Apellidos	Lloyd Baeza
Nombre	José

Preguntas sobre grupos:

1. (4 puntos) Sea $\mathbb{F}_3 = \mathbb{Z}/(3)$ el cuerpo con 3 elementos y $\mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3)$ el grupo de matrices invertibles 2×2 con entradas en $\mathbb{F}_3$.

0'3 (a) (½ punto) En el conjunto de vectores no nulos $X = (\mathbb{F}_3 \times \mathbb{F}_3) \setminus \{(0,0)\}$ definimos una relación $\sim$ de la siguiente manera: $\vec{v} \sim \vec{w}$ si y solo si $\vec{v} = \pm\vec{w}$. Prueba que $\sim$ es una relación de equivalencia y da la lista de todos los elementos del conjunto cociente, que denotáremos $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) = X/\sim$, comprobando que hay exactamente cuatro.

(b) (½ punto) Dada $A \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3)$, demuestra que la aplicación

$$\begin{aligned} \varphi_A : \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) &\longrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) \\ [\vec{v}] &\longmapsto [A\vec{v}] \end{aligned}$$

está bien definida.

(c) (½ punto) Enumera los elementos de $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3)$ cuya lista has dado en el primer apartado, y que denotaremos $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) = \{[\vec{v}_1], [\vec{v}_2], [\vec{v}_3], [\vec{v}_4]\}$. Prueba que, para todo $A \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3)$, la aplicación φ_A es biyectiva y deduce que existe una única permutación $\sigma_A \in S_4$ tal que $\varphi_A([\vec{v}_i]) = [\vec{v}_{\sigma_A(i)}]$ para todo i.

(d) (½ punto) Demuestra que la aplicación

$$\begin{aligned} f : \mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3) &\longrightarrow S_4 \\ A &\longmapsto \sigma_A \end{aligned}$$

es un homomorfismo de grupos.

(e) (1 punto) Prueba que para cada trasposición $(i\,j) \in S_4$ existe $A \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3)$ tal que $\sigma_A = (i\,j)$ y deduce de aquí que f es sobreyectiva.

0'3 (f) (1 punto) Establece un isomorfismo entre S_4 y un cociente de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3)$, describiendo explícitamente el subgrupo por el que se toma cociente, y úsalo para calcular el número de elementos de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3)$.

José Llopis Baeza

1

Sea $\mathbb{F}_3 = \mathbb{Z}/(3)$ el cuerpo con 3 elementos y

$GL(2,\mathbb{F}_3)$ el grupo de las matrices invertible con entradas en $\mathbb{F}_3$.

$\mathbb{F}_3 = \{[0],[1],[2]\}$

Definida en pagina 4.

$$GL(2,\mathbb{F}_3) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \;\middle|\; \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq 0 \text{ y } a,b,c,d \in \mathbb{F}_3 \right\}$$

a) $X = (\mathbb{F}_3 \times \mathbb{F}_3) \setminus \{(0,0)\} = \{(0,1),(1,0),(1,1),(1,2),(2,2),(2,0),(0,2)\}$ falta (2,1)

$\vec{v} \sim \vec{w} \longleftrightarrow \vec{v} = \pm\vec{w}$

Probemos que $\sim$ es relación de equivalencia.

Reflexiva: $\vec{v} \sim \vec{v} \longleftrightarrow \vec{v} = \pm\vec{v}$ Trivialmente $\square$

~~Transiti~~

Simétrica: $\vec{v} \sim \vec{w} \longleftrightarrow \vec{v} = \pm\vec{w}$

si $\vec{v} = +\vec{w} \rightarrow \vec{w} = +\vec{v}$

si $\vec{v} = -\vec{w} \rightarrow \vec{w} = -\vec{v}$

$\vec{w} = \pm\vec{v} \longleftrightarrow \vec{w} \sim \vec{v}$ $\square$

Transitiva: $\vec{v} \sim \vec{w} \rightarrow v = \pm\vec{w}$

$\vec{w} \sim \vec{z} \rightarrow \vec{w} = \pm\vec{z}$

$v = +\vec{w} = +(\pm\vec{z}) = \pm\vec{z}$

ó

$v = -\vec{w} = -(\pm\vec{z}) = \pm\vec{z}$

$\longleftrightarrow \vec{v} \sim \vec{z}$ $\square$

$\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) = X/\sim \; = \{[(0,1)], [(1,1)], [(2,1)], [(1,0)]\}$

$[(0,1)] \neq \ldots (0,-2), (0,4), (0,7) \ldots$

$[(1,1)] \neq \ldots (-2,-2), (4,4), (7,7), (4,1), (7,1) \ldots$

$[(2,1)] \neq \ldots (-1,1), (-1,-2), (2,5) \ldots$

$[(1,0)] \neq \ldots (-2,0), \ldots (4,0), (7,0) \ldots$

Lo comprobamos usando el T. Lagrange $\quad |X/\sim| = \dfrac{\overset{=8}{|X|}}{\underset{=2}{|\sim|}} = 4$

no se aplica

b) Dada $A \in GL(2,\mathbb{F}_3)$

> GL lo he definido en la pag 4.

$$\varphi_A : \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) \longrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3)$$
$$[\vec{v}] \longmapsto [A\vec{v}]$$

$a \cdot d - bc \neq 0$

$\varphi_A(\vec{v}) = A \cdot \vec{v}$, siendo $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tq $\det(A) \neq 0$ y $a,b,c,d \in \mathbb{F}_3$

- $\varphi_A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$; como b y $d \in \mathbb{F}_3 \rightarrow [A \cdot (0,1)] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3)$
- $\varphi_A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b \\ c+d \end{pmatrix}$; como $a,b,c,d \in \mathbb{F}_3$ y sabemos que $(a+b) \in \mathbb{F}_3$ y $(c+d) \in \mathbb{F}_3 \rightarrow [A \cdot (1,1)] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3)$
- $\varphi\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+b \\ 2c+d \end{pmatrix}$; análogamente $\rightarrow [A \cdot (2,1)] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3)$
- $\varphi\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$; como a y $c \in \mathbb{F}_3 \rightarrow [A \cdot (a,c)] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3)$

Hemos verificado que el producto de A con todas las clase de equivalencia sigue siendo una clase de equivalencia, por lo tanto la aplicación esta bien definida

① La posibilidad de que el producto $[A \cdot \vec{v}]$ sea $(0,0)$ se descarta, ya que al ser A una matriz invertible $(a \cdot d - bc \neq 0)$ [illegible]

c) Enumeramos los elementos de $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3)$

$$\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) = \{ \overset{\vec{1}}{[(0,1)]}, \overset{\vec{2}}{[(1,1)]}, \overset{\vec{3}}{[(2,1)]}, \overset{\vec{4}}{[(1,0)]} \}$$

Nos piden demostrar que el endomorfismo φ_A es un automorfismo (biyectivo) $\forall A \in GL(2,\mathbb{F}_3)$.

Es biyectiva, ya que para cada $\vec{v}$ ~~∈ A~~, al aplicarle φ_A, es decir, $A\vec{v}$, siempre dará un vector distinto (que puede estar en la misma clase).

$e, g \in \vec{v}$

$$\varphi\begin{pmatrix} e \\ g \end{pmatrix} = A\cdot\vec{g} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae + gb \\ ce + dg \end{pmatrix}$$ que siempre será distinto,

asigne a cada vector podemos asociarle una ~~única~~ imagen, de manera que sea inyectiva y sobreyectiva, es decir, biyectiva

¿$\exists!\, \sigma_A \in S_4$ tq $\varphi_A([\vec{v_i}]) = [\vec{v}_{\sigma_A(i)}]$ $\forall i$?

es decir, nos preguntan si existe una única permutación que haga que al aplicarle φ_A a $[v_i] \to [v_{\sigma_A(i)}]$, lo cual es cierto, ya que al aplicar φ_A, estamos simplemente mandando a $\vec{v}$ a otra clase de equivalencia

esto también se haría si mandásemos todas las clases de equivalencia a una misma d)

$$f: GL(2,\mathbb{F}_3) \longrightarrow S_4 \quad 4! = 3\cdot 4\cdot 2 = 24$$

$$A \longmapsto \sigma_A$$

$$GL(2,\mathbb{F}_3) = \left\{ \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&2\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\2&0\end{pmatrix}, \right.$$

$$\cancel{}, \begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2&1\\0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&1\\0&2\end{pmatrix},$$

$$\left. \begin{pmatrix}1&0\\1&2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix} \dots \right\}_{24}$$

Para que sea homomorfismo de grupos:

$\cancel{f(A)}$ $f(A\cdot B) = f(A)\cdot f(B)$ lo cual es cierto, ya que

hay que probarlo

$$f(A\cdot B) = \sigma_{A\cdot B} \underset{\text{P. permutaciones}}{=} \sigma_A \circ \sigma_B = f(A)\cdot f(B)$$

no tiene sentido

$f(\alpha A) = \alpha f(A)$ lo cual es cierto, ya que

$$f(\alpha A) = \sigma_{\alpha A} \underset{\text{P. permutaciones}}{=} \alpha \sigma_A = \alpha f(A)$$

Es homomorfismo de grupos

e)

Ya hemos observado que $|GL(2,\mathbb{F}_3)| = |S_4| = 24$, por lo tanto, f debe ser sobreyectiva. no necesariamente

De ahí sabemos que para cada trasposición $(i\ j) \in S_4$, $\exists A$ tq $\sigma_A = (i\ j)$

g) Establece un isomorfismo entre S_4 y un cociente de $GL(2,\mathbb{F}_3)$

Usamos el t. ~~de la proyección canónica~~:

$$
\begin{tikzcd}
GL(2,\mathbb{F}_3) \arrow[rr, "g", "\text{sobreyectiva}"'] \arrow[d, "\pi"', "\text{proyección canónica}"] & & S_4 \\
GL(2,\mathbb{F}_3)/\mathrm{Ker}(g) \arrow[rr, "\cong \tilde{g}", "\text{Isomorfismo}"'] & & \mathrm{im}(g) = S_4 \text{ (ya que } g \text{ es sobreyectiva)} \arrow[u, "\iota"', "\text{inclusión}"]
\end{tikzcd}
$$

Así he podido establecer un isomorfismo, entre $GL(2,\mathbb{F}_3)/\mathrm{Ker}(g)$ y S_4,

donde $\mathrm{Ker}(g) := \{A \mid g(A) = e\}$ ← permutación trivial (identidad)

$$\left|\frac{GL(2,\mathbb{F}_3)}{\mathrm{Ker}(g)}\right| = \frac{|GL(2,\mathbb{F}_3)|}{|\mathrm{Ker}(g)|} = |S_4| \longrightarrow$$

$$\longrightarrow |GL(2,\mathbb{F}_3)| = \overset{24}{|S_4|} \cdot \cancel{\overset{1}{|\mathrm{Ker}(g)|}} = 24$$