Apellidos	Martín Soldado
Nombre	Sergio

Preguntas sobre grupos:

1. (4 puntos) Sea $\mathbb{F}_3 = \mathbb{Z}/(3)$ el cuerpo con 3 elementos y $\mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3)$ el grupo de matrices invertibles 2×2 con entradas en $\mathbb{F}_3$.

   (a) ($1/2$ punto) En el conjunto de vectores no nulos $X = (\mathbb{F}_3 \times \mathbb{F}_3) \setminus \{(0,0)\}$ definimos una relación $\sim$ de la siguiente manera: $\vec{v} \sim \vec{w}$ si y solo si $\vec{v} = \pm\vec{w}$. Prueba que $\sim$ es una relación de equivalencia y da la lista de todos los elementos del conjunto cociente, que denotaremos $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) = X/\sim$, comprobando que hay exactamente cuatro.

   (b) ($1/2$ punto) Dada $A \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3)$, demuestra que la aplicación

   $$\begin{aligned} \varphi_A : \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) &\longrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) \\ [\vec{v}] &\longmapsto [A\vec{v}] \end{aligned}$$

   está bien definida.

   (c) ($1/2$ punto) Enumera los elementos de $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3)$ cuya lista has dado en el primer apartado, y que denotaremos $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) = \{[\vec{v}_1], [\vec{v}_2], [\vec{v}_3], [\vec{v}_4]\}$. Prueba que, para todo $A \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3)$, la aplicación φ_A es biyectiva y deduce que existe una única permutación $\sigma_A \in S_4$ tal que $\varphi_A([\vec{v}_i]) = [\vec{v}_{\sigma_A(i)}]$ para todo i.

   (d) ($1/2$ punto) Demuestra que la aplicación

   $$\begin{aligned} f : \mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3) &\longrightarrow S_4 \\ A &\longmapsto \sigma_A \end{aligned}$$

   es un homomorfismo de grupos.

   (e) (1 punto) Prueba que para cada trasposición $(i\,j) \in S_4$ existe $A \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3)$ tal que $\sigma_A = (i\,j)$ y deduce de aquí que f es sobreyectiva.

   (f) (1 punto) Establece un isomorfismo entre S_4 y un cociente de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3)$, describiendo explícitamente el subgrupo por el que se toma cociente, y úsalo para calcular el número de elementos de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3)$.

He resuelto el ejercicio sólo para algunas matrices de $GL(2, \mathbb{F}_3)$, faltan las matrices con 3 entradas $\neq 0$, es decir, las matrices de la forma

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & \pm 1 \\ \pm 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ \pm 1 & \pm 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \pm 1 \\ \pm 1 & \pm 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \pm 1 & \pm 1 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$$

pero el ejercicio se hace igual, sólo que faltan permutaciones σ_A

Sergio Martín Soldado.

1. $X = (\mathbb{F}_3 \times \mathbb{F}_3) \setminus \{(0,0)\}$.

$\vec{v}, \vec{w} \in X$ están relacionados $\Leftrightarrow$ $\overset{\vec{v} \sim \vec{w}}{\vec{v} = \pm \vec{w}}$.

Para probar que $\sim$ es relación de equiv, veamos si es reflexiva, simétrica y transitiva.

Reflexiva: Sea $\vec{v} \in X$, ¿$\vec{v} \sim \vec{v}$? Sí, ya que $\vec{v} = +\vec{v}$

Simétrica: Sean $\vec{v}, \vec{w} \in X$ ¿$\vec{v} \sim \vec{w} \Rightarrow \vec{w} \sim \vec{v}$?
Supongamos que $\vec{v} \sim \vec{w}$, esto es, $\vec{v} = \pm \vec{w}$.

$$\begin{cases} \text{Si fuera } \vec{v} = +\vec{w} \Rightarrow \vec{w} = +\vec{v} \Rightarrow \vec{w} \sim \vec{v} \\ \text{Si fuera } \vec{v} = -\vec{w} \Rightarrow \vec{w} = -\vec{v} \Rightarrow \vec{w} \sim \vec{v}. \end{cases}$$

Transitiva. Sean $\vec{v}, \vec{w}, \vec{x} \in X$ ¿$\vec{v} \sim \vec{w}$ y $\vec{w} \sim \vec{x} \Rightarrow \vec{v} \sim \vec{x}$?
Supongamos que $\vec{v} \sim \vec{w}$ y $\vec{w} \sim \vec{x}$, esto es, $\vec{v} = \pm \vec{w}$ y $\vec{w} = \pm \vec{x}$.

Si $\vec{v} = +\vec{w}$ y $\vec{w} = +\vec{x} \overset{\text{Igualando}}{\Rightarrow} \vec{v} = +\vec{x} \Rightarrow \vec{v} \sim \vec{x}$.

Si $\vec{v} = -\vec{w}$ y $\underset{(-\vec{w} = -\vec{x})}{\vec{w} = +\vec{x}} \Rightarrow \vec{v} = -\vec{x} \Rightarrow \vec{v} \sim \vec{x}$.

Si $\vec{v} = +\vec{w}$ y $\vec{w} = -\vec{x} \overset{\text{Igualando}}{\Rightarrow} \vec{v} = -\vec{x} \Rightarrow \vec{v} \sim \vec{x}$.

Si $\vec{v} = -\vec{w}$ y $\underset{(-\vec{w} = +\vec{x})}{\vec{w} = -\vec{x}} \Rightarrow \vec{v} = +\vec{x} \Rightarrow \vec{v} \sim \vec{x}$.

En cualquier caso, $\vec{v} \sim \vec{x}$.

Luego al ser $\sim$ reflexiva, simétrica y transitiva, es relación de equivalencia.

Los elementos de X son vectores con dos coordenadas en $\mathbb{F}_3$ (menos el $(0,0)$). Luego serán:

$X = \mathbb{F}_3 \times \mathbb{F}_3 \setminus \{(0,0)\} = \{\vec{(0,1)}, \vec{(0,2)}, \vec{(1,0)}, \vec{(1,1)}, \vec{(1,2)}, \vec{(2,0)}, \vec{(2,1)}, \vec{(2,2)}\}$

Aunque podemos escribir también $X = \{\vec{(0,1)}, \vec{(0,-1)}, \vec{(1,0)}, \vec{(1,1)}, \vec{(1,-1)}, \vec{(-1,0)}, \vec{(-1,1)}, \vec{(-1,-1)}\}$
ya que $2 \equiv -1 \mod 3$.

Luego $[\vec{(0,1)}] = \{\vec{(0,-1)}, \vec{(0,1)}\}$
$[\vec{(1,0)}] = \{\vec{(1,0)}, \vec{(-1,0)}\}$
$[\vec{(1,1)}] = \{\vec{(1,1)}, \vec{(-1,-1)}\}$
$[\vec{(1,-1)}] = \{\vec{(1,-1)}, \vec{(-1,1)}\}$

$\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) = X/\sim = \{[\vec{(0,1)}], [\vec{(1,0)}], [\vec{(1,1)}], [\vec{(1,-1)}]\}$

Efectivamente, $|X/\sim| = 4$.

2. b) $\varphi_A : \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) \to \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3)$

$[\vec{v}] \mapsto [A\vec{v}]$

Probar que está bien definida.

A es de la forma $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ con $x, y, z, t \in \mathbb{F}_3$ y $\det(A) \neq 0$ (Es invertible)

luego A ~~puede~~ no puede tener una fila ~~de~~ o columna únicamente de ceros (ha de ser invertible) y sus entradas han de ser $0, 1,$ ó -1.

Nos deja con las siguientes posibilidades: $A \in \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

Veamos que φ_A está bien definida.

Tomamos $[\vec{v}] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3)$ con $\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ $(a, b \in \mathbb{F}_3)$. Multiplicamos por una matriz A que será de la forma indicada anteriormente; $\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$ ó $\begin{pmatrix} 0 & \pm 1 \\ \pm 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$A\vec{v} = \underset{2\times 2}{\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}} \underset{2\times 1}{\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \pm a \\ \pm b \end{pmatrix}$$

$$A\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 & \pm 1 \\ \pm 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm b \\ \pm a \end{pmatrix}$$

Como $a, b \in \mathbb{F}_3$, $a, b \in \{0, 1, -1\}$, luego el vector $\begin{pmatrix} \pm a \\ \pm b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \pm b \\ \pm a \end{pmatrix}$ está siempre bien definido, pues $\pm a, \pm b \in \mathbb{F}_3$ y no son a, b nulos a la vez

Luego φ_A está bien definida.

c) ~~Sean~~ Sea $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) = \{[\vec{v_1}], [\vec{v_2}], [\vec{v_3}], [\vec{v_4}]\}$ sabiendo que $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) = \{[\overrightarrow{(0,1)}], [\overrightarrow{(1,0)}], [\overrightarrow{(1,1)}], [\overrightarrow{(1,-1)}]\}$

Enumeramos de la siguiente forma:
$$\begin{cases} [\vec{v_1}] = [\overrightarrow{(0,1)}] \\ [\vec{v_2}] = [\overrightarrow{(1,0)}] \\ [\vec{v_3}] = [\overrightarrow{(1,1)}] \\ [\vec{v_4}] = [\overrightarrow{(1,-1)}] \end{cases}$$

Probar que $\forall A \in GL(2, \mathbb{F}_3)$, φ_A es biyectiva, y deduce una única permutación $\sigma_A \in S_4$ tal que $\varphi_A([\vec{v_i}]) = [\vec{v}_{\sigma_A(i)}]$.

CONTINUACIÓN PÁG 2

Sergio Martín Soldado.

2 c) $GL(2, \mathbb{F}_3) = \{$matrices invertibles con entradas en $\mathbb{F}_3\} =$

$$= \Big\{ \overset{①}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}, \overset{①}{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}, \overset{②}{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}, \overset{②}{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}, \overset{③}{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}, \overset{③}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}, \overset{④}{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}, \overset{④}{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}} \Big\}$$

① Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \varphi_A[\vec{v_i}] = [\vec{v_i}]$

Si $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \varphi_A[\vec{v_i}] = [-\vec{v_i}] = [\vec{v_i}]$

Si $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $\vec{v_i} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Rightarrow \varphi_A[\vec{v_i}] = [\overrightarrow{\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}}]$

② Si $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ y $\vec{v_i} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Rightarrow \varphi_A[\vec{v_i}] = [\overrightarrow{\begin{pmatrix} -b \\ -a \end{pmatrix}}] = [\overrightarrow{\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}}]$

Si $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $\vec{v_i} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Rightarrow \varphi_A[\vec{v_i}] = [\overrightarrow{\begin{pmatrix} -a \\ b \end{pmatrix}}]$

③ Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $\vec{v_i} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Rightarrow \varphi_A[\vec{v_i}] = [\overrightarrow{\begin{pmatrix} a \\ -b \end{pmatrix}}] = [\overrightarrow{\begin{pmatrix} -a \\ b \end{pmatrix}}]$

Si $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $\vec{v_i} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Rightarrow \varphi_A[\vec{v_i}] = [\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}]$.

④ Si $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ y $\vec{v_i} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Rightarrow \varphi_A[\vec{v_i}] = [\overrightarrow{\begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}}] = [\overrightarrow{\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}}]$

$\forall A \in GL(2, \mathbb{F}_3)$, φ_A es biyectiva pues al ser cada vector diferente entre sí, φ_A o bien lo deja como está, o bien le cambia el signo al vector, o bien intercambia sus coordenadas, o bien las intercambia y le cambia el signo. De esta forma, cada vector da lugar a otro nuevo y único vector en $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3)$ (luego φ_A es inyectiva); y todos los vectores obtenidos por φ_A están en $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) \Rightarrow Im(\varphi_A) = \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) \Rightarrow \varphi_A$ es sobreyectiva

Ⓐ Al ser φ_A inyectiva y sobreyectiva $\Rightarrow$ es biyectiva.

Consideremos la numeración de las matrices del principio del apartado. Ⓐ

$\varphi_A[\vec{v_i}] = [A\vec{v_i}] = [\vec{v}_{\sigma_A(i)}]$

Si $A = ①$ $\varphi_①[\vec{v_i}] = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{v_i}\right] = \left[\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \vec{v_i}\right]$

luego $\sigma_① \Rightarrow \sigma_①(1) = 1$ $\sigma_①(2) = 2$ $\sigma_①(3) = 3$ $\sigma_①(4) = 4$. $\boxed{\sigma_① = (1)(2)(3)(4)}$

Si $A = ②$ $\varphi_②[\vec{v_i}] = \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \vec{v_i}\right] = \left[\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \vec{v_i}\right]$

luego $\sigma_② \Rightarrow \sigma_②(1) = 2$ $\sigma_②(2) = 1$ $\sigma_②(3) = 3$ $\sigma_②(4) = 4$ $\boxed{\sigma_② = (12)}$

Si $A = ③$ $\varphi_③[\vec{v_i}] = \left[\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{v_i}\right] = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \vec{v_i}\right]$

luego $\sigma_③ \Rightarrow \sigma_③(1) = 1$ $\sigma_③(2) = 2$ $\sigma_③(3) = 4$ $\sigma_③(4) = 3$ $\boxed{\sigma_③ = (34)}$

Si $A = ④$ $\varphi_④[\vec{v_i}] = \left[\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \vec{v_i}\right] = \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \vec{v_i}\right]$

luego $\sigma_④ \Rightarrow \sigma_④(1) = 2$ $\sigma_④(2) = 1$ $\sigma_④(3) = 4$ $\sigma_④(4) = 3$ $\boxed{\sigma_④ = (12)(34)}$

d) $f: GL(2,\mathbb{F}_3) \to S_4$ ¿Es homomorfismo?
$\quad A \mapsto \sigma_A$

Verifiquemos: Dados $A, A' \in GL(2,\mathbb{F}_3) \Rightarrow f(AA') = \sigma_A \circ \sigma_{A'} = f(A) \cdot f(A')$

$f(Id) = f\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \sigma_{①} = (1)(2)(3)(4) = () = id_{S_4}$

Luego f es homomorfismo de grupos.

e) Probar que para cada $(ij) \in S_4$ $\exists A \in GL(2,\mathbb{F}_3)$ tal que $\sigma_A = (ij)$
Deduce que f es sobreyectiva.

Lo hemos calculado antes:

Para $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $A' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \sigma_A = \sigma_{A'} = (1)(2)(3)(4) = ()$

Para $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \sigma_A = \sigma_{A'}$

e) Isomorfismo $\varphi: S_4 \longrightarrow GL(2,\mathbb{F}_3)/N$. Tomamos $N = \ker(f) = \{0\}$

Falta definir el isomorfismo y se razona como sigue:

$\varphi: S_4 \xrightarrow{\cong} GL(2,\mathbb{F}_3)/N$ isomorfismo $\Rightarrow |S_4| = \dfrac{|GL(2,\mathbb{F}_3)|}{|\ker(f)|} \Rightarrow$

$\Rightarrow |GL(2,\mathbb{F}_3)| = 24.$