

1 Modelagem

1.1 Modelo não linear

Considere o quadricóptero com mecanismo de vetorização do empuxo conforme ilustrado na Figura 1.

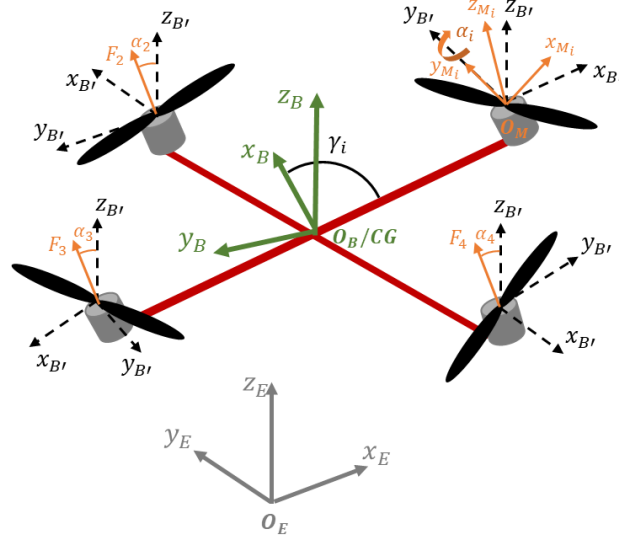


Figure 1: Quadricóptero com mecanismo de vetorização de empuxo.

• Movimento linear

Aplicando a segunda lei de Newton, é possível escrever

$$F_B(t) = \begin{bmatrix} \sum F_x(t) \\ \sum F_y(t) \\ \sum F_z(t) \end{bmatrix} = m \begin{bmatrix} \dot{u}(t) - r(t)v(t) + q(t)w(t) \\ \dot{v}(t) - p(t)w(t) + r(t)u(t) \\ \dot{w}(t) - q(t)u(t) + p(t)v(t) \end{bmatrix} \quad (1)$$

em que $[u \ v \ w]$ e $[p \ q \ r]$ representam as velocidades lineares e angulares ao longo (em torno) dos eixos x , y e z , respectivamente.


Considerar-se-á que F_B é resultante da ação das forças de empuxo F_T , arrasto F_D e gravitacional F_G . Logo,

$$m \begin{bmatrix} \dot{u}(t) - r(t)v(t) + q(t)w(t) \\ \dot{v}(t) - p(t)w(t) + r(t)u(t) \\ \dot{w}(t) - q(t)u(t) + p(t)v(t) \end{bmatrix} = F_{T_B}(t) + F_{D_B}(t) + F_{G_B}(t) \quad (2)$$

em que o subíndice B indica que essas forças estão apresentadas no sistema de coordenada do veículo (BCS – *Body fixed Coordinate System*).

Para determinar F_{T_B} , F_{D_B} e F_{G_B} , as seguintes hipóteses são assumidas:

- Os rotores são posicionados com ângulos de $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 = \pi/2$, $\gamma_3 = \pi$ e $\gamma_4 = 3\pi/2$ em relação à x_B ;
- Os sentidos de rotação dos motores 1 e 3 é positivo (ccw). Já os motores 2 e 4 giram no sentido negativo (cw);
- Os rotores podem ser inclinados longitudinalmente em ângulos α_1 , α_2 , α_3 e α_4 ;

- As variações nos ângulos de tilt e na rotação das hélices são lentas: $\dot{\alpha}_i(t) = 0$, $i = 1, 2, 3$ e 4 e $\dot{\Omega}_i(t) = 0$, $i = 1, 2, 3$ e 4 

- A distância vertical do rotor até o CG é nula, isto é, $z_{CG_i} = 0$, $i = 1, 2, 3$ e 4 .

Com o devido procedimento, é possível obter

$$F_{T_B}(t) = \begin{bmatrix} k_p (\sin(\alpha_1(t))\Omega_1^2(t) - \sin(\alpha_3(t))\Omega_3^2(t)) \\ k_p (\sin(\alpha_2(t))\Omega_2^2(t) - \sin(\alpha_4(t))\Omega_4^2(t)) \\ k_p \sum_{i=1}^4 \cos(\alpha_i(t))\Omega_i^2(t) \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$F_{D_B}(t) = \begin{bmatrix} -k_{d_x} u(t) \\ -k_{d_y} v(t) \\ -k_{d_z} w(t) \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$F_{G_B}(t) = mg \begin{bmatrix} \sin(\theta(t)) \\ -\sin(\phi(t)) \cos(\theta(t)) \\ -\cos(\phi(t)) \cos(\theta(t)) \end{bmatrix} \quad (5)$$

em que ϕ , θ e ψ representam os ângulos de rolagem, arfagem e guinada, respectivamente.

Combinando as equações (2), (3), (4) e (5) é possível descrever a dinâmica de movimento linear do quadricóptero.

• Movimento angular

Aplicando a segunda lei de Newton para o movimento angular, tem-se que

$$\begin{bmatrix} J_{xx}\dot{p}(t) - q(t)r(t)(J_{zz} - J_{yy}) \\ J_{yy}\dot{q}(t) - p(t)r(t)(J_{xx} - J_{zz}) \\ J_{zz}\dot{r}(t) - p(t)q(t)(J_{yy} - J_{xx}) \end{bmatrix} = M_B = M_{T_B}(t) + M_{G_B}(t) + M_{F_B}(t) \quad (6)$$

sendo M_{T_B} , M_{G_B} e M_{F_B} os momentos gerados pela força de empuxo, pelo efeito giroscópico e pelo arrasto da hélice, respectivamente.

É possível escrever

$$M_{T_B}(t) = \begin{bmatrix} lk_p (\cos(\alpha_2(t))\Omega_2^2(t) - \cos(\alpha_4(t))\Omega_4^2(t)) \\ lk_p (-\cos(\alpha_1(t))\Omega_1^2(t) + \cos(\alpha_3(t))\Omega_3^2(t)) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$M_{G_B}(t) = \begin{bmatrix} H_x(t) \\ H_y(t) \\ H_z(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tau_x(t) \\ \tau_y(t) \\ \tau_z(t) \end{bmatrix} \quad (8)$$

sendo

$$H_x(t) = 0 \quad (9)$$

$$H_y(t) = 0 \quad (10)$$

$$H_z(t) = 0 \quad (11)$$

$$\tau_x(t) = \sum_{i=1}^4 \{q(t) \cos(\alpha_i(t)) - [r(t) - \sin(\alpha_i(t))] \sin(\gamma_i(t)) \sin(\alpha_i(t))\} J_{M_i} \Omega_i(t) \quad (12)$$

$$\tau_y(t) = \sum_{i=1}^4 \{p(t) \cos(\alpha_i(t)) + [r(t) - \sin(\alpha_i(t))] \cos(\gamma_i(t)) \sin(\alpha_i(t))\} J_{M_i} \Omega_i(t) \quad (13)$$

$$\tau_z(t) = \sum_{i=1}^4 \{p(t) \sin(\gamma_i(t)) \sin(\alpha_i(t)) - q(t) \cos(\gamma_i(t)) \sin(\alpha_i(t))\} J_{M_i} \Omega_i(t) \quad (14)$$

$$M_{F_B}(t) = \begin{bmatrix} b(-\Omega_1^2(t) \sin(\alpha_1(t)) + \Omega_3^2(t) \sin(\alpha_3(t))) \\ b(\Omega_2^2(t) \sin(\alpha_2(t)) - \Omega_4^2(t) \sin(\alpha_4(t))) \\ b \sum_{i=1}^4 -\text{sign}(\Omega_i(t)) \cos(\alpha_i(t)) \Omega_i^2(t) \end{bmatrix} \quad (15)$$

Por fim, a seguinte relação cinemática entre a derivada dos ângulos de Euler e a velocidade angular pode ser escrita

$$\begin{bmatrix} \dot{p}(t) \\ \dot{q}(t) \\ \dot{r}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin(\theta(t)) \\ 0 & \cos(\phi(t)) & \cos(\phi(t)) \cos(\theta(t)) \\ 0 & -\sin(\phi(t)) & \cos(\theta(t)) \cos(\phi(t)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi}(t) \\ \dot{\theta}(t) \\ \dot{\psi}(t) \end{bmatrix} \quad (16)$$

Em resumo, as equação (2), (6) e (16) descrevem o movimento linear e rotacional do quadricóptero. O movimento de translação em relação a um referencial inercial é descrito por

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_E(t) \\ \dot{y}_E(t) \\ \dot{z}_E(t) \end{bmatrix} = R_B^I \begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{bmatrix} \quad (17)$$

sendo

$$R_B^I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi(t)) & -\sin(\phi(t)) \\ 0 & \sin(\phi(t)) & \cos(\phi(t)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta(t)) & 0 & \sin(\theta(t)) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta(t)) & 0 & \cos(\theta(t)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\psi(t)) & -\sin(\psi(t)) & 0 \\ \sin(\psi(t)) & \cos(\psi(t)) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (18)$$

2 Linearização no espaço de estados

Para o projeto do controlador, realizar-se-á uma linearização do modelo matemático obtido na seção anterior. Com esse propósito, definem-se os seguintes vetores de estado e controle:

$$x = [p \quad q \quad \phi \quad \theta \quad u \quad v \quad w \quad x_E \quad y_E \quad z_E]^T \quad (19)$$

$$u = [\Omega_1 \quad \Omega_2 \quad \Omega_3 \quad \Omega_4 \quad \alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \alpha_4] \quad (20)$$