Apellidos	Escalante Guardia
Nombre	María José

Preguntas sobre grupos:

1. (4 puntos) Sea $\mathbb{F}_3 = \mathbb{Z}/(3)$ el cuerpo con 3 elementos y $\mathrm{GL}(2,\mathbb{F}_3)$ el grupo de matrices invertibles 2×2 con entradas en $\mathbb{F}_3$.

   (a) ($1/2$ punto) En el conjunto de vectores no nulos $X = (\mathbb{F}_3 \times \mathbb{F}_3)\backslash\{(0,0)\}$ definimos una relación $\sim$ de la siguiente manera: $\vec{v} \sim \vec{w}$ si y solo si $\vec{v} = \pm\vec{w}$. Prueba que $\sim$ es una relación de equivalencia y da la lista de todos los elementos del conjunto cociente, que denotaremos $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) = X/\sim$, comprobando que hay exactamente cuatro.

   (b) ($1/2$ punto) Dada $A \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{F}_3)$, demuestra que la aplicación

   $$\begin{aligned} \varphi_A : \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) &\longrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) \\ [\vec{v}] &\longmapsto [A\vec{v}] \end{aligned}$$

   está bien definida.

   (c) ($1/2$ punto) Enumera los elementos de $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3)$ cuya lista has dado en el primer apartado, y que denotaremos $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) = \{[\vec{v}_1], [\vec{v}_2], [\vec{v}_3], [\vec{v}_4]\}$. Prueba que, para todo $A \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{F}_3)$, la aplicación φ_A es biyectiva y deduce que existe una única permutación $\sigma_A \in S_4$ tal que $\varphi_A([\vec{v}_i]) = [\vec{v}_{\sigma_A(i)}]$ para todo i.

   (d) ($1/2$ punto) Demuestra que la aplicación

   $$\begin{aligned} f : \mathrm{GL}(2,\mathbb{F}_3) &\longrightarrow S_4 \\ A &\longmapsto \sigma_A \end{aligned}$$

   es un homomorfismo de grupos.

   (e) (1 punto) Prueba que para cada trasposición $(i\,j) \in S_4$ existe $A \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{F}_3)$ tal que $\sigma_A = (i\,j)$ y deduce de aquí que f es sobreyectiva.

   (f) (1 punto) Establece un isomorfismo entre S_4 y un cociente de $\mathrm{GL}(2,\mathbb{F}_3)$, describiendo explícitamente el subgrupo por el que se toma cociente, y úsalo para calcular el número de elementos de $\mathrm{GL}(2,\mathbb{F}_3)$.

María José Escalante Guardia

① $\mathbb{Z}_3 = \mathbb{F}_3$ $\quad GL(2, \mathbb{F}_3)$ (invertibles)

a) $X = (\mathbb{F}_3 \times \mathbb{F}_3) \setminus \{(0,0)\}$

$\vec{u} \sim \vec{w} \iff \vec{v} = \pm \vec{w}$ $\qquad$ Rel. equivalencia si cumple:

1. Reflexiva: $\vec{u} \sim \vec{u} \iff \vec{u} = \oplus \vec{u}$ ✓ cierto.

2. Simétrica: $\vec{u} \sim \vec{w} \iff \left.\begin{array}{l} \vec{u} = \vec{w} \iff \vec{w} = \vec{u} \\ \text{ó} \qquad\qquad\qquad \text{ó} \\ \vec{u} = -\vec{w} \iff \vec{w} = -\vec{u} \end{array}\right\} \vec{w} \sim \vec{u}$ ✓

3. Transitiva: $\left.\begin{array}{l} \vec{u} \sim \vec{w} \iff \vec{u} = \pm \vec{w} \\ \vec{w} \sim \vec{v} \iff \vec{w} = \pm \vec{v} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \vec{u} = \pm \vec{w} = \pm(\pm \vec{v}) \\ \Rightarrow \vec{u} = \pm \vec{v} \Rightarrow \vec{u} \sim \vec{v} \end{array}$ ✓

$\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) = X/\sim \; = \left\{ \overline{(1,1)}, \overline{(0,1)}, \overline{(1,0)}, \overline{(1,2)} \right\}$

$[\vec{u}] = \{ \vec{w} \in X \mid \vec{u} = \pm \vec{w} \}$

$\overline{(1,1)} = \overline{(-2,-2)}$ $\parallel$ $\overline{(2,2)} = \overline{(-1,-1)}$	$\overline{(0,1)} = \overline{(0,-2)}$ $\parallel$ $\overline{(0,2)} = \overline{(0,-1)}$
$\overline{(1,2)} = \overline{(-2,-1)}$ $\parallel$ $\overline{(2,1)} = \overline{(-1,-2)}$	$\overline{(1,0)} = \overline{(-2,0)}$ $\parallel$ $\overline{(2,0)} = \overline{(-1,0)}$

b) φ_A bien definida.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[aF_2 - cF_1]{} \left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ 0 & ad-cb & -c & a \end{array}\right) \xrightarrow[\frac{F_2}{ad-cb}]{} \left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-c}{ad-cb} & \frac{a}{ad-cb} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_1 - bF_2} \left(\begin{array}{cc|cc} a & 0 & 1+\frac{cb}{ad-cb} = \frac{ad-\cancel{cb}+\cancel{cb}}{ad-cb} & \frac{-ab}{ad-cb} \\ 0 & 1 & \frac{-c}{ad-cb} & \frac{a}{ad-cb} \end{array}\right) \xrightarrow{F_1/a} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{d}{ad-cb} & \frac{-b}{ad-cb} \\ 0 & 1 & \frac{-c}{ad-cb} & \frac{a}{ad-cb} \end{array}\right)$$

Inversa: $\frac{1}{ad-cb}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

$ad - cb \neq 0$.

$\Leftrightarrow ad \neq cb$

$a \neq b \neq c \neq d$ No pueden ser iguales.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} av_1 + bv_2 \\ cv_1 + dv_2 \end{pmatrix}}_{} \in \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) \quad ab \neq cd$$

Opciones

① $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ $ab \neq 0$ ~~(y sus posibles variaciones)~~

② $\begin{pmatrix} 0 & b \\ a & 0 \end{pmatrix}$ $a \neq 0 \neq b$ ✓

③ $\begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix}$ $a \neq b \neq c \neq 0$.

④ $\begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix}$ $a \neq b \neq c$. $\rightarrow$ $a^2 \neq bc$ (mod 3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

⑤ $\begin{pmatrix} a & a \\ b & c \end{pmatrix}$ $ac \neq ab$

① $\begin{pmatrix} av_1 \\ dv_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3)$

② $\begin{pmatrix} bv_2 \\ av_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3)$

③ $\begin{pmatrix} av_1 + bv_2 \\ cv_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3)$

Las combinaciones de v_1 y $v_2 \in \mathbb{F}_3$ dan un número de $\mathbb{F}_3$ y como A son invertibles (i.e., $ab \neq cd$), entonces no se anulan los dos números a la vez.

María José Escalante Guardia

(1) c) $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) = \{ (\overline{0,1}) = [\vec{v}_1],\ (\overline{1,0}) = [\vec{v}_2],\ (\overline{1,1}) = [\vec{v}_3],$
$(\overline{1,2}) = [\vec{v}_4] \}$

φ_A inyectiva $\Rightarrow A[\vec{v}] = A[\vec{u}] \rightarrow [\vec{v}] = [\vec{u}]$

$A[\vec{v}] = A[\vec{u}] \Rightarrow A^{-1}A[\vec{v}] = A^{-1} \cdot A[\vec{u}] \rightarrow [\vec{v}] = [\vec{u}]$ ✓

$\Rightarrow \varphi_A$ es inyectiva

φ_A sobreyectiva $\Rightarrow \forall [\vec{u}]\ \exists [\vec{v}] \mid [A\vec{v}] = [\vec{u}]$

$\Rightarrow [A\vec{v}] = [\vec{u}] \xrightarrow{A^{-1}} [\vec{v}] = [A^{-1}\vec{u}]$

$\forall [\vec{u}]$ existe un $[\vec{v}]$ de la anterior forma que cumple la condición.

$\rightarrow \varphi_A$ es sobreyectiva

$\Rightarrow \varphi_A$ es biyectiva.

Si $\exists \sigma_B \in S_4 \mid \varphi_B([\vec{v}_i]) = [\vec{v}_{\sigma_B(i)}]\ \forall i$
$(\neq \sigma_A)$

$\Rightarrow \varphi_B([\vec{v}_i]) = [\vec{v}_{\sigma_B(i)}] = [\vec{v}_{\sigma_A(i)}] = \varphi_A([\vec{v}_i])$

$\Rightarrow [\vec{v}_{\sigma_B(i)}] = [\vec{v}_{\sigma_A(i)}] \rightarrow \sigma_B(i) = \sigma_A(i)$!!!

d)

$f(AB) = \sigma_{AB}$

$f(A) \cdot f(B) = \sigma_A \circ \sigma_B = \sigma_{AB}$

f es homomorfismo de grupos.

e) $(ij) \in S_4 \quad \exists A \in GL(2, \mathbb{F}_3) \mid \sigma_A = (ij)$

$(1\ 2) \quad (1\ 3) \quad (1\ 4) \quad (2\ 3) \quad (2\ 4) \quad (3\ 4)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \overline{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \overline{\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \overline{\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \overline{\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \overline{\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \overline{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}}$$

Como para cada trasposición existe un $A \in GL(2, \mathbb{F}_3)$
$\Rightarrow f$ es sobreyectiva tal como está definida.

f) $\bar{f} : S_4 \longrightarrow GL(2, \mathbb{F}_3)$