Алгебра, коллоквиум

vk: vk.com/uselessofflane, tg: @fmakhnach

СОДЕРЖАНИЕ

ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Модуль 1

1.1. Дать определение умножения матриц. Коммутативна ли эта операция? Ответ пояснить.

Пусть даны две прямоугольных матрицы A и B размерности $n \times m$ и $m \times k$ соответственно. Произведением матриц A и B (обозначается как $A \times B$ или AB) называется такая матрица C размерности $n \times k$, что её элементы задаются формулой

$$c_{ij} = \sum_{r=1}^{m} (a_{ir} \cdot b_{rj}), \text{где } \; i = \overline{1, n};\; j = \overline{1, k}$$

Умножение матриц возможно тогда и только тогда, когда количество строк первой матрицы равно количеству столбцов второй. Из этого следует некоммутитивность этой операции ($\exists A \times B \nRightarrow \exists B \times A$).

1.2. Дать определения ступенчатого вида матрицы и канонического вида матрицы.

Матрица M имеет ступенчатый вид, если номера первых ненулевых элементов всех строк возрастают, а все нулевые строки находятся на нижних строках матрицы.

Матрица M имеет канонический (улучшенный ступенчатый) вид, если она имеет ступенчатый вид, а также все первые ненулевые (ведущие) элементы всех строк равны единице и являются единственными нунулевыми элементами в своих столбцах.

1.3. Перечислить элементарные преобразования строк матрицы.

1) умножение i-ой строки на число $\lambda \neq 0$;
2) перестановка местами двух строк;
3) добавление к i-ой строке j-ую строки с коэффициентом $\lambda \neq 0$.

1.4. Сформулировать теорему о методе Гаусса.

Любую конечную матрицу можно элементарными преобразованиями строк привести к каноническому виду.

1.5. Дать определения перестановки и подстановки.

Перестановка – упорядоченный набор чисел $1, 2 \dots n$ без повторений.
Подстановка – взаимнооднозначное отображение множества $\{1, 2 \dots n\}$ в самого себя, n называется степенью подстановки.

1.6. Выписать общую формулу для вычисления определителя произвольного порядка.

Пусть $\sigma(\varphi)$ – число инверсий подстановки φ.
Подстановка φ называется чётной, если $\sigma(\varphi)$ – чётное число, нечётной, если $\sigma(\varphi)$ нечётное.
Знаком подстановки называют число $sgn = (-1)^{\sigma(\varphi)}$.

1.7. Что такое алгебраическое дополнение?

Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} матрицы A называется число $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$, где M_{ij} – дополнительный минор, т.е. определитель матрицы, получающейся из матрицы A путём исключения i-ой строки и j-ого столбца.

1.8. Выписать формулы для разложения определителя по строке и по столбцу.

По i-ой строке:

$$detA = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$$

По j-ому столбцу:

$$detA = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$$

1.9. Что такое фальшивое разложение?

Фальшивое разложение – следствие из теоремы Лапласа, заключающееся в следующем: сумма произведений всех элементов некоторой строки (столбца) матрицы A на алгебраические дополнения соответствующих элементов любой другой строки (столбца) равна нулю.

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij_1} A_{ij_2} = \sum_{j=1}^{n} ai_1 j A_{i_2 j} = 0, \quad i_1 \neq i_2,\ j_1 \neq j_2$$

1.10. Выписать формулы Крамера для квадратной матрицы произвольного порядка. Когда с их помощью можно найти решение СЛАУ?

Пусть есть вектор $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ квадратная матрица A размера $n \times n$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$$

которые соответствуют СЛАУ

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ ... \\ a_{n1}x_1 + ... + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Введём Δ_i как определитель матрицы, получающейся из A заменой i-ого столбца на вектор b:

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & ... & a_{1i-1} & b_1 & a_{1i+1} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & ... & a_{ni-1} & b_n & a_{ni+1} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Тогда неизвестую x_i $(1 \leq i \leq n))$ можно найти по формуле

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}$$

где $\Delta = detA$.

Найти решение СЛАУ этим методом можно тогда и только тогда, когда $detA \neq 0$.

1.11. Дать определение союзной матрицы.

Матрица C называется союзной относительно матрицы A, если она составлена из алгебраических дополнений соответствующих элементов транспонированной матрицы A^T:

$$C = \begin{pmatrix} A_{11} & ... & A_{n1} \\ ... & ... & ... \\ A_{1n} & ... & A_{nn} \end{pmatrix}$$

1.12. Дать определение обратной матрицы. Сформулировать критерий её существования.

Матрица A^{-1} называется обратной квадратной матрице A, если $A^{-1}A = AA^{-1} = E$ (единичная матрица). Обратная матрица для матрицы A существует тогда и только тогда, когда A – квадратная и $detA \neq -0$.

1.13. Выписать формулу для нахождения обратной матрицы.

$$A^{-1} = \frac{1}{detA} \cdot C$$

где C – союзная к A матрица, то есть

$$A^{-1} = \frac{1}{detA} \begin{pmatrix} A_{11} & ... & A_{n1} \\ ... & ... & ... \\ A_{1n} & ... & A_{nn} \end{pmatrix}$$

1.14. Дать определение минора.

Минором порядка k матрицы A называется определитель матрицы $k \times k$, состоящей из элементов, стоящих на пересечении заданных k строк и k столбцов матрицы A.
Минором M_{ij} зачастую обозначается минор, полученный исключением из исходной матрицы i-ой строки и j-ого столбца.

1.15. Дать определение базисного минора. Какие строки называются базисными?

Базисным называется любой ненулевой минор матрицы максимального порядка. Порядок минора = порядок матрицы, определителем которой является минор.
Строки, входящие в базисный минор называются базисными.

1.16. Дать определение ранга матрицы.

Рангом матрицы называется наибольший порядок ненулевого минора матрицы.

1.17. Дать определение линейной комбинации строк. Что такое нетривиальная линейная комбинация?

Линейной комбинацией строк $s_1, ..., s_k$ называется выражение $a_1 s_1 + ... + a_k s_k$, где $a_1, ..., a_k$ – произвольные коэффициенты.
Линейная комбинация строк называется нетривиальной, если $\exists a_i \neq 0$.

1.18. Дать определение линейной зависимости строк матрицы.

Система строк матрицы называется линейно зависимой, если существует их нетривиальная линейная комбинация, равная пустой строке.

1.19. Дать определение линейно независимых столбцов матрицы.

Система столбцов матрицы называется линейно независимой, если не существует их нетривиальной линейной комбинации, равной пустому столбцу.

1.20. Сформулировать критерий линейной зависимости.

Система строк линейно зависима тогда и только тогда, когда одна из строк может быть представлена как линейная комбинация оставшихся.

1.21. Сформулировать теорему о базисном миноре.

Строки (столбцы) матрицы A, входящие в базисный минор, образуют линейно независимую систему. Любая строка (столбец) A выражается через линейную комбинацию строк (столбцов) базисного минора.

1.22. Сформулировать теорему о ранге матрицы.

Ранг матрицы равен максимальному числу линейно независимых строк (столбцов) матрицы.

1.23. Сформулировать критерий невырожденности квадратной матрицы.

Не знаю, что из этого критерий, а что определение, но для произвольной квадратной матрицы A размера $n \times n$ следующие три условия эквивалентны:
1) $detA \neq 0$
2) $RgA = n$
3) Все строки (столбцы) матрицы A линейно независимы

1.24. Выписать свойства решений однородных и неоднородных СЛАУ.

Однородная СЛАУ: $Ax = 0$
Неоднородная СЛАУ: $Ax = b$

Однородные СЛАУ:
Если столбцы $x^1, ..., x^k$ – решения однородной СЛАУ $Ax = 0$, то любая их линейная комбинация также является решением этой СЛАУ. Так, если однородная СЛАУ имеет ненулевое решение, она имеет бесконечно много решений.

Неоднородные СЛАУ:
Если x^0 – решение $Ax = b$, то произвольный столбец x является решением этой СЛАУ тогда и только тогда, когда $x = x^0 + y$, где y – решение соответствующей однородной СЛАУ, то есть $Ay = 0$.
Если x^1, x^2 – решения СЛАУ $Ax = b$, то $y = x^1 - x^2$ является решением однородной СЛАУ $Ax = 0$.

1.25. Сформулировать теорему Кронекера–Капелли.

СЛАУ $Ax = b$ совместна тогда и только тогда, когда $RgA = Rg[Ab]$, где $[Ab]$ – матрица, полученная из столбцов матрицы A и столбца b.

1.26. Дать определение фундаментальной системы решений (ФСР) однородной СЛАУ.

ФСР однородной СЛАУ $Ax = 0$ – множество линейно независимых решений данной СЛАУ. Всего таких решений $n_x - RgA$, где n_x – число переменных в СЛАУ.

1.27. Сформулировать критерий существования ненулевого решения однородной системы линейных уравнений с квадратной матрицей.

Однородная СЛАУ $Ax = 0$ имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда $detA = 0$, т.е. матрица вырождена.

Модуль 2

2.1. Сформулируйте теорему о структуре общего решения однородной СЛАУ.

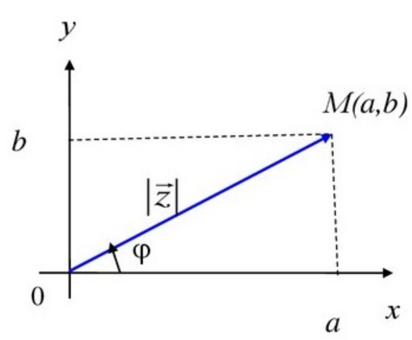
Пусть $f_1, f_2, ..., f_k$ $(k = n - r)$ – ФСР однородной СЛАУ $Ax = 0$. Тогда $x = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + ... + \lambda_k f_3$ является решением СЛАУ при любых $\lambda_1, ..., \lambda_k$. Иными словами, любое решение СЛАУ является линейной комбинацией ФСР.

2.2. Сформулируйте теорему о структуре общего решения неоднородной системы линейных алгебраических уравнений.

Пусть $f_1, f_2, ..., f_k$ $(k = n - r)$ – ФСР однородной СЛАУ $Ax = 0$, а также известно некоторое частное решение x_0 неоднородной СЛАУ $Ax = b$. Тогда $x = x_0 + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + ... + \lambda_k f_3$ является решением неоднородной СЛАУ $Ax = b$ при любых $\lambda_1, ..., \lambda_k$.

2.3. Что такое алгебраическая и тригонометрическая формы записи комплексного числа?

Пусть z – комплексное число.
Алгебраическая запись: $z = a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$.
a и b являются координатами точки z на плоскости комплексных чисел по действительной и мнимой осям соответственно.
Тригонометрическая запись: $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $r, \varphi \in \mathbb{R}$.



Здесь r – длина радиус-вектора числа z на плоскости комплексных чисел, φ – угол между радиус-вектором z и действительной осью.

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\cos\varphi = \frac{a}{r}, \quad \sin\varphi = \frac{b}{r}$$

2.4. Дайте определения модуля и аргумента комплексного числа. Что такое главное значение аргумента комплексного числа?

Модулем комплексного числа z называется $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ – величина, отражающая длину радиус-вектора точки z в плоскости комплексных чисел. Аргументом комплексного числа называется угол между радиус-вектором точки z и положительным направлением действительной оси. Главным аргументом комплексного числа называется такой его аргумент который лежит в $(-\pi, \pi]$

$$Arg(z) = arg(z) + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z},\ arg(z) \in (-\pi, \pi]$$

2.5. Сложение, умножение комплексных чисел. Что происходит с аргументами и модулями комплексных чисел при умножении и при делении?

Операции над комплексными числами выполняются по следующим правилам:

$$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$$

$$(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1)$$

В тригонометрической форме умножение и деление выглядят так:

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$$

$$z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$$

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$$

2.6. Что такое комплексное сопряжение? Как можно делить комплексные числа в алгебраической форме?

Сопряженным числом $\bar{z}$ для комплексного числа z называется такое число, которое симметрично z относительно вещественной оси.

$$z = a + ib, \quad \bar{z} = a - ib$$

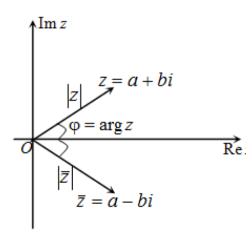


Рис. 1

.

Делить комплексные числа в алгебраической форме возможно путем домножение на сопряженное делителя:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\bar{z_2}}{z_2\bar{z_2}} = \frac{z_1\bar{z_2}}{a_2^2 + b_2^2} = \frac{z_1\bar{z_2}}{|z_2|^2}$$

2.7. Выпишите формулу Муавра.

Пусть $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, тогда

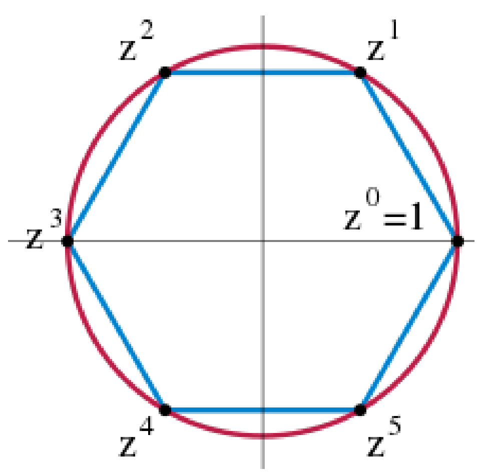
$$z^n = r^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))$$

2.8. Как найти комплексные корни n-ой степени из комплексного числа? Сделайте эскиз, на котором отметьте исходное число и все корни из него.

Пусть $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, тогда корнем степени $n \in \mathbb{N}$ из z называется множество

$$\sqrt[n]{z} = \{\sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)\right),\ k = \overline{0, n-1}\}$$

Пример: $\sqrt[6]{1}$



2.9. Сформулируйте основную теорему алгебры. Сформулируйте теорему Безу.

Основная теорема алгебры:

$$\forall f(z) = \sum_{i=0}^{n} a_i z^i \neq const \ \ \exists z_0 \in C \ : \ f(z_0) = 0$$

Теорема Безу:
Остаток от деления $f(x)$ на $(x-a)$ равен $f(a)$.

2.10. Выпишите формулу Эйлера. Выпишите выражения для синуса и косинуса через экспоненту.

Формула Эйлера: $e^{ix} = \cos x + i \sin x$

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

2.11. Выпишите формулы Виета для многочлена третьей степени.

Пусть $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, x_1, x_2, x_3 – корни многочлена $P(x)$.

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = \frac{c}{a}$$

$$x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a}$$

2.12. Какие многочлены называются неприводимыми?

Многочлен $P(x)$ называется приводимым, если существуют многочлены $g(x) \neq const$, $h(x) \neq const$ такие, что $P(x) = g(x) \cdot h(x)$ (это называется нетривиальное разложение) и неприводимым в противном случае.

2.13. Сформулируйте утверждение о разложении многочленов на неприводимые множители над полем комплексных чисел.

Любой неконстантный многочлен степени n над полем комплексных чисел можно разложить как

$$a(x - x_1)(x - x_2)...(x - x_n)$$

где $a \neq 0$, а значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$ могут попарно совпадать.

2.14. Дайте определение векторного произведения векторов в трехмерном пространстве.

Вектор $\vec{c}$ назвается векторным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ если:
1) $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\varphi$, где φ – угол между $\vec{a}$ и $\vec{b}$
2) $\vec{c} \perp \vec{a}$, $\vec{c} \perp \vec{b}$
3) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – правая тройка векторов

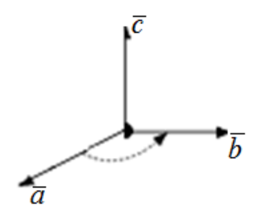


Рис. 1

2.15. Выпишите формулу для вычисления векторного произведения в координатах, заданных в ортонормированном базисе.

Пусть $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ задают правый ортонормированный базис, векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ раскладываются в этом базисе следующим образом:
$\vec{a} = a_i\vec{i} + a_j\vec{j} + a_k\vec{k}$
$\vec{b} = b_i\vec{i} + b_j\vec{j} + b_k\vec{k}$
Тогда

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_i & a_j & a_k \\ b_i & b_j & b_k \end{vmatrix}$$

2.16. Дайте определение смешанного произведения векторов. Как вычислить объем тетраэдра с помощью смешанного произведения?

Смешанным произведением векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ называют число $< \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} >= (\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c})$ – скалярное произведение $\vec{a} \times \vec{b}$ и $\vec{c}$. Объем тетраэдра, построенного на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ равен

$$V = \frac{1}{6} \, | < \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} > |$$

2.17. Выпишите формулу для вычисления смешанного произведения в координатах, заданных в ортонормированном базисе.

Пусть $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ задают правый ортонормированный базис, векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ раскладываются в этом базисе следующим образом:
$\vec{a} = a_i \vec{i} + a_j \vec{j} + a_k \vec{k}$
$\vec{b} = b_i \vec{i} + b_j \vec{j} + b_k \vec{k}$
$\vec{c} = c_i \vec{i} + c_j \vec{j} + c_k \vec{k}$
Тогда

$$< \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} >= \begin{vmatrix} a_i & a_j & a_k \\ b_i & b_j & b_k \\ c_i & c_j & c_k \end{vmatrix}$$

2.18. Сформулируйте критерий компланарности трех векторов с помощью смешанного произведения.

Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны тогда и только тогда, когда $< \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} >= 0$.

2.19. Что такое уравнение поверхности и его геометрический образ?

Уравнение $F(x, y, z) = 0$ называют уравнением поверхности S, если этому уравнению удовлетворяют координаты каждой из точек, лежащих на S, и не удовлетворяют никакие точки, не лежащие на S. При этом S называется геометрическим образом уравнения $F(x, y, z) = 0$.

2.20. Сформулируйте теорему о том, что задает любое линейное уравнение на координаты точки в трехмерном пространстве.

Любое уравнение вида $Ax+By+Cz+D=0$, где $A^2+B^2+C^2>0$ (т.е. линейное уравнение), определяет плоскость в пространстве $\mathbb{R}^3$.

2.21. Что такое нормаль к плоскости?

Нормалью к плоскости α называется такой вектор $\vec{n}$, что $\vec{n} \perp \alpha$. В частности, если $\alpha : Ax + By + Cz + D = 0$, то $\vec{n} = (A, B, C)$ является вектором нормали к α.

2.22. Выпишите формулу для расстояния от точки до плоскости.

Пусть $P(x_0, y_0, z_0)$ – точка, $Ax + By + Cz + D = 0$ – уравнение плоскости α. Тогда

$$\rho(P, \alpha) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

2.23. Общие уравнения прямой. Векторное уравнение прямой. Параметрические и канонические уравнения прямой.

Общие уравнения прямой задают прямую как пересечение двух плоскостей:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

Векторное уравнение прямой: $\vec{r}(t) = \vec{r_0} + \vec{s}t$
где $\vec{r}(t)$ – радиус-вектор <u>любой</u> точки прямой
$\vec{r_0}$ – радиус-вектор <u>определённой</u> точки прямой
$\vec{s}$ – направляющий вектор прямой.

2.24. Выпишите формулу для вычисления расстояния между двумя скрещивающимися прямыми.

Пусть L_1, L_2 – скрещивающиеся прямые, $\vec{s_1}, \vec{s_2}$ – их направляющие векторы, $M_1 \in L_1, M_2 \in L_2$ – произвольные точки на прямых. Тогда

$$\rho(L_1, L_2) = \frac{< \vec{s_1}, \vec{s_2}, M_1\vec{M}_2 >}{|\vec{s_1} \times \vec{s_2}|} \ \ (= \frac{V}{S_{\text{осн}}})$$

2.25. Какие бинарные операции называются ассоциативными, а какие коммутативными?

Операция $\times$ называется:
- ассоциативной, если $\forall x, y, z \ \ (x \times y) \times z = x \times (y \times z)$
- коммутативной, если $\forall x, y \ \ x \times y = y \times x$

2.26. Дайте определения полугруппы и моноида. Приведите примеры.

Полугруппа – группоид (*множество с заданной на нём операцией*), операция которой ассоциативна. Пример: $(\mathbb{N}, +)$.
Моноид – полугруппа, в которой есть нейтральный элемент.
Примеры: $(\mathbb{N} \cup \{0\}, +)$, $(\mathbb{N}, \cdot)$.

2.27. Сформулируйте определение группы. Приведите пример.

Группа – множество с заданной на нём ассоциативной операцией, имеющая нейтральный элемент, причём все элементы являются обратимыми, т.е.

$$\forall g \in G \ \exists a^{-1} \in G : a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e \ (\text{нейтральный элемент})$$

Иначе говоря – моноид, все элементы которого обратимы.
Пример: GL_n – множество всех невырожденных матриц $n \times n$ с операцией умножения.

2.28. Что такое симметрическая группа? Укажите число элементов в ней.

Симметрическая группа – множество всех подстановок длины n с операцией композиции. Обозначается S_n, число элементов $n!$.

2.29. Что такое общая линейная и специальная линейная группы?

Общая линейная группа (GL_n) – множество всех невырожденных матриц $n \times n$ с операцией умножения. Запись $GL_n(\mathbb{F})$ означает, что элементы матрицы принадлежат полю (кольцу) $\mathbb{F}$, например $GL_n(\mathbb{R})$.
Специальная линейная группа – множество всех матриц $n \times n$ с определителем, равным 1, и операцией умножения:

$$SL_n(\mathbb{F}) = \{A \in GL_n(\mathbb{F}) \mid detA = 1\}$$

2.30. Сформулируйте определение абелевой группы. Приведите пример.

Абелева группа – группа, операция которой коммутативна. Пример:$(\mathbb{Z}, +)$.

2.31. Дайте определение подгруппы. Приведите пример группы и её подгруппы.

Подмножество H множества группы G с определённой на нём операцией G называется подгруппой, если она сама является группой относительно данной операции.
Подмножество H является подгруппой G тогда и только тогда, когда выполняются все три условия:
1) H содержит нейтральный элемент G;
2) $\forall h_1, h_2 \in H \;\; h_1 \cdot h_2 \in H$;
3) $\forall h \in H \; \exists h^{-1} \in H : h \cdot h^{-1} = h^{-1} \cdot h = e$;
Пример: $SL_n(\mathbb{R})$ – подгруппа $GL_n(\mathbb{R})$.

2.32. Дайте определение гомоморфизма групп. Приведите пример.

Отображение $f : G_1 \to G_2$ группы $(G_1, \circ)$ в группу $(G_2, \diamond)$ называется гомоморфизмом, если $\forall a, b \in G_1 \; f(a \circ b) = f(a) \diamond f(b)$.
Пример: $\ln : (\mathbb{R}^+ \backslash \{0\}, \cdot) \to (R, +)$ – гомоморфизм, так как $\ln{(ab)} = \ln a + \ln b$.

2.33. Что такое ядро гомоморфизма групп? Приведите пример.

Ядром гомоморфизма $f : G_1 \to G_2$ называется множество всех элементов первой группы, которые переходят в нейтральный элемент второй:

$$Kerf = \{g \in G_1 \mid f(g) = e_2\}$$

Пример: для гомоморфизма $det : GL_n(\mathbb{R}) \to R^*$
$Ker(det) = SL_n(\mathbb{R}) = \{A \in GL_n(\mathbb{R}) \mid detA = 1\}$.

2.34. Дайте определение изоморфизма групп. Приведите пример.

Изоморфизм – биективный гомоморфизм.
Пример: $f : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R}^+, \cdot),\; f(x) = e^x$.

2.35. Сформулируйте определение циклической группы. Приведите пример.

$(G, \circ)$ – циклическая группа, если $\exists g_1 \in G \; \forall g \in G \; g = g_1 \circ \ldots \circ g_1$ (все элементы порождены каким-то элементом). Пример: $(Z_n, +)$, где $Z_n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ – циклическая группа $(g_1 = 1)$.

2.36. Дайте определение порядка элемента.

Порядок элемента $g \in (G, \circ)$ – наименьшее $p \in \mathbb{N} \mid g^p = e$, где $g^p = \underbrace{g \circ \ldots \circ g}_{p}$.

Обозначение: $ord(g)$.

2.37. Сформулируйте утверждение о связи порядка элемента, порождающего циклическую группу, с порядком группы.

Пусть $< g >$ – группа, порожденная элементом g, тогда $ord(g) = | < g > |$.

2.38. Сколько существует, с точностью до изоморфизма, циклических групп данного порядка?

Для каждого натурального порядка n существует ровно одна циклическая группа, с точностью до изоморфизма.

2.39. Что такое группа диэдра? Что такое знакопеременная группа? Укажите число элементов в них.

Группа диэрдра – группа симметрий правильного n-угольника. Обозначение: D_n, $|D_n| = 2n$.

$$D_n = \{r, s \mid r^n = 1,\ s^2 = 1,\ s^{-1}rs = r^{-1}\}\ (r - rotation, s - symmetry)$$

Знакопеременная группа – все чётные подстановки длины n. Обозначение: A_n. $A_n \subset S_n$, $|A_n| = \frac{n!}{2}$.

2.40. Сформулируйте утверждение о том, какими могут быть подгруппы группы целых чисел по сложению.

Любая подгруппа группы целых чисел по сложению имеет вид $G = kZ$, где $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Т.е. это группа всех чисел, кратных определенному значению.

2.41. Дайте определение левого смежного класса по некоторой подгруппе.

Пусть G – группа, $H \subseteq G$, $g \in G$. Левым смежным классом элемента g по подгруппе H называется множество $gH = \{gh \mid h \in H\}$.

2.42. Что такое индекс подгруппы?

Индексом подгруппы $H \subseteq G$ называется число различных левых смежных классов группы G по подгруппе H. Обозначение: $[G : H]$.

2.43. Сформулируйте теорему Лагранжа.

Пусть G – конечная группа, $H \subseteq G$. Тогда $|G| = |H|[G : H]$, где $[G : H]$ – индекс подгруппы, т.е. число левых смежных классов по H.

2.44. Сформулируйте две леммы, которые нужны для доказательства теоремы Лагранжа.

Лемма 1:
$\forall g_1, g_2 \in G\ (g_1H = g_2H) \vee (g_1H \cap g_1H) = \varnothing$
Лемма 2:
$\forall g \in G\, \forall H \subseteq G\ \ |gH| = |H|$

Модуль 3

3.1. Сформулируйте критерий нормальности подгруппы, использующий сопряжение.

Пусть $H \subseteq G$ – подгруппа в группе G. Тогда если $gHg^{-1} = \{ghg^{-1} \mid h \in H\}$ 3 условия эквивалентны:

1. H нормальна
2. $\forall g \in G\ gHg^{-1} \subseteq H$
3. $\forall g \in G\ gHg^{-1} = H$

3.2. Дайте определение факторгруппы.

Факторгруппа – множество смежных классов G по нормальной подгруппе $H \triangleleft G$ с определённой на ней операцией умножения: $(g_1H) \cdot (g_2H) = g_1g_2H$.
Обозначение: G/H – факторгруппа G по нормальной подгруппе H.

3.3. Что такое естественный гомоморфизм?

Естественный гомоморфизм для группы G – отображение $f : G \to G/H$ такое, что $f(g) = gH\ \forall g \in G$.

3.4. Сформулируйте критерий нормальности подгруппы, использующий понятие ядра гомоморфизма.

$H \triangleleft G \Leftrightarrow \exists f$ – гомоморфизм $G \to G'$ для нек. группы G', причём $Kerf = H$.

3.5. Сформулируйте теорему о гомоморфизме групп. Приведите пример.

Пусть $f : G_1 \to G_2$ – гомоморфизм групп,
$Imf = \{g_2 \in G_2 | \exists g_1 \in G_1 : f(g_1) = g_2\}$ (образ группы G по f),
$Kerf = \{g_1 \in G_1 | f(g_1) = e_2\}$ (ядро гомоморфизма f).
Тогда $G_1/Kerf \cong Imf$.
Пример:
Пусть $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n$ такое, что $\forall z \in \mathbb{Z}\ f(z) = z \,\%\, n$ (остаток от деления на n).
Очевидно, $Kerf = n\mathbb{Z}$ – числа, кратные n. Тогда $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_n$.

3.6. Что такое прямое произведение групп?

Прямое произведение групп – группа из всех пар элементов групп с операцией поэлементого умножения.

$$(G,+)\times(H,\circ)=\{(g,h)\mid g\in G,\ h\in H\},\ \ (g_1,h_1)\times(g_2,h_2)=(g_1+g_2,h_1\circ h_2)$$

3.7. Сформулируйте определение автоморфизма и внутреннего автоморфизма.

Автоморфизм – изоморфное отображение группы в себя. Внутренний автоморфизм – отображение $I_a : g\mapsto aga^{-1}$, где $a,g\in G$.

3.8. Что такое центр группы? Приведите пример.

Центр группы G – подгруппа коммутирующих элементов, т.е.
$Z(G)=\{a\in G\mid ab=ba\ \forall b\in G\}$.
Для абелевых групп центр группы совпадает с самой группой. Например, классы вычетов: $Z(\mathbb{Z}_n)=\mathbb{Z}_n$.

3.9. Чему изоморфна факторгруппа группы по её центру?

$$G/Z(G)\cong Inn(G)$$

Inn – подгруппа всех внутренних автоморфизмов: $Inn=\{g\mapsto aga^{-1}\mid a,g\in G\}$.

3.10. Сформулируйте теорему Кэли.

Любая конечная группа порядка n изоморфна некоторой подгруппе группы перестановок S_n.

3.11. Дайте определение кольца.

Кольцо – множество $K\neq\varnothing$, на котором заданы 2 бинарные операции $+$ и $\cdot$ такие, что

1. $(K,+)$ – абелева группа;

2. $(K, \cdot)$ – полугруппа;

3. Умножение дистрибутивно относительно сложения: $\forall a, b, c \in K$

$$\begin{cases} a(b+c) = ab + ac \\ (a+b)c = ac + bc \end{cases}$$

Обозначение: $(K, +, \cdot)$.

Для профилактики:

Группоид – замкнутость относительно операции.

Полугруппа – ассоциативность.

Моноид – нейтральный элемент.

Группа – обратные элементы.

3.12. Что такое коммутативное кольцо? Приведите примеры коммутативного и некоммутативного колец.

Коммутативное кольцо – кольцо с коммутативным умножением: $\forall a, b \in K \;\; ab = ba$

Примеры:

Коммутативное – $(Z, +, \cdot)$.

Некоммутативное – $(M_n(\mathbb{R}), \times)$ – полное матричное кольцо $n \times n$ над $\mathbb{R}$.

3.13. Дайте определение делителей нуля.

Если $\exists a, b \in K \;:\; (a \neq 0 \neq b) \wedge (a \cdot b = 0)$, то a – левый делитель нуля, b – правый делитель нуля.

3.14. Дайте определение целостного кольца. Приведите пример.

Целостное кольцо – коммутативное кольцо без делителей нуля и с единицей (не равной нулю). Целостное кольцо $\equiv$ область целостности.

3.15. Сформулируйте критерий целостности для нетривиального коммутативного кольца с единицей.

Нетривиальное коммутативное кольцо K является целостным тогда и только тогда, когда в нем выполняется закон сокращения, т.е. $\forall a, b, c \in K$

$$\begin{cases} (ab = ac) \wedge (a \neq 0) \Rightarrow b = c \\ (ac = bc) \wedge (c \neq 0) \Rightarrow a = b \end{cases}$$

3.16. Какие элементы кольца называются обратимыми?

Элемент a кольца K называется обратимым, если $\exists a^{-1} \in K : a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$.

3.17. Дайте определение поля. Приведите три примера.

Поле – коммутативное кольцо с единицей (не равной нулю), в котором каждый элемент $a \neq 0$ обратим.
Примеры: $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Q}$ с операциями $(+, \cdot)$.

3.18. Дайте определение подполя. Приведите пример пары: поле и его подполе.

Подполе – подмножество поля, которое само является полем относительно операций поля.
Пример: $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ – поле рациональных чисел является подполем поля действительных чисел.

3.19. Дайте определение характеристики поля. Привести примеры: поля конечной положительной характеристики и поля нулевой характеристики.

Характеристикой поле P (обозначение: $\mathrm{char}P$) называется наименьшее $p \in \mathbb{N}$ такое, что $\underbrace{1 + 1 + ... + 1}_{p \text{ единиц}} = 0$. Если такого p не существует, то $\mathrm{char}P = 0$.
Примеры:
– Если p – простое, то $\mathrm{char}\mathbb{Z}_p = p$;
– $\mathrm{char}\mathbb{R} = 0$;

3.20. Сформулируйте утверждение о том, каким будет простое подполе в зависимости от характеристики.

Пусть P – поле, P_0 – его простое подполе. Тогда
1) $\text{char}P = p > 0 \Rightarrow P_0 \cong \mathbb{Z}_p$;
2) $\text{char}P = 0 \Rightarrow P_0 \cong \mathbb{Q}$;

3.21. Дайте определение идеала. Что такое главный идеал?

Подмножество I кольца K называется идеалом, если
1. $(I, +) \subseteq (K, +)$.
2. $\forall a \in I\, \forall k \in K \;\; ak \in I \wedge ka \in I$.

Идеал называется главным, если $\exists a \in K : I = aK =< a >$.

3.22. Сформулируйте определение гомоморфизма колец.

Отображение $f : (K_1, +, \cdot) \to (K_2, \oplus, \odot)$ называется гомоморфизмом колец K_1, K_2, если
1. $\forall a, b \in K_1 \;\; f(a + b) = f(a) \oplus f(b)$
2. $\forall a, b \in K_1 \;\; f(a \cdot b) = f(a) \odot f(b)$

3.23. Сформулируйте теорему о гомоморфизме колец. Приведите пример.

Пусть $f : K_1 \to K_2$ – гомоморфизм колец, Imf – гомоморфный образ K_2 по f. Тогда

$$K_1/Kerf \cong Imf$$

Пример:
Пусть $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n$ такое, что $\forall z \in \mathbb{Z}\; f(z) = z \,\%\, n$ (остаток от деления на n). Очевидно, $Kerf = n\mathbb{Z}$ – числа, кратные n. Тогда $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_n$.

3.24. Сформулируйте критерий того, что кольцо вычетов по модулю n является полем.

Кольцо вычетов $\mathbb{Z}_n$ является полем $\Leftrightarrow n$ – простое.

3.25. Сформулируйте теорему о том, когда факторкольцо кольца многочленов над полем само является полем.

Факторкольцо $P[x]/\langle f(x)\rangle$ является полем $\Leftrightarrow$ $f(x)$ неприводимо над полем P.

3.26. Дайте определение алгебраического элемента над полем.

Элемент поля $\alpha \in P_2$ называется алгебраическим над полем $P_1 \subseteq P_2$, если $\exists f(x) \in P_1[x] : (f(x) \neq 0) \wedge (f(\alpha) = 0)$.

3.27. Сформулируйте утверждение о том, что любое конечное поле может быть реализовано как факторкольца кольца многочленов по некоторому идеалу.

Любое конечное поле $\mathbb{F}_q$ (где $q = p^n$, p – простое) можно реализовать в виде $\mathbb{Z}_p[x]/\langle h(x)\rangle$, где $h(x)$ – неприводимый многочлен степени n над $\mathbb{Z}_p$.

3.28. Сформулируйте утверждение о том, сколько элементов может быть в конечном поле.

Число элементов в конечном поле всегда p^n, где p – простое, $n \in \mathbb{N}$.

3.29. Дайте определение линейного (векторного) пространства.

Пусть F – поле, V – произвольное множество, на котором корректно заданы 2 операции: сложение и умножение на скаляр (элемент поля $\mathbb{F}$). Иными словами, $\forall x, y \in V \;\; \forall \alpha \in \mathbb{F}$

$$\begin{cases} \exists z = x + y, \; z \in V \\ \exists w = \alpha x, \; w \in V \end{cases}$$

Множество V называют линейным (векторным) пространством, если выполнены следующие 8 условий:

1. $\forall x, y, z \in V \;\; x + (y + z) = (x + y) + z$ – ассоциативность сложения;
2. $\exists 0 \in V \; \forall x \in V : x + 0 = 0 + x = x$ – нейтральный эл-т по сложению;

3. $\forall x \in V\, \exists(-x) \in V : x+(-x) = (-x)+x = 0$ – обратный эл-т по сложению;
4. $\forall x, y \in V \;\; x+y = y+x$;

1-4 свойства – абелева группа по сложению

5. $\exists 1 \in \mathbb{F} : \forall x \in V \;\; x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$ – нейтральный эл-т по умножению;
6. $\forall x \in V\, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{F} \;\; (\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$ – ассоциативность умножения на число;
7. $\forall x, y \in V\, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{F} \;\; (\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x$ – дистрибутивность 1;
8. $\forall x, y \in V\, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{F} \;\; \alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$ – дистрибутивность 2;

3.30. Дайте определение базиса линейного (векторного) пространства.

Базисом линейного пространства V называется упорядоченный набор векторов $b_1, ..., b_n \in V$ такой, что:

1) $b_1, ..., b_n$ – линейно независимы;
2) любой вектор из V представим в виде линейной комбинации $b_1, ..., b_n$:
$\forall x \in V \;\; x = \lambda_1 b_1 + ... + \lambda_n b_n,\ \lambda_i \in \mathbb{F}$, причём единственным образом;

3.31. Что такое размерность пространства?

Размерность пространства V – максимальное количество линейно независимых векторов в нём. Обозначение: $\dim V$.

3.32. Дайте определение матрицы перехода от старого базиса линейного пространства к новому.

Пусть в линейном пространстве есть 2 базиса $A = \{a_1, ..., a_n\}$ и $B = \{b_1, ..., b_n\}$. Разложим векторы B по базису A:

$$\begin{cases} b_1 = t_{11}a_1 + ... + t_{n1}a_n \\ ... \\ b_n = t_{1n}a_1 + ... + t_{nn}a_n \end{cases}$$

где $t_{ij} \in \mathbb{F}$. Тогда матрицей перехода от базиса A к базису B называется матрица

$$T_{a\to b} = \begin{pmatrix} t_{11} & ... & t_{1n} \\ ... & ... & ... \\ t_{n1} & ... & t_{nn} \end{pmatrix}$$

Используется так: $x^b = T^{-1}_{A\to B}x^a$.

3.33. Выпишите формулу для описания изменения координат вектора при изменении базиса.

Пусть $x \in V$, A и B – базисы в V, $x^a = (x_1^a, ..., x_n^a)^T$, $x^b = (x_1^b, ..., x_n^b)^T$ – столбцы координат вектора x в базисах A и B соответственно. Тогда $x^b = T_{A \to B}^{-1} x^a$.

3.34. Дайте определение подпространства в линейном пространстве.

Подмножество L линейного пространства V называется подпространством, если оно само является пространством относительно операций в V.

3.35. Дайте определения линейной оболочки конечного набора векторов и ранга системы векторов.

Линейной оболочной системы векторов $a_1, ..., a_k$ называется множество $L(a_1, ..., a_k) = \{\lambda_1 a_1 + ... + \lambda_k a_k \mid \lambda_i \in \mathbb{F}\}$ – множество всех линейных комбинаций векторов $a_1, ..., a_k$.

Рангом системы векторов $a_1, ..., a_k$ в линейном пространстве называется размерность линейной оболочки системы: $Rg(a_1, ..., a_k) = \dim L(a_1, ..., a_k)$.

3.36. Дайте определения суммы и прямой суммы подпространств.

Суммой подпространств $H_1, H_2 \subseteq V$ называется множество $H_1 + H_2 = \{h_1 + h_2 \mid h_1 \in H_1,\ h_2 \in H_2\}$. $H_1 + H_2$ называется прямой суммой подпространств и обозначается как $H_1 \oplus H_2$, если $H_1 \cap H_2 = \{0\}$, т.е. пересечение тривиально.

3.37. Сформулируйте утверждение о связи размерности суммы и пересечения подпространств.

Пусть $H_1, H_2 \subseteq V$, тогда $\dim(H_1 + H_2) = \dim H_1 + \dim H_2 - \dim(H_1 \cap H_2)$.

3.38. Дайте определение билинейной формы.

Пусть V – линейное пространство над $\mathbb{R}$. Билинейной формой называется функция $\varphi : V \times V \to \mathbb{R}$, которая паре векторов ставит в соответствие число, при этом выполняются следующие условия:
$\forall x, y, z \in V \ \forall \alpha\beta \in \mathbb{R}$
1) $\varphi(\alpha x + \beta y, z) = \alpha\varphi(x, z) + \beta\varphi(y, z)$;
2) $\varphi(x, \alpha y + \beta z) = \alpha\varphi(x, y) + \beta\varphi(x, z)$;

3.39. Дайте определение квадратичной формы.

Квадратичная форма – однородный многочлен второй степени от n переменных:

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 + 2 \sum_{1 \le i < j \le n} a_{ij}x_i x_j;\ a_{ij} \in \mathbb{R}$$

3.40. Дайте определения положительной и отрицательной определенности квадратичной формы.

Квадратичную форму называют:
– положительно определенной, если $\forall x \neq 0 \ \ Q(x) > 0$
– отрицательно определенной, если $\forall x \neq 0 \ \ Q(x) < 0$

3.41. Какую квадратичную форму называют знакопеременной?

Квадратичную форму $Q(x)$ называют знакопеременной, если
$\exists x, y \in V : Q(x) < 0 < Q(y)$.

3.42. Дайте определения канонического и нормального вида квадратичной формы.

Квадратичной формой канонического вида называют кв. форму вида
$Q(x) = a_1x_1^2 + ... + a_nx_n^2$, $a_i \in R$, т.е. не имеющую попарных произведений элементов. Если при этом $\forall i \in [1, n]$ $a_i \in \{-1, 0, 1\}$, то это нормальный вид квадратичной формы.

3.43. Как меняется матрица билинейной формы при замене базиса? Как меняется матрица квадратичной формы при замене базиса?

Пусть $T_{A\to B}$ – матрица перехода от базиса A в базис B. Пусть M_A – матрица билинейной формы в базисе A, M_B – матрица билинейной формы в базисе B. Тогда

$$M_B = T_{A\to B}^T M_A T_{A\to B}$$

Матрица квадратичной формы меняется точно также.

3.44. Сформулируйте критерий Сильвестра и его следствие.

Квадратичная форма от n переменных $Q(x)$ положительно определена тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} \Delta_1 > 0 \\ \Delta_2 > 0 \\ ... \\ \Delta_n > 0 \end{cases}$$

где Δ_i – i-й главный угловой минор матрицы $Q(x)$, т.е. если $Q(x) = x^T A x$,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & ... \\ a_{21} & a_{22} & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$$

то

$$\begin{cases} \Delta_1 = a_{11} \\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \\ ... \\ \Delta_n = \det A \end{cases}$$

<u>Следствие:</u>
$Q(x)$ отрицательно определена тогда и только тогда, когда знаки главных угловых чередуются начиная с минуса: $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 > 0$, ..., $(-1)^n \Delta_n > 0$.

3.45. Сформулируйте закон инерции квадратичных форм. Что такое индексы инерции?

Для любых двух канонических видов

$$Q_1(y_1, ..., y_m) = \lambda_1 y_1^2 + ... + \lambda_m y_m^2,\ \lambda_i \neq 0$$

$$Q_2(z_1, ..., z_k) = \mu_1 z_1^2 + ... + \mu_m z_k^2,\ \mu_i \neq 0$$

одной и той же квадратичной формы

1) $m = k = RgA$ – рангу матрицы квадратичной формы.

2) кол-во положительных λ_i = кол-во положительных μ_i = $= i_+$ – положительный индекс инерции.

3) кол-во отрицательных λ_i = кол-во отрицательных μ_i = $= i_-$ – отрицательный индекс инерции.

3.46. Дайте определение линейного отображения. Приведите пример.

Отображение $\varphi : V_1 \to V_2$, где V_1, V_2 – линейные пространства над одним полем $\mathbb{F}$, называется линейным, если

1) $\forall u, v \in V_1\ \ \varphi(u + v) = \varphi(u) + \varphi(v)$

2) $\forall u \in V_1\ \forall \lambda \in \mathbb{F}\ \ \varphi(\lambda u) = \lambda\varphi(u)$

Пример:

В линейном пространстве матриц $n \times m$ существует линейное отображение $\varphi : X \to AX$ т.е. умножение слева на фиксированную матрицу A размера $l \times n$. Результатом является элемент пространства матриц $l \times m$.

3.47. Дайте определение матрицы линейного отображения.

Матрица линейного отображения $\varphi : V_1 \to V_2$ – это матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & ... & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & ... & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$$

где по столбцам стоят координаты образов векторов базиса V_1 в базисе V_2.

3.48. Выпишите формулу для преобразования матрицы линейного отображения при замене базиса. Как выглядит формула в случае линейного оператора?

Пусть $\varphi : V_1 \to V_2$ – линейное отображение. Пусть A_{EF} – матрица линейного отображения в паре базисов E пространства V_1 и F пространства V_2. Пусть T_1 – матрица перехода от E к E', T_2 – матрица перехода от F к F'. Тогда

$$A_{E'F'} = T_2^{-1} A_{EF} T_1$$

Для линейных операторов:

$$A_{E'} = T^{-1} A_E T$$

Модуль 4

4.1. Сформулируйте утверждение о связи размерностей ядра и образа линейного отображения.

Пусть $A : X \to Y$ – линейное отображение.
Ядром A называется множество $KerA = \{x \in X \mid Ax = 0\}$.
Образом A называется множество $ImA = \{y \in Y \mid y = Ax\}$.
Тогда $\dim KerA + \dim ImA = \dim X = n$

4.2. Дайте определения собственного вектора и собственного значения линейного оператора.

Собственным вектором линейного оператора $A : V \to V$ называется такой вектор $v \in V$, $v \neq 0$, что $\exists \lambda \in \mathbb{F} : (A - \lambda E)v = 0$. Число λ называется собственным значением, соответствующим данному собственному вектору v.

4.3. Дайте определения характеристического уравнения и характеристического многочлена квадратной матрицы.

Характеристическим многочленом квадратной матрицы A называется многочлен $\mathcal{X}_A(\lambda) = det(A - \lambda E)$.
Характеристическим уравнением квадратной матрицы A называется многочлен $\mathcal{X}_A(\lambda) = 0$.

4.4. Сформулируйте утверждение о связи характеристического уравнения и спектра линейного оператора.

Спектр линейного оператора – множество его собственных значений.
Скаляр $\lambda_0 \in \mathbb{F}$ является собственным значением линейного оператора A (т.е. принадлежит его спектру) тогда и только тогда, когда $\mathcal{X}_A(\lambda_0) = 0$.

4.5. Дайте определение собственного подпространства.

Собственным подпространством линейного оператора A относительно собственного значения λ называется множество $\{v \in V \mid (A - \lambda)v = 0\}$.

4.6. Дайте определения алгебраической и геометрической кратности собственного значения. Какое неравенство их связывает?

Алгебраическая кратность собственного значения λ_0 есть кратность λ_0 как корня характеристического уравнения (т.е. в какой степени входит $(\lambda - \lambda_0)$ в характеристический многочлен).
Геометрическая кратность собственного значения λ_0 – размерность собственного подпространства относительно λ_0. Иначе говоря, $\dim(Ker(A - \lambda E))$, т.е. число элементов ФСР в соответствующей СЛАУ.
Геометрическая кратность $\lambda_0 \leq$ алгебраическая кратность λ_0.

4.7. Каким свойством обладают собственные векторы линейного оператора, отвечающие различным собственным значениям?

Собственные векторы, отвечающие различным собственным значениям, линейно независимы.

4.8. Сформулируйте критерий диагональности матрицы оператора.

Матрица линейного оператора диагональна тогда и только тогда, когда все векторы базиса, в котором представлена эта матрица, являются её собственными векторами.

4.9. Сформулируйте критерий диагонализируемости матрицы оператора с использованием понятия геометрической кратности.

Матрица линейного оператора диагонализируема тогда и только тогда, когда для всех собственных значений линейного оператора верно, что алгебраическая и геометрическая кратности равны.

4.10. Дайте определение жордановой клетки. Сформулируйте теорему о жордановой нормальной форме матрицы оператора.

Жорданова клетка $n \times n$ есть матрица $n \times n$ вида

$$J_n(\lambda_i) = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & ... & ... & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & 1 \\ 0 & ... & ... & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}$$

т.е. на главной диагонали собственное значение λ_i, над диагональю – единицы, остальное – нули.
Жорданова нормальная форма – блочная матрица с жордановыми клетками на главной диагонали.
Теорема о жордановой нормальной форме: $\forall A \in M_n(\mathbb{F})$, где $\mathbb{F}$ – алгебраически замкнутое поле (например $\mathbb{C}$) существует невырожденная матрица $C \in M_n(\mathbb{F})$ такая, что $C^{-1}AC = J$, где J – жорданова нормальная форма.

4.11. Выпишите формулу для количества жордановых клеток заданного размера.

Количество жордановых клеток с λ_i на диагонали размера $k \times k$ вычисляется по следующей формуле:

$$h_k(\lambda_i) = \rho_{k+1} - 2\rho_k + \rho_{k-1}$$

где $\rho_j = Rg(A - \lambda_i E)^j$, $p_0 = n$.

4.12. Сформулируйте теорему Гамильтона-Кэли.

Если A – квадратная матрица и $\mathcal{X}(\lambda)$ – её характеристический многочлен, то $\mathcal{X}(A) = 0$.

4.13. Дайте определение корневого подпространства.

Корневой вектор для собственного значения λ есть такой ненулевой вектор x, что для некоторого $m \in \mathbb{N}$ $(A - \lambda \cdot I)^m x = 0$.

Корневое подпространство – множество всех корневых векторов, соответсвующих определенному собственному числу.

4.14. Дайте определение минимального многочлена линейного оператора.

Многочлен $\mu(x)$ называется минимальным для линейного оператора с матрицей A, если
1. $\mu(A) = 0$.
2. $\forall f : f(A) = 0 \Rightarrow \deg f \geq \deg \mu$.
3. Коэффициент при старшем члене – единица.

4.15. Дайте определение инвариантного подпространства.

Подпространство L векторного пространства V называют инвариантным относительно оператора $\varphi : V \to V$, если $\forall x \in L\ \varphi(x) \in L$, иначе говоря, $\varphi(L) \subseteq L$.

4.16. Дайте определение евклидова пространства.

Евклидово пространство есть линейное пространство V с определенной на нем билинейной формой $g(x, y)$, называемой скалярным произведением. Скалярное произведение обладает свойствами билинейной формы (напоминаю)

1. $\forall x, y, z \in V\ g(x + y, z) = g(x, z) + g(y, z), \quad g(x, y + z) = g(x, y) + g(x, z)$.
2. $\forall x, y \in V\ \forall \lambda \in \mathbb{F}\ g(\lambda x, y) = \lambda g(x, y) = g(x, \lambda y)$.

а также дополнительными свойствами

3. $\forall x, y \in V\ g(x, y) = g(y, x)$ – симметричность.
4. $\forall x \in V\ g(x, x) \geq 0$, причём $g(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

4.17. Выпишите неравенства Коши–Буняковского и треугольника.

Пусть $||x|| = \sqrt{(x, x)}$.
Неравенство Коши-Буняковского:

$$\forall x, y \in \mathcal{E}\ \ |(x, y)| \leq ||x|| \cdot ||y||$$

Неравенство треугольника:

$$\forall x, y \in \mathcal{E}\ \ ||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$$

Здесь $\mathcal{E}$ – евклидово пространство.

4.18. Дайте определения ортогонального и ортонормированного базисов.

Векторы v_1, v_2 ортогональны, если $(v_1, v_2) = 0$.
Базис называют ортогональным, если все его векторы попарно ортогональны.
Базис называет ортонормированным, если все его векторы попарно ортонональны, а также каждый вектор имеет норму 1. Иначе говоря,

$$(e_i, e_j) = \delta_{ij} \text{ (\textit{символ Кронекера})} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

4.19. Дайте определение матрицы Грама.

Матрица Грама системы векторов $(e_1, ..., e_n)$ называется квадратная матрица, где на позиции i, j стоит скалярное произведение (e_i, e_j):

$$\Gamma = \begin{pmatrix} (e_1, e_1) & (e_1, e_2) & ... & (e_1, e_n) \\ (e_2, e_1) & (e_2, e_2) & ... & (e_2, e_n) \\ ... & ... & ... & ... \\ (e_n, e_1) & (e_n, e_2) & ... & (e_n, e_n) \end{pmatrix}$$

4.20. Выпишите формулу для преобразования матрицы Грама при переходе к новому базису.

Матрицы Грама двух базисов e и e' связаны отношением $\Gamma' = U^T \Gamma U$, где U – матрица перехода от e к e'.

4.21. Как меняется определитель матрицы Грама (грамиан) при применении процесса ортогонализации Грама–Шмидта?

Грамиан не меняется при применении процесса ортогонализации Грама-Шмидта.

4.22. Сформулируйте критерий линейной зависимости с помощью матрицы Грама.

Система векторов $e_1, ..., e_n$ линейно зависима тогда и только тогда, когда определитель матрицы Грама (грамиан) этой системы равен нулю.

4.23. Дайте определение ортогонального дополнения.

Пусть $H \subseteq V$. Множество $H^{\perp} = \{x \in V \mid \forall y \in H \ (x, y) = 0\}$ называется ортогональным дополнением подпространства H.

4.24. Дайте определения ортогональной проекции вектора на подпространство и ортогональной составляющей.

Пусть L – линейное подпространство евклидова пространства $\mathcal{E}$, a – произвольный вектор пространства $\mathcal{E}$. Если $a = b + c$, причём $b \in L, c \in L^{\perp}$, то b называется ортогональной проекцией вектора a на подпространство L ($proj_L a$), а c – ортогональной составляющей при (ортогональном) проектировании вектора a на подпространство L ($ort_L a$).

4.25. Выпишите формулу для ортогональной проекции вектора на подпространство, заданное как линейная оболочка данного линейно независимого набора векторов.

Пусть $L = \langle a_1, ..., a_n \rangle$ – линейная оболочка. Тогда $proj_L x = A(A^T A)^{-1} A^T x$, где A – матрица, составленная из столбцов $a_1, ..., a_n$.

(прим.) Если долго смотреть на эту формулу, можно увидеть

$$proj_e x = \frac{(e, x)}{(e, e)} e$$

4.26. Выпишите формулу для вычисления расстояния с помощью определителей матриц Грама.

Пусть $S \subset \mathcal{E}$ – подпространство, $x \in \mathcal{E}$, $(e_1, ..., e_n)$ – базис S. Тогда:

$$(p(x,S))^2 = \langle x, S \rangle = \frac{\Gamma(e_1, e_2, ..., e_n, x)}{\Gamma(e_1, e_2, ..., e_n)}$$

4.27. Дайте определение сопряженного оператора в евклидовом пространстве.

Линейный оператор $\mathcal{A}^*$ называется сопряженным к линейному оператору $\mathcal{A}$, если $\forall x, y \in \mathcal{E}\ \ (\mathcal{A}x, y) = (x, \mathcal{A}^* y)$.

4.28. Дайте определение самосопряженного (симметрического) оператора.

Линейный оператор $\mathcal{A}$ называется самосопряженным (симметрическим), если $\forall x, y \in \mathcal{E}$ верно, что $(\mathcal{A}x, y) = (x, \mathcal{A}y)$, т.е. $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}$.

4.29. Как найти матрицу сопряженного оператора в произвольном базисе?

Пусть Γ – матрица Грама в необходимом нам базисе, $\mathcal{A}$ – матрица линейного оператора. Тогда матрица сопряженного линейного оператора выражается как:

$$\mathcal{A}^* = \Gamma^{-1} A^T \Gamma$$

4.30. Каким свойством обладают собственные значения самосопряженного оператора?

Все собственные значения значения самосопряженного оператора вещественны.

4.31. Что можно сказать про собственные векторы самосопряженного оператора, отвечающие разным собственным значениям?

Собственные векторы самосопряженного оператора, отвечающие разным собственным значениям, ортогональны.

4.32. Сформулируйте определение ортогональной матрицы.

Квадратная матрица O называется ортогональной, если $O^TO = OO^T = E$.

4.33. Сформулируйте определение ортогонального оператора.

Линейный оператор $A : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ называется ортогональным, если

$$\forall x, y \in \mathcal{E} \;\; (Ax, Ay) = (x, y)$$

4.34. Сформулируйте критерий ортогональности оператора, использующий его матрицу.

Линейный оператор A ортогонален тогда и только тогда, когда его матрица ортогональна в ОНБ (ортонормированном базисе).

4.35. Каков канонический вид ортогонального оператора? Сформулируйте теорему Эйлера.

Для любого ортогонального оператора существует ОНБ, в котором матрица оператора имеет следующий блочно-диагональный вид:

$$A' = \begin{pmatrix} A_{\varphi_1} & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & A_{\varphi_k} & & & & & & \\ & & & 1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & 1 & & & \\ & & & & & & -1 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & -1 \end{pmatrix}, \quad \text{где } A_{\varphi_i} = \begin{pmatrix} \cos\varphi_i & -\sin\varphi_i \\ \sin\varphi_i & \cos\varphi_i \end{pmatrix}$$

Теорема Эйлера:

Любое ортогональное преобразование в $\mathbb{R}^3$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$$

в некотором ОНБ (т.е. это поворот + возможно, отражение).

4.36. Сформулируйте теорему о существовании для самосопряженного оператора базиса из собственных векторов.

Для всякого самосопряженного оператора A существует ОНБ из собственных векторов, в котором матрица оператора имеет диагональный вид (на диагонали стоят собственные значения, соответствующие собственным векторам).

4.37. Сформулируйте теорему о приведении квадратичной формы к диагональному виду при помощи ортогональной замены координат.

Любую квадратичную форму можно привести к каноническому (диагональному) виду ортогональными преобразованиями.

4.38. Сформулируйте утверждение о QR-разложении.

Пусть $A \in M_n(\mathbb{R})$ и столбцы $A_1, ..., A_n$ – линейно независимы. Тогда существуют матрицы $Q, R : A = QR$, где Q – ортогональная, R – верхнетреугольная с положительными значениями на главной диагонали.

4.39. Сформулируйте теорему о сингулярном разложении.

Для любой матрицы $A \in M_{mn}(\mathbb{R})$ справедливо сингулярное разложение

$$A = V\Sigma U^T$$

где V – ортогональная матрица $m \times m$, U – ортогональная матрица $n \times n$, $\Sigma \in M_{mn}(\mathbb{R})$ и она является диагональной с числами $\sigma_i \geq 0$ (сингулярными числами) и нулями на диагонали.
По договоренности σ_i располагают так: $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq ... \geq \sigma_r > 0$.

4.40. Сформулируйте утверждение о полярном разложении.

Любой линейный оператор в евклидовом пространстве представляется как композиция самосопряженного (симметрического) и ортогонального оператора.

4.41. Дайте определение сопряженного пространства.

Пространством, сопряженным к линейному пространству L, называется множество L^* всех линейных форм на L с операциями сложения и умножения на число:

$$(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x)$$
$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$$

$(L^* = Hom(L, \mathbb{F}))$

4.42. Выпишите формулу для преобразования координат ковектора при переходе к другому базису.

При переходе от базиса e к базису g ковекторы сопряженного пространства L^* преобразуются по формуле

$$[f]_g = T^T_{e \to g} \cdot [f]_e$$

где $T_{e\to g}$ – матрица перехода от e к g, $[f]$ записаны по столбцам.

4.43. Дайте определение взаимных базисов.

Базисы $e = (e_1, ..., e_n)$ в линейном пространстве L и $f = (f^1, ..., f^n)$ в сопряженном пространстве L^* называют взаимными, если

$$f^i(e_j) = \delta^i_j = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

4.44. Дайте определение биортогонального базиса.

Если $L = L^*$, то взаимный к данному базис называется биортогональным.

4.45. Сформулируйте определение алгебры над полем. Приведите два примера.

Алгебра – векторное пространство A над $\mathbb{F}$ с операцией умножения $A \times A \to A$, для которой выполняются следующие свойства:
$\forall x, y, z \in A, \ \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}$
1) $(x + y) * z = x * z + y * z -$ дистрибутивность 1
2) $x * (y + z) = x * y + x * z -$ дистрибутивность 2
3) $(\alpha x) * (\beta y) = \alpha\beta(x * y)$
<u>Примеры:</u>
1) Матрицы с операцией умножения;
2) $\mathbb{C}$ – двумерная алгебра над $\mathbb{R}$;
3) Алгебра многочленов $\mathbb{F}[x]$;
4) Кватернионы;

4.46. Сформулируйте определение тензора. Приведите два примера.

Пусть $\mathbb{F}$ – поле, V – векторное пространство над $\mathbb{F}$, V^* – сопряженное к V пространство. Тогда любое полилинейное отображение

$$f : V \times ... \times V \times V^* \times ... \times V^* \to \mathbb{F}$$

где p пространств V и q пространств V^* ($p, q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$) называется тензором на V типа (p, q) и валентности $p + q$.

Примеры:
1) тензор типа (1, 0) – линейные функции на V, т.е. элементы V^*.
2) тензор типа (0, 1) – линейные функции на V^*, т.е. элементы V.
3) тензор (2, 0) – билинейные формы на V.
4) тензор (1, 1) – можно интерпретировать как линейный оператор.

P.S. В Интернетах вы можете встретить вариацию, в которой (p, q) стоят наоборот (напр. билинейные формы определяются как тензор (0, 2)). Допустимы оба варианта. Представленный вариант был на лекциях.

4.47. Дайте определение эллипса как геометрического места точек. Выпишите его каноническое уравнение. Что такое эксцентриситет эллипса? В каких пределах он может меняться?

Эллипсом называют геометрическое место точек, сумма расстояний от которых до двух заданных точек, называемых фокусами, постоянна.
Каноническое уравнение эллипса:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Эксцентриситет эллипса:

$$\varepsilon = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$$

где a – большая полуось, b – малая полуось. Он лежит на полуинтервале $[0, 1)$ и служит мерой «сплюснутости» эллипса. При $\varepsilon = 0$ эллипс превращается в окружность. При $\varepsilon \to 1$ эллипс вырождается в отрезок F_1F_2.

4.48. Дайте определение гиперболы как геометрического места точек. Выпишите её каноническое уравнение. Что такое эксцентриситет гиперболы? В каких пределах он может меняться?

Гиперболой называют геометрическое место точек, модуль разности расстояний от которых до двух заданных точек, называемых фокусами, постоянен.
Каноническое уравнение гиперболы:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Экцентриситет гиперболы:

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}$$

характеризует угол между асимптотами. Лежит в интервале $(1, +\infty)$, при $\varepsilon \to 1$ гипербола вырождается в два луча.

4.49. Дайте определение параболы как геометрического места точек. Выпишите её каноническое уравнение.

Параболой называют геометрическое место точек плоскости, равноудалённых от данной точки (фокуса) и от данной прямой (директрисы).
Каноническое уравнение параболы:

$$y^2 = 2px$$

где p – параметр параболы – расстояние от фокуса до директрисы.

4.50. Дайте определение цилиндрической поверхности.

Рассмотрим кривую γ, лежащую в некоторой плоскости P и прямую L, не лежащую в P.
Цилиндрической поверхностью называют множество всех прямых, параллельных L и пересекающих γ.

4.51. Дайте определение линейчатой поверхности. Приведите три примера.

Линейчатой называют поверхность, образованную движением прямой линии. Примерами линейчатых поверхностей являются цилиндр, однополосный гиперболоид, гиперболический параболоид.