

Apellidos	García Caro.
Nombre	Ángela.

Preguntas sobre grupos:

1. (4 puntos) Sea $\mathbb{F}_3 = \mathbb{Z}/(3)$ el cuerpo con 3 elementos y $\text{GL}(2, \mathbb{F}_3)$ el grupo de matrices invertibles 2×2 con entradas en \mathbb{F}_3 .
- 0'2 (a) ($\frac{1}{2}$ punto) En el conjunto de vectores no nulos $X = (\mathbb{F}_3 \times \mathbb{F}_3) \setminus \{(0, 0)\}$ definimos una relación \sim de la siguiente manera: $\vec{v} \sim \vec{w}$ si y solo si $\vec{v} = \pm \vec{w}$. Prueba que \sim es una relación de equivalencia y da la lista de todos los elementos del conjunto cociente, que denotaremos $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) = X / \sim$, comprobando que hay exactamente cuatro.

- (b) ($\frac{1}{2}$ punto) Dada $A \in \text{GL}(2, \mathbb{F}_3)$, demuestra que la aplicación

$$\begin{aligned} \varphi_A : \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) &\longrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) \\ [\vec{v}] &\longmapsto [A\vec{v}] \end{aligned}$$

está bien definida.

- (c) ($\frac{1}{2}$ punto) Enumera los elementos de $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3)$ cuya lista has dado en el primer apartado, y que denotaremos $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) = \{[\vec{v}_1], [\vec{v}_2], [\vec{v}_3], [\vec{v}_4]\}$. Prueba que, para todo $A \in \text{GL}(2, \mathbb{F}_3)$, la aplicación φ_A es biyectiva y deduce que existe una única permutación $\sigma_A \in S_4$ tal que $\varphi_A([\vec{v}_i]) = [\vec{v}_{\sigma_A(i)}]$ para todo i .

- (d) ($\frac{1}{2}$ punto) Demuestra que la aplicación

$$\begin{aligned} f : \text{GL}(2, \mathbb{F}_3) &\longrightarrow S_4 \\ A &\longmapsto \sigma_A \end{aligned}$$

es un homomorfismo de grupos.

- (e) (1 punto) Prueba que para cada trasposición $(ij) \in S_4$ existe $A \in \text{GL}(2, \mathbb{F}_3)$ tal que $\sigma_A = (ij)$ y deduce de aquí que f es sobreyectiva.

- (f) (1 punto) Establece un isomorfismo entre S_4 y un cociente de $\text{GL}(2, \mathbb{F}_3)$, describiendo explícitamente el subgrupo por el que se toma cociente, y úsalo para calcular el número de elementos de $\text{GL}(2, \mathbb{F}_3)$.

(1)

→ a.) $f: GL(2, \mathbb{F}_3) \rightarrow S_4$ ¿homomorfismo?
 $A \mapsto \sigma_A$ *no tiene sentido*

$f(A+B) = f(A) + f(B) = \sigma_A + \sigma_B = 1d \in S_4$ puesto que σ_A es de orden 2.

$f(AB) = f(A)f(B) = \sigma_A \sigma_A = 1d \in S_4$.

Se trata de la aplicación constante que envía a todas las matrices 2×2 de coeficientes en \mathbb{F}_3 a σ_A , luego, es homomorfismo.

→ b.) Por el ~~teorema~~ primer teorema de isomorfismos, ~~tenemos~~ podemos determinar una aplicación biyectiva entre S_4 y $GL(2, \mathbb{F}_3)$ ✗ a partir del cociente de S_4/n y $f(GL(2, \mathbb{F}_3))$ luego, n nos determina mas clases de equivalencia que serán los elementos de S_4/n , como están en biyección, S_4/n tiene que tener el mismo orden que $f(GL(2, \mathbb{F}_3))$ y por lo tanto que $GL(2, \mathbb{F}_3)$. Las clases de equivalencia que se establecen en S_4/n deben ser:

~~$\bar{0} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \dots \right\} \rightarrow$~~ todas las ~~cos~~ ~~cos~~ Siendo $S_4 = \{1d, a, b, ab\}$.

~~$\bar{1} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \dots \right\}$~~

~~$\bar{2} = \dots$~~

$S_4/n = \{ (a, 0), (0, a), (b, 0), (0, b), (ab, 0), (0, ab) \}$

↳ ~~su~~ Orden 6.

Luego, $GL(2, \mathbb{F}_3)$ tiene orden 6.

→ a.) Relación $\sim: \vec{v} \sim \vec{w} \Leftrightarrow \vec{v} = \pm \vec{w}$

1.) Reflexividad: $x \sim x$

para todo \vec{v} tiene que ser $\vec{v} \sim \vec{v}$, $\vec{v} = \pm \vec{v}$ esto es cierto puesto que $|\vec{v}| = |\vec{v}|$ y $|\vec{v}| = |-\vec{v}| \Rightarrow \vec{v} \sim \vec{v}$.

2.) Simetría: $x \sim y, y \sim x$.

Sea $\vec{v} \sim \vec{w}$, $\vec{v} = \pm \vec{w}$, luego, $\vec{w} = \pm \vec{v}$ por lo que $\vec{w} \sim \vec{v}$.

3.) Transitividad: $x \sim y, y \sim z, x \sim z$.

sea $\vec{v} \sim \vec{w}$, $\vec{v} = \pm \vec{w}$ y sea $\vec{w} = \pm \vec{z}$, entonces podemos escribir, $\vec{v} = \pm(\pm \vec{z}) = \pm \vec{z} \Leftrightarrow \vec{v} \sim \vec{z}$.

(1)

Luego, \sim es una relación de equivalencia puesto que cumple las tres axiomas.

En $X = \mathbb{F}_3 \times \mathbb{F}_3 / \{0,0\}$ se desarrolla esta ~~esta~~ relación de equivalencia, luego, sea $P^2(\mathbb{F}_3) = X/\sim$, veamos sus clases de equivalencia (elementos):

$$P^2(\mathbb{F}_3) = \{ \underbrace{(1,0)}, \underbrace{(2,0)}, \underbrace{(0,1)}, \underbrace{(0,2)} \} \rightarrow 4 \text{ elementos.}$$