Apellidos	Morales Ruiz
Nombre	Julia

Preguntas sobre grupos:

1. (4 puntos) Sea $\mathbb{F}_3 = \mathbb{Z}/(3)$ el cuerpo con 3 elementos y $\mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3)$ el grupo de matrices invertibles 2×2 con entradas en $\mathbb{F}_3$.

   (a) ($1/2$ punto) En el conjunto de vectores no nulos $X = (\mathbb{F}_3 \times \mathbb{F}_3) \backslash \{(0,0)\}$ definimos una relación $\sim$ de la siguiente manera: $\vec{v} \sim \vec{w}$ si y solo si $\vec{v} = \pm\vec{w}$. Prueba que $\sim$ es una relación de equivalencia y da la lista de todos los elementos del conjunto cociente, que denotaremos $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) = X/\sim$, comprobando que hay exactamente cuatro.

   (b) ($1/2$ punto) Dada $A \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3)$, demuestra que la aplicación

   $$\begin{aligned} \varphi_A : \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) &\longrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) \\ [\vec{v}] &\longmapsto [A\vec{v}] \end{aligned}$$

   está bien definida.

   (c) ($1/2$ punto) Enumera los elementos de $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3)$ cuya lista has dado en el primer apartado, y que denotaremos $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) = \{[\vec{v}_1], [\vec{v}_2], [\vec{v}_3], [\vec{v}_4]\}$. Prueba que, para todo $A \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3)$, la aplicación φ_A es biyectiva y deduce que existe una única permutación $\sigma_A \in S_4$ tal que $\varphi_A([\vec{v}_i]) = [\vec{v}_{\sigma_A(i)}]$ para todo i.

   (d) ($1/2$ punto) Demuestra que la aplicación

   $$\begin{aligned} f : \mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3) &\longrightarrow S_4 \\ A &\longmapsto \sigma_A \end{aligned}$$

   es un homomorfismo de grupos.

   (e) (1 punto) Prueba que para cada trasposición $(i\,j) \in S_4$ existe $A \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3)$ tal que $\sigma_A = (i\,j)$ y deduce de aquí que f es sobreyectiva.

   (f) (1 punto) Establece un isomorfismo entre S_4 y un cociente de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3)$, describiendo explícitamente el subgrupo por el que se toma cociente, y úsalo para calcular el número de elementos de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3)$.

1. a Reflexiva : $\vec{v} \sim \vec{v} \iff \vec{v} = \pm \vec{v}$ Por tanto $\vec{v} = +\vec{v}$ y se cumple esta propiedad.

Simétrica $\vec{v} \sim \vec{w} \iff \vec{v} = \pm \vec{w}$ y $\vec{w} \sim \vec{v} \iff w = \pm \vec{v}$ se cumple la propiedad simétrica

Transitiva $\vec{v} \sim \vec{w}$ y $\vec{w} \sim z$ entonces $v = \pm w$ y $w = \pm z$

entonces $v = \pm(\pm z) = \pm z$.

Se trata de una relación de equivalencia

Los elementos del conjunto cociente son: $(0,1)$, $(1,0)$, $(1,2)$, $(1,1)$
$[0,1] = \{(0,1),(0,2)\}$, $[1,0] = \{(1,0),(2,0)\}$, $[1,2] = \{(1,2),(2,1)\}$ $[1,1] = \{(1,1),(2,$

b. La aplicación está bien definida ya que $\varphi_A([\vec{v}]) = [A\vec{v}] \in \mathbb{P}^2(F_3)$ $\forall A \in GL(2,$ ya que A es invertible y $\varphi_A([\vec{v}]) \in P^2(F_3)$, ya que A pertenece al grupo de matrices con entradas en $\mathbb{F}_3$, por tanto obtenemos un vector que pertenece a $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3)$ y cada vector tiene una sola imagen.

c. Los elementos de $\mathbb{P}^2(F_3) = \{[(\vec{1,0})], [(\vec{0,1})], [(\vec{1,2})], [(1,1)]\}$.

Para demostrar que φ_A es biyectiva utilizaremos la factorización canónica

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & Y \\ X/\sim \arrow[r, "\bar{f}"] & \mathrm{Im}(f) \arrow[u, "i"'] \end{tikzcd}$$

siendo π la proyección canónica, $\bar{f}$ una aplicación biyectiva y i la inclusión.

Sabemos que $\mathrm{im}(f) \cong Y$, por tanto es sobreyectiva y como π manda cada vector de X en su clase de equivalencia, entonces sabemos que φ_A es biyectiva, ya que $P^2(F_3)$ corresponde con las clases de equivalencia.

d. Para demostrar que es homomorfismo tenemos que demostrar que

$f(e) = e'$ y $f(xy) = f(x)f(y)$

Por tanto si $A = I \Rightarrow f(I) = e$ se cumple.

Si $f(AB) = \sigma_{AB} = \sigma_A \circ \sigma_B = f(A)f(B)$ se trata de un homomorfismo de grupos.

e. Suponiendo que hemos demostrado $\forall (i,j) \in S_4 \; \exists A : f_A = (i,j)$, esto implica que f sobreyectiva ya que toda permutación en S_4 se puede poner como producto de trasposiciones

f. Para establecer un isomorfismo entre S_4 y un cociente de $GL(2, \mathbb{F}_3)$

como $|S_4| = 24$, entonces el cociente tiene que tener cardinal 24.

como $GL(2, \mathbb{F}_3) =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$ Hay 24 elementos

Por tanto y cociente de $GL(2, \mathbb{F}_3)$ es $GL(2, \mathbb{F}_3)/Id$.