

Apellidos	Pérez Jiménez
Nombre	Hugo

Preguntas sobre grupos:

0.5 1. (4 puntos) Sea $\mathbb{F}_3 = \mathbb{Z}/(3)$ el cuerpo con 3 elementos y $\text{GL}(2, \mathbb{F}_3)$ el grupo de matrices invertibles 2×2 con entradas en \mathbb{F}_3 .

(a) ($\frac{1}{2}$ punto) En el conjunto de vectores no nulos $X = (\mathbb{F}_3 \times \mathbb{F}_3) \setminus \{(0, 0)\}$ definimos una relación \sim de la siguiente manera: $\vec{v} \sim \vec{w}$ si y solo si $\vec{v} = \pm \vec{w}$. Prueba que \sim es una relación de equivalencia y da la lista de todos los elementos del conjunto cociente, que denotaremos $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) = X / \sim$, comprobando que hay exactamente cuatro.

U (b) ($\frac{1}{2}$ punto) Dada $A \in \text{GL}(2, \mathbb{F}_3)$, demuestra que la aplicación

$$\begin{aligned} \varphi_A : \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) &\longrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) \\ [\vec{v}] &\longmapsto [A\vec{v}] \end{aligned}$$

está bien definida.

0.5 (c) ($\frac{1}{2}$ punto) Enumera los elementos de $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3)$ cuya lista has dado en el primer apartado, y que denotaremos $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) = \{[\vec{v}_1], [\vec{v}_2], [\vec{v}_3], [\vec{v}_4]\}$. Prueba que, para todo $A \in \text{GL}(2, \mathbb{F}_3)$, la aplicación φ_A es biyectiva y deduce que existe una única permutación $\sigma_A \in S_4$ tal que $\varphi_A([\vec{v}_i]) = [\vec{v}_{\sigma_A(i)}]$ para todo i .

U (d) ($\frac{1}{2}$ punto) Demuestra que la aplicación

$$\begin{aligned} f : \text{GL}(2, \mathbb{F}_3) &\longrightarrow S_4 \\ A &\longmapsto \sigma_A \end{aligned}$$

es un homomorfismo de grupos.

0.5 (e) (1 punto) Prueba que para cada trasposición $(ij) \in S_4$ existe $A \in \text{GL}(2, \mathbb{F}_3)$ tal que $\sigma_A = (ij)$ y deduce de aquí que f es sobreyectiva.

(f) (1 punto) Establece un isomorfismo entre S_4 y un cociente de $\text{GL}(2, \mathbb{F}_3)$, describiendo explícitamente el subgrupo por el que se toma cociente, y úsalo para calcular el número de elementos de $\text{GL}(2, \mathbb{F}_3)$.

Hugo Pérez Jiménez

Ejercicio 1 (T.2)

$$\mathbb{F}_3 = \mathbb{Z}/\mathbb{Z}_3$$

(a) Tomamos $X = (\mathbb{F}_3 \times \mathbb{F}_3) \setminus \{(0,0)\}$ y definimos N como,
 $\underline{v} N \underline{w} \iff \underline{v} = \pm \underline{w}$. Veamos que N es relación de equivalencia:

1) Reflexiva: $\forall \underline{v} \in X \quad \underline{v} = \underline{v} \implies \underline{v} N \underline{v}$

2) Simetría: $\underline{v} N \underline{w} \implies \underline{w} N \underline{v} \iff \underline{v} = \pm \underline{w} \implies \underline{w} = \pm \underline{v}$.

Si $\underline{v} = +\underline{w} \implies \underline{w} = \underline{v}$, si $\underline{v} = -\underline{w} \implies \underline{w} = -\underline{v} \implies$
 $\implies \underline{w} N \underline{v}$.

3) Transitiva: $\underline{v} N \underline{w} N \underline{u} \implies \underline{v} N \underline{u}$. Tenemos $\underline{v} = \pm \underline{w}$
y $\underline{w} = \pm \underline{u}$. Si $\underline{w} = +\underline{u} \implies \underline{v} = \pm \underline{w} = \pm(\underline{u}) \implies \underline{v} N \underline{u}$
Si $\underline{w} = -\underline{u} \implies \underline{v} = \pm(-\underline{u}) \implies \underline{v} = \mp \underline{u} \implies \underline{v} N \underline{u}$

$\therefore N$ es relación de equivalencia.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} N \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} N \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} N \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} N \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \implies$$

$$\implies \mathcal{P}^2(\mathbb{F}_3) = \left\{ \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right], \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right], \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right], \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \right\}.$$

$$\#(\mathcal{P}^2(\mathbb{F}_3)) = 4.$$

(b) $A \in GL(2, \mathbb{F}_3)$, $\varphi_A: \mathcal{P}^2(\mathbb{F}_3) \longrightarrow \mathcal{P}^2(\mathbb{F}_3)$
$$[\underline{v}] \longmapsto A \cdot [\underline{v}]$$

Esta aplicación está definida de tal forma que manda a un elemento $[v]$ de $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3)$ al producto por la izquierda por $A \in GL(2, \mathbb{F}_3)$.

Por ser $[v]$ un vector 2×1 ^(X) con entradas en \mathbb{F}_3 y A una matriz 2×2 con entradas en \mathbb{F}_3 tenemos que el producto está ajustado y produce un vector 2×1 con entradas en \mathbb{F}_3 . Como A es invertible $\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ no ~~existe~~ es posible $\Rightarrow \exists \varphi_A : \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3)$: $\varphi_A = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \notin \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3)$. Por tanto φ_A está bien definida y siempre obtenemos un vector de $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3)$ por ser las filas de las matrices A vectores en $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3)$ distintos al cero por ser A invertible).

c) Tenemos $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) = \langle [v_1] = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, [v_2] = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, [v_3] = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, [v_4] = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \rangle$. Veamos que φ_A es biyectiva para $\forall A \in GL(2, \mathbb{F}_3)$

.) Inyectividad: tomamos $[v], [w] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) : [v] \neq [w]$ pero $\varphi_A([v]) = \varphi_A([w]) \Rightarrow A \cdot [v] = A \cdot [w]$.
Aplicamos $\varphi_{A^{-1}}$ ($A^{-1} \in GL(2, \mathbb{F}_3)$ por definición):

$$\varphi_{A^{-1}}(A[v]) = \varphi(A[w]) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^{-1}A[v] = A^{-1}A[w] \Rightarrow [v] = [w] !!!$$

$$\Rightarrow \varphi_A \text{ inyectiva } \forall A \in GL(2, \mathbb{F}_3).$$

1) Sobreyectividad: $[v] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3)$. Queremos ver que existe $[w] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3)$: $\psi_A([w]) = [v]$. Basta tomar $[w] = A^{-1}[v] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3)$ y $\psi_A([w]) = A \cdot A^{-1}[v] = [v] \Rightarrow \psi_A$ es sobreyectivo $\forall A \in GL(2, \mathbb{F}_3)$.

$\therefore \psi_A$ es biyectiva $\forall A \in GL(2, \mathbb{F}_3)$

Por ser ψ_A biyectiva se tiene que $\forall i \in \{1, 2, 3, 4\}$

$\psi_A([v_i]) = [v_j]$ con $1 \leq j \leq 4$, esto es: ψ_A manda cada i ($1 \leq i \leq 4$) a un j ($1 \leq j \leq 4$) distinto para cada i (por ser ψ_A biyectiva). **La biyectividad no juega un papel aquí**

Esto corresponde a una permutación en S_4 . Sea σ_A dicha permutación.

σ_A es única: Supongamos $\sigma_{A1} \neq \sigma_{A2}$ ($\sigma_{A1}, \sigma_{A2} \in S_4$)

~~ψ_A~~

$$\psi_A([v_i]) = [v_j] \Rightarrow [v_{\sigma_{A1}(i)}] = [v_{\sigma_{A2}(i)}] = [v_j] \Rightarrow *$$

$$\stackrel{*}{\Rightarrow} \sigma_{A1}(i) = \sigma_{A2}(i) = j \Rightarrow \underline{\sigma_{A1} = \sigma_{A2}} !!!$$

(d)

$$f: GL(2, \mathbb{F}_3) \longrightarrow S_4$$

$$A \longmapsto \sigma_A$$

Veamos que f es homomorfismo:

1) I identidad $\Rightarrow f(I) = \sigma_I = \text{id}$. ya que

$$\psi_I([v_i]) = v_i \quad \forall i \in \{1, 2, 3, 4\}$$

$$f(AB) = \sigma_{AB} = \sigma_A \circ \sigma_B = f(A) \cdot f(B)$$

*1

$$\varphi_{AB}([v_i]) \neq \varphi_A(\varphi_B([v_i]))$$

esto no parece relacionado con

$$\therefore f(A^{-1}) = \sigma_{A^{-1}} = \sigma_A^{-1}$$

$$\begin{aligned} *2 \varphi_{A^{-1}}(A \cdot [v_i]) &= \varphi_{A^{-1}}([v_{\sigma_A(i)}]) = A^{-1} \cdot [v_{\sigma_A(i)}] = \\ &= A^{-1} A [v_i] = [v_i] \quad [v_{\sigma_{A^{-1}}(\sigma_A(i))}] = [v_i] \end{aligned}$$

$\Rightarrow f$ es homomorfismo de grupos

$$(e) \forall (ij) \in S_n \exists A \in GL(2, \mathbb{F}_3) : \sigma_A = (ij)$$

Por ser φ_A biyectiva $\forall A \in GL(2, \mathbb{F}_3)$ y

tomando $A^{-1} \in GL(2, \mathbb{F}_3) : [v_i] = A^{-1} [v_j]$ y

$$[v_k] = A^{-1} [v_k] \text{ si}$$

$$k \neq i \text{ y } k \neq j$$

$\varphi_A([v_i]) = [v_j]$, $\varphi_A([v_k]) = [v_k]$. Dicha matriz existe por trabajar en \mathbb{F}_3 .

$$\therefore \forall (ij) \in S_n \exists A \in GL(2, \mathbb{F}_3) : \sigma_A = (ij) .$$

Por ser todo $\sigma \in S_n$ producto de ciclos transposiciones se tiene que $\forall \sigma \in S_n \exists A \in GL(2, \mathbb{F}_3) :$

$$\sigma_A = \sigma \quad \Rightarrow \quad \underline{f \text{ sobreyectiva}} .$$