Notas de Conjuntos Simpliciales

Facultad de Ciencias, UNAM

Frank Patrick Murphy Hernandez

Índice general

Introducción

El objetivo de estas notas es introducir una maquinaria de carácter algebraico y combinatoria para el estudio de la topología algebraica. Estas notas buscas empezar a presentar los conjuntos simpliciales desde un punto constructivo, para despues introducir las nociones categoricas.

Mis dos referencias favoritas sobre conjuntos simplicales son el clásico libro de Peter May [**?**] y el innovador libro de Goerss y Jardine [**?**].

[**?**] [**?**]

Capítulo 1

Topología Combinatoria

“No existe tal cosa como matemáticas aburridas.”

Edgster Dijsktra.

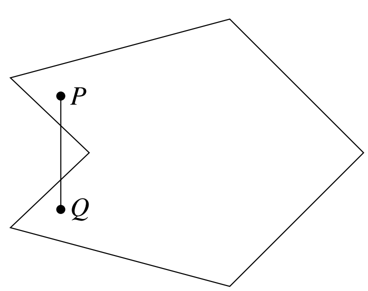
La topología combinatoria es el nombre antiguo que se le daba a la topología algebraica. Este proviene del hecho de que en sus inicios los invariantes asociados a espacios (principalmente poliedros) provenían de descomposiciones combinatorias, usando por ejemplo complejos simpliciales. En los inicios de esta, el tratamiento de las ideas que involucraba eran intuitivas y poco rigurosas, hasta que Browder demuestra el teorema de aproximación simplicial el cual será discutido en una de la secciones futuras. Para completar la historia el nombre de topología algebraica es adoptado por Lefschetz en 1942, el cual aparece en su famoso libro de topología combinatoria.

La referencia base para conjuntos convexos es [**?**] y la referencia para topología combinatoria es el libro de Pontryagin [**?**].

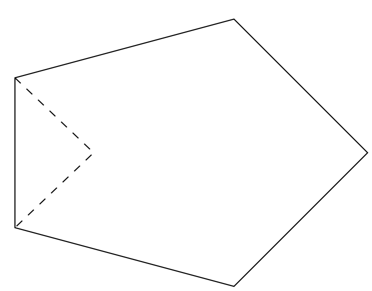
1. Conjuntos Convexos

Intuitivamente un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ es convexo si para cualesquiera dos puntos, el segmento de recta que los une está contenido dentro del conjunto.

Un conjunto no convexo



Un conjunto convexo



Para poder dar una definición formal primero necesitamos definir el concepto de segmento de recta.

DEFINICIÓN 1. *Sean $x,y \in \mathbb{R}^n$. Definimos el segmento de recta $[x,y]$ como*

$$\{tx+(1-t)y \in \mathbb{R}^n \mid t \in [0,1]\}$$

.

Notamos que como conjunto $[x,y] = [y,x]$, es decir, el segmento de recta no tiene dirección. Para los efectos que nosotros lo usaremos esto queda bien.

DEFINICIÓN 2. *Sea $C \subseteq \mathbb{R}^n$. Decimos que C es un conjunto convexo, si $[x,y] \subseteq C$ para cualesquiera $x,y \in C$.*

Como ejemplos claros de conjuntos convexos están $\mathbb{R}^n$ y cualquier singulete. A continuación se discuten otros ejemplos.

PROPOSICIÓN 1. *La bola unitaria $\mathbb{B}^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$ es un conjunto convexo.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $x,y \in \mathbb{B}^n$ y $t \in [0,1]$. Entonces:

$$\|tx+(1-t)y\| \leq t\|x\| + (1-t)\|y\| \leq t + (1-t) = 1$$

De aquí $[x,y] \subseteq \mathbb{B}^n$. Por lo tanto $\mathbb{B}^n$ es un conjunto convexo. □

PROPOSICIÓN 2. *Dados $(a_1,\dots,a_n) \in \mathbb{R}^n$ y $b \in \mathbb{R}$, el conjunto $M = \{(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n a_i x_i \leq b\}$ es convexo.*

DEMOSTRACIÓN. Observe que si $a := (a_1,\dots,a_n)$, entonces $M = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a \cdot x \leq b\}$. Luego, dados $x,y \in M$ y $t \in [0,1]$ se tiene que

$$a \cdot (tx+(1-y)y) = ta \cdot x + (1-t)a \cdot y \leq tb + (1-t)b = b$$

Esto muestra que $[x,y] \subseteq M$. Por lo tanto M es convexo. □

Al adaptar el argumento de la demostración anterior se puede ver que para $(a_1,\dots,a_n) \in \mathbb{R}^n$ y $b \in \mathbb{R}$, los siguientes conjuntos también son convexos:

$$\left\{(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \sum_{i=1}^n a_i x_i = b\right\}$$

$$\left\{(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \sum_{i=1}^n a_i x_i < b\right\}$$

1.1. Cápsula convexa. De la discusión previa a la definición de conjunto convexo es claro que no todo subconjunto de $\mathbb{R}^n$ es convexo. Sin embargo, a todo subconjunto se le puede asociar uno de tales conjuntos y, de hecho este proceso se puede hacer de forma mínima. Este será el siguiente punto a tratar.

PROPOSICIÓN 3. *Sea $\{C_i\}_{i\in I}$ una familia de conjuntos convexos de $\mathbb{R}^n$. Entonces $\bigcap_{i\in I} C_i$ es un conjunto convexo.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $x,y \in \bigcap_{i\in I} C_i$. Entonces $x,y \in C_i$ para toda $i \in I$. De aquí $[x,y] \subseteq C_i$ para toda $i \in I$. Así $[x,y] \subseteq \bigcap_{i\in I} C_i$. Por lo tanto $\bigcap_{i\in I} C_i$ es convexo. □

DEFINICIÓN 3. *Sea $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Definimos su cápsula convexa $\langle S\rangle$ como:*

c1) $S \subseteq \langle S\rangle$.

c2) $\langle S\rangle \subseteq \mathbb{R}^n$ *es un conjunto convexo.*

c3) *Si $S \subseteq S'$ y S' es un conjunto convexo, entonces $\langle S\rangle \subseteq S'$.*

Antes de tratar el problema de existencia de la cápsula convexa, observe que las propiedades que la definen garantizan que si esta existe es única. Por otro lado, como sucede en muchas estructuras generadas que permean la matemática, pueden demostrarse distintas propiedades de dicha construcción directamente de la definición. A continuación incluimos una proposición con estas características.

PROPOSICIÓN 4. *Sean $S,S' \subseteq \mathbb{R}^n$. Entonces:*

1. *S es convexo si y sólo si $\langle S\rangle = S$.*
2. *Si $S \subseteq S'$, entonces $\langle S\rangle \subseteq \langle S'\rangle$.*
3. $\langle S\rangle \cup \langle S'\rangle \subseteq \langle S \cup S'\rangle$
4. $\langle S \cap S'\rangle \subseteq \langle S\rangle \cap \langle S'\rangle$

DEMOSTRACIÓN. Las partes 1 y 2 se dejan como ejercicios.

Para la parte 3 notemos que $S,S' \subseteq S\cup S'$, por lo que de 2 se deduce que $\langle S\rangle, \langle S'\rangle \subseteq \langle S\cup S'\rangle$. Esto implica que $\langle S\rangle \cup \langle S\rangle \subseteq \langle S\cup S'\rangle$.

La parte 4 es análoga a la parte 3. □

A continuación trataremos el problema de existencia de la cápsula convexa.

DEFINICIÓN 4. *Ponemos $\mathfrak{C}_n$ como el conjunto de todos los subconjuntos convexos de $\mathbb{R}^n$.*

PROPOSICIÓN 5. *Sea $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Entonces $\langle S \rangle$ existe. De hecho, $\langle S \rangle = \bigcap \{C \in \mathfrak{C}_n \mid S \subseteq C\}$.*

DEMOSTRACIÓN. Veamos que la definición dada satisface las propiedades que definen a la cápsula convexa. En efecto, primero note que de la proposición 3 se deduce que dicha intersección es un convexo. Además claramente se cumple c1. Para concluir, si $S' \subseteq \mathbb{R}^n$ es un convexo tal que $S \subseteq S'$, entonces dicho subconjunto es un intersectando en la familia que define $\langle S \rangle$, por lo tanto se cumple c3. $\square$

NOTACIÓN 1. *Sean $v_0, \ldots, v_m \in \mathbb{R}^n$. Escribimos $\langle v_0, \ldots, v_m \rangle$ en vez de $\langle \{v_0, \ldots, v_m\} \rangle$. A los subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ que son la cápsula convexa de un conjunto finito de puntos se le conoce como politopos.*

La definición de la cápsula convexa dada puede ser considerada abstracta pues por ejemplo no es obvio que la noción intuitiva que se tiene de politopo corresponda con la dada anteriormente. Así, la siguiente meta es dar una descripción de esta usando elementos que entre otras cosas permita empatar dichas nociones.

DEFINICIÓN 5. *Sean $v_0, \ldots, v_m, w \in \mathbb{R}^n$. Decimos que w es una combinación convexa de $v_0, \ldots, v_m$ si existen $\lambda_0, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ tales que $w = \sum_{i=0}^m \lambda_i v_i$ con $\sum_{i=0}^m \lambda_i = 1$ y $\lambda_i \geq 0$ para todo $i = 0, \ldots, m$.*

EJEMPLO 1. *El segmento de recta entre dos puntos $x, y \in \mathbb{R}^n$ es igual al conjunto de combinaciones convexas de dichos puntos.*

Mas generalmente se tiene lo siguiente.

PROPOSICIÓN 6. *Sea $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Entonces $\langle S \rangle$ es el conjunto de combinaciones convexas de elementos de S.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\mathscr{C}(S)$ el conjunto de combinaciones convexas de elementos en S. Para demostrar la afirmación se va a probar una doble contención. Para ver que $\langle S \rangle \subseteq \mathscr{C}(S)$ basta con ver que $\mathscr{C}(S)$ es un conjunto convexo y que contiene a S. La segunda afirmación es obvia. Por otro lado, sean $x, y \in \mathscr{C}(S)$ y $t \in [0,1]$. Si $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$ y $y = \sum_{i=1}^m \mu_i w_i$ con

$\lambda_i, \mu_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^n \lambda_i = \sum_{i=1}^m \mu_i = 1$ y $v_i, w_i \in S$, observe que $tx + (1-t)y$ es combinación lineal de elementos de S. Es claro que todos los coeficientes son no negativos y además

$$\sum_{i=1}^{n} t\lambda_i + \sum_{i=1}^{m} (1-t)\mu_i = t + (1-t) = 1$$

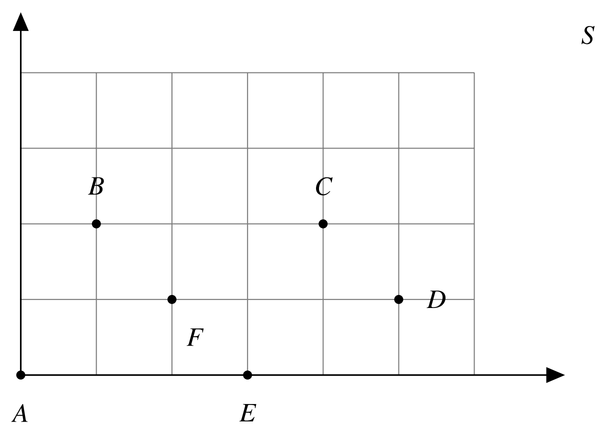
Esto demuestra la afirmación y concluye la prueba de la primera contención.

Para ver que $\mathscr{C}(S) \subseteq \langle S \rangle$, sea $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$ combinación convexa con $v_1, \dots, v_n \in S$. La prueba es por inducción sobre n. El caso de $n = 1$ es claro. Si suponemos que el resultado es válido para $n-1$ elementos, observe que puede suponerse que todos los $\lambda_i \neq 0$ pues en caso contrario $x \in \langle S \rangle$ por hipótesis de inducción. De esto se deduce que en particular $\lambda_n < 1$ y así:

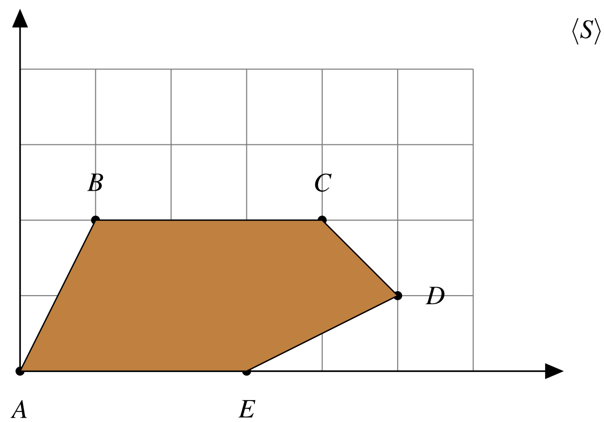
$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i v_i + \lambda_n v_n = (1-\lambda_n) \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_n} v_i + \lambda_n v_n$$

Observemos que $\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_n} v_i \in \langle S \rangle$ por hipótesis de inducción. Entonces la igualdad anterior implica que $x \in \langle S \rangle$. □

EJEMPLO 2. *Considere* $S = \{A = (0,0), B = (2,1), C = (4,2), D = (5,1), E = (3,0), F = (2,1)\} \subseteq \mathbb{R}^2$.



De acuerdo al resultado anterior observemos que el segmento $[A,B] \in \langle S \rangle$. *Además el segmento formado al tomar cualquier punto de* $[A,B]$ *y* C *pertenece a* $\langle S \rangle$. *Más aún, esto sucede con todas las posibles combinaciones de puntos. Por lo tanto, la cápsula convexa de* S *queda como en la figura siguiente:*



Como se puede ver en el ejemplo anterior, la cápsula convexa puede obtenerse tomando cápsulas de subconjuntos. Este es un hecho general.

DEFINICIÓN 6. *Sea X un conjunto. Denotamos por $\mathscr{P}_f(X)$ a la familia de subconjuntos finitos de X.*

PROPOSICIÓN 7. *Sea $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Entonces $\langle S \rangle = \bigcup_{X \in \mathscr{P}_f(S)} \langle X \rangle$.*

DEMOSTRACIÓN. Dado cualquier $X \in \mathscr{P}_f(S)$ se tiene que $\langle X \rangle \subseteq \langle S \rangle$. De esto se deduce que $\bigcup_{X \in \mathscr{P}_f(S)} \langle X \rangle \subseteq \langle S \rangle$.

Para la contención restante sea $x \in \langle S \rangle$. De la proposición 6 se deduce que x es combinación convexa de digamos $v_1, ..., v_m \in S$. Por lo tanto $x \in \langle v_1, ..., v_m \rangle \subseteq \bigcup_{X \in \mathscr{P}_f(S)} \langle X \rangle$. $\square$

1.2. Independencia afín. Observe que en el ejemplo 2 los puntos A, C, F son colineales pues pertenecen a la recta $y = \frac{1}{2}x$. Por tal razón su envolvente convexa es un segmento y esto hace que $F \in int(\langle S \rangle)$. Para asegurarnos que todos los puntos que definen un politopo se usen en la construcción de la envolvente convexa del conjunto al que pertenecen, es necesario introducir una noción de independencia. Esta se muestra a continuación.

DEFINICIÓN 7. *Sean $v_0, \ldots, v_m \in \mathbb{R}^n$. Decimos que $v_0, \ldots, v_m$ son afínmente independientes si $v_1 - v_0, \ldots, v_m - v_0$ son linealmente independientes.*

PROPOSICIÓN 8. *Sean $v_0,\dots,v_m \in \mathbb{R}^n$. Entonces $v_0,\dots,v_m$ son afínmente independiente si y sólo si siempre que $\sum_{i=0}^m \lambda_i v_i = 0$ con $\sum_{i=0}^m \lambda_i = 0$, se tiene que $\lambda_j = 0$ para toda $j = 0,\dots,m$.*

DEMOSTRACIÓN. $\Rightarrow$) Supóngase que $v_0,...,v_m$ son afínmente independientes y sean $\lambda_0,...,\lambda_m \in \mathbb{R}$ tales que $\sum_{i=0}^m \lambda_i = 0$ y $\sum_{i=0}^m \lambda_i v_i = 0$. Entonces se tienen las siguientes igualdades:

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i(v_i - v_0) = \sum_{i=1}^m \lambda_i v_i + \left(-\sum_{i=1}^m \lambda_i\right)v_0 = \sum_{i=1}^m \lambda_i v_i + \lambda_0 v_0 = \sum_{i=0}^m \lambda_i v_i = 0$$

De la hipótesis se deduce que para todo $i = 1,...,m$, $\lambda_i = 0$. Más aún, como $\lambda_0 = -\sum_{i=1}^m \lambda_i$, entonces $\lambda_0 = 0$.

$\Leftarrow$) Supóngase que existen $\lambda_1,...,\lambda_m \in \mathbb{R}$ tales que $\sum_{i=1}^m \lambda_i(v_i - v_0) = 0$. Defina $\lambda_0 := -\sum_{i=1}^m \lambda_i$, por lo que claramente $\sum_{i=0}^m \lambda_i = 0$. Además se tiene lo siguiente:

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i(v_i - v_0) = \sum_{i=1}^m \lambda_i v_i + \left(-\sum_{i=1}^m \lambda_i\right)v_0 = \sum_{i=1}^m \lambda_i v_i + \lambda_0 v_0 = \sum_{i=0}^m \lambda_i v_i$$

De la hipótesis se deduce que para todo $i = 0,...,m$ se tiene que $\lambda_i = 0$. □

Del resultado anterior se deduce el siguiente corolario que muestra que en la definición de independencia afín no depende de v_0.

COROLARIO 1. *Sean $v_0,\dots,v_m \in \mathbb{R}^n$ e $i \in \{1,...,m\}$. Entonces $v_0,\dots,v_m$ son afínmente independientes si y sólo si $\{v_j - v_i \mid j \in \{1,...,i-1,i+1,...,m\}\}$ es linealmente independiente.*

Para concluir esta sección se presentan un par de resultados que muestran que la independencia afín se preserva al tomar subconjuntos y que además permite que las descomposiciones afines sean únicas.

PROPOSICIÓN 9. *Sean $v_0,\dots,v_m \in \mathbb{R}^n$ afinmente independientes. Si $v_{i_0},\dots,v_{i_k}$ son algunos de los vectores de $v_0,\dots,v_m \in \mathbb{R}^n$, entonces $v_{i_0},\dots,v_{i_k}$ son afinmente independientes.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $\lambda_{i_0}, \ldots, \lambda_{i_k} \in \mathbb{R}$ tales que $\sum_{j=0}^{k} \lambda_{i_j} v_{i_j} = 0$ con $\sum_{j=0}^{k} \lambda_{i_j} = 0$. Si completamos los $\lambda_{i_0}, \ldots, \lambda_{i_k}$ a $\lambda_0, \ldots, \lambda_m$ de modo que los nuevos lambdas sean cero. Por lo que tenemos que $\sum_{i=0}^{m} \lambda_i v_i = 0$ y $\sum_{i=0}^{m} \lambda_i = 0$. De donde se sigue que $\lambda_j = 0$ para toda $j = 0, \ldots, m$. En particular tenemos que $\lambda_{i_j} = 0$ para toda $j = 0, \ldots, k$. □

PROPOSICIÓN 10. *Sean $v_0, \ldots, v_m \in \mathbb{R}^n$ afinmente independientes. Entonces para $w \in \langle v_0, \ldots, v_m \rangle$ existen únicos $\lambda_0, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ tales que $w = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i v_i$ con $\sum_{i=0}^{m} \lambda_i = 1$ y $\lambda_i \geq 0$ para todo $i = 0, \ldots, m$.*

DEMOSTRACIÓN. La existencia de la descomposición se da por la proposición 6 y la unicidad por la proposición 8. □

A las lambda de la proposición anterior se les llaman las coordenadas baricéntricas de w con respecto $v_0, \ldots, v_m$

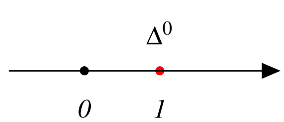
2. Complejos Simplicial Geométricos

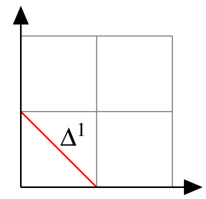
DEFINICIÓN 8. *Sea $C \subseteq \mathbb{R}^n$. Decimos que C es un k-simplejo si es la cápsula convexa de un conjunto S de $k+1$ elementos afinmente independientes. Comúnmente llamaremos a C un simplejo, su dimensión será k y denotaremos este hecho como $dim(C) = k$. Decimos que $\langle T \rangle$ es una m-cara de C, si $T \subseteq S$ es un conjunto no vacío y $|T| = m+1$. A una m-cara la llamamos propia si $m < k$. A las 0-caras de C, las llamamos vértices de C. A las 1-caras, las llamamos aristas de C. A las $(k-1)$-caras, las llamamos facetas de C.*

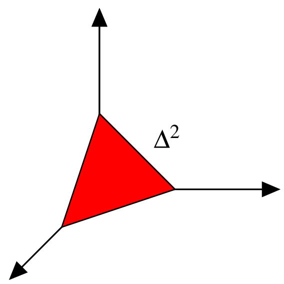
EJEMPLO 3. *Para n un natural, definimos el n-simplejo estandar Δ^n como la cápsula convexa de la base canónica de $\mathbb{R}^{n+1}$. Notamos que:*

$$\Delta^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=0}^{n} x_i = 1, x_i \geq 0 \text{ para todo } i = 0, \ldots, n\}$$

OBSERVACIÓN 1. *El n-simplejo estándar es en efecto un simplejo pues si $\{e_0, ..., e_n\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ es la base canónica, entonces $\Delta^n = \langle e_0, ..., e_n \rangle$. Además $\dim(\Delta^n) = n$. Algunas representaciones en dimensión baja son:*





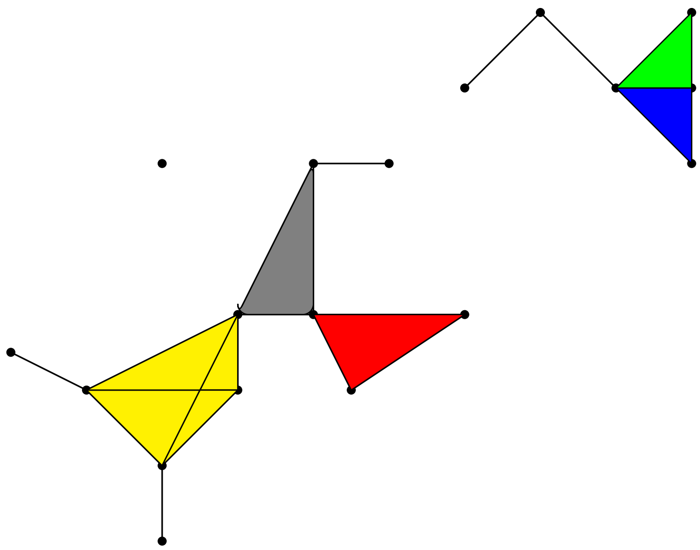


DEFINICIÓN 9. *Un complejo simplicial geométrico $\mathscr{K}$ es una colección finita de simplejos en $\mathbb{R}^n$ que cumple:*

- *Si $C \in \mathscr{K}$ y D es una cara de σ, entonces $D \in \mathscr{K}$*
- *Sean $C_1, C_2 \in \mathscr{K}$. Si $C_1 \cap C_1 \neq \emptyset$, entonces $C_1 \cap C_2$ es una cara de C_1 y C_2.*

A los 0-simplejos de $\mathscr{K}$ los llamamos vértices de $\mathscr{K}$. Llamamos dimensión de $\mathscr{K}$ a $max\{dim(C) \mid C \in \mathscr{K}\}$. La denotamos por $dim(\mathscr{K})$.

EJEMPLO 4. *Complejo simplicial con 18 vértices (0-simplejos), 22 aristas (1-simplejos), 8 facetas (2-simplejos) y un 3-simplejo. Por lo tanto, la dimensión de este es 3.*



DEFINICIÓN 10. *Para $\mathscr{K}$ un complejo simplicial geométrico, definimos $F(\mathscr{K})$ como el conjunto de todas las caras propias de $\mathscr{K}$.*

PROPOSICIÓN 11. *Sea $\mathscr{K}$ un complejo simplicial geométrico. Entonces $F(\mathscr{K})$ es un complejo simplicial geométrico.*

DEMOSTRACIÓN. Primero hay que notar que cada cara de un simplejo es un simplejo por definición. Además, para cada $C \in \mathscr{K}$, $dim(C) < \infty$ y entonces C tiene un número finito de caras, de donde $\mathscr{K}$ es un conjunto finito de simplejos. De la definición de $F(\mathscr{K})$ y por la Proposición 4, se tiene que $F(\mathscr{K})$ es un complejo simplicial geométrico. □

PROPOSICIÓN 12. *Sea $\mathscr{K}$ un complejo simplicial geométrico. Entonces $dim(F(\mathscr{K})) = dim(\mathscr{K}) - 1$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $C \in \mathscr{K}$ tal que $dim(C) = dim(\mathscr{K}) = k$. Si $C = \langle x_1, \ldots, x_k \rangle$, podemos definir un elemento $D \in F(\mathscr{K})$ como

$$D := \langle x_1, \ldots, x_{k-1} \rangle.$$

Por lo tanto $dim(F(\mathscr{K})) = k - 1 = dim(\mathscr{K}) - 1$. □

DEFINICIÓN 11. *Sea $\mathscr{K}$ un complejo simplicial geométrico. La realización geométrica de $\mathscr{K}$ la definimos como $\bigcup \mathscr{K}$, y la denotamos por $|\mathscr{K}|$.*

PROPOSICIÓN 13. *Sea $\mathscr{K}$ un complejo simplicial geométrico. Entonces* $\partial(|\mathscr{K}|) = |F(\mathscr{K})|$.

DEMOSTRACIÓN. □

DEFINICIÓN 12. *Sean $\mathscr{K}$ y $\mathscr{L}$ complejos simpliciales geométricos. Decimos que $\mathscr{L}$ es un subcomplejo de $\mathscr{K}$ si $\mathscr{L} \subseteq \mathscr{K}$*

DEFINICIÓN 13. *Sea $\mathscr{K}$ un complejo simplicial geométrico de dimensión n y $0 \leq r \leq n$. Definimos el r-esqueleto de $\mathscr{K}$, $sk_r(\mathscr{K})$, como el conjunto de todos los simplejos de $\mathscr{K}$ de dimensión menor o igual a r.*

PROPOSICIÓN 14. *Sea $\mathscr{K}$ un complejo simplicial geométrico de dimensión n y $0 \leq r \leq n$. Entonces $sk_r(\mathscr{K})$ es un subcomplejo de $\mathscr{K}$.*

DEMOSTRACIÓN. Dado que todo elemento de $sk_r(\mathscr{K})$ es un elemento de $\mathscr{K}$, entonces los elementos de $sk_r(\mathscr{K})$ cumplen claramente las condiciones que definen a un complejo simplicial geométrico. Más aún, esto claramente implica que $sk_r(\mathscr{K}) \subseteq \mathscr{K}$. □

PROPOSICIÓN 15. *Sea $\mathscr{K}$ un complejo simplicial geométrico de dimensión n, y $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$ subcomplejos de $\mathscr{K}$. Entonces $\mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_2$ y $\mathscr{L}_1 \cup \mathscr{L}_2$ son subcomplejos de $\mathscr{K}$.*

DEMOSTRACIÓN. Primero veamos que $\mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_2$ es un complejo. En efecto, dados $C \in \mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_2$ y $D \subseteq C$ una cara, el hecho de que $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$ son complejos implican que $D \in \mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_2$. Más aún, si $C, D \in \mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_2$ y $C \cap D \neq \emptyset$, al ser $\mathscr{K}$ un complejo, esto implica que $C \cap D$ es cara de C y D.

En lo que respecta a $\mathscr{L}_1 \cup \mathscr{L}_2$, dado $C \in \mathscr{L}_1 \cup \mathscr{L}_2$ y $D \subseteq C$ una cara, dado que podemos suponer sin pérdida de generalidad que $C \in \mathscr{L}_1$, esto implica que $D \in \mathscr{L}_1$ y por lo tanto $D \in \mathscr{L}_1 \cup \mathscr{L}_2$. Además la prueba de la segunda condición es análoga a la demostrada en el caso anterior. □

DEFINICIÓN 14. *Sea $\mathscr{K}$ un complejo simplicial geométrico. Decimos que $\mathscr{K}$ es conexo si no existen dos subcomplejos $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$ de $\mathscr{K}$ tales que $\mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_2 = \emptyset$ y $\mathscr{L}_1 \cup \mathscr{L}_2 = \mathscr{K}$.*

PROPOSICIÓN 16. *Sea $\mathscr{K}$ un complejo simplicial geométrico. Entonces $\mathscr{K}$ es conexo si y sólo si para cualesquiera dos vértices v y w existe una sucesión de vértices $v = v_0, \dots, v_n = w$ tales que $\{v_i, v_{i+1}\}$ es un 1-simplejo de $\mathscr{K}$ para $i = 0, \dots, n-1$.*

DEMOSTRACIÓN. $\Rightarrow$) Argumentando por contrapositiva suponga que existen v y w vértices que no se pueden conectar por un 1-simplejo de $\mathscr{K}$. Considere $\mathscr{L}_1 = \{C \in \mathscr{K} \mid \text{existe } c \in C \text{ vértice que se puede conectar con } v \text{ mediante una colección finita de 1-simplejos en } \mathscr{K}\}$, así como $\mathscr{L}_2 = \mathscr{K} - \mathscr{L}_1$. Para concluir la prueba se tiene que probar que estos conjuntos son subcomplejos de $\mathscr{K}$. En efecto, si $C \in \mathscr{L}_1$ y $D \subseteq C$ es una cara, entonces sea $c \in C$ un testigo de que $C \in \mathscr{L}_1$. Como D es cara de C, existe una sucesión de 1-simplejos en $\mathscr{K}$ que empieza un vértice de D y termina en c. Al considerar las dos sucesiones se obtiene la sucesión buscada y por lo tanto, $D \in \mathscr{L}_1$.

Para la segunda condición, considere $C, D \in \mathscr{L}_1$ tales que $C \cap D \neq \emptyset$. Al ser $\mathscr{K}$ complejo, $C \cap D$ es cara de C y D en $\mathscr{K}$. Además, como $C \cap D \subseteq C, D$, entonces $C \cap D \in \mathscr{L}_1$. Esto prueba que $\mathscr{L}_1$ es complejo. Además, de forma análoga se demuestra que $\mathscr{L}_2$ es complejo, lo que concluye la prueba.

$\Leftarrow$) Argumentando nuevamente por contrapositiva, si existen dichos subcomplejos $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$, considere $v \in \mathscr{L}_1$ y $w \in \mathscr{L}_2$ vértices. Entonces v y w no pueden definir una sucesión de 1-simplejos de $\mathscr{K}$ que comience y termine en w. $\square$

DEFINICIÓN 15. *Sea $\mathscr{K}$ un complejo simplicial geométrico y $\mathscr{L}$ un subcomplejo de $\mathscr{K}$. Decimos que $\mathscr{L}$ es una componente de $\mathscr{K}$ si $\mathscr{L}$ es conexo y existe $\mathscr{M}$ un subcomplejo de $\mathscr{K}$ tal que $\mathscr{L} \cap \mathscr{M} = \emptyset$.*

PROPOSICIÓN 17. *Sea $\mathscr{K}$ un complejo simplicial geométrico, y $\mathscr{L}_1, \dots, \mathscr{L}_m$ componentes de $\mathscr{K}$. Entonces $\mathscr{L}_i \cap \mathscr{L}_j = \emptyset$, para $i \neq j$.*

DEMOSTRACIÓN. $\square$

3. Homología Simplicial

DEFINICIÓN 16. *Sea $\mathscr{K}$ un complejo simplicial geométrico y $C \in \mathscr{K}$ con n vértices. Denotamos por C_0 a su conjunto de vértices. Un ordenamiento de C es un ordenamiento de C_0, es decir, un ordenamiento de los vértices de C.*

DEFINICIÓN 17. *Sea $\mathscr{K}$ un complejo simplicial geométrico y $C \in \mathscr{K}$ con n-simplejo con ordenamiento $R\colon \{0,\dots,n\} \longrightarrow C_0$. A un n-simplejo con un ordenamiento lo llamaremos un n-simplejo ordenado. Notacionalemnte ponemos $x_i := R(i)$ para $i = 0,\dots,n$, en caso de no ser necesario destacar el ordenamiento R. Así podemos escribir notacionalmente el ordenamiento como un arreglo de C_0^{n+1}, es decir, $C = [x_0,\dots,x_n]$. Entonces podemos definir $C_R[i]$ como el $n-1$-simplejo ordenado tal que $C_R[i]_0 = [x_0,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_n]$. Así obtenemos una de sus $n-1$-caras al eliminar uno de sus vértices. La cara obtenida al eliminar el vértice x_i resulta ser la cara opuesta al vértice x_i.*

Sea $\mathscr{K}$ un complejo simplicial geométrico y $C \in \mathscr{K}$ con n-simplejo. Si $R\colon \{0,\dots,n\} \longrightarrow C$ es un ordenamiento y $D \subseteq C$ es una cara de C, entonces R induce un ordenamiento en D. Por lo que vale considerar un ordenamiento de R de los vértices de $\mathscr{K}$, lo cual inducirá un ordenamiento en todos los vértices.

DEFINICIÓN 18. *Sea $\mathscr{K}$ un complejo simplicial geométrico de dimensión n y $r \leq n$ un natural. Denotamos por $\mathscr{K}_r$ al conjunto de r-simplejos y $\mathscr{K}_r^o$ al conjunto de r-simplejos ordenados.*

DEFINICIÓN 19. *Sea $\mathscr{K}$ un complejo simplicial geométrico de dimensión n y $r \leq n$ un natural. Definimos:*

$$L^r(\mathscr{K}) = \mathbb{Z}^{\mathscr{K}_r^o}/E^r(\mathscr{K})$$

donde $E^r(\mathscr{K})$ es el subgrupo de $\mathbb{Z}^{\mathscr{K}_r^o}$ generado por $\sigma - sgn(f)\sigma_f$ para $\sigma \in \mathscr{K}_r^o$ y $f \in S_{n+1}$ donde $\sigma_f = [x_{f(0)},\dots,x_{f(n)}]$ con $\sigma = [x_0\dots,x_n]$. Observamos que aquí abusamos de la notación identificando $\sigma \in \mathscr{K}_r^o$ con $e_\sigma \in \mathbb{Z}^{\mathscr{K}_r^o}$ dado por $e_\sigma(\tau) = \delta_{\sigma\tau}$. Por último, pasaremos un paso adelante con el abuso de notación y denotaremos por σ tambien al elemento en $L^r(\mathscr{K})$. Notemos que $\sigma_f = -\sigma$ en $L^r(\mathscr{K})$ si f es una permutación impar.

DEFINICIÓN 20. *Sea $\mathscr{K}$ un complejo simplicial geométrico de dimensión n, $0 < r \leq n$ un natural y R un ordenamiento de los vértices de $\mathscr{K}$. Definimos*

$$\Delta_R^r\colon L^r(\mathscr{K}) \longrightarrow L^{r-1}(\mathscr{K})$$

dado por:

$$\Delta_R^r(\sigma) = \sum_{i=0}^{r}(-1)^i \sigma_R[i]$$

para $\sigma \in \mathscr{K}$.

Como $L^r(\mathscr{K})$ es grupo abeliano libre con base $\mathscr{K}$, entonces Δ^r se puede extender de forma $\mathbb{Z}$-lineal a un único morfismo de grupos. De nuevo abusando de notación, este morfismo lo denotaremos por Δ_R^r.

PROPOSICIÓN 18. *Sea $\mathscr{K}$ un complejo simplicial geométrico de dimensión n,* $0 < r < n$ *un natural y R un ordenamiento de los vértices de $\mathscr{K}$. Entonces* $\sigma_R[i]_R[j] = \sigma_R[j+1]_R[i]$ *para* $0 \le i \le j \le n$.

DEMOSTRACIÓN. Si $\sigma_R = \{x_0, \ldots, x_n\}$, entonces $\sigma_R[i] = \{x_0, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n\}$. Así, $\sigma_R[i]_R[j] = \{x_0, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, x_j, x_{j+2}, \ldots, x_n\}$. Siendo puntuales hay tres casos, el primero $i = j$, entonces $\sigma_R[i]_R[j] = \{x_0, \ldots, x_{i-1}, x_{i+2}, \ldots, x_n\}$. El segundo caso, $j = i+1$, entonces $\sigma_R[i]_R[j] = \{x_0, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, x_{i+3}, \ldots, x_n\}$. Y el último, si $i+1 < j$, entonces $\sigma_R[i]_R[j] = \{x_0, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n\}$. Por otro lado, tenemos que $\sigma_R[j+1] = \{x_0, \ldots, x_j, x_{j+2}, \ldots, x_n\}$. Primero $i = j$,

$$\sigma_R[j+1]_R[i] = \{x_0, \ldots, x_{j-1}, x_{j+2}, \ldots, x_n\} = \{x_0, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, x_j, x_{j+2}, \ldots, x_n\} = \sigma_R[i]_R[j]$$

En el caso, $j = 1+1$

$$\sigma_R[j+1]_R[i] = \{x_0, \ldots, x_{j-2}, x_j, x_{j+2}, \ldots, x_n\} = \{x_0, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, x_{i+3}, \ldots, x_n\} = \sigma_R[i]_R[j]$$

Por último, $i+1 < j$,

$$\sigma_R[j+1]_R[i] = \{x_0, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n\} = \sigma_R[i]_R[j]$$

Por lo tanto, $\sigma_R[i]_R[j] = \sigma_R[j+1]_R[i]$ para $0 \le i \le j \le n$. $\square$

PROPOSICIÓN 19. *Sea $\mathscr{K}$ un complejo simplicial geométrico de dimensión n,* $0 < r < n$ *un natural y R un ordenamiento de los vértices de $\mathscr{K}$. Entonces* $\Delta_R^r \Delta_R^{r+1} = 0$

DEMOSTRACIÓN. Para ver esto, basta verlos en los simplejos σ representados en el grupo libre:

$$\begin{aligned}
\Delta_R^r\Delta_R^{r+1}(\sigma) &= \Delta_R^r(\sum_{i=0}^{r+1}(-1)^i\sigma_R[i]) \\
&= \sum_{i=0}^{r+1}(-1)^i\Delta_R^r(\sigma_R[i]) \\
&= \sum_{i=0}^{r+1}(-1)^i(\sum_{j=0}^{r}(-1)^j(\sigma_R[i])_R[j]) \\
&= \sum_{i=0}^{r+1}\sum_{j=0}^{r}(-1)^{i+j}(\sigma_R[i])_R[j]) \\
&= \sum_{i=1}^{r+1}\sum_{j=0}^{i-1}(-1)^{i+j}(\sigma_R[i])_R[j]) + \sum_{i=0}^{r}\sum_{j=i}^{r}(-1)^{i+j}(\sigma_R[i])_R[j]) \\
&= \sum_{i=1}^{r+1}\sum_{j=0}^{i-1}(-1)^{i+j}(\sigma_R[i])_R[j]) + \sum_{i=0}^{r}\sum_{j=i}^{r}(-1)^{i+j}(\sigma_R[j+1])_R[i]) \\
&= \sum_{k=1}^{r}\sum_{j=k}^{r}(-1)^{k+j+1}(\sigma_R[k+1])_R[j]) + \sum_{i=0}^{r}\sum_{j=i}^{r}(-1)^{i+j}(\sigma_R[j+1])_R[i]) \\
&= 0
\end{aligned}$$

□

Notamos que para cualesquiera dos ordenamientos R y S de los vértices de $\mathscr{K}$. Tenemos que $nuc(\Delta_R^r) = nuc(\Delta_S^r)$ e $im(\Delta_R^r) = im(\Delta_S^r)$. Por lo que la siguiente definición no depende de ordenamiento alguno de los vértices.

DEFINICIÓN 21. *Sea $\mathscr{K}$ un complejo simplicial geométrico de dimensión n, y $0 < r < n$ un natural. Definimos*

$$H^r(\mathscr{K}) = nuc(\Delta^r)/im(\Delta^{r+1})$$

Para el caso de $r = n$, pondremos $H^r(\mathscr{K}) = L^r(\mathscr{K})$. Esto coincide con la idea de poner $L^{n+1}(\mathscr{K}) = 0$ y $\Delta^{n+1} = 0$. Por otro lado, para el caso de $r = 0$, pondremos $L^{-1}(\mathscr{K}) = 0$ y $\Delta^r = 0$. Extendemos la definición de forma natural, es decir,

$$H^0 = L^0(\mathscr{K})/im(\Delta^1)$$

DEFINICIÓN 22. *Sea $\mathscr{K}$ un complejo simplicial geométrico de dimensión n, y $0 \le r \le n$ un natural. Los elementos de $L^r(\mathscr{K})$ los llamaremos r-cadenas. A una r-cadena x la llamaremos un r-ciclo, si $\Delta^r(x) = 0$. Un r-ciclo lo llamaremos un r-borde si está en la imagen de Δ^{r+1}.*

PROPOSICIÓN 20. *Sea $\mathscr{K}$ un complejo simplicial geométrico de dimensión n, y $\mathscr{L}_1, \ldots, \mathscr{L}_m$ componentes de $\mathscr{K}$. Entonces*

$$H^r(\mathscr{K}) = H^r(\mathscr{L}_1) \oplus \cdots \oplus H^r(\mathscr{L}_m)$$

DEMOSTRACIÓN. Haremos esto para el caso $m = 2$ y el caso general se sigue por inducción aplicando recursivamente la misma proposición. Primero observemos que:

$$L^r(\mathscr{K}) = L^r(\mathscr{L}_1) \oplus L^r(\mathscr{L}_2)$$

Esto debido a que $\mathscr{K}_r = (\mathscr{L}_1)_r \sqcup (\mathscr{L}_2)_r$. Así mismo esto implica que $\mathscr{K}_r^o = (\mathscr{L}_1)_r^o \sqcup (\mathscr{L}_2)_r^o$. Por lo que tenemos que $\mathbb{Z}^{\mathscr{K}_r^o} = \mathbb{Z}^{(\mathscr{L}_1)_r^o} \oplus \mathbb{Z}^{(\mathscr{L}_2)_r^o}$. De igual manera notamos que por contrucción tenemos que $E^r(\mathscr{L}_1) \leq \mathbb{Z}^{(\mathscr{L}_1)_r^o}$ y $E^r(\mathscr{L}_2) \leq \mathbb{Z}^{(\mathscr{L}_2)_r^o}$. Por lo que efectivamente concluimos que $L^r(\mathscr{K}) = L^r(\mathscr{L}_1) \oplus L^r(\mathscr{L}_2)$

Afirmamos que $\Delta^r_{\mathscr{K}} = \Delta^r_{\mathscr{L}_1} \oplus \Delta^r_{\mathscr{L}_2}$, esto es, que $\Delta^r_{\mathscr{K}}(x) = \Delta^r_{\mathscr{L}_1}(x_1) + \Delta^r_{\mathscr{L}_2}(x_2)$ donde $x = x_1 + x_2$ con $x_1 \in L^r(\mathscr{L}_1)$ y $x_2 \in L^r(\mathscr{L}_2)$ la descomposición canónica de x. Notamos que para σ un r-simplejo de $\mathscr{K}$, entonces σ pertenece a $\mathscr{L}_1$ ó a $\mathscr{L}_2$. Por lo que $\Delta^r_{\mathscr{K}} = \Delta^r_{\mathscr{L}_1} \oplus \Delta^r_{\mathscr{L}_2}$ para los generadores, lo que se extiende de forma lineal.

Así observamos que este hecho implica que $im(\Delta^r_{\mathscr{K}}) = im(\Delta^r_{\mathscr{L}_1}) \oplus im(\Delta^r_{\mathscr{L}_2})$ como $im(\Delta^r_{\mathscr{L}_1}) \leq nuc(\Delta^r_{\mathscr{L}_1})$ y $im(\Delta^r_{\mathscr{L}_2}) \leq nuc(\Delta^r_{\mathscr{L}_2})$. □

4. El Teorema de Aproximación

DEFINICIÓN 23. *Sea $\mathscr{K}$ un complejo simplicial geométrico. Denotamos por $\mathscr{K}_0$ el conjunto de vértices de $\mathscr{K}$.*

DEFINICIÓN 24. *Sean $\mathscr{K}$ y $\mathscr{L}$ dos complejos simpliciales geométricos y $f\colon |\mathscr{K}| \longrightarrow |\mathscr{L}|$ una función. Diremos que f es un morfismo simplicial, si:*

- *Para todo $\sigma \in \mathscr{K}$, $f(\sigma) \in \mathscr{L}$.*
- *Si $x \in |\mathscr{K}|$ con $x \in \sigma$ para algún $\sigma \in \mathscr{K}$ con sigma $= \{x_0, \ldots, x_r\}$ y $x = \sum_{k=0}^r \lambda_k x_k$, entonces*
$$f(\sum_{k=0}^{r} \lambda_k x_k) = \sum_{k=0}^{r} \lambda_k f(x_k)$$

PROPOSICIÓN 21. *Sean $\mathscr{K}$, $\mathscr{L}$ y $\mathscr{M}$ complejos simpliciales geométricos, y $f\colon |\mathscr{K}| \longrightarrow |\mathscr{L}|$ y $f\colon |\mathscr{L}| \longrightarrow |\mathscr{M}|$. Entonces gf es un morfismo simplicial.*

DEMOSTRACIÓN. □

DEFINICIÓN 25. *Sean $\mathscr{K}$ y $\mathscr{L}$ dos complejos simpliciales geométricos y $f\colon |\mathscr{K}| \longrightarrow |\mathscr{L}|$ un morfismo simplicial. Entonces f es continua.*

DEMOSTRACIÓN. □

PROPOSICIÓN 22. *Sean $\mathscr{K}$, $\mathscr{L}$ y $\mathscr{M}$ complejos simpliciales geométricos, y $f_0\colon \mathscr{K}_0 \longrightarrow \mathscr{L}_0$ una función. Entonces existe un único morfismo simplicial $f\colon |\mathscr{K}| \longrightarrow |\mathscr{L}|$ tal que extiende a f_0.*

DEMOSTRACIÓN. □

DEFINICIÓN 26. *Sea $\mathscr{K}$ un complejo simplicial geométrico y $x \in |\mathscr{K}|$. Definimos la vecindad simplicial de x, $N_{\mathscr{K}}(x)$, como los simplejos σ de $\mathscr{K}$ tales que $x \in \sigma$. Definimos el vínculo de x, $L_{\mathscr{K}}(x)$, como los simplejos σ de $\mathscr{K}$ tales que $x \notin \sigma$.*

PROPOSICIÓN 23. *Sea $\mathscr{K}$ un complejo simplicial geométrico y $x \in |\mathscr{K}|$. Entonces $N_{\mathscr{K}}(x)$ y $L_{\mathscr{K}}(x)$ son subcomplejos de $\mathscr{K}$.*

DEMOSTRACIÓN. □

PROPOSICIÓN 24. *Sea $\mathscr{K}$ un complejo simplicial geométrico y $x \in |\mathscr{K}|$. Entonces existe un único $\sigma \in \mathscr{K}$ tal que $x \in \sigma^\circ$.*

DEMOSTRACIÓN. □

DEFINICIÓN 27. *Sea $\mathscr{K}$ un complejo simplicial geométrico y x un vértice de $\mathscr{K}$. Definimos la estrella de x, como:*

$$st(x) = \bigcup \{\sigma^\circ \mid \sigma \in \mathscr{K}, \quad x \in \sigma\}$$

PROPOSICIÓN 25. *Sea $\mathscr{K}$ un complejo simplicial geométrico y x un vértice de $\mathscr{K}$. Entonces $st(x)$ es un conjunto abierto de $|\mathscr{K}|$.*

DEMOSTRACIÓN. □

DEFINICIÓN 28. *Sea $\mathscr{K}$ un complejo simplicial geométrico y x un vértice de $\mathscr{K}$. Definimos $\mathscr{K}_x$ como los $\sigma \in \mathscr{K}$ tales que $x \notin \sigma$.*

PROPOSICIÓN 26. *Sea $\mathscr{K}$ un complejo simplicial geométrico y x un vértice de $\mathscr{K}$. Entonces $\mathscr{K}_x$ es un subcomplejo de $\mathscr{K}$.*

DEMOSTRACIÓN. $\square$

PROPOSICIÓN 27. *Sea $\mathscr{K}$ un complejo simplicial geométrico y x un vértice de $\mathscr{K}$. Entonces $|\mathscr{K}| \setminus st(x) = |\mathscr{K}_x|$*

DEMOSTRACIÓN. $\square$

5. Teorema del Punto Fijo

Ejercicios

EJERCICIO 1. *Sea $x \in \mathbb{R}^n$. Entonces $\{x\}$ es un conjunto convexo.*

EJERCICIO 2. *Demuestre 1 y 2 de la proposición 4.*

EJERCICIO 3. *Pruebe mediante ejemplos que las contenciones en 3 y 4 de la proposición 4 pueden ser propias.*

EJERCICIO 4. *Es común definir a $P \subseteq \mathbb{R}^n$ como un politopo si existe una colección finita $M_1, \ldots, M_k \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que cada M_i es un subconjunto como el de la proposición 2.*

Demuestre que esta definición de politopo coincide con la dada en la notación 1. Usar esto para demostrar que los politopos son conjuntos cerrados con la topología inducida.[1]

EJERCICIO 5. *Demuestre que cápsula convexa de una colección finita de puntos es un segmento si y sólo si son colineales.*

[1] Esta descripción muestra que los politopos con conjuntos semialgebraicos.

Capítulo 2

Complejos Simpliciales Abstractos

1. Realización Geométrica

DEFINICIÓN 29. *Sea X un conjunto finito. Un complejo simplicial abstracto $\mathbb{K}$ sobre X es una familia de subconjuntos de X tal que:*

- $\emptyset \notin \mathbb{K}$
- $X = \bigcup \mathbb{K}$
- *Si $\sigma \in \mathbb{K}$ y $\tau \subseteq \sigma$ con $\tau \neq \emptyset$, entonces $\tau \in \mathbb{K}$.*

A X lo llamamos el conjunto de vértices de $\mathbb{K}$.

DEFINICIÓN 30. *Sea $\mathbb{K}$ un complejo simplicial abstracto y $\sigma \in \mathbb{K}$. Decimos que σ es n-simplejo abstracto, si $|\sigma| = n+1$. Con esta definición tenemos que los 0-simplejos abstractos son los vértices de $\mathbb{K}$. Definimos la dimensión de $\mathbb{K}$ como $max\{|\sigma|-1 \mid \sigma \in \mathbb{K}\}$, y la denotamos por $dim(\mathbb{K})$*

DEFINICIÓN 31. *Sea $\mathbb{K}$ con complejo simplicial abstracto con conjunto de vértices $X = \{x_0, \ldots, x_n\}$. Para $\sigma \in \mathbb{K}$, definimos $\sigma_G = \langle e_i \mid x_i \in \sigma \rangle$ donde $e_0, \ldots, e_n$ es la base canónica de $\mathbb{R}^{n+1}$. Es evidente que σ_G es un simplejo. Defimos $G(\mathbb{K})$ como la familia de simplejos geométricos $\{\sigma_G \mid \sigma \in \mathbb{K}\}$.*

PROPOSICIÓN 28. *Sea $\mathbb{K}$ un complejos simplicial abstracto. Entonces $G(\mathbb{K})$ es un complejo simplicial geométrico.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $\sigma_G, \tau_G \in G(\mathbb{K})$ tales que $\sigma_G \cap \tau_G \neq \emptyset$. □

2. Gráficas

Capítulo 3

Conjuntos Simpliciales

1. Definición y ejemplos

DEFINICIÓN 32. *Un conjunto simplicial es una terna (K, δ, σ), donde K es una familia de conjuntos indicada en los naturales $K = \{K_n\}_{n=0}^{\infty}$, δ es una familia de funciones $\delta_i^n : K_n \longrightarrow K_{n-1}$ con $n \in \mathbb{N}^+$ y $0 \leq i \leq n$ y σ es una familia de funciones $\sigma_i^n : K_n \longrightarrow K_{n+1}$ con $n \in \mathbb{N}$ y $0 \leq i \leq n$, y estas familias de funciones satisfacen las siguientes igualdades:*

$$
\begin{array}{lr}
\delta_i^{n-1}\delta_j^n = \delta_{j-1}^{n-1}\delta_i^n & 0 \leq i < j \leq n \\
\sigma_i^{n+1}\sigma_j^n = \sigma_{j+1}^{n+1}\sigma_i^n & 0 \leq i \leq j \leq n \\
\delta_i^{n+1}\sigma_j^n = \sigma_{j-1}^{n-1}\delta_i^n & 0 \leq i < j \leq n \\
\delta_j^{n+1}\sigma_j^n = 1_{K_n} & 0 \leq j \leq n \\
\delta_{j+1}^{n+1}\sigma_j^n = 1_{K_n} & 0 \leq j \leq n \\
\delta_i^{n+1}\sigma_j^n = \sigma_j^{n+1}\delta_{i-1}^n & 1 \leq j+1 < i \leq n+1
\end{array}
$$

Los elementos de K_n se llaman n simplejos, las funciones δ_i caras y las funciones σ_i degeneraciones.

El concepto de conjunto simplicial no es intuitivo a primera instancia, pero trabajandosele un poco puede irse entiendo como una idea natural. Se empieza definiendo $[n] := \{0, ..., n\}$ para todo natural n. Para todo natural positivo n e $i = 0, ...n$ se define $d_i^n : [n-1] \longrightarrow [n]$ como:

$$d_i^n(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < i \\ x+1 & \text{si } x \geq i \end{cases}$$

Para todo natural n e $i = 0, ..., n-1$ se define $s_i^n : [n+1] \longrightarrow [n]$

$$s_i^n(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq i \\ x-1 & \text{si } x > i \end{cases}$$

A las funciones s_i^n se les llama codegeneraciones y a las funciones d_i^n se les llama cocaras. Estas funciones cumplen unas identidades que se llaman identidades cosimpliciales.

$$
\begin{array}{lr}
d_j^{n+1} d_i^n = d_i^{n+1} d_{j-1}^n & \text{si } i < j \\
s_j^n s_i^{n+1} = s_i^n s_{j+1}^{n+1} & \text{si } i \leq j \\
d_j^{n-1} s_i^n = \begin{cases} s_i^{n-1} d_{j-1}^{n-2} & \text{si } i < j \\ 1 & \text{si } i = j \text{ o } i = j+1 \\ s_{i-1}^{n-1} d_j^{n-2} & \text{si } i > j+1 \end{cases} & \text{si } n \geq 1
\end{array}
$$

PROPOSICIÓN 29. *Se cumplen las identidades cosimpliciales.*

DEMOSTRACIÓN. 1) $d_j^{n+1} d_i^n = d_i^{n+1} d_{j-1}^n$ si $i < j$.

Si $x < i$, entonces $d_j^{n+1}(d_i^n(x)) = d_j^{n+1}(x) = x$ y $d_i^{n+1}(d_{j-1}^n(x)) = d_i^{n+1}(x) = x$, por lo que $d_j^{n+1} d_i^n(x) = d_i^{n+1} d_{j-1}^n(x)$.

Si $i \leq x < j-1$ entonces $d_j^{n+1}(d_i^n(x)) = d_j^{n+1}(x+1) = x$ y $d_i^{n+1}(d_{j-1}^n(x)) = d_i^{n+1}(x) = x+1$, por lo que $d_j^{n+1} d_i^n(x) = d_i^{n+1} d_{j-1}^n(x)$.

Si $j-1 \leq x$ entonces $d_j^{n+1}(d_i^n(x)) = d_j^{n+1}(x+1) = x+2$ y $d_i^{n+1}(d_{j-1}^n(x)) = d_i^{n+1}(x+1) = x+2$, por lo que $d_j^{n+1} d_i^n(x) = d_i^{n+1} d_{j-1}^n(x)$.

Se observa que para todo n natural, $[n]$ tiene el buen orden inducido por los naturales, es decir, $0 \leq 1 \leq 2 \leq ... \leq n$. Por lo cual se puede hablar de funciones monótonas. Una función monótona $f : [n] \longrightarrow [m]$ donde n y m son naturales, es una función que satisface: si $x \leq y$ entonces $f(x) \leq f(y)$. □

EJEMPLO 5. *Se considera los simplejos:*

$$\Delta_n = \{(x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R} \mid \sum_{i=0}^{n} x_i = 1, x_i \geq 0 \forall i = 0, \ldots, n\}$$

donde n es un natural. Sea X un espacio topológico, se considera $S_n(X)$ el conjunto de las funciones continuas de Δ_n en X donde n es un natural. Así es que de esta forma se obtiene un conjunto indicado en los naturales, a este conjunto se le llama el conjunto de los n-simplejos singulares de X. Solo basta decir quienes serán las familias de funciones y ver que cumplen las igualdades.

Se observa que δ_i^n va de $S_n(X)$ en $S_{n-1}(X)$ por lo que un elemento $f \in S_n(X)$ es una función continua $f : \Delta_n \longrightarrow X$ y se le debe de asignar una función continua $\delta_i^n(f) \in S_{n-1}(X)$ que va de Δ_{n-1} en X.

Sea $(x_0, \ldots, x_{n-1}) \in \Delta_{n-1}$. Se pone:

$$\delta_i^n(f)(x_0, \ldots, x_{n-1}) = f(x_0, \ldots, x_{i-1}, 0, x_i, \ldots, x_{n-1})$$

De manera análoga, se tiene que para $(x_0,\dots,x_{n+1})\in\Delta_{n+1}$*:*

$$\sigma_i^n(f)(x_0,\dots,x_{n+1})=f(x_0,\dots,x_{i-1},x_i+x_{i+1},x_{i+2},\dots,x_{n+1})$$

Se hace notar que

$$(x_0,\dots,x_{i-1},0,x_i,\dots,x_{n-1}),(x_0,\dots,x_{i-1},x_i+x_{i+1},x_{i+2},\dots,x_{n+1})\in\Delta_n$$

por lo que ambas funciones estan bien definidas. Más aún se pueden crear dos familias de funciones auxiliares, las primeras $d_i^n\colon\Delta_{n-1}\longrightarrow\Delta_n$ con $n\geq 1$ y $0\leq i\leq n$ dadas por:

$$d_i^n(x_0,\dots,x_{n-1})=(x_0,\dots,x_{i-1},0,x_i,\dots,x_{n-1})$$

y las segundas $s_i^n\colon\Delta_{n+1}\longrightarrow\Delta_n$ con $n\in\mathbb{N}$ y $0\leq i\leq n$ dadas por

$$s_i^n(x_0,\dots,x_{n+1})=(x_0,\dots,x_{i-1},x_i+x_{i+1},x_{i+2},\dots,x_{n+1})$$

Es inmediato que $\delta_i^n(f)=f\circ d_i^n$ y $\sigma_i^n(f)=f\circ s_i^n$, por lo que para probar que $\delta_i^n(f)$ y $\sigma_i^n(f)$ son continuas bastaría ver que d_i^n y s_i^n son continuas, ya que composición de continuas es continua. Primero se ve que d_i^n es continua, ya que preserva distancias. Se tiene que s_i^n es continua, por que es el producto de identidades con la suma. Se procede a demostrar las identidades simpliciales:

Sean $0\leq i<j\leq n$, entonces $\delta_i^{n-1}\delta_j^n(f)=f\circ d_j^n\circ d_i^{n-1}$ y $\delta_{j-1}^{n-1}\delta_i^n(f)=f\circ d_i^n\circ d_{j-1}^{n-1}$ para $f\in S_n(X)$. Por lo que basta demostrar que $d_j^n\circ d_i^{n-1}=d_i^n\circ d_{j-1}^{n-1}$. Sea $(x_0,\dots,x_{n-2})\in\Delta_{n-2}$. Haciendo ambas cuentas:

$$\begin{aligned}d_j^n\circ d_i^{n-1}(x_0,\dots,x_{n-2})&=d_j^n(x_0,\dots,x_{i-1},0,x_i,\dots,x_{n-2})\\&=(x_0,\dots,x_{i-1},0,x_i,\dots,x_{j-2},0,x_{j-1},\dots,x_{n-2})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}d_i^n\circ d_{j-1}^{n-1}(x_0,\dots,x_{n-2})&=d_i^n(x_0,\dots,x_{j-2},0,x_{j-1},\dots,x_{n-2})\\&=(x_0,\dots,x_{i-1},0,x_i,\dots,x_{j-2},0,x_{j-1},\dots,x_{n-2})\end{aligned}$$

Sean $0\leq i\leq j\leq n$, entonces $\sigma_i^{n+1}\sigma_j^n(f)=f\circ s_j^n\circ s_i^{n+1}$ y $\sigma_{j+1}^{n+1}\sigma_i^n(f)=f\circ s_i^n\circ s_{j+1}^{n+1}$ para $f\in S_n(X)$. Por lo que basta demostrar que $s_j^n\circ s_i^{n+1}=s_i^n\circ s_{j+1}^{n+1}$. Sea $(x_0,\dots,x_{n+2})\in\Delta_{n+2}$. Haciendo ambas cuentas:

$$\begin{aligned}s_j^n\circ s_i^{n+1}(x_0,\dots,x_{n+2})&=s_j^n(x_0,\dots,x_{i-1},x_i+x_{i+1},x_{i+2},\dots,x_{n+2})\\&=\begin{cases}(x_0,\dots,x_{i-1},x_i+x_{i+1}+x_{i+2},\dots,x_{n+2}) & \text{si } i=j\\(x_0,\dots,x_{i-1},x_i+x_{i+1},\dots,x_{j+1}+x_{j+2},\dots,x_{n+2}) & \text{si } i<j\end{cases}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}s_i^n\circ s_{j+1}^{n+1}(x_0,\dots,x_{n+2})&=s_i^n(x_0,\dots,x_j,x_{j+1}+x_{j+2},x_{i+2},\dots,x_{n+2})\\&=\begin{cases}(x_0,\dots,x_{i-1},x_i+x_{i+1}+x_{i+2},\dots,x_{n+2}) & \text{si } i=j\\(x_0,\dots,x_{i-1},x_i+x_{i+1},\dots,x_{j+1}+x_{j+2},\dots,x_{n+2}) & \text{si } i<j\end{cases}\end{aligned}$$

Sean $0\leq i<j\leq n$, entonces $\delta_i^{n+1}\sigma_j^n(f)=f\circ s_j^n\circ d_i^{n+1}$ y $\sigma_{j-1}^{n-1}\delta_i^n(f)=f\circ d_i^n\circ s_{j-1}^{n-1}$ para $f\in S_n(X)$. Por lo que basta demostrar que $s_j^n\circ d_i^{n+1}=d_i^n\circ s_{j-1}^{n-1}$. Sea $(x_0,\dots,x_n)\in\Delta_n$. Haciendo ambas cuentas:

$$\begin{aligned} s_j^n \circ d_i^{n+1}(x_0,\ldots,x_n) &= s_j^n(x_0,\ldots,x_{i-1},0,x_i,\ldots,x_n) \\ &= (x_0,\ldots,x_{i-1},0,\ldots,x_{j-1}+x_j,\ldots,x_n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_i^n \circ s_{j-1}^{n-1}(x_0,\ldots,x_n) &= d_i^n(x_0,\ldots,x_{j-1}+x_j,\ldots,x_n) \\ &= (x_0,\ldots,x_{i-1},0,\ldots,x_{j-1}+x_j,\ldots,x_n) \end{aligned}$$

A este conjunto simplicial se le conoce como el complejo singular total de X.

EJEMPLO 6. *Un complejo simplicial abstracto Δ sobre un conjunto X es una familia de de subconjuntos finitos de X no vacíos, tal que si $\sigma \in \Delta$ y $\tau \subseteq \sigma$ con $\tau \neq \emptyset$ entonces $\tau \in \Delta$.*

Para un complejo simplicial abstracto Δ y n es un natural, se pone:

$$K_n = \{(x_0,\ldots,x_n) \in X^{n+1} \mid \{x_0,\ldots,x_n\} \in \Delta\}$$

Las funciones cara están dada por:

$$\delta_i^n(x_0,\ldots,x_n) = (x_0,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n)$$

Las funciones degeneración están dadas por:

$$\sigma_i^n(x_0,\ldots,x_n) = (x_0,\ldots,x_i,x_i,\ldots,x_n)$$

EJEMPLO 7. *Sea X un espacio topológico y $\mathscr{G}$ una cubierta abierta de X, se define $N(\mathscr{G})$ como el conjunto de todos los subconjuntos finitos $\mathscr{K}$ de $\mathscr{G}$ no vacíos tales que $\bigcap \mathscr{K} \neq \emptyset$. Por lo que $N(\mathscr{G})$ induce un conjunto simplicial como en el exampleplo anterior.*

EJEMPLO 8. *Sea P un orden parcial. Para n un natural se pone:*

$$P_n = \{(x_0,\ldots,x_n) \in P^{n+1} \mid x_i \leq x_{i+1} \forall i = 0,\ldots,n-1\}$$

Capítulo 4

Realización Geométrica

1.

Capítulo 5

Complejos Simpliciales

1.

Se dice que un conjunto simplicial es un complejo fuertemente de Kan si $x_0,...,x_n \in X_n$ son tales que $\delta_i^n(x_j) = \delta_{j-1}^n(x_i)$ para $i < j$ entonces existe $x \in X_{n+1}$ tal que $\delta_k^{n+1}(x) = x_k$ para $k = 0,...,n$.

Ésta defición puede parece un poquito demasiado artificial, pero, se puede pensar de éste modo. Si se empieza con un elemento x de X_n, se puede poner $x_k = \delta_k^{n+1}(x)$ para $k = 0,...,n$, la primera identidad simplicial dice que $\delta_i^n(x_j) = \delta_{j-1}^n(x_i)$ para $i < j$, por lo que es como una especie de recíproco, o una especie suprayectividad, no todos vendrán de alguien, pero si se cumple cierta condición se puede asegurar que se viene de alguien.

Se procede a analizar el ejemplo semicanónico. Sean $x^0,...,x^n \in R_n$ que satifacen $\delta_i^n(x^j) = \delta_{j-1}^n(x^i)$ para $i < j$, si se pone a $x_k = (x_0^k,...,x_n^k)$,

$$(x_0^j,...,x_{i-1}^j,x_i^j + x_{i+1}^j,x_{i+2}^j,...,x_n^j) = (x_0^i,..,x_{j-2}^i,x_{j-1}^i + x_j^i,x_{j+1}^i,...,x_n^i)$$

para $i < j$. Es deseable analizar éste ejemplo a fondo, ya que es el canónico. Primero como $i < j \leq n$, se observa que hay $\binom{n+1}{2}$. Se empieza con el caso cuando $j = n$ e $i = n-1$. En éste caso la igualdad es:

$$(x_0^j,...,x_{i-1}^j,x_i^j + x_{i+1}^j) = (x_0^i,..,x_{j-2}^i,x_{j-1}^i + x_j^i)$$

De ésta igualdad se deduce que $x_k^i = x_k^j$ para $k = 0,...,n-2$ y $x_{n-1}^i + x_n^i = x_{n-1}^j + x_n^j$. . Esto da intuición a pensar sólo en los consecutivos, es decir, se toma $j = i+1 \leq n$, de aquí se tiene

$$\begin{aligned}
(x_0^j,...,x_{i-1}^j,x_i^j + x_{i+1}^j,x_{i+2}^j,...,x_n^j) &= (x_0^i,..,x_{j-2}^i,x_{j-1}^i + x_j^i,x_{j+1}^i,...,x_n^i) \\
&= (x_0^i,..,x_{(i+1)-2}^i,x_{(i+1)-1}^i + x_{i+1}^i,x_{(i+1)+1}^i,...,x_n^i) \\
&= (x_0^i,..,x_{i-1}^i,x_i^i + x_{i+1}^i,x_{i+2}^i,...,x_n^i)
\end{aligned}$$

Lo que significa que $x_k^i = x_k^j$ para $k = 0,...,i-1,i+2,...,n$ y $x_i^i + x_{i+1}^i = x_i^j + x_{i+1}^j$. En el caso de que $i < j-1$ se tiene que la igualdad implica que: $x_k^j = x_k^i$ para $k = 0,..,i-1,j+2,...,n$, $x_i^j + x_{i+1}^j = x_i^i$, $x_j^j = x_{j-1}^i + x_j^i$ y $x_k^j = x_{k-1}^i$ para $k = i+2,...,j-1$.

Se procede a analizar en casos especiales, por ejemplo para $n = 2$, se tienen tres 2-simplejos, $x^0 = (x_0^0,x_1^0,x_2^0)$, $x^1 = (x_0^1,x_1^1,x_2^1)$ y $x2 = (x_0^2,x_1^2,x_2^2)$. Cómo $n = 2$, se tienen $\binom{3}{2} = 3$ igualdades que checar, $0 < 1, 0 < 2$ y $1 < 2$, la primera es $\delta_0^2(x^1) = \delta_0^2(x^0)$ que implica:

$$(x_0^1 + x_1^1,x_2^1) = (x_0^0 + x_1^0,x_2^0)$$

que en un sistemas de ecuaciones dice:

$$\begin{cases} x_0^1 + x_1^1 & = x_0^0 + x_1^0 \\ x_2^1 & = x_2^0 \end{cases}$$

la segunda es $\delta_0^2(x^2) = \delta_1^2(x^0)$ que implica:

$$(x_0^2 + x_1^2, x_2^2) = (x_0^0, x_1^0 + x_2^0)$$

que en un sistemas de ecuaciones dice:

$$\begin{cases} x_0^2 + x_1^2 & = x_0^0 \\ x_2^2 & = x_1^0 + x_2^0 \end{cases}$$

la tercera es $\delta_1^2(x^2) = \delta_1^2(x^1)$ que implica:

$$(x_0^2, x_1^2 + x_2^2) = (x_0^1, x_1^1 + x_2^1)$$

que en un sistemas de ecuaciones dice:

$$\begin{cases} x_0^2 & = x_0^1 \\ x_1^2 + x_2^2 & = x_1^1 + x_2^1 \end{cases}$$

Si se juntan los sistemas de ecuaciones se tiene

$$\begin{cases} x_0^1 + x_1^1 & = x_0^0 + x_1^0 \\ x_2^1 & = x_2^0 \\ x_0^2 + x_1^2 & = x_0^0 \\ x_2^2 & = x_1^0 + x_2^0 \\ x_0^2 & = x_0^1 \\ x_1^2 + x_2^2 & = x_1^1 + x_2^1 \end{cases}$$

Es un sistema de 3 ecuaciones en 9 incógnitas, que no se sabe si tiene solución pero en caso de tener solución lo que interesa es encontrar $x = (x_0, x_1, x_2, x_3)$ un 3-simplejo tal que $\delta_k^n(x) = x_k$ para $k = 0, 1, 2$, esto es,

$$(x_0 + x_1, x_2, x_3) = (x_0^0, x_1^0, x_2^0)$$
$$(x_0, x_1 + x_2, x_3) = (x_0^1, x_1^1, x_2^1)$$
$$(x_0, x_1, x_2 + x_3) = (x_0^2, x_1^2, x_2^2)$$

Como x_0, x_1 y x_2 están dados se elige $x = (x_0^2, x_1^2, x_1^0, x_2^0)$. Se procede a verificar que éste x cumple los prometido:

$$\delta_0^2(x) = (x_0^2 + x_1^2, x_1^0, x_2^0) = (x_0^0, x_1^0, x_2^0)$$

Esto por la tercera ecuación del sistema de 6 ecuaciones.

$$\delta_1^2(x) = (x_0^2, x_1^2 + x_1^0, x_2^0) = (x_0^1, x_1^1, x_2^1)$$

Se ve que por la ecuación 5, $x_0^2 = x_0^1$, por la ecuación 2, $x_2^0 = x_2^1$, ahora se toma $x_1^2 + x_1^0 = x^2 + (x_2^2 - x_2^0)$ por que $x_1^0 = x_2^2 - x_2^0$ de la ecuación 4, se sigue con aplicar la ecuación 6 y luego la 2 para obtener $x_1^2 + x_1^0 = x_1^1$.

Ahora que se ha creado un poco de intuición de lo que hay que demostrar se puede plantear el caso general. Se quiere encontrar $x=(x_0,...,x_{n+1})$ tal que $\delta_k^{n+1}(x)=x^k$, es decir, $(x_0,...,x_{k-1},x_k+x_{k+1},x_{k+2},...,x_{n+1})=(x_0^k,...,x_n^k)$, esto puesto en sistema de ecuaciones es:

$$\begin{cases} x_0 & = x_0^k \\ \vdots & \quad \vdots \\ x_{k-1} & = x_{k-1}^k \\ x_k + x_{k+1} & = x_k^k \\ x_{k+2} & = x_{k+1}^k \\ \vdots & \quad \vdots \\ x_{n+1} & = x_n^k \end{cases}$$

A éste sistema se le llamará Sk, es un sistema en con $n+1$ ecuaciones y la i-ésima ecuación se le llamará $Sk-i$. Se nota que estos sistemas dicen quien debería de ser un candidato a X, es decir, de $S2-0$ y $S2-1$ se tiene que $x_0=x_0^2$ y $x_1=x_1^2$, de $S0$ se tiene que $x_i=x_{i-1}^0$ para $i=2,...,n+1$. Ahora se debe de demostrar que con está elección se satisfacen los sistemas de ecuaciones Sk para $k=0,...,n$, para esto, se había visto que se tenían dos familias de sistemas la primera es para cuando $j=i+1$, se tiene:

$$\begin{cases} x_0^j & = x_0^i \\ \vdots & \quad \vdots \\ x_{k-1}^j & = x_{k-1}^i \\ x_i^j + x_{i+1}^j & = x_i^i + x_{i+1}^i \\ x_{i+2}^j & = x_{i+1}^i \\ \vdots & \quad \vdots \\ x_{n+1}^j & = x_n^i \end{cases}$$

La segunda es:

$$\begin{cases} x_0^j & = x_0^i \\ \vdots & \quad \vdots \\ x_{i-1}^j = & x_{i-1}^i \\ x_i^j + x_{i+1}^j & = x_i^i \\ x_{i+2}^j & = x_{i+1}^i \\ \vdots & \quad \vdots \\ x_{j-1}^j & = x_{j-2}^i \\ x_j^j & = x_{j-1}^i + x_j^i \\ x_{j+1}^j & = x_{j+1}^i \\ \vdots & = \quad \vdots \\ x_n^j & = x_n^i \end{cases}$$

para cuando $i<j-1$.

Capítulo 6

Grupos de Homotopía

1.

Para toda n natural, se puede definir una relación en X_n, se dice que $x, x' \in X_n$ son homotópico si existe $y \in X_{n+1}$ tal que $\delta_{n-1}^{n+1}(y) = x$, $\delta_n^{n+1}(y) = x'$, $\delta_i^n(x) = \delta_i^n(x')$ para $i = 0, \ldots, n-1$ y $\delta_i^{n+1}(y) = \sigma n - 1_{n-1}(\delta_i^n(x)) = \sigma_{n-1}^{n-1}(\delta_i^n(x'))$ para $i = 0, \ldots, n-2$, se observa que la última igualdad sobra, pero es bueno que se tenga presente, otra observación pertinente es que ésta relación en X_0 sólo se limita a solicitar las dos primeras igualdades. Al elemento y se llama una homotopía de x a x'. Si x y x' son homotópicos se denotará por $x \sim x'$, y si se quiere resaltar la homotopía se escribirá $x \overset{y}{\sim} x'$.

PROPOSICIÓN 30. *Si el conjunto simplicial es un complejo fuertemente de Kan, entonces $\sim$ es una relación de equivalencia en X_n, para toda n natural.*

DEMOSTRACIÓN. Sea n un natural,

Reflexividad) Sea $x \in X_n$, se pone $y = \sigma_n^n(x)$. Primero $\delta_n^{n+1}(y) = \delta_n^{n+1}(\sigma_n^n(x)) = x$ y $\delta_{n-1}^{n+1}(y) = \delta_{n-1}^{n+1}(\sigma_n^n(x)) = x$, esto es por la identidades simpliciales. Obviamente $\delta_i^n(x) = \delta_i^n(x)$ para $i = 0, \ldots, n-1$. Finalmente $\delta_i^{n+1}(y) = \delta_i^{n+1}(\sigma_i^n(x)) = \sigma_{n-1}^{n-1}(\delta_i^n(x))$ para $i = 0, \ldots, n-2$. $\square$

Capítulo 7

Grupos Abelianos

1. Morfismos de Grupos

PROPOSICIÓN 31. *Sea G un grupo abeliano y $H_1, H_2, K_1, K_2, K \leq G$ son tales que $G = H_1 \oplus H_2$, $K = K_1 \oplus K_2$, $K \leq G$, $K_1 \leq H_1$ y $K_2 \leq H_2$. Entonces $G/K \cong (H_1/K_1) \oplus (H_2/K_2)$.*

2. Grupo Libre

Capítulo 8

Homotopía

1. Morfismos de Grupos

PROPOSICIÓN 32. *Sea G un grupo abeliano y $H_1, H_2, K_1, K_2, K \leq G$ son tales que $G = H_1 \oplus H_2$, $K = K_1 \oplus K_2$, $K \leq G$, $K_1 \leq H_1$ y $K_2 \leq H_2$. Entonces $G/K \cong (H_1/K_1) \oplus (H_2/K_2)$.*

2. Grupo Libre