Apellidos	GONZÁLEZ GONZÁLEZ
Nombre	EDUARDO

Preguntas sobre grupos:

1. (4 puntos) Sea $\mathbb{F}_3 = \mathbb{Z}/(3)$ el cuerpo con 3 elementos y $\mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3)$ el grupo de matrices invertibles 2×2 con entradas en $\mathbb{F}_3$.

0'4 (a) ($1/2$ punto) En el conjunto de vectores no nulos $X = (\mathbb{F}_3 \times \mathbb{F}_3)\backslash\{(0,0)\}$ definimos una relación $\sim$ de la siguiente manera: $\vec{v} \sim \vec{w}$ si y solo si $\vec{v} = \pm\vec{w}$. Prueba que $\sim$ es una relación de equivalencia y da la lista de todos los elementos del conjunto cociente, que denotaremos $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) = X/\sim$, comprobando que hay exactamente cuatro.

0 (b) ($1/2$ punto) Dada $A \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3)$, demuestra que la aplicación

$$\begin{aligned} \varphi_A : \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) &\longrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) \\ [\vec{v}] &\longmapsto [A\vec{v}] \end{aligned}$$

está bien definida.

(c) ($1/2$ punto) Enumera los elementos de $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3)$ cuya lista has dado en el primer apartado, y que denotaremos $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) = \{[\vec{v}_1], [\vec{v}_2], [\vec{v}_3], [\vec{v}_4]\}$. Prueba que, para todo $A \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3)$, la aplicación φ_A es biyectiva y deduce que existe una única permutación $\sigma_A \in S_4$ tal que $\varphi_A([\vec{v}_i]) = [\vec{v}_{\sigma_A(i)}]$ para todo i.

(d) ($1/2$ punto) Demuestra que la aplicación

$$\begin{aligned} f : \mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3) &\longrightarrow S_4 \\ A &\longmapsto \sigma_A \end{aligned}$$

es un homomorfismo de grupos.

(e) (1 punto) Prueba que para cada trasposición $(i\,j) \in S_4$ existe $A \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3)$ tal que $\sigma_A = (i\,j)$ y deduce de aquí que f es sobreyectiva.

(f) (1 punto) Establece un isomorfismo entre S_4 y un cociente de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3)$, describiendo explícitamente el subgrupo por el que se toma cociente, y úsalo para calcular el número de elementos de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3)$.

GONZÁLEZ GARCÍA, EDUARDO

1| $\mathbb{F}_3 = \mathbb{Z}/\mathbb{Z}_3$ y $GL(2, \mathbb{F}_3)$

a| $X = (\mathbb{F}_3 \times \mathbb{F}_3) \setminus \{(0,0)\}$; $\vec{v} \sim \vec{w} \iff \vec{v} = \pm\vec{w}$

$X = \{(1,0),(0,1),(0,2),(2,0),(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$

$(1,0) \sim (2,0)$
$(1,1) \sim (2,2)$
$(0,1) \sim (0,2)$
$(1,2) \sim (2,1)$
$(2,1) \sim (1,2)$
$(2,2) \sim (1,1)$
$(2,0) \sim (1,0)$
$(0,2) \sim (0,1)$

relaciones del conjunto.

1. Reflexiva: $\forall \vec{v} \in X$ si $\vec{v} = \pm\vec{v}$ en $\mathbb{F}_3$ $\Rightarrow \vec{v} \sim \vec{v}$

2. Simétrica: Si $\vec{v} \sim \vec{w} \iff \vec{v} = \pm\vec{w} \Rightarrow \vec{w} = \pm\vec{v}$ $\Rightarrow \vec{w} \sim \vec{v}$

3. Transitiva: Si $\vec{v} \sim \vec{w}$ y $\vec{w} \sim \vec{z} \Rightarrow \vec{v} \sim \vec{z}$
Sea $\vec{v} = \pm\vec{w}$ y $\vec{w} = \pm\vec{z} \Rightarrow \vec{v} = \pm\vec{z}$

Con las relaciones que he puesto en la derecha se puede obtener todas las propiedades. Toda la demostración está basada en la tabla con sus comprobaciones. Pongo ejemplo de cada propiedad:

1. Reflexiva: $(1,0) \sim (1,0)$ pues $(1,0) = \begin{cases} (1,0) \\ (-1,0) \overset{\mathbb{F}_3}{=} (2,0) \neq (1,0) \end{cases}$ ✓

2. Simétrica: Sea $(1,1) \sim (2,2)$ pues $(1,1) = \begin{cases} (2,2) = (1,1) \\ (-2,-2) \overset{\mathbb{F}_3}{=} (1,1) \end{cases}$ ✓

$\Rightarrow (2,2) = \begin{cases} (2,2) = (1,1) \\ (-2,-2) = (1,1) \end{cases} \Rightarrow (2,2) \sim (1,1)$ ✓

3. Transitiva: Sea $(2,1) \sim (1,2) \Rightarrow (2,1) = \begin{cases} (2,1) \overset{\cdot 2}{=} (4,2) \overset{\mathbb{F}_3}{=} (1,2) \\ (-2,-1) \overset{\mathbb{F}_3}{=} (1,2) \end{cases}$

y

$(1,2) \sim (2,1) \Rightarrow (1,2) = \begin{cases} (1,2) \overset{\cdot 2}{=} (2,4) \overset{\mathbb{F}_3}{=} (2,1) \\ (-1,-2) \overset{\mathbb{F}_3}{=} (2,1) \end{cases}$

Tenemos que $(2,1) \sim (2,1)$ por la reflexiva ✓.

$\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) = X/_\sim = \{$ [cero 2º componente], [cero 1º componente],

[iguales ambas componentes], [diferentes de 0 y distintas ambas componentes]

[cero 2ª componente] = $[(1,0)] = [(2,0)]$

[cero 1ª componente] = $[(0,1)] = [(0,2)]$

[iguales ambas componentes] = $[(1,1)] = [(2,2)]$

[$\neq 0$ y distintas ambas componentes] = $[(1,2)] = [(2,1)]$

Todas las clases de equivalencia de X

b) $\varphi_A : \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) \longrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3)$ Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{F}_3)$

$[\vec{v}] \longmapsto [A\vec{v}]$

- $[(1,0)]$; $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (1,0) = (1,0)$

- $[(0,1)]$; $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (0,1) = (0,2)$

- $[(1,1)]$; $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (1,1) = (1,1)$

- $[(1,2)]$; $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (1\ 2) = (1,2)$

Al aplicar φ_A de ~~un~~ elemento del $X/_\sim$, ~~se~~ nos devuelve un elemento que pertenece a la misma clase

Sabemos que: $ad - bc \neq 0$. García González, Eduardo

Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{F}_3)$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} av_1 + bv_2 \\ cv_1 + dv_2 \end{pmatrix}$$

Está bien definida pues en el cuerpo y grupo que trabajamos la operación suma y multiplicación es interna.

d) $f: GL(2, \mathbb{F}_3) \longrightarrow S_4$ es un homomorfismo si:

$A \longmapsto \sigma_A$

$f(A+B) = f(A) \circ f(B)$

$f(A+B) = \sigma_{A+B}$

$f(A) = \sigma_A$ y $f(B) = \sigma_B$

$f(A+B) = \sigma_{A+B} = \sigma_A \circ \sigma_B = f(A) \circ f(B)$

$\emptyset$.