Apellidos	Díaz Arroyo
Nombre	Manuel

Preguntas sobre grupos:

1. (4 puntos) Sea $\mathbb{F}_3 = \mathbb{Z}/(3)$ el cuerpo con 3 elementos y $\mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3)$ el grupo de matrices invertibles 2×2 con entradas en $\mathbb{F}_3$.

0'5 (a) (½ punto) En el conjunto de vectores no nulos $X = (\mathbb{F}_3 \times \mathbb{F}_3) \setminus \{(0,0)\}$ definimos una relación $\sim$ de la siguiente manera: $\vec{v} \sim \vec{w}$ si y solo si $\vec{v} = \pm \vec{w}$. Prueba que $\sim$ es una relación de equivalencia y da la lista de todos los elementos del conjunto cociente, que denotaremos $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) = X/\sim$, comprobando que hay exactamente cuatro.

0 (b) (½ punto) Dada $A \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3)$, demuestra que la aplicación

$$\begin{aligned} \varphi_A : \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) &\longrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) \\ [\vec{v}] &\longmapsto [A\vec{v}] \end{aligned}$$

está bien definida.

0'25 (c) (½ punto) Enumera los elementos de $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3)$ cuya lista has dado en el primer apartado, y que denotaremos $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) = \{[\vec{v}_1], [\vec{v}_2], [\vec{v}_3], [\vec{v}_4]\}$. Prueba que, para todo $A \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3)$, la aplicación φ_A es biyectiva y deduce que existe una única permutación $\sigma_A \in S_4$ tal que $\varphi_A([\vec{v}_i]) = [\vec{v}_{\sigma_A(i)}]$ para todo i.

0'5 (d) (½ punto) Demuestra que la aplicación

$$\begin{aligned} f : \mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3) &\longrightarrow S_4 \\ A &\longmapsto \sigma_A \end{aligned}$$

es un homomorfismo de grupos.

0 (e) (1 punto) Prueba que para cada trasposición $(i\, j) \in S_4$ existe $A \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3)$ tal que $\sigma_A = (i\, j)$ y deduce de aquí que f es sobreyectiva.

0 (f) (1 punto) Establece un isomorfismo entre S_4 y un cociente de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3)$, describiendo explícitamente el subgrupo por el que se toma cociente, y úsalo para calcular el número de elementos de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3)$.

② Manuel Díaz Araujo.

ⓐ ~~[illegible]~~ Demuestro que es una relación de equivalencia:

Reflexiva: $\vec{v}^{e} \sim \vec{v}^{e} \Rightarrow \vec{v}^{e} = \pm \vec{v}^{e}$ ✓

(~~Transitiva: Supongamos~~)

Simétrica: $\vec{v}^{e} \sim \vec{n}^{e} \Rightarrow \vec{n}^{e} = \vec{v}^{e}$

Supongamos que $\vec{v}^{e} = \pm \vec{n}^{e} \Rightarrow \vec{n}^{e} = \pm v \Rightarrow \vec{n} \sim \vec{v}$.

② Transitiva: $\underbrace{\vec{v}^{e} \sim \vec{n}^{e} \wedge \vec{n}^{e} \sim \vec{w}^{e}}_{①} \Rightarrow \vec{v}^{e} \sim \vec{w}^{e}$

Supongamos ① $\Rightarrow \vec{v}^{e} = \pm \vec{n}^{e} \wedge \vec{n}^{e} = \pm w$ Por ② $\vec{v}^{e} = \pm \vec{n}^{e}$

$\vec{w}^{e} = \pm \vec{n}^{e}$

$\Downarrow$

$\vec{v}^{e} = \pm \vec{w}^{e}$ ~~[illegible]~~

$\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) = \{ \overline{(2,1)}, \overline{(0,1)}, \overline{(1,0)}, \overline{(1,1)} \}$

Ya que estamos en $\mathbb{F}_3$.

ⓑ Supongamos que $\vec{v}_1^{e} = \vec{v}_2^{e}$.

$\Downarrow$

$v_1 - v_2 \in I$? $\Rightarrow A(v_1 - v_2)$ ~~[illegible]~~ tiene que pertenecer al I.

Pero, sabemos ~~[illegible]~~ $\Rightarrow A(v_1 - v_2) \in I$

~~[illegible]~~ Por definición de ideal.

Por lo que $A\vec{v}_1^{e} = A\vec{v}_2^{e} \Rightarrow$ Está bien definida.

ⓐ* $\overline{(0,0)} = \{(0,0)\}$

$\overline{(0,1)} = \{(0,1),(0,-2),(0,2)\}$

$\overline{(1,0)} = \{(1,0),(-2,0),(2,0)\}$

$\overline{(1,1)} = \{(1,1),(-2,1),(2,-1),(-2,-2),(2,2),($

ⓒ $|P^2(\mathbb{F}_3)| = \{ \underset{\boxed{\vec{v}_1}}{\overline{(0,0)}}, \underset{\boxed{\vec{v}_2}}{\overline{(0,1)}}, \underset{\boxed{\vec{v}_3}}{\overline{(1,0)}}, \underset{\boxed{\vec{v}_4}}{\overline{(1,1)}} \}$

- Supongamos que $\exists$ A: f_A no sea biyectiva, como el conjunto de llegada es el mismo que el de partida $\Rightarrow$ todo esto implica que $\exists$ A: Siendo $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ distintos

$A\vec{v}_1 = A\cdot\vec{v}_2 \Rightarrow$ (Siendo A invertible por definición)

$A^{-1}\cdot A\cdot\vec{v}_1 = A^{-1}\cdot A\cdot\vec{v}_2 \Rightarrow \vec{v}_1 = \vec{v}_2$!!!

Por lo que todas las matrices de $GL(2,\mathbb{F}_3)$ establecen una aplicación biyectiva.

- Sabemos entonces que cada vector v_i, $i=\{1,2,3,4\}$, va a ir a un vector v_j, $j=\{1,2,3,4\}$, ~~(ya que el vector v_1 siempre va a ir a v_1 $A\cdot\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$)~~

Por lo que para cada matriz A, existe una permutación σ_A:

$f_A([\vec{v}_i]) = \vec{v}_{\sigma_A}(i)$ y siempre va a ser de la forma $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\ h&i&j&k\end{pmatrix}$

con $h,i,j,k \in \{1,2,3,4\}$

Manuel Díaz Arroyo

$f(A_1)=\sigma_{A_1}$

$f(A_2)=\sigma_{A_2}$

d)

$\cancel{f(A_1 \cdot A_2) = f(A_1) \circ f(A_2) = \sigma_{A_1} \circ \sigma_{A_2}}$

Veamos que $[A_1 \cdot v_i] = \vec{v}^{\,e}_{\sigma_{A_1}(i)} \Rightarrow [A_2 \cdot A_1 \cdot v_i] = \vec{v}^{\,e}_{\sigma_{A_2}(\sigma_{A_1}(v_i))}$

$\Downarrow$

$$\boxed{f(A_2) \circ f(A_1) = \sigma_{A_2} \circ \sigma_{A_1} = f(A_2 \cdot A_1)}$$

e)

~~(Sabemos por los apartados anteriores que cualquier permutación de vectores es isomorfo al grupo S_4, por lo que a su vez)~~

Como $f_A([\vec{v}^{\,e}_i]) = [v_{\sigma_A(i)}]$, podemos representar ~~en de~~ esta aplicación como una permutación, además, como las matrices representan movimientos en el espacio, y demostramos, que a cada matriz le pertenece una permutación, en específico podemos realizar transposiciones con matrices 2x2.

Se deduce fácilmente que f es sobreyectiva ya que $\forall$ permutación debe existir una matriz que represente dicha permutación.

8) ~~Ordenemos de nuevo el conjunto~~:

~~$\{\overline{(0,1)}, \overline{(1,0)}, ($~~

~~$= [v_1]$ $\qquad = [v_2]$~~

$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} = ()$

$\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix} \simeq (1\,4)$

Y así se definiría todo pero no me da tiempo

Como existe el isomorfismo entre S_4 y $GL(2,\mathbb{F}_3)$, el número de elementos de $S_4 = 4! \Rightarrow |GL(2,\mathbb{F}_3)| = 4!$