Apellidos	Pérez Jiménez
Nombre	Hugo

Preguntas sobre grupos:

1. (4 puntos) Sea $\mathbb{F}_3 = \mathbb{Z}/(3)$ el cuerpo con 3 elementos y $\mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3)$ el grupo de matrices invertibles 2×2 con entradas en $\mathbb{F}_3$.

   (a) (½ punto) En el conjunto de vectores no nulos $X = (\mathbb{F}_3 \times \mathbb{F}_3) \setminus \{(0,0)\}$ definimos una relación $\sim$ de la siguiente manera: $\vec{v} \sim \vec{w}$ si y solo si $\vec{v} = \pm\vec{w}$. Prueba que $\sim$ es una relación de equivalencia y da la lista de todos los elementos del conjunto cociente, que denotaremos $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) = X/\sim$, comprobando que hay exactamente cuatro.

   (b) (½ punto) Dada $A \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3)$, demuestra que la aplicación

   $$\begin{aligned} \varphi_A : \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) &\longrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) \\ [\vec{v}] &\longmapsto [A\vec{v}] \end{aligned}$$

   está bien definida.

   (c) (½ punto) Enumera los elementos de $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3)$ cuya lista has dado en el primer apartado, y que denotaremos $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) = \{[\vec{v}_1], [\vec{v}_2], [\vec{v}_3], [\vec{v}_4]\}$. Prueba que, para todo $A \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3)$, la aplicación φ_A es biyectiva y deduce que existe una única permutación $\sigma_A \in S_4$ tal que $\varphi_A([\vec{v}_i]) = [\vec{v}_{\sigma_A(i)}]$ para todo i.

   (d) (½ punto) Demuestra que la aplicación

   $$\begin{aligned} f : \mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3) &\longrightarrow S_4 \\ A &\longmapsto \sigma_A \end{aligned}$$

   es un homomorfismo de grupos.

   (e) (1 punto) Prueba que para cada trasposición $(i\,j) \in S_4$ existe $A \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3)$ tal que $\sigma_A = (i\,j)$ y deduce de aquí que f es sobreyectiva.

   (f) (1 punto) Establece un isomorfismo entre S_4 y un cociente de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3)$, describiendo explícitamente el subgrupo por el que se toma cociente, y úsalo para calcular el número de elementos de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3)$.

Hugo Pérez Jiménez

Ejercicio 1 (T. 2)

$\mathbb{F}_3 = \mathbb{Z}/\mathbb{Z}3$

(a) Tomamos $X = (\mathbb{F}_3 \times \mathbb{F}_3) \setminus \{(0,0)\}$ y definimos $\sim$ como, $\underline{v} \sim \underline{w} \iff \underline{v} = \pm \underline{w}$. Veamos que $\sim$ es relación de equivalencia:

·) Reflexiva: $\forall \underline{v} \in X \quad \underline{v} = \underline{v} \Rightarrow \underline{v} \sim \underline{v}$

·) Simetría: $\underline{v} \sim \underline{w} \Rightarrow \underline{w} \sim \underline{v} \iff \underline{v} = \pm \underline{w} \Rightarrow \underline{w} = \pm \underline{v}$.

Si $\underline{v} = + \underline{w} \Rightarrow \underline{w} = \underline{v}$, si $\underline{v} = - \underline{w} \Rightarrow \underline{w} = - \underline{v} \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{w} \sim \underline{v}$.

·) Transitiva: $\underline{v} \sim \underline{w} \sim \underline{u} \Rightarrow \underline{v} \sim \underline{u}$. Tenemos $\underline{v} = \pm \underline{w}$ y $\underline{w} = \pm \underline{u}$. Si $\underline{w} = + \underline{u} \Rightarrow \underline{v} = \pm \underline{w} = \pm(\underline{u}) \Rightarrow \underline{v} \sim \underline{u}$

Si $\underline{w} = - \underline{u} \Rightarrow \underline{v} = \pm(-\underline{u}) \Rightarrow \underline{v} = \mp \underline{u} \Rightarrow \underline{v} \sim \underline{u}$

$\therefore \sim$ es relación de equivalencia.

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) = \left\{ \left[\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right], \left[\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right], \left[\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right], \left[\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right] \right\}$$

$$\#(\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3)) = 4.$$

(b) $A \in GL(2, \mathbb{F}_3)$, $\varphi_A : \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) \longrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3)$

$$[\underline{v}] \longmapsto A \cdot [\underline{v}]$$

Esta aplicación está definida de tal forma que manda a un elemento $[\underline{v}]$ de $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3)$ al producto por la izquierda por $A \in GL(2,\mathbb{F}_3)$.

Por ser $[\underline{v}]$ un vector 2×1 con entradas en $\mathbb{F}_3$ y A una matriz 2×2 con entradas en $\mathbb{F}_3$ tenemos que el producto está ajustado y produce un vector 2×1 con entradas en $\mathbb{F}_3$. Como A es invertible $\Longrightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ no ~~existe~~ es posible $\Longrightarrow \exists\, \varphi_D : \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) \longrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3)$: $\varphi_A = \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right| \notin \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3)$. Por tanto φ_A está bien definida (siempre obtenemos un vector de $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3)$ por ser las filas de las matrices A vectores en $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3)$ distintas al nulo por ser A invertible).

c) Tenemos $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) = \left\{ [\underline{v_1}] = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right], [\underline{v_2}] = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right], [\underline{v_3}] = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right], [\underline{v_4}] = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right] \right\}$. Veamos que φ_A es biyectiva ~~para~~ $\forall A \in GL(2,\mathbb{F}_3)$

·) Inyectividad: tomamos $[\underline{v}], [\underline{w}] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) : [\underline{v}] \neq [\underline{w}]$ pero $\varphi_A([\underline{v}]) = \varphi_A([\underline{w}]) \Longrightarrow A \cdot [\underline{v}] = A[\underline{w}]$.

Aplicamos $\varphi_{A^{-1}}$ ($A^{-1} \in GL(2,\mathbb{F}_3)$ por definición):

$$\varphi_{A^{-1}}(A[\underline{v}]) = \varphi(A[\underline{w}]) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow A^{-1}A[\underline{v}] = A^{-1}A[\underline{w}] \Longrightarrow [\underline{v}] = [\underline{w}] \;!!!$$

$\Longrightarrow \varphi_A$ inyectiva $\forall A \in GL(2,\mathbb{F}_3)$.

Hugo Pérez

·) Sobreyectividad: $[\underline{v}] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3)$. Queremos ver que existe $[\underline{w}] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3)$: $\varphi_A([\underline{w}]) = [\underline{v}]$. Basta tomar $[\underline{w}] = A^{-1}[\underline{v}] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3)$ y $\varphi_A([\underline{w}]) = A \cdot A^{-1}[\underline{v}] = [\underline{v}]$

$\Longrightarrow \varphi_A$ es sobreyectiva $\forall A \in GL(2, \mathbb{F}_3)$.

$\therefore$ φ_A es biyectiva $\forall A \in GL(2, \mathbb{F}_3)$

Por ser φ_A biyectiva se tiene que $\forall i \in \{1,2,3,4\}$ $\varphi_A([\underline{v}_i]) = [\underline{v}_j]$ con $1 \leq j \leq 4$, esto es: φ_A manda cada i $(1 \leq i \leq 4)$ a un j $(1 \leq j \leq 4)$ distinto para cada i (por ser φ_A biyectivo). Esto corresponde a una permutación en S_4. Sea σ_A dicha permutación.

σ_A es única: Supongamos $\sigma_{A1} \neq \sigma_{A2}$ $(\sigma_{A1}, \sigma_{A2} \in S_4)$

$$\varphi_A([\underline{v}_i]) = [\underline{v}_j] \Longrightarrow [\underline{v}_{\sigma_{A1}(i)}] = [\underline{v}_{\sigma_{A2}(i)}] =$$
$$= [\underline{v}_j] \Longrightarrow *$$

$$\overset{*}{\Longrightarrow} \sigma_{A1}(i) = \sigma_{A2}(i) = j \Longrightarrow \sigma_{A1} = \sigma_{A2} \; !!!$$

(d)

$$f: GL(2, \mathbb{F}_3) \longrightarrow S_4$$
$$A \longmapsto \sigma_A$$

Veamos que f es homomorfismo:

·) I identidad $\Longrightarrow f(I) = \sigma_I = id.$ ya que $\varphi_I([\underline{v}_i]) = \underline{v}_i$ $\forall i \in \{1,2,3,4\}$.

$$f(AB) = \sigma_{AB} \overset{*_1}{=} \sigma_A \circ \sigma_B = f(A)\cdot f(B)$$

$*_1$ $\varphi_{AB}([\underline{v}_i]) = AB\,[\underline{v}_i] = \varphi_A(\varphi_B[\underline{v}_i])$

$\cdot\; f(A^{-1}) = \sigma_{A^{-1}} \overset{*_2}{=} \sigma_A^{-1}$

$*_2\; \varphi_{A^{-1}}(A\cdot[\underline{v}_i]) = \varphi_{A^{-1}}([\underline{v}_{\sigma_A i}]) = A^{-1}\cdot[\underline{v}_{\sigma_A(i)}] =$

$= \cancel{A^{-1}A\,[\underline{v}_i] = [\underline{v}_i]}\; [\underline{v}_{\sigma_{A^{-1}}(\sigma_A(i))}] = [\underline{v}_i]$

$\Longrightarrow$ f es homomorfismo de grupos

(e) $\forall (i\,j) \in S_4$ $\exists A \in GL(2,\mathbb{F}_3) : \sigma_A = (i\,j)$
$\quad\overset{\shortparallel}{\tau}$

Por ser φ_A biyectivo $\forall A \in GL(2,\mathbb{F}_3)$ y tomando $A^{-1} \in GL(2,\mathbb{F}_3) : [\underline{v}_i] = A^{-1}[\underline{v}_j]$ y $[\underline{v}_k] = A^{-1}[\underline{v}_k]$ si $k \neq i$ y $k \neq j$

$\varphi_A([\underline{v}_i]) = [\underline{v}_j]$, $\varphi_A([\underline{v}_k]) = \underline{v}_k$. Dicha matriz existe por trabajar en $\mathbb{F}_3$.

$\therefore\; \forall (ij) \in S_4\; \exists A \in GL(2,\mathbb{F}_3) : \sigma_A = (ij)$.

Por ser todo $\sigma \in S_4$ producto de ciclos trasposiciciones se tiene que $\forall \sigma \in S_4$ $\exists A \in GL(2,\mathbb{F}_3)$: $\sigma_A = \sigma$. $\Longrightarrow$ f sobreyectiva.