Apellidos	García de Maya
Nombre	Marcos Jesús

Preguntas sobre grupos:

1. (4 puntos) Sea $\mathbb{F}_3 = \mathbb{Z}/(3)$ el cuerpo con 3 elementos y $\mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3)$ el grupo de matrices invertibles 2×2 con entradas en $\mathbb{F}_3$.

   0,5 (a) ($^1\!/_2$ punto) En el conjunto de vectores no nulos $X = (\mathbb{F}_3 \times \mathbb{F}_3) \setminus \{(0,0)\}$ definimos una relación $\sim$ de la siguiente manera: $\vec{v} \sim \vec{w}$ si y solo si $\vec{v} = \pm\vec{w}$. Prueba que $\sim$ es una relación de equivalencia y da la lista de todos los elementos del conjunto cociente, que denotaremos $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) = X/\sim$, comprobando que hay exactamente cuatro.

   0'25 (b) ($^1\!/_2$ punto) Dada $A \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3)$, demuestra que la aplicación

   $$\begin{aligned} \varphi_A : \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) &\longrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) \\ [\vec{v}] &\longmapsto [A\vec{v}] \end{aligned}$$

   está bien definida.

   0'25 (c) ($^1\!/_2$ punto) Enumera los elementos de $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3)$ cuya lista has dado en el primer apartado, y que denotaremos $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) = \{[\vec{v}_1], [\vec{v}_2], [\vec{v}_3], [\vec{v}_4]\}$. Prueba que, para todo $A \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3)$, la aplicación φ_A es biyectiva y deduce que existe una única permutación $\sigma_A \in S_4$ tal que $\varphi_A([\vec{v}_i]) = [\vec{v}_{\sigma_A(i)}]$ para todo i.

   (d) ($^1\!/_2$ punto) Demuestra que la aplicación

   $$\begin{aligned} f : \mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3) &\longrightarrow S_4 \\ A &\longmapsto \sigma_A \end{aligned}$$

   es un homomorfismo de grupos.

   (e) (1 punto) Prueba que para cada trasposición $(i\,j) \in S_4$ existe $A \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3)$ tal que $\sigma_A = (i\,j)$ y deduce de aquí que f es sobreyectiva.

   (f) (1 punto) Establece un isomorfismo entre S_4 y un cociente de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3)$, describiendo explícitamente el subgrupo por el que se toma cociente, y úsalo para calcular el número de elementos de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3)$.

Marcos Jesús García de Maye Tema 2

① $\mathbb{F}_3 = \mathbb{Z}/(3)$ el cuerpo con 3 elem: $\mathbb{F}_3 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$.

$GL(2, \mathbb{F}_3)$ matrices invertibles ($\det(A) \neq 0$) 2x2 con entradas en $\mathbb{F}_3$.

a) En $X = (\mathbb{F}_3 \times \mathbb{F}_3) \setminus \{0,0\}$ definimos la relación $\sim$ tq $\vec{v} \sim \vec{w} \iff \vec{v} = \pm \vec{w}$. Probar que es relación de equiv. y dar los elementos de $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) = X/\sim$, que son 4.

- Veamos qué conjunto es X: es el conjunto de los vectores:

$$X = \{(0,1);(1,0);(2,0);(0,2);(2,1);(1,2);(1,1);(2,2)\}.$$

- Veamos que $\sim$ es relación de equiv. (si cumple las 3 propiedades):
  - Reflexiva: $\vec{v} \sim \vec{v}$ $\forall \vec{v} \in X$ porque todo vector es $\vec{v} = +\vec{v}$ (igual a sí mismo
  - Simétrica: si $\vec{v} \sim \vec{w} \Rightarrow \vec{v} = \pm\vec{w} \Rightarrow \vec{w} = \pm\vec{v} \Rightarrow \vec{w} \sim \vec{v}$. Sí se cumple.
  - Transitiva: si $\vec{v} \sim \vec{w}$ y $\vec{w} \sim \vec{u} \Rightarrow \vec{v} = \pm\vec{w}$ y $\vec{w} = \pm\vec{u} \Rightarrow \vec{v} = \pm(\pm\vec{u}) = \pm\vec{u}$, según el signo) $\Rightarrow \vec{v} \sim \vec{u}$.

Las clases de equiv. son
$$\begin{cases} \overline{(0,1)} = \{(0,1);(0,2)\} \to (0,1) \sim (0,-1) \\ \overline{(1,0)} = \{(1,0);(2,0)\} \to (1,0) \sim (-1,0) \\ \overline{(1,1)} = \{(1,1);(2,2)\} \to (1,1) \sim (-1,-1) \\ \overline{(1,2)} = \{(1,2);(2,1)\} \to (1,2) \sim (-1,-2) \end{cases}$$
(Esto se puede hacer porque estamos en $\mathbb{F}_3 \times \mathbb{F}_3$)

Luego $\mathbb{P}_2(\mathbb{F}_3) = X/\sim = \{\overline{(0,1)}; \overline{(1,0)}; \overline{(1,1)}; \overline{(1,2)}\}$

b) Demostrar que dada $A \in GL(2, \mathbb{F}_3)$ la aplicación $\varphi: \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) \longrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3)$, $[\vec{v}] \longmapsto [A\cdot\vec{v}]$ está bien definida.

Está bien definida porque $\det(A) \neq 0$. ~~(Ya que si ... $\vec{v}$ ... $A\vec{v}$)~~ Al multiplicar una clase de un vector por la matriz A ~~(...)~~ invertible, el resultado siempre ~~(porque det(A) ≠ 0)~~. será ~~(...)~~ un vector $\sim$-relacionado con v, luego $[A\vec{v}]$ va a pertenecer a una de las clases calculadas de $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3)$

c) $\mathbb{P}_2(\mathbb{F}_3) = \{[\vec{v_1}], [\vec{v_2}], [\vec{v_3}], [\vec{v_4}]\}$. Probar que $\forall A \in GL(2,\mathbb{F}_3)$, φ_A es biyectiva y
$\{[(1,0)], [(0,1)], [(1,1)], [1,2]\}$

deduce que $\exists!$. permutación $\sigma_A \in S_4$ tq $\varphi_A([\vec{v_i}]) = [v_{\sigma_A(i)}]$

Es biyectiva porque como $A \in GL(2,\mathbb{F}_3)$, A es invertible, luego $\exists A^{-1}$ tq $A \cdot A^{-1} = I$. Por tanto, podemos definir la aplicación inversa: $\varphi_{A^{-1}} : \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) \longrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3)$, de modo que $\varphi_A \circ \varphi_{A^{-1}} = Id$:

$$[\vec{w}] \longmapsto [A^{-1}\vec{w}]$$

$[\vec{v}] \xmapsto{\varphi_A} [A\cdot\vec{v}] \xmapsto{\varphi_{A^{-1}}} [A^{-1}\cdot A\cdot\vec{v}] = [I\cdot\vec{v}] = [\vec{v}]$. Como φ_A es invertible, es biyectiva.

d) Demostrar que $f: GL(2,\mathbb{F}_3) \to S_4$ es hom. de grupos.
$$A \longmapsto \sigma_A$$

~~$f(I) = \sigma_I = (1)(2)(3)$ ... $f(A_1 A_2) = f(A_1)f(A_2)$: $f(A_1 A_2) = \sigma_{A_1}\sigma_{A_2}$~~

$$\begin{cases} f(I) = \sigma_I = (\ ) \\ f(A_1 + A_2) = f(A_1) + f(A_2) \\ f(k\cdot A_1) = k\cdot f(A_1) \end{cases}$$ no tiene sentido