Apellidos	PARRA TEJIDO
Nombre	PABLO

Preguntas sobre grupos:

1. (4 puntos) Sea $\mathbb{F}_3 = \mathbb{Z}/(3)$ el cuerpo con 3 elementos y $\mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3)$ el grupo de matrices invertibles 2×2 con entradas en $\mathbb{F}_3$.

0'25 (a) ($1/2$ punto) En el conjunto de vectores no nulos $X = (\mathbb{F}_3 \times \mathbb{F}_3) \setminus \{(0,0)\}$ definimos una relación $\sim$ de la siguiente manera: $\vec{v} \sim \vec{w}$ si y solo si $\vec{v} = \pm \vec{w}$. Prueba que $\sim$ es una relación de equivalencia y da la lista de todos los elementos del conjunto cociente, que denotaremos $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) = X/\sim$, comprobando que hay exactamente cuatro.

(b) ($1/2$ punto) Dada $A \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3)$, demuestra que la aplicación

$$\begin{aligned} \varphi_A : \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) &\longrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) \\ [\vec{v}] &\longmapsto [A\vec{v}] \end{aligned}$$

está bien definida.

(c) ($1/2$ punto) Enumera los elementos de $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3)$ cuya lista has dado en el primer apartado, y que denotaremos $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) = \{[\vec{v}_1], [\vec{v}_2], [\vec{v}_3], [\vec{v}_4]\}$. Prueba que, para todo $A \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3)$, la aplicación φ_A es biyectiva y deduce que existe una única permutación $\sigma_A \in S_4$ tal que $\varphi_A([\vec{v}_i]) = [\vec{v}_{\sigma_A(i)}]$ para todo i.

(d) ($1/2$ punto) Demuestra que la aplicación

$$\begin{aligned} f : \mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3) &\longrightarrow S_4 \\ A &\longmapsto \sigma_A \end{aligned}$$

es un homomorfismo de grupos.

(e) (1 punto) Prueba que para cada trasposición $(i\,j) \in S_4$ existe $A \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3)$ tal que $\sigma_A = (i\,j)$ y deduce de aquí que f es sobreyectiva.

(f) (1 punto) Establece un isomorfismo entre S_4 y un cociente de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3)$, describiendo explícitamente el subgrupo por el que se toma cociente, y úsalo para calcular el número de elementos de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3)$.

Pablo Parra Tejido

Ejercicio 1

a) $\overline{v}\sim\overline{w} \Longleftrightarrow \overline{v}=\pm\overline{w}$

- Reflexiva ~~Simétrica~~: $\overline{v}\sim\overline{v} \Rightarrow$ es evidente: $\overline{v}=+\overline{v}$

- Simétrica: $\overline{v}\sim\overline{w} \Rightarrow \overline{w}\sim\overline{v} \Rightarrow$ se tiene que si $\overline{v}=\pm\overline{w} \Longrightarrow$ $\overline{w}=\pm\overline{v}$, o sea ambos del mismo signo u opuesto.

- Transitiva: $\overline{v}\sim\overline{w} \Rightarrow$ y $\overline{w}\sim\overline{u} \Rightarrow \overline{v}\sim\overline{u}$, es decir, $\overline{v}=\pm\overline{w}$ y $\overline{w}=\pm\overline{u}$, o sea que $\overline{v}$ bien tiene mismo signo u opuesto a $\overline{u}$: $\overline{v}=\pm\overline{u}$.

- Elementos: x ; $x+1$; $x+2 \Rightarrow \mathbb{F}_3\times\mathbb{F}_3$ $\{x^2, x^2+x, x^2+2x+1 ; x^2+x+1\}$.

b) Está bien definida, es una operación cerrada bajo la multiplicación, todo queda en $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3)$, y $[\overline{v}]\mapsto[A\overline{v}]$