

Apellidos	Rizcaino de la Huerfana
Nombre	Pablo

Preguntas sobre grupos:

1. (4 puntos) Sea $\mathbb{F}_3 = \mathbb{Z}/(3)$ el cuerpo con 3 elementos y $\text{GL}(2, \mathbb{F}_3)$ el grupo de matrices invertibles 2×2 con entradas en \mathbb{F}_3 .

OK (a) ($\frac{1}{2}$ punto) En el conjunto de vectores no nulos $X = (\mathbb{F}_3 \times \mathbb{F}_3) \setminus \{(0, 0)\}$ definimos una relación \sim de la siguiente manera: $\vec{v} \sim \vec{w}$ si y solo si $\vec{v} = \pm \vec{w}$. Prueba que \sim es una relación de equivalencia y da la lista de todos los elementos del conjunto cociente, que denotaremos $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) = X / \sim$, comprobando que hay exactamente cuatro.

- ✓ (b) ($\frac{1}{2}$ punto) Dada $A \in \text{GL}(2, \mathbb{F}_3)$, demuestra que la aplicación

$$\begin{aligned} \varphi_A : \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) &\longrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) \\ [\vec{v}] &\longmapsto [A\vec{v}] \end{aligned}$$

está bien definida.

- ✓ (c) ($\frac{1}{2}$ punto) Enumera los elementos de $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3)$ cuya lista has dado en el primer apartado, y que denotaremos $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) = \{[\vec{v}_1], [\vec{v}_2], [\vec{v}_3], [\vec{v}_4]\}$. Prueba que, para todo $A \in \text{GL}(2, \mathbb{F}_3)$, la aplicación φ_A es biyectiva y deduce que existe una única permutación $\sigma_A \in S_4$ tal que $\varphi_A([\vec{v}_i]) = [\vec{v}_{\sigma_A(i)}]$ para todo i .

- (d) ($\frac{1}{2}$ punto) Demuestra que la aplicación

$$\begin{aligned} f : \text{GL}(2, \mathbb{F}_3) &\longrightarrow S_4 \\ A &\longmapsto \sigma_A \end{aligned}$$

es un homomorfismo de grupos.

- (e) (1 punto) Prueba que para cada trasposición $(ij) \in S_4$ existe $A \in \text{GL}(2, \mathbb{F}_3)$ tal que $\sigma_A = (ij)$ y deduce de aquí que f es sobreyectiva.

- (f) (1 punto) Establece un isomorfismo entre S_4 y un cociente de $\text{GL}(2, \mathbb{F}_3)$, describiendo explícitamente el subgrupo por el que se toma cociente, y úsalo para calcular el número de elementos de $\text{GL}(2, \mathbb{F}_3)$.

Vizcaino

①

a) Veamos que es reflexiva:

$$\vec{v} \sim \vec{v} \Leftrightarrow \vec{v} = \pm \vec{v} \quad \checkmark$$

Simétrica:

$$\vec{v} \sim \vec{w} \Leftrightarrow \vec{w} \sim \vec{v}$$

$$\vec{v} = \pm \vec{w} \Leftrightarrow \vec{w} = \pm \vec{v} \quad \checkmark$$

Transitiva:

$$\vec{v} \sim \vec{w} \wedge \vec{w} \sim \vec{u} \Rightarrow \vec{v} \sim \vec{u}$$

$$\vec{v} = \pm \vec{w} \wedge \vec{w} = \pm \vec{u} \Rightarrow \vec{v} = \pm \vec{u} \quad \checkmark$$

Veamos ahora $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3)$:

$$\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) = \left\{ \overline{(0,1)}, \overline{(1,0)}, \overline{(1,1)}, \overline{(1,2)} \right\}$$

$$\overline{(0,1)} = \{ (0,1), (0,2) \}$$

$$\overline{(1,0)} = \{ (1,0), (2,0) \}$$

$$\overline{(1,1)} = \{ (1,1), (2,2) \}$$

$$\overline{(1,2)} = \{ (1,2), (2,1) \}$$

$$b) A \in GL(2, \mathbb{F}_3)$$

$$f_A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$f_A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f_A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$f_A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Dado que $A \in GL(2, \mathbb{F}_3)$
el producto de $A_{2 \times 2} \cdot v_{2 \times 1}$ está
bien definido, y dará como resultado
dos vectores de $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3)$

c)

$$\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

~~QED~~

~~d) Para demostrar que es un homomorfismo hay que comprobar que~~

$$\cancel{f(AA') = f(A) f(A') = \sigma_A \sigma_{A'}}$$

Veamos que es inyectiva: todo elemento tiene imagen

$$x = x' \Leftrightarrow f(x) = f(x') \quad \forall x, x' \in \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3)$$

Sobreyectiva:

$$\forall y \in Y \exists x \in X \quad f(x) = y$$

$$f(x) = A \cdot x \quad \forall x \in \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3)$$

Es biyectiva.