Apellidos	Roncero Cano
Nombre	Israel

Preguntas sobre grupos:

1. (4 puntos) Sea $\mathbb{F}_3 = \mathbb{Z}/(3)$ el cuerpo con 3 elementos y $\mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3)$ el grupo de matrices invertibles 2×2 con entradas en $\mathbb{F}_3$.

0'25

(a) ($1/2$ punto) En el conjunto de vectores no nulos $X = (\mathbb{F}_3 \times \mathbb{F}_3) \backslash \{(0,0)\}$ definimos una relación $\sim$ de la siguiente manera: $\vec{v} \sim \vec{w}$ si y solo si $\vec{v} = \pm\vec{w}$. Prueba que $\sim$ es una relación de equivalencia y da la lista de todos los elementos del conjunto cociente, que denotaremos $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) = X/\sim$, comprobando que hay exactamente cuatro.

(b) ($1/2$ punto) Dada $A \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3)$, demuestra que la aplicación

$$\begin{aligned} \varphi_A : \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) &\longrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) \\ [\vec{v}] &\longmapsto [A\vec{v}] \end{aligned}$$

está bien definida.

(c) ($1/2$ punto) Enumera los elementos de $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3)$ cuya lista has dado en el primer apartado, y que denotaremos $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) = \{[\vec{v}_1], [\vec{v}_2], [\vec{v}_3], [\vec{v}_4]\}$. Prueba que, para todo $A \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3)$, la aplicación φ_A es biyectiva y deduce que existe una única permutación $\sigma_A \in S_4$ tal que $\varphi_A([\vec{v}_i]) = [\vec{v}_{\sigma_A(i)}]$ para todo i.

(d) ($1/2$ punto) Demuestra que la aplicación

$$\begin{aligned} f : \mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3) &\longrightarrow S_4 \\ A &\longmapsto \sigma_A \end{aligned}$$

es un homomorfismo de grupos.

(e) (1 punto) Prueba que para cada trasposición $(i\,j) \in S_4$ existe $A \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3)$ tal que $\sigma_A = (i\,j)$ y deduce de aquí que f es sobreyectiva.

(f) (1 punto) Establece un isomorfismo entre S_4 y un cociente de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3)$, describiendo explícitamente el subgrupo por el que se toma cociente, y úsalo para calcular el número de elementos de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3)$.

Roncero Caro, Israel

1. $\mathbb{F}_3 = \mathbb{Z}/(3)$, $|\mathbb{F}_3| = 3$ y $GL(2,\mathbb{F}_3)$ matr. inv 2×2 con entradas $\mathbb{F}_3$

a) $X = \{(\mathbb{F}_3 \times \mathbb{F}_3) \setminus \{(0,0)\}\}$. Se define $\vec{v} \sim \vec{w} \iff \vec{v} = \pm\vec{w}$

Para ver que se trata de una relación de equivalencia, veamos:

i) Reflexiva: $\vec{v} \sim \vec{v} \iff \vec{v} = \pm\vec{v}$. Se tiene ✓

ii) Simétrica: $\vec{v} \sim \vec{w} \iff \vec{v} = \pm\vec{w} \overset{?}{\Rightarrow} \vec{w} = \pm\vec{v}$, sí se tiene ✓

iii) Transitiva: $\left.\begin{matrix} \vec{v} \sim \vec{w} \iff v = \pm\vec{w} \\ \vec{w} \sim \vec{z} \iff w = \pm\vec{z} \end{matrix}\right\} \overset{?}{\Rightarrow} v = \pm z$. Pues $v = \pm\vec{w} = \pm(\pm\vec{z}) = \pm z$ ✓

$\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) \cancel{=} \{\bar{0}, \overline{\{1,1\}}, \overline{\{1,2\}}, \overline{\{2,2\}}\}$ donde las clases de equivalencia son:

$\bar{0} = \{(x,y) / x = 0 \wedge y \neq 0 \text{ ó } x \neq 0 \wedge y = 0\}$

$\overline{\{1,1\}} = \{(x,y) / x \in 1+3K \text{ e } y \in 1+3K' \ \forall K,K' \in \mathbb{Z}\}$

$\overline{\{1,2\}} = \{(x,y) / x \in 1+3K \text{ e } y \in 2+3k' \ \forall K,K' \in \mathbb{Z}\}$

$\overline{\{2,2\}} = \{(x,y) / x \in 2+3K \text{ e } y \ y \in 2+3K' \ \forall K,K' \in \mathbb{Z}\}$

En efecto, $|\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3)| = 4$

b) $A \in GL(2,\mathbb{F}_3)$, $\varphi_A : \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) \to \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3)$ bien def.
$[\vec{v}] \mapsto [A\vec{v}]$

Sea $\vec{v} \in \mathbb{F}_3$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ y $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $a,b,c,d \in \mathbb{F}_3$, entonces

$A \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$ donde $(ax+by) \wedge (cx+dy) \in \mathbb{F}_3 \Rightarrow$
$\Rightarrow$ bien definida

c) $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) = \{[\vec{v}_1], [\vec{v}_2], [\vec{v}_3], [\vec{v}_4]\}$ con $[\vec{v}_1] = \bar{0}, [\vec{v}_2] = \overline{\{1,1\}}$
$[\vec{v}_3] = \overline{\{1,2\}}, [\vec{v}_4] = \overline{\{2,2\}}$

Veamos que f_A es biyectiva

i) Inyectividad; supongamos $[A\vec{v}] = [A\vec{w}]$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} z \\ r \end{pmatrix}$

entonces $\begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} az+br \\ cz+dr \end{pmatrix}$, entonces $ax+by = az+br \Rightarrow \cancel{\Rightarrow} a(x-z)+b(y-r)=0$ y
$cx+dy = cz+dr \Rightarrow$
$\Rightarrow c(x-z)+d(y-r)=0$

Como se trata de matrices invertibles, $a,b,c,d \neq 0$, por lo que $x-z=0 \Rightarrow x=z$ y $y-r=0 \Rightarrow y=r$ y se tiene que $\vec{v} = \vec{w} \Rightarrow f_A[\vec{v}] = f_A[\vec{w}]$.

ii) Sobreyectividad; $\forall [A\vec{v}] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3), \exists [\vec{v}] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3)$ tq $f_A[\vec{v}] = [A\vec{v}]$? Es trivial que sí existe, si no, no se podría dar.

Por tanto, iny y sobre $\Rightarrow$ biyectiva

Por R.Abs, supongamos que $\nexists$ permutaciones $\sigma_A \in S_4$ tq $f_A([\vec{v}_i]) = [\vec{v}_{\sigma A(i)}]$, entonces tendríamos que la aplicación no es inyectiva, que es una contradicción.

d) $f: GL(2, \mathbb{F}_3) \longrightarrow S_4$. Veamos si $f(AB) = f(A)f(B)$. Sea
$A \longmapsto \sigma_A$

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$

$AB = \begin{pmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{pmatrix}$

$f(A)f(B) = (1234)(1432) = id$

$f(AB) = (12)(34)(12)(34) = id$

$\sigma_A \cancel{=} (1234)$
$\sigma_B \cancel{=} (1432)$