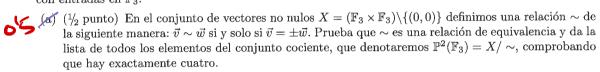
Apellidos	collissant agai
Nombre	ciara

## Preguntas sobre grupos:

1. (4 puntos) Sea  $\mathbb{F}_3 = \mathbb{Z}/(3)$  el cuerpo con 3 elementos y  $GL(2, \mathbb{F}_3)$  el grupo de matrices invertibles  $2 \times 2$  con entradas en  $\mathbb{F}_3$ .



 $\mathcal{O}(b)$  (½ punto) Dada  $A \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{F}_3)$ , demuestra que la aplicación

$$\varphi_A: \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) \longrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3)$$

$$|\vec{v}| \longmapsto |A\vec{v}|$$

está bien definida.

- (°) (1/2 punto) Enumera los elementos de  $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3)$  cuya lista has dado en el primer apartado, y que denotaremos  $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) = \{[\vec{v}_1], [\vec{v}_2], [\vec{v}_3], [\vec{v}_4]\}$ . Prueba que, para todo  $A \in GL(2, \mathbb{F}_3)$ , la aplicación  $\varphi_A$  es biyectiva y deduce que existe una única permutación  $\sigma_A \in S_4$  tal que  $\varphi_A([\vec{v}_i]) = [\vec{v}_{\sigma_A(i)}]$  para todo i.
- (d) (½ punto) Demuestra que la aplicación

$$f: \mathrm{GL}(2,\mathbb{F}_3) \longrightarrow S_4$$
  
 $A \longmapsto \sigma_A$ 

es un homomorfismo de grupos.

- (e) (1 punto) Prueba que para cada trasposición  $(ij) \in S_4$  existe  $A \in GL(2, \mathbb{F}_3)$  tal que  $\sigma_A = (ij)$  y deduce de aquí que f es sobreyectiva.
- (f) (1 punto) Establece un isomorfismo entre  $S_4$  y un cociente de  $GL(2, \mathbb{F}_3)$ , describiendo explícitamente el subgrupo por el que se toma cociente, y úsalo para calcular el número de elementos de  $GL(2, \mathbb{F}_3)$ .



## rema 2

a) para que con rol. de aquissancia debe aumpeirse estes propri - pagoexividad v~v = v = ±v v ranomo V, W, X e X

- sumétrico: 7~ \$ = \$ \$ ~ 7

si マーナゼ e びっナマー ガーマン

- Trouvoitavada:  $\vec{7} \sim \vec{\omega} \quad \vec{y} \quad \vec{\omega} \sim \vec{x} = \vec{7} \sim \vec{x}$ マニュー タ ロニュース コ マニュロニュ (ナズ) ニュスコ マニナズン

es una relación de operiorencia

 $P^{2}(F_{8}) = \frac{1}{2}(0,1), (1,0), (1,1), (1,2)$ 1 P2(F3) (=4/

b) la opeiación (lA: P2(F3) enta bien definida la que  $Q(\overline{V}) = [AV] \in \mathbb{R}^2(\mathbb{H}_3)$   $AV \in \mathbb{R}^2(\mathbb{H}_3)$   $A \in GL(2,\mathbb{H}_3)$ 

c) la operación les es bijectivos es eringeativos y sobrojectivos. la es surjectios ya que atrijen elevento parce da mirua inaper que otro parteneciontos as anjunto ae reclido to decir, . . . YET] , EVZ] & P2(The) P[[v] = P[v2] = [v] = [v] sen intoler de mes albine sonners de contrata [4 1,3 € b, (42) temps & pivoloc

| A or biyeous no se produc

luego, como (la or piyectios cero existe una unios ogé Su tal que (([Vi]) = [Voa(i)]

suf que 3 GAY GA' e Sy 3 como (a piyection (A([[vi]]))  $[(i_A \nabla)] = [(i_A \nabla)] = ([i_A \nabla)] = [(i_A \nabla)] = [(i_$ 

- d)  $\mathcal{P}(A_1A_2) = \mathcal{P}(A_1\mathcal{P}(A_2) = \mathcal{P}(A_1\mathcal{P}(A_2)) = \mathcal{P}(A_1\mathcal{P}(A_2)) = \mathcal{P}(A_1\mathcal{P}(A_2))$  as green
- e) Si tauannos (ij) e Sy  $\Rightarrow$  sabernes que  $\Rightarrow$  una una inderie invartible,  $2\times2$  con entroace en  $F_8$  que arrapporar a aiana trasposición  $\Rightarrow$  OA = (ij). Es areir, hay uno unari $\in$   $A \in GL(2, F_8)$  que apuidos a emo trosposición ar  $O_A$

Es for alla que todos con permitaciones of tenjon una menore A asectoda, es avair ATA P(A)=TA  $A \in G((2, TD))$ 

g) seguir et terrarie de la factoritación carárida conversor g:  $GL(S, F_3)/ker(g) \rightarrow fm(g) = Sy (visto en el garada conversor <math>g$  calabyou.)

For the continuous in isomorphisms,  $\beta$  is  $(\beta) = 1$  of  $(\beta) = 1$  of  $(\beta) = 1$  of  $(\beta) = 1$  of  $(\beta) = 1$ 

Pora vallar al vivilero de le eventos de Gi (2, Ffz), cabella que

$$|GL(2,\overline{H3})| = \frac{|GL(2,\overline{H3})|}{|Ker(9)|}$$