In: *IEEE INTERNATIONAL CONFERENCE ON INTELLIGENT ROBOTS AND SYSTEMS (IROS)*. [S.l.]: IEEE, 2004. p. 2451–2456.
- CUTLER, M. et al. Comparison of fixed and variable pitch actuators for agile quadrotors. In: *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference*. [S.l.: s.n.], 2011.
- FERREAU, H.; POTSCHEKA, A.; KIRCHES, C. *qpOASES webpage*. 2007–2017. [Http://www.qpOASES.org/](http://www.qpOASES.org/).
- FRANKLIN, G. F.; POWELL, J. D.; EMAMI-NAEINI, A. *Feedback control of dynamic systems*. 3. ed. Reading: Addison-Wesley, 1994.
- FRANKLIN, G. F.; POWELL, J. D.; EMAMI-NAEINI, A. *Digital Control of Dynamic Systems*. 3. ed. Menlo Park: Addison-Wesley, 1998.
- KENDOUL, F.; FANTONI, I.; LOZANO, R. Modeling and control of a small autonomous aircraft having two tilting rotors. *IEEE Transactions on Robotics*, v. 22, n. 6, p. 1297–1302, 2006.
- LEE, D.; KIM, H. J.; SASTRY, S. Feedback linearization vs. adaptive sliding mode control for a quadrotor helicopter. *International Journal of Control, Automation and Systems*, Springer, v. 7, n. 3, p. 419–428, 2009. ISSN 1598-6446.
- MACIEJOWSKI, J. M. *Predictive control with constraints*. Harlow: Prentice Hall, 2002. ISBN 0201398230.
- MARQUES, F. M. M. *Modeling, Simulation and Control of a Generic Tilting Rotor Multi-Copter*. Dissertacão (Mestrado) — Universidade Federal de Uberlândia, 2018.
- OGATA, K. *Discrete-time Control Systems*. Upper Saddle River: Prentice-Hall, 1994.
- ROSKAM, J. *Airplane Flight Dynamics and Automatic Flight Controls*. Lawrence: DARCorportaion, 1979.

ROSSITER, J. *Model-Based Predictive Control: A Practical Approach*. Boca Raton: CRC Press, 2003.

RYLL, M.; BÜLTHOFF, H. H.; GIORDANO, P. R. Modeling and control of a quadrotor uav with tilting propellers. In: *2012 IEEE International Conference on Robotics and Automation*. [S.l.: s.n.], 2012.

SANDERSON, C.; CURTIN, R. Armadillo: a template-based c++ library for linear algebra. *The Journal of Open Source Software*, The Open Journal, v. 1, n. 2, p. 26, Jun 2016. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.21105/joss.00026>>.

SERVAIS, E.; D'ANDRÉA-NOVEL, B.; MOUNIER, H. Ground control of a hybrid tricopter. In: *2015 International Conference on Unmanned Aircraft Systems (ICUAS)*. [S.l.: s.n.], 2015. p. 945–950.

SRIDHAR, S. et al. Tilt-rotor quadcopter xplored: Hardware based dynamics, smart sliding mode controller, attitude hold wind disturbance scenarios. In: *2019 American Control Conference (ACC)*. [S.l.: s.n.], 2019. p. 2005–2010.

VALAVANIS, K. P. *Advances in unmanned aerial vehicles*. Dordrecht: Springer, 2007.

Apêndices

A Problema de programação quadrática

Para reescrever o problema de otimização (2.8)–(2.13) como um problema de programação quadrática, a função de custo (2.6) e as restrições sobre o controle (2.11) e sobre os incrementos de controle (2.12) devem ser escritas em função da sequência de incrementos de controle $\{\Delta\hat{\mathbf{u}}_{mpc}(k+i-1|k), i = 1, 2, \dots, M\}$. Esse procedimento é detalhado a seguir.

A.1 ESCREVENDO A FUNÇÃO DE CUSTO EM TERMOS DAS VARIÁVEIS DE DECISÃO

- Equações de predição

Primeiramente, escrever-se-ão as N previsões para os estados em termos das ações de controle preditivo. Para isso, de (2.3), (2.2) e (2.1a) pode-se chegar a

$$\mathbf{x}(k+1) = \underbrace{(\Phi - \Gamma K)}_{\bar{A}} \mathbf{x}(k) + \Gamma \mathbf{u}_{mpc}(k) \quad (\text{A.1})$$

ou seja,

$$\mathbf{x}(k+1) = \bar{A} \mathbf{x}(k) + \Gamma \mathbf{u}_{mpc}(k) \quad (\text{A.2})$$

Reescrevendo (A.2) na notação de variáveis preditas, tem-se que

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1|k) = \bar{A} \mathbf{x}(k) + \Gamma \hat{\mathbf{u}}_{mpc}(k|k) \quad (\text{A.3})$$

Para dois passos à frente tem-se

$$\hat{\mathbf{x}}(k+2|k) = \bar{A} \hat{\mathbf{x}}(k+1|k) + \Gamma \hat{\mathbf{u}}_{mpc}(k+1|k) \quad (\text{A.4})$$

Substituindo (A.3) em (A.4), obtém-se

$$\hat{\mathbf{x}}(k+2|k) = \bar{A}^2 \mathbf{x}(k) + \bar{A} \Gamma \hat{\mathbf{u}}_{mpc}(k|k) + \Gamma \hat{\mathbf{u}}_{mpc}(k+1|k) \quad (\text{A.5})$$

De maneira semelhante, para i passos à frente:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}(k+i|k) &= \bar{A}^i \mathbf{x}(k) + \bar{A}^{i-1} \Gamma \hat{\mathbf{u}}_{mpc}(k|k) + \bar{A}^{i-2} \Gamma \hat{\mathbf{u}}_{mpc}(k+1|k) + \\ &\quad + \cdots + \Gamma \hat{\mathbf{u}}_{mpc}(k+i-1|k) \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Empilhando as predições para N passos na forma matricial, tem-se

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{x}}(k+1|k) \\ \widehat{\mathbf{x}}(k+2|k) \\ \vdots \\ \widehat{\mathbf{x}}(k+N|k) \end{bmatrix}}_{\widehat{\mathbf{X}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \bar{A} \\ \bar{A}^2 \\ \vdots \\ \bar{A}^N \end{bmatrix}}_{\mathbf{P}_{\mathbf{x}}} \mathbf{x}(k) + \\ + \underbrace{\begin{bmatrix} \Gamma & 0_{n \times p} & \dots & 0_{n \times p} \\ \bar{A}\Gamma & \Gamma & \dots & 0_{n \times p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{A}^{N-1}\Gamma & \bar{A}^{N-2}\Gamma & \dots & \Gamma \end{bmatrix}}_{\mathbf{H}_{\mathbf{x}}} \underbrace{\begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{u}}_{mpc}(k|k) \\ \widehat{\mathbf{u}}_{mpc}(k+1|k) \\ \vdots \\ \widehat{\mathbf{u}}_{mpc}(k+N-1|k) \end{bmatrix}}_{\widehat{\mathbf{U}}_{mpc}} \quad (\text{A.7a})$$

em que $0_{n \times p} \in \mathbb{R}^{n \times p}$ é um vetor de zeros.

Resumidamente,

$$\widehat{\mathbf{X}} = \mathbf{P}_{\mathbf{x}} \mathbf{x}(k) + \mathbf{H}_{\mathbf{x}} \widehat{\mathbf{U}}_{mpc} \quad (\text{A.7b})$$

Um procedimento similar pode ser realizado para escrever a relação futura entre ações de controle e saídas. Para tanto, primeiramente reescreve-se (2.1b) na notação de variáveis preditas, isto é,

$$\widehat{\mathbf{y}}(k+1|k) = C\widehat{\mathbf{x}}(k+1|k) \quad (\text{A.8})$$

Substituindo (A.2) em (A.8), chega-se a

$$\widehat{\mathbf{y}}(k+1|k) = C\bar{A}\mathbf{x}(k) + C\Gamma\widehat{\mathbf{u}}_{mpc}(k|k) \quad (\text{A.9})$$

Seguindo um procedimento similar para 2 e i passos a frente, é possível obter

$$\widehat{\mathbf{y}}(k+2|k) = C\bar{A}^2\mathbf{x}(k) + C\bar{A}\Gamma\widehat{\mathbf{u}}_{mpc}(k|k) + C\Gamma\widehat{\mathbf{u}}_{mpc}(k+1|k) \quad (\text{A.10})$$

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{y}}(k+i|k) = C\bar{A}^i\mathbf{x}(k) + C\bar{A}^{i-1}\Gamma\widehat{\mathbf{u}}_{mpc}(k|k) + C\bar{A}^{i-2}\Gamma\widehat{\mathbf{u}}_{mpc}(k+1|k) + \\ + \dots + C\Gamma\widehat{\mathbf{u}}_{mpc}(k+i-1|k) \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Escrevendo as predições para N passos na forma matricial, tem-se

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{y}}(k+1|k) \\ \hat{\mathbf{y}}(k+2|k) \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{y}}(k+N|k) \end{bmatrix}}_{qN \times 1} = \underbrace{\begin{bmatrix} C\bar{A} \\ C\bar{A}^2 \\ \vdots \\ C\bar{A}^N \end{bmatrix}}_{qN \times n} \mathbf{x}(k) + \underbrace{\begin{bmatrix} CT & 0_{q \times p} & \dots & 0_{q \times p} \\ C\bar{A}\Gamma & CT & \dots & 0_{q \times p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C\bar{A}^{N-1}\Gamma & C\bar{A}^{N-2}\Gamma & \dots & CT \end{bmatrix}}_{qN \times pN} \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}}_{mpc}(k|k) \\ \hat{\mathbf{u}}_{mpc}(k+1|k) \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{u}}_{mpc}(k+N-1|k) \end{bmatrix}}_{pN \times 1} \quad (\text{A.12a})$$

em que $0_{q \times p} \in \mathbb{R}^{q \times p}$ é um vetor de zeros.

Resumidamente,

$$\hat{\mathbf{Y}} = \mathbf{f}_y + \mathbf{H}\hat{\mathbf{U}}_{mpc} \quad (\text{A.12b})$$

- Formulação em termos do incremento de controle

Existem diferentes formas de se reformular as equações de predição em termos de $\Delta \mathbf{u}_{mpc}$. Uma possibilidade consiste em utilizar um vetor de estado artificial definido por

$$\xi(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \mathbf{u}_{mpc}(k-1) \end{bmatrix}_{(n+p) \times 1} \quad (\text{A.13})$$

Desta forma, a partir de (2.7), (A.2) e (A.13) pode-se definir um modelo artificial em termos do incremento de controle

$$\xi(k+1) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k+1) \\ \mathbf{u}_{mpc}(k) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \bar{A} & \Gamma \\ 0_{p \times n} & I_p \end{bmatrix}}_{\tilde{A}} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \mathbf{u}_{mpc}(k-1) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \Gamma \\ I_p \end{bmatrix}}_{\tilde{B}} \Delta \mathbf{u}_{mpc}(k) \quad (\text{A.14a})$$

em que $I_p \in \mathbb{R}^{p \times p}$ é a matriz identidade.

$$\mathbf{y}(k) = \underbrace{\begin{bmatrix} C & 0_{q \times p} \end{bmatrix}}_{\tilde{C}} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \mathbf{u}_{mpc}(k-1) \end{bmatrix} \quad (\text{A.14b})$$

Resumidamente,

$$\xi(k+1) = \tilde{A}\xi(k) + \tilde{B}\Delta \mathbf{u}_{mpc}(k) \quad (\text{A.15a})$$

$$\mathbf{y}(k) = \tilde{C}\xi(k) \quad (\text{A.15b})$$

Por fim, reformulando (A.12) a partir do modelo artificial (A.15), segue que

$$\hat{\mathbf{Y}} = \mathbf{f} + \mathbf{G}\Delta\hat{\mathbf{U}}_{mpc} \quad (\text{A.16})$$

em que

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \tilde{C}\tilde{B} & 0_{q \times p} & \dots & 0_{q \times p} \\ \tilde{C}\tilde{A}\tilde{B} & \tilde{C}\tilde{B} & \dots & 0_{q \times p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{C}\tilde{A}^{N-1}\tilde{B} & \tilde{C}\tilde{A}^{N-2}\tilde{B} & \dots & \tilde{C}\tilde{A}^{N-M}\tilde{B} \end{bmatrix}_{qN \times pM}, \quad \mathbf{f} = \phi\boldsymbol{\xi}(k), \quad \phi = \begin{bmatrix} \tilde{C}\tilde{A} \\ \tilde{C}\tilde{A}^2 \\ \vdots \\ \tilde{C}\tilde{A}^N \end{bmatrix}_{qN \times n}$$

Vale comentar que devido a (2.13), suprimem-se as últimas $(N - M)p$ colunas de \mathbf{G} .

A função de custo (2.6) pode ser escrita na seguinte forma matricial do seguinte modo:

$$J(k) = (\hat{\mathbf{Y}} - \mathbf{r})^T \mathbf{Q}_N (\hat{\mathbf{Y}} - \mathbf{r}) + \Delta\hat{\mathbf{U}}_{mpc}^T \mathbf{R}_M \Delta\hat{\mathbf{U}}_{mpc} \quad (\text{A.17})$$

em que

$$\mathbf{r} = [\mathbf{y}_{ref}]_N, \quad \mathbf{Q}_N = \text{diag}([Q]_N), \quad \mathbf{R}_M = \text{diag}([R]_M)$$

sendo que $[\bullet]_i$ representa o empilhamento vertical de i cópias do vetor \bullet .

Substituindo (A.16) em (A.17), pode-se escrever

$$J(k) = (\mathbf{f} + \mathbf{G}\Delta\hat{\mathbf{U}}_{mpc} - \mathbf{r})^T \mathbf{Q}_N (\mathbf{f} + \mathbf{G}\Delta\hat{\mathbf{U}}_{mpc} - \mathbf{r}) + \Delta\hat{\mathbf{U}}_{mpc}^T \mathbf{R}_M \Delta\hat{\mathbf{U}}_{mpc} \quad (\text{A.18})$$

Reescrevendo (A.18), tem-se

$$\begin{aligned} J(k) = & \Delta\hat{\mathbf{U}}_{mpc}^T (\mathbf{G}^T \mathbf{Q}_N \mathbf{G} + \mathbf{R}_M) \Delta\hat{\mathbf{U}}_{mpc} + 2(\mathbf{f} - \mathbf{r})^T \mathbf{Q}_N \mathbf{G} \Delta\hat{\mathbf{U}}_{mpc} + \\ & + (\mathbf{f} - \mathbf{r})^T \mathbf{Q}_N (\mathbf{f} - \mathbf{r}) \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

$$J(k) = \frac{1}{2} \Delta\hat{\mathbf{U}}_{mpc}^T \mathbf{H}_{qp} \Delta\hat{\mathbf{U}}_{mpc} + \mathbf{f}_{qp}^T \Delta\hat{\mathbf{U}}_{mpc} + cte \quad (\text{A.20})$$

com

$$\mathbf{H}_{qp} = 2(\mathbf{G}^T \mathbf{Q}_N \mathbf{G} + \mathbf{R}_M), \quad \mathbf{f}_{qp} = 2\mathbf{Q}_N \mathbf{G}^T (\mathbf{f} - \mathbf{r}), \quad cte = (\mathbf{f} - \mathbf{r})^T \mathbf{Q}_N (\mathbf{f} - \mathbf{r})$$

Portanto, tem-se o custo dependendo somente do vetor de variáveis de decisão $\Delta\hat{\mathbf{u}}_{mpc}$. Essa é a forma a ser passada para o pacote de otimização adotado.

A.2 ESCREVENDO AS RESTRIÇÕES EM TERMOS DAS VARIÁVEIS DE DECISÃO

As restrições sobre as ações de controle (2.11) podem ser escritas da seguinte maneira:

$$\mathbf{u}_{\min} \leq \widehat{\mathbf{u}}(k+i-1|k) \leq \mathbf{u}_{\max}, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

No formato matricial,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_{\min} \\ \mathbf{u}_{\min} \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{\min} \end{bmatrix}_{pN \times 1} \leq \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{u}}(k|k) \\ \widehat{\mathbf{u}}(k+1|k) \\ \vdots \\ \widehat{\mathbf{u}}(k+N-1|k) \end{bmatrix}_{pN \times 1} \leq \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{\max} \\ \mathbf{u}_{\max} \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{\max} \end{bmatrix}_{pN \times 1}$$

De forma resumida,

$$[\mathbf{u}_{\min}]_N \leq \widehat{\mathbf{U}} \leq [\mathbf{u}_{\max}]_N \quad (\text{A.21})$$

Reescrevendo (2.2) na notação de variáveis preditas, tem-se

$$\widehat{\mathbf{u}}(k+i-1|k) = \widehat{\mathbf{u}}_{lqr}(k+i-1|k) + \widehat{\mathbf{u}}_{mpc}(k+i-1|k), \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (\text{A.22})$$

Incluindo o instante atual, as N parcelas de controle podem ser escritas na seguinte forma matricial:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{u}}(k|k) \\ \widehat{\mathbf{u}}(k+1|k) \\ \vdots \\ \widehat{\mathbf{u}}(k+N-1|k) \end{bmatrix}_{pN \times 1}}_{\widehat{\mathbf{U}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{u}}_{lqr}(k|k) \\ \widehat{\mathbf{u}}_{lqr}(k+1|k) \\ \vdots \\ \widehat{\mathbf{u}}_{lqr}(k+N-1|k) \end{bmatrix}_{pN \times 1}}_{\widehat{\mathbf{U}}_{lqr}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{u}}_{mpc}(k|k) \\ \widehat{\mathbf{u}}_{mpc}(k+1|k) \\ \vdots \\ \widehat{\mathbf{u}}_{mpc}(k+N-1|k) \end{bmatrix}_{pN \times 1}}_{\widehat{\mathbf{U}}_{mpc}} \quad (\text{A.23a})$$

Logo,

$$\widehat{\mathbf{U}} = \widehat{\mathbf{U}}_{lqr} + \widehat{\mathbf{U}}_{mpc} \quad (\text{A.23b})$$

A predição do regulador quadrático é obtida de maneira similar. Reescrevendo (2.3) na notação de variáveis preditas, tem-se

$$\widehat{\mathbf{u}}_{lqr}(k+i-1|k) = -K\widehat{\mathbf{x}}(k+i-1|k), \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (\text{A.24})$$

No formato matricial para N predições a restrição é dada por

$$\begin{aligned}
\underbrace{\begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{u}}_{lqr}(k|k) \\ \widehat{\mathbf{u}}_{lqr}(k+1|k) \\ \vdots \\ \widehat{\mathbf{u}}_{lqr}(k+N-1|k) \end{bmatrix}_{pN \times 1}}_{\widehat{\mathbf{U}}_{lqr}} &= \underbrace{\begin{bmatrix} -K \\ 0_{p \times n} \\ \vdots \\ 0_{p \times n} \end{bmatrix}_{pN \times n}}_{\mathbf{P}_{lqr}} \mathbf{x}(k) + \\
&+ \underbrace{\begin{bmatrix} 0_{p \times n} & \dots & 0_{p \times n} & 0_{p \times n} \\ -K & \dots & 0_{p \times n} & 0_{p \times n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0_{p \times n} & \dots & -K & 0_{p \times n} \end{bmatrix}_{pN \times nN}}_{\mathbf{H}_{lqr}} \underbrace{\begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{x}}(k+1|k) \\ \widehat{\mathbf{x}}(k+2|k) \\ \vdots \\ \widehat{\mathbf{x}}(k+N|k) \end{bmatrix}_{nN \times 1}}_{\widehat{\mathbf{X}}} \quad (\text{A.25a})
\end{aligned}$$

Seguindo o desenvolvimento pode-se escrever

$$\widehat{\mathbf{U}}_{lqr} = \mathbf{P}_{lqr} \mathbf{x}(k) + \mathbf{H}_{lqr} \widehat{\mathbf{X}} \quad (\text{A.25b})$$

Então, de (A.7b) e (A.25b), segue que

$$\widehat{\mathbf{U}}_{lqr} = (\mathbf{P}_{lqr} + \mathbf{H}_{lqr} \mathbf{P}_x) \mathbf{x}(k) + \mathbf{H}_{lqr} \mathbf{H}_x \widehat{\mathbf{U}}_{mpc} \quad (\text{A.26})$$

Substituindo (A.26) em (A.23b), obtém-se

$$\widehat{\mathbf{U}} = \underbrace{(\mathbf{P}_{lqr} + \mathbf{H}_{lqr} \mathbf{P}_x)}_{\mathbf{P}_u} \mathbf{x}(k) + \underbrace{(\mathbf{H}_{lqr} \mathbf{H}_x + I_{pN})}_{\mathbf{H}_u} \widehat{\mathbf{U}}_{mpc} \quad (\text{A.27})$$

em que $I_{pN} \in \mathbb{R}^{pN \times pN}$ é a matriz identidade.

Resumidamente,

$$\widehat{\mathbf{U}} = \mathbf{P}_u \mathbf{x}(k) + \mathbf{H}_u \widehat{\mathbf{U}}_{mpc} \quad (\text{A.28})$$

A predição do controle preditivo é obtida reordenando (2.7) e a escrevendo em termos de variáveis preditas, conforme segue

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathbf{u}}_{mpc}(k+i-1|k) &= \mathbf{u}_{mpc}(k-1) + \Delta \widehat{\mathbf{u}}_{mpc}(k|k) + \Delta \widehat{\mathbf{u}}_{mpc}(k+1|k) + \\
&+ \cdots + \Delta \widehat{\mathbf{u}}_{mpc}(k+i-1|k), \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (\text{A.29})
\end{aligned}$$

Reescrevendo no formato matricial para N predições, obtém-se

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{u}}_{mpc}(k|k) \\ \widehat{\mathbf{u}}_{mpc}(k+1|k) \\ \vdots \\ \widehat{\mathbf{u}}_{mpc}(k+N-1|k) \end{bmatrix}_{pN \times 1}}_{\widehat{\mathbf{U}}_{mpc}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{u}_{mpc}(k-1) \\ \mathbf{u}_{mpc}(k-1) \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{mpc}(k-1) \end{bmatrix}_{pN \times 1}} + \\ + \underbrace{\begin{bmatrix} I_p & 0_p & \dots & 0_p \\ I_p & I_p & \dots & 0_p \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ I_p & I_p & \dots & I_p \end{bmatrix}_{pN \times pM}}_{T_{N \times M}^{I_p}} \underbrace{\begin{bmatrix} \Delta \widehat{\mathbf{u}}_{mpc}(k|k) \\ \Delta \widehat{\mathbf{u}}_{mpc}(k+1|k) \\ \vdots \\ \Delta \widehat{\mathbf{u}}_{mpc}(k+M-1|k) \end{bmatrix}_{pM \times 1}}_{\Delta \widehat{\mathbf{U}}_{mpc}} \quad (\text{A.30a})$$

Ou seja,

$$\widehat{\mathbf{U}}_{mpc} = [\mathbf{u}_{mpc}(k-1)]_N + T_{N \times M}^{I_p} \Delta \widehat{\mathbf{U}}_{mpc} \quad (\text{A.30b})$$

Cabe relembrar que, devido a (2.13), suprimem-se as últimas $(N-M)p$ colunas de $T_{N \times M}^{I_p}$.

A predição do controle em termos do incremento de controle preditivo é obtida substituindo (A.30b) em (A.28) como mostrado a seguir.

$$\widehat{\mathbf{U}} = \mathbf{P}_u \mathbf{x}(k) + \mathbf{H}_u [\mathbf{u}_{mpc}(k-1)]_N + \underbrace{\mathbf{H}_u T_{N \times M}^{I_p} \Delta \widehat{\mathbf{U}}_{mpc}}_{\mathbf{H}_T} \quad (\text{A.31})$$

$$\widehat{\mathbf{U}} = \mathbf{P}_u \mathbf{x}(k) + \mathbf{H}_u [\mathbf{u}_{mpc}(k-1)]_N + \mathbf{H}_T \Delta \widehat{\mathbf{U}}_{mpc} \quad (\text{A.32})$$

Portanto substituindo (A.32) em (A.21),

$$[u_{min}]_N \leq \underbrace{\mathbf{P}_u \mathbf{x}(k)}_{f_u} + \mathbf{H}_u [\mathbf{u}_{mpc}(k-1)]_N + \mathbf{H}_T \Delta \widehat{\mathbf{U}}_{mpc} \leq [u_{max}]_N$$

Reescrevendo,

$$\begin{cases} \mathbf{H}_T \Delta \widehat{\mathbf{U}}_{mpc} \leq [u_{max}]_N - \mathbf{H}_u [\mathbf{u}_{mpc}(k-1)]_N - f_u \\ -\mathbf{H}_T \Delta \widehat{\mathbf{U}}_{mpc} \leq f_u + \mathbf{H}_u [\mathbf{u}_{mpc}(k-1)]_N - [u_{min}]_N \end{cases}$$

Na forma matricial,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_T \\ -\mathbf{H}_T \end{bmatrix}_{2pN \times pM} \Delta \widehat{\mathbf{U}}_{mpc} \leq \begin{bmatrix} [u_{max}]_N - \mathbf{H}_u [\mathbf{u}_{mpc}(k-1)]_N - f_u \\ f_u + \mathbf{H}_u [\mathbf{u}_{mpc}(k-1)]_N - [u_{min}]_N \end{bmatrix}_{2pN \times 1} \quad (\text{A.33})$$

As restrições sobre os incrementos de controle totais (2.12) podem ser escritas da seguinte maneira:

$$\Delta u_{min} \leq \Delta \hat{\mathbf{u}}(k+i-1|k) \leq \Delta u_{max}, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

No formato matricial,

$$\begin{bmatrix} \Delta u_{min} \\ \Delta u_{min} \\ \vdots \\ \Delta u_{min} \end{bmatrix}_{pN \times 1} \leq \begin{bmatrix} \Delta \hat{\mathbf{u}}(k|k) \\ \Delta \hat{\mathbf{u}}(k+1|k) \\ \vdots \\ \Delta \hat{\mathbf{u}}(k+N-1|k) \end{bmatrix}_{pN \times 1} \leq \begin{bmatrix} \Delta u_{max} \\ \Delta u_{max} \\ \vdots \\ \Delta u_{max} \end{bmatrix}_{pN \times 1}$$

De forma resumida,

$$[\Delta u_{min}]_N \leq \Delta \hat{\mathbf{U}} \leq [\Delta u_{max}]_N \quad (\text{A.34})$$

A predição dos incrementos de controle totais em termos de variáveis preditas é definida por

$$\Delta \hat{\mathbf{u}}(k|k) = \hat{\mathbf{u}}(k|k) - \mathbf{u}(k-1), \quad i = 1 \quad (\text{A.35})$$

$$\Delta \hat{\mathbf{u}}(k+i-1|k) = \hat{\mathbf{u}}(k+i-1|k) - \hat{\mathbf{u}}(k+i-2|k), \quad i = 2, 3, \dots, N \quad (\text{A.36})$$

Reescrevendo as N parcelas dos incrementos de controle totais, incluindo o instante atual, na forma matricial:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \Delta \hat{\mathbf{u}}(k|k) \\ \Delta \hat{\mathbf{u}}(k+1|k) \\ \vdots \\ \Delta \hat{\mathbf{u}}(k+N-1|k) \end{bmatrix}}_{\Delta \hat{\mathbf{U}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} I_p & 0_p & \dots & 0_p & 0_p \\ -I_p & I_p & \dots & 0_p & 0_p \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0_p & 0_p & \dots & -I_p & I_p \end{bmatrix}}_{\mathbf{H}_I} \times \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}}(k|k) \\ \hat{\mathbf{u}}(k+1|k) \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{u}}(k+N-1|k) \end{bmatrix}}_{\hat{\mathbf{U}}} - \underbrace{\begin{bmatrix} I_p \\ 0_p \\ \vdots \\ 0_p \end{bmatrix}}_{\mathbf{P}_I} \mathbf{u}(k-1) \quad (\text{A.37a})$$

$$\Delta \hat{\mathbf{U}} = \mathbf{H}_I \hat{\mathbf{U}} - \mathbf{P}_I \mathbf{u}(k-1) \quad (\text{A.37b})$$

Substituindo (A.32) em (A.37b), obtém-se

$$\Delta \hat{\mathbf{U}} = \underbrace{\mathbf{H}_I \mathbf{P}_u}_{\mathbf{P}_{\Delta u}} \mathbf{x}(k) + \underbrace{\mathbf{H}_I \mathbf{H}_u}_{\mathbf{H}_{\Delta u}} [\mathbf{u}_{mpc}(k-1)]_N + \underbrace{\mathbf{H}_I \mathbf{H}_T}_{\mathbf{H}_{IT}} \Delta \hat{\mathbf{U}}_{mpc} - \mathbf{P}_I \mathbf{u}(k-1) \quad (\text{A.38})$$

Resumidamente,

$$\Delta \widehat{\mathbf{U}} = \underbrace{\mathbf{P}_{\Delta \mathbf{u}} \mathbf{x}(k)}_{f_{\Delta u}} - \underbrace{\mathbf{P}_{\mathbf{I}} \mathbf{u}(k-1)}_{f_I} + \mathbf{H}_{\Delta \mathbf{u}} [\mathbf{u}_{mpc}(k-1)]_N + \mathbf{H}_{\mathbf{IT}} \Delta \widehat{\mathbf{U}}_{mpc} \quad (\text{A.39})$$

Por fim, substituindo (A.39) em (A.34)

$$[\Delta u_{min}]_N \leq f_{\Delta u} - f_I + \mathbf{H}_{\Delta \mathbf{u}} [\mathbf{u}_{mpc}(k-1)]_N + \mathbf{H}_{\mathbf{IT}} \Delta \widehat{\mathbf{U}}_{mpc} \leq [\Delta u_{max}]_N \quad (\text{A.40})$$

A relação (A.40) pode ser escrita em termos de duas desigualdades da seguinte forma:

$$\begin{cases} \mathbf{H}_{\mathbf{IT}} \Delta \widehat{\mathbf{U}}_{mpc} \leq [\Delta u_{max}]_N - f_{\Delta u} + f_I - \mathbf{H}_{\Delta \mathbf{u}} [\mathbf{u}_{mpc}(k-1)]_N \\ -\mathbf{H}_{\mathbf{IT}} \Delta \widehat{\mathbf{U}}_{mpc} \leq f_{\Delta u} - f_I + \mathbf{H}_{\Delta \mathbf{u}} [\mathbf{u}_{mpc}(k-1)]_N - [\Delta u_{min}]_N \end{cases}$$

Na forma matricial,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_{\mathbf{IT}} \\ -\mathbf{H}_{\mathbf{IT}} \end{bmatrix}_{2pN \times pM} \Delta \widehat{\mathbf{U}}_{mpc} \leq \begin{bmatrix} [\Delta u_{max}]_N - f_{\Delta u} + f_I - \mathbf{H}_{\Delta \mathbf{u}} [\mathbf{u}_{mpc}(k-1)]_N \\ f_{\Delta u} - f_I + \mathbf{H}_{\Delta \mathbf{u}} [\mathbf{u}_{mpc}(k-1)]_N - [\Delta u_{min}]_N \end{bmatrix}_{2pN \times 1} \quad (\text{A.41})$$

Representando (A.33) e (A.41) em uma única matriz, tem-se

$$\mathbf{A}_{qp} \Delta \widehat{\mathbf{U}}_{mpc} \leq \mathbf{b}_{qp} \quad (\text{A.42})$$

em que

$$\mathbf{A}_{qp} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{\mathbf{IT}} \\ -\mathbf{H}_{\mathbf{IT}} \\ \mathbf{H}_{\mathbf{T}} \\ -\mathbf{H}_{\mathbf{T}} \end{bmatrix}_{4pN \times pM}, \quad \mathbf{b}_{qp} = \begin{bmatrix} [\Delta u_{max}]_N - f_{\Delta u} + f_I - \mathbf{H}_{\Delta \mathbf{u}} [\mathbf{u}_{mpc}(k-1)]_N \\ f_{\Delta u} - f_I + \mathbf{H}_{\Delta \mathbf{u}} [\mathbf{u}_{mpc}(k-1)]_N - [\Delta u_{min}]_N \\ [\Delta u_{max}]_N - \mathbf{H}_{\mathbf{u}} [\mathbf{u}_{mpc}(k-1)]_N - f_u \\ f_u + \mathbf{H}_{\mathbf{u}} [\mathbf{u}_{mpc}(k-1)]_N - [\Delta u_{min}]_N \end{bmatrix}_{4pN \times 1}$$

Então encontrou-se uma forma de representar as restrições dependendo somente do vetor de variáveis de decisão $\Delta \widehat{\mathbf{U}}_{mpc}$.

Como resultado de (A.20) e (A.42), tem-se o seguinte problema de programação quadrática a ser resolvido em cada instante de amostragem:

$$\min_{\Delta \widehat{\mathbf{U}}_{mpc}} J(k) = \frac{1}{2} \Delta \widehat{\mathbf{U}}_{mpc}^T \mathbf{H}_{qp} \Delta \widehat{\mathbf{U}}_{mpc} + \mathbf{f}_{qp}^T \Delta \widehat{\mathbf{U}}_{mpc} + cte$$

sujeito a

$$\mathbf{A}_{qp} \Delta \widehat{\mathbf{U}}_{mpc} \leq \mathbf{b}_{qp}$$

em que *cte* representa os termos que independem de $\Delta \widehat{\mathbf{U}}_{mpc}$ e, portanto, não afetam a solução do problema de otimização.