

# Алгебра, коллоквиум

vk: [vk.com/uselessofflane](https://vk.com/uselessofflane), tg: [@fmakhnach](https://t.me/fmakhnach)

Были использованы материалы Sofika: [github.com/Sofiika/AlgebraKollok](https://github.com/Sofiika/AlgebraKollok)

## СОДЕРЖАНИЕ

<b><u>ОПРЕДЕЛЕНИЯ</u></b>	<b>12</b>
<b><u>Модуль 1</u></b>	<b>12</b>
1.1. Дать определение умножения матриц. Коммутативна ли эта операция? Ответ пояснить. . . . .	12
1.2. Дать определения ступенчатого вида матрицы и канонического вида матрицы. . . . .	12
1.3. Перечислить элементарные преобразования строк матрицы. . . .	12
1.4. Сформулировать теорему о методе Гаусса. . . . .	12
1.5. Дать определения перестановки и подстановки. . . . .	13
1.6. Выписать общую формулу для вычисления определителя произвольного порядка. . . . .	13
1.7. Что такое алгебраическое дополнение? . . . . .	13
1.8. Выписать формулы для разложения определителя по строке и по столбцу. . . . .	13
1.9. Что такое фальшивое разложение? . . . . .	13
1.10. Выписать формулы Крамера для квадратной матрицы произвольного порядка. Когда с их помощью можно найти решение СЛАУ? . . . . .	14
1.11. Дать определение союзной матрицы. . . . .	14
1.12. Дать определение обратной матрицы. Сформулировать критерий её существования. . . . .	15
1.13. Выписать формулу для нахождения обратной матрицы. . . . .	15
1.14. Дать определение минора. . . . .	15
1.15. Дать определение базисного минора. Какие строки называются базисными? . . . . .	15
1.16. Дать определение ранга матрицы. . . . .	16
1.17. Дать определение линейной комбинации строк. Что такое нетривиальная линейная комбинация? . . . . .	16
1.18. Дать определение линейной зависимости строк матрицы. . . . .	16

1.19. Дать определение линейно независимых столбцов матрицы. . . . .	16
1.20. Сформулировать критерий линейной зависимости. . . . .	16
1.21. Сформулировать теорему о базисном миноре. . . . .	16
1.22. Сформулировать теорему о ранге матрицы. . . . .	17
1.23. Сформулировать критерий невырожденности квадратной матрицы. . . . .	17
1.24. Выписать свойства решений однородных и неоднородных СЛАУ.	17
1.25. Сформулировать теорему Кронекера–Капелли. . . . .	17
1.26. Дать определение фундаментальной системы решений (ФСР) однородной СЛАУ. . . . .	18
1.27. Сформулировать критерий существования ненулевого решения однородной системы линейных уравнений с квадратной матрицей.	18

## **Модуль 2** **19**

2.1. Сформулируйте теорему о структуре общего решения однородной СЛАУ. . . . .	19
2.2. Сформулируйте теорему о структуре общего решения неоднородной системы линейных алгебраических уравнений. . . . .	19
2.3. Что такое алгебраическая и тригонометрическая формы записи комплексного числа? . . . . .	19
2.4. Дайте определения модуля и аргумента комплексного числа. Что такое главное значение аргумента комплексного числа? . . . . .	19
2.5. Сложение, умножение комплексных чисел. Что происходит с аргументами и модулями комплексных чисел при умножении и при делении? . . . . .	20
2.6. Что такое комплексное сопряжение? Как можно делить комплексные числа в алгебраической форме? . . . . .	20
2.7. Выпишите формулу Муавра. . . . .	21
2.8. Как найти комплексные корни $n$ -ой степени из комплексного числа? Сделайте эскиз, на котором отметьте исходное число и все корни из него. . . . .	21
2.9. Сформулируйте основную теорему алгебры. Сформулируйте теорему Безу. . . . .	21
2.10. Выпишите формулу Эйлера. Выпишите выражения для синуса и косинуса через экспоненту. . . . .	22
2.11. Выпишите формулы Виета для многочлена третьей степени. . . . .	22
2.12. Какие многочлены называются неприводимыми? . . . . .	22

2.13. Сформулируйте утверждение о разложении многочленов на неприводимые множители над полем комплексных чисел. . . . .	22
2.14. Дайте определение векторного произведения векторов в трехмерном пространстве. . . . .	23
2.15. Выпишите формулу для вычисления векторного произведения в координатах, заданных в ортонормированном базисе. . . . .	23
2.16. Дайте определение смешанного произведения векторов. Как вычислить объем тетраэдра с помощью смешанного произведения? . . . . .	23
2.17. Выпишите формулу для вычисления смешанного произведения в координатах, заданных в ортонормированном базисе. . . . .	24
2.18. Сформулируйте критерий компланарности трех векторов с помощью смешанного произведения. . . . .	24
2.19. Что такое уравнение поверхности и его геометрический образ? .	24
2.20. Сформулируйте теорему о том, что задает любое линейное уравнение на координаты точки в трехмерном пространстве. . . . .	24
2.21. Что такое нормаль к плоскости? . . . . .	25
2.22. Выпишите формулу для расстояния от точки до плоскости. . .	25
2.23. Общие уравнения прямой. Векторное уравнение прямой. Параметрические и канонические уравнения прямой. . . . .	25
2.24. Выпишите формулу для вычисления расстояния между двумя скрещивающимися прямыми. . . . .	26
2.25. Какие бинарные операции называются ассоциативными, а какие коммутативными? . . . . .	26
2.26. Дайте определения полугруппы и моноида. Приведите примеры.	26
2.27. Сформулируйте определение группы. Приведите пример. . . . .	26
2.28. Что такое симметрическая группа? Укажите число элементов в ней. . . . .	27
2.29. Что такое общая линейная и специальная линейная группы? . .	27
2.30. Сформулируйте определение абелевой группы. Приведите пример. . . . .	27
2.31. Дайте определение подгруппы. Приведите пример группы и её подгруппы. . . . .	27
2.32. Дайте определение гомоморфизма групп. Приведите пример. . .	28
2.33. Что такое ядро гомоморфизма групп? Приведите пример. . . .	28
2.34. Дайте определение изоморфизма групп. Приведите пример. . .	28
2.35. Сформулируйте определение циклической группы. Приведите пример. . . . .	28

2.36. Дайте определение порядка элемента. . . . .	29
2.37. Сформулируйте утверждение о связи порядка элемента, порождающего циклическую группу, с порядком группы. . . . .	29
2.38. Сколько существует, с точностью до изоморфизма, циклических групп данного порядка? . . . . .	29
2.39. Что такое группа диэдра? Что такое знакопеременная группа? Укажите число элементов в них. . . . .	29
2.40. Сформулируйте утверждение о том, какими могут быть подгруппы группы целых чисел по сложению. . . . .	29
2.41. Дайте определение левого смежного класса по некоторой подгруппе. . . . .	30
2.42. Что такое индекс подгруппы? . . . . .	30
2.43. Сформулируйте теорему Лагранжа. . . . .	30
2.44. Сформулируйте две леммы, которые нужны для доказательства теоремы Лагранжа. . . . .	30

### **Модуль 3** **31**

3.1. Сформулируйте критерий нормальности подгруппы, использующий сопряжение. . . . .	31
3.2. Дайте определение факторгруппы . . . . .	31
3.3. Что такое естественный гомоморфизм? . . . . .	31
3.4. Сформулируйте критерий нормальности подгруппы, использующий понятие ядра гомоморфизма. . . . .	31
3.5. Сформулируйте теорему о гомоморфизме групп. Приведите пример. . . . .	31
3.6. Что такое прямое произведение групп? . . . . .	31
3.7. Сформулируйте определение автоморфизма и внутреннего автоморфизма. . . . .	32
3.8. Что такое центр группы? Приведите пример. . . . .	32
3.9. Чему изоморфна факторгруппа группы по её центру? . . . . .	32
3.10. Сформулируйте теорему Кэли. . . . .	32
3.11. Дайте определение кольца. . . . .	32
3.12. Что такое коммутативное кольцо? Приведите примеры коммутативного и некоммутативного колец. . . . .	33
3.13. Дайте определение делителей нуля. . . . .	33
3.14. Дайте определение целостного кольца. Приведите пример. . . . .	33
3.15. Сформулируйте критерий целостности для нетривиального коммутативного кольца с единицей. . . . .	33

3.16. Какие элементы кольца называются обратимыми? . . . . .	34
3.17. Дайте определение поля. Приведите три примера. . . . .	34
3.18. Дайте определение подполя. Приведите пример пары: поле и его подполе. . . . .	34
3.19. Дайте определение характеристики поля. Привести примеры: поля конечной положительной характеристики и поля нулевой характеристики. . . . .	34
3.20. Сформулируйте утверждение о том, каким будет простое подполе в зависимости от характеристики. . . . .	34
3.21. Дайте определение идеала. Что такое главный идеал? . . . . .	35
3.22. Сформулируйте определение гомоморфизма колец. . . . .	35
3.23. Сформулируйте теорему о гомоморфизме колец. Приведите пример. . . . .	35
3.24. Сформулируйте критерий того, что кольцо вычетов по модулю $n$ является полем. . . . .	35
3.25. Сформулируйте теорему о том, когда факторкольцо кольца многочленов над полем само является полем. . . . .	35
3.26. Дайте определение алгебраического элемента над полем. . . . .	36
3.27. Сформулируйте утверждение о том, что любое конечное поле может быть реализовано как факторкольцо кольца многочленов по некоторому идеалу. . . . .	36
3.28. Сформулируйте утверждение о том, сколько элементов может быть в конечном поле. . . . .	36
3.29. Дайте определение линейного (векторного) пространства. . . . .	36
3.30. Дайте определение базиса линейного (векторного) пространства. . . . .	37
3.31. Что такое размерность пространства? . . . . .	37
3.32. Дайте определение матрицы перехода от старого базиса линейного пространства к новому. . . . .	37
3.33. Выпишите формулу для описания изменения координат вектора при изменении базиса. . . . .	37
3.34. Дайте определение подпространства в линейном пространстве. . . . .	38
3.35. Дайте определения линейной оболочки конечного набора векторов и ранга системы векторов. . . . .	38
3.36. Дайте определения суммы и прямой суммы подпространств. . . . .	38
3.37. Сформулируйте утверждение о связи размерности суммы и пересечения подпространств. . . . .	38
3.38. Дайте определение билинейной формы. . . . .	38
3.39. Дайте определение квадратичной формы. . . . .	39

3.40. Дайте определения положительной и отрицательной определенности квадратичной формы. . . . .	39
3.41. Какую квадратичную форму называют знакопеременной? . . .	39
3.42. Дайте определения канонического и нормального вида квадратичной формы. . . . .	39
3.43. Как меняется матрица билинейной формы при замене базиса? Как меняется матрица квадратичной формы при замене базиса?	39
3.44. Сформулируйте критерий Сильвестра и его следствие. . . . .	40
3.45. Сформулируйте закон инерции квадратичных форм. Что такое индексы инерции? . . . . .	40
3.46. Дайте определение линейного отображения. Приведите пример.	41
3.47. Дайте определение матрицы линейного отображения. . . . .	41
3.48. Выпишите формулу для преобразования матрицы линейного отображения при замене базиса. Как выглядит формула в случае линейного оператора? . . . . .	41

## **Модуль 4** **43**

4.1. Сформулируйте утверждение о связи размерностей ядра и образа линейного отображения. . . . .	43
4.2. Дайте определения собственного вектора и собственного значения линейного оператора. . . . .	43
4.3. Дайте определения характеристического уравнения и характеристического многочлена квадратной матрицы. . . . .	43
4.4. Сформулируйте утверждение о связи характеристического уравнения и спектра линейного оператора. . . . .	43
4.5. Дайте определение собственного подпространства. . . . .	43
4.6. Дайте определения алгебраической и геометрической кратности собственного значения. Какое неравенство их связывает? . . . . .	43
4.7. Каким свойством обладают собственные векторы линейного оператора, отвечающие различным собственным значениям? . . . .	44
4.8. Сформулируйте критерий диагональности матрицы оператора. .	44
4.9. Сформулируйте критерий диагонализруемости матрицы оператора с использованием понятия геометрической кратности. . . .	44
4.10. Дайте определение жордановой клетки. Сформулируйте теорему о жордановой нормальной форме матрицы оператора. . . . .	44
4.11. Выпишите формулу для количества жордановых клеток заданного размера. . . . .	45
4.12. Сформулируйте теорему Гамильтона-Кэли. . . . .	45

4.13. Дайте определение корневого подпространства. . . . .	45
4.14. Дайте определение минимального многочлена линейного оператора. . . . .	46
4.15. Дайте определение инвариантного подпространства. . . . .	46
4.16. Дайте определение евклидова пространства. . . . .	46
4.17. Выпишите неравенства Коши–Буняковского и треугольника. . .	46
4.18. Дайте определения ортогонального и ортонормированного базисов. . . . .	47
4.19. Дайте определение матрицы Грама. . . . .	47
4.20. Выпишите формулу для преобразования матрицы Грама при переходе к новому базису. . . . .	47
4.21. Как меняется определитель матрицы Грама (грамиан) при применении процесса ортогонализации Грама–Шмидта? . . . . .	47
4.22. Сформулируйте критерий линейной зависимости с помощью матрицы Грама. . . . .	47
4.23. Дайте определение ортогонального дополнения. . . . .	48
4.24. Дайте определения ортогональной проекции вектора на подпространство и ортогональной составляющей. . . . .	48
4.25. Выпишите формулу для ортогональной проекции вектора на подпространство, заданное как линейная оболочка данного линейно независимого набора векторов. . . . .	48
4.26. Выпишите формулу для вычисления расстояния с помощью определителей матриц Грама. . . . .	48
4.27. Дайте определение сопряженного оператора в евклидовом пространстве. . . . .	49
4.28. Дайте определение самосопряженного (симметрического) оператора. . . . .	49
4.29. Как найти матрицу сопряженного оператора в произвольном базисе? . . . . .	49
4.30. Каким свойством обладают собственные значения самосопряженного оператора? . . . . .	49
4.31. Что можно сказать про собственные векторы самосопряженного оператора, отвечающие разным собственным значениям? . . . . .	49
4.32. Сформулируйте определение ортогональной матрицы. . . . .	50
4.33. Сформулируйте определение ортогонального оператора. . . . .	50
4.34. Сформулируйте критерий ортогональности оператора, использующий его матрицу. . . . .	50

4.35. Каков канонический вид ортогонального оператора? Сформулируйте теорему Эйлера. . . . .	50
4.36. Сформулируйте теорему о существовании для самосопряженного оператора базиса из собственных векторов. . . . .	51
4.37. Сформулируйте теорему о приведении квадратичной формы к диагональному виду при помощи ортогональной замены координат. . . . .	51
4.38. Сформулируйте утверждение о QR-разложении. . . . .	51
4.39. Сформулируйте теорему о сингулярном разложении. . . . .	52
4.40. Сформулируйте утверждение о полярном разложении. . . . .	52
4.41. Дайте определение сопряженного пространства. . . . .	52
4.42. Выпишите формулу для преобразования координат ковектора при переходе к другому базису. . . . .	52
4.43. Дайте определение взаимных базисов. . . . .	52
4.44. Дайте определение биортогонального базиса. . . . .	53
4.45. Сформулируйте определение алгебры над полем. Приведите два примера. . . . .	53
4.46. Сформулируйте определение тензора. Приведите два примера. . . . .	53
4.47. Дайте определение эллипса как геометрического места точек. Выпишите его каноническое уравнение. Что такое эксцентриситет эллипса? В каких пределах он может меняться? . . . . .	54
4.48. Дайте определение гиперболы как геометрического места точек. Выпишите её каноническое уравнение. Что такое эксцентриситет гиперболы? В каких пределах он может меняться? . . . . .	54
4.49. Дайте определение параболы как геометрического места точек. Выпишите её каноническое уравнение. . . . .	55
4.50. Дайте определение цилиндрической поверхности. . . . .	55
4.51. Дайте определение линейчатой поверхности. Приведите три примера. . . . .	55

## ДОКАЗАТЕЛЬСТВА 56

### Модуль 3 56

3.1. Докажите, что гомоморфизм инъективен тогда и только тогда, когда его ядро тривиально. . . . .	56
3.2. Сформулируйте и докажите критерий нормальности подгруппы, использующий сопряжение. . . . .	56



3.3. Сформулируйте и докажите критерий нормальности подгруппы, использующий понятие ядра гомоморфизма. . . . .	57
3.4. Докажите, что центр группы является её нормальной подгруппой. . . . .	57
3.5. Сформулируйте и докажите утверждение о том, чему изоморфна факторгруппа группы по её центру. . . . .	58
3.6. Сформулируйте и докажите теорему Кэли. . . . .	58
3.7. Докажите, что характеристика поля может быть либо простым числом, либо нулём. . . . .	59
3.8. Сформулируйте и докажите утверждение о том, каким будет простое подполе в зависимости от характеристики. . . . .	59
3.9. Сформулируйте и докажите критерий того, что кольцо вычетов по модулю $n$ является полем. . . . .	60
3.10. Докажите, что ядро гомоморфизма колец является идеалом. . . . .	60
3.11. Сформулируйте и докажите утверждение о том, когда факторкольца кольца многочленов над полем само является полем. . . . .	61
3.12. Выпишите и докажите формулу для описания изменения координат вектора при изменении базиса. . . . .	61
3.13. Выпишите формулу для преобразования матрицы билинейной формы при замене базиса и докажите её. . . . .	62
3.14. Выпишите формулу для преобразования матрицы линейного отображения при замене базиса и докажите её. . . . .	62
3.15. Сформулируйте и докажите теорему о гомоморфизме групп. . . . .	63
3.16. Что такое сумма и прямая сумма подпространств? Сформулируйте и докажите критерий того, что сумма подпространств является прямой. . . . .	63
3.17. Сформулируйте и докажите (включая лемму) теорему об инвариантности ранга матрицы квадратичной формы. . . . .	64

## **Модуль 4** **66**

4.1. Сформулируйте и докажите утверждение о связи характеристического уравнения и спектра линейного оператора. . . . .	66
4.2. Сформулируйте и докажите утверждение о том, каким свойством обладают собственные векторы линейного оператора, отвечающие различным собственным значениям. . . . .	66
4.3. Сформулируйте и докажите критерий диагональности матрицы оператора. . . . .	67

4.4. Каким свойством обладает оператор в $n$ -мерном вещественном пространстве, у характеристического многочлена которого есть $n$ различных действительных корней? Ответ обоснуйте. . . . .	67
4.5. Выпишите и докажите неравенство Коши–Буняковского. Выпишите и докажите неравенство треугольника. . . . .	68
4.6. Докажите теорему о том, что евклидово пространство можно представить в виде прямой суммы подпространства и его ортогонального дополнения. . . . .	69
4.7. Выпишите формулу для преобразования матрицы Грама при переходе к новому базису и докажите её. Что происходит с определителем матрицы Грама при применении процесса ортогонализации Грама—Шмидта? Что можно сказать про знак определителя матрицы Грама? Ответ обоснуйте. . . . .	70
4.8. Сформулируйте и докажите критерий линейной зависимости набора векторов с помощью матрицы Грама. . . . .	71
4.9. Выпишите формулу для ортогональной проекции вектора на подпространство, заданное как линейная оболочка данного линейно независимого набора векторов, и докажите её. . . . .	71
4.10. Докажите, что для любого оператора в конечномерном евклидовом пространстве существует единственный сопряженный оператор. . . . .	72
4.11. Сформулируйте и докажите свойство собственных векторов самосопряженного оператора, отвечающих разным собственным значениям. . . . .	73
4.12. Каким свойством обладают собственные значения самосопряженного оператора? Ответ обоснуйте. . . . .	73
4.13. Сформулируйте и докажите теорему о том, что ортогональный оператор переводит ортонормированный базис в ортонормированный. Верно ли обратно? Ответ обоснуйте. . . . .	74
4.14. Сформулируйте и докажите критерий ортогональности оператора, использующий его матрицу. . . . .	74
4.15. Сформулируйте теорему о существовании для самосопряженного оператора базиса из собственных векторов. Приведите доказательство в случае различных вещественных собственных значений. . . . .	75
4.16. Сформулируйте и докажите утверждение о QR-разложении. . .	76
4.17. Сформулируйте и докажите теорему о сингулярном разложении.	76

4.18. Сформулируйте и докажите теорему о приведении квадратичных форм к диагональному виду при помощи ортогональной замены координат. . . . .	77
4.19. Выпишите и докажите формулу для преобразования координат ковектора при переходе к другому базису. . . . .	78

# ОПРЕДЕЛЕНИЯ

## Модуль 1

### **1.1. Дать определение умножения матриц. Коммутативна ли эта операция? Ответ пояснить.**

Пусть даны две прямоугольных матрицы  $A$  и  $B$  размерности  $n \times m$  и  $m \times k$  соответственно. Произведением матриц  $A$  и  $B$  (обозначается как  $A \times B$  или  $AB$ ) называется такая матрица  $C$  размерности  $n \times k$ , что её элементы задаются формулой

$$c_{ij} = \sum_{r=1}^m (a_{ir} \cdot b_{rj}), \text{ где } i = \overline{1, n}; j = \overline{1, k}$$

Умножение матриц возможно тогда и только тогда, когда количество столбцов первой матрицы равно количеству строк второй. Из этого следует некоммутативность этой операции ( $\exists A \times B \not\Rightarrow \exists B \times A$ ).

### **1.2. Дать определения ступенчатого вида матрицы и канонического вида матрицы.**

Матрица  $M$  имеет ступенчатый вид, если номера первых ненулевых элементов всех строк возрастают, а все нулевые строки находятся на нижних строках матрицы.

Матрица  $M$  имеет канонический (улучшенный ступенчатый) вид, если она имеет ступенчатый вид, а также все первые ненулевые (ведущие) элементы всех строк равны единице и являются единственными ненулевыми элементами в своих столбцах.

### **1.3. Перечислить элементарные преобразования строк матрицы.**

- 1) умножение  $i$ -ой строки на число  $\lambda \neq 0$ ;
- 2) перестановка местами двух строк;
- 3) добавление к  $i$ -ой строке  $j$ -ую строки с коэффициентом  $\lambda \neq 0$ .

## 1.4. Сформулировать теорему о методе Гаусса.

Любую конечную матрицу можно элементарными преобразованиями строк привести к каноническому виду.

## 1.5. Дать определения перестановки и подстановки.

Перестановка – упорядоченный набор чисел  $1, 2 \dots n$  без повторений.

Подстановка – взаимнооднозначное отображение множества  $\{1, 2 \dots n\}$  в самого себя,  $n$  называется степенью подстановки.

## 1.6. Выписать общую формулу для вычисления определителя произвольного порядка.

Пусть  $\sigma(\varphi)$  – число инверсий подстановки  $\varphi$ .

$$\det A = \sum_{\varphi \in S_n} (-1)^{\sigma(\varphi)} a_{\varphi(1)1} \cdot \dots \cdot a_{\varphi(n)n} = \sum_{\varphi \in S_n} (-1)^{\sigma(\varphi)} \prod_{i=1}^n a_{\varphi(i)i}$$

## 1.7. Что такое алгебраическое дополнение?

Алгебраическим дополнением элемента  $a_{ij}$  матрицы  $A$  называется число  $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$ , где  $M_{ij}$  – дополнительный минор, т.е. определитель матрицы, получающейся из матрицы  $A$  путём исключения  $i$ -ой строки и  $j$ -ого столбца.

## 1.8. Выписать формулы для разложения определителя по строке и по столбцу.

По  $i$ -ой строке:

$$\det A = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij}$$

По  $j$ -ому столбцу:

$$\det A = \sum_{i=1}^n a_{ij} A_{ij}$$

## 1.9. Что такое фальшивое разложение?

Фальшивое разложение – следствие из теоремы Лапласа, заключающееся в следующем: сумма произведений всех элементов некоторой строки (столбца) матрицы  $A$  на алгебраические дополнения соответствующих элементов любой другой строки (столбца) равна нулю.

$$\sum_{i=1}^n a_{ij_1} A_{ij_2} = \sum_{j=1}^n a_{i_1 j} A_{i_2 j} = 0, \quad i_1 \neq i_2, \quad j_1 \neq j_2$$

## 1.10. Выписать формулы Крамера для квадратной матрицы произвольного порядка. Когда с их помощью можно найти решение СЛАУ?

Пусть есть вектор  $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$  квадратная матрица  $A$  размера  $n \times n$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

которые соответствуют СЛАУ

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Введём  $\Delta_i$  как определитель матрицы, получающейся из  $A$  заменой  $i$ -ого столбца на вектор  $b$ :

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i-1} & b_1 & a_{1i+1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{ni-1} & b_n & a_{ni+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Тогда неизвестную  $x_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) можно найти по формуле

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}$$

где  $\Delta = \det A$ .

Найти решение СЛАУ этим методом можно тогда и только тогда, когда  $\det A \neq 0$ .

### 1.11. Дать определение союзной матрицы.

Матрица  $C$  называется союзной относительно матрицы  $A$ , если она составлена из алгебраических дополнений соответствующих элементов транспонированной матрицы  $A^T$ :

$$C = \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{n1} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

### 1.12. Дать определение обратной матрицы. Сформулировать критерий её существования.

Матрица  $A^{-1}$  называется обратной квадратной матрице  $A$ , если  $A^{-1}A = AA^{-1} = E$  (единичная матрица). Обратная матрица для матрицы  $A$  существует тогда и только тогда, когда  $A$  – квадратная и  $\det A \neq 0$ .

### 1.13. Выписать формулу для нахождения обратной матрицы.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot C$$

где  $C$  – союзная к  $A$  матрица, то есть

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{n1} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

### 1.14. Дать определение минора.

Минором порядка  $k$  матрицы  $A$  называется определитель матрицы  $k \times k$ , состоящей из элементов, стоящих на пересечении заданных  $k$  строк и  $k$  столбцов матрицы  $A$ .

Минором  $M_{ij}$  зачастую обозначается минор, полученный исключением из исходной матрицы  $i$ -ой строки и  $j$ -ого столбца.

**1.15. Дать определение базисного минора. Какие строки называются базисными?**

Базисным называется любой ненулевой минор матрицы максимального порядка. Порядок минора = порядок матрицы, определителем которой является минор.

Строки, входящие в базисный минор называются базисными.

**1.16. Дать определение ранга матрицы.**

Рангом матрицы называется наибольший порядок ненулевого минора матрицы.

**1.17. Дать определение линейной комбинации строк. Что такое нетривиальная линейная комбинация?**

Линейной комбинацией строк  $s_1, \dots, s_k$  называется выражение  $a_1 s_1 + \dots + a_k s_k$ , где  $a_1, \dots, a_k$  – произвольные коэффициенты.

Линейная комбинация строк называется нетривиальной, если  $\exists a_i \neq 0$ .

**1.18. Дать определение линейной зависимости строк матрицы.**

Система строк матрицы называется линейно зависимой, если существует их нетривиальная линейная комбинация, равная пустой строке.

**1.19. Дать определение линейно независимых столбцов матрицы.**

Система столбцов матрицы называется линейно независимой, если не существует их нетривиальной линейной комбинации, равной пустому столбцу.

**1.20. Сформулировать критерий линейной зависимости.**

Система строк линейно зависима тогда и только тогда, когда одна из строк может быть представлена как линейная комбинация оставшихся.



### 1.21. Сформулировать теорему о базисном миноре.

Строки (столбцы) матрицы  $A$ , входящие в базисный минор, образуют линейно независимую систему. Любая строка (столбец)  $A$  выражается через линейную комбинацию строк (столбцов) базисного минора.

### 1.22. Сформулировать теорему о ранге матрицы.

Ранг матрицы равен максимальному числу линейно независимых строк (столбцов) матрицы.

### 1.23. Сформулировать критерий невырожденности квадратной матрицы.

Не знаю, что из этого критерий, а что определение, но для произвольной квадратной матрицы  $A$  размера  $n \times n$  следующие три условия эквивалентны:

- 1)  $\det A \neq 0$
- 2)  $RgA = n$
- 3) Все строки (столбцы) матрицы  $A$  линейно независимы

### 1.24. Выписать свойства решений однородных и неоднородных СЛАУ.

Однородная СЛАУ:  $Ax = 0$

Неоднородная СЛАУ:  $Ax = b$

Однородные СЛАУ:

Если столбцы  $x^1, \dots, x^k$  – решения однородной СЛАУ  $Ax = 0$ , то любая их линейная комбинация также является решением этой СЛАУ. Так, если однородная СЛАУ имеет ненулевое решение, она имеет бесконечно много решений.

Неоднородные СЛАУ:

Если  $x^0$  – решение  $Ax = b$ , то произвольный столбец  $x$  является решением этой СЛАУ тогда и только тогда, когда  $x = x^0 + y$ , где  $y$  – решение соответствующей однородной СЛАУ, то есть  $Ay = 0$ .

Если  $x^1, x^2$  – решения СЛАУ  $Ax = b$ , то  $y = x^1 - x^2$  является решением однородной СЛАУ  $Ax = 0$ .

### 1.25. Сформулировать теорему Кронекера–Капелли.

СЛАУ  $Ax = b$  совместна тогда и только тогда, когда  $RgA = Rg[Ab]$ , где  $[Ab]$  – матрица, полученная из столбцов матрицы  $A$  и столбца  $b$ .

### 1.26. Дать определение фундаментальной системы решений (ФСР) однородной СЛАУ.

ФСР однородной СЛАУ  $Ax = 0$  – множество линейно независимых решений данной СЛАУ. Всего таких решений  $n_x - RgA$ , где  $n_x$  – число переменных в СЛАУ.

### 1.27. Сформулировать критерий существования ненулевого решения однородной системы линейных уравнений с квадратной матрицей.

Однородная СЛАУ  $Ax = 0$  имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда  $\det A = 0$ , т.е. матрица вырождена.

## Модуль 2

### 2.1. Сформулируйте теорему о структуре общего решения однородной СЛАУ.

Пусть  $f_1, f_2, \dots, f_k$  ( $k = n - r$ ) – ФСР однородной СЛАУ  $Ax = 0$ . Тогда  $x = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \dots + \lambda_k f_k$  является решением СЛАУ при любых  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ . Иными словами, любое решение СЛАУ является линейной комбинацией ФСР.

### 2.2. Сформулируйте теорему о структуре общего решения неоднородной системы линейных алгебраических уравнений.

Пусть  $f_1, f_2, \dots, f_k$  ( $k = n - r$ ) – ФСР однородной СЛАУ  $Ax = 0$ , а также известно некоторое частное решение  $x_0$  неоднородной СЛАУ  $Ax = b$ . Тогда  $x = x_0 + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \dots + \lambda_k f_k$  является решением неоднородной СЛАУ  $Ax = b$  при любых  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ .

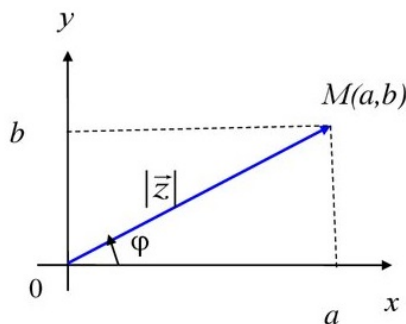
### 2.3. Что такое алгебраическая и тригонометрическая формы записи комплексного числа?

Пусть  $z$  – комплексное число.

Алгебраическая запись:  $z = a + ib$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ .

$a$  и  $b$  являются координатами точки  $z$  на плоскости комплексных чисел по действительной и мнимой осям соответственно.

Тригонометрическая запись:  $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ ,  $r, \varphi \in \mathbb{R}$ .



Здесь  $r$  – длина радиус-вектора числа  $z$  на плоскости комплексных чисел,  $\varphi$  – угол между радиус-вектором  $z$  и действительной осью.

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\cos \varphi = \frac{a}{r}, \quad \sin \varphi = \frac{b}{r}$$

## 2.4. Дайте определения модуля и аргумента комплексного числа. Что такое главное значение аргумента комплексного числа?

Модулем комплексного числа  $z$  называется  $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$  – величина, отражающая длину радиус-вектора точки  $z$  в плоскости комплексных чисел.

Аргументом комплексного числа называется угол между радиус-вектором точки  $z$  и положительным направлением действительной оси. Главным аргументом комплексного числа называется такой его аргумент который лежит в  $(-\pi, \pi]$

$$\text{Arg}(z) = \arg(z) + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad \arg(z) \in (-\pi, \pi]$$

## 2.5. Сложение, умножение комплексных чисел. Что происходит с аргументами и модулями комплексных чисел при умножении и при делении?

Операции над комплексными числами выполняются по следующим правилам:

$$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$$

$$(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1)$$

В тригонометрической форме умножение и деление выглядят так:

$$z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$$

$$z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$$

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2))$$

## 2.6. Что такое комплексное сопряжение? Как можно делить комплексные числа в алгебраической форме?

Сопряженным числом  $\bar{z}$  для комплексного числа  $z$  называется такое число, которое симметрично  $z$  относительно вещественной оси.

$$z = a + ib, \quad \bar{z} = a - ib$$

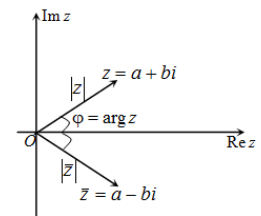


Рис. 1

Делить комплексные числа в алгебраической форме возможно путем домножения на сопряженное делителя:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{a_2^2 + b_2^2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{|z_2|^2}$$

## 2.7. Выпишите формулу Муавра.

Пусть  $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ , тогда

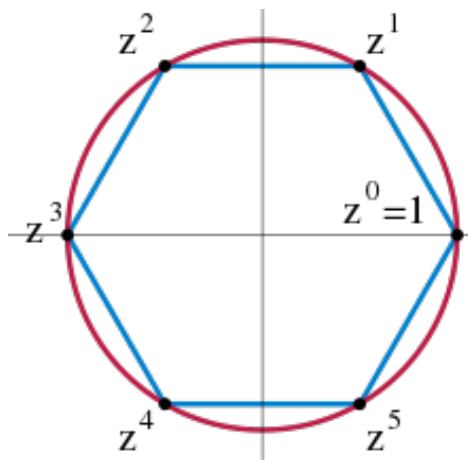
$$z^n = r^n(\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)), \quad n \in \mathbb{Z}$$

## 2.8. Как найти комплексные корни $n$ -ой степени из комплексного числа? Сделайте эскиз, на котором отметьте исходное число и все корни из него.

Пусть  $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ , тогда корнем степени  $n \in \mathbb{N}$  из  $z$  называется множество

$$\sqrt[n]{z} = \left\{ \sqrt[n]{r} \left( \cos \left( \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right) + i \sin \left( \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right) \right), \quad k = \overline{0, n-1} \right\}$$

Пример:  $\sqrt[6]{1}$



## 2.9. Сформулируйте основную теорему алгебры. Сформулируйте теорему Безу.

Основная теорема алгебры:

$$\forall f(z) = \sum_{i=0}^n a_i z^i \neq \text{const}, a_i \in \mathbb{C} \quad \exists z_0 \in \mathbb{C} : f(z_0) = 0$$

Теорема Безу:

Остаток от деления  $f(x)$  на  $(x - a)$  равен  $f(a)$ .

## 2.10. Выпишите формулу Эйлера. Выпишите выражения для синуса и косинуса через экспоненту.

Формула Эйлера:  $e^{ix} = \cos x + i \sin x$

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

## 2.11. Выпишите формулы Виета для многочлена третьей степени.

Пусть  $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ,  $x_1, x_2, x_3$  — корни многочлена  $P(x)$ .

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = \frac{c}{a}$$

$$x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a}$$

## 2.12. Какие многочлены называются неприводимыми?

Многочлен  $P(x)$  называется приводимым, если существуют многочлены  $g(x) \neq \text{const}$ ,  $h(x) \neq \text{const}$  такие, что  $P(x) = g(x) \cdot h(x)$  (это называется нетривиальное разложение) и неприводимым в противном случае.

### 2.13. Сформулируйте утверждение о разложении многочленов на неприводимые множители над полем комплексных чисел.

Любой неконстантный многочлен степени  $n$  над полем комплексных чисел можно разложить как

$$a(x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n)$$

где  $a \neq 0$ , а значения  $x_1, x_2, \dots, x_n$  могут попарно совпадать.

### 2.14. Дайте определение векторного произведения векторов в трехмерном пространстве.

Вектор  $\vec{c}$  называется векторным произведением векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  если:

- 1)  $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \varphi$ , где  $\varphi$  – угол между  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$
- 2)  $\vec{c} \perp \vec{a}, \vec{c} \perp \vec{b}$
- 3)  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  – правая тройка векторов

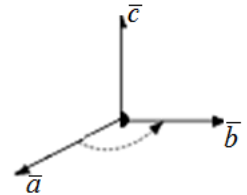


Рис. 1

### 2.15. Выпишите формулу для вычисления векторного произведения в координатах, заданных в ортонормированном базисе.

Пусть  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  задают правый ортонормированный базис, векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  раскладываются в этом базисе следующим образом:

$$\vec{a} = a_i \vec{i} + a_j \vec{j} + a_k \vec{k}$$

$$\vec{b} = b_i \vec{i} + b_j \vec{j} + b_k \vec{k}$$

Тогда

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_i & a_j & a_k \\ b_i & b_j & b_k \end{vmatrix}$$

**2.16. Дайте определение смешанного произведения векторов. Как вычислить объем тетраэдра с помощью смешанного произведения?**

Смешанным произведением векторов  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  называют число  $\langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle = (\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c})$  – скалярное произведение  $\vec{a} \times \vec{b}$  и  $\vec{c}$ . Объем тетраэдра, построенного на векторах  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  равен

$$V = \frac{1}{6} | \langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle |$$

**2.17. Выпишите формулу для вычисления смешанного произведения в координатах, заданных в ортонормированном базисе.**

Пусть  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  задают правый ортонормированный базис, векторы  $\vec{a}, \vec{b}$  и  $\vec{c}$  раскладываются в этом базисе следующим образом:

$$\vec{a} = a_i \vec{i} + a_j \vec{j} + a_k \vec{k}$$

$$\vec{b} = b_i \vec{i} + b_j \vec{j} + b_k \vec{k}$$

$$\vec{c} = c_i \vec{i} + c_j \vec{j} + c_k \vec{k}$$

Тогда

$$\langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle = \begin{vmatrix} a_i & a_j & a_k \\ b_i & b_j & b_k \\ c_i & c_j & c_k \end{vmatrix}$$

**2.18. Сформулируйте критерий компланарности трех векторов с помощью смешанного произведения.**

Векторы  $\vec{a}, \vec{b}$  и  $\vec{c}$  компланарны тогда и только тогда, когда  $\langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle = 0$ .

**2.19. Что такое уравнение поверхности и его геометрический образ?**

Уравнение  $F(x, y, z) = 0$  называют уравнением поверхности  $S$ , если этому уравнению удовлетворяют координаты каждой из точек, лежащих на  $S$ , и не удовлетворяют никакие точки, не лежащие на  $S$ . При этом  $S$  называется геометрическим образом уравнения  $F(x, y, z) = 0$ .



## 2.20. Сформулируйте теорему о том, что задает любое линейное уравнение на координаты точки в трехмерном пространстве.

Любое уравнение вида  $Ax + By + Cz + D = 0$ , где  $A^2 + B^2 + C^2 > 0$  (т.е. линейное уравнение), определяет плоскость в пространстве  $\mathbb{R}^3$ .

## 2.21. Что такое нормаль к плоскости?

Нормалью к плоскости  $\alpha$  называется такой вектор  $\vec{n}$ , что  $\vec{n} \perp \alpha$ . В частности, если  $\alpha : Ax + By + Cz + D = 0$ , то  $\vec{n} = (A, B, C)$  является вектором нормали к  $\alpha$ .

## 2.22. Выпишите формулу для расстояния от точки до плоскости.

Пусть  $P(x_0, y_0, z_0)$  – точка,  $Ax + By + Cz + D = 0$  – уравнение плоскости  $\alpha$ . Тогда

$$\rho(P, \alpha) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

## 2.23. Общие уравнения прямой. Векторное уравнение прямой. Параметрические и канонические уравнения прямой.

Общие уравнения прямой задают прямую как пересечение двух плоскостей:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

Векторное уравнение прямой:  $\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{s}t$

где  $\vec{r}(t)$  – радиус-вектор любой точки прямой

$\vec{r}_0$  – радиус-вектор определённой точки прямой

$\vec{s}$  – направляющий вектор прямой.

Параметрические уравнения прямой:

$$\begin{cases} x = x_0 + s_x \cdot t \\ y = y_0 + s_y \cdot t \\ z = z_0 + s_z \cdot t \end{cases}$$

где  $M(x_0, y_0, z_0)$  – точка прямой,  $\vec{s}(s_x, s_y, s_z)$  – направляющий вектор прямой. Каноническое уравнение прямой (*преобразованное параметрическое*):

$$\frac{x - x_0}{s_x} = \frac{y - y_0}{s_y} = \frac{z - z_0}{s_z}$$

## 2.24. Выпишите формулу для вычисления расстояния между двумя скрещивающимися прямыми.

Пусть  $L_1, L_2$  – скрещивающиеся прямые,  $\vec{s}_1, \vec{s}_2$  – их направляющие векторы,  $M_1 \in L_1, M_2 \in L_2$  – произвольные точки на прямых. Тогда

$$\rho(L_1, L_2) = \frac{< \vec{s}_1, \vec{s}_2, \vec{M_1 M_2} >}{|\vec{s}_1 \times \vec{s}_2|} \quad (= \frac{V}{S_{\text{осн}}})$$

## 2.25. Какие бинарные операции называются ассоциативными, а какие коммутативными?

Операция  $\times$  называется:

- ассоциативной, если  $\forall x, y, z \quad (x \times y) \times z = x \times (y \times z)$
- коммутативной, если  $\forall x, y \quad x \times y = y \times x$

## 2.26. Дайте определения полугруппы и моноида. Приведите примеры.

Полугруппа – группоид (*множество с заданной на нём операцией*), операция которой ассоциативна. Пример:  $(\mathbb{N}, +)$ .

Моноид – полугруппа, в которой есть нейтральный элемент.

Примеры:  $(\mathbb{N} \cup \{0\}, +)$ ,  $(\mathbb{N}, \cdot)$ .

## 2.27. Сформулируйте определение группы. Приведите пример.

Группа – множество с заданной на нём ассоциативной операцией, имеющая нейтральный элемент, причём все элементы являются обратимыми, т.е.

$$\forall g \in G \exists a^{-1} \in G : a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e \text{ (нейтральный элемент)}$$

Иначе говоря – моноид, все элементы которого обратимы.

Пример:  $GL_n$  – множество всех невырожденных матриц  $n \times n$  с операцией умножения.

## 2.28. Что такое симметрическая группа? Укажите число элементов в ней.

Симметрическая группа – множество всех подстановок длины  $n$  с операцией композиции. Обозначается  $S_n$ , число элементов  $n!$ .

## 2.29. Что такое общая линейная и специальная линейная группы?

Общая линейная группа ( $GL_n$ ) – множество всех невырожденных матриц  $n \times n$  с операцией умножения. Запись  $GL_n(\mathbb{F})$  означает, что элементы матрицы принадлежат полю (кольцу)  $\mathbb{F}$ , например  $GL_n(\mathbb{R})$ .

Специальная линейная группа – множество всех матриц  $n \times n$  с определителем, равным 1, и операцией умножения:

$$SL_n(\mathbb{F}) = \{A \in GL_n(\mathbb{F}) \mid \det A = 1\}$$

## 2.30. Сформулируйте определение абелевой группы. Приведите пример.

Абелева группа – группа, операция которой коммутативна. Пример:  $(\mathbb{Z}, +)$ .

### 2.31. Дайте определение подгруппы. Приведите пример группы и её подгруппы.

Подмножество  $H$  множества группы  $G$  с определённой на нём операцией  $G$  называется подгруппой, если она сама является группой относительно данной операции.

Подмножество  $H$  является подгруппой  $G$  тогда и только тогда, когда выполняются все три условия:

- 1)  $H$  содержит нейтральный элемент  $G$ ;
- 2)  $\forall h_1, h_2 \in H \quad h_1 \cdot h_2 \in H$ ;
- 3)  $\forall h \in H \exists h^{-1} \in H : h \cdot h^{-1} = h^{-1} \cdot h = e$ ;

Пример:  $SL_n(\mathbb{R})$  – подгруппа  $GL_n(\mathbb{R})$ .

### 2.32. Дайте определение гомоморфизма групп. Приведите пример.

Отображение  $f : G_1 \rightarrow G_2$  группы  $(G_1, \circ)$  в группу  $(G_2, \diamond)$  называется гомоморфизмом, если  $\forall a, b \in G_1 \quad f(a \circ b) = f(a) \diamond f(b)$ .

Пример:  $\ln : (\mathbb{R}^+ \setminus \{0\}, \cdot) \rightarrow (R, +)$  – гомоморфизм, так как  $\ln(ab) = \ln a + \ln b$ .

### 2.33. Что такое ядро гомоморфизма групп? Приведите пример.

Ядром гомоморфизма  $f : G_1 \rightarrow G_2$  называется множество всех элементов первой группы, которые переходят в нейтральный элемент второй:

$$\text{Ker } f = \{g \in G_1 \mid f(g) = e_2\}$$

Пример: для гомоморфизма  $\det : GL_n(\mathbb{R}) \rightarrow R^*$

$$\text{Ker}(\det) = SL_n(\mathbb{R}) = \{A \in GL_n(\mathbb{R}) \mid \det A = 1\}.$$

### 2.34. Дайте определение изоморфизма групп. Приведите пример.

Изоморфизм – биективный гомоморфизм.

Пример:  $f : (\mathbb{R}, +) \rightarrow (\mathbb{R}^+, \cdot), f(x) = e^x$ .

**2.35. Сформулируйте определение циклической группы. Приведите пример.**

$(G, \circ)$  – циклическая группа, если  $\exists g_1 \in G \forall g \in G g = g_1 \circ \dots \circ g_1$  (все элементы порождены каким-то элементом). Пример:  $(Z_n, +)$ , где  $Z_n = \{0, 1, \dots, n-1\}$  – циклическая группа ( $g_1 = 1$ ).

**2.36. Дайте определение порядка элемента.**

Порядок элемента  $g \in (G, \circ)$  – наименьшее  $p \in \mathbb{N} \mid g^p = e$ , где  $g^p = \underbrace{g \circ \dots \circ g}_p$ .

Обозначение:  $ord(g)$ .

**2.37. Сформулируйте утверждение о связи порядка элемента, порождающего циклическую группу, с порядком группы.**

Пусть  $\langle g \rangle$  – группа, порожденная элементом  $g$ , тогда  $ord(g) = |\langle g \rangle|$ .

**2.38. Сколько существует, с точностью до изоморфизма, циклических групп данного порядка?**

Для каждого натурального порядка  $n$  существует ровно одна циклическая группа, с точностью до изоморфизма.

**2.39. Что такое группа диэдра? Что такое знакопеременная группа? Укажите число элементов в них.**

Группа диэдра – группа симметрий правильного  $n$ -угольника. Обозначение:  $D_n$ ,  $|D_n| = 2n$ .

$$D_n = \{r, s \mid r^n = 1, s^2 = 1, s^{-1}rs = r^{-1}\} \text{ (} r - \text{rotation, } s - \text{symmetry)}$$

Знакопеременная группа – все чётные подстановки длины  $n$ . Обозначение:  $A_n$ .  $A_n \subset S_n$ ,  $|A_n| = \frac{n!}{2}$ .

**2.40. Сформулируйте утверждение о том, какими могут быть подгруппы группы целых чисел по сложению.**

Любая подгруппа группы целых чисел по сложению имеет вид  $G = kZ$ , где  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ . Т.е. это группа всех чисел, кратных определенному значению.

**2.41. Дайте определение левого смежного класса по некоторой подгруппе.**

Пусть  $G$  – группа,  $H \subseteq G$ ,  $g \in G$ . Левым смежным классом элемента  $g$  по подгруппе  $H$  называется множество  $gH = \{gh \mid h \in H\}$ .

**2.42. Что такое индекс подгруппы?**

Индексом подгруппы  $H \subseteq G$  называется число различных левых смежных классов группы  $G$  по подгруппе  $H$ . Обозначение:  $[G : H]$ .

**2.43. Сформулируйте теорему Лагранжа.**

Пусть  $G$  – конечная группа,  $H \subseteq G$ . Тогда  $|G| = |H|[G : H]$ , где  $[G : H]$  – индекс подгруппы, т.е. число левых смежных классов по  $H$ .

**2.44. Сформулируйте две леммы, которые нужны для доказательства теоремы Лагранжа.**

Лемма 1:

$$\forall g_1, g_2 \in G (g_1H = g_2H) \vee (g_1H \cap g_2H) = \emptyset$$

Лемма 2:

$$\forall g \in G \forall H \subseteq G |gH| = |H|$$

## Модуль 3

### 3.1. Сформулируйте критерий нормальности подгруппы, использующий сопряжение.

Пусть  $H \subseteq G$  – подгруппа в группе  $G$ . Тогда если  $gHg^{-1} = \{ghg^{-1} \mid h \in H\}$  3 условия эквивалентны:

1.  $H$  нормальна
2.  $\forall g \in G \ gHg^{-1} \subseteq H$
3.  $\forall g \in G \ gHg^{-1} = H$

### 3.2. Дайте определение факторгруппы.

Факторгруппа – множество смежных классов  $G$  по нормальной подгруппе  $H \triangleleft G$  с определённой на ней операцией умножения:  $(g_1H) \cdot (g_2H) = g_1g_2H$ .

Обозначение:  $G/H$  – факторгруппа  $G$  по нормальной подгруппе  $H$ .

### 3.3. Что такое естественный гомоморфизм?

Естественный гомоморфизм для группы  $G$  – отображение  $f : G \rightarrow G/H$  такое, что  $f(g) = gH \ \forall g \in G$ .

### 3.4. Сформулируйте критерий нормальности подгруппы, использующий понятие ядра гомоморфизма.

$H \triangleleft G \Leftrightarrow \exists f$  – гомоморфизм  $G \rightarrow G'$  для нек. группы  $G'$ , причём  $\text{Ker } f = H$ .

### 3.5. Сформулируйте теорему о гомоморфизме групп. Приведите пример.

Пусть  $f : G_1 \rightarrow G_2$  – гомоморфизм групп,

$\text{Im } f = \{g_2 \in G_2 \mid \exists g_1 \in G_1 : f(g_1) = g_2\}$  (образ группы  $G$  по  $f$ ),

$\text{Ker } f = \{g_1 \in G_1 \mid f(g_1) = e_2\}$  (ядро гомоморфизма  $f$ ).

Тогда  $G_1/\text{Ker } f \cong \text{Im } f$ .

Пример:

Пусть  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_n$  такое, что  $\forall z \in \mathbb{Z} \ f(z) = z \% n$  (остаток от деления на  $n$ ).

Очевидно,  $\text{Ker } f = n\mathbb{Z}$  – числа, кратные  $n$ . Тогда  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_n$ .

### 3.6. Что такое прямое произведение групп?

Прямое произведение групп – группа из всех пар элементов групп с операцией поэлементного умножения.

$$(G, +) \times (H, \circ) = \{(g, h) \mid g \in G, h \in H\}, \quad (g_1, h_1) \times (g_2, h_2) = (g_1 + g_2, h_1 \circ h_2)$$

### 3.7. Сформулируйте определение автоморфизма и внутреннего автоморфизма.

Аutomорфизм – изоморфное отображение группы в себя. Внутренний автоморфизм – отображение  $I_a : g \mapsto aga^{-1}$ , где  $a, g \in G$ .

### 3.8. Что такое центр группы? Приведите пример.

Центр группы  $G$  – подгруппа коммутирующих элементов, т.е.

$$Z(G) = \{a \in G \mid ab = ba \ \forall b \in G\}.$$

Для абелевых групп центр группы совпадает с самой группой. Например, классы вычетов:  $Z(\mathbb{Z}_n) = \mathbb{Z}_n$ .

### 3.9. Чему изоморфна факторгруппа группы по её центру?

$$G/Z(G) \cong Inn(G)$$

$Inn$  – подгруппа всех внутренних автоморфизмов:  $Inn = \{g \mapsto aga^{-1} \mid a, g \in G\}$ .

### 3.10. Сформулируйте теорему Кэли.

Любая конечная группа порядка  $n$  изоморфна некоторой подгруппе группы перестановок  $S_n$ .

### 3.11. Дайте определение кольца.

Кольцо – множество  $K \neq \emptyset$ , на котором заданы 2 бинарные операции  $+$  и  $\cdot$  такие, что

1.  $(K, +)$  – абелева группа;



2.  $(K, \cdot)$  – полугруппа;

3. Умножение дистрибутивно относительно сложения:  $\forall a, b, c \in K$

$$\begin{cases} a(b + c) = ab + ac \\ (a + b)c = ac + bc \end{cases}$$

Обозначение:  $(K, +, \cdot)$ .

Для профилактики:

Группоид – замкнутость относительно операции.

Полугруппа – ассоциативность.

Моноид – нейтральный элемент.

Группа – обратные элементы.

### 3.12. Что такое коммутативное кольцо? Приведите примеры коммутативного и некоммутативного колец.

Коммутативное кольцо – кольцо с коммутативным умножением:  $\forall a, b \in K \quad ab = ba$

Примеры:

Коммутативное –  $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ .

Некоммутативное –  $(M_n(\mathbb{R}), \times)$  – полное матричное кольцо  $n \times n$  над  $\mathbb{R}$ .

### 3.13. Дайте определение делителей нуля.

Если  $\exists a, b \in K : (a \neq 0 \neq b) \wedge (a \cdot b = 0)$ , то  $a$  – левый делитель нуля,  $b$  – правый делитель нуля.

### 3.14. Дайте определение целостного кольца. Приведите пример.

Целостное кольцо – коммутативное кольцо без делителей нуля и с единицей (не равной нулю). Целостное кольцо  $\equiv$  область целостности.

### 3.15. Сформулируйте критерий целостности для нетривиального коммутативного кольца с единицей.

Нетривиальное коммутативное кольцо  $K$  является целостным тогда и только тогда, когда в нем выполняется закон сокращения, т.е.  $\forall a, b, c \in K$

$$\begin{cases} (ab = ac) \wedge (a \neq 0) \Rightarrow b = c \\ (ac = bc) \wedge (c \neq 0) \Rightarrow a = b \end{cases}$$

### 3.16. Какие элементы кольца называются обратимыми?

Элемент  $a$  кольца  $K$  называется обратимым, если  $\exists a^{-1} \in K : a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$ .

### 3.17. Дайте определение поля. Приведите три примера.

Поле – коммутативное кольцо с единицей (не равной нулю), в котором каждый элемент  $a \neq 0$  обратим.

Примеры:  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$ ,  $\mathbb{Q}$  с операциями  $(+, \cdot)$ .

### 3.18. Дайте определение подполя. Приведите пример пары: поле и его подполе.

Подполе – подмножество поля, которое само является полем относительно операций поля.

Пример:  $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$  – поле рациональных чисел является подполем поля действительных чисел.

### 3.19. Дайте определение характеристики поля. Привести примеры: поля конечной положительной характеристики и поля нулевой характеристики.

Характеристикой поле  $P$  (обозначение:  $\text{char}P$ ) называется наименьшее  $p \in \mathbb{N}$  такое, что  $\underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_p = 0$ . Если такого  $p$  не существует, то  $\text{char}P = 0$ .

Примеры:

- Если  $p$  – простое, то  $\text{char}\mathbb{Z}_p = p$ ;
- $\text{char}\mathbb{R} = 0$ ;

### 3.20. Сформулируйте утверждение о том, каким будет простое подполе в зависимости от характеристики.

Пусть  $P$  – поле,  $P_0$  – его простое подполе. Тогда

- 1)  $\text{char} P = p > 0 \Rightarrow P_0 \cong \mathbb{Z}_p$ ;
- 2)  $\text{char} P = 0 \Rightarrow P_0 \cong \mathbb{Q}$ ;

### 3.21. Дайте определение идеала. Что такое главный идеал?

Подмножество  $I$  кольца  $K$  называется идеалом, если

1.  $(I, +) \subseteq (K, +)$ .
2.  $\forall a \in I \forall k \in K \quad ak \in I \wedge ka \in I$ .

Идеал называется главным, если  $\exists a \in K : I = aK = \langle a \rangle$ .

### 3.22. Сформулируйте определение гомоморфизма колец.

Отображение  $f : (K_1, +, \cdot) \rightarrow (K_2, \oplus, \odot)$  называется гомоморфизмом колец  $K_1, K_2$ , если

1.  $\forall a, b \in K_1 \quad f(a + b) = f(a) \oplus f(b)$
2.  $\forall a, b \in K_1 \quad f(a \cdot b) = f(a) \odot f(b)$

### 3.23. Сформулируйте теорему о гомоморфизме колец. Приведите пример.

Пусть  $f : K_1 \rightarrow K_2$  – гомоморфизм колец,  $\text{Im} f$  – гомоморфный образ  $K_2$  по  $f$ . Тогда

$$K_1 / \text{Ker} f \cong \text{Im} f$$

Пример:

Пусть  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_n$  такое, что  $\forall z \in \mathbb{Z} \quad f(z) = z \% n$  (остаток от деления на  $n$ ). Очевидно,  $\text{Ker} f = n\mathbb{Z}$  – числа, кратные  $n$ . Тогда  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_n$ .

### 3.24. Сформулируйте критерий того, что кольцо вычетов по модулю $n$ является полем.

Кольцо вычетов  $\mathbb{Z}_n$  является полем  $\Leftrightarrow n$  – простое.

**3.25. Сформулируйте теорему о том, когда факторкольцо кольца многочленов над полем само является полем.**

Факторкольцо  $P[x]/\langle f(x) \rangle$  является полем  $\Leftrightarrow f(x)$  неприводимо над полем  $P$ .

**3.26. Дайте определение алгебраического элемента над полем.**

Элемент поля  $\alpha \in P_2$  называется алгебраическим над полем  $P_1 \subseteq P_2$ , если  $\exists f(x) \in P_1[x] : (f(x) \neq 0) \wedge (f(\alpha) = 0)$ .

**3.27. Сформулируйте утверждение о том, что любое конечное поле может быть реализовано как факторкольцо кольца многочленов по некоторому идеалу.**

Любое конечное поле  $\mathbb{F}_q$  (где  $q = p^n$ ,  $p$  – простое) можно реализовать в виде  $\mathbb{Z}_p[x]/\langle h(x) \rangle$ , где  $h(x)$  – неприводимый многочлен степени  $n$  над  $\mathbb{Z}_p$ .

**3.28. Сформулируйте утверждение о том, сколько элементов может быть в конечном поле.**

Число элементов в конечном поле всегда  $p^n$ , где  $p$  – простое,  $n \in \mathbb{N}$ .

**3.29. Дайте определение линейного (векторного) пространства.**

Пусть  $F$  – поле,  $V$  – произвольное множество, на котором корректно заданы 2 операции: сложение и умножение на скаляр (элемент поля  $\mathbb{F}$ ). Иными словами,  $\forall x, y \in V \quad \forall \alpha \in \mathbb{F}$

$$\begin{cases} \exists z = x + y, z \in V \\ \exists w = \alpha x, w \in V \end{cases}$$

Множество  $V$  называют линейным (векторным) пространством, если выполнены следующие 8 условий:

1.  $\forall x, y, z \in V \quad x + (y + z) = (x + y) + z$  – ассоциативность сложения;
2.  $\exists 0 \in V \quad \forall x \in V : x + 0 = 0 + x = x$  – нейтральный эл-т по сложению;

3.  $\forall x \in V \exists (-x) \in V : x + (-x) = (-x) + x = 0$  – обратный эл-т по сложению;  
 4.  $\forall x, y \in V \quad x + y = y + x$ ;

1-4 свойства – абелева группа по сложению

5.  $\exists 1 \in \mathbb{F} : \forall x \in V \quad x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$  – нейтральный эл-т по умножению;  
 6.  $\forall x \in V \forall \alpha, \beta \in \mathbb{F} \quad (\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$  – ассоциативность умножения на число;  
 7.  $\forall x, y \in V \forall \alpha, \beta \in \mathbb{F} \quad (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$  – дистрибутивность 1;  
 8.  $\forall x, y \in V \forall \alpha, \beta \in \mathbb{F} \quad \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$  – дистрибутивность 2;

### 3.30. Дайте определение базиса линейного (векторного) пространства.

Базисом линейного пространства  $V$  называется упорядоченный набор векторов  $b_1, \dots, b_n \in V$  такой, что:

- 1)  $b_1, \dots, b_n$  – линейно независимы;
- 2) любой вектор из  $V$  представим в виде линейной комбинации  $b_1, \dots, b_n$ :  
 $\forall x \in V \quad x = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n, \lambda_i \in \mathbb{F}$ , причём единственным образом;

### 3.31. Что такое размерность пространства?

Размерность пространства  $V$  – максимальное количество линейно независимых векторов в нём. Обозначение:  $\dim V$ .

### 3.32. Дайте определение матрицы перехода от старого базиса линейного пространства к новому.

Пусть в линейном пространстве есть 2 базиса  $A = \{a_1, \dots, a_n\}$  и  $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ . Разложим векторы  $B$  по базису  $A$ :

$$\begin{cases} b_1 = t_{11}a_1 + \dots + t_{n1}a_n \\ \dots \\ b_n = t_{1n}a_1 + \dots + t_{nn}a_n \end{cases}$$

где  $t_{ij} \in \mathbb{F}$ . Тогда матрицей перехода от базиса  $A$  к базису  $B$  называется матрица

$$T_{a \rightarrow b} = \begin{pmatrix} t_{11} & \dots & t_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ t_{n1} & \dots & t_{nn} \end{pmatrix}$$

Используется так:  $x^b = T_{A \rightarrow B}^{-1} x^a$ .

### 3.33. Выпишите формулу для описания изменения координат вектора при изменении базиса.

Пусть  $x \in V$ ,  $A$  и  $B$  – базисы в  $V$ ,  $x^a = (x_1^a, \dots, x_n^a)^T$ ,  $x^b = (x_1^b, \dots, x_n^b)^T$  – столбцы координат вектора  $x$  в базисах  $A$  и  $B$  соответственно. Тогда  $x^b = T_{A \rightarrow B}^{-1} x^a$ .

### 3.34. Дайте определение подпространства в линейном пространстве.

Подмножество  $L$  линейного пространства  $V$  называется подпространством, если оно само является пространством относительно операций в  $V$ .

### 3.35. Дайте определения линейной оболочки конечного набора векторов и ранга системы векторов.

Линейной оболочкой системы векторов  $a_1, \dots, a_k$  называется множество  $L(a_1, \dots, a_k) = \{\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k a_k \mid \lambda_i \in \mathbb{F}\}$  – множество всех линейных комбинаций векторов  $a_1, \dots, a_k$ .

Рангом системы векторов  $a_1, \dots, a_k$  в линейном пространстве называется размерность линейной оболочки системы:  $Rg(a_1, \dots, a_k) = \dim L(a_1, \dots, a_k)$ .

### 3.36. Дайте определения суммы и прямой суммы подпространств.

Суммой подпространств  $H_1, H_2 \subseteq V$  называется множество  $H_1 + H_2 = \{h_1 + h_2 \mid h_1 \in H_1, h_2 \in H_2\}$ .  $H_1 + H_2$  называется прямой суммой подпространств и обозначается как  $H_1 \oplus H_2$ , если  $H_1 \cap H_2 = \{0\}$ , т.е. пересечение тривиально.

### 3.37. Сформулируйте утверждение о связи размерности суммы и пересечения подпространств.

Пусть  $H_1, H_2 \subseteq V$ , тогда  $\dim(H_1 + H_2) = \dim H_1 + \dim H_2 - \dim(H_1 \cap H_2)$ .

### 3.38. Дайте определение билинейной формы.

Пусть  $V$  – линейное пространство над  $\mathbb{R}$ . Билинейной формой называется функция  $\varphi : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ , которая паре векторов ставит в соответствие число, при этом выполняются следующие условия:

$\forall x, y, z \in V \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

- 1)  $\varphi(\alpha x + \beta y, z) = \alpha \varphi(x, z) + \beta \varphi(y, z);$
- 2)  $\varphi(x, \alpha y + \beta z) = \alpha \varphi(x, y) + \beta \varphi(x, z);$

### 3.39. Дайте определение квадратичной формы.

Квадратичная форма – однородный многочлен второй степени от  $n$  переменных:

$$Q(x) = \sum_{i=1}^n a_{ii}x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij}x_i x_j; \quad a_{ij} \in \mathbb{R}$$

### 3.40. Дайте определения положительной и отрицательной определенности квадратичной формы.

Квадратичную форму называют:

- положительно определенной, если  $\forall x \neq 0 \quad Q(x) > 0$
- отрицательно определенной, если  $\forall x \neq 0 \quad Q(x) < 0$

### 3.41. Какую квадратичную форму называют знакопеременной?

Квадратичную форму  $Q(x)$  называют знакопеременной, если  $\exists x, y \in V : Q(x) < 0 < Q(y)$ .

### 3.42. Дайте определения канонического и нормального вида квадратичной формы.

Квадратичной формой канонического вида называют кв. форму вида  $Q(x) = a_1x_1^2 + \dots + a_nx_n^2$ ,  $a_i \in \mathbb{R}$ , т.е. не имеющую попарных произведений элементов. Если при этом  $\forall i \in [1, n] \quad a_i \in \{-1, 0, 1\}$ , то это нормальный вид квадратичной формы.

### 3.43. Как меняется матрица билинейной формы при замене базиса? Как меняется матрица квадратичной формы при замене базиса?

Пусть  $T_{A \rightarrow B}$  – матрица перехода от базиса  $A$  в базис  $B$ . Пусть  $M_A$  – матрица билинейной формы в базисе  $A$ ,  $M_B$  – матрица билинейной формы в базисе  $B$ . Тогда

$$M_B = T_{A \rightarrow B}^T M_A T_{A \rightarrow B}$$

Матрица квадратичной формы меняется точно также.

### 3.44. Сформулируйте критерий Сильвестра и его следствие.

Квадратичная форма от  $n$  переменных  $Q(x)$  положительно определена тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} \Delta_1 > 0 \\ \Delta_2 > 0 \\ \dots \\ \Delta_n > 0 \end{cases}$$

где  $\Delta_i$  –  $i$ -й главный угловой минор матрицы  $Q(x)$ , т.е. если  $Q(x) = x^T A x$ ,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

то

$$\begin{cases} \Delta_1 = a_{11} \\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \\ \dots \\ \Delta_n = \det A \end{cases}$$

Следствие:

$Q(x)$  отрицательно определена тогда и только тогда, когда знаки главных угловых чередуются начиная с минуса:  $\Delta_1 < 0$ ,  $\Delta_2 > 0$ , ...,  $(-1)^n \Delta_n > 0$ .



### 3.45. Сформулируйте закон инерции квадратичных форм. Что такое индексы инерции?

Для любых двух канонических видов

$$Q_1(y_1, \dots, y_m) = \lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_m y_m^2, \lambda_i \neq 0$$

$$Q_2(z_1, \dots, z_k) = \mu_1 z_1^2 + \dots + \mu_m z_k^2, \mu_i \neq 0$$

одной и той же квадратичной формы

- 1)  $m = k = \text{Rg}A$  – рангу матрицы квадратичной формы.
- 2) кол-во положительных  $\lambda_i$  = кол-во положительных  $\mu_i$  =  $i_+$  – положительный индекс инерции.
- 3) кол-во отрицательных  $\lambda_i$  = кол-во отрицательных  $\mu_i$  =  $i_-$  – отрицательный индекс инерции.

### 3.46. Дайте определение линейного отображения. Приведите пример.

Отображение  $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$ , где  $V_1, V_2$  – линейные пространства над одним полем  $\mathbb{F}$ , называется линейным, если

- 1)  $\forall u, v \in V_1 \quad \varphi(u + v) = \varphi(u) + \varphi(v)$
- 2)  $\forall u \in V_1 \quad \forall \lambda \in \mathbb{F} \quad \varphi(\lambda u) = \lambda \varphi(u)$

Пример:

В линейном пространстве матриц  $n \times m$  существует линейное отображение  $\varphi : X \rightarrow AX$  т.е. умножение слева на фиксированную матрицу  $A$  размера  $l \times n$ . Результатом является элемент пространства матриц  $l \times m$ .

### 3.47. Дайте определение матрицы линейного отображения.

Матрица линейного отображения  $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$  – это матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

где по столбцам стоят координаты образов векторов базиса  $V_1$  в базисе  $V_2$ .

**3.48. Выпишите формулу для преобразования матрицы линейного отображения при замене базиса. Как выглядит формула в случае линейного оператора?**

Пусть  $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$  – линейное отображение. Пусть  $A_{EF}$  – матрица линейного отображения в паре базисов  $E$  пространства  $V_1$  и  $F$  пространства  $V_2$ . Пусть  $T_1$  – матрица перехода от  $E$  к  $E'$ ,  $T_2$  – матрица перехода от  $F$  к  $F'$ . Тогда

$$A_{E'F'} = T_2^{-1} A_{EF} T_1$$

Для линейных операторов:

$$A_{E'} = T^{-1} A_E T$$

## Модуль 4

### 4.1. Сформулируйте утверждение о связи размерностей ядра и образа линейного отображения.

Пусть  $A : X \rightarrow Y$  – линейное отображение.

Ядром  $A$  называется множество  $\text{Ker} A = \{x \in X \mid Ax = 0\}$ .

Образом  $A$  называется множество  $\text{Im} A = \{y \in Y \mid y = Ax\}$ .

Тогда  $\dim \text{Ker} A + \dim \text{Im} A = \dim X = n$

### 4.2. Дайте определения собственного вектора и собственного значения линейного оператора.

Собственным вектором линейного оператора  $A : V \rightarrow V$  называется такой вектор  $v \in V$ ,  $v \neq 0$ , что  $\exists \lambda \in \mathbb{F} : (A - \lambda E)v = 0$ . Число  $\lambda$  называется собственным значением, соответствующим данному собственному вектору  $v$ .

### 4.3. Дайте определения характеристического уравнения и характеристического многочлена квадратной матрицы.

Характеристическим многочленом квадратной матрицы  $A$  называется многочлен  $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E)$ .

Характеристическим уравнением квадратной матрицы  $A$  называется многочлен  $\chi_A(\lambda) = 0$ .

### 4.4. Сформулируйте утверждение о связи характеристического уравнения и спектра линейного оператора.

Спектр линейного оператора – множество его собственных значений.

Скаляр  $\lambda_0 \in \mathbb{F}$  является собственным значением линейного оператора  $A$  (т.е. принадлежит его спектру) тогда и только тогда, когда  $\chi_A(\lambda_0) = 0$ .

### 4.5. Дайте определение собственного подпространства.

Собственным подпространством линейного оператора  $A$  относительно собственного значения  $\lambda$  называется множество  $\{v \in V \mid (A - \lambda)v = 0\}$ .

#### **4.6. Дайте определения алгебраической и геометрической кратности собственного значения. Какое неравенство их связывает?**

Алгебраическая кратность собственного значения  $\lambda_0$  есть кратность  $\lambda_0$  как корня характеристического уравнения (т.е. в какой степени входит  $(\lambda - \lambda_0)$  в характеристический многочлен).

Геометрическая кратность собственного значения  $\lambda_0$  – размерность собственного подпространства относительно  $\lambda_0$ . Иначе говоря,  $\dim(Ker(A - \lambda E))$ , т.е. число элементов ФСР в соответствующей СЛАУ.

Геометрическая кратность  $\lambda_0 \leq$  алгебраическая кратность  $\lambda_0$ .

#### **4.7. Каким свойством обладают собственные векторы линейного оператора, отвечающие различным собственным значениям?**

Собственные векторы, отвечающие различным собственным значениям, линейно независимы.

#### **4.8. Сформулируйте критерий диагональности матрицы оператора.**

Матрица линейного оператора диагональна тогда и только тогда, когда все векторы базиса, в котором представлена эта матрица, являются её собственными векторами.

#### **4.9. Сформулируйте критерий диагонализированности матрицы оператора с использованием понятия геометрической кратности.**

Матрица линейного оператора диагонализирована тогда и только тогда, когда для всех собственных значений линейного оператора верно, что алгебраическая и геометрическая кратности равны.

**4.10. Дайте определение жордановой клетки. Сформулируйте теорему о жордановой нормальной форме матрицы оператора.**

Жорданова клетка  $n \times n$  есть матрица  $n \times n$  вида

$$J_n(\lambda_i) = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}$$

т.е. на главной диагонали собственное значение  $\lambda_i$ , над диагональю – единицы, остальное – нули.

Жорданова нормальная форма – блочная матрица с жордановыми клетками на главной диагонали.

Теорема о жордановой нормальной форме:  $\forall A \in M_n(\mathbb{F})$ , где  $\mathbb{F}$  – алгебраически замкнутое поле (например  $\mathbb{C}$ ) существует невырожденная матрица  $C \in M_n(\mathbb{F})$  такая, что  $C^{-1}AC = J$ , где  $J$  – жорданова нормальная форма.

**4.11. Выпишите формулу для количества жордановых клеток заданного размера.**

Количество жордановых клеток с  $\lambda_i$  на диагонали размера  $k \times k$  вычисляется по следующей формуле:

$$h_k(\lambda_i) = \rho_{k+1} - 2\rho_k + \rho_{k-1}$$

где  $\rho_j = \text{Rg}(A - \lambda_i E)^j$ ,  $\rho_0 = n$ .

**4.12. Сформулируйте теорему Гамильтона-Кэли.**

Если  $A$  – квадратная матрица и  $\mathcal{X}(\lambda)$  – её характеристический многочлен, то  $\mathcal{X}(A) = 0$ .

**4.13. Дайте определение корневого подпространства.**

Корневой вектор для собственного значения  $\lambda$  есть такой ненулевой вектор  $x$ , что для некоторого  $m \in \mathbb{N}$   $(A - \lambda \cdot I)^m x = 0$ .

Корневое подпространство – множество всех корневых векторов, соответствующих определенному собственному числу.

#### 4.14. Дайте определение минимального многочлена линейного оператора.

Многочлен  $\mu(x)$  называется минимальным для линейного оператора с матрицей  $A$ , если

1.  $\mu(A) = 0$ .
2.  $\forall f : f(A) = 0 \Rightarrow \deg f \geq \deg \mu$ .
3. Коэффициент при старшем члене – единица.

#### 4.15. Дайте определение инвариантного подпространства.

Подпространство  $L$  векторного пространства  $V$  называют инвариантным относительно оператора  $\varphi : V \rightarrow V$ , если  $\forall x \in L \varphi(x) \in L$ , иначе говоря,  $\varphi(L) \subseteq L$ .

#### 4.16. Дайте определение евклидова пространства.

Евклидово пространство есть линейное пространство  $V$  с определенной на нем билинейной формой  $g(x, y)$ , называемой скалярным произведением. Скалярное произведение обладает свойствами билинейной формы (напоминаю)

1.  $\forall x, y, z \in V \ g(x + y, z) = g(x, z) + g(y, z), \ g(x, y + z) = g(x, y) + g(x, z)$ .
2.  $\forall x, y \in V \ \forall \lambda \in \mathbb{F} \ g(\lambda x, y) = \lambda g(x, y) = g(x, \lambda y)$ .

а также дополнительными свойствами

3.  $\forall x, y \in V \ g(x, y) = g(y, x)$  – симметричность.
4.  $\forall x \in V \ g(x, x) \geq 0$ , причём  $g(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ .

#### 4.17. Выпишите неравенства Коши–Буняковского и треугольника.

Пусть  $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ .

Неравенство Коши-Буняковского:

$$\forall x, y \in \mathcal{E} \quad |(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

Неравенство треугольника:

$$\forall x, y \in \mathcal{E} \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

Здесь  $\mathcal{E}$  – евклидово пространство.

#### 4.18. Дайте определения ортогонального и ортонормированного базисов.

Векторы  $v_1, v_2$  ортогональны, если  $(v_1, v_2) = 0$ .

Базис называют ортогональным, если все его векторы попарно ортогональны.

Базис называют ортонормированным, если все его векторы попарно ортогональны, а также каждый вектор имеет норму 1. Иначе говоря,

$$(e_i, e_j) = \delta_{ij} \text{ (символ Кронекера)} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

#### 4.19. Дайте определение матрицы Грама.

Матрица Грама системы векторов  $(e_1, \dots, e_n)$  называется квадратная матрица, где на позиции  $i, j$  стоит скалярное произведение  $(e_i, e_j)$ :

$$\Gamma = \begin{pmatrix} (e_1, e_1) & (e_1, e_2) & \dots & (e_1, e_n) \\ (e_2, e_1) & (e_2, e_2) & \dots & (e_2, e_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (e_n, e_1) & (e_n, e_2) & \dots & (e_n, e_n) \end{pmatrix}$$

#### 4.20. Выпишите формулу для преобразования матрицы Грама при переходе к новому базису.

Матрицы Грама двух базисов  $e$  и  $e'$  связаны отношением  $\Gamma' = U^T \Gamma U$ , где  $U$  – матрица перехода от  $e$  к  $e'$ .

#### 4.21. Как меняется определитель матрицы Грама (грамиан) при применении процесса ортогонализации Грама–Шмидта?

Грамиан не меняется при применении процесса ортогонализации Грама–Шмидта.

#### 4.22. Сформулируйте критерий линейной зависимости с помощью матрицы Грама.

Система векторов  $e_1, \dots, e_n$  линейно зависима тогда и только тогда, когда определитель матрицы Грама (грамиан) этой системы равен нулю.

#### 4.23. Дайте определение ортогонального дополнения.

Пусть  $H \subseteq V$ . Множество  $H^\perp = \{x \in V \mid \forall y \in H (x, y) = 0\}$  называется ортогональным дополнением подпространства  $H$ .

#### 4.24. Дайте определения ортогональной проекции вектора на подпространство и ортогональной составляющей.

Пусть  $L$  – линейное подпространство евклидова пространства  $\mathcal{E}$ ,  $a$  – произвольный вектор пространства  $\mathcal{E}$ . Если  $a = b + c$ , причём  $b \in L, c \in L^\perp$ , то  $b$  называется ортогональной проекцией вектора  $a$  на подпространство  $L$  ( $proj_L a$ ), а  $c$  – ортогональной составляющей при (ортогональном) проектировании вектора  $a$  на подпространство  $L$  ( $ort_L a$ ).

#### 4.25. Выпишите формулу для ортогональной проекции вектора на подпространство, заданное как линейная оболочка данного линейно независимого набора векторов.

Пусть  $L = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$  – линейная оболочка. Тогда  $proj_L x = A(A^T A)^{-1} A^T x$ , где  $A$  – матрица, составленная из столбцов  $a_1, \dots, a_n$ .

(прим.) Если долго смотреть на эту формулу, можно увидеть

$$proj_e x = \frac{(e, x)}{(e, e)} e$$



**4.26. Выпишите формулу для вычисления расстояния с помощью определителей матриц Грама.**

Пусть  $S \subset \mathcal{E}$  – подпространство,  $x \in \mathcal{E}$ ,  $(e_1, \dots, e_n)$  – базис  $S$ . Тогда:

$$(p(x, S))^2 = \langle x, S \rangle = \frac{\Gamma(e_1, e_2, \dots, e_n, x)}{\Gamma(e_1, e_2, \dots, e_n)}$$

**4.27. Дайте определение сопряженного оператора в евклидовом пространстве.**

Линейный оператор  $\mathcal{A}^*$  называется сопряженным к линейному оператору  $\mathcal{A}$ , если  $\forall x, y \in \mathcal{E} \quad (\mathcal{A}x, y) = (x, \mathcal{A}^*y)$ .

**4.28. Дайте определение самосопряженного (симметрического) оператора.**

Линейный оператор  $\mathcal{A}$  называется самосопряженным (симметрическим), если  $\forall x, y \in \mathcal{E}$  верно, что  $(\mathcal{A}x, y) = (x, \mathcal{A}y)$ , т.е.  $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}$ .

**4.29. Как найти матрицу сопряженного оператора в произвольном базисе?**

Пусть  $\Gamma$  – матрица Грама в необходимом нам базисе,  $\mathcal{A}$  – матрица линейного оператора. Тогда матрица сопряженного линейного оператора выражается как:

$$\mathcal{A}^* = \Gamma^{-1} \mathcal{A}^T \Gamma$$

**4.30. Каким свойством обладают собственные значения самосопряженного оператора?**

Все собственные значения самосопряженного оператора вещественны.

**4.31. Что можно сказать про собственные векторы самосопряженного оператора, отвечающие разным собственным значениям?**

Собственные векторы самосопряженного оператора, отвечающие разным собственным значениям, ортогональны.

**4.32. Сформулируйте определение ортогональной матрицы.**

Квадратная матрица  $O$  называется ортогональной, если  $O^T O = O O^T = E$ .

**4.33. Сформулируйте определение ортогонального оператора.**

Линейный оператор  $A : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  называется ортогональным, если

$$\forall x, y \in \mathcal{E} \quad (Ax, Ay) = (x, y)$$

**4.34. Сформулируйте критерий ортогональности оператора, использующий его матрицу.**

Линейный оператор  $A$  ортогонален тогда и только тогда, когда его матрица ортогональна в ОНБ (ортонормированном базисе).

#### 4.35. Каков канонический вид ортогонального оператора? Сформулируйте теорему Эйлера.

Для любого ортогонального оператора существует ОНБ, в котором матрица оператора имеет следующий блочно-диагональный вид:

$$A' = \begin{pmatrix} A_{\varphi_1} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & A_{\varphi_k} & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \\ & & & & & & -1 \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & -1 \end{pmatrix}, \text{ где } A_{\varphi_i} = \begin{pmatrix} \cos \varphi_i & -\sin \varphi_i \\ \sin \varphi_i & \cos \varphi_i \end{pmatrix}$$

Теорема Эйлера:

Любое ортогональное преобразование в  $\mathbb{R}^3$  имеет вид

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$$

в некотором ОНБ (т.е. это поворот + возможно, отражение).

#### 4.36. Сформулируйте теорему о существовании для самосопряженного оператора базиса из собственных векторов.

Для всякого самосопряженного оператора  $A$  существует ОНБ из собственных векторов, в котором матрица оператора имеет диагональный вид (на диагонали стоят собственные значения, соответствующие собственным векторам).

#### 4.37. Сформулируйте теорему о приведении квадратичной формы к диагональному виду при помощи ортогональной замены координат.

Любую квадратичную форму можно привести к каноническому (диагональному) виду ортогональными преобразованиями.

#### 4.38. Сформулируйте утверждение о QR-разложении.

Пусть  $A \in M_n(\mathbb{R})$  и столбцы  $A_1, \dots, A_n$  – линейно независимы. Тогда существуют матрицы  $Q, R : A = QR$ , где  $Q$  – ортогональная,  $R$  – верхнетреугольная с положительными значениями на главной диагонали.

#### 4.39. Сформулируйте теорему о сингулярном разложении.

Для любой матрицы  $A \in M_{mn}(\mathbb{R})$  справедливо сингулярное разложение

$$A = V\Sigma U^T$$

где  $V$  – ортогональная матрица  $m \times m$ ,  $U$  – ортогональная матрица  $n \times n$ ,  $\Sigma \in M_{mn}(\mathbb{R})$  и она является диагональной с числами  $\sigma_i \geq 0$  (сингулярными числами) и нулями на диагонали.

По договоренности  $\sigma_i$  располагают так:  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$ .

#### 4.40. Сформулируйте утверждение о полярном разложении.

Любой линейный оператор в евклидовом пространстве представляется как композиция самосопряженного (симметрического) и ортогонального оператора.

#### 4.41. Дайте определение сопряженного пространства.

Пространством, сопряженным к линейному пространству  $L$ , называется множество  $L^*$  всех линейных форм на  $L$  с операциями сложения и умножения на число:

$$\begin{aligned}(f_1 + f_2)(x) &= f_1(x) + f_2(x) \\ (\lambda f)(x) &= \lambda f(x)\end{aligned}$$

$$(L^* = \text{Hom}(L, \mathbb{F}))$$

#### 4.42. Выпишите формулу для преобразования координат ковектора при переходе к другому базису.

Пусть  $f \in V^*$  – ковектор,  $e$  и  $g$  – два базиса в  $V$ . Тогда  $[f]_g = [f]_e \cdot T_{e \rightarrow g}$ , где  $[f]$  – строка координат ковектора. Если записывать координаты в столбцы, то формула принимает следующий вид:  $[f]_g^T = T_{e \rightarrow g}^T \cdot [f]_e^T$ .

#### 4.43. Дайте определение взаимных базисов.

Базисы  $e = (e_1, \dots, e_n)$  в линейном пространстве  $L$  и  $f = (f^1, \dots, f^n)$  в сопряженном пространстве  $L^*$  называют взаимными, если

$$f^i(e_j) = \delta_j^i = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

#### 4.44. Дайте определение биортогонального базиса.

Если  $L = L^*$ , то взаимный к данному базис называется биортогональным.

#### 4.45. Сформулируйте определение алгебры над полем. Приведите два примера.

Алгебра – векторное пространство  $A$  над  $\mathbb{F}$  с операцией умножения  $A \times A \rightarrow A$ , для которой выполняются следующие свойства:

$\forall x, y, z \in A, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}$

1)  $(x + y) * z = x * z + y * z$  – дистрибутивность 1

2)  $x * (y + z) = x * y + x * z$  – дистрибутивность 2

3)  $(\alpha x) * (\beta y) = \alpha\beta(x * y)$

Примеры:

1) Матрицы с операцией умножения;

2)  $\mathbb{C}$  – двумерная алгебра над  $\mathbb{R}$ ;

3) Алгебра многочленов  $\mathbb{F}[x]$ ;

4) Кватернионы;

#### 4.46. Сформулируйте определение тензора. Приведите два примера.

Пусть  $\mathbb{F}$  – поле,  $V$  – векторное пространство над  $\mathbb{F}$ ,  $V^*$  – сопряженное к  $V$  пространство. Тогда любое полилинейное отображение

$$f : V \times \dots \times V \times V^* \times \dots \times V^* \rightarrow \mathbb{F}$$

где  $p$  пространств  $V$  и  $q$  пространств  $V^*$  ( $p, q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ) называется тензором на  $V$  типа  $(p, q)$  и валентности  $p + q$ .

Примеры:

- 1) тензор типа  $(1, 0)$  – линейные функции на  $V$ , т.е. элементы  $V^*$ .
- 2) тензор типа  $(0, 1)$  – линейные функции на  $V^*$ , т.е. элементы  $V$ .
- 3) тензор  $(2, 0)$  – билинейные формы на  $V$ .
- 4) тензор  $(1, 1)$  – можно интерпретировать как линейный оператор.

*P.S. В Интернетях вы можете встретить вариацию, в которой  $(p, q)$  стоят наоборот (напр. билинейные формы определяются как тензор  $(0, 2)$ ). Допустимы оба варианта. Представленный вариант был на лекциях.*

**4.47. Дайте определение эллипса как геометрического места точек. Выпишите его каноническое уравнение. Что такое эксцентриситет эллипса? В каких пределах он может меняться?**

Эллипсом называют геометрическое место точек, сумма расстояний от которых до двух заданных точек, называемых фокусами, постоянна.

Каноническое уравнение эллипса:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Эксцентриситет эллипса:

$$\varepsilon = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$$

где  $a$  – большая полуось,  $b$  – малая полуось. Он лежит на полуинтервале  $[0, 1)$  и служит мерой «сплюснутости» эллипса. При  $\varepsilon = 0$  эллипс превращается в окружность. При  $\varepsilon \rightarrow 1$  эллипс вырождается в отрезок  $F_1F_2$ .

**4.48. Дайте определение гиперболы как геометрического места точек. Выпишите её каноническое уравнение. Что такое эксцентриситет гиперболы? В каких пределах он может меняться?**

Гиперболой называют геометрическое место точек, модуль разности расстояний от которых до двух заданных точек, называемых фокусами, постоянен.

Каноническое уравнение гиперболы:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Эксцентриситет гиперболы:

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}$$

характеризует угол между асимптотами. Лежит в интервале  $(1, +\infty)$ , при  $\varepsilon \rightarrow 1$  гипербола вырождается в два луча.

**4.49. Дайте определение параболы как геометрического места точек. Выпишите её каноническое уравнение.**

Параболой называют геометрическое место точек плоскости, равноудалённых от данной точки (фокуса) и от данной прямой (директрисы).

Каноническое уравнение параболы:

$$y^2 = 2px$$

где  $p$  – параметр параболы – расстояние от фокуса до директрисы.

**4.50. Дайте определение цилиндрической поверхности.**

Рассмотрим кривую  $\gamma$ , лежащую в некоторой плоскости  $P$  и прямую  $L$ , не лежащую в  $P$ .

Цилиндрической поверхностью называют множество всех прямых, параллельных  $L$  и пересекающих  $\gamma$ .

**4.51. Дайте определение линейчатой поверхности. Приведите три примера.**

Линейчатой называют поверхность, образованную движением прямой линии. Примерами линейчатых поверхностей являются цилиндр, однополосный гиперболоид, гиперболический параболоид.

# ДОКАЗАТЕЛЬСТВА

## Модуль 3

**3.1. Докажите, что гомоморфизм инъективен тогда и только тогда, когда его ядро тривиально.**

### Формулировка:

Гомоморфизм  $f : G \rightarrow G'$  инъективен тогда и только тогда, когда  $\text{Ker } f = \{e_G\}$  (ядро тривиально).

### Доказательство:

#### Необходимость:

Инъективность  $f$  означает, что  $\forall x_1, x_2 \in G \quad x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$  и мы знаем, что  $f(e_G) = e_{G'}$  (по свойствам гомоморфизма). Следовательно,  $\forall x \in G \quad x \neq e_G \Rightarrow f(x) \neq e_{G'}$ , из чего следует, что в ядре только  $e_G$ , т.е. ядро тривиально.

#### Достаточность:

Пусть  $f$  не инъективен, т.е.  $\exists x_1 \neq x_2 : f(x_1) = f(x_2)$ . Тогда  $f(x_1) \cdot (f(x_2))^{-1} = f(x_2) \cdot (f(x_2))^{-1} = e_{G'} \Rightarrow f(x_1 \cdot x_2^{-1}) = e_{G'}$  (так как  $f$  гомоморфизм)  $\Rightarrow x_1 \cdot x_2^{-1} \in \text{Ker } f \Rightarrow x_1 \cdot x_2^{-1} = e_G$  (так как ядро тривиально)  $\Rightarrow x_1 = x_2$  – противоречие. Значит,  $f$  инъективно, что и требовалось доказать.

Необходимость и достаточность выполняются, значит утверждения равносильны.

**3.2. Сформулируйте и докажите критерий нормальности подгруппы, использующий сопряжение.**

### Формулировка:

Пусть  $H \subseteq G$  – подгруппа в группе  $G$ . Тогда если  $gHg^{-1} = \{ghg^{-1} \mid h \in H\}$

3 условия эквивалентны:

1.  $H$  нормальна
2.  $\forall g \in G \quad gHg^{-1} \subseteq H$
3.  $\forall g \in G \quad gHg^{-1} = H$



### Доказательство:

Докажем 3 импликации:  $1 \Rightarrow 2, 2 \Rightarrow 3, 3 \Rightarrow 1$ .

$1 \Rightarrow 2$ :

Пусть  $h \in H$  и  $g \in G$ . Из определения нормальности подгруппы  $\exists h, h' \in H : gh = h'g \Rightarrow ghg^{-1} = h' \in H$ , т.е.  $gHg^{-1} \subseteq H$ .

$2 \Rightarrow 3$ :

Для  $h \in H$  имеем  $h = gg^{-1}hgg^{-1} = g(g^{-1}hg)g^{-1} \in gHg^{-1}$ , так как  $g^{-1}hg \in H$  по 2 (вместо  $g$  берём  $g^{-1}$ ).

$3 \Rightarrow 1$ :

$\forall g \in G$  по пункту 3  $gH = gHg^{-1}g \subseteq Hg$ . Аналогично  $Hg \subseteq gH \Rightarrow Hg = gH$  – по определению,  $H$  нормальна.

### 3.3. Сформулируйте и докажите критерий нормальности подгруппы, использующий понятие ядра гомоморфизма.

#### Формулировка:

$H \triangleleft G \Leftrightarrow \exists f$  – гомоморфизм  $G \rightarrow G'$  для нек. группы  $G'$ , причём  $\text{Ker } f = H$ .

#### Доказательство:

Необходимость:

$f = \varepsilon$  – естественный гомоморфизм, сопоставляющий  $\forall g \in G$  его смежный класс  $gH$ , т.е.  $\varepsilon : G \rightarrow G/H$ . Видим, что  $\text{Ker } f = H$ .

Достаточность:

Пусть  $f : G \rightarrow G'$  – гомоморфизм и  $z \in \text{Ker } f$ . Тогда  $f(g^{-1}zg) = f(g^{-1})f(z)f(g) = f(g^{-1})e_2f(g) = f(g^{-1})f(g) = f(g^{-1}g) = f(e_1) = e_2$ , т.е.  $\forall g \in G \quad g^{-1}Hg \subseteq H$ , где  $H = \text{Ker } f \Rightarrow$  по критерию  $H$  – нормальна.

### 3.4. Докажите, что центр группы является её нормальной подгруппой.

#### Формулировка:

Для любой группы  $G$  её центр  $Z(G)$  является нормальной подгруппой  $G$ .

**Доказательство:**

Покажем, что  $Z(G)$  – подгруппа  $G$ . Для этого достаточно доказать, что  $\forall a, b \in Z(G) \quad ab^{-1} \in Z(G)$ . Для произвольного  $g \in G$ :

$$ab^{-1}g = ab^{-1}(g^{-1})^{-1} = a(g^{-1}b)^{-1} = azb^{-1} = gab^{-1} \Rightarrow ab^{-1} \in Z(G)$$

Нормальность доказывается с помощью критерия с сопряжением. Рассмотрим произвольные  $z \in Z(G)$ ,  $a, b \in G$ .

$$(aza^{-1})b = aa^{-1}zb = zb = bz = bzaa^{-1} = b(aza^{-1})$$

Видим, что для любого  $z \in Z(G)$  и любого  $a \in G$  верно, что  $aza^{-1} \in Z(G)$ , а по критерию это означает нормальность.

### 3.5. Сформулируйте и докажите утверждение о том, чему изоморфна факторгруппа группы по её центру.

**Формулировка:**

$$G/Z(G) \cong Inn(G)$$

$Inn$  – подгруппа всех внутренних автоморфизмов:  $Inn = \{g \mapsto aga^{-1} \mid a, g \in G\}$ .

**Доказательство:**

Рассмотрим отображение  $f : G \rightarrow Aut(G)$ , которое задается формулой  $\varphi_g(h) = ghg^{-1}$ . Тогда  $Im f = Inn(G)$  по определению.  $Ker f = Z(G)$ , так как  $ghg^{-1} = h \Rightarrow gh = hg$ . По теореме о гомоморфизме  $G/Ker f \cong Im f$ , то есть  $G/Z(G) \cong Inn(G)$ .

### 3.6. Сформулируйте и докажите теорему Кэли.

**Формулировка:**

Любая конечная группа порядка  $n$  изоморфна некоторой подгруппе группы перестановок  $S_n$ .

**Доказательство:**

Пусть  $|G| = n$ .  $\forall a \in G$  рассмотрим отображение  $L_a : G \rightarrow G$  по формуле:  $L_a(g) = ag$ .

Пусть  $e, g_1, \dots, g_{n-1}$  – элементы группы. Тогда  $a, ag_1, \dots, ag_{n-1}$  – те же элементы, но в другом порядке ( $ag_i = ag_j \Rightarrow g_i = g_j$ , так как  $\exists a^{-1} \forall a \in G$ ). Значит,  $L_a$  – биективное отображение  $G$  в себя (то есть перестановка элементов  $g$ ). Рассмотрим множество этих отображений. Эти отображения можно умножать (взяв композицию), есть единичный элемент  $L_e$ , обратным к  $L_a$  является  $L_{a^{-1}}$ , из ассоциативности в  $G$   $L_{ab}(g) = (ab)g = a(bg) = L_a(L_b(g))$  – умножение ассоциативно. Значит, множество  $L_e, L_{g_1}, \dots, L_{g_{n-1}}$  образует подгруппу  $H$  в множестве всех биективных отображений  $G$  в себя, то есть  $S(G)$ . А изоморфизм устроен так:  $a \mapsto L_a$ .

### 3.7. Докажите, что характеристика поля может быть либо простым числом, либо нулём.

#### Формулировка:

Характеристика поля может быть либо простым числом, либо нулём.

#### Доказательство:

Допустим, это не так и  $\text{char} P = p = mk$ , тогда  $0 = 1 + \dots + 1$ , где  $mk$  единиц. Пусть  $a_m = 1 + \dots + 1 \neq 0$ , где  $m$  единиц,  $a_k = 1 + \dots + 1 \neq 0$ , где  $k$  единиц, тогда  $0 = a_m a_k \Rightarrow a_m, a_k$  – делители нуля, что недопустимо в поле – противоречие.

### 3.8. Сформулируйте и докажите утверждение о том, каким будет простое подполе в зависимости от характеристики.

#### Формулировка:

Пусть  $\mathbb{F}$  – поле,  $\mathbb{F}_0$  – его простое подполе. Тогда:

- 1)  $\text{char} \mathbb{F} = p > 0 \Rightarrow \mathbb{F}_0 \cong \mathbb{Z}_p$ .
- 2)  $\text{char} \mathbb{F} = 0 \Rightarrow \mathbb{F}_0 \cong \mathbb{Q}$ .

#### Доказательство:

Рассмотрим циклическую подгруппу  $\langle 1 \rangle \subseteq (\mathbb{F}, +)$ , порожденную единицей поля (нейтральным элементом по умножению). Заметим, что  $|\langle 1 \rangle| = \text{char} \mathbb{F}$ .

- 1) Если  $\text{char} \mathbb{F} = p > 0$ , то  $\langle 1 \rangle \cong \mathbb{Z}_p$  – поле  $\Rightarrow \mathbb{F}_0 = \langle 1 \rangle \cong \mathbb{Z}_p$ .

2) Если  $\text{char} \mathbb{F} = 0$ , то  $\langle 1 \rangle \cong \mathbb{Z}$  – не поле. Но  $\mathbb{F}_0$  содержит и обратные по умножению элементы, т.е. дроби вида  $\frac{a}{b} : a, b \in \langle 1 \rangle, b \neq 0$ . Они образуют подполе, изоморфное  $\mathbb{Q}$  (поле частных для кольца  $\mathbb{Z}$ ).

### 3.9. Сформулируйте и докажите критерий того, что кольцо вычетов по модулю $n$ является полем.

#### Формулировка:

Кольцо вычетов  $\mathbb{Z}_k$  является полем тогда и только тогда, когда  $k$  – простое.

#### Доказательство:

##### Необходимость:

Допустим,  $k$  – не простое, т.е.  $k = mt$ . Тогда найдутся ненулевые  $z_m, z_t \in \mathbb{Z}_k : z_m \cdot z_t = 0$ . Это означает, что в  $\mathbb{Z}_k$  есть делители нуля, то есть  $\mathbb{Z}_k$  – не поле. Следовательно,  $k$  – простое.

##### Достаточность:

$\mathbb{Z}_k$  – коммутативное кольцо с единицей, значит для того, чтобы оно было полем, достаточно доказать существование обратного элемента, т.е.

$\forall \bar{a} \in (\mathbb{Z}_p \setminus \{0\}, \cdot) \exists \bar{a}^{-1} : \bar{a} \cdot \bar{a}^{-1} = \bar{1}$ . Рассмотрим  $A = \{\bar{1} \cdot \bar{a}, \bar{2} \cdot \bar{a}, \dots, \overline{k-1} \cdot \bar{a}\}$ . Все эти элементы  $\neq 0$ , т.к.  $\bar{a} \neq 0 \pmod{k} \Rightarrow \bar{p} \cdot \bar{a} \neq 0 \pmod{k}$  при  $p \in \overline{1}, \overline{k-1}$  (следует из простоты  $k$ ). Все эти элементы также различны, так как  $\bar{p} \cdot \bar{a} = \bar{l} \cdot \bar{a} \Rightarrow (\bar{p} - \bar{l})\bar{a} = 0 \Rightarrow \bar{p} = \bar{l}$ . Следовательно,  $A \cong \mathbb{Z}_k \setminus \{0\}$ , а значит в  $A$  существует единица, т.е. один из элементов  $\{\bar{1} \cdot \bar{a}, \bar{2} \cdot \bar{a}, \dots, \overline{k-1} \cdot \bar{a}\}$  равен единице. Значит, для  $\bar{a}$  есть обратный элемент  $\Rightarrow \mathbb{Z}_k$  – поле.

### 3.10. Докажите, что ядро гомоморфизма колец является идеалом.

#### Формулировка:

Если  $f : K_1 \rightarrow K_2$ , то  $\text{Ker } f$  – идеал в  $K_1$ .

#### Доказательство:

$f$  – гомоморфизм групп (по сложению)  $(K_1, +)$  и  $(K_2, +) \Rightarrow (\text{Ker } f, +)$  – нормальная подгруппа. Покажем, что  $\forall a \in \text{Ker } f, \forall k \in K_1 \quad ak, ka \in \text{Ker } f$ :

$$f(ra) = f(r)f(a) = f(r) \cdot 0 = 0 \Rightarrow ra \in \text{Ker } f$$

$$f(ar) = f(a)f(r) = 0 \cdot f(r) = 0 \Rightarrow ar \in \text{Ker } f$$

Вывод:  $\text{Ker } f$  – идеал в  $K_1$ , что и требовалось доказать.

### 3.11. Сформулируйте и докажите утверждение о том, когда факторкольца кольца многочленов над полем само является полем.

#### Формулировка:

Факторкольцо  $P[x] / \langle f(x) \rangle$  является полем тогда и только тогда, когда  $f(x)$  неприводим над полем  $P$ .

#### Доказательство:

Необходимость:

Допустим,  $f(x) = f_1(x) \cdot f_2(x)$ , т.е. приводим над  $P$ . Тогда  $\overline{f_1}, \overline{f_2} \in P[x] / \langle f(x) \rangle$  отличны от нуля, где  $\overline{f_i} = f_i + \langle f(x) \rangle$  – смежные классы по идеалу  $\langle f(x) \rangle$ , при этом  $\overline{f_1(x)} \cdot \overline{f_2(x)} = \overline{f_1(x) \cdot f_2(x)} = \overline{f(x)} = \overline{0}$ . Тогда  $\overline{f_1}, \overline{f_2}$  являются делителями нуля, следовательно, факторкольцо не является полем. Вывод:  $f(x)$  неприводим над  $P$ .

Достаточность:

Рассмотрим, произвольный  $a(x) \in P[x] : \deg a < \deg f$ . Так как  $f(x)$  неприводим, то по алгоритму Евклида  $\exists b(x), c(x) \in P[x] : a(x)b(x) + c(x)f(x) = 1$ . Видим, что второе слагаемое является элементом  $\langle f(x) \rangle$ , а значит  $\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{1}$ . Тогда  $\overline{b(x)}$  является обратным к  $\overline{a(x)}$   $\Rightarrow$  факторкольцо является полем.

### 3.12. Выпишите и докажите формулу для описания изменения координат вектора при изменении базиса.

#### Формулировка:

Пусть  $x \in V$ ,  $A$  и  $B$  – базисы в  $V$ ,  $x^a = (x_1^a, \dots, x_n^a)^T$ ,  $x^b = (x_1^b, \dots, x_n^b)^T$  – столбцы координат вектора  $x$  в базисах  $A$  и  $B$  соответственно. Тогда  $x^b = T_{A \rightarrow B}^{-1} x^a$ , где  $T_{A \rightarrow B}$  – матрица перехода от  $A$  к  $B$ .

**Доказательство:**

$$x = A \cdot x^a = B \cdot x^b$$

По определению матрицы перехода в матричной форме  $B = A \cdot T_{A \rightarrow B}$ .

$A \cdot x^a = A \cdot T_{A \rightarrow B} \cdot x^b \Rightarrow$  так как разложение по базису единственно, то  $x^a = T_{A \rightarrow B} x^b$ .

**3.13. Выпишите формулу для преобразования матрицы билинейной формы при замене базиса и докажите её.**

**Формулировка:**

Пусть  $T_{A \rightarrow B}$  – матрица перехода от базиса  $A$  в базис  $B$ . Пусть  $M_A$  – матрица билинейной формы в базисе  $A$ ,  $M_B$  – матрица билинейной формы в базисе  $B$ . Тогда

$$M_B = T_{A \rightarrow B}^T M_A T_{A \rightarrow B}$$

**Доказательство:**

$$b(x, y) = (x^A)^T M_A y^A = (T_{A \rightarrow B} x^B)^T M_A (T_{A \rightarrow B} y^B) = (x^B)^T (T_{A \rightarrow B}^T M_A T_{A \rightarrow B}) y^B$$

С другой стороны

$$b(x, y) = (x^B)^T M_B y^B$$

Видим, что

$$(x^B)^T (T_{A \rightarrow B}^T M_A T_{A \rightarrow B}) y^B = (x^B)^T M_B y^B \Rightarrow T_{A \rightarrow B}^T M_A T_{A \rightarrow B} = M_B$$

что и требовалось доказать.

**3.14. Выпишите формулу для преобразования матрицы линейного отображения при замене базиса и докажите её.**

**Формулировка:**

Пусть  $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$  – линейное отображение. Пусть  $A_{EF}$  – матрица линейного отображения в паре базисов  $E$  пространства  $V_1$  и  $F$  пространства  $V_2$ . Пусть  $T_1$  – матрица перехода от  $E$  к  $E'$ ,  $T_2$  – матрица перехода от  $F$  к  $F'$ . Тогда

$$A_{E'F'} = T_2^{-1} A_{EF} T_1$$

**Доказательство:**

Пусть  $x$  – произвольный вектор, тогда  $x^{E'} = T_1^{-1}x^E$ ,  $x^{F'} = T_2^{-1}x^F$ . Значит

$$\begin{aligned} \begin{cases} x^F = A_{EF}x^E \\ x^{F'} = A_{E'F'}x^{E'} \end{cases} &\Rightarrow T_2x^{F'} = A_{EF}T_1x^{E'} \Rightarrow T_2A_{E'F'}x^{E'} = A_{EF}T_1x^{E'} \Rightarrow \\ &\Rightarrow A_{E'F'} = T_2^{-1}A_{EF}T_1 \end{aligned}$$

### 3.15. Сформулируйте и докажите теорему о гомоморфизме групп.

**Формулировка:**

Пусть  $f : G_1 \rightarrow G_2$  – гомоморфизм групп,

$Im f = \{g_2 \in G_2 | \exists g_1 \in G_1 : f(g_1) = g_2\}$  (образ группы  $G$  по  $f$ ),

$Ker f = \{g_1 \in G_1 | f(g_1) = e_2\}$  (ядро гомоморфизма  $f$ ).

Тогда  $G_1/Ker f \cong Im f$ .

**Доказательство:**

Рассмотрим отображение  $\tau = G_1/Ker f \rightarrow Im f$ , заданной формулой  $\tau(gKer f) = f(g)$ . Докажем, что это изоморфизм.

Проверим корректность:

$$\forall h_1, h_2 \in Ker f \quad f(gh_1) = f(g)f(h_1) = f(g)e_2 = f(g)f(h_2) = f(gh_2)$$

Отображение сюръективно по построению ( $\forall f(g) \exists \tau(gKer f)$ ) и инъективно в силу того, что  $f(g) = e_2 \Leftrightarrow g \in Ker f \Leftrightarrow gKer f = Ker f$ .

Проверим то, что  $\tau$  – гомоморфизм:

$$\tau((g_1Ker f)(g_2Ker f)) = \tau(g_1g_2Ker f) = f(g_1g_2) = f(g_1)f(g_2) = \tau(g_1Ker f)\tau(g_2Ker f)$$

Как видим, это изоморфизм, что и требовалось доказать.

### 3.16. Что такое сумма и прямая сумма подпространств? Сформулируйте и докажите критерий того, что сумма подпространств является прямой.

#### Формулировка:

Пусть  $H_1, H_2 \subseteq L$  – подпространства. Множество  $H_1 + H_2 = \{h_1 + h_2 \mid h_1 \in H_1, h_2 \in H_2\}$  называется суммой подпространств.

Сумма  $H_1 + H_2$  называется прямой, если  $H_1 \cap H_2 = \{0\}$ , обозначается как  $H_1 \oplus H_2$ .

Сумма  $H_1 + H_2$  является прямой тогда и только тогда, когда

$\forall x \in H_1 + H_2 \exists! x_1 \in H_1 \exists! x_2 \in H_2 : x = x_1 + x_2$ , т.е. его представление в виде суммы пары элементов из  $H_1$  и  $H_2$  единственно.  $x_1$  называется проекцией  $x$  на  $H_1$  вдоль  $H_2$ ,  $x_2$  называется проекцией  $x$  на  $H_2$  вдоль  $H_1$ .

#### Доказательство:

Необходимость:

Пусть сумма прямая, т.е.  $H_1 \cap H_2 = \{0\}$ . Предположим, что существует 2 различных представления, т.е.  $x = x_1 + x_2 = y_1 + y_2$ . Тогда  $0 = x_1 + x_2 - y_1 - y_2 \Rightarrow x_1 - y_1 = y_2 - x_2$ . В то же время  $x_1 - y_1 \in H_1$ ,  $y_2 - x_2 \in H_2$ , а значит  $H_1 \cap H_2 = \{0\} \Rightarrow x_1 - y_1 = y_2 - x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = y_1, x_2 = y_2$ .

Достаточность:

Пусть представление единственно:  $x = x_1 + x_2$ . Предположим,  $\exists x' \in H_1 \cap H_2 : x' \neq 0$ , т.е.  $H_1 \cap H_2 \neq \{0\}$ . Тогда  $\forall \alpha \in \mathbb{F} (\alpha x' \in H_1) \wedge (\alpha x' \in H_2) \Rightarrow \forall \beta \in \mathbb{F} ((1 - \beta)x' \in H_1) \wedge (\beta x' \in H_2) \Rightarrow \forall \beta \in \mathbb{F} x = (1 - \beta)x + \beta x$  – представление не единственно, противоречие.

### 3.17. Сформулируйте и докажите (включая лемму) теорему об инвариантности ранга матрицы квадратичной формы.

#### Формулировка:

Лемма: Пусть  $A, S \in M_n(\mathbb{R})$ , тогда  $\det S \neq 0 \Rightarrow RgAS = RgSA = RgA$ .

Теорема: Ранг матрицы квадратичной формы не меняется при переходе к новому базису.



Доказательство:

Лемма: Известно, что  $RgAB \leq RgA$ ,  $RgAB \leq RgB$ . Рассмотрим произвольную матрицу  $A$  и невырожденную  $S$ . Пусть  $C_1 = AS$ ,  $C_2 = SA$  тогда  $RgC_1 \leq RgA$ ,  $RgC_2 \leq RgA$ . Рассмотрим  $A = C_1S^{-1} = S^{-1}C_2$ , здесь уже получаем  $RgA = RgC_1S^{-1} \leq RgC_1$ ,  $RgA = RgS^{-1}C_2 \leq RgC_2$ . Получили  $RgA = RgC_1 = RgC_2$ , что и требовалось доказать.

Теорема: Матрица квадратичной формы  $A$  при переходе к новому базису меняется по следующей формуле:  $A' = S^TAS$ , где  $S$  – матрица перехода от старого базиса к новому – она невырождена по определению. Применяя вышеуказанную лемму, получаем  $RgA' = RgA$ , что и требовалось доказать.

## Модуль 4

### 4.1. Сформулируйте и докажите утверждение о связи характеристического уравнения и спектра линейного оператора.

#### Формулировка:

Спектр линейного оператора – множество его собственных значений.  
Скаляр  $\lambda_0 \in \mathbb{F}$  является собственным значением линейного оператора  $A$  (т.е. принадлежит его спектру) тогда и только тогда, когда  $\mathcal{X}_A(\lambda_0) = 0$ .

#### Доказательство:

$\mathcal{X}_A(\lambda_0) = 0 \Leftrightarrow \det(A - \lambda_0 E) = 0 \Leftrightarrow$  СЛАУ  $(A - \lambda_0 E)x = 0$  имеет ненулевое решение, то есть  $x$  – собственный вектор с собственным значением  $\lambda_0$ .

### 4.2. Сформулируйте и докажите утверждение о том, каким свойством обладают собственные векторы линейного оператора, отвечающие различным собственным значениям.

#### Формулировка:

Собственные векторы, отвечающие различным собственным значениям, линейно независимы.

#### Доказательство:

Докажем утверждение с помощью математической индукции.

База индукции: 1 собственный вектор и 1 собственное значение. По определению собственный вектор ненулевой  $\Rightarrow$  линейно независим.

Предположение индукции: пусть утверждение выполняется для множества  $n$  собственных векторов  $v_1, \dots, v_n$  матрицы  $A$ , отвечающих различным собственным значениям  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ .

Шаг индукции: добавим новый собственный вектор  $v_{n+1}$  и соответствующее ему собственное значение  $\lambda_{n+1}$ , отличное от всех предыдущих. Рассмотрим уравнение (1)  $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n + \alpha_{n+1} v_{n+1} = 0$ . Применим к нему оператор  $A$ : (2)  $\alpha_1 A v_1 + \dots + \alpha_{n+1} A v_{n+1} = 0$ . По определению собственного вектора  $A v_k = \lambda_k v_k$ ,

тогда получаем (3)  $\alpha_1 \lambda_1 v_1 + \dots + \alpha_n \lambda_{n+1} v_{n+1} = 0$ . Теперь вычтём из (3) (1), умноженное на  $\lambda_{n+1}$ :  $\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_{n+1})v_1 + \dots + \alpha_n(\lambda_n - \lambda_{n+1})v_n = 0$ . По предположению  $v_1, \dots, v_n$  – линейно независимы, а значит уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \alpha_1(\lambda_1 - \lambda_{n+1}) = 0 \\ \dots \\ \alpha_n(\lambda_n - \lambda_{n+1}) = 0 \end{cases}$$

Так как  $i \neq j \Rightarrow \lambda_i \neq \lambda_j$ , из этой системы следует, что  $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$ , а значит (исходя из (1)) и  $\alpha_{n+1} = 0$ , т.е. векторы  $v_1, \dots, v_n, v_{n+1}$  линейно независимы. Согласно принципу математической индукции, утверждение верно для всех  $n \geq 1$ , что и требовалось доказать.

### 4.3. Сформулируйте и докажите критерий диагональности матрицы оператора.

#### Формулировка:

Матрица линейного оператора диагональна тогда и только тогда, когда все векторы базиса, в котором представлена эта матрица, являются её собственными векторами.

#### Доказательство:

##### Необходимость:

Пусть матрица  $A_f$  оператора  $\varphi$  в базисе  $f$  диагональна. По определению матрицы оператора  $a^j$  ( $j$ -ый столбец матрицы  $A_f$ ) есть  $\varphi(f_j)$ . В то же время  $j$ -ый столбец диагональной матрицы имеет вид  $a^j = (0, \dots, 0, \lambda_j, 0, \dots, 0)^T$ , то есть  $a^j = \varphi(f_j) = \boxed{A f_j = \lambda_j f_j}$  – это есть определение собственного вектора.

##### Достаточность:

Как мы уже установили,  $j$ -й столбец матрицы  $A_f$   $a^j = \varphi(f_j) = A f_j$ . При этом  $f_j$  – собственный вектор, значит  $A f_j = \lambda_j f_j$  – значит, в столбце  $a^j$  единственный ненулевой элемент  $\lambda_j$  стоит на  $j$ -ой строке – матрица диагональна.

**4.4. Каким свойством обладает оператор в  $n$ -мерном вещественном пространстве, у характеристического многочлена которого есть  $n$  различных действительных корней? Ответ обоснуйте.**

**Формулировка:**

Если характеристический многочлен оператора в  $n$ -мерном вещественном пространстве имеет  $n$  различных действительных корней, то матрица этого оператора диагонализироваема.

**Доказательство:**

Корни характеристического многочлена оператора являются собственными значениями, а значит, если они попарно различны, существует  $n$  линейно независимых собственных векторов. Число этих линейно независимых векторов совпадает с размерностью пространства, значит, они образуют в данном пространстве базис. В базисе из собственных векторов матрица оператора имеет диагональный вид с собственными значениями на главной диагонали, то есть оператор диагонализироваем, что и требовалось доказать.

**4.5. Выпишите и докажите неравенство Коши–Буняковского. Выпишите и докажите неравенство треугольника.**

**Формулировка:**

Пусть  $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ .

Неравенство Коши–Буняковского:

$$\forall x, y \in \mathcal{E} \quad |(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

Неравенство треугольника:

$$\forall x, y \in \mathcal{E} \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

Здесь  $\mathcal{E}$  – евклидово пространство.

**Доказательство:**

Коши–Буняковский:

Рассмотрим  $b = \lambda x - y$  для произвольных  $\lambda \in \mathbb{F}$ ,  $x, y \in \mathcal{E}$ . По свойству скаляр-

ного произведения,  $(b, b) \geq 0$ . Далее – арифметические махинации:

$$\begin{aligned}(\lambda x - y, \lambda x - y) &= (\lambda x, \lambda x - y) - (y, \lambda x - y) = \lambda^2(x, x) - \lambda(x, y) - \lambda(y, x) + (y, y) = \\&= \lambda^2\|x\|^2 - 2\lambda(x, y) + \|y\|^2 \geq 0 \\D_\lambda &= 4(x, y)^2 - 4\|x\|^2 \cdot \|y\|^2\end{aligned}$$

Так как выражение  $\geq 0$ , дискриминант должен быть  $\leq 0$

$$(x, y)^2 - \|x\|^2 \cdot \|y\|^2 \leq 0 \Rightarrow |(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

что и требовалось доказать.

Неравенство треугольника:

$$\|x + y\|^2 = (x + y, x + y) = (x, x) + \boxed{2(x, y)} + (y, y)$$

$$(\|x\| + \|y\|)^2 = \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 = (x, x) + \boxed{2\|x\| \cdot \|y\|} + (y, y)$$

Согласно неравенству Коши-Буняковского,  $|(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ , а значит и  $(x, y) \leq \|x\| \cdot \|y\| \Rightarrow \|x + y\|^2 \leq (\|x\| + \|y\|)^2 \Rightarrow \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  (нормы всегда положительны, можем спокойно извлекать корень).

**4.6. Докажите теорему о том, что евклидово пространство можно представить в виде прямой суммы подпространства и его ортогонального дополнения.**

Формулировка:

Если  $V$  – линейное пространство,  $L$  – его подпространство, то  $L^\perp \subseteq V$  и  $V = L \oplus L^\perp$ .

Доказательство:

Докажем, что  $L^\perp \subseteq V$ .  $\forall x, y \in L^\perp \forall l \in L \forall \alpha \in \mathbb{F}$ :

$$(x + y, l) = (x, l) + (y, l) = 0 + 0 = 0 \Rightarrow x + y \in L^\perp$$

$$(\alpha x, h) = \alpha(x, h) = \alpha \cdot 0 = 0 \Rightarrow \alpha x \in L^\perp$$

Вывод: операции сложения и умножения на число замкнуты,  $L^\perp \subseteq V$ . Тогда можем рассматривать  $L + L^\perp$ . Покажем, что их сумма прямая.  $x \in L \cap L^\perp \Rightarrow (x, x) = 0 \Rightarrow x = 0$  по свойству скалярного произведения. Значит,  $L \cap L^\perp = \{0\}$  – сумма прямая.

Пусть  $f_1, \dots, f_k$  – ОНБ в  $L$  (он всегда существует). Дополним его до базиса во всем пространстве  $V$  векторами  $f_{k+1}, \dots, f_n$  и применим ортогонализацию Грама-Шмидта. Векторы  $f_1, \dots, f_k$  уже ортонормированны, потому останутся прежними; векторы  $f_{k+1}, \dots, f_n$  перейдут в  $b_{k+1}, \dots, b_n$ . Они будут ортогональны каждому из векторов  $f_1, \dots, f_k$ , а значит и всему  $L$ , т.е. они принадлежат  $L^\perp$ . Тогда любой  $x \in V$  можно представить в виде

$$x = \underbrace{a_1 f_1 + \dots + a_k f_k}_{z_1 \in L} + \underbrace{a_{k+1} f_{k+1} + \dots + a_n f_n}_{z_2 \in L^\perp}$$

это означает, что  $V = L \oplus L^\perp$ , что и требовалось доказать.

**4.7. Выпишите формулу для преобразования матрицы Грама при переходе к новому базису и докажите её. Что происходит с определителем матрицы Грама при применении процесса ортогонализации Грама—Шмидта? Что можно сказать про знак определителя матрицы Грама? Ответ обоснуйте.**

**Формулировка:**

- 1) Пусть  $e$  и  $e'$  – два базиса,  $\Gamma$  и  $\Gamma'$  – соответствующие им матрицы Грама. Тогда  $\Gamma' = U^T \Gamma U$ , где  $U$  – матрица перехода от  $e$  к  $e'$ .
- 2) Определитель матрицы Грама не меняется при процессе ортогонализации.
- 3) Определитель матрицы Грама положительный.

**Доказательство:**

- 1) Матрица Грама является матрицей билинейной формы (скалярного умножения):  $(x, y) = x^T \Gamma y$ . Матрицы билинейных форм при переходе к новому базису меняются именно так:  $\Gamma' = U^T \Gamma U$ .
- 2) Рассмотрим, как меняются векторы базиса при процессе ортогонализации:

$$b_1 = a_1, \quad b_k = a_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{(a_k, b_i)}{(b_i, b_i)} b_i$$

Видим, что матрица перехода от  $a$  к  $b$  имеет вид

$$U = \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ \vdots & \ddots & * \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Теперь рассмотрим определитель матрицы Грама при переходе в новый базис:  $\det(U^T \Gamma U) = \det U^T \cdot \det \Gamma \cdot \det U = 1 \cdot \det \Gamma \cdot 1 = \det \Gamma \Rightarrow \det \Gamma' = \det \Gamma$ , что и требовалось доказать.

3) При переходе в новый базис имеем  $\det \Gamma' = \det U^T \Gamma U = \det U^T \cdot \det \Gamma \cdot \det U = \det \Gamma \cdot (\det U)^2$ . В стандартном ортонормированном базисе матрица Грама совпадает с единичной матрицей, значит  $\det \Gamma_0 = 1$ . Тогда в произвольном базисе  $\det \Gamma = 1 \cdot (\det U)^2$ .  $U$  – матрица перехода, а значит  $\det U \neq 0$ . Тогда получаем, что  $\det \Gamma > 0$ .

## 4.8. Сформулируйте и докажите критерий линейной зависимости набора векторов с помощью матрицы Грама.

### Формулировка:

Система векторов  $e_1, \dots, e_n$  линейно зависима тогда и только тогда, когда определитель матрицы Грама (грамиан) этой системы равен нулю.

### Доказательство:

Рассмотрим линейную комбинацию системы векторов  $\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n = 0$ . Домножим скалярно на векторы  $e_1, \dots, e_n$ :

$$\begin{cases} \alpha_1(e_1, e_1) + \dots + \alpha_n(e_n, e_1) = 0 \\ \dots \\ \alpha_1(e_1, e_n) + \dots + \alpha_n(e_n, e_n) = 0 \end{cases}$$

Получили  $\Gamma_e \cdot (\alpha_1, \dots, \alpha_n)^T = 0$ . Это однородная СЛАУ, для которой, как известно, существует ненулевое решение только тогда, когда  $\det \Gamma = 0$ . Иначе говоря, система линейно зависима тогда и только тогда, когда определитель матрицы Грама этой системы равен нулю, что и требовалось доказать.

**4.9. Выпишите формулу для ортогональной проекции вектора на подпространство, заданное как линейная оболочка данного линейно независимого набора векторов, и докажи-те её.**

**Формулировка:**

Пусть  $L = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$  – линейная оболочка. Тогда  $proj_L x = A(A^T A)^{-1} A^T x$ , где  $A$  – матрица, составленная из столбцов  $a_1, \dots, a_n$ .

**Доказательство:**

Пусть  $x = \underbrace{\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_n a_n}_{proj_L x} + ort_L(x)$ . Домножим скалярно на векторы  $a_1, \dots, a_n$ :

$$\begin{cases} \alpha_1(a_1, a_1) + \dots + \alpha_n(a_n, a_1) + \underbrace{(ort(x), a_1)}_{=0} = (x, a_1) \\ \dots \\ \alpha_1(a_1, a_n) + \dots + \alpha_n(a_n, a_n) + \underbrace{(ort(x), a_n)}_{=0} = (x, a_n) \end{cases}$$

В матричной форме это выражается как  $\Gamma \alpha = A^T A \alpha = A^T x$ , где  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)^T$ .  $a_1, \dots, a_n$  – линейно независимы, а значит  $\det A^T A \neq 0 \Rightarrow \exists (A^T A)^{-1} \Rightarrow \Rightarrow \alpha = (A^T A)^{-1} A^T x$ . При этом  $proj_L x = A \alpha = A(A^T A)^{-1} A^T x$ .

**4.10. Докажите, что для любого оператора в конечномерном евклидовом пространстве существует единственный сопряженный оператор.**

**Формулировка:**

Для любого оператора в конечномерном евклидовом пространстве существует единственный сопряженный оператор. Оператор, сопряжённый к  $A$  вычисляется по формуле  $A^* = \Gamma^{-1} A^T \Gamma$ , где  $\Gamma$  – матрица Грама соответствующего базиса.

**Доказательство:**

Найдем сопряженный оператор исходя из его определения:

$$(Ax, y) = (x, A^* y) \Rightarrow (Ax)^T \Gamma y = x^T \Gamma A^* y \Rightarrow x^T A^T \Gamma y = x^T \Gamma A^* y \Rightarrow A^T \Gamma = \Gamma A^* \Rightarrow$$



$$\Rightarrow A^* = \Gamma^{-1} A^T \Gamma$$

В силу единственности матрицы Грама для заданного базиса получаем единственный сопряжённый оператор.

#### 4.11. Сформулируйте и докажите свойство собственных векторов самосопряженного оператора, отвечающих разным собственным значениям.

##### Формулировка:

Собственные векторы самосопряжённого линейного оператора, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны.

##### Доказательство:

Пусть  $v_1, v_2$  – собственные векторы, отвечающие  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  соответственно. По определению  $Av_i = \lambda_i v_i$ ,  $v_i \neq 0$ . Тогда  $(Av_1, v_2) = \lambda_1(v_1, v_2)$ ,  $(v_1, Av_2) = \lambda_2(v_1, v_2)$ , при этом  $A$  самосопряжённый, то есть  $(Av_1, v_2) = (v_1, Av_2)$ , а значит, по полученному выше,  $\lambda_1(v_1, v_2) = \lambda_2(v_1, v_2) \Rightarrow (\lambda_1 - \lambda_2)(v_1, v_2) = 0$ .  $\lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow (v_1, v_2) = 0$ . Вывод: любая пара собственных векторов  $v_i, v_j$ , отвечающих собственным значениям  $\lambda_i \neq \lambda_j$  ортогональна.

#### 4.12. Каким свойством обладают собственные значения самосопряженного оператора? Ответ обоснуйте.

##### Формулировка:

Если  $A$  – самосопряжённый, то все его собственные значения вещественны.

##### Доказательство:

Рассмотрим произвольное собственное значение  $\lambda$  самосопряжённого линейного оператора  $A$ . Тогда существует  $x \neq 0$  :  $(A - \lambda E)x = 0$ . Рассмотрим  $\bar{x}$  – столбец, состоящий из значений, сопряжённых к значениям координат  $x$ . Умножим уравнение на  $\bar{x}^T$  слева:  $\bar{x}^T(A - \lambda E)x = 0 \Rightarrow \bar{x}^T Ax = \lambda \bar{x}^T x$ .

$$\bar{x}^T x = \bar{x}_1 x_1 + \dots + \bar{x}_n x_n = |x_1|^2 + \dots + |x_n|^2 > 0 \Rightarrow \boxed{\lambda = \frac{\bar{x}^T Ax}{\bar{x}^T x}}.$$

Знаменатель вещественный, рассмотрим числитель: обозовём его  $w = \bar{x}^T Ax$ .

$w = w^T = (\bar{x}^T Ax)^T = x^T A\bar{x}$ ;  $\bar{w} = \overline{\bar{x}^T Ax} = x^T A\bar{x}$  (насколько я понимаю,  $A = \bar{A}$  допустимо потому, что  $A$  состоит из вещественных элементов). Получили  $w = \bar{w} \Rightarrow w$  – вещественное значение. Числитель и знаменатель вещественны, значит и само собственное значение  $\lambda$  вещественно.

**4.13. Сформулируйте и докажите теорему о том, что ортогональный оператор переводит ортонормированный базис в ортонормированный. Верно ли обратное? Ответ обоснуйте.**

**Формулировка:**

Оператор  $A$  ортогональный тогда и только тогда, когда  $A$  переводит ОНБ  $e_1, \dots, e_n$  в ОНБ  $Ae_1, \dots, Ae_n$ .

**Доказательство:**

Необходимость:

Пусть оператор  $A$  ортогональный. По определению

$$(Ae_i, Ae_j) = (e_i, e_j) = \delta_i^j = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

т.е. система  $\{Ae_i\}$  состоит из ненулевых попарно ортогональных векторов  $\Rightarrow$  векторы этой системы линейно независимы и, так как таких векторов  $n = \dim \mathcal{E}$ , это базис в этом пространстве.

Достаточность:

Имеем 2 ОНБ  $e_1, \dots, e_n$  и  $Ae_1, \dots, Ae_n$ . В базисе  $e$  вектор  $x$  имеет координаты  $(x_1, \dots, x_n)^T$ , в базисе  $Ae$  вектор  $Ax$  также имеет координаты  $(x_1, \dots, x_n)^T$ , т.к.  $Ax = A(x_1e_1 + \dots + x_ne_n) = x_1Ae_1 + \dots + x_nAe_n$ . Тогда  $(x, y) = x^Ty = (x_1, \dots, x_n)(y_1, \dots, y_n)^T$  в ОНБ  $e$ , в то же время  $(Ax, Ay) = (Ax)^TAy = (x_1, \dots, x_n)(y_1, \dots, y_n)^T$  в ОНБ  $Ae$ . Видим, что  $(Ax, Ay) = (x, y)$ , т.е. оператор  $A$  – ортогональный.

#### 4.14. Сформулируйте и докажите критерий ортогональности оператора, использующий его матрицу.

##### Формулировка:

Линейный оператор  $A$  ортогонален тогда и только тогда, когда матрица этого оператора ортогональна в ОНБ.

##### Доказательство:

В ОНБ  $(x, y) = x^T y$ , тогда

$$\underbrace{(Ax, Ay) = (x, y)}_{\text{ортогональность оператора}} \Leftrightarrow (Ax)^T Ay = x^T y \Leftrightarrow x A^T Ay = x^T E y \Leftrightarrow \underbrace{A^T A = E}_{\text{ортогональность матрицы}}$$

#### 4.15. Сформулируйте теорему о существовании для самосопряженного оператора базиса из собственных векторов. Приведите доказательство в случае различных вещественных собственных значений.

##### Формулировка:

Для любой самосопряжённого линейного оператора  $A$  существует ОНБ, состоящий из собственных векторов  $A$ , в котором матрица оператора диагональная. На диагонали стоят собственные значения, каждый из которых повторяется столько раз, какова его алгебраическая кратность.

##### Доказательство:

Для случая различных собственных значений доказательство практически совпадает с доказательством утверждения 4.11. Дублирую его сюда, т.к. вряд ли получится отделаться одной ссылкой на доказательство этого утверждения:

Пусть  $v_1, v_2$  – собственные векторы, отвечающие  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  соответственно. По определению  $Av_i = \lambda_i v_i$ ,  $v_i \neq 0$ . Тогда  $(Av_1, v_2) = \lambda_1(v_1, v_2)$ ,  $(v_1, Av_2) = \lambda_2(v_1, v_2)$ , при этом  $A$  самосопряжённый, то есть  $(Av_1, v_2) = (v_1, Av_2)$ , а значит, по полученному выше,  $\lambda_1(v_1, v_2) = \lambda_2(v_1, v_2) \Rightarrow (\lambda_1 - \lambda_2)(v_1, v_2) = 0$ .  $\lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow (v_1, v_2) = 0$ . Вывод: любая пара собственных векторов  $v_i, v_j$ , отвечающих собственным значениям  $\lambda_i \neq \lambda_j$  ортогональна.

Получив  $n$  ортогональных векторов из собственных векторов, нормируем каждый вектор  $(\frac{v_i}{\|v_i\|})$  и получаем желанный ОНБ.

#### 4.16. Сформулируйте и докажите утверждение о QR-разложении.

##### Формулировка:

Пусть  $A \in M_n(\mathbb{R})$  и столбцы  $A_1, \dots, A_n$  – линейно независимы. Тогда существуют матрицы  $Q, R : A = QR$ , где  $Q$  – ортогональная,  $R$  – верхнетреугольная с положительными значениями на главной диагонали.

##### Доказательство:

Применим к  $A_1, \dots, A_n$  – столбцам  $A$  – процесс ортогонализации Грама-Шмидта. Получим столбцы  $B_1, \dots, B_n$  нормируем, получим  $Q_1, \dots, Q_n$  – это ортонормированная система. Следовательно, если составить из этих столбцов матрицу  $Q = (Q_1, \dots, Q_n)$ , она будет ортогональна. Так как в процессе ортогонализации Грама-Шмидта не используются столбцы с бóльшими номерами, столбец  $A_k$  представим в виде

$$A_k = \sum_{i=1}^k r_{ik} Q_i$$

В матричной форме получили  $A = QR$ , где

$$R = \begin{pmatrix} r_{11} & \dots & r_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & r_{nn} \end{pmatrix}$$

где  $r_{kk} > 0$  в силу того, что это длина соответствующего вектора  $B_k$ .

#### 4.17. Сформулируйте и докажите теорему о сингулярном разложении.

##### Формулировка:

Для любой матрицы  $A \in M_{mn}(\mathbb{R})$  справедливо сингулярное разложение:

$$A = V \Sigma U^T$$

где  $V$  – ортогональная матрица  $m \times m$ ,  $U$  – ортогональная матрица  $n \times n$ ,  $\Sigma \in M_{mn}(\mathbb{R})$  и она является диагональной с числами  $\sigma_i \geq 0$  на главной диагонали

( $\sigma_i$  называются сингулярными числами). По договорённости сингулярные числа располагают на диагонали в порядке невозрастания:  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$ .

### Доказательство:

Рассмотрим матрицу  $A^T A$  – симметричная матрица ( $(A^T A)^T = A^T A$ ) и соответственная квадратичная форма неотрицательно определена ( $Q(x) = x^T (A^T A)x = (Ax)^T Ax = (Ax, Ax) = \|Ax\|^2 \geq 0$ ). Следовательно, линейный оператор с матрицей  $A^T A$  является самосопряжённым  $\Rightarrow$  все собственные значения этого оператора вещественны. Запишем собственные значения в виде  $\sigma_i^2$  (т.е.  $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$ ) и пронумеруем по невозрастанию. Так как  $A^T A$  – самосопряжённый, для него существует ОНБ из собственных векторов

$$A^T A u_i = \begin{cases} \sigma_i^2 u_i, & 1 \leq i \leq r \\ 0, & r < i \leq n \end{cases}$$

Положим  $v_i = \frac{A u_i}{\sigma_i}$ ,  $1 \leq i \leq r$  – нормированные собственные векторы:

$$(v_i, v_j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

Дополним систему  $v_1, \dots, v_r$  векторами  $v_{r+1}, \dots, v_m$  до ОНБ (*видимо еще надо  $\{u_i\}$  дополнять, потому что я не понимаю откуда  $u_n$  берётся*).

В итоге  $A u_i = v_i \sigma_i \Rightarrow A \cdot [u_1, \dots, u_n] = [v_1, \dots, v_m] \Sigma$ , где

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & & \sigma_r & & & \vdots \\ \vdots & & & 0 & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Тогда  $V = [v_1, \dots, v_m]$  – ортогональная,  $U = [u_1, \dots, u_n]$  – тоже ортогональная,

$$A = V \Sigma U^{-1} = V \Sigma U^T \text{ – сингулярное разложение}$$

#### 4.18. Сформулируйте и докажите теорему о приведении квадратичных форм к диагональному виду при помощи ортогональной замены координат.

##### Формулировка:

Любую квадратичную форму можно привести к каноническому (диагональному) виду ортогональными преобразованиями.

##### Доказательство:

Матрица квадратичной формы является симметрической ( $Q^T = Q$ ). Рассмотрим  $n$ -мерное евклидово пространство  $L$ , где  $n$  – число переменных в квадратичной форме  $Q$ , и некоторый ОНБ  $e$ . В нём матрица  $Q$  является матрицей некоторого самосопряженного оператора  $A$  в данном базисе (по критерию самосопряжённости в ОНБ). Тогда существует новый ОНБ  $f$  такой, что матрица  $A'$  линейного оператора в этом базисе является диагональной (а базис состоит из собственных векторов  $A$ ). Матрица линейного оператора преобразуется по формуле по формуле  $A' = S^{-1}AS$ , где  $S$  – матрица перехода от  $e$  к  $f$ . При этом матрица квадратичной формы преобразуется по формуле  $Q' = S^TQS$ . Оба базиса  $e$  и  $f$  ортонормированны, то есть матрица перехода ортогональна ( $S^{-1} = S^T$ ). Исходя из этого получаем, что  $Q' = A'$  – это и есть канонический вид, так как  $A'$  диагональна.

#### 4.19. Выпишите и докажите формулу для преобразования координат ковектора при переходе к другому базису.

##### Формулировка:

Пусть  $f \in V^*$  – ковектор,  $e$  и  $g$  – два базиса в  $V$ . Тогда  $[f]_g = [f]_e \cdot T_{e \rightarrow g}$ , где  $[f]$  – строка координат ковектора. Если записывать координаты в столбцы, то формула принимает следующий вид:  $[f]_g^T = T_{e \rightarrow g}^T \cdot [f]_e^T$ .

##### Доказательство:

Результат действия  $f$  не зависит от базиса:  $[f]_g \cdot x_g = [f]_e \cdot x_e$ . В то же время для векторов верна формула  $x_g = T_{e \rightarrow g}^{-1} \cdot x_e$ , используя её получаем:

$$[f]_g \cdot x_g = [f]_e \cdot x_e \Rightarrow [f]_g \cdot x_g = [f]_e \cdot T_{e \rightarrow g} \cdot x_g \Rightarrow [f]_g = [f]_e \cdot T_{e \rightarrow g}$$

Вариант для столбцов является прямым следствием этой формулы:

$$[f]_g^T = ([f]_e \cdot T_{e \rightarrow g})^T = T_{e \rightarrow g}^T \cdot [f]_e^T$$