Apellidos	Díaz Arroyo
Nombre	Manuel

Preguntas sobre grupos:

1. (4 puntos) Sea $\mathbb{F}_3 = \mathbb{Z}/(3)$ el cuerpo con 3 elementos y $\mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3)$ el grupo de matrices invertibles 2×2 con entradas en $\mathbb{F}_3$.

   (a) ($1/2$ punto) En el conjunto de vectores no nulos $X = (\mathbb{F}_3 \times \mathbb{F}_3)\backslash\{(0,0)\}$ definimos una relación $\sim$ de la siguiente manera: $\vec{v} \sim \vec{w}$ si y solo si $\vec{v} = \pm\vec{w}$. Prueba que $\sim$ es una relación de equivalencia y da la lista de todos los elementos del conjunto cociente, que denotaremos $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) = X/\sim$, comprobando que hay exactamente cuatro.

   (b) ($1/2$ punto) Dada $A \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3)$, demuestra que la aplicación

   $$\begin{aligned}\varphi_A : \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) &\longrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3)\\ [\vec{v}] &\longmapsto [A\vec{v}]\end{aligned}$$

   está bien definida.

   (c) ($1/2$ punto) Enumera los elementos de $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3)$ cuya lista has dado en el primer apartado, y que denotaremos $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) = \{[\vec{v}_1], [\vec{v}_2], [\vec{v}_3], [\vec{v}_4]\}$. Prueba que, para todo $A \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3)$, la aplicación φ_A es biyectiva y deduce que existe una única permutación $\sigma_A \in S_4$ tal que $\varphi_A([\vec{v}_i]) = [\vec{v}_{\sigma_A(i)}]$ para todo i.

   (d) ($1/2$ punto) Demuestra que la aplicación

   $$\begin{aligned}f : \mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3) &\longrightarrow S_4\\ A &\longmapsto \sigma_A\end{aligned}$$

   es un homomorfismo de grupos.

   (e) (1 punto) Prueba que para cada trasposición $(i\,j) \in S_4$ existe $A \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3)$ tal que $\sigma_A = (i\,j)$ y deduce de aquí que f es sobreyectiva.

   (f) (1 punto) Establece un isomorfismo entre S_4 y un cociente de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3)$, describiendo explícitamente el subgrupo por el que se toma cociente, y úsalo para calcular el número de elementos de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3)$.

②

Manuel Díaz Araujo.

ⓐ ~~Demostrar~~ Demuestro que es una relación de equivalencia:

Reflexiva: $\vec{v} \sim \vec{v} \Rightarrow \vec{v} = \pm \vec{v}$ ✓

(~~Transitiva: Supongamos~~)

Simétrica: $\vec{v} \sim \vec{n} \Rightarrow \vec{n} = \vec{v}$

Supongamos que $\vec{v} = \pm \vec{n} \Rightarrow \vec{n} = \pm v \Rightarrow \vec{n} \sim \vec{v}$.

② Transitiva: $\vec{v} \sim \vec{n} \wedge \overset{①}{\vec{n} \sim \vec{w}} \Rightarrow \vec{v} \sim \vec{w}$

Supongamos ① $\Rightarrow$ $\vec{v} = \pm \vec{n} \wedge \vec{n} = \pm w$ Por ② $\vec{v} = \pm \vec{n}$
$\vec{w} = \pm \vec{n}$
$\Downarrow$
$\vec{v} = \pm \vec{w}$

$\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) = \left\{ \overline{(2,1)}, \overline{(0,1)}, \overline{(1,0)}, \overline{(1,1)} \right\}$

Ya que estamos en $\mathbb{F}_3$.

ⓑ Supongamos que $\vec{v}_1 = \vec{v}_2$.

$\Downarrow$

$v_1 - v_2 \in I \Rightarrow A(v_1 - v_2)$ tiene que pertenecer al I.

Pero, sabemos ~~que~~ $\Rightarrow A(v_1 - v_2) \in I$

Por definición de ideal.

Por lo que $A\vec{v}_1 = A\vec{v}_2 \Rightarrow$ Está bien definida.

(a) $\overline{(0,0)} = \{(0,0)\}$

$\overline{(0,1)} = \{(0,1),(0,-2),(0,2)\}$

$\overline{(1,0)} = \{(1,0),(-2,0),(2,0)\}$

$\overline{(1,1)} = \{(1,1),(-2,1),(2,-1),(-2,-2),(2,2),($

(c) $|\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3)| = \{ \underset{[\vec{v}_1]}{\overline{(2,1)}}, \underset{[\vec{v}_2]}{\overline{(0,1)}}, \underset{[\vec{v}_3]}{\overline{(1,0)}}, \underset{[\vec{v}_4]}{\overline{(1,1)}} \}$

- Supongamos que $\exists A$: f_A no sea biyectiva, como el conjunto de llegada es el mismo que el de partida ⇒ todo esto implica que $\exists A$: siendo $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ distintos

$A\vec{v}_1 = A\cdot\vec{v}_2 \Rightarrow$ (Siendo A invertible por definición)

$A^{-1}\cdot A\cdot \vec{v}_1 = A^{-1}\cdot A\cdot \vec{v}_2 \Rightarrow \vec{v}_1 = \vec{v}_2$!!!

Por lo que todas las matrices de $GL(2,\mathbb{F}_3)$ establecen una aplicación biyectiva.

- Sabemos entonces que cada vector v_i, $i=\{1,2,3,4\}$, va a ir a un vector v_j, $j=\{1,2,3,4\}$, ~~(ya que el vector v_1 siempre va a ir a v_1 $A\cdot\binom{0}{0}=\binom{0}{0}$)~~

Por lo que ~~existe~~ para cada matriz A, existe una permutación σ_A:

$f_A([\vec{v}_i]) = \vec{v}_{\sigma_A(i)}$ y siempre va a ser de la forma $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\ h&i&j&k\end{pmatrix}$

Con $h,i,j,k \in \{1,2,3,4\}$

Manuel Díaz Amoyo

$f(A_1) = \sigma_{A_1}$

$f(A_2) = \sigma_{A_2}$

(d)

$$\cancel{f(A_1 \cdot A_2) = f(A_1) \circ f(A_2) = \sigma_{A_1} \circ \sigma_{A_2}}$$

Veamos que $[A_1 \cdot v_i] = \vec{v}^{\,e}_{\sigma_{A_1}(i)} \Rightarrow [A_2 \cdot A_1 \cdot v_i] = \vec{v}^{\,e}_{\sigma_{A_2}(\sigma_{A_1}(i))}$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{f(A_2) \circ f(A_1) = \sigma_{A_2} \circ \sigma_{A_1} = f(A_2 \cdot A_1)}$$

(e)

~~(Sabemos por los apartados anteriores que cualquier permutación de vectores es isomorfo al grupo S_4, por lo que a su vez)~~

Como $\ell_A([\vec{v}_i^{\,e}]) = [v_{\sigma_A(i)}]$, podemos representar ~~en el~~ esta aplicación como una permutación, además, como las matrices representan movimientos en el espacio, y demostramos, que a cada matriz le pertenece una permutación, en específico podemos realizar transposiciones con matrices 2x2.

Se deduce fácilmente que f es sobreyectiva ya que $\forall$ permutación debe existir una matriz que represente dicha permutación.

8 ~~Ordenemos de nuevo el conjunto~~:

$\cancel{\{ (\overline{0},\overline{1}),\ (\overline{1},\overline{0}),\ (}$

$\cancel{[v_1] \quad [v_2]}$

$\boxed{\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} = (\ )}$

$\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix} \simeq (1\,4)$

Y así se definiría todo pero no me da tiempo

Como existe el isomorfismo entre S_4 y $GL(2,\mathbb{F}_3)$, el número de elementos de $S_4 = 4! \Rightarrow |GL(2,\mathbb{F}_3)| = 4!$