Apellidos	Lara Torrecillas
Nombre	Clara

Preguntas sobre grupos:

1. (4 puntos) Sea $\mathbb{F}_3 = \mathbb{Z}/(3)$ el cuerpo con 3 elementos y $\mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3)$ el grupo de matrices invertibles 2×2 con entradas en $\mathbb{F}_3$.

   (a) ($1/2$ punto) En el conjunto de vectores no nulos $X = (\mathbb{F}_3 \times \mathbb{F}_3) \backslash \{(0, 0)\}$ definimos una relación $\sim$ de la siguiente manera: $\vec{v} \sim \vec{w}$ si y solo si $\vec{v} = \pm\vec{w}$. Prueba que $\sim$ es una relación de equivalencia y da la lista de todos los elementos del conjunto cociente, que denotaremos $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) = X/\sim$, comprobando que hay exactamente cuatro.

   (b) ($1/2$ punto) Dada $A \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3)$, demuestra que la aplicación

   $$\begin{aligned} \varphi_A : \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) &\longrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) \\ [\vec{v}] &\longmapsto [A\vec{v}] \end{aligned}$$

   está bien definida.

   (c) ($1/2$ punto) Enumera los elementos de $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3)$ cuya lista has dado en el primer apartado, y que denotaremos $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) = \{[\vec{v}_1], [\vec{v}_2], [\vec{v}_3], [\vec{v}_4]\}$. Prueba que, para todo $A \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3)$, la aplicación φ_A es biyectiva y deduce que existe una única permutación $\sigma_A \in S_4$ tal que $\varphi_A([\vec{v}_i]) = [\vec{v}_{\sigma_A(i)}]$ para todo i.

   (d) ($1/2$ punto) Demuestra que la aplicación

   $$\begin{aligned} f : \mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3) &\longrightarrow S_4 \\ A &\longmapsto \sigma_A \end{aligned}$$

   es un homomorfismo de grupos.

   (e) (1 punto) Prueba que para cada trasposición $(i\,j) \in S_4$ existe $A \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3)$ tal que $\sigma_A = (i\,j)$ y deduce de aquí que f es sobreyectiva.

   (f) (1 punto) Establece un isomorfismo entre S_4 y un cociente de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3)$, describiendo explícitamente el subgrupo por el que se toma cociente, y úsalo para calcular el número de elementos de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3)$.

Clara Casa Torrecillas

Tema 2

1. a) Para que sea rel. de equivalencia debe cumplirse estas propi: tomamos $\vec{v}, \vec{w}, \vec{x} \in X$

- Reflexividad: $\vec{v} \sim \vec{v} \iff \vec{v} = \pm\vec{v}$ ✓
- Simétrica: $\vec{v} \sim \vec{w} \Rightarrow \vec{w} \sim \vec{v}$

si $\vec{v} = \pm\vec{w} \Rightarrow \vec{w} = \pm\vec{v} = \vec{w} \sim \vec{v}$ ✓

- Transitividad: $\vec{v} \sim \vec{w}$ y $\vec{w} \sim \vec{x} \Rightarrow \vec{v} \sim \vec{x}$

$\vec{v} = \pm\vec{w}$ y $\vec{w} = \pm\vec{x} \Rightarrow \vec{v} = \pm\vec{w} = \pm(\pm\vec{x}) = \pm\vec{x} \Rightarrow \vec{v} = \pm\vec{x}$ ✓

es una relación de equivalencia

$$\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) = \{\overline{(0,1)}, \overline{(1,0)}, \overline{(1,1)}, \overline{(1,2)}\}$$

$$|\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3)| = 4 \;//$$

b) La aplicación $\varphi_A : \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3)$ está bien definida ya que $\varphi([\vec{v}]) = [A\vec{v}] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3)$ $\forall \vec{v} \in \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3)$ $A \in GL(2,\mathbb{F}_3)$

c) La aplicación φ_A es biyectiva $\iff$ es inyectiva y sobreyectiva.

φ_A es inyectiva ya que ningún elemento posee la misma imagen que otro pertenecientes al conjunto de partida

Es decir, $\forall [\vec{v}_1], [\vec{v}_2] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3)$ $\varphi[\vec{v}_1] = \varphi[\vec{v}_2] \Rightarrow [\vec{v}_1] = [\vec{v}_2]$

Además, es sobreyectiva ya que todos los elementos $[A\vec{v}] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3)$ son imagen de algún elemento del conj de salida

Es decir $\forall [A\vec{v}]$ $\varphi[\vec{v}] = [A\vec{v}]$

$\Rightarrow \varphi_A$ es biyectiva

Luego, como φ_A es biyectiva sólo existe una única $\sigma_A \in S_4$ tal que $\varphi_A([\vec{v}_i]) = [\vec{v}_{\sigma_A(i)}]$

sup que $\exists\, \sigma_A$ y $\sigma_A' \in S_4 \Rightarrow$ como φ_A biyectiva $\varphi_A([\vec{v}_i])$ sólo puede obtener un valor $\Rightarrow \varphi_A([\vec{v}_i]) = [\vec{v}_{\sigma_A(i)}] = [\vec{v}_{\sigma'_A(i)}]$

$\Rightarrow \sigma_A = \sigma_A'$

d) Sean $A_1, A_2 \in GL(2,\mathbb{F}_3)$

$\rho(A_1A_2) = \sigma_{A_1}\sigma_{A_2} = \rho(A_1)\rho(A_2) \Rightarrow \rho$ es homomorfismo de grupos

e) Si tomamos $(ij) \in S_4 \Rightarrow$ sabemos que $\exists$ una matriz invertible, 2x2 con entradas en $\mathbb{F}_3$ que corresponde a dicha trasposición $\Rightarrow \sigma_A = (ij)$. Es decir, hay una matriz $A \in GL(2,\mathbb{F}_3)$ que equivale a una trasposición de S_4

Es por ello que todas las permutaciones σ_A tengan una matriz A asociada, es decir, $\forall \sigma_A \in S_4 \;\; \rho(A) = \sigma_A \quad A \in GL(2,\mathbb{F}_3)$
$\Rightarrow \operatorname{im}(\rho) = S_4$

f) según el teorema de la factorización canónica
$\exists \varphi : GL(2,\mathbb{F}_3)/\ker(\rho) \longrightarrow \operatorname{im}(\rho) = S_4$ (visto en el apartado anterior ρ sobreyec.)

tal que φ se trate de un isomorfismo, y
$\ker(\rho) = \{A \mid \rho(A) = id$ (permutación identidad) $\} =$
$= \{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \}$

Para hallar el número de elementos de $GL(2,\mathbb{F}_3)$, sabemos que

$$|GL(2,\mathbb{F}_3)/\ker(\rho)| = \frac{|GL(2,\mathbb{F}_3)|}{|\ker(\rho)|}$$

$$\Rightarrow |GL(2,\mathbb{F}_3)| = |S_4| \cdot |\ker(\rho)| = 4! \cdot 1 = 24$$