Apellidos	Vizcaino de la Huerga
Nombre	Pablo

Preguntas sobre grupos:

1. (4 puntos) Sea $\mathbb{F}_3 = \mathbb{Z}/(3)$ el cuerpo con 3 elementos y $\mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3)$ el grupo de matrices invertibles 2×2 con entradas en $\mathbb{F}_3$.

   (a) ($1/2$ punto) En el conjunto de vectores no nulos $X = (\mathbb{F}_3 \times \mathbb{F}_3) \setminus \{(0,0)\}$ definimos una relación $\sim$ de la siguiente manera: $\vec{v} \sim \vec{w}$ si y solo si $\vec{v} = \pm\vec{w}$. Prueba que $\sim$ es una relación de equivalencia y da la lista de todos los elementos del conjunto cociente, que denotaremos $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) = X/\sim$, comprobando que hay exactamente cuatro.

   (b) ($1/2$ punto) Dada $A \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3)$, demuestra que la aplicación

   $$\begin{aligned} \varphi_A : \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) &\longrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) \\ [\vec{v}] &\longmapsto [A\vec{v}] \end{aligned}$$

   está bien definida.

   (c) ($1/2$ punto) Enumera los elementos de $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3)$ cuya lista has dado en el primer apartado, y que denotaremos $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) = \{[\vec{v}_1], [\vec{v}_2], [\vec{v}_3], [\vec{v}_4]\}$. Prueba que, para todo $A \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3)$, la aplicación φ_A es biyectiva y deduce que existe una única permutación $\sigma_A \in S_4$ tal que $\varphi_A([\vec{v}_i]) = [\vec{v}_{\sigma_A(i)}]$ para todo i.

   (d) ($1/2$ punto) Demuestra que la aplicación

   $$\begin{aligned} f : \mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3) &\longrightarrow S_4 \\ A &\longmapsto \sigma_A \end{aligned}$$

   es un homomorfismo de grupos.

   (e) (1 punto) Prueba que para cada trasposición $(i\,j) \in S_4$ existe $A \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3)$ tal que $\sigma_A = (i\,j)$ y deduce de aquí que f es sobreyectiva.

   (f) (1 punto) Establece un isomorfismo entre S_4 y un cociente de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3)$, describiendo explícitamente el subgrupo por el que se toma cociente, y úsalo para calcular el número de elementos de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3)$.

Vizcaíno

1

a) Veamos que es reflexiva:

$\vec{v} \sim \vec{v} \iff \vec{v} = \pm \vec{v}$ ✓

Simétrica:

$\vec{v} \sim \vec{w} \iff \vec{w} \sim \vec{v}$

$\vec{v} = \pm \vec{w} \iff \vec{w} = \pm \vec{v}$ ✓

Transitiva:

$\vec{v} \sim \vec{w} \wedge \vec{w} \sim \vec{u} \Rightarrow \vec{v} \sim \vec{u}$

$\vec{v} = \pm \vec{w} \wedge \vec{w} = \pm \vec{u} \Rightarrow \vec{v} = \pm \vec{u}$ ✓

Veamos ahora $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3)$:

$\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) = \{ \overline{(0,1)}, \overline{(1,0)}, \overline{(1,1)}, \overline{(1,2)} \}$

$\overline{(0,1)} = \{ (0,1), (0,2) \}$

$\overline{(1,0)} = \{ (1,0), (2,0) \}$

$\overline{(1,1)} = \{ (1,1), (2,2) \}$

$\overline{(1,2)} = \{ (1,2), (2,1) \}$

b) $A \in GL(2, \mathbb{F}_3)$

$f_A\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

$f_A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

$f_A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

$f_A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = A \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

Dado que $A \in GL(2, \mathbb{F}_3)$ el producto de $A_{2x2} \cdot V_{2x1}$ está bien definido, y dará como resultado dos vectores de $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3)$

c)

$\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) = \left\{ \left[\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right], \left[\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right], \left[\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right], \left[\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right] \right\}.$

d) ~~Para demostrar que es un homomorfismo hay que comprobar que~~

~~$f(AA') = f(A) f(A') = \sigma_A \sigma_{A'}$~~

Veamos que es inyectiva: ~~todo elemento tiene imagen~~

$x = x' \Leftrightarrow f(x) = f(x') \quad \forall\, x, x' \in \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3)$

Sobreyectiva:

$\forall y \in Y \ \exists x \ tq \ f(x) = y$

$f(x) = A \cdot x \quad \forall \ x \in \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3).$

Es biyectiva.