

Apellidos	Eernis Catalán
Nombre	César

Preguntas sobre grupos:

1. (4 puntos) Sea $\mathbb{F}_3 = \mathbb{Z}/(3)$ el cuerpo con 3 elementos y $\text{GL}(2, \mathbb{F}_3)$ el grupo de matrices invertibles 2×2 con entradas en \mathbb{F}_3 .

05 (a) ($\frac{1}{2}$ punto) En el conjunto de vectores no nulos $X = (\mathbb{F}_3 \times \mathbb{F}_3) \setminus \{(0, 0)\}$ definimos una relación \sim de la siguiente manera: $\vec{v} \sim \vec{w}$ si y solo si $\vec{v} = \pm \vec{w}$. Prueba que \sim es una relación de equivalencia y da la lista de todos los elementos del conjunto cociente, que denotaremos $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) = X / \sim$, comprobando que hay exactamente cuatro.

- (b) ($\frac{1}{2}$ punto) Dada $A \in \text{GL}(2, \mathbb{F}_3)$, demuestra que la aplicación

$$\begin{aligned} \varphi_A : \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) &\longrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) \\ [\vec{v}] &\longmapsto [A\vec{v}] \end{aligned}$$

está bien definida.

- (c) ($\frac{1}{2}$ punto) Enumera los elementos de $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3)$ cuya lista has dado en el primer apartado, y que denotaremos $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) = \{[\vec{v}_1], [\vec{v}_2], [\vec{v}_3], [\vec{v}_4]\}$. Prueba que, para todo $A \in \text{GL}(2, \mathbb{F}_3)$, la aplicación φ_A es biyectiva y deduce que existe una única permutación $\sigma_A \in S_4$ tal que $\varphi_A([\vec{v}_i]) = [\vec{v}_{\sigma_A(i)}]$ para todo i .

- (d) ($\frac{1}{2}$ punto) Demuestra que la aplicación

$$\begin{aligned} f : \text{GL}(2, \mathbb{F}_3) &\longrightarrow S_4 \\ A &\longmapsto \sigma_A \end{aligned}$$

es un homomorfismo de grupos.

- (e) (1 punto) Prueba que para cada trasposición $(ij) \in S_4$ existe $A \in \text{GL}(2, \mathbb{F}_3)$ tal que $\sigma_A = (ij)$ y deduce de aquí que f es sobreyectiva.
- (f) (1 punto) Establece un isomorfismo entre S_4 y un cociente de $\text{GL}(2, \mathbb{F}_3)$, describiendo explícitamente el subgrupo por el que se toma cociente, y úsalo para calcular el número de elementos de $\text{GL}(2, \mathbb{F}_3)$.

Tema 2

6r

$$\textcircled{1} a) \mathbb{F}_3 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\} ; X = (\mathbb{F}_3 \times \mathbb{F}_3) \setminus \{(0,0)\}$$

$$\vec{v} \sim \vec{w} \Leftrightarrow \vec{v} = \pm \vec{w}$$

Veamos que \sim es una relación de equivalencia:

• P. Reflexiva: $\vec{v} \sim \vec{v} \quad \forall \vec{v} \in X$

$$\vec{v} \sim \vec{v} \Leftrightarrow \vec{v} = \pm \vec{v} \text{ así que como } \vec{v} = \vec{v} \text{ siempre, se cumple } \square$$

• P. Simétrica: $\vec{v} \sim \vec{w} \Leftrightarrow \vec{w} \sim \vec{v} \quad \forall \vec{v}, \vec{w} \in X$

$$\vec{v} = \pm \vec{w} \Leftrightarrow \vec{w} = \pm \vec{v} \text{ por tanto se cumple } \square$$

• P. Transitiva: $(\vec{v} \sim \vec{w}) \wedge (\vec{w} \sim \vec{k}) \Rightarrow \vec{v} \sim \vec{k}$

$$(\vec{v} = \pm \vec{w}) \wedge (\vec{w} = \pm \vec{k}) \Rightarrow \underbrace{\vec{v} = \pm \vec{k}}_{\vec{v} \sim \vec{k}}$$

por tanto se cumple \square

$$P^2(\mathbb{F}_3) = X/\sim = \{(\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{2}), (\bar{1}, \bar{1}), (\bar{1}, \bar{2})\}$$

b) ϕ_A está bien definida ya que sea $A \in GL(2, \mathbb{F}_3)$,
 $\forall [\vec{v}] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3)$, $[\vec{v}]$ siempre tendrá una única imagen $[A\vec{v}]$.
 que pertenece también a $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3)$.

$$[A \cdot \vec{v}] = [\vec{w}] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3)$$

d)

$$f(AB) = \sigma_A \sigma_B = f(A) f(B)$$