Apellidos	Jiménez Caro
Nombre	María

Preguntas sobre grupos:

1. (4 puntos) Sea $\mathbb{F}_3 = \mathbb{Z}/(3)$ el cuerpo con 3 elementos y $\mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3)$ el grupo de matrices invertibles 2×2 con entradas en $\mathbb{F}_3$.

   (a) ($1/2$ punto) En el conjunto de vectores no nulos $X = (\mathbb{F}_3 \times \mathbb{F}_3) \setminus \{(0, 0)\}$ definimos una relación $\sim$ de la siguiente manera: $\vec{v} \sim \vec{w}$ si y solo si $\vec{v} = \pm\vec{w}$. Prueba que $\sim$ es una relación de equivalencia y da la lista de todos los elementos del conjunto cociente, que denotaremos $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) = X/\sim$, comprobando que hay exactamente cuatro.

   (b) ($1/2$ punto) Dada $A \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3)$, demuestra que la aplicación

   $$\begin{aligned} \varphi_A : \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) &\longrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) \\ [\vec{v}] &\longmapsto [A\vec{v}] \end{aligned}$$

   está bien definida.

   (c) ($1/2$ punto) Enumera los elementos de $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3)$ cuya lista has dado en el primer apartado, y que denotaremos $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) = \{[\vec{v}_1], [\vec{v}_2], [\vec{v}_3], [\vec{v}_4]\}$. Prueba que, para todo $A \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3)$, la aplicación φ_A es biyectiva y deduce que existe una única permutación $\sigma_A \in S_4$ tal que $\varphi_A([\vec{v}_i]) = [\vec{v}_{\sigma_A(i)}]$ para todo i.

   (d) ($1/2$ punto) Demuestra que la aplicación

   $$\begin{aligned} f : \mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3) &\longrightarrow S_4 \\ A &\longmapsto \sigma_A \end{aligned}$$

   es un homomorfismo de grupos.

   (e) (1 punto) Prueba que para cada trasposición $(i\, j) \in S_4$ existe $A \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3)$ tal que $\sigma_A = (i\, j)$ y deduce de aquí que f es sobreyectiva.

   (f) (1 punto) Establece un isomorfismo entre S_4 y un cociente de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3)$, describiendo explícitamente el subgrupo por el que se toma cociente, y úsalo para calcular el número de elementos de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3)$.

María Jiménez Caro

(1) a) $\mathbb{F}_3 = \mathbb{Z}/(3) = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$

$GL(2, \mathbb{F}_3) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \;/\; a, b, c, d \in \{0, 1, 2\}, \det \neq 0 \right\}$

$\vec{v} \sim \vec{w} \iff \bar{v} = \pm \bar{w}$

$X = (\mathbb{F}_3 \times \mathbb{F}_3) \setminus \{(0,0)\}$

$X = \{ (\bar{0},\bar{1}), (\bar{1},\bar{0}), (\bar{1},\bar{1}), (\bar{1},\bar{2}), (\bar{2},\bar{1}), (\bar{2},\bar{2}),$
$(\bar{0},\bar{2}), (\bar{2},\bar{0}) \}$

Reflexiva: Sea $\bar{v} = (x, y) \Rightarrow \bar{v} \sim \bar{v} \iff$
$\bar{v} = \pm \bar{v} \Rightarrow \bar{v} = \bar{v}$, se cumple.

Simétrica: Sea $\bar{v} = (x, y)$, $\bar{w} = \pm (x', y')$,
$\bar{v} \sim \bar{w} \iff \bar{v} = \pm \bar{w} \iff \bar{w} = \pm \bar{v} \iff \bar{w} \sim \bar{v}$
$\bar{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \bar{w} \Rightarrow \bar{w} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \bar{v}$

Transitiva: Sean $\bar{v}, \bar{w}, \bar{u} \in X$,
$\left. \begin{array}{l} \bar{v} \sim \bar{w} \iff \bar{v} = \pm \bar{w} \\ \bar{w} \sim \bar{u} \iff \bar{w} = \pm \bar{u} \end{array} \right\} \bar{v} = \pm \bar{u} \iff \bar{v} \sim \bar{u}.$

Veamos ahora el conjunto cociente.

$\begin{pmatrix} \bar{0} \\ \bar{1} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \bar{0} \\ \bar{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \bar{0} \\ \bar{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{0} \\ -\bar{2} \end{pmatrix}$ en $\mathbb{F}^3$ $\left(\acute{o} \begin{pmatrix} \bar{0} \\ \bar{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{0} \\ -\bar{1} \end{pmatrix} \right)$ para todos.

$\begin{pmatrix} \bar{1} \\ \bar{0} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \bar{2} \\ \bar{0} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \bar{1} \\ \bar{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\bar{2} \\ \bar{0} \end{pmatrix}$ en $\mathbb{F}^3$

$\begin{pmatrix} \bar{1} \\ \bar{1} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \bar{2} \\ \bar{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \bar{1} \\ \bar{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\bar{2} \\ -\bar{2} \end{pmatrix}$ en $\mathbb{F}^3$

$\begin{pmatrix} \bar{1} \\ \bar{2} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \bar{2} \\ \bar{1} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \bar{1} \\ \bar{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\bar{2} \\ -\bar{1} \end{pmatrix}$ en $\mathbb{F}^3$

$\mathbb{P}^2(\mathbb{F}^3) = X/\sim = \left\{ \left[\begin{pmatrix} \bar{0} \\ \bar{1} \end{pmatrix}\right], \left[\begin{pmatrix} \bar{1} \\ \bar{0} \end{pmatrix}\right], \left[\begin{pmatrix} \bar{1} \\ \bar{1} \end{pmatrix}\right], \left[\begin{pmatrix} \bar{1} \\ \bar{2} \end{pmatrix}\right] \right\}.$

$\left[\begin{pmatrix} \bar{0} \\ \bar{1} \end{pmatrix}\right] = \left\{ \begin{pmatrix} \bar{0} \\ \bar{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{0} \\ \bar{2} \end{pmatrix} \right\}$

$$\left[\begin{pmatrix}\bar 1\\ \bar 0\end{pmatrix}\right] = \left\{\begin{pmatrix}\bar 1\\ \bar 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\bar 2\\ \bar 0\end{pmatrix}\right\}$$

$$\left[\begin{pmatrix}\bar 1\\ \bar 1\end{pmatrix}\right] = \left\{\begin{pmatrix}\bar 1\\ \bar 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\bar 2\\ \bar 2\end{pmatrix}\right\}$$

$$\left[\begin{pmatrix}\bar 1\\ \bar 2\end{pmatrix}\right] = \left\{\begin{pmatrix}\bar 1\\ \bar 2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\bar 2\\ \bar 1\end{pmatrix}\right\}$$

Vemos que hay 4 clases, $|X/\sim| = 4$.

b) $A \in GL(2, \mathbb{F}_2)$

$$f_A : \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) \longrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3)$$
$$[\bar v] \longmapsto [A\bar v]$$

bien definida

$A = \left\{\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix} \mid ad \neq bc, \ a, b, c, d \neq 0\right\}$

$[A\bar v] = \left[\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}\right] = \left[\begin{pmatrix} ax+by\\ cx+dy\end{pmatrix}\right]$ está bien definida porque siempre va a alguna clase de $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3)$.

$\bar v_1 = \begin{pmatrix}\bar 0\\ \bar 1\end{pmatrix}$, $\bar v_2 = \begin{pmatrix}\bar 0\\ \bar 1\end{pmatrix}$, $\bar v_3 = \begin{pmatrix}\bar 1\\ \bar 1\end{pmatrix}$, $\bar v_4 = \begin{pmatrix}\bar 1\\ \bar 2\end{pmatrix}$

Probemos que ver $f = \left\{\begin{pmatrix}\bar 1\\ \bar 1\end{pmatrix}\right\}$.

$[\bar v] = \left[\begin{pmatrix}\bar 1\\ \bar 1\end{pmatrix}\right] \Rightarrow f([\bar v]) = [A\bar v] = \left[\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\bar 1\\ \bar 1\end{pmatrix}\right] =$

$\left[\begin{pmatrix} a+b\\ c+d\end{pmatrix}\right]$ con $\begin{matrix} a = 1-b\\ c = 1-d.\end{matrix}$