Apellidos	Beltrán Casado
Nombre	Juan José

Preguntas sobre grupos:

1. (4 puntos) Sea $\mathbb{F}_3 = \mathbb{Z}/(3)$ el cuerpo con 3 elementos y $\mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3)$ el grupo de matrices invertibles 2×2 con entradas en $\mathbb{F}_3$.

   (a) ($1/2$ punto) En el conjunto de vectores no nulos $X = (\mathbb{F}_3 \times \mathbb{F}_3) \setminus \{(0,0)\}$ definimos una relación $\sim$ de la siguiente manera: $\vec{v} \sim \vec{w}$ si y solo si $\vec{v} = \pm\vec{w}$. Prueba que $\sim$ es una relación de equivalencia y da la lista de todos los elementos del conjunto cociente, que denotaremos $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) = X/\sim$, comprobando que hay exactamente cuatro.

   (b) ($1/2$ punto) Dada $A \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3)$, demuestra que la aplicación

   $$\begin{aligned} \varphi_A : \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) &\longrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) \\ [\vec{v}] &\longmapsto [A\vec{v}] \end{aligned}$$

   está bien definida.

   (c) ($1/2$ punto) Enumera los elementos de $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3)$ cuya lista has dado en el primer apartado, y que denotaremos $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) = \{[\vec{v}_1], [\vec{v}_2], [\vec{v}_3], [\vec{v}_4]\}$. Prueba que, para todo $A \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3)$, la aplicación φ_A es biyectiva y deduce que existe una única permutación $\sigma_A \in S_4$ tal que $\varphi_A([\vec{v}_i]) = [\vec{v}_{\sigma_A(i)}]$ para todo i.

   (d) ($1/2$ punto) Demuestra que la aplicación

   $$\begin{aligned} f : \mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3) &\longrightarrow S_4 \\ A &\longmapsto \sigma_A \end{aligned}$$

   es un homomorfismo de grupos.

   (e) (1 punto) Prueba que para cada trasposición $(i\,j) \in S_4$ existe $A \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3)$ tal que $\sigma_A = (i\,j)$ y deduce de aquí que f es sobreyectiva.

   (f) (1 punto) Establece un isomorfismo entre S_4 y un cociente de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3)$, describiendo explícitamente el subgrupo por el que se toma cociente, y úsalo para calcular el número de elementos de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3)$.

Juan José Beltrán Casado

1.-

$\mathbb{F}_3 = \mathbb{Z}/\mathbb{Z}_3 = \{0+\mathbb{Z}_3, 1+\mathbb{Z}_3, 2+\mathbb{Z}_3\}$

$GL(2,\mathbb{F}_3) = \{$matrices invertibles 2×2 con entradas en $\mathbb{F}_3\}$

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$; $a,b,c,d \in \mathbb{F}_3$.

a) $X = (\mathbb{F}_3 \times \mathbb{F}_3) \setminus \{(0,0)\} = \{(0,1), (0,2), (1,0), (1,1), (1,2), (2,0), (2,1), (2,2)\}$

$\vec{v} \sim \vec{w} \iff \vec{v} = \pm \vec{w}$ ¿$\sim$ equiv?

- Reflexiva:

$\vec{v} \sim \vec{v} \iff \vec{v} = \pm \vec{v}$

Es obvio, ya que $\vec{v} = \vec{v}$, $\forall \vec{v} \in X$ //

- Simétrica:

$(\vec{v} \sim \vec{w} \iff \vec{v} = \pm \vec{w}) \Longrightarrow (\vec{w} \sim \vec{v} \iff \vec{w} = \pm \vec{v})$

Tenemos que si $\vec{v}$ es de la forma (a,b) ~~...~~ y $\vec{v} \sim \vec{w} \Rightarrow \vec{w} = \pm (a,b) = (a,b)$ ó $(-a,-b)$. Por lo tanto, es obvio que si $\vec{w} = (a,b)$ ó $(-a,-b)$ tenemos que $\vec{v}$ es $\pm \vec{w}$, demostrándose así su simetría.

- Transitiva:

$\vec{u} \sim \vec{v} \iff \vec{u} = \pm \vec{v}$

$\vec{v} \sim \vec{w} \iff \vec{v} = \pm \vec{w}$ $\Longrightarrow$ $\vec{u} \sim \vec{w} \iff \vec{u} = \pm \vec{w}$

Como tenemos que $\vec{u} \sim \vec{v}$ y $\vec{v} \sim \vec{w} \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \vec{u} = \pm \vec{v}$ y $\vec{v} = \pm \vec{w} \Longrightarrow \vec{u} = \pm \vec{v} = \pm \vec{w} \Longrightarrow \vec{u} = \pm \vec{w}$, demostrándose así su transitividad. Por lo tanto, $\sim$ es una rel. de equiv. // c.q.d

$\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) = X/\sim$

Sabemos que $2+\mathbb{Z}_3 = (1+\mathbb{Z}_3)+(1+\mathbb{Z}_3)$

Por lo tanto, sabemos que $1+\mathbb{Z}_3$ "$\sim$" $2+\mathbb{Z}_3$

Si tenemos $(1,0)$ entonces $(1,0)\sim(2,0)$. Simétricamente, tenemos que $(0,1)\sim(0,2)$, que $(1,1)\sim(2,2)$ y que $(1,2)\sim(2,1)$

Por lo tanto, $X/\sim = \{\underbrace{[(1,0)]}_{\{(1,0),(2,0)\}}, \overbrace{[(0,1)]}^{\{(0,1),(0,2)\}}, \underbrace{[(1,1)]}_{\{(1,1),(2,2)\}}, \overbrace{[(1,2)]}^{\{(1,2),(2,1)\}}\}$ //

Así, vemos que $\#(X/\sim) = 4$ //

b) $A \in GL(2,\mathbb{F}_3)$

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) &\longrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) \\ [\vec{v}] &\longmapsto [A\vec{v}] \end{aligned}$$ ¿bien def?

Sabemos que la aplic. ~~te~~ envía la clase de un vector $\vec{v}$ a la clase de la matriz A por dicho vector $\vec{v}$. Como la matriz es 2×2 y el vector 2×1, tenemos que $A\vec{v}$ es otro vector 2×1. Así como sabemos que A tiene entradas en $\mathbb{F}_3$, al igual que $\vec{v}$, el producto resultante es un vector 2×1 con entradas en $\mathbb{F}_3$. Por lo tanto, al aplicar φ tenemos que la clase la envía a otra clase (ó a ella misma), ya que todo vector 2×1 con entradas $\mathbb{F}_3$ tiene su clase definida //c.q.d.

Juan José Beltrán Casado ②

①

c) $P^2(\mathbb{F}_3) = \{[\vec{v_1} = (1,0)], [\vec{v_2} = (0,1)], [\vec{v_3} = (1,1)], [\vec{v_4} = (1,2)]\}$ //

¿φ_A biyectiva, $\forall A$?

Basta ~~probar~~ que es inyectiva y sobre.

Inyectiva:

$[\vec{v_i}] = [\vec{v_j}] \Longrightarrow [A\vec{v_i}] = [A\vec{v_j}]$ ya que $\vec{v_i}$ ~~se pue~~ es equiv. a tomar $\vec{v_j}$, ya que el repr. de una clase no influye.

Sobre:

¿$Im(\varphi_A) = P^2(\mathbb{F}_3)$?

Si $A = id$, es trivial.

Si $A \neq id$, tenemos que $A\vec{v}$ se convierte en un vector 2×1 con entradas en $\mathbb{F}_3$.

Veamos distintos casos:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$A\vec{v_1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$$

$$A\vec{v_2} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$$

$$A\vec{v_3} = \begin{pmatrix} a-b \\ c-d \end{pmatrix}$$

$$A\vec{v_4} = \begin{pmatrix} a-2b \\ c-2d \end{pmatrix}$$

Como A es invertible, tenemos que estos vectores resultantes son todos diferentes y cada uno repr. una clase $\Longrightarrow$

$\Longrightarrow \varphi_A$ sobre.

$\Longrightarrow \varphi_A$ biy. // c.q.d.

¿$\exists!\ \sigma_A \in S_4$ t.q. $\varphi_A([\vec{v}_i]) = [\vec{v}_{\sigma_A(i)}]$ $\forall i$?

Esto es trivial, ya que si φ_A es biyectiva, cada i es enviado a un nuevo j al aplicar φ_A. Por lo tanto, solo habrá una $!\ \sigma_A$ que envíe cada i a su nuevo j.

$$\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & i_3 & i_4 \\ j_1 & j_2 & j_3 & j_4 \end{pmatrix} //$$

c.q.d.

d) $f: GL(2,\mathbb{F}_3) \longrightarrow S_4$ ¿homomorfismo?
$\quad A \longmapsto \sigma_A$

Para ver si f es homomorfismo, hay que ver si:

$\cancel{f(A*B) = f(A)*f}$ $\quad f(A\cdot B) = f(A)\circ f(B)$

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longmapsto \cancel{\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \end{pmatrix} = f(A)}$ $(a\,b\,c\,d) = f(A)$

$B = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \longmapsto \cancel{\begin{pmatrix} a' & b' & c' & d' \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \end{pmatrix} = f(B)}$ $(a'b'c'd') = f(B)$

$C = A\cdot B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & cb' + dd' \end{pmatrix} \cancel{= f(C)} \Rightarrow$

$\Rightarrow f(C) = (aa' + bc' \quad ab' + bd' \quad ca' + dc' \quad cb' + dd')$

~~Sabemos que A invertible ⇒ A ≠~~

e) $\forall (ij) \in S_4,\ \exists\ A \in GL(2,\mathbb{F}_3)$ t.q. $\sigma_A = (ij)$

Juan José Beltrán Casado $\longrightarrow \#(GL(2, \mathbb{F}_3)) = 2$ 3

f) $f: S_4 \longrightarrow GL(2, \mathbb{F}_3)$ $\quad \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

Un isomorfismo es un homomorfismo biyectivo.

Basta tomar 2 elem. de S_4 como por ejemplo $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$,

y enviarlo el primero a $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ y el segundo a $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ //