1 Modelagem

1.1 Modelo não linear

Considere o quadricóptero com mecanismo de vetorização do empuxo ilustrado na Figura 1.

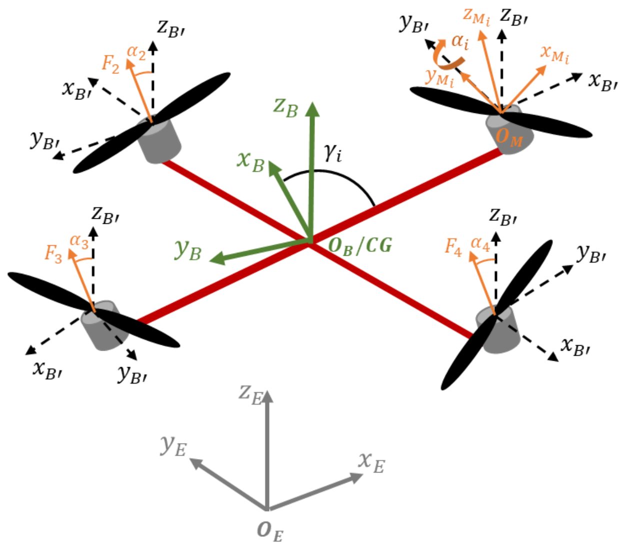

Figure 1: Quadricóptero com mecanismo de vetorização de empuxo.

- **Movimento linear**

Aplicando a segunda lei de Newton, é possível escrever

$$F_B(t) = \begin{bmatrix} \sum F_x(t) \\ \sum F_y(t) \\ \sum F_z(t) \end{bmatrix} = m \begin{bmatrix} \dot{u}(t) - r(t)v(t) + q(t)w(t) \\ \dot{v}(t) - p(t)w(t) + r(t)u(t) \\ \dot{w}(t) - q(t)u(t) + p(t)v(t) \end{bmatrix} \tag{1}$$

em que $(u \ v \ w)$ e $(p \ q \ r)$ representam as velocidades lineares e angulares ao longo (em torno) dos eixos x, y e z, respectivamente. O subíndice B indica que essas forças estão presentadas no sistema de coordenada do corpo (BCS – *Body fixed Coordinate System*).

Considerar-se-á que F_B é resultante da ação das forças de empuxo F_T, arrasto F_D e gravitacional F_G. Logo,

$$m \begin{bmatrix} \dot{u}(t) - r(t)v(t) + q(t)w(t) \\ \dot{v}(t) - p(t)w(t) + r(t)u(t) \\ \dot{w}(t) - q(t)u(t) + p(t)v(t) \end{bmatrix} = F_{T_B}(t) + F_{D_B}(t) + F_{G_B}(t) \tag{2}$$

Para determinar F_{T_B}, F_{D_B} e F_{G_B}, assume-se que

- Os rotores são posicionados com ângulos de $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 = \pi/2$, $\gamma_3 = \pi$ e $\gamma_4 = 3\pi/2$ em relação à x_B;

- Os sentidos de rotação dos motores 1 e 3 é positivo (ccw). Já os motores 2 e 4 giram no sentido negativo (cw);

- Os rotores podem ser inclinados longitudinalmente com ângulos α_1, α_2, α_3 e α_4;

- As variações em tais ângulos e das velocidades de rotação das hélices são tipicamente baixas, isto é, $\dot{\alpha}_i(t) = 0$, $i = 1,\ 2, 3$ e 4, e $\dot{\Omega}_i(t) = 0$, $i = 1,\ 2, 3$ e 4

- A distância vertical do rotor até o CG é nula $\big(z_{CG_i} = 0,\ i = 1,\ 2,\ 3 \text{ e } 4\big)$;

- A força de arrasto é linearmente proporcional à velocidade do veículo.

Então, com o devido procedimento matemático, pode-se obter

$$F_{T_B}(t) = \begin{bmatrix} k_p\big(\sin(\alpha_1(t))\Omega_1^2(t) - \sin(\alpha_3(t))\Omega_3^2(t)\big) \\ \\ k_p\big(\sin(\alpha_2(t))\Omega_2^2(t) - \sin(\alpha_4(t))\Omega_4^2(t)\big) \\ \\ k_p \sum_{i=1}^{4} \cos(\alpha_i(t))\Omega_i^2(t) \end{bmatrix} \tag{3}$$

$$F_{D_B}(t) = \begin{bmatrix} -k_{d_x} u(t) \\ -k_{d_y} v(t) \\ -k_{d_z} w(t) \end{bmatrix} \tag{4}$$

em que k_{d_x}, k_{d_y} e k_{d_z} são coeficientes de arrasto,

$$F_{G_B}(t) = mg \begin{bmatrix} \sin(\theta(t)) \\ -\sin(\phi(t))\cos(\theta(t)) \\ -\cos(\phi(t))\cos(\theta(t)) \end{bmatrix} \tag{5}$$

em que ϕ, θ e ψ representam os ângulos de rolagem, arfagem e guinada, respectivamente, m é a massa do quadricóptero e g a aceleração gravitacional.

A dinâmica de movimento linear do quadricóptero é descrita por meio de (2)–(5).

• Movimento angular

Aplicando a segunda lei de Newton para o movimento angular, tem-se que

$$\begin{bmatrix} J_{xx}\dot{p}(t) + q(t)r(t)\big(J_{zz} - J_{yy}\big) \\ J_{yy}\dot{q}(t) + p(t)r(t)\big(J_{xx} - J_{zz}\big) \\ J_{zz}\dot{r}(t) + p(t)q(t)\big(J_{yy} - J_{xx}\big) \end{bmatrix} = M_B = M_{T_B}(t) + M_{G_B}(t) + M_{F_B}(t) \tag{6}$$

sendo M_{T_B}, M_{G_B} e M_{F_B} os momentos gerados pela força de empuxo, pelo efeito giroscópico e pelo arrasto da hélice, respectivamente, e J_{xx}, J_{yy} e J_{zz} componentes da matriz de inércia do veículo no BCS.

Pode-se demonstrar que tais momentos são dados por

$$M_{T_B}(t) = \begin{bmatrix} lk_p\big(\cos(\alpha_2(t))\Omega_2^2(t) - \cos(\alpha_4(t))\Omega_4^2(t)\big) \\ lk_p\big(-\cos(\alpha_1(t))\Omega_1^2(t) + \cos(\alpha_3(t))\Omega_3^2(t)\big) \\ 0 \end{bmatrix} \tag{7}$$

em que l é o comprimento do braço do veículo e k_p é o coeficiente de empuxo do conjunto propulsivo formado por motor, controlador de velocidade e hélice, e

$$M_{G_B}(t) = \begin{bmatrix} \tau_x(t) \\ \tau_y(t) \\ \tau_z(t) \end{bmatrix} \tag{8}$$

sendo

$$\tau_x(t) = \sum_{i=1}^{4} \{q(t)\cos(\alpha_i(t)) - r(t)\sin(\gamma_i(t))\sin(\alpha_i(t))\} J_{M_i}\Omega_i(t) \tag{9}$$

$$\tau_y(t) = \sum_{i=1}^{4} \{-p(t)\cos(\alpha_i(t)) + r(t)\cos(\gamma_i(t))\sin(\alpha_i(t))\} J_{M_i}\Omega_i(t) \tag{10}$$

$$\tau_z(t) = \sum_{i=1}^{4} \{p(t)\sin(\gamma_i(t))\sin(\alpha_i(t)) - q(t)\cos(\gamma_i(t))\sin(\alpha_i(t))\} J_{M_i}\Omega_i(t) \tag{11}$$

no qual $J_{M_i},\ i = 1,\ 2,\ 3$ e 4 é o momento de inércia da hélice com respeito ao eixo de rotação, e

$$M_{F_B}(t) = \begin{bmatrix} b\left(-\Omega_1^2(t)\sin(\alpha_1(t)) + \Omega_3^2(t)\sin(\alpha_3(t))\right) \\ \\ b\left(\Omega_2^2(t)\sin(\alpha_2(t)) - \Omega_4^2(t)\sin(\alpha_4(t))\right) \\ \\ b\sum_{i=1}^{4} -\mathrm{sign}(\Omega_i(t))\cos(\alpha_i(t))\Omega_i^2(t) \end{bmatrix} \tag{12}$$

em que b é um coeficiente de arrasto da hélice.

As relações (7), (8) e (12) descrevem a aceleração angular do veículo no BCS. É possível demonstrar que a seguinte relação cinemática é válida:

$$\begin{bmatrix} p(t) \\ q(t) \\ r(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin(\theta(t)) \\ 0 & \cos(\phi(t)) & \sin(\phi(t))\cos(\theta(t)) \\ 0 & -\sin(\phi(t)) & \cos(\theta(t))\cos(\phi(t)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi}(t) \\ \dot{\theta}(t) \\ \dot{\psi}(t) \end{bmatrix} \tag{13}$$

Multiplicando pela esquerda pela matriz inversa, obtém-se

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi}(t) \\ \dot{\theta}(t) \\ \dot{\psi}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \sin(\phi(t))\tan(\theta(t)) & \cos(\phi(t))\tan(\theta(t)) \\ 0 & \cos(\phi(t)) & -\sin(\phi(t)) \\ 0 & \sin(\phi(t))\sec(\theta(t)) & \cos(\phi(t))\sec(\theta(t)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p(t) \\ q(t) \\ r(t) \end{bmatrix} \tag{14}$$

Já o movimento de translação em relação a um referencial inercial é descrito por

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_E(t) \\ \dot{y}_E(t) \\ \dot{z}_E(t) \end{bmatrix} = R_B^I \begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{bmatrix} \tag{15}$$

sendo

$$R_B^I = \begin{bmatrix} \cos(\psi(t)) & -\sin(\psi(t)) & 0 \\ \sin(\psi(t)) & \cos(\psi(t)) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta(t)) & 0 & \sin(\theta(t)) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta(t)) & 0 & \cos(\theta(t)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi(t)) & -\sin(\phi(t)) \\ 0 & \sin(\phi(t)) & \cos(\phi(t)) \end{bmatrix} \tag{16}$$

2 Estrutura de controle

Um LQR será empregado para rastrear referências de atitude e rolagem. Com esse propósito, adotam-se as velocidades de rotação dos rotores como variáveis de entrada do LQR. Posteriormente, o rastreamento de trajetória será realizado por meio de um MPC cujas entradas serão os ângulos de tilt e uma rotação aplicada simultaneamente a todos os motores. O diagrama de blocos 2 ilustra a estrutura de controle.

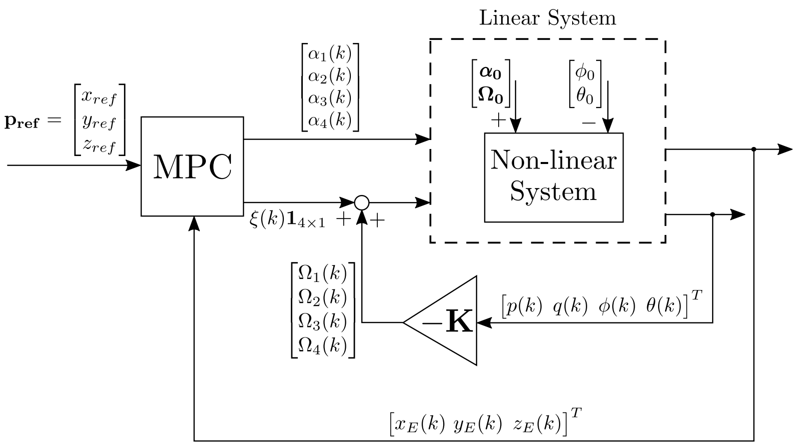

Figure 2: Diagrama de blocos mostrando a estrutura de controle.

2.1 Determinação das entradas de equilíbrio

As estratégias de controle adotadas neste trabalho são baseadas em modelos lineares na forma do espaço de estados. Então, faz-se necessário linearizar as equações determinadas na Seção 1 em torno de uma condição de equilíbrio. Em particular, essa condição será definida a partir de ângulos de rolagem e arfagem, denotados por ϕ_0 e θ_0, respectivamente. Para obtenção de um estado de regime estacionário associado a um de voo pairado com atitude ϕ_0 e θ_0, ajustam-se os ângulos dos rotores e as velocidades de rotação de equilíbrio, dados por α_{0_i} e Ω_{0_i}, $i = 1,\ 2,\ 3$ e 4, de modo que a somatória das forças e momentos em torno dos eixos x, y e z sejam nulas. Isto é, impondo-se (2), (6) iguais a zero, considerando velocidades lineares e angulares nulas.

Uma vez que o problema a ser resolvido tem 8 variáveis de decisão e 6 equações, propõe-se determinar α_{0_i} e Ω_{0_i}, $i = 1,\ 2,\ 3$ e 4 resolvendo-se o seguinte problema de otimização:

$$\min_{\alpha_{0_i},\ \Omega_{0_i},\ i=1,\ 2,\ 3,\ 4} \quad J = \sum_{i=1}^{4} \Omega_{0_i} + \rho_2 \alpha_{0_i} \tag{17}$$

sujeito a

$$F_{T_B}(t) + F_{D_B}(t) + F_{G_B}(t) = 0 \tag{18}$$

$$M_{T_B}(t) + M_{G_B}(t) + M_{F_B}(t) = 0 \tag{19}$$

$$\Omega_{0_{min}} \leq \Omega_{0_i} \leq \Omega_{0_{max}}, \quad i = 1,\ 2, 3 \text{ e } 4 \tag{20}$$

$$\alpha_{0_{min}} \leq \alpha_{0_i} \leq \alpha_{0_{max}}, \quad i = 1,\ 2, 3 \text{ e } 4 \tag{21}$$

em que ρ_1 é um peso ajustado pelo projetista.

2.2 LQR

Para o projeto do LQR adota-se o seguinte vetor de estados:

$$x_{lqr} = \begin{bmatrix} p & q & \phi & \theta \end{bmatrix}^T \tag{22}$$

e, como já mencionado, vetor de controle é

$$u_{lqr} = \begin{bmatrix} \Omega_1 & \Omega_2 & \Omega_3 & \Omega_4 \end{bmatrix}^T \tag{23}$$

Linearizando as equações (2) e (6) em torno do estado de equilíbrio $x^0_{lqr} = [0\ 0\ \phi_0\ \theta_0]^T$, é possível escrever a dinâmica em torno de x^0_{lqr} por

$$\dot{x}_{lqr}(t) = A^c_{lqr} x(t) + B^c_{lqr} u_{lqr}(t) \tag{24}$$

$$A^c_{lqr} = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \sin(\phi_0)\tan(\theta_0) & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi_0) & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{25}$$

sendo

$$a_{12} = \frac{J_{m_1}\omega_{1_0}\cos(\alpha_{1_0}) + J_{m_2}\omega_{2_0}\cos(\alpha_{2_0}) + J_{m_3}\omega_{3_0}\cos(\alpha_{3_0}) + J_{m_4}\omega_{4_0}\cos(\alpha_{4_0})}{J_{xx}} \tag{26}$$

$$a_{21} = \frac{-J_{m_1}\omega_{1_0}\cos(\alpha_{1_0}) - J_{m_2}\omega_{2_0}\cos(\alpha_{2_0}) - J_{m_3}\omega_{3_0}\cos(\alpha_{3_0}) - J_{m_4}\omega_{4_0}\cos(\alpha_{4_0})}{J_{yy}} \tag{27}$$

e

$$B^c_{lqr} = \begin{bmatrix} -\frac{2\omega_{1_0} b \sin(\alpha_{1_0})}{J_{xx}} & \frac{2\omega_{2_0} k_p l \cos(\alpha_{2_0})}{J_{xx}} & \frac{2\omega_{3_0} b \sin(\alpha_{3_0})}{J_{xx}} & -\frac{2\omega_{4_0} k_p l \cos(\alpha_{4_0})}{J_{xx}} \\ -\frac{2\omega_{1_0} k_p l \cos(\alpha_{1_0})}{J_{yy}} & \frac{2\omega_{2_0} b \sin(\alpha_{2_0})}{J_{yy}} & \frac{2\omega_{3_0} k_p l \cos(\alpha_{3_0})}{J_{yy}} & -\frac{2\omega_{4_0} b \sin(\alpha_{4_0})}{J_{yy}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{28}$$

Discretizando (24) utilizando o método segurador de ordem zero (ZOH), tem-se que

$$x_{lqr}(k+1) = A_{lqr} x_{lqr}(k) + B_{lqr} u_{lqr}(k) \tag{29}$$

em que $A_{lqr} = e^{A^c_{lqr} T_s}$ e $B_{lqr} = \left(\int_0^{T_s} e^{A^c_{lqr}\tau d\tau}\right) B^c_{lqr}$, sendo T_s é o período de amostragem.

Empregar-se-á o modelo (29) para projetar o LQR. Devido à não linearidade da planta, o procedimento de linearização, discretização e projeto será realizado para N_0 pontos de equilíbrio denotados por $x^0_{lqr,j}$, $j = 1,\ 2, \ldots,\ N_0$. Para escolher qual controlador adotar, calculam-se os seguintes índices:

$$S_j = ||x_{lqr}(k) - x^0_{lqr,j}||_2 + \rho_2 ||x^{ref}_{lqr} - x^0_{lqr,j}||_2,\ j = 1,\ 2,\ \ldots, N_0 \tag{30}$$

sendo x^{ref}_{lqr} uma atitude de referência e ρ_2 um parâmetro de ajuste.

Em cada instante de amostragem, adota-se o controlador j LQR com menor índice S_j juntamente com as respectivas entradas de equilíbrio, que são calculadas conforme descrito na Seção 2.1.

3 Resultados de simulação

O funcionamento do chaveamento de ganhos descrito na Seção 2.2 foi avaliado por meio de simulações. Tais simulações foram realizadas no Matlab considerando modelo não linear apresentado na Seção 1.

Projetaram-se nove controladores em pontos de equilíbrio apontados na Tabela 2.

Table 1: Ângulos de linearização.

LQR	θ_0 (°)	ϕ_0 (°)
1	-45	-45
2	-45	0
3	-45	45
4	0	-45
5	0	0
6	0	45
7	45	-45
8	45	0
9	45	45

A otimização para determinar as entradas de equilíbrio foi realizada com $\rho_1 = 10^6$, $\Omega_{0_{max}} = -\Omega_{0_{min}} = 500$ rad/s e , $\alpha_{0_{max}} = -\alpha_{0_{min}} = 80°$. A Tabela 2 apresenta as entradas de equilíbrio obtidas.

Table 2: Entradas de equilíbrio ótimas.

LQR	Ω_0 (rad/s)	α_0 (°)
1	$[274{,}8\ \ -188{,}9\ \ 214{,}3\ \ -244{,}2]^T$	$[80\ \ -35\ \ -54{,}8\ 80]^T$
2	$[167{,}7\ \ -193{,}5\ \ 335{,}9\ \ -136{,}2]^T$	$[5{,}4\ 0\ \ -75{,}6\ 0]^T$
3	$[338{,}4\ \ -289{,}5\ \ 114{,}6 -101{,}8]^T$	$[76{,}6\ 69{,}6\ \ -2{,}4\ \ -3{,}3]^T$
4	$[136{,}2\ \ -167{,}7\ \ 193{,}5\ \ -335{,}9]^T$	$[0\ \ -5{,}4\ 0\ 75{,}6]^T$
5	$[198{,}9\ \ -198{,}9\ \ 198{,}9\ \ -198{,}9]^T$	$[0\ 0\ 0\ 0]^T$
6	$[193{,}5\ \ -335{,}9\ \ 136{,}2 -167{,}7]^T$	$[0\ 75{,}6\ 0\ \ -5{,}4]^T$
7	$[114{,}6\ \ -101{,}7\ \ 338{,}4\ \ -289{,}5]^T$	$[-2{,}4\ \ -3{,}3\ 76{,}6\ 69{,}6]^T$
8	$[167{,}7\ \ -136{,}2\ \ 335{,}9\ \ -193{,}5]^T$	$[-5{,}4\ 0\ 75{,}6\ 0]^T$
9	$[214{,}3\ \ -101{,}8\ \ 274{,}8\ \ -289{,}5]^T$	$[-54{,}8\ 3{,}3\ 80\ \ -69{,}6]^T$

Para o projeto dos LQRs, adotaram-se $T_s = 10$ ms, e pesos de estado e controle dados respectivamente por $Q_{lqr} = 10^5 I_4$ e $R_{lqr} = I_4$, $\rho_2 = 0{,}5$.

As Figuras 3–5 mostram os resultados de simulação para uma condição inicial nula e a atitude de referência $x_{lqr}^{ref} = [0\ 0\ -30\ 30]^T$. A evolução temporal dos ângulos ϕ e θ, das velocidades p e q, e das entradas $\Omega_i,\ i = 1,\ 2,\ 3$, e 4 são mostradas nas Figuras 3 e 4 respectivamente. A Figura 5 mostra o índice do controlador adotado ao longo da simulação.

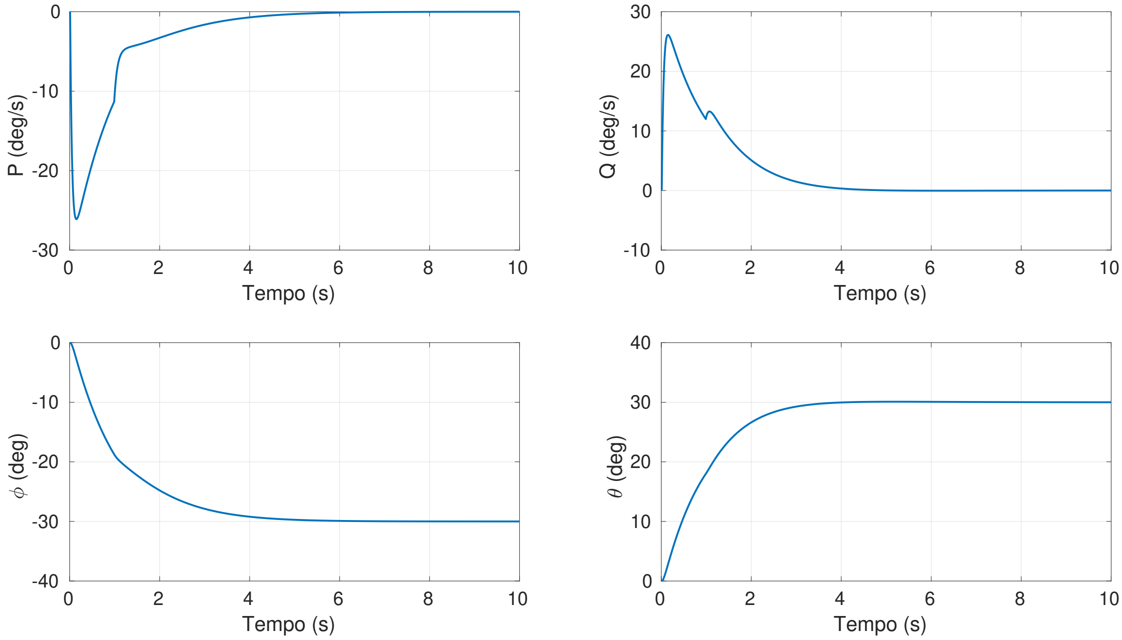

Figure 3: Evolução temporal dos ângulos ϕ e θ e das velocidades p e q para a referência $x_{lqr}^{ref} = [0\ 0\ -30\ 30]^T$ e condição inicial nula.

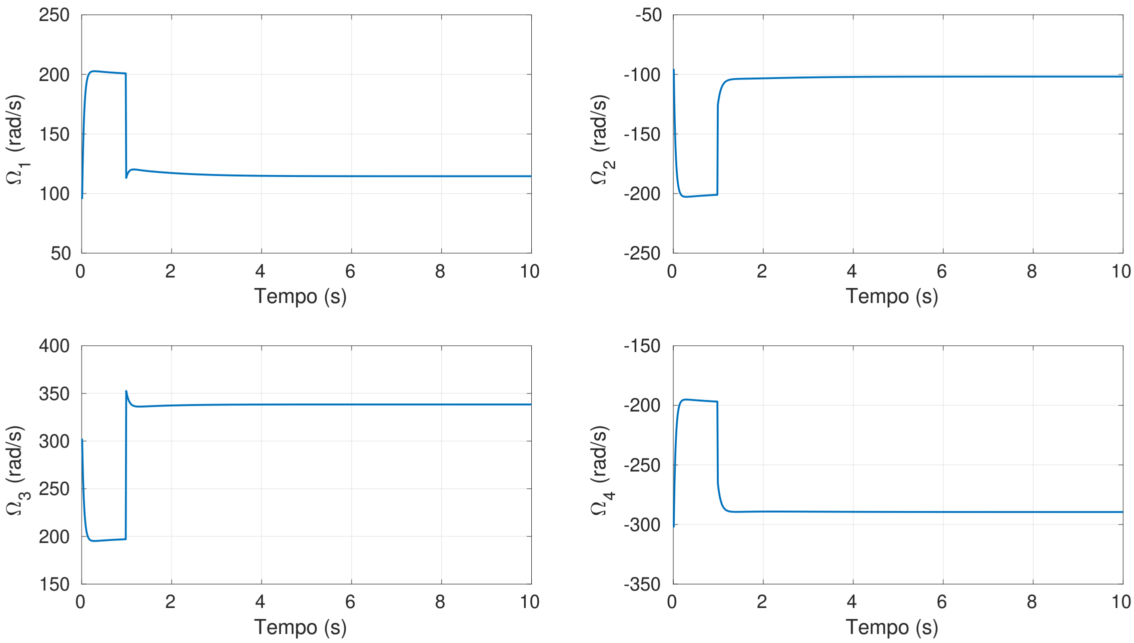

Figure 4: Evolução temporal das velocidades dos rotores $\Omega_i,\ i = 1,\ 2,\ 3$ e 4 para a referência $x_{lqr}^{ref} = [0\ 0\ -30\ 30]^T$ e condição inicial nula.

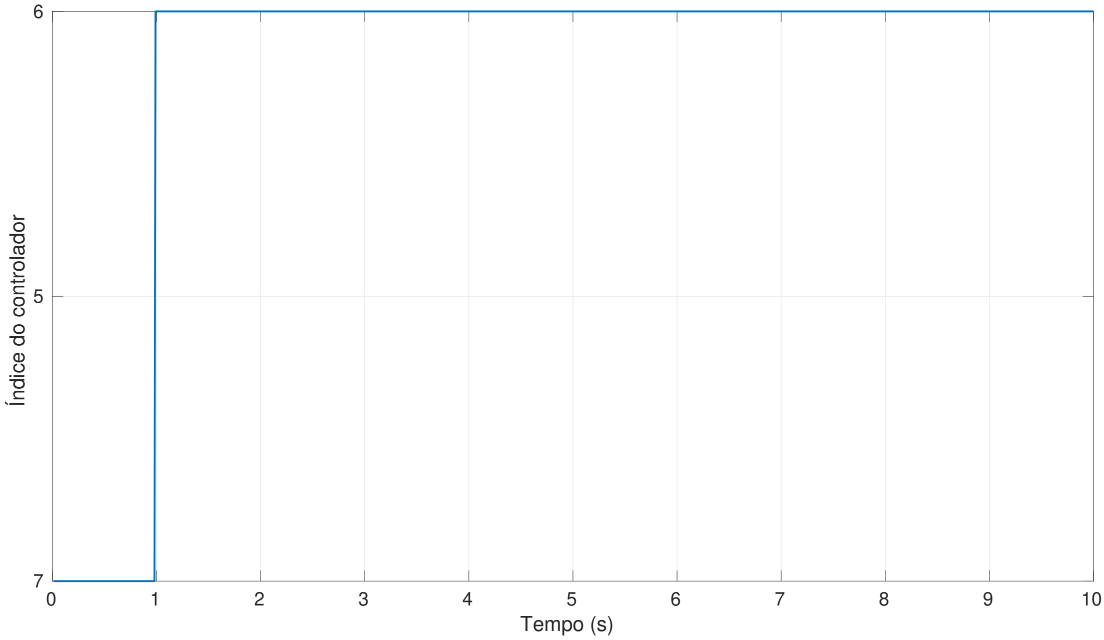

Figure 5: Evolução temporal do índice do controlador para a referência $x_{lqr}^{ref} = [0\ 0\ -30\ 30]^T$ e condição inicial nula.

Também foram realizadas simulações para a condição inicial $x_{lqr}(0) = [0\ 0\ -30\ -60]^T$ e a referência $x_{lqr}^{ref} = [0\ 0\ 60\ 30]^T$. Os resultados encontram-se nas Figuras 6–8.

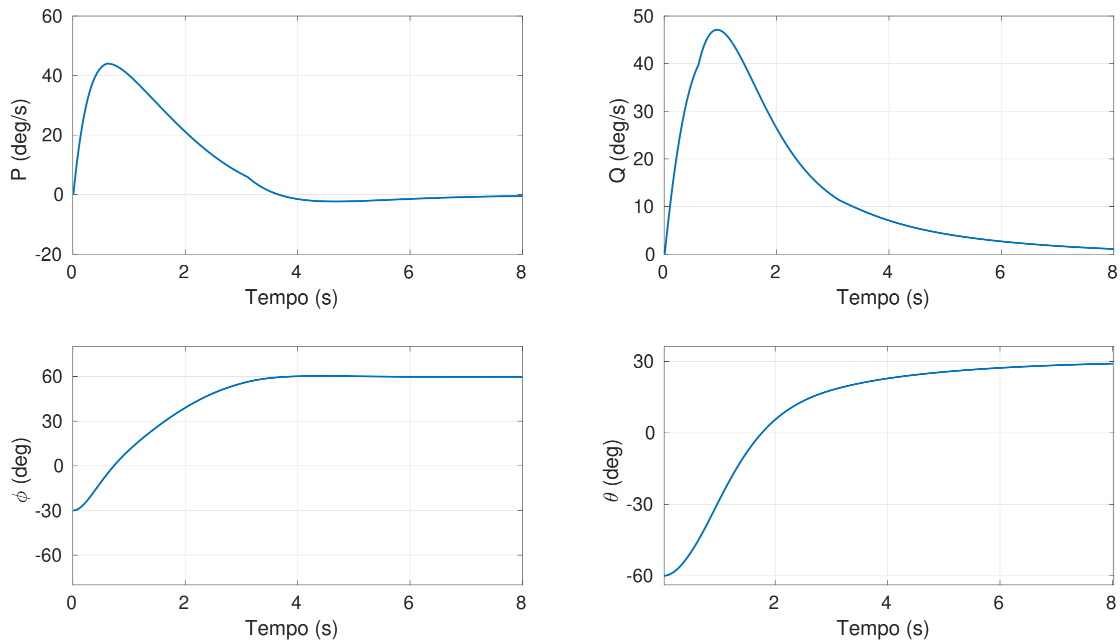

Figure 6: Evolução temporal dos ângulos ϕ e θ e das velocidades p e q para a referência $x_{lqr}^{ref} = [0\ 0\ 60\ 30]^T$ e condição inicial $x_{lqr}(0) = [0\ 0\ -30\ -60]^T$.

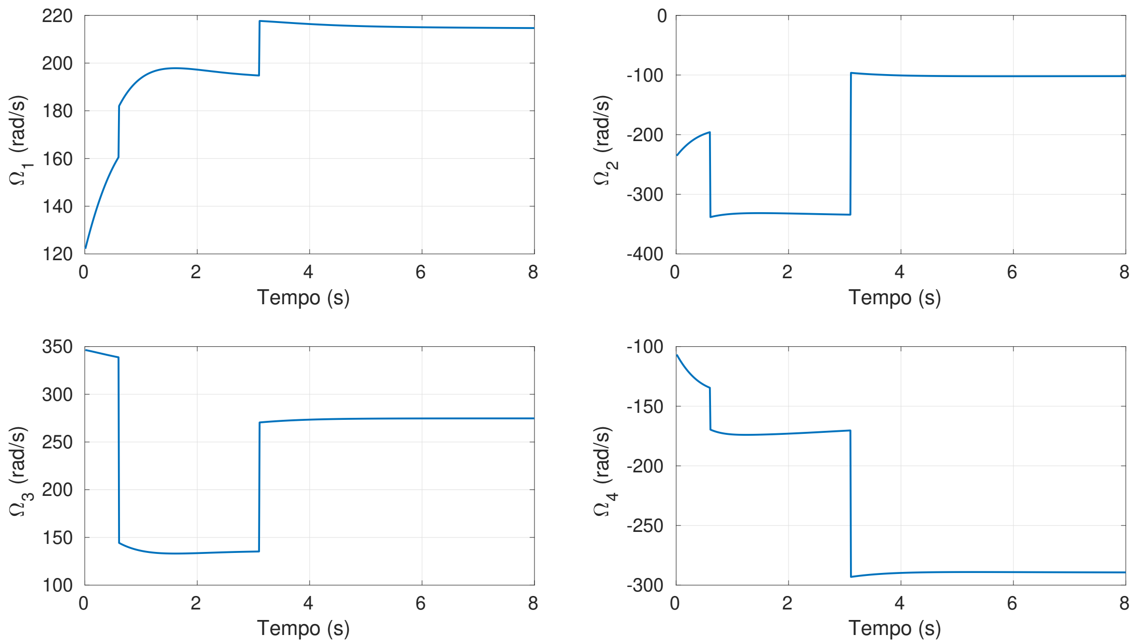

Figure 7: Evolução temporal das velocidades dos rotores Ω_i, $i = 1,\ 2,\ 3$ e 4 para a referência $x_{lqr}^{ref} = [0\ 0\ 60\ 30]^T$ e condição inicial $x_{lqr}(0) = [0\ 0\ -30\ -60]^T$.

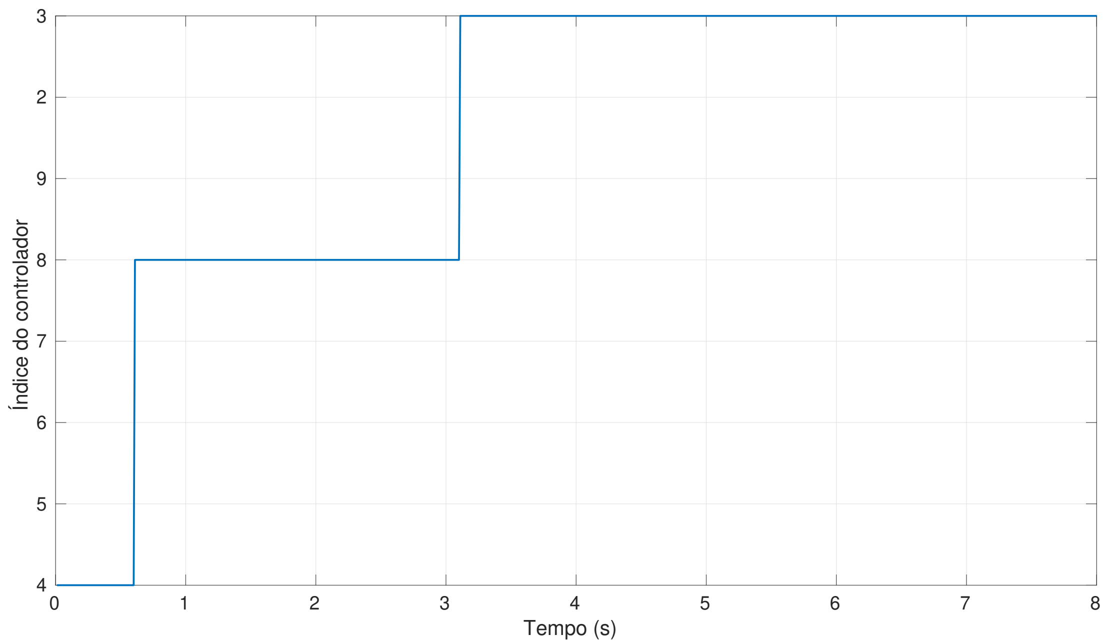

Figure 8: Evolução temporal do índice do controlador para a referência $x_{lqr}^{ref} = [0\ 0\ 60\ 30]^T$ e condição inicial $x_{lqr}(0) = [0\ 0\ -30\ -60]^T$.