Apellidos	Gómez Gómez
Nombre	Juan Manuel

Preguntas sobre grupos:

1. (4 puntos) Sea $\mathbb{F}_3 = \mathbb{Z}/(3)$ el cuerpo con 3 elementos y $\mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3)$ el grupo de matrices invertibles 2×2 con entradas en $\mathbb{F}_3$.
   (a) (½ punto) En el conjunto de vectores no nulos $X = (\mathbb{F}_3 \times \mathbb{F}_3) \setminus \{(0,0)\}$ definimos una relación $\sim$ de la siguiente manera: $\vec{v} \sim \vec{w}$ si y solo si $\vec{v} = \pm\vec{w}$. Prueba que $\sim$ es una relación de equivalencia y da la lista de todos los elementos del conjunto cociente, que denotaremos $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) = X/\sim$, comprobando que hay exactamente cuatro.

   (b) (½ punto) Dada $A \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3)$, demuestra que la aplicación

   $$\begin{aligned} \varphi_A : \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) &\longrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) \\ [\vec{v}] &\longmapsto [A\vec{v}] \end{aligned}$$

   está bien definida.

   (c) (½ punto) Enumera los elementos de $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3)$ cuya lista has dado en el primer apartado, y que denotaremos $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) = \{[\vec{v}_1], [\vec{v}_2], [\vec{v}_3], [\vec{v}_4]\}$. Prueba que, para todo $A \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3)$, la aplicación φ_A es biyectiva y deduce que existe una única permutación $\sigma_A \in S_4$ tal que $\varphi_A([\vec{v}_i]) = [\vec{v}_{\sigma_A(i)}]$ para todo i.

   (d) (½ punto) Demuestra que la aplicación

   $$\begin{aligned} f : \mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3) &\longrightarrow S_4 \\ A &\longmapsto \sigma_A \end{aligned}$$

   es un homomorfismo de grupos.

   (e) (1 punto) Prueba que para cada trasposición $(i\,j) \in S_4$ existe $A \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3)$ tal que $\sigma_A = (i\,j)$ y deduce de aquí que f es sobreyectiva.

   (f) (1 punto) Establece un isomorfismo entre S_4 y un cociente de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3)$, describiendo explícitamente el subgrupo por el que se toma cociente, y úsalo para calcular el número de elementos de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_3)$.

1 (a) $X = \begin{pmatrix} \mathbb{F}_3 \\ \mathbb{F}_3 \end{pmatrix}^t \setminus \{(0,0)\}$ $\qquad \mathbb{F}_3 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$

$$\vec{v} \sim \vec{w} \iff \vec{v} = \pm \vec{w}$$

Reflexiva: $\vec{v} \sim \vec{w} \iff \vec{v} = \pm \vec{v}$ ✓

Simétrica: $\vec{v} \sim \vec{w} \overset{?}{\Longrightarrow} \vec{w} \sim \vec{v}$

$\vec{v} \sim \vec{w} \Longleftrightarrow \vec{v} = \pm \vec{w} \Longleftrightarrow \vec{w} = \pm \vec{v} \Longleftrightarrow \vec{w} \sim \vec{v}$ ✓

Transitiva: si $\vec{v} \sim \vec{w}$ y $\vec{w} \sim \vec{z} \overset{?}{\Longrightarrow} \vec{v} \sim \vec{z}$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{v} \sim \vec{w} \Longleftrightarrow \vec{v} = \pm \vec{w} \\ \vec{w} \sim \vec{z} \Longleftrightarrow \vec{w} = \pm \vec{z} \Longleftrightarrow \pm \vec{w} = \vec{z} \end{array}\right\} \Longrightarrow \vec{v} = \pm \vec{z} \quad ✓$$

La lista de los elementos de X es $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

De donde obtenemos que el conjunto cociente $X/_\sim$ es el siguiente $X/_\sim = \left\{ \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right], \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right], \left[\underset{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}}{\underset{\cup}{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}}}\right], \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right] \right\}$

de donde vemos que $|X/_\sim| = 4$

(b) $A \in GL(2, \mathbb{F}_3)$, demostrar que $\varphi_A : \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) \longrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3)$ está bien definida.

$$[\vec{v}] \longrightarrow [A\vec{v}]$$

Vemos que dado $[\vec{v}] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3)$ no nulo (el vector nulo no pertenece a $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3)$), al multiplicarlo por la izquierda por una matriz invertible, vamos a obtener obligatoriamente un vector no nulo en el conjunto de llegada y que vistos sus elementos módulo 3, pertenece a $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3)$. Por tanto, φ_A está bien definida. ✓

(c) $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) = \left\{ \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right], \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right], \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right], \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right] \right\}$

Probar que φ_A es biyectiva

inyectiva)

Sea $[\vec{v}] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3)$, si $[A\vec{v}] = [A\vec{w}] \overset{?}{\Longrightarrow} [\vec{v}] = [\vec{w}]$
$[\vec{w}] \in$

Al ser A invertible, $\exists A^{-1}$ tal que $[A^{-1}A\vec{v}] = [A^{-1}A\vec{w}] \Rightarrow [\vec{v}] = [\vec{w}]$

✓

Juan Manuel Gómez

Sobreyectiva /

Sea $[A\vec{v}] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) \overset{?}{\Longrightarrow} \exists\, [\vec{v}] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3)$ tal que $[A\vec{v}] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3)$.

Basta ver que dado $[A\vec{v}] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3)$. Multiplicamos por su inversa a la izquierda y tenemos que:

$$[A^{-1}A\vec{v}] = [\vec{v}] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3) \checkmark$$

Veamos que $\exists!\ \sigma_A \in S_4$ tq $\varphi_A([\vec{v}_i]) = [\vec{v}_{\sigma_A(i)}]$

$$\begin{pmatrix} \sigma(a) & \sigma(b) \\ \sigma(c) & \sigma(d) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma(v_1) \\ \sigma(v_2) \end{pmatrix}$$

La única permutación $\sigma_A \in S_4$ que cumple dicha condición es la identidad $1\!\!1 \in S_4$

(d) $f: GL(2, \mathbb{F}_3) \longrightarrow S_4$

$A \longrightarrow \sigma_A$

Veamos que

·) $f(AB) = \sigma_{AB} = \sigma_A \cdot \sigma_B = f(A) \cdot f(B) \checkmark$

·) $f(I) = \sigma_I = 1\!\!1 \checkmark$

(e) $(ij) \in S_4 \quad \exists A \in GL(2, \mathbb{F}_3)$ tq. $\sigma_A = (ij)$ y deduce que f es sobreyectiva.

Cada trasposición $(ij) \in S_4$ corresponde a una matriz $A \in GL(2, \mathbb{F}_3)$ ya que dichas matrices son invertibles y una permutación de sus elementos no altera esta condición, de esta forma es posible encontrar siempre $A \in GL(2, \mathbb{F}_3)$ de forma que esté asociada a cualquier permutación $\sigma_A = (ij) \in S_4$

(f) Un isomorfismo entre S_4 y un cociente de $GL(2, \mathbb{F}_3)$,

Como $|S_4| = 24$

Por el teorema de la factorización canónica

$$\begin{tikzcd} GL(2, \mathbb{F}_3) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & S_4 \\ GL(2, \mathbb{F}_3)/\sim \arrow[ur, "F"'] & \end{tikzcd}$$

Vemos que, por el Teorema de Lagrange, $\left| GL(2, \mathbb{F}_3)/\sim \right| = 24$

y que $\left| GL(2, \mathbb{F}_3)/\sim \right| = \dfrac{|GL(2, \mathbb{F}_3)|}{|\sim|}$

Vemos también ~~que $|GL(2, \mathbb{F}_3)| = 87$~~

~~ya que sus~~