COMBINATORÍA

FRANK MURPHY-HERNANDEZ

Cuando nos referimos a combinatoría nos estamos refiriendo a la rama más vieja de ésta que es la combinatoría enumerativa, que estudia como **contar** ciertas configuraciones. Por lo que la pregunta siempre será, ¿De cuántas formas?. Como lo que se busca es contar supondremos que todos los conjuntos son finitos.

Recordemos que para n natural, $I_n = \{0, ..., n-1\}$ e $I_0 = \emptyset$.

1. Principios de conteo

Es necesario desarrollar técnicas de conteo basadas en lo que ya hemos aprendido para darle una forma matemáticamente correcta a dichas técnicas.

1.1. **Principio de la suma.** Si P se puede hacer de n formas , Q se puede hacer de m formas y no se puede hacer P y Q a la vez entonces P o Q se puede hacer de $n+m$ formas. Formulado correctamente.

Proposición 1. *Principio de la Suma*
Sean A y B conjuntos disjuntos , $A \cap B = \emptyset$, tales que A tiene n elementos y B tiene m, entonces $A \cup B$ tiene $n+m$ elementos. Esto es $|A \cup B| = |A| + |B|$, si $A \cap B = \emptyset$.

Demostración. Como A tiene n elementos, existe una función biyectiva $f : I_n \longrightarrow A$, y análogamente como B tiene m elementos, existe una función biyectiva $g : I_m \longrightarrow B$, vamos a construir una función biyectiva $h : I_{m+n} \longrightarrow A \cup B$, dada por

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{, si } 0 \leq x < n \\ g(x-n) & \text{, si } n \leq x < m+n \end{cases}$$

Primero hay que ver que h es efectivamente una función, PENDIENTE pero no urgente.

Veamos que h es una función biyectiva, primero que es inyectiva, sean $x, y \in I_{n+m}$ tales que $x \neq y$ y buscaremos demostrar que $h(x) \neq h(y)$. Esto lo demostraremos por casos, y sin perdida de generalidad se supondrá $x < y$.

Caso 1. $x, y \in I_n$.

Si $x, y \in I_n$ entonces $h(x) = f(x)$ y $h(y) = f(y)$, por hipótesis f es inyectiva y como $x \neq y$ se tiene que $f(y) \neq f(x)$. Por lo que $h(y) \neq h(x)$.

Caso 2. $x \in I_n, y \in I_{m+n} \setminus I_n$.

Si $x \in I_n$ y $y \in I_{m+n} \setminus I_n$, entonces $h(x) = f(x) \in A$ y $h(y) = g(y-n) \in B$, como $A \cap B = \emptyset$ se concluye que $f(x) \neq g(y-n)$. Por lo que $h(y) \neq h(x)$.

Caso 3. $x, y \in I_{m+n} \setminus I_n$.

Si $x, y \in I_{m+n} \setminus I_n$ entonces $h(x) = g(x-n)$ y $h(y) = g(y-n)$, por hipótesis g es inyectiva y como $x \neq y$ se tiene que $g(y-n) \neq g(x-n)$. Por lo que $h(y) \neq h(x)$.

Ahora veamos que es suprayectiva, sea $y \in A \cup B$. Otra vez por casos.

Caso 1. $y \in A$

Si $y \in A$, entonces existe $x \in I_n$ tal que $f(x) = y$, pero $h(x) = f(x) = y$.

Caso 2. $y \in B$

Si $y \in B$, entonces existe $x \in I_m$ tal que $g(x) = y$, notemos que $x + n \in I_{m+n} \setminus I_n$, así que $h(x+n) = g((x+n)-n) = g(x) = y$.

Por lo tanto h es suprayectiva y por lo tanto biyectiva.$\square$

Ahora un ejemplo sencillo de como se puede aplicar

Ejemplo 1. *Estamos en una plaza comercial, nos da un antojo, nuestras opciones están entre el Starbucks y el KFC, si el Starbucks nos ofrece 28 posibilidades para nuestra bebida y KFC nos ofrece 17 para nuestro pollo, tenemos 45 opciones para satisfacer nuestro antojo. La hipótesis de que no pueden pasar los dos a la vez, es que no hay quien coma pollo frito con café.*

Este principio se puede generalizar para varias opciones, es decir, si tenemos opciones P_i con $i = 1, ..., n$ tales que cualesquiera dos no pueden pasar a la vez y cada P_i tiene k_i formas de pasar entonces las formas en que puede pasar alguno de los P_i es $k_1 + ... + k_n$.

Tarea Moral 1. *Sean A_i con $i = 1, ..., n$ conjuntos tales que A_i tiene k_i elementos y si para $i, j = 1, ...n$ con $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \emptyset$. Demuestre $A_1 \cup ... \cup A_n$ tiene $k_1 + ... + k_n$ elementos.*

1.2. **Principio de Inclusión-Exclusión.** Este principio es una generalización del pasado, lo que nos dice es que si P se puede hacer de n formas, Q se puede hacer de m formas , P y Q se puede hacer de k formas entonces P o Q se puede hacer de $n + m - k$ formas.

Proposición 2. *Principio de Inclusión-Exclusión*

Sean A y B conjuntos tales que A tiene n elementos , B tiene m elementos y $A \cap B$ tiene k elementos, entonces $A \cup B$ tiene $n + m - k$ elementos. Esto es $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

Demostración. Notemos que $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$ y $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$, esto para aplicar el principio de la suma, así se tiene $|A \cup B| = |A \cup (B \setminus A)| = |A| + |(B \setminus A)|$. Por otro lado, consideremos que $(A \cap B) \cup (B \setminus A) = B$ y que $(A \cap B) \cap (B \setminus A) = \emptyset$, por lo que se puede aplicar el principio de la suma para obtener $|B| = |A \cap B| + |B \setminus A|$. Por último se tiene que $|A \cup B| = |A \cup (B \setminus A)| = |A| + |(B \setminus A)| + |A \cap B| - |A \cap B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.□

Claramente la demostración se sigue del principio de la suma, ahora un ejemplo

Ejemplo 2. *Una compradora busca unos zapatos en un centro comercial, si en Liverpool hay 47 pares distintos , en Palacio de Hierro hay 53 pares distintos y coinciden en 24 pares, la compradora tiene 76 pares para escoger.*

Tarea Moral 2. *Demuestre por inducción que para A_i conjuntos con $i = 1, ..., n$ se cumple $|\bigcup_{i=1}^n A_i| = \sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| + ... + (-1)^{n+1} |A_1 \cap ... \cap A_n|$.*

1.3. **Principio de la Multiplicación.** Si P se puede hacer de n formas y Q se puede hacer de m formas entonces las formas de hacer P seguido por Q es nm. Formulado correctamente.

Proposición 3. *Principio de la Multiplicación*
Sean A y B conjuntos tales que A tiene n elementos y B tiene m, entonces $A\times B$ tiene nm elementos. Esto es $|A\times B| = |A||B|$.

Demostración

Por hipótesis existen $f : I_n \longrightarrow A$ y $g : I_m \longrightarrow B$ funciones biyectivas, buscamos una función $h : I_{nm} \longrightarrow A\times B$ biyectiva. La definimos como sigue $h(k) = (f(r), g(s))$ donde $mr \leq k < m(r+1)$ con $r \in I_n$ y $s = k-mr$. Primero veamos que es inyectiva, sean $k, k' \in I_{nm}$ con $k \neq k'$, por casos.

Caso 1 $mr \leq k, k' < m(r + 1)$

Si $mr \leq k, k' < m(r+1)$ entonces $k-mr \neq k'-mr$, entonces $g(k-mr) \neq g(k'-mr)$, por lo que $(f(r), g(k-mr)) \neq (f(r), g(k'-mr))$. Por lo tanto $h(k) \neq h(k')$.

Caso 2 $mr \leq k < m(r + 1)$ y $mr' \leq k' < m(r' + 1)$ con $r \neq r'$.

Si $mr \leq k < m(r + 1)$ y $mr' \leq k' < m(r' + 1)$ con $r \neq r'$ entonces $f(r) \neq f(r')$, por lo que $(f(r), g(k-mr)) \neq (f(r'), g(k-mr'))$. Por lo tanto $h(k) \neq h(k')$.

Ahora para la suprayectividad, sea $(x, y) \in A \times B$ y consideramos que existen $r \in I_n$ y $s \in I_m$ tales que $f(r) = x$ y $g(s) = y$, notemos que $k = mr+s$ hace el truco ya que $mr \leq k < m(r + 1)$ y $k - mr = s$, por lo que $h(k) = (f(r), g(s)) = (x, y)$. Por lo tanto h es suprayectiva. Por lo tanto biyectiva.□

Para seguir con el esquema, un ejemplo:

Ejemplo 3. *Si van a Nutrisa , piden un helado, se tienen 6 cereales diferentes y 9 topping diferentes, entonces se tienen 54 combinaciones diferentes para su helado.*

Tarea Moral 3. *Demuestre por inducción que para A_i conjuntos con $i = 1, ..., n$ se cumple $|\prod_{i=1}^{n} A_i| = \prod_{i=1}^{n} |A_i|$.*

1.4. **Principio del Palomar.** Si se tiene un palomar n lugares y se tienen m palomas, con $n < m$, entonces al menos palomas comparten lugar. Formulado correctamente:

Proposición 4. *Sean A y B conjuntos con n elementos y m elementos respectivamente, si $n < m$ entonces no existe $f : B \longrightarrow A$ inyectiva.*

Demostración Por inducción sobre el número de elementos de A y para cualquier cardinalidad mayor estricta a la de A, cuando $n = 0$ se tiene que $A = \emptyset$, y como $B \neq \emptyset$ no existe una función de B en A, en particular no existe una función inyectiva.

Si A tiene $n+1$ elementos con $n+1 < m$, y sea $f : B \longrightarrow A$ inyectiva , escogemos $a \in imf$ con $f(b) = a$. Entonces se induce una función inyectiva de $g : B \setminus \{b\} \longrightarrow A \setminus \{a\}$ dada por $g(x) = f(x)$. Pero $|A \setminus \{a\}| < |B \setminus \{b\}|$ con $|A \setminus \{a\}| = n$ y por hipótesis de inducción esto no puede pasar, es una contradicción, así que no existe f inyectiva. $\square$

Lo último no es mas que la contrapuesta de la definición de tener cardinalidad menor o igual , es decir, si existe $f : B \longrightarrow A$ inyectiva entonces $|B| \leq |A|$. Por lo que se tiene $|A| < |B|$ entonces no existe $f : B \longrightarrow A$ inyectiva. De aquí es un caso particular para cuando $|A| = n$ y $|B| = m$, lo cual demuestra que nuestra definición es buena, ya que generaliza el caso finito.

Ejemplo 4. *Un humano tiene en promedio 150,000 cabellos, así se puede suponer exagerando que a lo más tiene 1,000,000. En el D.F. hay más de 8,000,000 de habitantes, si consideramos la función que a cada habitante le asigna su número de cabellos, por el principio del palomar esta función no es inyectiva, es decir, hay dos personas que tienen el mismo número de cabellos.*

Tarea Moral 4. *Sean A y B conjuntos con n elementos y m elementos respectivamente, si $nr < m$ entonces para toda función $f : B \longrightarrow A$ existe $a \in A$ con $f^{-1}(a)$ con mas de r elementos. Escrito de una forma más entendible, si se tienen más de nr cánicas , n urnas y se reparten las cánicas entre las urnas entonces alguna urna tiene mas de r cánicas.*

Tarea Moral 5. *Sea $f : A \longrightarrow B$ una función con $|A| = |B|$. Son equivalentes:*

(1) *f es inyectiva.*

(2) f *es biyectiva.*

(3) f *es suprayectiva.*

2. Cuestiones algo o demasiado técnicas

Empecemos haciendo una observación y pregunta a la vez. Para A conjunto (no necesariamente finito) y n natural, ¿Cómo definir A^n?, lo natural es definirlo recursivamente como $A^1 = A$ y $A^{n+1} = A^n \times A$, el problema es que los elementos de A^n no son n-éneadas sino parejas y hay problema como asociamos puesto que $A \times (A \times A)$ es diferente de $(A \times A) \times A$, aparte que como definir A^0. Para encontrar una solución bastante convincente y que generaliza el concepto definimos $A^n := A^{I_n}$ (recordemos que para B y C conjuntos $B^C := \{f : C \longrightarrow B \mid f \text{ es función }\}$), veamos que un elemento es A^n ahora es una función $f : I_n \longrightarrow A$ y que otro elemento $: I_n \longrightarrow A$ es igual a f sii tienen la misma regla de corresponcia, es decir, si $f(0) = g(0), f(1) = g(1), ..., f(n-1) = g(n-1)$, por lo que podemos llamar a $f(0)$ la primer entrada, a $f(1)$ la segunda entrada, ..., a $f(n-1)$ la n-ésima entrada. Entonces dos elementos de A^n son iguales sii son iguales entrada por entrada. Aparte $A^0 = \{\emptyset\}$ puesto que la única función del vacío en cualquier conjunto es la funció vacía.

Ejercicios

1. El alfabeto hawaiano consiste de de 12 letras. ¿Cuántas palabras de seis letras pueden hacerse?.

2. Layka esta haciendo el sistema autentificación de un sitio en la red. El sabe que es mas segura un password si contiene letras, números y símbolos. Sin emabrago, no entiende bien por que el sistema es vencido más facílmente si se específica la posición de cada tipo de caracter. Decide que en su sistema los passwords empezaran con 3 letras, seguidas por 2 dígitos , luego 1 simbolo de una lista de 10 simbolos, seguido por 2 letras mayúsculas, de nuevo 1 dígito para terminar con 1 simbolo. ¿Cuántos passwords hay con éstas condiciones?¿Cuántos passwords hay que sean cadenas de letras mayúsculas o minúsculas, dígitos y simbolos?.

3. En una carrera hay tres corridas de caballos. La primera con 10, la segunda y la tercera con 6 caballos. Se gana la apuesta cuando se predice los primeros 3 lugares de cada corrida. ¿Cuántas predicciones diferentes hay?

4. ¿Cuánto es el máximo de torres que se pueden poner en un tablero de ajedrez de tal forma que no se coman unas entre otras? ¿De cuántas formas se puede hacer esto?

5. ¿Cuánto es el máximo de alfiles que se pueden poner en un tablero de ajedrez de tal forma que no se coman unas entre otras? ¿De cuántas formas se puede hacer esto?

6. ¿Cuánto es el máximo de reinas que se pueden poner en un tablero de ajedrez de tal forma que no se coman unas entre otras? ¿De cuántas formas se puede hacer esto?

7. ¿Cuántas sucesiones de n dígitos hay en las no hay dos veces consecutivas el mismo dígito?.

8. Un equipo de dobles es elegido de un grupo de 6 jugadores de tennis . ¿Cuántos equipos diferentes se pueden elegir?

9. ¿Cuántas manos de poker de 5 cartas diferentes se pueden tomar de una baraja de 5 cartas?

10. Un curso de matemáticas ofrece la opción de elegir entre 3 clases de 12 de matemáticas puras, 2 de 10 de matemáticas aplicadas, 2 de 6 de estadística y 1 de 4 de computación ¿Cuántos cursos diferentes hay?

11. Si n puntos son puestos en una circunferencia y se trazan los segmentos que los unen. ¿Cuál es el mayor número de intersecciones que se puede tener entre estos segmentos?

12. ¿Cuántas sucesiones de n dígitos que su suma sea un multiplo de 5 hay?

13. Pruebe que para cada $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$. Inténtelo sin usar el teorema del binomio.

14. Pruebe que para cada $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$. Inténtelo sin usar el teorema del binomio.

15. Pruebe que para cada $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k) = n!$.

16. Identidad de Vandermonde $\binom{m+n}{r} = \sum_{k=0}^{r} \binom{m}{k}\binom{n}{r-k}$. Concluya que $\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$

17. ¿Cuántos números hay entre 1 y 1,000,000 que no sean divisibles por 2,5 o 11?

18 ¿Cuántos números hay entre 1 y 1,000,000 que sean un cuadrado perfecto o un cubo perfecto?

19. Una ciudad tiene forma rectangular y su red de calles consiste en 4 líneas paralelas de norte a sur y 15 líneas paralelas de este a oeste.(No pensemos en el D.F. como ejemplo.)¿De cuántas maneras se puede ir a la esquina noreste si se empieza en la esquina sudoeste y solo se puede ir hacia el este y hacia el norte?.

20. Veinticinco de los caballeros del rey Arturo se sientan en su famosa mesa. Tres de ellos son elegidos para matar a un dragón. ¿De cuántas formas se pueden sentar de forma que estos tres estén sentados juntos? ¿De cuántas formas se pueden sentar de forma que al menos dos de estos tres estén sentados juntos?