Relatório

Gabriel Renato

Agosto 2020

1 Modelo matemático

Equações matemáticas que serão utilizadas como base para simular o comportamento do bicóptero.

A dinâmica do veículo em torno do angulo θ_4 pode ser representada do seguinte modo:

$$a\ddot{\theta}_4(t) + b\dot{\theta}_4(t) + c\theta_4(t) = L_1 f_1(t) - L_2 f_2(t) \tag{1}$$

$$\ddot{f}_i(t) + p\dot{f}_i(t) + qf_i(t) = r(u_i(t)), \quad i = 1, 2 \tag{2}$$

em que f_1 e f_2 são as forças de empuxo geradas nos motores 1 e 2, respectivamente. As variáveis de entrada u_1 e u_2 são os ciclos ativos dos sinais PWM fornecidos aos motores.

As constantes presentes em (1) e (2) são definidas na Tabela 1.

Simbolo	Descrição	Valor	Unidade
a	Momento de inercia	0.0187	$kg \cdot m^2$
b	Coeficiente de atrito dinâmico	0.0495	$kg \cdot m^2/s$
c	Desalinhamento ($C_g - CIR$)	0.6925	$kg \cdot m^2/s^2$
L_1	Comprimento do braço esquerdo	0.225	m
L_2	Comprimento do braço direito	0.215	m
p	Coeficiente determinado experimentalmente	5.348	-
q	Coeficiente determinado experimentalmente	13.43	-
r	Coeficiente determinado experimentalmente	1.319	-

Table 1: Constantes presentes nas equações (1) e (2)

2 Controlador

Nessa seção sera descrito o controlador projetado para controlar a posição angular θ_4.

2.1 MPC

2.1.1 Modelo no espaço de estados a tempo continuo

- Estados:

- $x_1 = \theta_4$: Posição angular
- $x_2 = \dot{\theta}_4$: Velocidade angular

- Variáveis manipuladas:
  - $u_1 = f_1$: força de empuxo do motor 1
  - $u_2 = f_2$: força de empuxo do motor 2

- Variáveis controladas:
  - $y_1 = x_1$

$$
\begin{aligned}
\dot{\mathbf{x}}(t) &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -c/a & -b/a \end{bmatrix}}_{A} \mathbf{x}(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ L_1/a & -L_2/a \end{bmatrix}}_{B} \mathbf{u}(t) \\
\mathbf{y}(t) &= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{C} \mathbf{x}(t)
\end{aligned} \tag{3}
$$

em que
$A \in R^{2\times 2}$ - Matriz dos estados
$B \in R^{2\times 2}$ - Matriz das entradas
$C \in R^{1\times 2}$ - Matriz das saídas

2.1.2 Modelo no espaço de estados a tempo discreto

Discretizando-se o sistema (3) por meio do método segurador de ordem zero (ZOH) para um período de amostragem T_s, é possível escrever

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}(k+1) &= \Phi\mathbf{x}(k) + \Gamma\mathbf{u}(k) \\
\mathbf{y}(k) &= C\mathbf{x}(k)
\end{aligned} \tag{4}
$$

2.1.3 Lei de controle

A ação de controle é dada por

$$
\mathbf{u}(k) = \mathbf{u_{mpc}}(k) \tag{5}
$$

sendo

$$
\mathbf{u_{mpc}}(k) = \mathbf{u_{mpc}}(k-1) + \mathbf{\Delta u}(k) \tag{6}
$$

Em que $\mathbf{\Delta u}(k)$ denota o incremento de controle entre os instantes $k-1$ e k.

O termo $\mathbf{\Delta u}(k)$ é obtida minimizando a seguinte função de custo:

$$
\mathbf{J}(k) = \sum_{i=1}^{N}([\widehat{\mathbf{y}}(k+i|k) - y_{ref}]^T Q[\widehat{\mathbf{y}}(k+i|k) - y_{ref}]) + \sum_{i=1}^{M}([\mathbf{\Delta}\widehat{\mathbf{u}}(k+i-1|k)]^T R[\mathbf{\Delta}\widehat{\mathbf{u}}(k+i-1|k)]) \tag{7}
$$

em que
$y_{ref} \in \mathbb{R}$ - Referência;
$N \in \mathbb{R}$ - Horizonte de predição;

$M \in \mathbb{R}$ - Horizonte de controle;
$Q \in \mathbb{R}_*$ - Matriz de peso simétrica das variáveis controladas ($Q = \mu_1$);
$R \in \mathbb{R}_*^{2\times 2}$ - Matriz de peso simétrica das variáveis manipuladas ($R = diag(\rho_1, \rho_2)$);
$\boldsymbol{\Delta}\widehat{\mathbf{u}}, \widehat{\mathbf{y}}(k+i|k)$ - Variáveis preditas no instante $k+i$, com base nas informações disponíveis no instante k.

Assume-se matrizes de peso invariantes no tempo, além de que $\boldsymbol{\Delta}\widehat{\mathbf{u}}(k+i-1|k) = 0$ para $i = M+1, M+2, \ldots, N$.

2.1.4 Equações de predição

Predição para o estado até N passos a frente.

$$\widehat{\mathbf{x}}(k+1|k) = \Phi\mathbf{x}(k) + \Gamma\widehat{\mathbf{u}}_{\mathbf{mpc}}(k|k) \tag{8}$$

$$\begin{aligned}\widehat{\mathbf{x}}(k+2|k) &= \Phi\widehat{\mathbf{x}}(k+1|k) + \Gamma\widehat{\mathbf{u}}_{\mathbf{mpc}}(k+1|k)\\ &= \Phi[\Phi\mathbf{x}(k) + \Gamma\widehat{\mathbf{u}}_{\mathbf{mpc}}(k|k)] + \Gamma\widehat{\mathbf{u}}_{mpc}(k+1|k)\\ &= \Phi^2\mathbf{x}(k) + \Phi\Gamma\widehat{\mathbf{u}}_{\mathbf{mpc}}(k|k) + \Gamma\widehat{\mathbf{u}}_{\mathbf{mpc}}(k+1|k)\end{aligned} \tag{9}$$

$$\widehat{\mathbf{x}}(k+3|k) = \Phi^3\mathbf{x}(k) + \Phi^2\Gamma\widehat{\mathbf{u}}_{\mathbf{mpc}}(k|k) + \Phi\Gamma\widehat{\mathbf{u}}_{\mathbf{mpc}}(k+1|k) + \Gamma\widehat{\mathbf{u}}_{\mathbf{mpc}}(k+2|k) \tag{10}$$

$$\widehat{\mathbf{x}}(k+N|k) = \Phi^N\mathbf{x}(k) + \Phi^{N-1}\Gamma\widehat{\mathbf{u}}_{\mathbf{mpc}}(k|k) + \Phi^{N-2}\Gamma\widehat{\mathbf{u}}_{\mathbf{mpc}}(k+1|k) + \ldots + \Gamma\widehat{\mathbf{u}}_{\mathbf{mpc}}(k+N-1|k) \tag{11}$$

Organizadas no formato matricial, as equações de (8) a (11) obtemos:

$$\underbrace{\begin{bmatrix}\widehat{\mathbf{x}}(k+1|k)\\ \widehat{\mathbf{x}}(k+2|k)\\ \vdots\\ \widehat{\mathbf{x}}(k+N|k)\end{bmatrix}_{N\times 1}}_{\widehat{\mathbf{X}}} = \underbrace{\begin{bmatrix}\Phi\\ \Phi^2\\ \vdots\\ \Phi^N\end{bmatrix}_{2N\times 2}}_{P_x}\mathbf{x}(k) + \underbrace{\begin{bmatrix}\Gamma & 0 & \ldots & 0\\ \Phi\Gamma & \Gamma & \ldots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \Phi^{N-1}\Gamma & \Phi^{N-2}\Gamma & \ldots & \Gamma\end{bmatrix}_{2N\times 2N}}_{H_x}\underbrace{\begin{bmatrix}\widehat{\mathbf{u}}_{\mathbf{mpc}}(k|k)\\ \widehat{\mathbf{u}}_{\mathbf{mpc}}(k+1|k)\\ \vdots\\ \widehat{\mathbf{u}}_{\mathbf{mpc}}(k+N-1|k)\end{bmatrix}_{N\times 1}}_{\widehat{\mathbf{U}}}$$

Resumidamente,

$$\widehat{\mathbf{X}} = P_x\mathbf{x}(k) + H_x\widehat{\mathbf{U}} \tag{12}$$

De maneira similar define-se

$$\underbrace{\begin{bmatrix}\widehat{\mathbf{y}}(k+1|k)\\ \widehat{\mathbf{y}}(k+2|k)\\ \vdots\\ \widehat{\mathbf{y}}(k+N|k)\end{bmatrix}_{N\times 1}}_{\widehat{\mathbf{Y}}} = \underbrace{\begin{bmatrix}C\Phi\\ C\Phi^2\\ \vdots\\ C\Phi^N\end{bmatrix}_{N\times 2}\mathbf{x}(k)+}_{f_u}\underbrace{\begin{bmatrix}C\Gamma & 0 & \ldots & 0\\ C\Phi\Gamma & C\Gamma & \ldots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ C\Phi^{N-1}\Gamma & C\Phi^{N-2}\Gamma & \ldots & \Gamma\end{bmatrix}_{N\times 2N}}_{H}\underbrace{\begin{bmatrix}\widehat{\mathbf{u}}_{\mathbf{mpc}}(k|k)\\ \widehat{\mathbf{u}}_{\mathbf{mpc}}(k+1|k)\\ \vdots\\ \widehat{\mathbf{u}}_{\mathbf{mpc}}(k+N-1|k)\end{bmatrix}_{N\times 1}}_{\widehat{\mathbf{U}}}$$

$$\widehat{\mathbf{Y}} = f_u + H\widehat{\mathbf{U}} \tag{13}$$

2.1.5 Formulação em termos de incremento da entrada $\boldsymbol{\Delta}\mathbf{u}$

Definindo um vetor de estados artificial da forma:

$$\xi(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \mathbf{u_{mpc}}(k-1) \end{bmatrix}_{4\times 1} \tag{14}$$

A partir de (4), (6) e (14) pode-se definir um modelo artificial em termos do incremento de controle:

$$\xi(k+1) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k+1) \\ \mathbf{u_{mpc}}(k) \end{bmatrix}_{4\times 1} = \underbrace{\begin{bmatrix} \Phi & \Gamma \\ 0_{2\times 2} & I_2 \end{bmatrix}_{4\times 4}}_{\tilde{A}} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \mathbf{u_{mpc}}(k-1) \end{bmatrix}_{4\times 1} + \underbrace{\begin{bmatrix} \Gamma \\ I_2 \end{bmatrix}_{4\times 2}}_{\tilde{B}} \boldsymbol{\Delta}\mathbf{u}(k)$$

$$\mathbf{y}(k) = \underbrace{\begin{bmatrix} C & 0_{1\times 2} \end{bmatrix}_{1\times 4}}_{\tilde{C}} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \mathbf{u_{mpc}}(k-1) \end{bmatrix}_{4\times 1}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \xi(k+1) &= \tilde{A}\xi(k) + \tilde{B}\boldsymbol{\Delta}\mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) &= \tilde{C}\xi(k) \end{aligned} \tag{15}$$

Note que ao reescrever o sistema em termos de incremento do controle, colocam-se integradores (auto-valores sobre o circulo unitário) na matriz dinâmica do sistema ($\tilde{A}$), isso resulta na eliminação do erro de regime estacionário para referências constantes.

Por fim, reformulando (13) a partir do modelo artificial (15) obtemos:

$$\widehat{\mathbf{Y}} = f + G\boldsymbol{\Delta}\widehat{\mathbf{U}} \tag{16}$$

em que

$$G = \begin{bmatrix} \tilde{C}\tilde{B} & 0 & \dots & 0 \\ \tilde{C}\tilde{A}\tilde{B} & \tilde{C}\tilde{B} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{C}\tilde{A}^{N-1}\tilde{B} & \tilde{C}\tilde{A}^{N-2}\tilde{B} & \dots & \tilde{C}\tilde{A}^{N-M}\tilde{B} \end{bmatrix}_{N\times 2M}, \quad f = \phi\xi(k), \quad \phi = \begin{bmatrix} \tilde{C}\tilde{A} \\ \tilde{C}\tilde{A}^2 \\ \vdots \\ \tilde{C}\tilde{A}^N \end{bmatrix}_{2N\times 2}$$

Lembrando que $\boldsymbol{\Delta}\hat{\mathbf{u}}(k+i-1) = 0$ para $i = M+1, M+2, \dots, N$, portanto suprimem-se as últimas $(N-M)p$ colunas de G.

2.1.6 Reescrevendo a função de custo somente em termos de $\boldsymbol{\Delta}\hat{\mathbf{u}}$

A função de custo (7) pode ser escrita na seguinte forma matricial:

$$\mathbf{J}(k) = (\widehat{\mathbf{Y}} - \mathbf{r})^T \mathbf{Q_N} (\widehat{\mathbf{Y}} - \mathbf{r}) + \boldsymbol{\Delta}\widehat{\mathbf{U}}^T \mathbf{R_M} \boldsymbol{\Delta}\widehat{\mathbf{U}} \tag{17}$$

sendo

$$\mathbf{r} = [y_{ref}]_N, \quad \mathbf{Q_N} = diag([Q]_N), \quad \mathbf{R_M} = diag([R]_M)$$

Substituindo (16) em (17), tem-se que

$$
\begin{aligned}
\mathbf{J}(k) &= (f + G\mathbf{\Delta}\widehat{\mathbf{U}} - \mathbf{r})^T\mathbf{Q_N}(f + G\mathbf{\Delta}\widehat{\mathbf{U}} - \mathbf{r}) + \mathbf{\Delta}\widehat{\mathbf{U}}^T\mathbf{R_M}\mathbf{\Delta}\widehat{\mathbf{U}} \\
&= \mathbf{\Delta}\widehat{\mathbf{U}}^T G^T\mathbf{Q_N}G\mathbf{\Delta}\widehat{\mathbf{U}} + 2(f - \mathbf{r})^T\mathbf{Q_N}(G\mathbf{\Delta}\widehat{\mathbf{U}}) + (f - \mathbf{r})^T\mathbf{Q_N}(f - \mathbf{r}) + \mathbf{\Delta}\widehat{\mathbf{U}}^T\mathbf{R_M}\mathbf{\Delta}\widehat{\mathbf{U}} \\
&= \mathbf{\Delta}\widehat{\mathbf{U}}^T(G^T\mathbf{Q_N}G + \mathbf{R_M})\mathbf{\Delta}\widehat{\mathbf{U}} + 2(f - \mathbf{r})^T\mathbf{Q_N}G\mathbf{\Delta}\widehat{\mathbf{U}} + (f - \mathbf{r})^T\mathbf{Q_N}(f - \mathbf{r})
\end{aligned}
$$

Resumidamente:

$$
\mathbf{J}(k) = \frac{1}{2}\mathbf{\Delta}\widehat{\mathbf{U}}^T H_{qp}\mathbf{\Delta}\widehat{\mathbf{U}} + f_{qp}^T\mathbf{\Delta}\widehat{\mathbf{U}} + cte \tag{18}
$$

com

$$
H_{qp} = 2(G^T\mathbf{Q_N}G + \mathbf{R_M}), \quad f_{qp} = 2(f - \mathbf{r})\mathbf{Q_N}G^T, \quad cte = (f - \mathbf{r})^T\mathbf{Q_N}(f - \mathbf{r})
$$

2.1.7 Restrições

- **Restrições sobre os incrementos de controle $\mathbf{\Delta u}$**

$$
\Delta u_{min} \leq \mathbf{\Delta}\widehat{\mathbf{u}}(k+i-1|k) \leq \Delta u_{max}, \quad i = 1, 2, \ldots, M
$$

Na forma matricial,

$$
\begin{bmatrix} \Delta u_{min} \\ \Delta u_{min} \\ \vdots \\ \Delta u_{min} \end{bmatrix}_{2M\times 1} \leq \begin{bmatrix} \mathbf{\Delta}\widehat{\mathbf{u}}(k|k) \\ \mathbf{\Delta}\widehat{\mathbf{u}}(k+1|k) \\ \vdots \\ \mathbf{\Delta}\widehat{\mathbf{u}}(k+M-1|k) \end{bmatrix}_{2M\times 1} \leq \begin{bmatrix} \Delta u_{max} \\ \Delta u_{max} \\ \vdots \\ \Delta u_{max} \end{bmatrix}_{2M\times 1}
$$

De forma resumida,

$$
[\Delta u_{min}]_M \leq \mathbf{\Delta}\widehat{\mathbf{U}} \leq [\Delta u_{max}]_M \tag{19}
$$

Reescrevendo as inequações (19) de maneira diferentes,

$$
\begin{cases} \mathbf{\Delta}\widehat{\mathbf{U}} \leq & [\Delta u_{max}]_M \\ -\mathbf{\Delta}\widehat{\mathbf{U}} \leq & -[\Delta u_{min}]_M \end{cases}
$$

Na forma matricial,

$$
\begin{bmatrix} I_{2M} \\ -I_{2M} \end{bmatrix}_{4M\times 2M} \mathbf{\Delta}\widehat{\mathbf{U}} \leq \begin{bmatrix} [\Delta u_{max}]_M \\ -[\Delta u_{min}]_M \end{bmatrix}_{4M\times 1} \tag{20}
$$

- **Restrições sobre a excursão dos controles $\mathbf{u_{mpc}}$**

$$
\begin{gathered}
u_{min} \leq \widehat{\mathbf{u}}_{\mathbf{mpc}}(k+i-1|k) \leq u_{max}, \quad i = 1, 2, \ldots, M \\
[u_{min}]_M \leq \widehat{\mathbf{U}} \leq [u_{max}]_M
\end{gathered} \tag{21}
$$

Obtém-se a relação entre $\widehat{\mathbf{u}}_{\mathbf{mpc}}$ e $\mathbf{\Delta}\widehat{\mathbf{u}}$ expandindo (6).

$$
\begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{u}}_{\mathbf{mpc}}(k|k) \\ \widehat{\mathbf{u}}_{\mathbf{mpc}}(k+1|k) \\ \vdots \\ \widehat{\mathbf{u}}_{\mathbf{mpc}}(k+M-1|k) \end{bmatrix}_{2M\times 1} = \begin{bmatrix} \mathbf{u_{mpc}}(k-1) \\ \mathbf{u_{mpc}}(k-1) \\ \vdots \\ \mathbf{u_{mpc}}(k-1) \end{bmatrix}_{2M\times 1} + \begin{bmatrix} \mathbf{\Delta}\widehat{\mathbf{u}}(k|k) \\ \mathbf{\Delta}\widehat{\mathbf{u}}(k|k) + \mathbf{\Delta}\widehat{\mathbf{u}}(k+1|k) \\ \vdots \\ \mathbf{\Delta}\widehat{\mathbf{u}}(k|k) + \mathbf{\Delta}\widehat{\mathbf{u}}(k+1|k) + \ldots + \mathbf{\Delta}\widehat{\mathbf{u}}(k+M-1|k) \end{bmatrix}_{2M\times 1}
$$

De forma simplificada,

$$\widehat{\mathbf{U}} = [\mathbf{u_{mpc}}(k-1)]_M + T_M^{I_2}\mathbf{\Delta}\widehat{\mathbf{U}} \tag{22}$$

Portanto substituindo (22) em (21),

$$[u_{min}]_M \leq [\mathbf{u_{mpc}}(k-1)]_M + T_M^{I_2}\mathbf{\Delta}\widehat{\mathbf{U}} \leq [u_{max}]_M$$

Reescrevendo,

$$\begin{cases} T_M^{I_2}\mathbf{\Delta}\widehat{\mathbf{U}} \leq [u_{max} - \mathbf{u_{mpc}}(k-1)]_M \\ T_M^{I_2}\mathbf{\Delta}\widehat{\mathbf{U}} \leq [\mathbf{u_{mpc}}(k-1) - u_{min}]_M \end{cases}$$

Na forma matricial,

$$\begin{bmatrix} T_M^{I_2} \\ -T_M^{I_2} \end{bmatrix}_{4M\times 2M} \mathbf{\Delta}\widehat{\mathbf{U}} \leq \begin{bmatrix} [u_{max} - \mathbf{u_{mpc}}(k-1)]_M \\ [\mathbf{u_{mpc}}(k-1) - u_{min}]_M \end{bmatrix}_{4M\times 1} \tag{23}$$

Reescrevendo (20) e (23) em uma única matriz obtemos:

$$A_{qp}\mathbf{\Delta}\widehat{\mathbf{U}} \leq b_{qp} \tag{24}$$

em que

$$A_{qp} = \begin{bmatrix} I_{2M} \\ -I_{2M} \\ T_M^{I_2} \\ -T_M^{I_2} \end{bmatrix}_{8M\times 2M}, \quad b_{qp} = \begin{bmatrix} [\Delta u_{max}]_M \\ -[\Delta u_{min}]_M \\ [u_{max} - \mathbf{u_{mpc}}(k-1)]_M \\ [\mathbf{u_{mpc}}(k-1) - u_{min}]_M \end{bmatrix}_{8M\times 1}$$

2.1.8 Problema de otimização

O problema de otimização a ser resolvido em cada instante de amostragem é dado por

$$\min_{\mathbf{\Delta}\widehat{\mathbf{u}}} \mathbf{J}(k) = \frac{1}{2}\mathbf{\Delta}\widehat{\mathbf{U}}^T H_{qp}\mathbf{\Delta}\widehat{\mathbf{U}} + f_{qp}^T\mathbf{\Delta}\widehat{\mathbf{U}} + cte$$

Sujeito a

$$A_{qp}\mathbf{\Delta}\widehat{\mathbf{U}} \leq b_{qp}$$

A solução desse problema é um vetor $\mathbf{\Delta}\widehat{\mathbf{u}}^*$ que corresponde a $k+M$ incrementos de controles ótimos iniciando no instante k.
Vale notar que a variação de controle a ser aplicada em (6) corresponde ao primeiro elemento do vetor $\mathbf{\Delta}\widehat{\mathbf{u}}^*$

3 Simulações e sugestões para implementação

Todas as simulações foram feitas considerando ruídos de medida de posição de ± 0.025 rad de velocidade com dispersão de ± 0.14 rad/s, além disso também adotou-se um atraso de transporte de 0.01 segundos para um período de amostragem de 0.02 segundos.

3.1 MPC

Parâmetros de ajuste

$Q = 2$

$R = 7 \cdot diag([1, 1])$

$N = 5$

$M = 3$

Restrições,

$uMax = 1.319/13.43 \cdot [10; 10]$

$uMin = -uMax$

$duMax = 0.8 \cdot 2/9 \cdot [5.2; 5.2]$

$duMin = 0.8 \cdot 2/9 \cdot [-4; -4]$

3.1.1 Implementação em C++

Junto deste documento esta anexo o arquivo.rar contendo os arquivos necessários para simulação em C++.
Para bom funcionamento da rotina sera necessário a inclusão de 3 bibliotecas open source no compilador, sendo essas: *Armadillo*, *boost* e *qpOASES*.

Caso a compilação seja feita via terminal Linux, basta utilizar o comando *make* e *make run*.

Feita a compilação sera gerado um arquivo *data.txt* onde estarão disponíveis os dados da simulação em colunas seguindo a seguinte ordem: Período(k)[1], saída(y)[2], saída medida(ym)[3], ação de controle em PWM(w)[4-5], estados(x)[6-11], ação de controle em força(u)[12-13], incremento de controle(du)[14-15], tempo de cpu para calcular a ação de controle[15].

Caso seja utilizada a biblioteca *gnuplot* para plotagem, há no arquivo *plotMPC.txt* comandos para plotagem adequadas dos dados, que pode ser feita utilizando o comando <*load "plotMPC.txt"*> no terminal do *gnuplot*.

Vale ressaltar que se utilizado um IDE é necessário a adição dos arquivos *libMPC.h* e *matrizesMPC.cpp* no projeto tendo o arquivo *simAtitudeMPC.cpp* como rotina principal.

3.1.2 Resultados

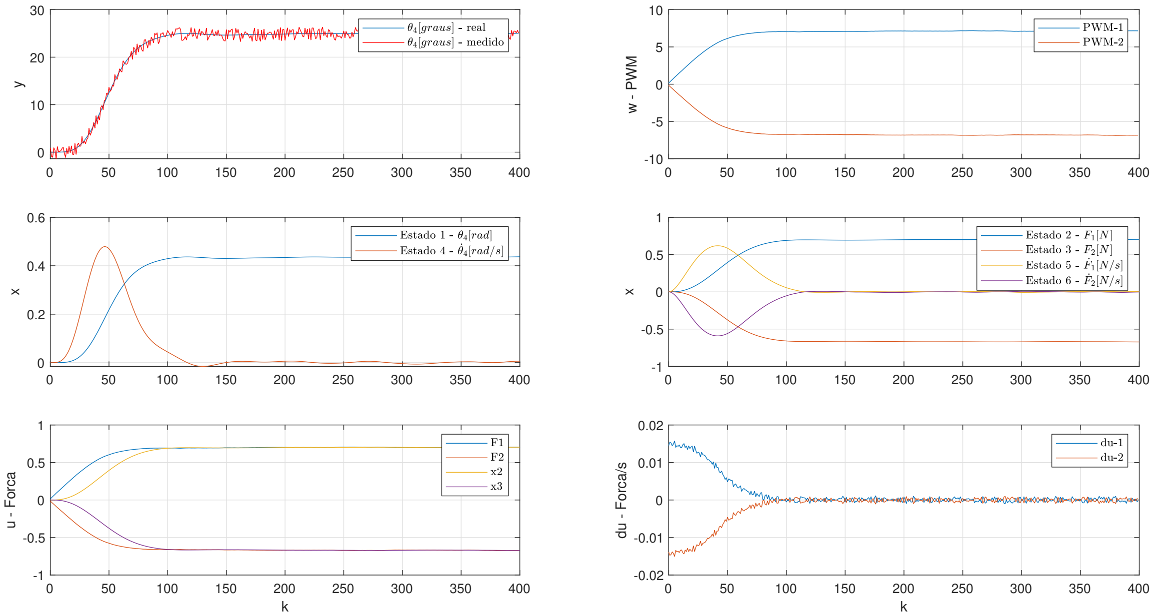

Figure 1: Resultado para referência em 25°.

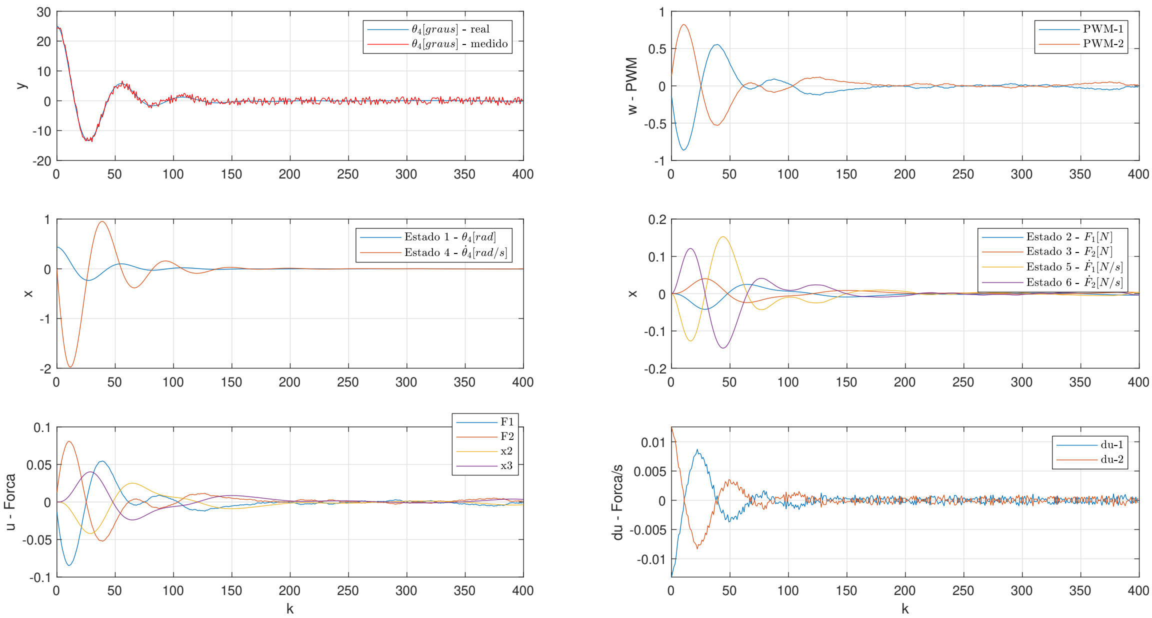

Figure 2: Resultado para referência em 0° e condição inicial de 25°.