Apellidos	Zafra Getino
Nombre	Carlos

Preguntas sobre grupos:

1. (4 puntos) Sea $\mathbb{F}_3 = \mathbb{Z}/(3)$ el cuerpo con 3 elementos y $\mathrm{GL}(2,\mathbb{F}_3)$ el grupo de matrices invertibles 2×2 con entradas en $\mathbb{F}_3$.

   (a) ($1/2$ punto) En el conjunto de vectores no nulos $X = (\mathbb{F}_3 \times \mathbb{F}_3)\backslash\{(0,0)\}$ definimos una relación $\sim$ de la siguiente manera: $\vec{v} \sim \vec{w}$ si y solo si $\vec{v} = \pm\vec{w}$. Prueba que $\sim$ es una relación de equivalencia y da la lista de todos los elementos del conjunto cociente, que denotaremos $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) = X/\sim$, comprobando que hay exactamente cuatro.

   (b) ($1/2$ punto) Dada $A \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{F}_3)$, demuestra que la aplicación

   $$\begin{aligned} \varphi_A : \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) &\longrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) \\ [\vec{v}] &\longmapsto [A\vec{v}] \end{aligned}$$

   está bien definida.

   (c) ($1/2$ punto) Enumera los elementos de $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3)$ cuya lista has dado en el primer apartado, y que denotaremos $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) = \{[\vec{v}_1], [\vec{v}_2], [\vec{v}_3], [\vec{v}_4]\}$. Prueba que, para todo $A \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{F}_3)$, la aplicación φ_A es biyectiva y deduce que existe una única permutación $\sigma_A \in S_4$ tal que $\varphi_A([\vec{v}_i]) = [\vec{v}_{\sigma_A(i)}]$ para todo i.

   (d) ($1/2$ punto) Demuestra que la aplicación

   $$\begin{aligned} f : \mathrm{GL}(2,\mathbb{F}_3) &\longrightarrow S_4 \\ A &\longmapsto \sigma_A \end{aligned}$$

   es un homomorfismo de grupos.

   (e) (1 punto) Prueba que para cada trasposición $(i\,j) \in S_4$ existe $A \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{F}_3)$ tal que $\sigma_A = (i\,j)$ y deduce de aquí que f es sobreyectiva.

   (f) (1 punto) Establece un isomorfismo entre S_4 y un cociente de $\mathrm{GL}(2,\mathbb{F}_3)$, describiendo explícitamente el subgrupo por el que se toma cociente, y úsalo para calcular el número de elementos de $\mathrm{GL}(2,\mathbb{F}_3)$.

Carlos Zafra Cetina

①

a) $\vec{v} \sim \vec{w} \Leftrightarrow \vec{v} = \pm\vec{w}$.

Probar que es una relación de equivalencia:

- Reflexiva: $\vec{v} \sim \vec{v} \Leftrightarrow \vec{v} = \pm\vec{v}$, $\vec{v} = \vec{v} \Rightarrow \vec{v} = +\vec{v}$ ✓

- Simétrica: $\vec{v} \sim \vec{w} \Rightarrow \vec{w} \sim \vec{v}$, $\vec{v} \sim \vec{w} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{v} = \vec{w} \Leftrightarrow \vec{w} = \vec{v} \Leftrightarrow \vec{w} \sim \vec{v} ✓ \\ \vec{v} = -\vec{w} \Leftrightarrow \vec{w} = -\vec{v} \Leftrightarrow \vec{w} \sim \vec{v} ✓ \end{cases}$

- Transitiva: $\vec{v} \sim \vec{w} \wedge \vec{w} \sim \vec{z} \Rightarrow \vec{v} \sim \vec{z}$, $\vec{v} \sim \vec{w} \wedge \vec{w} \sim \vec{z} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{v} = \vec{w} \wedge \vec{w} = \vec{z} \Rightarrow \vec{v} = \vec{z} ✓ \\ \vec{v} = \vec{w} \wedge \vec{w} = -\vec{z} \Rightarrow \vec{v} = -\vec{z} ✓ \\ \vec{v} = -\vec{w} \wedge \vec{w} = \vec{z} \Rightarrow \vec{v} = -\vec{z} ✓ \\ \vec{v} = -\vec{w} \wedge \vec{w} = -\vec{z} \Rightarrow \vec{v} = \vec{z} ✓ \end{cases}$$ $\boxtimes$

Raíces de $\mathbb{F}_3 = \{0, 1, 2\}$

$X = \{(0,1), (0,2), (1,1), (1,2), (1,0), (2,0), (2,1), (2,2)\}$

Porque estamos en $\mathbb{F}_3$ $\Rightarrow$ $(0,2) = (0,-1)$, $(1,2) = (1,-1)$, $(2,0) = (-1,0)$, $(2,1) = (-1,1)$, $(2,2) = (-1,-1)$

Por la relación $\sim$: $(0,1) \sim (0,-1)$, $(1,1) \sim (-1,-1)$, $(1,-1) \sim (-1,1)$ y $(1,0) \sim (-1,0)$

Por tanto $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) = X/_{\sim} = \{(0,1), (1,1), (1,-1), (1,0)\}$ y queda comprobado que son 4 elementos.

b) $A \in GL(2, \mathbb{F}_3)$. $\varphi_A : \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) \to \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3)$, $[\vec{v}] \mapsto [A\vec{v}]$

Tomemos la matriz A como $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ con $a, b, c, d = \{0, 1, -1\}$ porque tiene entradas en $\mathbb{F}_3$

Tomemos los 4 elementos de $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3)$ y comprobemos que van a $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3)$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3)$$

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b \\ c+d \end{pmatrix} \Rightarrow a+b \leq |2|$ que en $\mathbb{F}_3$ es igual a 1

$\Rightarrow a+b \leq |1|$ es, $-1 \leq a+b \leq 1$

y con $c+d$ pasa lo mismo ya que toma valores entre -1 y $1 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ pertenece a $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3)$

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b \\ c-d \end{pmatrix} \Rightarrow a-b \leq |2| \Rightarrow$ Mismo razonamiento que el anterior $\Rightarrow$ pertenece a $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3)$

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3)$

Y ~~pantu~~ por tanto φ_A está bien definida $\boxtimes$

c) $[\vec{v}_1] = (0,1)$, $[\vec{v}_2] = (1,1)$, $[\vec{v}_3] = (1,-1)$, $[\vec{v}_4] = (1,0)$

Probar que φ_A es biyectiva.

Para probar que una aplicación es biyectiva tenemos que probar que es inyectiva y sobreyectiva.

- inyectiva: $x_1 = x_2 \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2)$

Por RA supongamos que $x_1 \neq x_2$ pero $f(x_1) = f(x_2)$

En el apartado anterior hemos probado cuál es la imagen de cada $\vec{v}_i$ y podemos ver que la imagen de $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ y $\vec{v}_4$ son iguales si $b=d=0$ $\rightarrow\leftarrow$ que es una contradicción porque A es invertible, es decir, que tiene determinante distinto de 0 y por tanto si $b=d=0$ $ad-bc=0 \Rightarrow f(\vec{v}_2) \neq f(\vec{v}_3) \neq f(\vec{v}_4)$ $\boxtimes$

Carlos Zafra Getino

- sobreyectiva: $\forall x \in X, \exists y \in Y$ tq $f(x) = y$.

En el apartado anterior hemos comprobado que todo $\vec{v}_i$ tiene una imagen asociada que pertenece a $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3)$ $\boxtimes$

Por tanto φ_A es biyectiva.

$\varphi_A([\vec{v}_i]) = [\vec{v}_{\sigma_A(i)}]$. Deducir que $\exists!$ permutación.

Al probar que φ_A es una aplicación biyectiva, para cada $\vec{v}_i$, $\exists!$ $\varphi_A([\vec{v}_i])$ y por tanto como $\varphi_A([\vec{v}_i]) = [\vec{v}_{\sigma_A(i)}] \Rightarrow \exists!\ \sigma_A \in S_4$

d) Demostrar que $f: GL(2, \mathbb{F}_3) \to S_4$ es homomorfismo de grupos.
$A \longmapsto \sigma_A$

Para probar que es homomorfismo de grupos $\Rightarrow f(x * y) = f(x) * f(y)$

$$f(xy) = \sigma_{AB}(AB) \overset{\substack{\text{existe única}\\ \text{permutación}}}{\underset{\downarrow}{=}} \sigma_A(A)\, \sigma_B(B) = f(x)\, f(y)$$

Ejemplo para comprobar:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \sigma_A = (v_2\ v_4\ v_3)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \sigma_A = id$$

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = (v_2\ v_4\ v_3) \quad y \quad f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (v_2\ v_4\ v_3) \checkmark$$

e) Las trasposiciones $(ij) \in S_4$ son $\{(12), (13), (14), (23), (24), (34)\}$

que en $\mathbb{F}_3$ que estamos trabajando $\Rightarrow$ $(1\ {-1})$ $(1\ 0)$ $(1\ 1)$ $(-1\ 0)$ $(-1\ 1)$ $(0\ 1)$

que pertenecen todas a $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3)$

Dada una matriz $A \in GL(2, \mathbb{F}_3)$, entonces

$$A[\vec{v}_i] = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & a+b & a-b & a \\ d & c+d & c-d & c \end{pmatrix}$$

Como estamos trabajando en $\mathbb{F}_3$ solo existen tres posibles valores para a, b, c, d y por tanto siempre habrá dos elementos que queden fijos para toda $(i\,j) \in S_4$.

Deducir f sobre.

$\forall x \in X, \exists y \in Y$ tq $f(x) = y \Rightarrow \forall A \in GL(2, \mathbb{F}_3), \exists \sigma_A \in S_4$ tq $f(A) = \sigma_4$.

Sabemos que para todo A, φ_A es biyectiva y por tanto que le corresponde un $[\vec{v}_i]$ que está asociado a una permutación $\sigma_A \Rightarrow \forall A \in GL \; \exists! \; \sigma_A \in S_4$ tq $f(A) = \sigma_A$.

$\Rightarrow f$ sobreyectiva.

$f)$ $S_4 \xrightarrow{\cong} GL(2, \mathbb{F}_3)/\sigma_A$

El subgrupo que tomamos es σ_A para que las matrices estén definidas sobre sus permutaciones σ_A.

Por el Teorema de Lagrange $|GL(2, \mathbb{F}_3)/\sigma_A| = |GL(2, \mathbb{F}_3)| \cdot \overset{4}{\overset{\shortparallel}{|\sigma_A|}}$

Como la aplicación es biyectiva $|GL(2, \mathbb{F}_3)/\sigma_A| = |S_4| = 4! = 24$

$\Rightarrow 24 = |GL(2, \mathbb{F}_3)| \cdot 4 \rightarrow |GL(2, \mathbb{F}_3)| = 6$ $\square$