Apellidos	Vasallo Martín
Nombre	Laura

Preguntas sobre grupos:

1. (4 puntos) Sea $\mathbb{F}_3 = \mathbb{Z}/(3)$ el cuerpo con 3 elementos y $\mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3)$ el grupo de matrices invertibles 2×2 con entradas en $\mathbb{F}_3$.

0,5

(a) (1/2 punto) En el conjunto de vectores no nulos $X = (\mathbb{F}_3 \times \mathbb{F}_3) \backslash \{(0,0)\}$ definimos una relación $\sim$ de la siguiente manera: $\vec{v} \sim \vec{w}$ si y solo si $\vec{v} = \pm\vec{w}$. Prueba que $\sim$ es una relación de equivalencia y da la lista de todos los elementos del conjunto cociente, que denotaremos $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) = X/\sim$, comprobando que hay exactamente cuatro.

(b) (1/2 punto) Dada $A \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3)$, demuestra que la aplicación

$$\begin{aligned} \varphi_A : \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) &\longrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) \\ [\vec{v}] &\longmapsto [A\vec{v}] \end{aligned}$$

está bien definida.

(c) (1/2 punto) Enumera los elementos de $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3)$ cuya lista has dado en el primer apartado, y que denotaremos $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) = \{[\vec{v}_1], [\vec{v}_2], [\vec{v}_3], [\vec{v}_4]\}$. Prueba que, para todo $A \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3)$, la aplicación φ_A es biyectiva y deduce que existe una única permutación $\sigma_A \in S_4$ tal que $\varphi_A([\vec{v}_i]) = [\vec{v}_{\sigma_A(i)}]$ para todo i.

(d) (1/2 punto) Demuestra que la aplicación

$$\begin{aligned} f : \mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3) &\longrightarrow S_4 \\ A &\longmapsto \sigma_A \end{aligned}$$

es un homomorfismo de grupos.

(e) (1 punto) Prueba que para cada trasposición $(i\,j) \in S_4$ existe $A \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3)$ tal que $\sigma_A = (i\,j)$ y deduce de aquí que f es sobreyectiva.

(f) (1 punto) Establece un isomorfismo entre S_4 y un cociente de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3)$, describiendo explícitamente el subgrupo por el que se toma cociente, y úsalo para calcular el número de elementos de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3)$.

Laura Vasallo Martín

TEMA 2

(1º) $\mathbb{F}_3 = \mathbb{Z}/\mathbb{Z}3$ $\qquad GL(2,\mathbb{F}_3)$.

a) $X = \{(\bar{0},\bar{1}),(\bar{0},\bar{2}),(\bar{1},\bar{0}),(\bar{1},\bar{1}),(\bar{1},\bar{2}),(\bar{2},\bar{0}),(\bar{2},\bar{1}),(\bar{2},\bar{2})\}$

$\vec{v} \sim \vec{w} \iff \vec{v} = \pm\vec{w}$

Para ser una relación de equivalencia se deben cumplir las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva.

¿ $\vec{v}\sim\vec{v}$? $\vec{v} = \pm\vec{v}$. Es claro que $\vec{v} = +\vec{v}$. Luego $\vec{v}\sim\vec{v}$

¿si $\vec{v}\sim\vec{w} \Rightarrow \vec{w}\sim\vec{v}$? $\vec{v} = \pm\vec{w}$. Si $\vec{v} = \vec{w} \Rightarrow \vec{w} = \vec{v}$.

Si $\vec{v} = -\vec{w} \Rightarrow \vec{w} = -\vec{v}$

Luego $\vec{v} = \pm\vec{w} \Rightarrow \vec{w} = \pm\vec{v}$ y $\vec{w}\sim\vec{v}$.

¿si $\vec{v}\sim\vec{w}$ y $\vec{w}\sim\vec{z}$, entonces $\vec{v}\sim\vec{z}$? $\vec{v} = \pm\vec{w}$

$\vec{w} = \pm\vec{z}$

$\vec{v} = \pm\underbrace{(\pm\vec{z})}_{\vec{w}} \Rightarrow \vec{v} = \pm\vec{z}$. Luego $\vec{v}\sim\vec{z}$.

$(\bar{0},\bar{1}) = -(\bar{0},\bar{2}) = (\bar{0},-\bar{2})$ $\qquad -2 \equiv 1 \pmod 3$

clases de equivalencia

$$\begin{cases} [(\bar{0},\bar{1})] = \{(\bar{0},\bar{1}),(\bar{0},\bar{2})\} \\ [(\bar{1},\bar{0})] = \{(\bar{1},\bar{0}),(\bar{2},\bar{0})\} \\ [(\bar{1},\bar{1})] = \{(\bar{1},\bar{1}),(\bar{2},\bar{2})\} \qquad 1 \equiv -2 \pmod 3 \\ [(\bar{1},\bar{2})] = \{(\bar{1},\bar{2}),(\bar{2},\bar{1})\} \end{cases}$$

Los elementos del conjunto cociente son las clases de equivalencia.

$X/\sim = \{[(\bar{0},\bar{1})],[(\bar{1},\bar{0})],[(\bar{1},\bar{1})],[(\bar{1},\bar{2})]\}$

Como hemos visto en la asignatura, la notación $\bar{2}$ en $\mathbb{F}_3$ quiere decir todos los números enteros a tales que $2 \equiv a \pmod 3$, es decir, $3 \mid 2-a \Rightarrow 2-a = 3k$, $k\in\mathbb{Z}$, $a = 2-3k$. Igual con $\bar{1}$ y $\bar{0}$.

$\#(X/\sim) = 4$.

b) $A \in GL(2, \mathbb{F}_3)$ matrices invertibles 2×2 con entradas en $\mathbb{F}_3$.

$$\varphi_A : \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) \longrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3)$$
$$[\vec{v}] \longmapsto [A\vec{v}]$$

Una aplicación está bien definida si para todo elemento del conjunto de partida le va asociado un único elemento del conjunto de llegada.

$$\varphi_A([\vec{v}]) = [A\vec{v}]$$

si $\varphi_A([\vec{v}]) = \varphi_A([\vec{u}]) \overset{?}{\Rightarrow} [\vec{v}] = [\vec{u}]$.

Ejemplo:

$$\begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{2} & \bar{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \bar{0} \\ \bar{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{1} \\ \bar{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{2} & \bar{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{0} \\ \bar{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{2} \\ \bar{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{2} \\ \bar{1} \end{pmatrix}$$

$$[(\bar{1}, \bar{2})] = [(\bar{2}, \bar{1})]$$

Laura Vasallo Martín

TEMA 2

c) $[\vec{v}_1] = [(\bar{0},\bar{1})]$

$[\vec{v}_2] = [(\bar{1},\bar{0})]$

$[\vec{v}_3] = [(\bar{1},\bar{1})]$

$[\vec{v}_4] = [(\bar{1},\bar{2})]$

$\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) = \{[\vec{v}_1], [\vec{v}_2], [\vec{v}_3], [\vec{v}_4]\}$

$$\begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{2} & \bar{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \bar{0} \\ \bar{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{1} \\ \bar{2} \end{pmatrix}$$

Que φ_A sea biyectiva quiere decir que es inyectiva y sobreyectiva.

Como la aplicación está bien definida, he visto con un ejemplo en el apartado anterior que si $[A\vec{v}] = [A\vec{u}]$ entonces $[\vec{v}] = [\vec{u}]$. los ejemplos no son demostraciones

si $[\vec{v}]$ y $[\vec{u}]$ son diferentes $\Rightarrow [A\vec{v}] \neq [A\vec{u}]$

$$\begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{2} & \bar{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{0} \\ \bar{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{1} \\ \bar{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{2} & \bar{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{1} \\ \bar{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{1} \\ \bar{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{1} \\ \bar{1} \end{pmatrix}$$

$[(\bar{1},\bar{2})] \neq [(\bar{1},\bar{1})]$.

Así pasa con todos los elementos, así que φ_A es inyectiva.

φ_A es sobreyectiva porque todo elemento $[A\vec{v}]$ tiene preimagen en $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3)$.

d) $\qquad f(AB) = f(A)\,f(B)$

$$f\left(\begin{pmatrix} \bar{1} & 0 \\ 0 & \bar{1} \end{pmatrix}\right) = id_A = ()$$