

Apellidos	Escalante Guardia
Nombre	María José

Preguntas sobre grupos:

1. (4 puntos) Sea $\mathbb{F}_3 = \mathbb{Z}/(3)$ el cuerpo con 3 elementos y $\text{GL}(2, \mathbb{F}_3)$ el grupo de matrices invertibles 2×2 con entradas en \mathbb{F}_3 .

0,5 (a) ($\frac{1}{2}$ punto) En el conjunto de vectores no nulos $X = (\mathbb{F}_3 \times \mathbb{F}_3) \setminus \{(0, 0)\}$ definimos una relación \sim de la siguiente manera: $\vec{v} \sim \vec{w}$ si y solo si $\vec{v} = \pm \vec{w}$. Prueba que \sim es una relación de equivalencia y da la lista de todos los elementos del conjunto cociente, que denotaremos $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) = X / \sim$, comprobando que hay exactamente cuatro.

- (b) ($\frac{1}{2}$ punto) Dada $A \in \text{GL}(2, \mathbb{F}_3)$, demuestra que la aplicación

$$\begin{aligned} \varphi_A : \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) &\longrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) \\ [\vec{v}] &\longmapsto [A\vec{v}] \end{aligned}$$

está bien definida.

- (c) ($\frac{1}{2}$ punto) Enumera los elementos de $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3)$ cuya lista has dado en el primer apartado, y que denotaremos $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) = \{[\vec{v}_1], [\vec{v}_2], [\vec{v}_3], [\vec{v}_4]\}$. Prueba que, para todo $A \in \text{GL}(2, \mathbb{F}_3)$, la aplicación φ_A es biyectiva y deduce que existe una única permutación $\sigma_A \in S_4$ tal que $\varphi_A([\vec{v}_i]) = [\vec{v}_{\sigma_A(i)}]$ para todo i .

- (d) ($\frac{1}{2}$ punto) Demuestra que la aplicación

$$\begin{aligned} f : \text{GL}(2, \mathbb{F}_3) &\longrightarrow S_4 \\ A &\longmapsto \sigma_A \end{aligned}$$

es un homomorfismo de grupos.

- (e) (1 punto) Prueba que para cada trasposición $(ij) \in \underline{S_4}$ existe $A \in \text{GL}(2, \mathbb{F}_3)$ tal que $\sigma_A = (ij)$ y deduce de aquí que f es sobreyectiva.

- (f) (1 punto) Establece un isomorfismo entre S_4 y un cociente de $\text{GL}(2, \mathbb{F}_3)$, describiendo explícitamente el subgrupo por el que se toma cociente, y úsalo para calcular el número de elementos de $\text{GL}(2, \mathbb{F}_3)$.

Maria José Escalante Guardia

① $\mathbb{Z}_3 = \mathbb{F}_3$ $GL(2, \mathbb{F}_3)$ (invertibles)

a) $X = (\mathbb{F}_3 \times \mathbb{F}_3) \setminus \{(0,0)\}$

$\vec{u} \sim \vec{w} \iff \vec{u} = \pm \vec{w}$

Rel. equivalencia si cumple:

1. Reflexiva: $\vec{u} \sim \vec{u} \iff \vec{u} = (\pm) \vec{u} \quad \checkmark$ cierto.

2. Simétrica: $\vec{u} \sim \vec{w} \iff \vec{u} = \vec{w} \iff \vec{w} = \vec{u} \quad \checkmark$
 $\vec{u} = -\vec{w} \iff \vec{w} = -\vec{u} \quad \checkmark$

3. Transitiva: $\vec{u} \sim \vec{w} \iff \vec{u} = \pm \vec{w} \quad \checkmark$
 $\vec{w} \sim \vec{v} \iff \vec{w} = \pm \vec{v} \quad \checkmark$
 $\Rightarrow \vec{u} = \pm \vec{w} = \pm (\pm \vec{v}) \Rightarrow \vec{u} = \pm \vec{v} \Rightarrow \vec{u} \sim \vec{v} \quad \checkmark$

$\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) = X/\sim = \{ \overline{(1,1)}, \overline{(0,1)}, \overline{(1,0)}, \overline{(1,2)} \}$

$[\vec{u}] = \{ \vec{w} \in X \mid \vec{u} = \pm \vec{w} \}$

$\overline{(1,1)} \stackrel{(11)}{=} \overline{(-2,-2)}$

$\overline{(2,2)} \stackrel{(11)}{=} \overline{(-1,-1)}$

$\overline{(1,2)} \stackrel{(11)}{=} \overline{(-2,-1)}$

$\overline{(2,1)} \stackrel{(11)}{=} \overline{(-1,-2)}$

$\overline{(0,1)} \stackrel{(11)}{=} \overline{(0,-2)}$

$\overline{(0,2)} \stackrel{(11)}{=} \overline{(0,-1)}$

$\overline{(1,0)} \stackrel{(11)}{=} \overline{(-2,0)}$

$\overline{(2,0)} \stackrel{(11)}{=} \overline{(-1,0)}$

b) φ_A Bien definida.

$$\begin{pmatrix} a & b & | & 1 & 0 \\ c & d & | & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{aF_2 - cF_1} \begin{pmatrix} a & b & | & 1 & 0 \\ 0 & ad-cb & | & -c & a \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{F_2}{ad-cb}} \begin{pmatrix} a & b & | & 1 & 0 \\ 0 & 1 & | & \frac{-c}{ad-cb} & \frac{a}{ad-cb} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_1 - bF_2} \begin{pmatrix} a & 0 & | & 1 + \frac{cb}{ad-cb} & \frac{-ab}{ad-cb} \\ 0 & 1 & | & \frac{-c}{ad-cb} & \frac{a}{ad-cb} \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{F_1}{a}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & \frac{d}{ad-cb} & \frac{-b}{ad-cb} \\ 0 & 1 & | & \frac{-c}{ad-cb} & \frac{a}{ad-cb} \end{pmatrix}$$

Inversa: $\frac{1}{ad-cb} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

$ad-cb \neq 0.$

$\Leftrightarrow ad \neq cb$

$a \neq b \neq c \neq d$ No pueden ser iguales.

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} av_1 + bv_2 \\ cv_1 + dv_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3)$

$ab \neq cd$

Quieren \downarrow

① $\begin{pmatrix} av_1 \\ dv_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3)$

② $\begin{pmatrix} bv_2 \\ av_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3)$

③ $\begin{pmatrix} av_1 + bv_2 \\ cv_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3)$

① $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ (~~y sus posibles variantes~~) $ab \neq 0$

② $\begin{pmatrix} 0 & b \\ a & 0 \end{pmatrix}$ $a \neq 0 \neq b \checkmark$

③ $\begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix}$ $a \neq b \neq c \neq 0.$

④ $\begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix}$ $a \neq b \neq c.$
 $\rightarrow a^2 \neq bc \pmod{3}$

⑤ $\begin{pmatrix} a & a \\ b & c \end{pmatrix}$ $ac \neq ab$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Las combinaciones de v_1 y $v_2 \in \mathbb{F}_3$ dan un número de \mathbb{F}_3

y como A son invertibles (i.e., $ab \neq cd$), entonces no se anulan los dos números a la vez.

Maria José Escalante Guardoa

$$\textcircled{3} c) \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) = \{ (\overline{0,1}) = [\vec{v}_1], (\overline{1,0}) = [\vec{v}_2], (\overline{1,1}) = [\vec{v}_3], (\overline{1,2}) = [\vec{v}_4] \}$$

φ_A inyectiva $\Rightarrow A[\vec{v}] = A[\vec{u}] \Rightarrow [\vec{v}] = [\vec{u}]$ *no tiene sentido*

$$A[\vec{v}] = A[\vec{u}] \Rightarrow A^{-1} A[\vec{v}] = A^{-1} A[\vec{u}] \Rightarrow [\vec{v}] = [\vec{u}] \checkmark$$

$\Rightarrow \varphi_A$ es inyectiva

$$\varphi_A \text{ sobreyectiva} \Rightarrow \forall [\vec{u}] \exists [\vec{v}] \mid [A\vec{v}] = [\vec{u}]$$

$$\Rightarrow [A\vec{v}] = [\vec{u}] \xrightarrow{A^{-1}} [\vec{v}] = [A^{-1}\vec{u}]$$

$\forall [\vec{u}]$ existe un $[\vec{v}]$ de la anterior forma que cumple la condición.

$\Rightarrow \varphi_A$ es sobreyectiva

$\Rightarrow \varphi_A$ es biyectiva.

$$\text{Si } \exists \begin{pmatrix} G_B \\ G_A \end{pmatrix} \in S_4 \mid \varphi_B([\vec{v}_i]) = [\vec{v}_{G_B(i)}] \quad \forall i$$

$$\Rightarrow \varphi_B([\vec{v}_i]) = [\vec{v}_{G_B(i)}] = [\vec{v}_{G_A(i)}] = \varphi_A([\vec{v}_i])$$

$$\Rightarrow [\vec{v}_{G_B(i)}] = [\vec{v}_{G_A(i)}] \Rightarrow G_B(i) = G_A(i) \quad !!!$$

d)

$$f(AB) = G_{AB}$$

$$f(A) \cdot f(B) = G_A \circ G_B = G_{AB}$$

} f es homomorfismo de grupos.

$$e) \quad (ij) \in S_4 \quad \exists A \in GL(2, \mathbb{F}_3) \quad | \quad \sigma_A = (ij)$$

$$(1\ 2) \xrightarrow{\quad} (1\ 3) \xrightarrow{\quad} (1\ 4) \xrightarrow{\quad} (2\ 3) \xrightarrow{\quad} (2\ 4) \xrightarrow{\quad} (3\ 4)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \overline{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \overline{\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \overline{\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \overline{\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \overline{\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \overline{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}}$$

Como para cada transposición existe un $A \in GL(2, \mathbb{F}_3)$

$\Rightarrow f$ es sobreyectiva tal como está definida.

$$f) \quad \bar{f}: S_4 \longrightarrow GL(2, \mathbb{F}_3)$$