Apellidos	García de Maya
Nombre	Marcos Jesús

Preguntas sobre grupos:

1. (4 puntos) Sea $\mathbb{F}_3 = \mathbb{Z}/(3)$ el cuerpo con 3 elementos y $\mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3)$ el grupo de matrices invertibles 2×2 con entradas en $\mathbb{F}_3$.

   (a) ($1/2$ punto) En el conjunto de vectores no nulos $X = (\mathbb{F}_3 \times \mathbb{F}_3) \backslash \{(0,0)\}$ definimos una relación $\sim$ de la siguiente manera: $\vec{v} \sim \vec{w}$ si y solo si $\vec{v} = \pm\vec{w}$. Prueba que $\sim$ es una relación de equivalencia y da la lista de todos los elementos del conjunto cociente, que denotaremos $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) = X/\sim$, comprobando que hay exactamente cuatro.

   (b) ($1/2$ punto) Dada $A \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3)$, demuestra que la aplicación

   $$\begin{aligned} \varphi_A : \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) &\longrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) \\ [\vec{v}] &\longmapsto [A\vec{v}] \end{aligned}$$

   está bien definida.

   (c) ($1/2$ punto) Enumera los elementos de $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3)$ cuya lista has dado en el primer apartado, y que denotaremos $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) = \{[\vec{v}_1], [\vec{v}_2], [\vec{v}_3], [\vec{v}_4]\}$. Prueba que, para todo $A \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3)$, la aplicación φ_A es biyectiva y deduce que existe una única permutación $\sigma_A \in S_4$ tal que $\varphi_A([\vec{v}_i]) = [\vec{v}_{\sigma_A(i)}]$ para todo i.

   (d) ($1/2$ punto) Demuestra que la aplicación

   $$\begin{aligned} f : \mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3) &\longrightarrow S_4 \\ A &\longmapsto \sigma_A \end{aligned}$$

   es un homomorfismo de grupos.

   (e) (1 punto) Prueba que para cada trasposición $(i\,j) \in S_4$ existe $A \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3)$ tal que $\sigma_A = (i\,j)$ y deduce de aquí que f es sobreyectiva.

   (f) (1 punto) Establece un isomorfismo entre S_4 y un cociente de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3)$, describiendo explícitamente el subgrupo por el que se toma cociente, y úsalo para calcular el número de elementos de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3)$.

Marcos Jesús García de Maye Tema 2

① $\mathbb{F}_3 = \mathbb{Z}/(3)$ el cuerpo con 3 elem: $\mathbb{F}_3 = \{\bar 0, \bar 1, \bar 2\}$.

$GL(2, \mathbb{F}_3)$ matrices invertibles ($\det(A) \neq 0$) 2×2 con entradas en $\mathbb{F}_3$.

a) En $X = (\mathbb{F}_3 \times \mathbb{F}_3) \setminus \{0,0\}$ definimos la relación $\sim$ tq $\vec v \sim \vec w \Leftrightarrow \vec v = \pm \vec w$. Probar que es relación de equiv. y dar los elementos de $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) = X/_\sim$, que son 4.

- Veamos qué conjunto es X: es el conjunto de los vectores:

$X = \{(0,1); (1,0); (2,0); (0,2); (2,1); (1,2); (1,1); (2,2)\}$.

- Veamos que $\sim$ es relación de equiv. (si cumple las 3 propiedades):
  - Reflexiva: $\vec v \sim \vec v$ $\forall \vec v \in X$ porque todo vector es $\vec v = +\vec v$ (igual a sí mismo
  - Simétrica: si $\vec v \sim \vec w \Rightarrow \vec v = \pm \vec w \Rightarrow \vec w = \pm \vec v \Rightarrow \vec w \sim \vec v$. Sí se cumple.
  - Transitiva: si $\vec v \sim \vec w$ y $\vec w \sim \vec u \Rightarrow \vec v = \pm \vec w$ y $\vec w = \pm \vec u \Rightarrow \vec v = \pm(\pm \vec u) = \pm \vec u$, según el signo) $\Rightarrow \vec v \sim \vec u$.

Las clases de equiv. son
$$\begin{cases} \overline{(0,1)} = \{(0,1); (0,2)\} \to (0,1) \sim (0,-1) \\ \overline{(1,0)} = \{(1,0); (2,0)\} \to (1,0) \sim (-1,0) \\ \overline{(1,1)} = \{(1,1); (2,2)\} \to (1,1) \sim (-1,-1) \\ \overline{(1,2)} = \{(1,2); (2,1)\} \to (1,2) \sim (-1,-2) \end{cases}$$
(Esto se puede hacer porque estamos en $\mathbb{F}_3 \times \mathbb{F}_3$)

Luego $\mathbb{P}_2(\mathbb{F}_3) = X/_\sim = \{\overline{(0,1)}; \overline{(1,0)}; \overline{(1,1)}; \overline{(1,2)}\}$

b) Demostrar que dada $A \in GL(2, \mathbb{F}_3)$ la aplicación $\varphi: \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) \longrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3)$, $[\vec v] \longmapsto [A\cdot\vec v]$ está bien definida.

Está bien definida porque $\det(A) \neq 0$. ~~[illegible]~~ Al multiplicar una clase de un vector por la matriz A ~~[illegible]~~ invertible, el resultado siempre ~~[illegible]~~ será ~~[illegible]~~ un vector $\sim$-relacionado con v, luego $[A\vec v]$ va a pertenecer a una de las clases calculadas de $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3)$

c) $\mathbb{P}_2(\mathbb{F}_3) = \{[\vec{v_1}], [\vec{v_2}], [\vec{v_3}], [\vec{v_4}]\}$. Probar que $\forall A \in GL(2, \mathbb{F}_3)$, φ_A es biyectiva y

$\{[(1,0)], [(0,1)], [(1,1)], [1,2]\}$

deduce que $\exists!$ permutación $\sigma_A \in S_4$ tq $\varphi_A([\vec{v_i}]) = [v_{\sigma_A(i)}]$

Es biyectiva porque como $A \in GL(2, \mathbb{F}_3)$, A es invertible, luego $\exists A^{-1}$ tq $A \cdot A^{-1} = I$. Por tanto, podemos definir la aplicación inversa: $\varphi_{A^{-1}}: \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) \longrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3)$, de modo que $\varphi_A \circ \varphi_{A^{-1}} = Id$:

$$[\vec{w}] \longmapsto [A^{-1}\vec{w}]$$

$$[\vec{v}] \xmapsto{\varphi_A} [A \cdot \vec{v}] \xmapsto{\varphi_{A^{-1}}} [A^{-1} \cdot A \cdot \vec{v}] = [I \cdot \vec{v}] = [\vec{v}]$$. Como φ_A es invertible, es biyectiva.

d) Demostrar que $f: GL(2, \mathbb{F}_3) \to S_4$ es hom. de grupos.

$$A \longmapsto \sigma_A$$

~~$f(I) = \sigma_I = (\ )$ ... $f(A_1 A_2) = f(A_1) f(A_2)$: $f(A_1 A_2) = \sigma_{A_1} \sigma_{A_2}$~~

$$\begin{cases} f(I) = \sigma_I = (\ ) \\ f(A_1 + A_2) = f(A_1) + f(A_2) \\ f(k \cdot A_1) = k \cdot f(A_1) \end{cases}$$