Apellidos	Romero Prieto
Nombre	Jaime

Preguntas sobre grupos:

1. (4 puntos) Sea $\mathbb{F}_3 = \mathbb{Z}/(3)$ el cuerpo con 3 elementos y $\mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3)$ el grupo de matrices invertibles 2×2 con entradas en $\mathbb{F}_3$.

   (a) ($1/2$ punto) En el conjunto de vectores no nulos $X = (\mathbb{F}_3 \times \mathbb{F}_3) \backslash \{(0,0)\}$ definimos una relación $\sim$ de la siguiente manera: $\vec{v} \sim \vec{w}$ si y solo si $\vec{v} = \pm \vec{w}$. Prueba que $\sim$ es una relación de equivalencia y da la lista de todos los elementos del conjunto cociente, que denotaremos $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) = X/\sim$, comprobando que hay exactamente cuatro.

   (b) ($1/2$ punto) Dada $A \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3)$, demuestra que la aplicación

   $$\begin{aligned} \varphi_A : \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) &\longrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) \\ [\vec{v}] &\longmapsto [A\vec{v}] \end{aligned}$$

   está bien definida.

   (c) ($1/2$ punto) Enumera los elementos de $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3)$ cuya lista has dado en el primer apartado, y que denotaremos $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) = \{[\vec{v}_1], [\vec{v}_2], [\vec{v}_3], [\vec{v}_4]\}$. Prueba que, para todo $A \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3)$, la aplicación φ_A es biyectiva y deduce que existe una única permutación $\sigma_A \in S_4$ tal que $\varphi_A([\vec{v}_i]) = [\vec{v}_{\sigma_A(i)}]$ para todo i.

   (d) ($1/2$ punto) Demuestra que la aplicación

   $$\begin{aligned} f : \mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3) &\longrightarrow S_4 \\ A &\longmapsto \sigma_A \end{aligned}$$

   es un homomorfismo de grupos.

   (e) (1 punto) Prueba que para cada trasposición $(i\,j) \in S_4$ existe $A \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3)$ tal que $\sigma_A = (i\,j)$ y deduce de aquí que f es sobreyectiva.

   (f) (1 punto) Establece un isomorfismo entre S_4 y un cociente de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3)$, describiendo explícitamente el subgrupo por el que se toma cociente, y úsalo para calcular el número de elementos de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3)$.

Jaume Romero Prieto

Tema 2

① $\mathbb{F}_3 = \mathbb{Z}/(3)$ $\quad GL(2, \mathbb{F}_3)$

a) $X = (\mathbb{F}_3 \times \mathbb{F}_3) \setminus \{(0,0)\}$ $\quad \vec{v} \sim \vec{w} \iff \vec{v} = \pm \vec{w}$

Probar $\sim$ relación de equivalencia

Dar lista (⊕) $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) = X/\sim$, $|\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3)| = 4$

$\mathbb{F}_3 = \{(0+\mathbb{Z}3), (1+\mathbb{Z}3), (2+\mathbb{Z}3)\}$

$X = (\mathbb{F}_3 \times \mathbb{F}_3) \setminus \{(0,0)\} = \{ (0+\mathbb{Z}3, 1+\mathbb{Z}3), (0+\mathbb{Z}3, 2+\mathbb{Z}3), (1+\mathbb{Z}3, 1+\mathbb{Z}3), (1+\mathbb{Z}3, 2+\mathbb{Z}3), (2+\mathbb{Z}3, 2+\mathbb{Z}3), (1+\mathbb{Z}3, 0+\mathbb{Z}3), (2+\mathbb{Z}3, 0+\mathbb{Z}3), (2+\mathbb{Z}3, 1+\mathbb{Z}3) \}$

$\sim$ es de equivalencia pues:

~~(1. es) 1. es reflexiva: $\forall x \in X$ se tiene $x \sim x$)~~

~~En efecto)~~

1. $\sim$ es reflexiva: $\forall \vec{v} \in X$ se tiene $\vec{v} \sim \vec{v}$, pues $\vec{v} = +\vec{v}$
2. $\sim$ es simétrica: $\vec{v} \sim \vec{w} \Rightarrow \vec{w} = \vec{v}$, pues si $\vec{v} = +\vec{w}$ es claro que $\vec{w} = +\vec{v}$, y si $\vec{v} = -\vec{w}$, multiplicando por -1 se tiene que $\vec{w} = -\vec{v}$
3. $\sim$ es transitiva: $\vec{v} \sim \vec{w}, \vec{w} \sim \vec{z} \Rightarrow \vec{v} \sim \vec{z}$, pues si $\vec{v} = \pm \vec{w}$ y $\vec{w} = \pm \vec{z}$, sustituyendo $\vec{w}$ en la primera ecuación se tiene que $\vec{v} = \pm(\pm \vec{z}) = \pm \vec{z}$

$-(0+\mathbb{Z}3, 1+\mathbb{Z}3) = (0+\mathbb{Z}3, 2+\mathbb{Z}3)$

$-(1+\mathbb{Z}3, 1+\mathbb{Z}3) = (2+\mathbb{Z}3, 2+\mathbb{Z}3)$

$-(1+\mathbb{Z}3, 2+\mathbb{Z}3) = (2+\mathbb{Z}3, 1+\mathbb{Z}3)$

$-(1+\mathbb{Z}3, 0+\mathbb{Z}3) = (2+\mathbb{Z}3, 0+\mathbb{Z}3)$

$$\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) = X/\sim = \{ \overline{(0+\mathbb{Z}3, 1+\mathbb{Z}3)}, \overline{(1+\mathbb{Z}3, 1+\mathbb{Z}3)}, \overline{(1+\mathbb{Z}3, 2+\mathbb{Z}3)}, \overline{(1+\mathbb{Z}3, 0+\mathbb{Z}3)} \}$$

Comprobamos que existen 4 clases de equivalencia y por ende $|X/\sim| = 4$

b) $A \in GL(2, \mathbb{F}_3)$

Dem que $\varphi_A : \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) \longrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3)$ está bien definida

$$[\vec{v}] \longmapsto [A\vec{v}]$$

Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $a,b,c,d \in \mathbb{F}_3$

Sea $\vec{v} = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$, $e, f \in \mathbb{F}_3$

$$\varphi_A(\vec{v}) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = (ae + bf \quad ce + df)$$

Tenemos que las operaciones producto

$\cancel{(a+\mathbb{Z}3)(b+\mathbb{Z}3) \quad (x+\mathbb{Z}3)(y+\mathbb{Z}3) = (x+\ )}$

$(x+\mathbb{Z}3)(y+\mathbb{Z}3) = (xy) + \mathbb{Z}3$

y suma

$(x+\mathbb{Z}3) + (y+\mathbb{Z}3) = (x+y) + \mathbb{Z}3$

están bien definidas, lo que implica que $\varphi_A(\vec{v}) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3)$

Además, existe un elemento neutro, la matriz identidad:

$A = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Y también un elemento inverso, A^{-1}, que existe gracias a que A es invertible.

Por lo que la aplicación φ_A está bien definida.

Jaume Romero Prieto

c) $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) = \{\overline{(0+\mathbb{Z}3, 1+\mathbb{Z}3)}, \overline{(1+\mathbb{Z}3, 1+\mathbb{Z}3)}, \overline{(1+\mathbb{Z}3, 2+\mathbb{Z}3)}, \overline{(1+\mathbb{Z}3, 0+\mathbb{Z}3)}\}$

Denotemos

$$[\vec{v}_1] = \overline{(0+\mathbb{Z}3, 1+\mathbb{Z}3)}$$
$$[\vec{v}_2] = \overline{(1+\mathbb{Z}3, 1+\mathbb{Z}3)}$$
$$[\vec{v}_3] = \overline{(1+\mathbb{Z}3, 2+\mathbb{Z}3)}$$
$$[\vec{v}_4] = \overline{(1+\mathbb{Z}3, 0+\mathbb{Z}3)}$$

$$\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) = \{[\vec{v}_1], [\vec{v}_2], [\vec{v}_3], [\vec{v}_4]\}$$