Apellidos	GONZÁLEZ SANTIAGO
Nombre	CRISTIAN

Preguntas sobre grupos:

1. (4 puntos) Sea $\mathbb{F}_3 = \mathbb{Z}/(3)$ el cuerpo con 3 elementos y $\mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3)$ el grupo de matrices invertibles 2×2 con entradas en $\mathbb{F}_3$.

   (a) (½ punto) En el conjunto de vectores no nulos $X = (\mathbb{F}_3 \times \mathbb{F}_3) \backslash \{(0,0)\}$ definimos una relación $\sim$ de la siguiente manera: $\vec{v} \sim \vec{w}$ si y solo si $\vec{v} = \pm\vec{w}$. Prueba que $\sim$ es una relación de equivalencia y da la lista de todos los elementos del conjunto cociente, que denotaremos $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) = X/\sim$, comprobando que hay exactamente cuatro.

   (b) (½ punto) Dada $A \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3)$, demuestra que la aplicación

$$\begin{aligned} \varphi_A : \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) &\longrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) \\ [\vec{v}] &\longmapsto [A\vec{v}] \end{aligned}$$

   está bien definida.

   (c) (½ punto) Enumera los elementos de $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3)$ cuya lista has dado en el primer apartado, y que denotaremos $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) = \{[\vec{v}_1], [\vec{v}_2], [\vec{v}_3], [\vec{v}_4]\}$. Prueba que, para todo $A \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3)$, la aplicación φ_A es biyectiva y deduce que existe una única permutación $\sigma_A \in S_4$ tal que $\varphi_A([\vec{v}_i]) = [\vec{v}_{\sigma_A(i)}]$ para todo i.

   (d) (½ punto) Demuestra que la aplicación

$$\begin{aligned} f : \mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3) &\longrightarrow S_4 \\ A &\longmapsto \sigma_A \end{aligned}$$

   es un homomorfismo de grupos.

   (e) (1 punto) Prueba que para cada trasposición $(i\,j) \in S_4$ existe $A \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3)$ tal que $\sigma_A = (i\,j)$ y deduce de aquí que f es sobreyectiva.

   (f) (1 punto) Establece un isomorfismo entre S_4 y un cociente de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3)$, describiendo explícitamente el subgrupo por el que se toma cociente, y úsalo para calcular el número de elementos de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3)$.

CRISMAN

EJERCICIO 1

a) $\vec{v} \sim \vec{w} \Longleftrightarrow \vec{v} = \pm \vec{w}$

$\vec{v} \sim \vec{v}$, pues $\vec{v} = \vec{v}$ ✓ Reflexiva

$\vec{v} \sim \vec{w} \Longrightarrow \vec{w} \sim \vec{v}$, pues

$\vec{v} \sim \vec{w} \Longrightarrow \vec{v} = \pm \vec{w} \Longrightarrow \vec{w} = \pm \vec{v}$. Simétrica.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{v} \sim \vec{w} \Longrightarrow \vec{v} = \pm \vec{w} \\ \vec{w} \sim \vec{t} \Longrightarrow \vec{w} = \pm \vec{t} \end{array}\right\} \Longrightarrow \vec{v} = \pm \vec{t}$$ Transitiva

luego, $\sim$ es de equivalencia.

Los vectores de $(\mathbb{F}_3 \times \mathbb{F}_3) \setminus \{0, 0\}$ son de la forma $\vec{v} = (a, b)$, con $a \in \{1, 2\}$.

Entonces, $\vec{v} \sim \vec{w} \Longleftrightarrow \vec{v} = \pm \vec{w}$

luego, existen ~~dos~~ cuatro clases de equivalencia:

~~los~~ $[\vec{v}] = \{ \vec{v} \in X \mid \vec{v} = (\bar{1}, \bar{2})$, con $\bar{1}, \bar{2}$ denotando las clases del 1 y 2 en $\mathbb{F}_3 \}$

$[\vec{w}] = \{ \vec{v} \in X \mid \vec{w} = (\bar{1}, \bar{1})$, con $\bar{1}, \bar{2}$ denotando las clases del 1 y 2 en $\mathbb{F}_3 \}$

$[\vec{t}] = \{\vec{t} \in X \mid \vec{t} = (\overline{2}, \overline{1}),$
con $\overline{1}, \overline{2}$ denotando las clases del 1 y 2 en $\mathbb{F}_3\}$

$[\vec{z}] = \{\vec{z} \in X \mid \vec{z} = (\overline{2}, \overline{2})$, con
$\overline{1}$ y $\overline{2}$ denotando las clases del 1 y 2 en $\mathbb{F}_3\}$

Por tanto, $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) = \{[\vec{v}], [\vec{w}], [\vec{t}],$
$[\vec{z}]\}$

b)