

Apellidos	Ruiz Hernández
Nombre	Pedro

Preguntas sobre grupos:

1. (4 puntos) Sea $\mathbb{F}_3 = \mathbb{Z}/(3)$ el cuerpo con 3 elementos y $\text{GL}(2, \mathbb{F}_3)$ el grupo de matrices invertibles 2×2 con entradas en \mathbb{F}_3 .

(a) ($\frac{1}{2}$ punto) En el conjunto de vectores no nulos $X = (\mathbb{F}_3 \times \mathbb{F}_3) \setminus \{(0, 0)\}$ definimos una relación \sim de la siguiente manera: $\vec{v} \sim \vec{w}$ si y solo si $\vec{v} = \pm \vec{w}$. Prueba que \sim es una relación de equivalencia y da la lista de todos los elementos del conjunto cociente, que denotaremos $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) = X / \sim$, comprobando que hay exactamente cuatro.

(b) ($\frac{1}{2}$ punto) Dada $A \in \text{GL}(2, \mathbb{F}_3)$, demuestra que la aplicación

$$\begin{aligned} \varphi_A : \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) &\longrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) \\ [\vec{v}] &\longmapsto [A\vec{v}] \end{aligned}$$

está bien definida.

(c) ($\frac{1}{2}$ punto) Enumera los elementos de $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3)$ cuya lista has dado en el primer apartado, y que denotaremos $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) = \{[\vec{v}_1], [\vec{v}_2], [\vec{v}_3], [\vec{v}_4]\}$. Prueba que, para todo $A \in \text{GL}(2, \mathbb{F}_3)$, la aplicación φ_A es biyectiva y deduce que existe una única permutación $\sigma_A \in S_4$ tal que $\varphi_A([\vec{v}_i]) = [\vec{v}_{\sigma_A(i)}]$ para todo i .

(d) ($\frac{1}{2}$ punto) Demuestra que la aplicación

$$\begin{aligned} f : \text{GL}(2, \mathbb{F}_3) &\longrightarrow S_4 \\ A &\longmapsto \sigma_A \end{aligned}$$

es un homomorfismo de grupos.

(e) (1 punto) Prueba que para cada trasposición $(ij) \in S_4$ existe $A \in \text{GL}(2, \mathbb{F}_3)$ tal que $\sigma_A = (ij)$ y deduce de aquí que f es sobreyectiva.

(f) (1 punto) Establece un isomorfismo entre S_4 y un cociente de $\text{GL}(2, \mathbb{F}_3)$, describiendo explícitamente el subgrupo por el que se toma cociente, y úsalo para calcular el número de elementos de $\text{GL}(2, \mathbb{F}_3)$.

① \mathbb{F}_3 $GL(2, \mathbb{F}_3)$ 2×2 invertibles entradas en \mathbb{F}_3

a) $\vec{v} \sim \vec{w} \iff \vec{v} = \pm \vec{w}$ Relación de equivalencia

Reflexiva $\vec{v} \sim \vec{w} \iff \vec{v} = \pm \vec{v}$ pero $\vec{v} = \vec{v}$ Siempre //

Simétrica $\vec{v} \sim \vec{w} \iff \vec{v} = \pm \vec{w} \rightarrow \vec{w} = \mp \vec{v}$
 $\{\vec{w} \sim \vec{v}\}$

Transitiva $\vec{v} \sim \vec{w} \quad \vec{v} = \pm \vec{w}$
 $\vec{w} \sim \vec{z} \quad \vec{w} = \pm \vec{z}$ \downarrow $\vec{w} \sim \vec{v}$ //

$\vec{v} \sim \vec{w} \quad \vec{v} = \pm \vec{w}$
 $\vec{w} \sim \vec{z} \quad \vec{w} = \pm \vec{z}$ \downarrow $\vec{v} \sim \vec{z}$? $\vec{v} = \pm \vec{w} \rightarrow \vec{v} = \pm(\pm \vec{z})$
 $\vec{v} = \pm \vec{z}$ $\vec{v} \sim \vec{z}$ //

Clases de equivalencia \rightarrow elementos del grupo cociente \mathbb{F}_3

$$[(1,0)] = \{(1,0), (2,0)\}$$

$$[(1,1)] = \{(1,1), (2,2)\}$$

$$[(0,1)] = \{(0,1), (0,2)\}$$

$$[(1,2)] = \{(1,2), (2,1)\}$$

$$-(1,0) = (-1,0) \stackrel{\mathbb{F}_3}{=} (2,0)$$

$$\vec{v} = \pm \vec{w} \quad \vec{v} \sim \vec{w}$$

$\varphi_A: \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3)$ bien definida
 $[\vec{v}] \mapsto [A\vec{v}] \quad A \in GL(2, \mathbb{F}_3)$

por ejemplo $A = I \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \varphi_A: [\vec{v}] \rightarrow [\vec{v}_A]$ identidad