Apellidos	Farnis Catalán
Nombre	César

Preguntas sobre grupos:

1. (4 puntos) Sea $\mathbb{F}_3 = \mathbb{Z}/(3)$ el cuerpo con 3 elementos y $\mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3)$ el grupo de matrices invertibles 2×2 con entradas en $\mathbb{F}_3$.

   (a) ($1/2$ punto) En el conjunto de vectores no nulos $X = (\mathbb{F}_3 \times \mathbb{F}_3)\backslash\{(0,0)\}$ definimos una relación $\sim$ de la siguiente manera: $\vec{v} \sim \vec{w}$ si y solo si $\vec{v} = \pm\vec{w}$. Prueba que $\sim$ es una relación de equivalencia y da la lista de todos los elementos del conjunto cociente, que denotaremos $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) = X/\sim$, comprobando que hay exactamente cuatro.

   (b) ($1/2$ punto) Dada $A \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3)$, demuestra que la aplicación
   $$\begin{aligned} \varphi_A : \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) &\longrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) \\ [\vec{v}] &\longmapsto [A\vec{v}] \end{aligned}$$
   está bien definida.

   (c) ($1/2$ punto) Enumera los elementos de $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3)$ cuya lista has dado en el primer apartado, y que denotaremos $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) = \{[\vec{v}_1], [\vec{v}_2], [\vec{v}_3], [\vec{v}_4]\}$. Prueba que, para todo $A \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3)$, la aplicación φ_A es biyectiva y deduce que existe una única permutación $\sigma_A \in S_4$ tal que $\varphi_A([\vec{v}_i]) = [\vec{v}_{\sigma_A(i)}]$ para todo i.

   (d) ($1/2$ punto) Demuestra que la aplicación
   $$\begin{aligned} f : \mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3) &\longrightarrow S_4 \\ A &\longmapsto \sigma_A \end{aligned}$$
   es un homomorfismo de grupos.

   (e) (1 punto) Prueba que para cada trasposición $(i\,j) \in S_4$ existe $A \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3)$ tal que $\sigma_A = (i\,j)$ y deduce de aquí que f es sobreyectiva.

   (f) (1 punto) Establece un isomorfismo entre S_4 y un cociente de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3)$, describiendo explícitamente el subgrupo por el que se toma cociente, y úsalo para calcular el número de elementos de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3)$.

6

Tema 2

1) a) $\mathbb{F}_3 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$; $X = (\mathbb{F}_3 \times \mathbb{F}_3) \setminus \{(0,0)\}$

$$\vec{v} \sim \vec{w} \iff \vec{v} = \pm \vec{w}$$

Veamos que $\sim$ es una relación de equivalencia:

- P. Reflexiva: $\vec{v} \sim \vec{v} \quad \forall \vec{v} \in X$

  $\vec{v} \sim \vec{v} \iff \vec{v} = \pm \vec{v}$ así que como $\vec{v} = \vec{v}$ siempre, se cumple $\boxtimes$

- P. simétrica: $\underbrace{\vec{v} \sim \vec{w}} \iff \underbrace{\vec{w} \sim \vec{v}} \quad \forall \vec{v}, \vec{w} \in X$

  $\vec{v} = \pm \vec{w} \iff \vec{w} = \pm \vec{v}$ por tanto se cumple $\boxtimes$

- P. transitiva: $\underbrace{(\vec{v} \sim \vec{w})} \wedge \underbrace{(\vec{w} \sim \vec{k})} \Rightarrow \vec{v} \sim \vec{k}$

  $(\vec{v} = \pm \vec{w}) \wedge (\vec{w} = \pm \vec{k}) \Rightarrow \underbrace{\vec{v} = \pm \vec{k}}_{\vec{v} \sim \vec{k}}$

  por tanto se cumple $\boxtimes$

$$\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) = X/\sim = \{(\bar{0},\bar{1}), (\bar{0},\bar{2}), (\bar{1},\bar{1}), (\bar{1},\bar{2})\}$$

b) φ_A está bien definida ya que sea $A \in GL(2, \mathbb{F}_3)$, $\forall [\vec{v}] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3)$, $[\vec{v}]$ siempre tendrá una única imagen $[A\vec{v}]$. que pertenece también a $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3)$

$$[A \cdot \vec{v}] = [\vec{w}] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3)$$

d)

$$f(AB) = \sigma_A \sigma_B = f(A) f(B)$$