Apellidos	Ruiz Hernández
Nombre	Pedro

Preguntas sobre grupos:

1. (4 puntos) Sea $\mathbb{F}_3 = \mathbb{Z}/(3)$ el cuerpo con 3 elementos y $\mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3)$ el grupo de matrices invertibles 2×2 con entradas en $\mathbb{F}_3$.

0'5 (a) (½ punto) En el conjunto de vectores no nulos $X = (\mathbb{F}_3 \times \mathbb{F}_3) \backslash \{(0,0)\}$ definimos una relación $\sim$ de la siguiente manera: $\vec{v} \sim \vec{w}$ si y solo si $\vec{v} = \pm \vec{w}$. Prueba que $\sim$ es una relación de equivalencia y da la lista de todos los elementos del conjunto cociente, que denotaremos $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) = X/\sim$, comprobando que hay exactamente cuatro.

(b) (½ punto) Dada $A \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3)$, demuestra que la aplicación

$$\begin{aligned} \varphi_A : \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) &\longrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) \\ [\vec{v}] &\longmapsto [A\vec{v}] \end{aligned}$$

está bien definida.

(c) (½ punto) Enumera los elementos de $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3)$ cuya lista has dado en el primer apartado, y que denotaremos $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) = \{[\vec{v}_1], [\vec{v}_2], [\vec{v}_3], [\vec{v}_4]\}$. Prueba que, para todo $A \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3)$, la aplicación φ_A es biyectiva y deduce que existe una única permutación $\sigma_A \in S_4$ tal que $\varphi_A([\vec{v}_i]) = [\vec{v}_{\sigma_A(i)}]$ para todo i.

(d) (½ punto) Demuestra que la aplicación

$$\begin{aligned} f : \mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3) &\longrightarrow S_4 \\ A &\longmapsto \sigma_A \end{aligned}$$

es un homomorfismo de grupos.

(e) (1 punto) Prueba que para cada trasposición $(i\,j) \in S_4$ existe $A \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3)$ tal que $\sigma_A = (i\,j)$ y deduce de aquí que f es sobreyectiva.

(f) (1 punto) Establece un isomorfismo entre S_4 y un cociente de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3)$, describiendo explícitamente el subgrupo por el que se toma cociente, y úsalo para calcular el número de elementos de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3)$.

① $\mathbb{F}_3$ $\quad GL(2,\mathbb{F}_3)$ $\quad 2\times 2$ invertibles entradas en $\mathbb{F}_3$

a) $\vec{v}\sim\vec{w} \longleftrightarrow \vec{v}=\pm\vec{w}$ Relación de equivalencia

Reflexiva $\quad \vec{v}\sim\vec{v} \leftrightarrow \vec{v}=\pm\vec{v}$ pero $\vec{v}=\vec{v}$ Siempre //

Simétrica $\quad \vec{v}\sim\vec{w} \longleftrightarrow \vec{v}=\pm\vec{w} \longrightarrow \vec{w}=\mp\vec{v}$
¿$\vec{w}\sim\vec{v}$?

$\downarrow$

$\vec{w}\sim\vec{v}$ //

Transitiva $\quad \vec{v}\sim\vec{w} \quad \vec{v}=\pm\vec{w}$
$\vec{w}\sim\vec{z} \quad \vec{w}=\pm\vec{z}$ $\quad$ ¿$\vec{v}\sim\vec{w}$? $\quad \vec{v}=\pm\vec{w} \nearrow$

$\vec{v} \nearrow \vec{w} \nearrow +\vec{z}$, $\searrow -\vec{z}$; $\quad \vec{v}\searrow -\vec{w}$

$\vec{v}=+\vec{z}$ //
$\vec{v}=-\vec{z}$

$\vec{w}=\pm\vec{z}$ $\quad \vec{v}=\pm\vec{w}=\pm\vec{z}$
$\vec{v}=\pm\vec{z}$ //

$\vec{v}\sim\vec{z}$ //

$\vec{w}\nearrow +\vec{z}$
$\searrow -\vec{z}$

$\vec{v}\sim\vec{z}$ //

Si $\vec{v}=-\vec{w}$ con $\vec{w}=+\vec{z} \rightarrow \vec{v}=-\vec{z}$
$\vec{v}=-\vec{w}$ con $\vec{w}=-\vec{z} \rightarrow \vec{v}=+\vec{z}$ //

Clases de equivalencia $\longrightarrow$ elementos del grupo cociente

$[(1,0)] = \{(1,0),(2,0)\}$ $\qquad -(1,0)=(-1,0)\overset{\mathbb{F}_3}{=}(2,0)$

$\vec{v}=\pm\vec{w} \quad \vec{v}\sim\vec{w}$

$[(1,1)] = \{(1,1),(2,2)\}$

$[(0,1)] = \{(0,1),(0,2)\}$

$[(1,2)] = \{(1,2),(2,1)\}$

Pedro Ruiz

b) $\varphi_A : \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) \longrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3)$ bien definida

$[\vec{v}] \longmapsto [A\vec{v}]$ $\quad A \in GL(2, \mathbb{F}_3)$

por ejemplo $A = I \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad \varphi_A : [\vec{v}] \longrightarrow [\vec{v}_A]$ identidad