Apellidos	Lloyd Baeza
Nombre	José

Preguntas sobre grupos:

1. (4 puntos) Sea $\mathbb{F}_3 = \mathbb{Z}/(3)$ el cuerpo con 3 elementos y $\mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3)$ el grupo de matrices invertibles 2×2 con entradas en $\mathbb{F}_3$.

   (a) (½ punto) En el conjunto de vectores no nulos $X = (\mathbb{F}_3 \times \mathbb{F}_3) \backslash \{(0,0)\}$ definimos una relación $\sim$ de la siguiente manera: $\vec{v} \sim \vec{w}$ si y solo si $\vec{v} = \pm \vec{w}$. Prueba que $\sim$ es una relación de equivalencia y da la lista de todos los elementos del conjunto cociente, que denotáremos $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) = X/\sim$, comprobando que hay exactamente cuatro.

   (b) (½ punto) Dada $A \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3)$, demuestra que la aplicación

   $$\begin{aligned} \varphi_A : \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) &\longrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) \\ [\vec{v}] &\longmapsto [A\vec{v}] \end{aligned}$$

   está bien definida.

   (c) (½ punto) Enumera los elementos de $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3)$ cuya lista has dado en el primer apartado, y que denotaremos $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) = \{[\vec{v}_1], [\vec{v}_2], [\vec{v}_3], [\vec{v}_4]\}$. Prueba que, para todo $A \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3)$, la aplicación φ_A es biyectiva y deduce que existe una única permutación $\sigma_A \in S_4$ tal que $\varphi_A([\vec{v}_i]) = [\vec{v}_{\sigma_A(i)}]$ para todo i.

   (d) (½ punto) Demuestra que la aplicación

   $$\begin{aligned} f : \mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3) &\longrightarrow S_4 \\ A &\longmapsto \sigma_A \end{aligned}$$

   es un homomorfismo de grupos.

   (e) (1 punto) Prueba que para cada trasposición $(i\, j) \in S_4$ existe $A \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3)$ tal que $\sigma_A = (i\, j)$ y deduce de aquí que f es sobreyectiva.

   (f) (1 punto) Establece un isomorfismo entre S_4 y un cociente de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3)$, describiendo explícitamente el subgrupo por el que se toma cociente, y úsalo para calcular el número de elementos de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3)$.

José Llopis Baeza

①

Sea $\mathbb{F}_3 = \mathbb{Z}/(3)$ el cuerpo con 3 elementos y

$GL(2,\mathbb{F}_3)$ el grupo de las matrices invertible con entradas en $\mathbb{F}_3$.

$\mathbb{F}_3 = \{[0],[1],[2]\}$

Definida en pagina 4.

$GL(2,\mathbb{F}_3) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \,\middle|\, \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq 0 \text{ y } a,b,c,d \in \mathbb{F}_3 \right\}$

a) $X = (\mathbb{F}_3 \times \mathbb{F}_3) \setminus \{(0,0)\} = \{(0,1),(1,0),(1,1),(1,2),(2,2),(2,0),(0,2)\}$

$\vec{v} \sim \vec{w} \longleftrightarrow \vec{v} = \pm\vec{w}$

Probemos que $\sim$ es relación de equivalencia.

Reflexiva: $\vec{v} \sim \vec{v} \longleftrightarrow \vec{v} = \pm\vec{v}$ Trivialmente $\square$

Simétrica: $\vec{v} \sim \vec{w} \longleftrightarrow \vec{v} = \pm\vec{w}$

si $\vec{v} = +\vec{w} \longrightarrow \vec{w} = +\vec{v}$

si $\vec{v} = -\vec{w} \longrightarrow \vec{w} = -\vec{v}$

$\vec{w} = \pm\vec{v} \longleftrightarrow \vec{w} \sim \vec{v}$ $\square$

Transitiva: $\vec{v} \sim \vec{w} \rightarrow v = \pm\vec{w}$

$\vec{w} \sim \vec{z} \rightarrow \vec{w} = \pm\vec{z}$

$v = +\vec{w} = +(\pm\vec{z}) = \pm\vec{z}$

ó

$v = -\vec{w} = -(\pm\vec{z}) = \pm\vec{z}$

$\longleftrightarrow \vec{v} \sim \vec{z}$ $\square$

$\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) = X/\sim \; = \{[(0,1)], [(1,1)], [(2,1)], [(1,0)]\}$

$[(0,1)] = \ldots (0,-2), (0,4), (0,7) \ldots$

$[(1,1)] = \ldots (-2,-2), (1,4), (4,4), (4,1), (7,1) \ldots$

$[(2,1)] = \ldots (-1,1), (-1,-2), (2,5) \ldots$

$[(1,0)] = \ldots (-2,0), \ldots (4,0), (7,0) \ldots$

Lo comprobamos usando el T. Lagrange $|X/\sim| = \dfrac{\overset{=8}{|X|}}{\underset{=2}{|\sim|}} = 4$

b) Dada $A \in GL(2, \mathbb{F}_3)$

GL lo he definido en la pag 4.

$$\varphi_A : \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) \longrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3)$$
$$[\vec{v}] \longmapsto [A\vec{v}]$$

$a \cdot d - bc \neq 0$

$\varphi_A(\vec{v}) = A \cdot \vec{v}$, siendo $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tq $\det(A) \neq 0$ y $a,b,c,d \in \mathbb{F}_3$

- $\varphi_A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$; como b y $d \in \mathbb{F}_3 \to [A \cdot (0,1)] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3)$
- $\varphi_A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b \\ c+d \end{pmatrix}$; como $a,b,c,d \in \mathbb{F}_3$ y sabemos que $(a+b) \in \mathbb{F}_3$ y $(c+d) \in \mathbb{F}_3 \to [A \cdot (1,1)] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3)$
- $\varphi\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+b \\ 2c+d \end{pmatrix}$; análogamente $\to [A \cdot (2,1)] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3)$
- $\varphi\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$; como a y $c \in \mathbb{F}_3 \to [A \cdot (a,c)] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3)$

Hemos verificado que el producto de A con todas las clase de equivalencia sigue siendo una clase de equivalencia, por lo tanto la aplicación está bien definida

(i) La posibilidad de que el producto $[A \cdot \vec{v}]$ sea $(0,0)$ se descarta, ya que al ser A una matriz invertible $(a \cdot d - bc \neq 0)$ no pudiera [illegible]

c) Enumeramos los elementos de $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3)$

$$\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) = \{ \overset{\vec{1}}{[(0,1)]}, \overset{\vec{2}}{[(1,1)]}, \overset{\vec{3}}{[(2,1)]}, \overset{\vec{4}}{[(1,0)]} \}$$

Nos piden demostrar que el endomorfismo φ_A es un automorfismo (biyectivo) $\forall A \in GL(2, \mathbb{F}_3)$.

Es biyectiva, ya que para cada $\vec{v}$ ~~$\in A$~~, al aplicarle φ_A, es decir, $A\vec{v}$, siempre dará un vector distinto (que puede estar en la misma clase).

$e, g \in \vec{v}$

$$\varphi\begin{pmatrix} e \\ g \end{pmatrix} = A \cdot \vec{g} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae + gb \\ ce + dg \end{pmatrix}$$ que siempre será distinto,

así que a cada vector podemos asociarle una ~~única~~ imagen, de manera que sea inyectiva y sobreyectiva, es decir, biyectiva

¿$\exists! \sigma_A \in S_4$ tq $\varphi_A([\vec{v_i}]) = [\vec{v}_{\sigma_A(i)}]$ $\forall i$,

es decir, nos preguntan si existe una única permutación que haga que al aplicarle φ_A a $[v_i] \to [v_{\sigma_A(i)}]$, lo cual es cierto, ya que al aplicar φ_A, estamos simplemente mandando a $\vec{v}$ a otra clase de equivalencia

g

d)

$$f: GL(2,\mathbb{F}_3) \longrightarrow S_4 \quad \cancel{\ } \quad 4! = 3\cdot 4\cdot 2 = 24$$

$$A \longmapsto \sigma_4$$

$$GL(2,\mathbb{F}_3) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \right.$$

$$\cancel{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \dots \right\}_{24} \quad \cancel{3\times3\times3=27}$$

Para que sea homomorfismo de grupos:

$\cancel{f(A)}$ $f(A\cdot B) = f(A)\cdot f(B)$ lo cual es cierto, ya que

$$f(A\cdot B) = \sigma_{A\cdot B} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{P. permutaciones}}}{=} \sigma_A \circ \sigma_B = f(A)\cdot f(B)$$

$f(\alpha A) = \alpha f(A)$ lo cual es cierto, ya que

$$f(\alpha A) = \sigma_{\alpha A} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{P. permutaciones}}}{=} \alpha\sigma_A = \alpha f(A)$$

Es homomorfismo de grupos

e)

Ya hemos observado que $|GL(2,\mathbb{F}_3)| \cancel{\ge} |S_4| = 24$, por lo tanto, f debe ser sobreyectiva.

De ahí sabemos que para cada trasposición $(i\,j) \in S_4$, $\exists A$ tq $\sigma_A = (i\,j)$

g) Establece un isomorfismo entre S_4 y un cociente de $GL(2,\mathbb{F}_3)$

Usamos el t. de la proyección canónica:

$$
\begin{tikzcd}
GL(2,\mathbb{F}_3) \arrow[r, "f", "\text{sobreyectiva}"'] \arrow[d, "\pi"', "\text{proyección canónica}"] & S_4 \\
GL(2,\mathbb{F}_3)/\mathrm{Ker}(f) \arrow[r, "\cong g", "\text{Isomorfismo}"'] & \mathrm{im}(f) = S_4 \arrow[u, "\iota\ \text{inclusión}"']
\end{tikzcd}
$$

(ya que f es sobreyectiva)

Así he podido establecer un isomorfismo entre $GL(2,\mathbb{F}_3)/\mathrm{Ker}(f)$ y S_4,

donde $\mathrm{Ker}(f) := \{A \mid f(A) = e\}$ ← permutación trivial (identidad)

$$\left|\frac{GL(2,\mathbb{F}_3)}{\mathrm{Ker}(f)}\right| = \frac{|GL(2,\mathbb{F}_3)|}{|\mathrm{Ker}(f)|} = |S_4| \longrightarrow$$

$$\longrightarrow |GL(2,\mathbb{F}_3)| = \overset{24}{\overset{\shortparallel}{|S_4|}} \cdot \overset{1}{\overset{\shortparallel}{|\mathrm{Ker}(f)|}} = 24$$