Apellidos	Fernández González
Nombre	Montemayor

Preguntas sobre grupos:

1. (4 puntos) Sea $\mathbb{F}_3 = \mathbb{Z}/(3)$ el cuerpo con 3 elementos y $\mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3)$ el grupo de matrices invertibles 2×2 con entradas en $\mathbb{F}_3$.

   (a) ($1/2$ punto) En el conjunto de vectores no nulos $X = (\mathbb{F}_3 \times \mathbb{F}_3)\backslash\{(0,0)\}$ definimos una relación $\sim$ de la siguiente manera: $\vec{v} \sim \vec{w}$ si y solo si $\vec{v} = \pm\vec{w}$. Prueba que $\sim$ es una relación de equivalencia y da la lista de todos los elementos del conjunto cociente, que denotaremos $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) = X/\sim$, comprobando que hay exactamente cuatro.

   (b) ($1/2$ punto) Dada $A \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3)$, demuestra que la aplicación

   $$\begin{aligned} \varphi_A : \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) &\longrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) \\ [\vec{v}] &\longmapsto [A\vec{v}] \end{aligned}$$

   está bien definida.

   (c) ($1/2$ punto) Enumera los elementos de $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3)$ cuya lista has dado en el primer apartado, y que denotaremos $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) = \{[\vec{v}_1], [\vec{v}_2], [\vec{v}_3], [\vec{v}_4]\}$. Prueba que, para todo $A \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3)$, la aplicación φ_A es biyectiva y deduce que existe una única permutación $\sigma_A \in S_4$ tal que $\varphi_A([\vec{v}_i]) = [\vec{v}_{\sigma_A(i)}]$ para todo i.

   (d) ($1/2$ punto) Demuestra que la aplicación

   $$\begin{aligned} f : \mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3) &\longrightarrow S_4 \\ A &\longmapsto \sigma_A \end{aligned}$$

   es un homomorfismo de grupos.

   (e) (1 punto) Prueba que para cada trasposición $(i\,j) \in S_4$ existe $A \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3)$ tal que $\sigma_A = (i\,j)$ y deduce de aquí que f es sobreyectiva.

   (f) (1 punto) Establece un isomorfismo entre S_4 y un cociente de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3)$, describiendo explícitamente el subgrupo por el que se toma cociente, y úsalo para calcular el número de elementos de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3)$.

Montemayor Fernandez Gonzalez

(1) $\mathbb{F}_3 = \mathbb{Z}/\mathbb{Z}_3$

$GL(2,\mathbb{F}_3)$ matrices invertibles 2×2 con entradas en $\mathbb{F}_3$.

a) $X = (\mathbb{F}_3 \times \mathbb{F}_3) \setminus \{(0,0)\}$

$\vec{v} \sim \vec{w} \iff \vec{v} = \pm \vec{w}$.

Para que sea una relación de equivalencia se tiene que cumplir las tres propiedades:

- Reflexiva: $\vec{v} \sim \vec{v} \iff \vec{v} = \pm\vec{v} \Rightarrow \vec{v} = \vec{v}$. Entonces se cumple.
- Simétrica: $\vec{v} \sim \vec{w} \iff \vec{v} = \pm\vec{w} \iff \pm\vec{w} = \vec{v} \iff \vec{w} = \pm\vec{v} \iff \vec{w} \sim \vec{v}$.
- Transitiva: $\left.\begin{array}{l} \vec{v} \sim \vec{w} \iff \vec{v} = \pm\vec{w} \\ \vec{w} \sim \vec{u} \iff \vec{w} = \pm\vec{u} \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{v} = \pm\vec{w} = \pm(\pm\vec{u}) = \pm\vec{u} \to \vec{v} \sim \vec{u}$

Los elementos del grupo cociente son las clases de equivalencia y su conjunto se denota por $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) = X/\sim$.

Como en $\mathbb{F}_3$ solo hay tres elementos $(0,1,2)$ los posibles vectores son:

$X = \{\cancel{(0,0)}, (0,1), (0,2), (1,0), (1,1), (1,2), (2,0), (2,1), (2,2)\}$
↳ Porque es el grupo de vectores no nulos.

Veamos cuales están relacionados:

$(0,1) \sim (0,2)$ porque $(0,2) = (0,-1)$ en $\mathbb{F}_3$ y $\underbrace{(0,1)}_{\vec{v}} = -(0,1) = (0,\ldots$ $\vec{w}$

$(1,0) \sim (2,0)$ porque $(2,0) = (-1,0)$ en $\mathbb{F}_3$

$(1,1) \sim (2,2)$ porque $(2,2) = (-1,-1)$ en $\mathbb{F}_3$

$(1,2) \sim (2,1)$ porque $(2,1) = (-1,-2)$ en $\mathbb{F}_3$

Por tanto, los elementos del conjunto cociente son:

$X/\sim = \{\overline{(0,1)}, \overline{(1,0)}, \overline{(1,1)}, \overline{(1,2)}\}$

b) $A \in GL(2,\mathbb{F}_3)$ $\quad \varphi_A : \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) \xrightarrow{\text{giro coherente.}} \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3)$ está bien definida.

$$[\vec{v}] \longmapsto [A\vec{v}]$$

Para demostrar que la aplicación esté bien definida tenemos que demostrar que dado $[\vec{v}] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3)$ entonces $\varphi_A([\vec{v}]) = [A\vec{v}] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3)$

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $(abcd) \neq (0\,0\,0\,0) \rightarrow$ porque son matrices invertibles.

$$\varphi_A([\vec{v}_1]) = \varphi_A(\overline{(0,1)}) = \left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}_{2\times 1}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{2\times 1}\right] = \left[\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}\right] \in \mathbb{P}^2\mathbb{F}_3$$

$$\varphi_A([\vec{v}_2]) = \varphi_A(\overline{(1,0)}) = \left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right] = \left[\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}\right] \in \mathbb{P}^2\mathbb{F}_3$$

$$\varphi_A([\vec{v}_3]) = \varphi_A(\overline{(1,1)}) = \left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right] = \left[\begin{pmatrix} a+b \\ c+d \end{pmatrix}\right] \in \mathbb{P}^2\mathbb{F}_3$$

$$\varphi_A([\vec{v}_4]) = \varphi_A(\overline{(1,2)}) = \left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right] = \left[\begin{pmatrix} a+2b \\ c+2d \end{pmatrix}\right] \in \mathbb{P}^2\mathbb{F}_3$$

Siguen siendo vectores de $\mathbb{F}_3$ y por tanto tienen que pertenecer a una clase de equiv. Recordemos que $a,b,c,d \in \{0,1,2\}$

c) $\forall A \in GL(2,\mathbb{F}_3)$ $\quad \varphi_A$ biyectiva.

Para que φ_A sea biyectiva tiene que ser inyectiva y sobreyectiva o tener inversa.

En el apartado anterior se ve claro que φ_A es inyectiva, porque ya vemos que ~~la~~ imagen de clases de equivalencia distintas son distintas. Para comprobar que es sobreyectiva, tenemos que ver que todas las clases de equiv. son imagen de alguna clase de equiv. Como A es una matriz invertible

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} a\cdot a' + bc' = 1 \\ ab' + bd' = 0 \\ ca' + dc' = 0 \\ cb' + dd' = 1 \end{cases}$$ y como

$A \in GL(2,\underline{\mathbb{F}_3})$, sabemos que $\rightarrow$ de ahí para todas las $a,b,c,d \in \{0,1,2\}$

clases de equiv. son imagen, por tanto φ_A sobreyectiva.

Montemayor Fernandez Gonzalez

(1)

c) $\exists!\ \sigma_A \in S_4 \quad \varphi_A([\vec{v_i}]) = [\vec{v}_{\sigma_A(i)}]$

Como φ_A es biyectiva cada $[\vec{v_i}]$ lo llevamos a un $[\vec{v_j}]$ (ocupando todos), y ser biyectiva implica ser inyectiva, entonces dos clases distintas no pueden ir a la misma clase.

$\exists!$ permutación de S_4 que me lleva entonces a cada $[\vec{v_i}]$ en $[\vec{v}_{\sigma_A(i)}]$, porque dos permutaciones distintas me llevan los elementos de manera distinta.

d) $f: GL(2, \mathbb{F}_3) \longrightarrow S_4$ es hom. de grupos.

$A \longrightarrow \sigma_A$

Tiene que cumplir que $\forall\, A, B \in GL(2,\mathbb{F}_3)\quad f(A\cdot B) = f(A)\circ f(B)$.

$f(A\cdot B) = \sigma_{A\cdot B}$

Y $\sigma_{A\cdot B}$ es la única $\in S_4$ tal que $\varphi_{A\cdot B}([\vec{v_i}]) = [\vec{v}_{\sigma_{A\cdot B}(i)}]$,

es decir, a cada $[\vec{v_i}] \longmapsto [AB\,\vec{v_i}]$

porque es multiplicar las matrices A y B y sus def. $(A\cdot B)\vec{v}$

$f(A)\circ f(B) = \sigma_A \circ \sigma_B \longrightarrow \sigma_A(\sigma_B) = \sigma_{A\cdot B} = f(A\cdot B)$

$\sigma_A: [\vec{v_i}] \rightarrow [A\vec{v_i}]$ con $\varphi_A: [\vec{v_i}]$ a $[\vec{v}_{\sigma_A(i)}]$

$\sigma_B: [\vec{v_i}] \rightarrow [B\,\vec{v_i}]$ con $\varphi_B: [\vec{v_i}]$ a $[\vec{v}_{\sigma_B(i)}]$

e) Para cada $(ij) \in S_4$ $\exists A \in GL(2,\mathbb{F}_3)$ tal que $\sigma_A = (ij)$