线性规划问题

1.求解下列线性规划问题：

$$
\begin{aligned}
\max \quad & z = 3x_1 - x_2 - x_3 \\
s.t. \quad & x_1 - 2x_2 + x_3 \leq 11 \\
& -4x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 3 \\
& -2x_1 + x_3 = 1 \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

使用 `linprog` 函数求解，得到最优解为：

$$
\begin{cases}
x_1 & = 4 \\
x_2 & = 1 \\
x_3 & = 9 \\
z & = 2
\end{cases}
$$

2.求解下列线性规划问题：

$$
\begin{aligned}
\min \quad & z = |x_1| + 2|x_2| + 3|x_3| + 4|x_4| \\
s.t. \quad & x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\
& x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 1 \\
& x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

做变量替换 $u_i = \frac{x_i + |x_i|}{2}, v_i = \frac{x_i - |x_i|}{2}, i = 1,2,3,4$ ，记 $u = [u_1, u_2, u_3, u_4]^T, v = [v_1, v_2, v_3, v_4]^T$ ，则原问题可以转化为：

$$
\begin{aligned}
\min \quad & z = c^T(u + v) \\
s.t. \quad & Au = b \\
& u, v \geq 0
\end{aligned}
$$

其中 $c = [1, 2, 3, 4]^T, A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}, b = [0, 1, -\frac{1}{2}]^T$

然后使用 `linprog` 函数求解，得到最优解为：

$$
\begin{cases}
x_1 & = 0.25 \\
x_2 & = 0 \\
x_3 & = 0 \\
x_4 & = -0.25 \\
z & = 1.25
\end{cases}
$$

3.一架货机有三个货舱：前舱、中仓和后舱。该货机三个货舱所能装载的货物最大质量和体积有均限制，如表1所示。
为了维持飞机平衡，三个货舱装载的货物之类必须与其最大容许量成比例。

表1 货舱数据

	前舱	中仓	后舱
质量限制/t	10	16	8
体积限制/m³	6800	8700	5300

现有四类货物用于装载，其质量和体积以及装运后的利润如表2所示。

表2 货物数据

货物	质量/t	体积/m³	利润/(元/t)
货物1	18	480	3100
货物2	15	650	3800
货物3	23	580	3500
货物4	12	390	2850

假设：

- 每种货物可以无限细分；
- 每种货物可以分布在一个或多个货舱中；
- 不同货物可以放在同一个货舱中，并且保证不留空间；

应该如何安排货物的装载，才能使得飞机的利润最大？

为了便于计算，使用如下定义：
x_{ij} 表示货物 i 在货舱 j 中的装载质量（吨），其中 $i \in 1,2,3,4$ ，$j \in$ 前舱(1),中舱(2),后舱(3); 用 p_i 表示货物 i 的单位利润（元/吨）, v_i 表示货物 i 的体积（m³）.

那么目标函数可以表示为：

$$

\max \quad z = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{3}x_{ij}p_i \tag{1} $$

接下来分别表示质量和体积的约束条件。
质量约束，即四种货物的总质量不超过每部分的承载质量，表示为：

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{4} x_{i1} \leq 10, \\ \sum_{i=1}^{4} x_{i2} \leq 16, \\ \sum_{i=1}^{4} x_{i3} \leq 8, \end{cases} \tag{2}$$

货物的总体积约束表示为：

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{4} x_{i1} v_i \leq 6800, \\ \sum_{i=1}^{4} x_{i2} v_i \leq 8700, \\ \sum_{i=1}^{4} x_{i3} v_i \leq 5300, \end{cases} \tag{3}$$

还需要添加比例的约束条件，即货舱中的货物质量与体积的比例应该相同。假设比例系数 λ，可以表示为两个等式约束：

$$\begin{cases} M_1 = \sum_{i=1}^{4} x_{i1} = 10\lambda, \\ M_2 = \sum_{i=1}^{4} x_{i2} = 16\lambda, \\ M_3 = \sum_{i=1}^{4} x_{i3} = 8\lambda, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 16M_1 - 10M_2 = 0, \\ 8M_2 - 16M_3 = 0, \end{cases} \tag{4}$$

最后，还需要添加每个货品自身的上限数量约束：

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{3} x_{1j} \leq 18, \\ \sum_{j=1}^{3} x_{2j} \leq 15, \\ \sum_{j=1}^{3} x_{3j} \leq 23, \\ \sum_{j=1}^{3} x_{4j} \leq 12, \end{cases} \tag{5}$$

最终，将目标函数和约束条件输入 `linprog` 函数求解，得到最优装配方案为：

	前舱	中仓	后舱
货物1	0	0	0
货物2	10	0	5
货物3	0	12.9474	3
货物4	0	3.0526	0

此时，飞机的最大利润为 $z = 121515.79$.