Apellidos	PERENA ANTÓNEZ
Nombre	MARI CARMEN

Preguntas sobre grupos:

1. (4 puntos) Sea $\mathbb{F}_3 = \mathbb{Z}/(3)$ el cuerpo con 3 elementos y $\mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3)$ el grupo de matrices invertibles 2×2 con entradas en $\mathbb{F}_3$.

0'5 (a) ($1/2$ punto) En el conjunto de vectores no nulos $X = (\mathbb{F}_3 \times \mathbb{F}_3) \setminus \{(0,0)\}$ definimos una relación $\sim$ de la siguiente manera: $\vec{v} \sim \vec{w}$ si y solo si $\vec{v} = \pm\vec{w}$. Prueba que $\sim$ es una relación de equivalencia y da la lista de todos los elementos del conjunto cociente, que denotaremos $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) = X/\sim$, comprobando que hay exactamente cuatro.

(b) ($1/2$ punto) Dada $A \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3)$, demuestra que la aplicación

$$\begin{aligned} \varphi_A : \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) &\longrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) \\ [\vec{v}] &\longmapsto [A\vec{v}] \end{aligned}$$

está bien definida.

(c) ($1/2$ punto) Enumera los elementos de $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3)$ cuya lista has dado en el primer apartado, y que denotaremos $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) = \{[\vec{v}_1], [\vec{v}_2], [\vec{v}_3], [\vec{v}_4]\}$. Prueba que, para todo $A \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3)$, la aplicación φ_A es biyectiva y deduce que existe una única permutación $\sigma_A \in S_4$ tal que $\varphi_A([\vec{v}_i]) = [\vec{v}_{\sigma_A(i)}]$ para todo i.

(d) ($1/2$ punto) Demuestra que la aplicación

$$\begin{aligned} f : \mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3) &\longrightarrow S_4 \\ A &\longmapsto \sigma_A \end{aligned}$$

es un homomorfismo de grupos.

(e) (1 punto) Prueba que para cada trasposición $(i\,j) \in S_4$ existe $A \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3)$ tal que $\sigma_A = (i\,j)$ y deduce de aquí que f es sobreyectiva.

(f) (1 punto) Establece un isomorfismo entre S_4 y un cociente de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3)$, describiendo explícitamente el subgrupo por el que se toma cociente, y úsalo para calcular el número de elementos de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3)$.

TEMA GRUPOS

$\mathbb{F}_3 = \mathbb{Z}/(3)$ $\qquad GL(2, \mathbb{F}_3)$

(1.a) $X = (\mathbb{F}_3 \times \mathbb{F}_3) \setminus \{(0,0)\}$ se define $\sim$

$$\vec{v} \sim \vec{w} \iff \vec{v} = \pm \vec{w}$$

¿Es $\sim$ de equivalencia? Demuestra que si lo es. Si es de equiv., $\Rightarrow$ cumple con las prop: reflexiva, simétrica, transitiva.

• Reflexiva.

$\vec{v} \sim \vec{v} \iff \vec{v} = \pm \vec{v}$ $\quad$ como $\vec{v} = \vec{v} \Rightarrow$ se cumple la reflexividad

• Simétrica

Si $\vec{v} \sim \vec{w} \Rightarrow$ ¿$\vec{w} \sim \vec{v}$?

Como $\vec{v} \sim \vec{w} \Rightarrow$ tenemos que $\vec{v} = \pm \vec{w}$

$\Rightarrow \underset{\Leftrightarrow \vec{w} = \vec{v}}{\vec{v} = \vec{w}}$ ó $\vec{v} = -\vec{w} \Rightarrow -\vec{v} = \vec{w}$

Vemos que en ambos casos, tendríamos que $\vec{w} \sim \vec{v}$ $\Rightarrow$ se cumple la propiedad simétrica.

• Transitiva:

Si $\vec{v} \sim \vec{w}$ y $\vec{w} \sim \vec{z}$ $\Rightarrow$ ¿$\vec{v} \sim \vec{z}$?

$\vec{v} \sim \vec{w} \Rightarrow \vec{v} = \pm \vec{w}$

$\Rightarrow \vec{v} = \pm \vec{w} = \pm \vec{z}$

Si $\vec{w} \sim \vec{z} \Rightarrow \vec{w} = \pm \vec{z}$

$\Rightarrow \vec{v} \sim \vec{z}$ por lo que cumple con la propiedad transitiva.

$\Rightarrow$ Queda probado que $\sim$ es de equivalencia.

Da la lista de todos los element del conj. cociente.

$\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) = X/_\sim$

$X = (\mathbb{F}_3 \times \mathbb{F}_3) \setminus \{(\bar{0},\bar{0})\} = (\{\bar{0},\bar{1},\bar{2}\} \times \{\bar{0},\bar{1},\bar{2}\}) \setminus \{(0,0)\}.$

$X = \{\cancel{(\bar{0},\bar{0})}; (\bar{0},\bar{1}); (\bar{0},\bar{2}); (\bar{1},\bar{0}); (\bar{1},\bar{1}); (\bar{1},\bar{2});$
$(\bar{2},\bar{0}); (\bar{2},\bar{1}); (\bar{2},\bar{2})\}$

$\Rightarrow X/_\sim = \{ y \in X \,/\, x \sim y \,, \text{con } x \in X \}.$

no hay grupo cociente aquí

$\Rightarrow$ ~~$\{(\bar{0},\bar{1})\}$~~ el grupo cociente está formado por los vectores que compartan ~~la misma direcc~~ el mismo vector director, independientemente del sentido.

$\Rightarrow$ Si $x \in X = (\bar{0},\bar{1}) \Rightarrow$ los element que se relacionan con $(\bar{0},\bar{1})$ son $(\bar{0},\bar{1})$ y $(\bar{0},\bar{2})$.
es decir, los element de la forma $(\bar{0}, y)$

Si $x \in X = (\bar{1},\bar{0}) \Rightarrow$ se relaciona con el dos elements $(x,\bar{0})$.
es decir: $\{(\bar{1},\bar{0}), (\bar{2},\bar{0})\}$

Si $x \in X = (\bar{1},\bar{1}) \Rightarrow (\bar{1},\bar{1}) \sim (x,x) \Rightarrow \{(\bar{1},\bar{1}), (\bar{2},\bar{2})\}.$

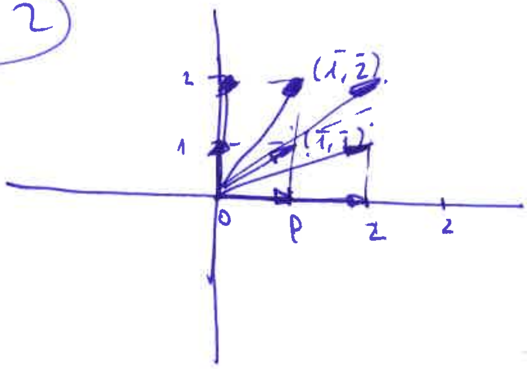
Si $x \in X = (\bar{1},\bar{2}) \Rightarrow$ los element que se relacionan con el son $\{(\bar{1},\bar{2}), (\bar{2},\bar{1})\}$, que son de la forma $(x,-x)$.

~~$(\bar{1},-\bar{2}) = (\bar{2},\bar{1})$~~

$\Rightarrow$ vemos que $X/_\sim$ tiene 4 element

$X/_\sim = \{ \underbrace{\{(\bar{0},\bar{1}), (\bar{0},\bar{2})\}}_{\text{clase equi}}, \underbrace{\{(\bar{1},\bar{0}), (\bar{2},\bar{0})\}}_{\text{clase equi}}, \underbrace{\{(\bar{1},\bar{1}), (\bar{2},\bar{2})\}}_{\text{clase equi}}, \underbrace{\{(\bar{1},\bar{2}), (\bar{2},\bar{1})}_{\text{clase equiv}}$

TEMA 2



$-2,1)$

1.b Dada $A \in GL(2, \mathbb{F}_3)$, demost que:

$$\varphi_A : \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) \longrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) \quad \text{está bien definida.}$$
$$[\vec{v}] \longmapsto [A\vec{v}]$$

$\Rightarrow$ Tenemos que verificar que $[A\vec{v}] \in \mathbb{P}^2\mathbb{F}_3$, es decir que la operación $A\vec{v}$ es interna.

$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ que es invertible $\Rightarrow \det(A) \neq 0$.

$\Rightarrow ad - bc = 0 \Rightarrow \boxed{ad = bc}$

~~$\Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$~~

~~$\Rightarrow ae + bg = 1 \quad af + bh = 0$~~

~~$ce + dg = 0 \quad cf + dh = 1.$~~

$\Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = (av_1 + bv_2,\ cv_1 + dv_2)$

~~$\Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{0} \\ \bar{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$~~

~~$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{0} \\ \bar{2} \end{pmatrix} =$~~

Clase 1 $v_1 \in \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) / \vec{v} = (\bar{x}, \bar{0})$ con $\bar{x} \in \mathbb{F}_3$

$\Rightarrow \varphi_A(\vec{v_1}) = (\bar{x}, \cancel{x}) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3).$

Clase 2 $v_2 \in \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) / \vec{v_2} = (\bar{0}, \bar{x}) \Rightarrow \varphi_A(\vec{v_2}) = (\bar{x}, \bar{x}) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3).$

Clase 3 $v_3 \in \mathbb{P}^2\mathbb{F}_3 / \vec{v_3} = (\bar{x}, \bar{x}) \Rightarrow \varphi_A(\vec{v_3}) = (\bar{x}(a+b), \bar{x}(c+d)) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3)$

Clase 4 $v_4 \in \mathbb{P}^2\mathbb{F}_3 / \vec{v_4} = (\bar{x}, -\bar{x}) \Rightarrow \varphi_A(\vec{v_4}) = (\bar{x}(a+b), -\bar{x}(c+d)) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3)$

(T.2.)

(1.c) $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) = \{[\vec{v}_1], [\vec{v}_2], [\vec{v}_3], [\vec{v}_4]\}$.

~~Presente~~ pre $\forall A \in GL(2, \mathbb{F}_3)$, φ_A es biyectiva

y deduce que $\exists!\ \sigma_A \in S_4 \,/\, \varphi_A([\vec{v}_i]) = [\vec{v}_{\sigma_A(i)}]\ \forall i$.

$\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) = \{[\vec{v}_1], [\vec{v}_2], [\vec{v}_3], [\vec{v}_4]\}$ /

$[v_1] = \{(0, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{2})\} = \{(\bar{0}, \bar{x})\}$; $[v_2] = \{(\bar{1}, \bar{0}), (\bar{2}, \bar{0})\} = \{(\bar{x}, \bar{0})\}$

$[v_3] = \{(\bar{1}, \bar{1}), (\bar{2}, \bar{2})\} = \{(\bar{x}, \bar{x})\}$ $[v_4] = \{(\bar{1}, \bar{2}), (\bar{2}, \bar{1})\} = \{(\bar{x}, -\bar{x})\}$

¿ φ_A biyectiva ? $\Leftrightarrow$ φ_A INYECTIVA $\wedge$ φ_A SOBREYECTIVA.

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ invertible $|A| \neq 0$

$$\Rightarrow \varphi(\bar{x}, \bar{0}) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\bar{x} \\ c\bar{x} \end{pmatrix}$$

$$\varphi(\bar{0}, \bar{x}) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{0} \\ \bar{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b\bar{x} \\ d\bar{x} \end{pmatrix}$$

$$\varphi(\bar{x}, \bar{x}) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{x}(a+b) \\ \bar{x}(c+d) \end{pmatrix}$$

$$\varphi(\bar{x}, -\bar{x}) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ -\bar{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{x}(a+b) \\ -\bar{x}(c+d) \end{pmatrix}$$

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \,/\, ad - b\cdot c \neq 0 \Rightarrow ad \neq b \cdot c$

$A \cdot A^{-1} = \mathbb{1} \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$ $\begin{array}{l} a\cdot e + bg = 1 \\ af + bh = 0 \\ ce + dg = 0 \\ cf + dh = 1 \end{array}$

$\Rightarrow af = -bh$

$ce = -dg$ $\quad -\frac{dg}{e} + dh = 1.$

$c = -\frac{dg}{e}$

T.2

~~$\varphi_A([2\bar{v}_1]) = [\bar{v}\ldots]_{\sigma_A(i)}$~~

1.c ~~X~~ Supongo φ_A BIYECTIVA.

Como la aplicación φ_A es biyectiva $\Rightarrow$

es inyectiva y sobreyectiva

Como φ_A INYECTIVA: $\Rightarrow$ dados $\bar{v}_1, \bar{v}_2 \in \mathbb{R}^2(\mathbb{F}_3)$

$$\Rightarrow \varphi_A(\bar{v}_1) = \varphi_A(\bar{v}_2) \Leftrightarrow \bar{v}_1 = \bar{v}_2$$

y como es sobreyectiva ~~$\Rightarrow$~~ $A\bar{v}_1 = A\bar{v}_2 \Leftrightarrow \bar{v}_1 = \bar{v}_2$

$\Rightarrow A = A.$

$\exists$ una única matriz de $\Rightarrow \exists$ única permutación ~~[illegible]~~
simétrica. ~~única que~~

1.d f homomorfismo si:

$f(x+y) = f(x) + f(y)$

$f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$

$f(A+B) = \sigma_{A+B} =$

$f(A \cdot B) = \sigma_{A \cdot B} = \sigma_A \circ \sigma_B = f(A) \cdot f(B) \Rightarrow$ homomorfismo

$f(\mathbb{1}) = \sigma_{\mathbb{1}} = (\ )$ ~~[illegible]~~

1.e) $(i\ j) \in S_4 \Rightarrow \exists A \in GL(2, \mathbb{F}_3) \ / \ \sigma_A = (i\ j)$

deducir f sobreyectiva.