

# Navegação e determinação de atitude utilizando sensores inerciais, magnetômetro e GPS

Igor Afonso Acampora Prado

December 2, 2016

## Abstract

Este trabalho preocupa-se com o problema de navegação e determinação de atitude de uma plataforma composta por uma tríade de acelerômetros, girômetros, receptor de GPS e magnetômetro. A atitude em três eixos da plataforma é determinada a partir de medidas vetoriais obtidas do acelerômetro e magnetômetro. Além disso, o sinal de GPS é utilizado para corrigir a estimativa de posição obtida a partir da integração de medidas de acelerômetro, mantendo o erro de navegação limitado. Este problema é solucionado através de alguma formulação aproximada do Filtro de Kalman para sistemas não lineares.

## 1 Definição do Problema

### 1.1 Definições Preliminares e Notações

Os Sistemas de Coordenadas Cartesianas (SCC) serão denotados pela letra  $\mathcal{S}_A$ , onde o subíndice informa qual SCC está sendo tratado. Os vetores geométricos serão denotados por letras minúsculas em negrito, *e.g.*,  $\mathbf{r}$ . Agora, considere dois SCC:  $\mathcal{S}_A$  e  $\mathcal{S}_B$ . A notação  $\mathbf{r}^{B/A}$  significa que  $\mathbf{r}$  é o vetor geométrico que fornece informações de  $\mathcal{S}_B$  com respeito a  $\mathcal{S}_A$ , *e.g.*,  $\mathbf{v}^{B/A}$  é o vetor geométrico da velocidade linear de  $\mathcal{S}_B$  com respeito a  $\mathcal{S}_A$ . A notação  $\mathbf{r}_C^{B/A}$  define em qual SCC o vetor geométrico  $\mathbf{r}^{B/A}$  está sendo representado, *e.g.*,  $\mathbf{a}_C^{B/A}$  é a aceleração de  $\mathcal{S}_B$  com respeito a  $\mathcal{S}_A$  representada em  $\mathcal{S}_C$ . A letra  $\mathbf{D}$  será utilizada para denotar matrizes de rotação. A notação  $\mathbf{D}^{A/B}$  define a matriz de rotação que transforma uma representação de um vetor geométrico em  $\mathcal{S}_B$  para  $\mathcal{S}_A$ .

### 1.2 Modelos de Cinemática

Defina o SCC  $\mathcal{S}_G$  fixo no ponto  $O$  localizado na superfície da Terra e como sendo o sistema inercial, conforme ilustrado na Figura 1. Defina também o SCC  $\mathcal{S}_P$  fixo no centro de massa da plataforma e que rotaciona junto com a mesma. Utilizando a notação definida na Seção 1.1, denote  $\mathbf{r}^{P/G}$  e  $\mathbf{v}^{P/G}$  como sendo os vetores geométricos que indicam, respectivamente, a posição e velocidade linear da plataforma em relação ao sistema  $\mathcal{S}_G$ ,  $\mathbf{m}$  o vetor geométrico que representa a direção do campo magnético e  $\mathbf{a}^{P/G}$  o vetor geométrico da aceleração da plataforma em relação ao sistema  $\mathcal{S}_G$ . Considerando a representação desses vetores no sistema  $\mathcal{S}_G$ , a cinemática de translação é modelada por

$$\dot{\mathbf{r}}_G^{P/G} = \mathbf{v}_G^{P/G}. \quad (1)$$

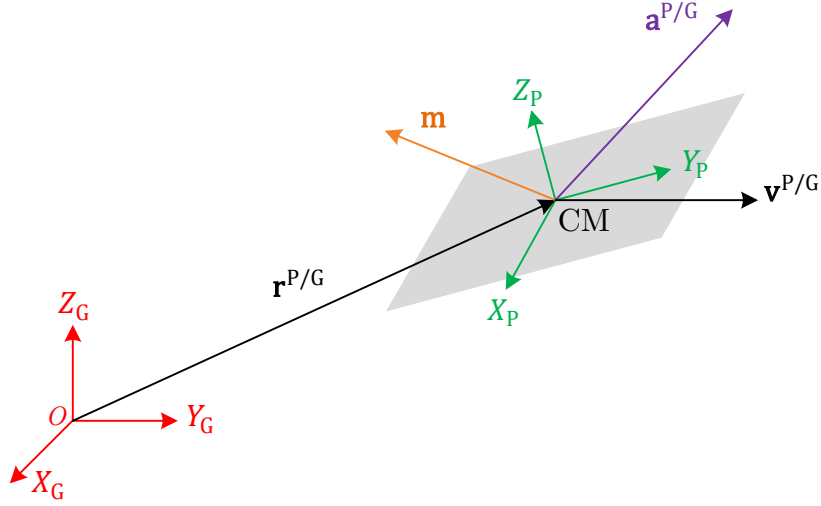


Figure 1: Sistemas de Coordenadas  $\mathcal{S}_G$  e  $\mathcal{S}_P$ .

Considere que a plataforma possua uma tríade de acelerômetros e assuma que seus eixos estejam alinhados com os eixos de coordenadas do sistema  $\mathcal{S}_P$ . Desta forma, as medidas do acelerômetro podem ser modeladas por

$$\check{\mathbf{a}}_p = \mathbf{D}^{P/G}(\dot{\mathbf{v}}_G^{P/G} - \mathbf{g}_G) + \mathbf{w}^a \quad (2)$$

onde  $\dot{\mathbf{v}}_G^{P/G}$  é a representação em  $\mathcal{S}_G$  da aceleração da plataforma com relação ao solo,  $\mathbf{w}^a \in \mathbb{R}^3$  é o ruído de medida do acelerômetro modelado como Gaussiano, com média nula e covariância  $\mathbf{Q}_a \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $\mathbf{g}_G \triangleq [0 \ 0 \ -g]^T$  é a aceleração da gravidade representada no sistema  $\mathcal{S}_G$  e  $\mathbf{D}^{P/G}$  é a matriz de atitude de  $\mathcal{S}_P$  com respeito a  $\mathcal{S}_G$ . Neste trabalho não estamos considerando o bias existente a medida do sensor. Isolando  $\dot{\mathbf{v}}_G^{P/G}$  na Eq. (2) obtém-se

$$\dot{\mathbf{v}}_G^{P/G} = (\mathbf{D}^{P/G})^T(\check{\mathbf{a}}_p - \mathbf{w}^a) + \mathbf{g}_G. \quad (3)$$

Agora, considere que a plataforma possua uma tríade de girômetros e assuma que os girômetros estão alinhados com os eixos de coordenadas da plataforma, suas medidas podem ser modeladas como

$$\check{\boldsymbol{\omega}}_p = \boldsymbol{\omega}_p^{P/G} + \mathbf{w}^g \quad (4)$$

onde  $\boldsymbol{\omega}_p^{P/G}$  é a velocidade angular verdadeira da plataforma com respeito a  $\mathcal{S}_G$  representada em  $\mathcal{S}_G$ ,  $\mathbf{w}^g \in \mathbb{R}^3$  é o ruído de medida do girômetro modelado como Gaussiano, com média nula e covariância  $\mathbf{Q}_\omega \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Neste trabalho, não considera-se o bias existente na medida do girômetro. Considerando-se a parametrização de atitude como ângulos de Euler na sequência 1-2-3 e definindo  $\boldsymbol{\alpha} = [\phi \ \theta \ \psi]^T$ , o modelo verdadeiro de cinemática de atitude é dado por

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} = \mathcal{A}(\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\omega}_p^{P/G} \quad (5)$$

onde

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} \cos \psi / \cos \theta & -\sin \psi / \cos \theta & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ -\cos \psi \sin \theta / \cos \theta & \sin \psi \sin \theta / \cos \theta & 1 \end{bmatrix}. \quad (6)$$

com  $\phi$ ,  $\theta$  e  $\psi$  sendo, respectivamente, os ângulos de rolagem, arfagem e guinada. Isolando  $\boldsymbol{\omega}_p^{P/G}$  em (4) e substituindo o resultado em (5) tem-se

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} = \mathcal{A}(\boldsymbol{\alpha})(\check{\boldsymbol{\omega}}_p - \mathbf{w}^g). \quad (7)$$

Logo, Eq. (1), (3) e (7) podem ser reescritas na forma de equações de estado

$$\dot{\mathbf{x}} \triangleq \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) + \mathbf{G}(\mathbf{x})\mathbf{w} \quad (8)$$

com

$$\mathbf{x} = [(\mathbf{r}_G^{P/G})^T (\mathbf{v}_G^{P/G})^T (\boldsymbol{\alpha})^T]^T \in \mathbb{R}^9 \quad (9)$$

$$\mathbf{u} \triangleq [\check{\mathbf{a}}_p^T \check{\boldsymbol{\omega}}_p^T]^T \in \mathbb{R}^6 \quad (10)$$

$$\mathbf{w} \triangleq [(\mathbf{w}^a)^T (\mathbf{w}^g)^T]^T \in \mathbb{R}^6 \quad (11)$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_G^{P/G} \\ (\mathbf{D}^{P/G}(\boldsymbol{\alpha}))^T (\check{\mathbf{a}}_p) + \mathbf{g}_G \\ \mathcal{A}(\boldsymbol{\alpha})\check{\boldsymbol{\omega}}_p \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^9 \quad (12)$$

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ -(\mathbf{D}^{P/G}(\boldsymbol{\alpha}))^T & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & -\mathcal{A}(\boldsymbol{\alpha}) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{9 \times 6} \quad (13)$$

### 1.3 Modelo de Medidas

#### 1.3.1 Atitude

Para determinar a atitude de  $\mathcal{S}_P$  com respeito a  $\mathcal{S}_G$  é necessário conhecer pelos menos duas representações de medidas vetoriais nestes dois SCC. Feito isso, pode-se modelar a relação entre essas medidas vetoriais como

$$\check{\mathbf{a}}_p = -\mathbf{D}^{P/G}(\boldsymbol{\alpha})\mathbf{g}_G + \mathbf{w}^a \quad (14)$$

e

$$\check{\mathbf{m}}_p = \mathbf{D}^{P/G}(\boldsymbol{\alpha})\check{\mathbf{m}}_G + \mathbf{w}^m \quad (15)$$

onde  $\{\check{\mathbf{m}}_p, \check{\mathbf{m}}_G\} \in \mathbb{R}^3$  são, respectivamente, as representações em  $\mathcal{S}_P$  e  $\mathcal{S}_G$  da medida vetorial do magnetômetro e  $\mathbf{w}^m$  é o ruído de medida do magnetômetro, sendo considerado como Gaussiano, com média nula e covariância  $\mathbf{R}_m \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Note que o modelo utilizando em (14) considera que o veículo não está acelerando, o que é perfeitamente razoável para aplicações de monitoramento e voos em ambientes *indoor*, onde normalmente realizam-se voos com velocidades constantes. Lembrando ainda que  $\check{\mathbf{m}}_G$  é obtido a partir do *World Magnetic Model* (WMM).

#### 1.3.2 Posição

A navegação pura, ou seja, quando feita realizando-se apenas a integração de medidas de acelerômetro, está sujeita ao acúmulo de erros devido a erros de modelagem, erros de integração numérica e também ao fato de os dados colidos do sensor estarem contaminados com ruídos. Para eliminar este problema, pode-se utilizar a fusão com medidas de GPS, que ajudam a manter o erro de estimação limitado.

Defina um novo sistema de coordenadas  $\mathcal{S}_E$ , fixo ao centro da Terra, com eixo  $X_E$  direcionado para o meridiano de *Greenwich* e com eixo  $Z_E$  apontado para o norte geográfico, conforme ilustrado na Figura 2. Considere um receptor de GPS fixo no centro de massa da plataforma,

que fornece as seguintes medidas: latitude ( $\lambda$ ), longitude ( $\Lambda$ ) e altitude ( $h$ ) da plataforma. Defina também um sistema de coordenadas intermediário  $\mathcal{S}_{\text{NED}}$  (do inglês *North-East-Down*, este sistema é bastante utilizado na literatura de aeronáutica) rotacionado em relação a  $\mathcal{S}_{\text{E}}$  pela Eq. (16) e considere que o sistema  $\mathcal{S}_{\text{G}}$  tem sua origem coincidente com  $\mathcal{S}_{\text{NED}}$  e está alinhado conforme a Figura 2.

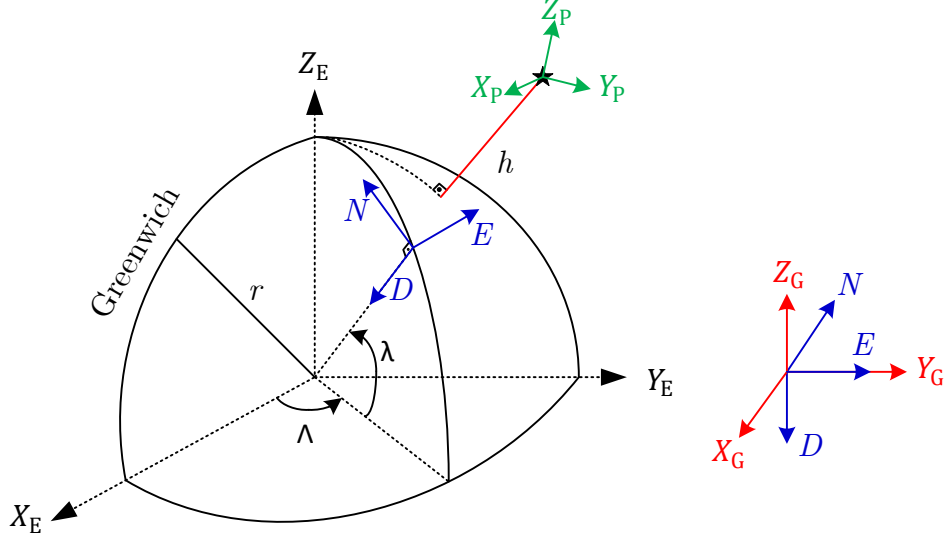


Figure 2: Sistemas de Coordenadas  $\mathcal{S}_{\text{E}}$  e  $\mathcal{S}_{\text{NED}}$ .

$$\mathbf{D}^{\text{NED/E}} = \begin{bmatrix} -\sin \lambda \cos \Lambda & -\sin \lambda \sin \Lambda & \cos \lambda \\ -\sin \Lambda & \cos \Lambda & 0 \\ -\cos \lambda \cos \Lambda & -\cos \lambda \sin \Lambda & -\sin \lambda \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$\mathbf{D}^{\text{G/NED}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (17)$$

A equação de medidas do GPS é dada por:

$$\mathbf{y}^{\text{GPS}} = \check{\mathbf{r}}_{\text{G}}^{\text{P/G}} + \mathbf{w}^{\text{GPS}} \quad (18)$$

onde  $\mathbf{w}^{\text{GPS}} \in \mathbb{R}^3$  é o ruído de medida do GPS, por hipótese, considerado Gaussiano, com média nula e covariância  $\mathbf{R}_{\text{GPS}} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Note que a medida  $\check{\mathbf{r}}_{\text{G}}^{\text{P/G}}$  não é fornecida diretamente pelo sensor GPS, sendo necessário realizar algumas conversões. Sabe-se que

$$\check{\mathbf{r}}_{\text{G}}^{\text{P/G}} = \check{\mathbf{r}}_{\text{G}}^{\text{P/E}} - \mathbf{r}_{\text{G}}^{\text{G/E}}. \quad (19)$$

Por outro lado, as representações  $\check{\mathbf{r}}_{\text{G}}^{\text{P/E}}$  e  $\mathbf{r}_{\text{G}}^{\text{G/E}}$  não são diretamente conhecidas, mas podem ser obtidas a partir de rotações realizadas com as respectivas representações em  $\mathcal{S}_{\text{E}}$ , como apresentado na Eq. (20).

$$\check{\mathbf{r}}_{\text{G}}^{\text{P/G}} = \mathbf{D}^{\text{G/NED}} \mathbf{D}^{\text{NED/E}} (\check{\mathbf{r}}_{\text{E}}^{\text{P/E}} - \mathbf{r}_{\text{E}}^{\text{G/E}}). \quad (20)$$

Por fim, utilizando as medidas fornecidas pelo GPS ( $\check{\lambda}, \check{\Lambda}, \check{h}$ ) e realizando uma transformação de coordenadas geodésicas para uma representação em  $\mathcal{S}_{\text{E}}$ , considerando a terra esférica, têm-se

$$\check{\mathbf{r}}_E^{P/E} = \begin{bmatrix} (\check{h} + r) \cos \check{\lambda} \cos \check{\Lambda} \\ (\check{h} + r) \cos \check{\lambda} \sin \check{\Lambda} \\ (\check{h} + r) \sin \check{\lambda} \end{bmatrix} \quad (21)$$

e

$$\mathbf{r}_E^{G/E} = \begin{bmatrix} (h_O + r) \cos \lambda_O \cos \Lambda_O \\ (h_O + r) \cos \lambda_O \sin \Lambda_O \\ (h_O + r) \sin \lambda_O \end{bmatrix} \quad (22)$$

onde  $\lambda_O$ ,  $\Lambda_O$  e  $h_O$  são, respectivamente, a latitude, longitude e altitude da origem do sistema  $\mathcal{S}_G$  e  $r$  é o raio da Terra.

Assim, as Eq. (14), (15) e (18) podem se reescritas na forma padrão de equações de medidas

$$\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}) + \mathbf{v} \quad (23)$$

onde

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \check{\mathbf{r}}_G^{P/G} \\ \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ -\mathbf{D}^{P/G}(\boldsymbol{\alpha}) \mathbf{g}_G \\ \mathbf{D}^{P/G}(\boldsymbol{\alpha}) \check{\mathbf{m}}_G \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{12} \quad (24)$$

e

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \mathbf{w}^{\text{GPS}} \\ \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ \mathbf{w}^a \\ \mathbf{w}^m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{12} \quad (25)$$

## 1.4 Definição do Problema

O problema de navegação e determinação de atitude utilizando sensores inerciais, magnetômetro e GPS consiste em obter, de forma recursiva, uma estimativa do estado  $\mathbf{x}$ , a partir de uma aproximação do mínimo erro quadrático médio (do inglês, *minimum mean squared error* - MMSE) utilizando medidas dos sensores, equações de estado (9) e equações de medidas (23). Considere a seguinte hipótese:

- Os ruídos de medidas são descorrelacionados.