TEMA 2.

Apellidos	García Caro.
Nombre	Ángela.

Preguntas sobre grupos:

1. (4 puntos) Sea $\mathbb{F}_3 = \mathbb{Z}/(3)$ el cuerpo con 3 elementos y $\mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3)$ el grupo de matrices invertibles 2×2 con entradas en $\mathbb{F}_3$.

   (a) (1/2 punto) En el conjunto de vectores no nulos $X = (\mathbb{F}_3 \times \mathbb{F}_3) \setminus \{(0,0)\}$ definimos una relación $\sim$ de la siguiente manera: $\vec{v} \sim \vec{w}$ si y solo si $\vec{v} = \pm\vec{w}$. Prueba que $\sim$ es una relación de equivalencia y da la lista de todos los elementos del conjunto cociente, que denotaremos $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) = X/\sim$, comprobando que hay exactamente cuatro.

   (b) (1/2 punto) Dada $A \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3)$, demuestra que la aplicación

$$\begin{aligned} \varphi_A : \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) &\longrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) \\ [\vec{v}] &\longmapsto [A\vec{v}] \end{aligned}$$

   está bien definida.

   (c) (1/2 punto) Enumera los elementos de $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3)$ cuya lista has dado en el primer apartado, y que denotaremos $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) = \{[\vec{v}_1], [\vec{v}_2], [\vec{v}_3], [\vec{v}_4]\}$. Prueba que, para todo $A \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3)$, la aplicación φ_A es biyectiva y deduce que existe una única permutación $\sigma_A \in S_4$ tal que $\varphi_A([\vec{v}_i]) = [\vec{v}_{\sigma_A(i)}]$ para todo i.

   (d) (1/2 punto) Demuestra que la aplicación

$$\begin{aligned} f : \mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3) &\longrightarrow S_4 \\ A &\longmapsto \sigma_A \end{aligned}$$

   es un homomorfismo de grupos.

   (e) (1 punto) Prueba que para cada trasposición $(i\,j) \in S_4$ existe $A \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3)$ tal que $\sigma_A = (i\,j)$ y deduce de aquí que f es sobreyectiva.

   (f) (1 punto) Establece un isomorfismo entre S_4 y un cociente de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3)$, describiendo explícitamente el subgrupo por el que se toma cociente, y úsalo para calcular el número de elementos de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3)$.

Ángela Garata Coro.　　　　　　TEMA 2.

1:

→ a.) $f: GL(2, \mathbb{F}_3) \longrightarrow S_4$ ¿homomorfismo?
$A \longmapsto \sigma_A$

$f(A+B) = f(A)+f(B) = \sigma_A + \sigma_A = 1d \in S_4$ puesto que los σ_A es de orden 2.

$f(AB) = f(A)f(B) = \sigma_A \sigma_A = 1d \in S_4$.

Se trata de la aplicación constante que envía a todas las matrices 2×2 de coeficientes en $\mathbb{F}_3$ a σ_A, luego, es homomorfismo.

→ f.) Por el ~~teorema d~~ primer teorema de isomorfías, ~~tenemos~~ podemos determinar una aplicación biyectiva entre S_4 y $GL(2, \mathbb{F}_3)$ a partir del cociente de $S_4/\sim$ y $f(GL(2, \mathbb{F}_3))$ luego, $\sim$ nos determina unas clases de equivalencia que serán los elementos de $S_4/\sim$, como están en biyección, $S_4/\sim$ tiene que tener el mismo orden que $f(GL(2, \mathbb{F}_3))$ y por lo tanto que $GL(2, \mathbb{F}_3)$.
Las clases de equivalencia que se establecen en $S_4/\sim$ deben ser:　　Siendo $S_4 = \{1d, a, b, ab\}$.

~~$\bar{0} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \dots \right\} \to$ todos los coef. cero~~

~~$\bar{1} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \dots \right\}$~~

~~$\bar{2} = \{$~~

$S_4/\sim = \{ (a,0), (0,a), (b,0), (0,b), (ab,0), (0,ab) \}$
↳ ~~son~~ orden 6.

luego, $GL(2, \mathbb{F}_3)$ tiene orden 6.

→ a.) Relación $\sim$: $\vec{v} \sim \vec{w} \iff \vec{v} = \pm \vec{w}$

1-) reflexividad: $x \sim x$

para todo $\vec{v}$ tiene que ser $\vec{v} \sim \vec{v}$, $\vec{v} = \pm \vec{v}$ esto es cierto puesto que $|\vec{v}| = |\pm \vec{v}|$ y $|\vec{v}| = |-\vec{v}| \Rightarrow \vec{v} \sim \vec{v}$.

2-) simetría: $x \sim y$, $y \sim x$.

Sea $\vec{v} \sim \vec{w}$, $\vec{v} = \pm \vec{w}$, luego, $\vec{w} = \pm \vec{v}$ por lo que $\vec{w} \sim \vec{v}$.

3-) transitividad: $x \sim y$, $y \sim z$, $x \sim z$ ~~sea~~

sea $\vec{v} \sim \vec{w}$, $\vec{v} = \pm \vec{w}$ y sea $\vec{w} = \pm \vec{z}$, entonces podemos escribir, $\vec{v} = \pm(\pm \vec{z}) = \pm \vec{z} \iff \vec{v} \sim \vec{z}$.

Luego, $\sim$ es una relación de equivalencia puesto que cumple los tres axiomas.

En $X = \mathbb{F}_3 \times \mathbb{F}_3 / \{0,0\}$ se desarrolla esta ~~equi~~ relación de equivalencia, luego, sea $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) = X/\sim$, veamos sus clases de equivalencia (elementos):

$$\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) = \{(1,0),(2,0),(0,1),(0,2)\} \rightarrow 4 \text{ elementos.}$$