

Apellidos	FIGUEROA RENDÓN
Nombre	TERESA

Preguntas sobre grupos:

1. (4 puntos) Sea $\mathbb{F}_3 = \mathbb{Z}/(3)$ el cuerpo con 3 elementos y $\text{GL}(2, \mathbb{F}_3)$ el grupo de matrices invertibles 2×2 con entradas en \mathbb{F}_3 .

(a) ($\frac{1}{2}$ punto) En el conjunto de vectores no nulos $X = (\mathbb{F}_3 \times \mathbb{F}_3) \setminus \{(0, 0)\}$ definimos una relación \sim de la siguiente manera: $\vec{v} \sim \vec{w}$ si y solo si $\vec{v} = \pm \vec{w}$. Prueba que \sim es una relación de equivalencia y da la lista de todos los elementos del conjunto cociente, que denotaremos $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) = X / \sim$, comprobando que hay exactamente cuatro.

(b) ($\frac{1}{2}$ punto) Dada $A \in \text{GL}(2, \mathbb{F}_3)$, demuestra que la aplicación

$$\begin{aligned} \varphi_A : \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) &\longrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) \\ [\vec{v}] &\longmapsto [A\vec{v}] \end{aligned}$$

está bien definida.

(c) ($\frac{1}{2}$ punto) Enumera los elementos de $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3)$ cuya lista has dado en el primer apartado, y que denotaremos $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) = \{[\vec{v}_1], [\vec{v}_2], [\vec{v}_3], [\vec{v}_4]\}$. Prueba que, para todo $A \in \text{GL}(2, \mathbb{F}_3)$, la aplicación φ_A es biyectiva y deduce que existe una única permutación $\sigma_A \in S_4$ tal que $\varphi_A([\vec{v}_i]) = [\vec{v}_{\sigma_A(i)}]$ para todo i .

(d) ($\frac{1}{2}$ punto) Demuestra que la aplicación

$$\begin{aligned} f : \text{GL}(2, \mathbb{F}_3) &\longrightarrow S_4 \\ A &\longmapsto \sigma_A \end{aligned}$$

es un homomorfismo de grupos.

(e) (1 punto) Prueba que para cada trasposición $(ij) \in S_4$ existe $A \in \text{GL}(2, \mathbb{F}_3)$ tal que $\sigma_A = (ij)$ y deduce de aquí que f es sobreyectiva.

(f) (1 punto) Establece un isomorfismo entre S_4 y un cociente de $\text{GL}(2, \mathbb{F}_3)$, describiendo explícitamente el subgrupo por el que se toma cociente, y úsalo para calcular el número de elementos de $\text{GL}(2, \mathbb{F}_3)$.

$$\mathbb{F}_3 = \mathbb{Z}/2/3 \quad GL(2, \mathbb{F}_3) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{F}_3 \right\}$$

$$\{ \bar{0}, \bar{1}, \bar{2} \}$$

a) X/\sim relación $\bar{v} \sim \bar{w} \Leftrightarrow \bar{v} = \pm \bar{w}$

reflexiva: $\bar{v} \sim \bar{w} \Rightarrow \bar{v} = \pm \bar{v} \checkmark$

simétrica: $\bar{v} \sim \bar{w} \Rightarrow \bar{v} = \pm \bar{w} \Rightarrow \bar{w} = \pm \bar{v} \Rightarrow \bar{w} \sim \bar{v} \checkmark$

transitiva: $\begin{matrix} \bar{v} \sim \bar{w} \Rightarrow \bar{v} = \pm \bar{w} \\ \bar{w} \sim \bar{z} \Rightarrow \bar{w} = \pm \bar{z} \end{matrix} \Bigg\} \Rightarrow \bar{v} = \pm \bar{z} \checkmark$

$$X/\sim = \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) = \{ (\bar{1}, \bar{1}), (\bar{1}, \bar{2}), (\bar{2}, \bar{1}), (\bar{2}, \bar{2}) \} \quad 4 \text{ elementos.}$$

$$X = \mathbb{F}_3 \times \mathbb{F}_3 \setminus \{(0, 0)\}$$

