Apellidos	PERENA ANTÚNEZ
Nombre	MARI CARMEN

Preguntas sobre grupos:

1. (4 puntos) Sea $\mathbb{F}_3 = \mathbb{Z}/(3)$ el cuerpo con 3 elementos y $\mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3)$ el grupo de matrices invertibles 2×2 con entradas en $\mathbb{F}_3$.

   (a) ($1/2$ punto) En el conjunto de vectores no nulos $X = (\mathbb{F}_3 \times \mathbb{F}_3) \setminus \{(0,0)\}$ definimos una relación $\sim$ de la siguiente manera: $\vec{v} \sim \vec{w}$ si y solo si $\vec{v} = \pm\vec{w}$. Prueba que $\sim$ es una relación de equivalencia y da la lista de todos los elementos del conjunto cociente, que denotaremos $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) = X/\sim$, comprobando que hay exactamente cuatro.

   (b) ($1/2$ punto) Dada $A \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3)$, demuestra que la aplicación

$$\begin{aligned} \varphi_A : \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) &\longrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) \\ [\vec{v}] &\longmapsto [A\vec{v}] \end{aligned}$$

   está bien definida.

   (c) ($1/2$ punto) Enumera los elementos de $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3)$ cuya lista has dado en el primer apartado, y que denotaremos $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) = \{[\vec{v}_1], [\vec{v}_2], [\vec{v}_3], [\vec{v}_4]\}$. Prueba que, para todo $A \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3)$, la aplicación φ_A es biyectiva y deduce que existe una única permutación $\sigma_A \in S_4$ tal que $\varphi_A([\vec{v}_i]) = [\vec{v}_{\sigma_A(i)}]$ para todo i.

   (d) ($1/2$ punto) Demuestra que la aplicación

$$\begin{aligned} f : \mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3) &\longrightarrow S_4 \\ A &\longmapsto \sigma_A \end{aligned}$$

   es un homomorfismo de grupos.

   (e) (1 punto) Prueba que para cada trasposición $(i\,j) \in S_4$ existe $A \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3)$ tal que $\sigma_A = (i\,j)$ y deduce de aquí que f es sobreyectiva.

   (f) (1 punto) Establece un isomorfismo entre S_4 y un cociente de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3)$, describiendo explícitamente el subgrupo por el que se toma cociente, y úsalo para calcular el número de elementos de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3)$.

TEMA GRUPOS

$\mathbb{F}_3 = \mathbb{Z}/(3)$ $GL(2, \mathbb{F}_3)$

(1.a) $X = (\mathbb{F}_3 \times \mathbb{F}_3) \setminus \{(0,0)\}$ se define $\sim$

$\vec{v} \sim \vec{w} \iff \vec{v} = \pm \vec{w}$

¿Es $\sim$ de equivalencia? Demuestra que si lo es. Si es de equiv., $\Rightarrow$ cumple con las prop: reflexiva, simétrica, transitiva.

• Reflexiva.

$\vec{v} \sim \vec{v} \iff \vec{v} = \pm \vec{v}$ como $\vec{v} = \vec{v} \Rightarrow$ se cumple la reflexividad

• Simétrica.

Si $\vec{v} \sim \vec{w} \Rightarrow ¿\vec{w} \sim \vec{v}$?

Como $\vec{v} \sim \vec{w} \Rightarrow$ tenemos que $\vec{v} = \pm \vec{w}$

$\Rightarrow \underbrace{\vec{v} = \vec{w}}_{\Leftrightarrow \vec{w} = \vec{v}}$ ó $\vec{v} = -\vec{w} \Rightarrow -\vec{v} = \vec{w}$

Vemos que en ambos casos, tendríamos que $\vec{w} \sim \vec{v} \Rightarrow$ se cumple la propiedad simétrica.

• Transitiva:

Si $\vec{v} \sim \vec{w}$ y $\vec{w} \sim \vec{z} \Rightarrow ¿\vec{v} \sim \vec{z}$?

$\vec{v} \sim \vec{w} \Rightarrow \vec{v} = \pm \vec{w}$

si $\vec{w} \sim \vec{z} \Rightarrow \vec{w} = \pm \vec{z}$

$\Rightarrow \vec{v} = \pm \vec{w} = \pm \vec{z}$

$\Rightarrow \vec{v} \sim \vec{z}$ por lo que cumple con la propiedad transitiva.

$\Rightarrow$ Queda probado que $\sim$ es de equivalencia.

Da la lista de todos los element del conj. cocient.

$\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) = X/_\sim$

$X = (\mathbb{F}_3 \times \mathbb{F}_3) \setminus \{(\bar{0},\bar{0})\} = (\{\bar{0},\bar{1},\bar{2}\} \times \{\bar{0},\bar{1},\bar{2}\}) \setminus \{(0,0)\}.$

$X = \{\cancel{(\bar{0},\bar{0})}; \underline{(\bar{0},\bar{1})}; \underline{(\bar{0},\bar{2})}; (\bar{1},\bar{0}); (\bar{1},\bar{1}); (\bar{1},\bar{2});$
$(\bar{2},\bar{0}); (\bar{2},\bar{1}); (\bar{2},\bar{2})\}$

$\Rightarrow X/_\sim = \{ y \in X \,/\, x \sim y \text{ , con } x \in X \}.$

$\Rightarrow$ ~~$\{(\bar{0},\bar{1})\}$~~ el grupo cocient está formado por los vectores que comparten ~~la misma direc~~ el mismo vector director, independientement del sentido.

$\Rightarrow$ Si $x \in X = (\bar{0},\bar{1}) \Rightarrow$ los element que se relacionan con $(\bar{0},\bar{1})$ son $(\bar{0},\bar{1})$ y $(\bar{0},\bar{2})$.
es decir, los element de la forma $(\bar{0}, y)$

Si $x \in X = (\bar{1},\bar{0}) \Rightarrow$ se relacion con el dos elements $(x,\bar{0})$.
es deci: $\{(\bar{1},\bar{0}), (\bar{2},\bar{0})\}$

Si $x \in X = (\bar{1},\bar{1}) \Rightarrow (\bar{1},\bar{1}) \sim (x,x) \Rightarrow \{(\bar{1},\bar{1}), (\bar{2},\bar{2})\}.$

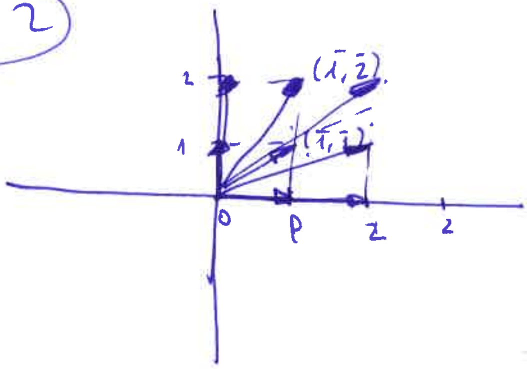
Si $x \in X = (\bar{1},\bar{2}) \Rightarrow$ los element que se relacione con el son $\{(\bar{1},\bar{2}), (\bar{2},\bar{1})\}$, que son de la forma $(x,-x)$.

~~$(\bar{1},-\bar{2}) = (\bar{2},\bar{1})$~~

$\Rightarrow$ Vemos que $X/_\sim$ tiene 4 element

$X/_\sim = \{ \underbrace{\{(\bar{0},\bar{1}), (\bar{0},\bar{2})\}}_{\text{clase equi}}, \underbrace{\{(\bar{1},\bar{0}), (\bar{2},\bar{0})\}}_{\text{clase equi}}, \underbrace{\{(\bar{1},\bar{1}), (\bar{2},\bar{2})\}}_{\text{clase equi}}, \underbrace{\{(\bar{1},\bar{2}), (\bar{2},\bar{1})}_{\text{clase equiv}}$

TEMA 2



$- 2, 1)$

(1.b) Dada $A \in GL(2, \mathbb{F}_3)$, demuestra que:

$$\varphi_A : \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) \longrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3)$$
$$[\vec v] \longmapsto [A\vec v]$$

está bien definida.

$\Rightarrow$ Tenemos que verificar que $[A\vec v] \in \mathbb{P}^2 \mathbb{F}_3$, es decir que la operación $A\vec v$ es interna.

$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ que es invertible $\Rightarrow \det(A) \neq 0$.
$\Rightarrow ad - bc = 0 \Rightarrow \boxed{ad = bc}$

$\cancel{\Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a e + b g & a f + b h \\ c e + d g & c f + d h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$

$\cancel{\Rightarrow a e + b g = 1 \quad a f + b h = 0}$
$\cancel{c e + d g = 0 \quad c f + d h = 1.}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \cdot x \\ v_2 \cdot x \end{pmatrix} = (a v_1 + b v_2, \; c v_1 + d v_2)$

$\cancel{\Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}}$
$\cancel{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar 0 \\ \bar 2 \end{pmatrix} =}$

[Clase 1] $v_1 \in \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) / \vec v = (\bar x, \bar 0)$ con $\bar x \in \mathbb{F}_3$
$\Rightarrow \varphi_A(\vec v_1) = (\bar x, \cancel{\bar x}) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3)$.

[Clase 2] $v_2 \in \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) / \vec v_2 = (\bar 0, \bar x) \Rightarrow \varphi_A(\vec v_2) = (\bar x, \bar x) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3)$.

(Clase 3) $v_3 \in \mathbb{P}^2 \mathbb{F}_3 / \vec v_3 = (\bar x, \bar x) \Rightarrow \varphi_A(\vec v_3) = (\bar x(a+b), \bar x(c+d)) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3)$

Clase 4 $v_4 \in \mathbb{P}^2 \mathbb{F}_3 / \vec v_4 = (\bar x, -\bar x) \Rightarrow \varphi_A(\vec v_4) = (\bar x(c+b), -\bar x(c+d)) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3)$

T.2.

1.c) $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) = \{[\vec{v}_1], [\vec{v}_2], [\vec{v}_3], [\vec{v}_4]\}$.

Pruebe que $\forall\ A \in GL(2, \mathbb{F}_3)$, φ_A es biyectiva

y deduce que $\exists!\ \sigma_A \in S_4 \,/\, \varphi_A([v_i]) = [\vec{v}_{\sigma_A(i)}]\ \forall i$.

$\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) = \{[\vec{v}_1], [\vec{v}_2], [\vec{v}_3], [\vec{v}_4]\} \,/$

$[v_1] = \{(0, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{2})\} = \{(\bar{0}, \bar{x})\}$; $[v_2] = \{(\bar{1}, \bar{0}), (\bar{2}, \bar{0})\} = \{(\bar{x}, \bar{0})\}$

$[v_3] = \{(\bar{1}, \bar{1}), (\bar{2}, \bar{2})\} = \{(\bar{x}, \bar{x})\}$ $[v_4] = \{(\bar{1}, \bar{2}), (\bar{2}, \bar{1})\} = \{(\bar{x}, -\bar{x})\}$

¿ φ_A biyectiva? $\Leftrightarrow$ φ_A INYECTIVA $\wedge$ φ_A SOBREYECTIVA.

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ invertible $|A| \neq 0$

$$\Rightarrow \varphi(\bar{x}, \bar{0}) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\bar{x} \\ c\bar{x} \end{pmatrix}$$

$$\varphi(\bar{0}, \bar{x}) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{0} \\ \bar{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b\bar{x} \\ d\bar{x} \end{pmatrix}$$

$$\varphi(\bar{x}, \bar{x}) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{x}(a+b) \\ \bar{x}(c+d) \end{pmatrix}$$

$$\varphi(\bar{x}, -\bar{x}) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{x} \\ -x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{x}(a+b) \\ -\bar{x}(c+d) \end{pmatrix}$$

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \,/\, ad - b\cdot c \neq 0 \Rightarrow ad \neq b\cdot c$

$A \cdot A^{-1} = \mathbb{1} \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$
$a\cdot e + bg = 1$
$af + bh = 0$
$ce + dg = 0$
$cf + dh = 1$

$\Rightarrow af = -bh$
$ce = -dg$ $\quad -\frac{dg}{e} + dh = 1.$
$c = -\frac{dg}{e}$

T.2

~~$\varphi_A([\bar{v}_i]) = [\bar{v}]_{\sigma_A(i)}$~~.

1.c ~~Ahora~~ Supongo $\underline{\varphi_A \text{ BIYECTIVA}}$.

Como la aplicación φ_A es biyectiva $\Rightarrow$

es inyectiva y sobreyectiva

Como φ_A INYECTIVA: $\Rightarrow$ dados $\bar{v}_1, \bar{v}_2 \in \mathbb{R}^2(\mathbb{F}_3)$

$$\Rightarrow \varphi_A(\bar{v}_1) = \varphi_A(\bar{v}_2) \Longleftrightarrow \bar{v}_1 = \bar{v}_2$$

y como es sobreyectiva ~~$\Rightarrow$~~ $A\bar{v}_1 = A\bar{v}_2 \Longleftrightarrow \bar{v}_1 = \bar{v}_2$

$\Rightarrow A = A$.

$\exists$ una única matriz de $\Rightarrow \exists$ única permutación ~~tal~~ simétrica. ~~unívoca~~

1.d f homomorfismo si:

$f(x+y) = f(x) + f(y)$.

$f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$.

$f(A+B) = \sigma_{A+B} =$

$f(A \cdot B) = \sigma_{A \cdot B} = \sigma_A \circ \sigma_B = f(A) \cdot f(B)$. $\Rightarrow$ homomorfismo

$f(\mathbb{1}) = \sigma_{\mathbb{1}} = (\ )$

1.e) $(i\ j) \in S_4 \Rightarrow \exists A \in GL(2, \mathbb{F}_3) \ / \ \sigma_A = (i\ j)$

deducir f sobreyectiva.