# Notas de Álgebra Lineal 1

Facultad de Ciencias, UNAM

Frank Patrick Murphy Hernandez

Jaime García Villeda

# Índice general

# Introducción

“El álgebra es la oferta hecha por el diablo al matemático. El diablo dijo: Te daré esta potente máquina, que responderá cualquier cuestión. Todo lo que necesitas es darme tu alma. Deja la geometría y te daré esta maravillosa máquina.”

**Michael Atiyah.**

“Cuando un matemático dice que algo es *fácil de ver* o *trivial*, significa que espera que saques un lápiz y una hoja de papel, y dediques un poco de tiempo (probablemente considerable) revisandolo por ti mismo.”

**Jonathan Golan** [**1**]

El objetivo de estas notas es darle un seguimiento puntual a mis cursos de álgebra lineal 1 de la Facultad de Ciencias de la UNAM. Sin embargo, me permito recomendar ampliamente dos libros, el primero es el libro de Dr. Hugo Rincón [**3**] que esta disponible en la Prensa de Ciencias. A mi parecer es un libro que cualquier persona que lleve álgebra lineal en la facultad debería tener, es un libro muy bien escrito y captura perfectamente la esencia algebraica del álgebra lineal. El segundo es el libro de Golan [**1**], que trae muchos comentarios históricos y muchos ejercicios. Se que el libro de Friedberg [**4**] es muy popular en los cursos de lineal y lo incluyo en la bibliografía, pero es un libro muy escaso en la biblioteca, y aunque se puede conseguir en las librerías tiende a ser excesivamente caro. Por último, no hay que olvidar el libro de Lang [**2**] en el cual se basa el temario oficial.

Capítulo 1

# Espacios Vectoriales

"Las matemáticas son la más bella y la más poderosa creación del espíritu humano "

**Stefan Banach.**

## 1. Campos

DEFINICIÓN 1.1 (Campo). *Sea $K$ un conjunto no vacío con dos funciones $+\colon K\times K\longrightarrow K$ y $*\colon K\times K\longrightarrow K$. Notacionalmente escribimos $\lambda+\mu:=+(\lambda,\mu)$ y $\lambda\mu:=*(\lambda,\mu)$ para $\lambda,\mu\in K$. Si estas dos funciones cumplen:*

*C1) Para $\lambda,\mu,\nu\in K$, $\lambda+(\mu+\nu)=(\lambda+\mu)+\nu$.*

*C2) Existe $\phi\in K$ tal que para cualquier $\lambda\in K$, $\lambda+\phi=\lambda=\phi+\lambda$.*

*C3) Para todo $\lambda\in K$, existe $\mu\in K$ tal que $\lambda+\mu=\phi=\mu+\lambda$.*

*C4) Para $\lambda,\mu\in K$, $\lambda+\mu=\mu+\lambda$.*

*C5) Para $\lambda,\mu,\nu\in K$, $\lambda(\mu\nu)=(\lambda\mu)\nu$.*

*C6) Existe $\eta\in K$ tal que para cualquier $\lambda\in K$, $\lambda\eta=\lambda=\eta\lambda$.*

*C7) Para todo $\lambda\in K$ con $\lambda\neq\phi$, existe $\mu\in K$ tal que $\lambda\mu=\eta=\mu\lambda$.*

*C8) Para $\lambda,\mu\in K$, $\lambda\mu=\mu\lambda$.*

*C9) Para $\lambda,\mu,\nu\in K$, $\lambda(\mu+\nu)=\lambda\mu+\lambda\nu$.*

*Entonces llamamos a $K$ un campo.*

Los frenceses llaman a los campos cuerpos( corps), por lo que es comúen encontrar que los españoles también los llamen así.

EJEMPLO 1.1. *Los ejemplos más conocidos de campos son:*

- *Los reales $\mathbb{R}$*
- *Los racionales $\mathbb{Q}$*
- *Los complejos $\mathbb{C}$*
- *Los enteros módulo $p$, $\mathbb{Z}_p$, con $p$ un primo.*

PROPOSICIÓN 1.1. *Sea $K$ un campo, entonces:*

1. *El neutro aditivo es único.*
2. *El neutro multiplicativo es único.*

DEMOSTRACIÓN. 1. Sean $\phi' \in K$ otro neutro aditivo. Entonces

$$\phi = \phi + \phi' = \phi'$$

Por lo que $\phi = \phi'$. Así el neutro aditivo es único.

2. Sean $\eta' \in K$ otro neutro multiplicativo. Entonces

$$\eta = \eta\eta' = \eta'$$

Por lo que $\eta = \eta'$. Así el neutro multiplicativo es único.

□

NOTACIÓN 1.1. *Por la proposición anterior, al neutro aditivo le podemos asignar el nombre de cero,* 0*, y al neutro multiplicativo el de uno,* 1.

PROPOSICIÓN 1.2. *Sea K un campo, entonces:*

1. *Los inversos aditivos son únicos.*
2. *Los inversos multiplicativos son únicos.*

DEMOSTRACIÓN. 1. Sea $\lambda \in K$ y con inversos aditivos $\mu, \mu' \in K$. Si sumamos a $\mu'$ a la igualdad $\lambda + \mu = 0$, entonces:

$$\mu' = (\lambda + \mu) + \mu' = (\lambda + \mu') + \mu = 0 + \mu = \mu$$

Por lo que $\mu = \mu'$. Así el inverso aditivo es único.

2. Sea $\lambda \in K$ y con inversos multiplicativos $\mu, \mu' \in K$. Si multiplicamos a $\mu'$ a la igualdad $\lambda\mu = 1$, entonces:

$$\mu' = (\lambda\mu)\mu' = (\lambda\mu')\mu = 1\mu = \mu$$

Por lo que $\mu = \mu'$. Así el inverso multiplicativo es único.

□

NOTACIÓN 1.2. *Por la proposición anterior, si $\lambda \in K$, a su inverso aditivo lo denotaremos por $-\lambda$ y a su inverso multiplicativo por $\lambda^{-1}$.*

Por lo que podemos reenunciar los axiomas de campo en la forma conocida:

C1) Para $\lambda, \mu, \nu \in K$, $\lambda + (\mu + \nu) = (\lambda + \mu) + \nu$.
C2) Existe $0 \in K$ tal que para cualquier $\lambda \in K$, $\lambda + 0 = \lambda = 0 + \lambda$.
C3) Para todo $\lambda \in K$, existe $-\lambda \in K$ tal que $\lambda + (-\lambda) = 0 = (-\lambda) + \lambda$.

C4) Para $\lambda,\mu \in K$, $\lambda+\mu = \mu+\lambda$.
C5) Para $\lambda,\mu,\nu \in K$, $\lambda(\mu\nu) = (\lambda\mu)\nu$.
C6) Existe $1 \in K$ tal que para cualquier $\lambda \in K$, $\lambda 1 = \lambda = 1\lambda$.
C7) Para todo $\lambda \in K$ con $\lambda \neq 0$, existe $\lambda^{-1} \in K$ tal que $\lambda\lambda^{-1} = 1 = \lambda^{-1}\lambda$.
C8) Para $\lambda,\mu \in K$, $\lambda\mu = \mu\lambda$.
C9) Para $\lambda,\mu,\nu \in K$, $\lambda(\mu+\nu) = \lambda\mu+\lambda\nu$.

PROPOSICIÓN 1.3. *Sean $K$ un campo y $\lambda,\mu,\nu \in K$, entonces:*

1. $\lambda 0 = 0$
2. $(-1)\lambda = -\lambda$
3. $\lambda(-\mu) = -(\lambda\mu) = (-\lambda)\mu$
4. $-(-\lambda) = \lambda$
5. $(-\lambda)(-\mu) = \lambda\mu$
6. $-(\lambda+\mu) = (-\lambda)+(-\mu)$
7. $\lambda(\mu-\nu) = \lambda\mu-\lambda\nu$
8. *Si $\lambda \neq 0$ entonces $(\lambda^{-1})^{-1} = \lambda$*
9. *Si $\lambda,\mu \neq 0$ entonces $(\lambda\mu)^{-1} = \lambda^{-1}\mu^{-1}$*
10. *Si $\lambda+\nu = \mu+\nu$ entonces $\lambda = \mu$*
11. *Si $\nu \neq 0$ y $\lambda\nu = \mu\nu$, entonces $\lambda = \mu$*
12. *Si $\lambda\mu = 0$ entonces $\lambda = 0$ ó $\mu = 0$*

DEMOSTRACIÓN.

1. Primero consideramos que
$$\lambda 0 = \lambda(0+0) = \lambda 0+\lambda 0$$
Sumando $-\lambda 0$ de ambos lados de la igualdad tenemos:
$$\lambda 0 = (-\lambda 0+\lambda 0)+\lambda 0 = -\lambda 0+(\lambda 0+\lambda 0) = -\lambda 0+\lambda 0 = 0$$
2. Empezamos observando:
$$\lambda+(-1)\lambda = 1\lambda+(-1)\lambda = (1+(-1))\lambda = 0\lambda = 0$$
Como el inverso aditivo es único concluimos que $-\lambda = (-1)\lambda$.
3. Tarea
4. Como $\lambda+(-\lambda) = 0$, entonces $\lambda$ es el inveros aditivo de $-\lambda$ y como este es único concluimos que $-(-\lambda) = \lambda$.
5. Tarea
6. Tarea
7. Tarea

8. Como $\lambda\lambda^{-1} = 1$, entonces $\lambda$ es el inveros multplicativo de $\lambda^{-1}$ y como este es único concluimos que $(\lambda^{-1})^{-1} = \lambda$.
9. Tarea
10. Sumando $-v$ de ambos lados de la igualdad tenemos que:

$$\lambda = \lambda + v + (-v) = \mu + v + (-v) = \mu$$

11. Tarea
12. Si $\lambda = 0$, entonces ya terminamos. Si $\lambda \neq 0$, entonces multiplicamos ambos lados de la igualdad por $\lambda^{-1}$, así:

$$\mu = 1\mu = \lambda^{-1}\lambda\mu = \lambda^{-1}0 = 0$$

□

DEFINICIÓN 1.2. *Sea $K$ un campo y $L$ un subconjunto de $K$. Decimos que $L$ es un subcampo de $K$ si cumple:*

*SC1)* $1 \in L$.

*SC2) Para* $\lambda, \mu \in L$, $\lambda - \mu \in L$.

*SC3) Para* $\lambda, \mu \in L$ *con* $\mu \neq 0$, $\lambda\mu^{-1} \in L$.

EJEMPLO 1.2. *Definimos* $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} \in \mathbb{R} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$. *Entonces* $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ *es un subcampo de* $\mathbb{R}$.

DEMOSTRACIÓN.

1. Notamos que $1 = 1 + 0b\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$.
2. Sean $a + b\sqrt{2}, c + d\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$. Entonces

$$(a + b\sqrt{2}) - (c + d\sqrt{2}) = (a - c) + (b - d)\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$$

3. Sean $a + b\sqrt{2}, c + d\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$. Primero notamos que

$$(c + d\sqrt{2})(c - d\sqrt{2}) = c^2 - 2d^2$$

Por lo que deducimos que

$$(c + d\sqrt{2})^{-1} = \frac{c}{c^2 - 2d^2} - \frac{d}{c^2 - 2d^2}\sqrt{2}$$

Ahora, esto hará sentido siempre y cuando $c^2 - 2d^2 \neq 0$, pero para que esto NO pase se tendría que $c^2 - 2d^2 = 0$. Como $c + d\sqrt{2} \neq 0$ entonces $c \neq 0$ o $d \neq 0$. Pero observemos que si alguno de los dos es cero, esto implica que el otro es cero. Por lo que concluimos que:

$$\frac{c}{d} = \sqrt{2}$$

Lo cual es una contradicción puesto que $c$ y $d$ son racionales. Se sique que $(a+b\sqrt{2})(c+d\sqrt{2})^{-1}\in\mathbb{Q}(\sqrt{2})$

□

PROPOSICIÓN 1.4. *Sea $K$ un campo y $L$ un subcampo de $K$. Entonces $L$ es un campo.*

DEMOSTRACIÓN. La función binaria $+\colon L\times L\longrightarrow L$ es la misma que la de $K$ restrigida a $L$, sólo falta ver que se corestringe a $L$, es decir, $\lambda+\mu\in L$ para toda $\mu,\lambda\in L$. Empecemos viendo $0=1-1\in L$. Ahora tenemos que si $\lambda\in L$, entonces $-\lambda=0-\lambda\in L$. De aquí, deducimos que $\lambda+\mu=\lambda-(-\mu)\in L$. Ahora bien la operación esta bien definida. Notemos que ya vimos que tiene neutro e inverso. Es asociativa y conmutativa por que la operación original lo es. Asimismo, esto es analogo para la multiplicación y se hereda la distributividad. □

## 2. Espacios Vectoriales

En este tema se introducirá la definición más importante del curso y se estudiarán las propiedades más elementales de esta, así como algunos ejemplos.

DEFINICIÓN 2.1. *Para $K$ un campo, sea $V$ un conjunto con dos funciones $+\colon V\times V\longrightarrow V$ y $*\colon K\times V\to V$. Notacionalmente escribimos $v+w:=+(v,w)$ y $\lambda v:=*(\lambda,v)$ para $\lambda\in K$ y $v,w\in V$. Si estas dos funciones cumplen:*

*V1) Para todo $u,v,w\in V$, $u+(v+w)=(u+v)+w$*
*V2) Existe $z\in V$ tal que para todo $v\in V$, $v+z=v=z+v$*
*V3) Para todo $v\in V$ existe $v'\in V$ tal que $v+v'=z=v'+v$*
*V4) Para todo $v,w\in V$, $v+w=w+v$*
*V5) Para todo $v\in V$ y $\lambda,\mu\in K$, $(\lambda\mu)v=\lambda(\mu v)$*
*V6) Para todo $v\in V$, $1v=v$*
*V7) Para todo $\lambda\in K$, $v,w\in V$, $\lambda(v+w)=\lambda v+\lambda w$*
*V8) Para todo $\lambda,\mu\in K$, $v\in V$, $(\lambda+\mu)v=\lambda v+\mu v$*

*Entonces llamamos a $V$ un $K$-espacio vectorial. A un $K$-espacio vectorial le llamaremos simplemente un $K$-espacio. A la segunda operación la llamamos el producto por escalares o la acción de $K$ en $V$.*

Tal y como sucedió en el contexto de campos, se tiene la siguiente proposición que nos habla de la unicidad del neutro (aditivo) y los inversos (aditivos). Como consecuencia esto nos permitirá darles notación.

PROPOSICIÓN 2.1. *Para un $K$-espacio $V$ se cumple lo siguiente:*

1. *El elemento $z \in V$ del axioma V2 es único. A este se le conoce como el elemento cero del espacio y se le denota por* $0$.
2. *Dado un elemento $v \in V$, el elemento $v' \in V$ del axioma V3 es único. A este le conoce como el inverso de $v$ y se le denota por $-v$.*

DEMOSTRACIÓN. Para la primera afirmación, si $z' \in V$ es otro elemento que cumple el axioma V2, entonces observe que

$$z = z + z' = z'$$

Por lo tanto, se tiene el resultado deseado.

Para la segunda afirmación suponga que dado $v \in V$, los elementos $v', v'' \in V$ son tales que $v + v' = v + v'' = 0$. Entonces,

$$v' = (v + v'') + v' = (v + v') + v'' = v''$$

Esto concluye la prueba. □

De esta observación, se pueden escribir los axiomas de $K$-espacio como se presenta usualmente en los libros:

V1) Para todo $u, v, w \in V$, $u + (v + w) = (u + v) + w$
V2) Existe $0 \in V$ tal que para todo $v \in V$, $v + 0 = v = 0 + v$
V3) Para todo $v \in V$ existe $-v \in V$ tal que $v + (-v) = 0 = (-v) + v$
V4) Para todo $v, w \in V$, $v + w = w + v$
V5) Para todo $v \in V$ y $\lambda, \mu \in K$, $(\lambda\mu)v = \lambda(\mu v)$
V6) Para todo $v \in V$, $1v = v$
V7) Para todo $\lambda \in K$, $v, w \in V$, $\lambda(v + w) = \lambda v + \lambda w$
V8) Para todo $\lambda, \mu \in K$, $v \in V$, $(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$

Antes de dar algunas propiedades aritméticas de la definición, vamos a mostrar algunos ejemplos de espacios vectoriales.

EJEMPLO 2.1. *Si $K$ es un campo y $L$ es un subcampo de $K$, entonces $K$ es un $L$-espacio. En particular todo campo $K$ es un $K$-espacio. Algunos ejemplos concretos son:*

$$\mathbb{R} \text{ es un } \mathbb{Q}\text{-espacio,}$$
$$\mathbb{C} \text{ es un } \mathbb{R}\text{-espacio}$$
$$\mathbb{C} \text{ es un } \mathbb{Q}\text{-espacio.}$$

El ejemplo anterior nos muestra que un conjunto puede tener diferentes estructuras de espacio aún y cuando se considerer la misma estructura aditiva. Por otro lado, exsten conjuntos que no tienen estructura de $K$-espacio (Ver ejercicio 4.6).

EJEMPLO 2.2. *Para $U \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo (abierto o cerrado), sea $C^0(U)$ conjunto de funciones continuas de $U$ en $\mathbb{R}$. Definiendo las operaciones de forma puntual, es decir,*

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x)$$

$$(\lambda f)(x) := \lambda f(x),$$

*para $f,g \in C^0(U)$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, $C^0(U)$ es un $\mathbb{R}$-espacio. En particular, para $U = \mathbb{R}$, $C^0(\mathbb{R})$ es un $\mathbb{R}$ espacio.*

EJEMPLO 2.3. *Para $K$ un campo y $n$ y $m$ dos naturales (positivos), tenemos los siguientes $K$-espacios:*

- *$K^n$ es un $K$-espacio con suma*

  $$(x_1,\ldots,x_n) + (y_1,\ldots,y_n) = (x_1+y_1,\ldots,x_n+y_n)$$

  *y producto escalar*

  $$\lambda(x_1,\ldots,x_n) = (\lambda x_1,\ldots,\lambda x_n)$$

  *para $(x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n) \in K^n$ y $\lambda \in K$.*
- *Las matrices de $n$ por $m$ con coeficientes en $K$, $M_{n\times m}(K)$, son un $K$-espacio con suma*

  $$(A+B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij}, \text{ para } i = 1,\ldots,n, j = 1,\ldots,m$$

  *y producto escalar*

  $$(\lambda A)_{ij} = \lambda A_{ij}, \text{ para } i = 1,\ldots,n, j = 1,\ldots,m$$

  *para $A,B \in M_{n\times m}(K)$ y $\lambda \in K$. En el caso de que $n = m$, pondremos $M_n(K)$.*

- *Los polinomios en una indeterminada x, $K[x]$, son un $K$-espacio con suma*

$$p+q=\sum_{i=0}^{r}(a_i+b_i)x^i$$

*y con producto escalar*

$$\lambda p=\sum_{i=0}^{r}\lambda a_i x^i$$

*para* $p=\sum_{i=0}^{r}a_ix^i, q=\sum_{i=0}^{r}b_ix^i\in K[x]$ *y* $\lambda\in K$.

Los siguientes son los ejemplos más simples y hasta cierto punto básicos de espacios vectoriales. El siguiente ejemplo a tratar es de hecho una familia de ejemplos.

DEFINICIÓN 2.2. *Sea $S$ un conjunto y $K$ un campo. Definimos $K^S$ como el conjunto de todas las funciones $f:S\to K$.*

PROPOSICIÓN 2.2. *Sea $S$ un conjunto, entonces $K^S$ es un $K$-espacio.*

DEMOSTRACIÓN. Si $S=\emptyset$, entonces $K^S$ tiene un solo elemento, a saber, la función vacía. Al definir $+:K^S\times K^S\to K^S$ y $\cdot:K\times K^S\to K^S$ como $\emptyset+\emptyset:=\emptyset$ y $\lambda\emptyset=\emptyset$, estas dan una estructura de espacio vectorial a $K^S$ si $S=\emptyset$.

Si $S\neq\emptyset$, definamos las operaciones de forma puntual. De esto se deduce que la función constante con valor 0 es el neutro aditivo, la suma es claramente asociativa y conmutativa. Además, dada $f\in K^S$, al definir $-f\in K^S$ mediante $(-f)(x)=-f(x)$, esta función es la inversa (aditiva) de $f$. Esto muestra que se cumplen los axiomas V1-V4.

Respecto a los axiomas restantes, el neutro multiplicativo es la función constante 1. Además es claro que el producto es asociativo. Lo que resta es ver que se cumplen las propiedades asociativas, de las cuales demostraremos simplemente una de ellas pues la otra es análoga. En efecto, sean $f,g\in K^S$ y $\lambda\in K$. Observe que las funciones $\lambda(f+g),\lambda f+\lambda g$ tienen claramente el mismo dominio y codominio, por lo que basta con ver que estas tienen la misma regla de correspondencia. Para esto, sea $x\in S$ y observe que se tiene la cadena de igualdades:

$$
\begin{aligned}
(\lambda(f+g))(x) &:= \lambda(f+g)(x) \\
&:= \lambda(f(x)+g(x)) \\
&= \lambda f(x)+\lambda g(x) \\
&=: (\lambda f)(x)+(\lambda g)(x) \\
&=: (\lambda f+\lambda g)(x)
\end{aligned}
$$

Con esto se demuestra que las funciones mencionadas tienen la misma regla de correspondencia, por lo que $\lambda(f+g)=\lambda f+\lambda g$.

□

OBSERVACIÓN 2.1. *El espacio $K^{\emptyset}$ se le conoce como el espacio cero y se le suele denotar por $0$. Por otro lado, los ejemplos tratados en 2.3 son ejemplos particulares del resultado anterior pues el caso de $K^n$ se obtiene de observar que hay una biyección entre $K^n$ y $K^{\{1,\dots,n\}}$. El segundo pues por definición $M_{n\times m}(K)=K^{\{1,\dots,n\}\times\{1,\dots,m\}}$. El último ejemplo también se puede contemplar como un ejemplo particular de $K^{\mathbb{N}}$, pero para ver esto se necesita la noción de subespacio. Además, la misma afirmación se puede hacer respecto al ejemplo 2.2.*

Concluimos esta sección con las propiedades aritméticas básicas que se cumplen en un espacio vectorial.

PROPOSICIÓN 2.3. *Sean $V$ un $K$-espacio, $v,w\in V$ y $\lambda\in K$, entonces:*

1. $\lambda 0=0$
2. $0v=0$
3. $(-1)v=-v$
4. $(-\lambda)v=-(\lambda v)=\lambda(-v)$
5. $-(-v)=v$
6. $\lambda v=(-\lambda)(-v)$
7. $-(v+w)=-v-w$
8. $\lambda(v-w)=\lambda v-\lambda w$
9. *Si* $\lambda v=0$ *entonces* $\lambda=0$ *ó* $v=0$

DEMOSTRACIÓN. La demostración de las propiedades 1 a 8 es exactamente igual a las correspondientes del caso de campos. Para el caso de 9, esta no es la excepción, pero daremos la prueba de esta pues esta muestra como se tratan muchas propiedades donde interviene la acción. Suponga que $\lambda v = 0$ con $\lambda \in K$ y $v \in K$. Observe que si $\lambda \neq 0$, entonces existe $\lambda^{-1} \in K$. De esto se sigue que:

$$v = 1v = (\lambda^{-1}\lambda)v = \lambda^{-1}(\lambda v) = \lambda^{-1}0 = 0$$

□

## 3. Subespacios Vectoriales

DEFINICIÓN 3.1. *Sea $V$ un $K$-espacio, sí $W \subseteq V$ y cumple:*

1. $0 \in W$
2. *Para todo $v, w \in W$, $v + w \in W$*
3. *Para todo $v \in W$ y $\lambda \in K$, $\lambda v \in W$*

*entonces a $W$ lo llamaremos un subespacio de $V$*

NOTACIÓN 3.1. *Si $W$ es un subespacio de $V$, entonces denotaremos este hecho como $W \leq V$*

EJEMPLO 3.1. *Para $K$ un campo, y $n$ y $m$ dos naturales, tenemos los siguientes $K$-espacios:*

- *Para todo $K$-espacio $V$, tiene dos subespacios canónicos $V$ y $0$.*
- *Si $m \leq n$, ponemos $K^n_m = \{x \in K^n \mid x_m = 0\}$. Entonces $K^n_m \leq K^n$.*
- *Para $A \in M_n(K)$, definimos la traza de $A$, $Tr(A) = \sum_i^n$. Definimos $W_n = \{A \in M_n(K) \mid Tr(A) = 0\}$, entonces $W_n \leq M_n(K)$.*
- *Ponemos $P_n(K)$ como $\{p(x) \in K[x] \mid \partial(p) \leq n\}$. Entonces $P_n(K) \leq K[x]$.*

DEFINICIÓN 3.2. *Sea $S$ un conjunto, entonces $K(S)$ es el conjunto de todas las funciones $f : S \to K$ tales que $sop(f)$ es finito, donde $sop(f)$ = $\{s \in S | f(s) \neq 0\}$.*

PROPOSICIÓN 3.1. *Sea $S$ un conjunto, entonces $K(S) \leq K^S$.*

DEMOSTRACIÓN. 1. Sea $0 \colon S \longrightarrow K$ la función constante cero. Notemos que $sop(0) = \emptyset$ que es finito.

2. Sean $f,g\colon S \longrightarrow K$ funciones con soporte finito. Notemos que $sop(f+g) \subseteq sop(f)\cup sop(g)$. Si $x \in sop(f+g)$ y $x \in sop(f)$, ya terminamos. Si $x \in sop(f+g)$ y $x \notin sop(f)$, entonces $f(x) = 0$ y $(f+g)(x) \neq 0$. Por lo que $g(x) \neq 0$ y así $x \in sop(g)$. Por lo tanto $sop(f+g) \subseteq sop(f)\cup sop(g)$. Asímismo, como $sop(f)$ y $sop(g)$ son finitos, entonces $sop(f)\cup sop(g)$ es finito. Por lo que se sigue que $sop(f+g)$ es finito. Por lo que $f+g$ tiene soporte finito.
3. Sea $f,g\colon S \longrightarrow K$ y $\lambda \in K$. Si $\lambda = 0$, entonces $\lambda f = 0$, lo que nos lleva al punto uno. Si $\lambda \neq 0$, entonces afirmamos $sop(\lambda f) = sop(f)$. Sea $x \in S$ tal que $\lambda f(x) \neq 0$, entonces $f(x) \neq 0$. Sea $x \in S$ tal que $f(x) \neq 0$, entonces $\lambda f(x) \neq 0$. Por lo que concluimos que el $sop(\lambda f)$ es finito.

$\square$

NOTACIÓN 3.2. *Sea $V$ un $K$-espacio, el conjunto de todos los subespacios de $V$, se denotará por $\mathscr{L}(V)$. Este es un conjunto parcialmente ordenado por la contención.*

PROPOSICIÓN 3.2. *Sea $V$ un $K$-espacio, entonces $\mathscr{L}(V)$ es una retícula completa.*

DEMOSTRACIÓN. Como $\mathscr{L}(V)$ es un conjunto parcialmente ordenado por la contención. Vamos a demostar que $\mathscr{L}(V)$ es cerrado bajo intersecciones arbitrarias. Sea $\{W_i\}_{i\in I}$ una familia de subespacios de $V$.

1. Como $0 \in W_i$ para toda $i \in I$, entonces $0 \in \bigcap_{i\in I} W_i$.
2. Sean $v,w \in \bigcap_{i\in I} W_i$. Entonces $v,w \in W_i$ para toda $i \in I$. Por lo que $v+w \in W_i$ para toda $i \in I$. Así $v+w \in \bigcap_{i\in I} W_i$.
3. Sean $v \in \bigcap_{i\in I} W_i$ y $\lambda \in K$. Entonces $v \in W_i$ para toda $i \in I$. Por lo que $\lambda v \in W_i$ para toda $i \in I$. Así $\lambda v \in \bigcap_{i\in I} W_i$.

Por lo que $\bigcap_{i\in I} W_i \leq V$. Ahora la intersección es el ínfimo en la retícula del conjunto potencia. Por lo que la familia de subespacios al ser un subconjunto del potencia y tener el orden inducido por este, si es cerrado bajo intersecciones estas resultarán el ínfimo. $\square$

Como el ínfimo coincide con el de la retícula de subconjuntos, falta describir el supremo. Dado que la demostración anterior, muestra una construcción un poco bestial.

DEFINICIÓN 3.3. *Sean $U,W$ subespacios de $V$. Definimos $U+W := \{u+w \in V | u \in U, w \in W\}$*

PROPOSICIÓN 3.3. *Sean $U,W$ subespacios de $V$. Entonces $U+W \leq V$*

DEMOSTRACIÓN.

1. Como $U \leq V$ y $W \leq V$, entonces $0 \in U$ y $0 \in W$. Por lo que $0 = 0+0 \in U+W$.
2. Sean $u+w, u'+w' \in U+W$ con $u,u' \in U$ y $w,w' \in W$. Entonces $u+u' \in U$ y $w+w' \in W$. Por otro lado,
$$(u+w)+(u'+w') = (u+u')+(w+w) \in U+W$$
3. Sea $u+w \in U+W$ con $u \in U$ y $w \in W$, y $\lambda \in K$. Entonces $\lambda(u+w) = \lambda u + \lambda w \in U+W$ con $\lambda u \in U$ y $\lambda w \in W$.

□

PROPOSICIÓN 3.4. *Sean $U, W$ subespacios de $V$. Entonces $U \bigvee W = U+W$*

DEMOSTRACIÓN. Notemos que para $u \in U$, $u = u+0 \in U+W$. Por lo que $U \subseteq U+W$. De manera analoga, $W \subseteq U+W$.

Sea $S \leq V$ tal que $U \subseteq S$ y $W \subseteq S$. Entonces para todo $u \in U$ y $w \in W$ tenemos que $u,w \in S$. Asímismo, $u+w \in S$. Por lo tanto $U+W \subseteq S$. Por lo que se sigue que $U \bigvee W = U+W$. □

PROPOSICIÓN 3.5. *Sea $V$ un $K$-espacio, entonces $\mathscr{L}(V)$ es una retícula modular.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $U_1, U_2, U_3$ subespacios de $V$ si $U_1 \subseteq U_3$, afirmamos que entonces $U_1 + (U_2 \cap U_3) = (U_1+U_2) \cap U_3$

$\subseteq$)Sea $x \in U_1 + (U_2 \cap U_3)$. Entonces $x = y+z$ con $y \in U_1$ y $z \in U_2 \cap U_3$. En particular, $z \in U_2$. Por lo que tenemos que $x = y+z \in U_1+U_2$. Por otro lado también tenemos que $z \in U_3$ y que $y \in U_1 \subseteq U_3$, de donde concluimos que $x = y+z \in U_3$. Por lo tanto $x \in (U_1+U_2) \cap U_3$.

$\supseteq$) Sea $x \in (U_1+U_2) \cap U_3$. Entonces $x \in U_1+U_2$ y $x \in U_3$. Por lo que $x = y+z$ con $y \in U_1$ y $z \in U_2$. Despejando tenemos que $z = x-y \in U_3$ puesto que $y \in U_1 \subseteq U_3$. Así $x = y+z \in U_1 + (U_2 \cap U_3)$.

□

DEFINICIÓN 3.4. *Sea $\{W_i\}_{i \in I}$ una familia de subespacios de $V$. Definimos*
$$\sum_{i \in I} W_i = \{w_1 + \ldots + w_n \in V | w_i \in W_{k_i}, k_i \in I, n \in N\}$$

PROPOSICIÓN 3.6. *Sean $\{W_i\}_{i \in I}$ una familia de subespacios de $V$. Entonces $\bigvee_{i \in I} W_i = \sum_{i \in I} W_i$*

DEMOSTRACIÓN. Tarea $\square$

DEFINICIÓN 3.5. *Sea $S \subseteq V$ con $V$ un $K$-espacio. El subespacio generado por $S$ en $V$, $\langle S \rangle$, es el mínimo subespacio que contiene de $V$ que contiene a $S$, es decir:*

1. $\langle S \rangle \leq V$
2. $S \subseteq \langle S \rangle$
3. *Si $W \leq V$ y $S \subseteq W$ entonces $\langle S \rangle \subseteq W$*

Notamos que por la antisimetría de la contención el subespacio generado es único. Hasta este momento, tenemos que si existe es único, pero por el momento veremos que con esta caracterización podemos dar bastantes propiedades, y más adelante demostraremos su existencia.

PROPOSICIÓN 3.7. *Sean $S, T$ subconjuntos de $V$ un $K$-espacio, entonces:*

1. $\langle \langle S \rangle \rangle = \langle S \rangle$.
2. *$\langle S \rangle = S$ si y sólo si $S \leq V$.*
3. *Si $S \subseteq T$ entonces $\langle S \rangle \subseteq \langle T \rangle$.*
4. $\langle S \cap T \rangle \subseteq \langle S \rangle \cap \langle T \rangle$.
5. $\langle S \cup T \rangle = \langle S \rangle + \langle T \rangle$.

DEMOSTRACIÓN.
1. Notamos que $\langle S \rangle \subseteq \langle S \rangle$. Por lo que por definición de $\langle \langle S \rangle \rangle$, llegamos a que $\langle \langle S \rangle \rangle \subseteq \langle S \rangle$. Por otro lado, también por de definición de $\langle \langle S \rangle \rangle$, tenemos que $\langle S \rangle \subseteq \langle \langle S \rangle \rangle$
2. La ida es inmediata puesto que $\langle S \rangle \leq V$. Para el regreso notemos que $S \subseteq S$ y por otro lado si $W \leq V$ tal que $S \subseteq W$, pues $S \subseteq W$. Así cumple la propiedad que le da unicidad a $\langle S \rangle$.
3. Como $S \subseteq T$ y $T \subseteq \langle T \rangle$, entonces $S \subseteq \langle T \rangle$. De aquí $\langle S \rangle \subseteq \langle T \rangle$.
4. Se sigue del anterior. Como $S \cap T \subseteq S$ y $S \cap T \subseteq T$, entonces $\langle S \rangle \cap \langle T \rangle \subseteq \langle S \rangle$ y $\langle S \rangle \cap \langle T \rangle \subseteq \langle T \rangle$. Por lo tanto $\langle S \cap T \rangle \subseteq \langle S \rangle \cap \langle T \rangle$.
5. De manera análoga al anterior, $\langle S \rangle \subseteq \langle S \cup T \rangle$ y $\langle S \rangle \subseteq \langle S \cup T \rangle$. Por lo que $\langle S \cup T \rangle \supseteq \langle S \rangle + \langle T \rangle$. Pero $S \cup T \subseteq \langle S \rangle + \langle T \rangle$, por lo que concluimos que $\langle S \cup T \rangle = \langle S \rangle + \langle T \rangle$.

$\square$

PROPOSICIÓN 3.8. *Sea $S$ subconjunto de $V$ un $K$-espacio. Entonces*

$$\langle S \rangle = \bigcap \{ W \in \mathscr{L}(V) \mid S \subseteq W \}$$

DEMOSTRACIÓN.

- Como $\langle S\rangle$ es la intersección de una familia de subespacios, este es un subespacio.
- Como $S$ esta contenido en todos los intersectandos, entonces $S \subseteq \bigcap\{W \in \mathscr{L}(V) \mid S \subseteq W\}$.
- Si $W \leq V$ y $S \subseteq W$, entonces $W$ es uno de los intersectandos y $\bigcap\{W \in \mathscr{L}(V) \mid S \subseteq W\} \subseteq W$.

Por lo tanto $\langle S\rangle = \bigcap\{W \in \mathscr{L}(V) \mid S \subseteq W\}$

□

DEFINICIÓN 3.6. *Sean $w, v_1, \ldots, v_n \in V$ con $V$ un $K$-espacio. Se dice que $w$ es combinación lineal de $v_1, \ldots, v_n$ si existen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ tales que $w = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n$*

DEFINICIÓN 3.7. *Sea $S$ subconjunto de $V$ un $K$-espacio y $w \in V$. Se dice que $w$ es combinación lineal de $S$, si existen $v_1, \ldots, v_n \in S$ tales que $w$ es combinación lineal de $v_1, \ldots, v_n$.*

PROPOSICIÓN 3.9. *Sea $S$ subconjunto de $V$ un $K$-espacio, entonces $\langle S\rangle$ es el conjunto de todas las combinaciones lineales de $S$.*

DEMOSTRACIÓN. Denotamos por $CL(S)$ al conjunto de combinaciones lineales de $S$. Queda como tarea moral demostrar que $CL(S) \leq V$

- Sea $v \in S$, entonces $1v \in CL(S)$. Por lo que $S \subseteq CL(S)$.
- Si $W \leq V$, $S \subseteq W$ y consideramos $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i v_i \in CL(S)$ con $v_1, \ldots, v_n \in S$ y $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$, entonces $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i v_i \in W$.

Por lo tanto $\langle S\rangle = CL(S)$

□

## 4. Sumas Directas

En esta sección se va a estudiar una forma especial de descomponer un espacio vectorial usando subespacios de este. Esta descomposición se puede pensar como una generalización de la descomposición que existe en $\mathbb{R}^2$ a partir del eje x y el eje y.

DEFINICIÓN 4.1. *Sean $U, W$ subespacios de $V$. Se dice que $V$ es suma directa de $U$ y $W$, si $U + W = V$ y $U \cap W = 0$.*

NOTACIÓN 4.1. *Si $V$ es suma directa de $U$ y $W$, entonces escribiremos $V = U \oplus W$.*

OBSERVACIÓN 4.1. *Note que si $V = U \oplus W$, dado que en particular $V = U + W$, esto implica que todo elemento $v \in V$ se puede descomponer como suma de un elemento en $U$ y $W$. De hecho, observe que esta implicación es de hecho un bicondicional.*

EJEMPLO 4.1. *Para $K$ cualquier campo considere $K^2$. Denote por $e_1 = (1,0)$ y $e_2 = (0,1)$. Entonces,*

$$K^2 = \langle e_1 \rangle \oplus \langle e_2 \rangle$$

*Este ejemplo muestra en qué sentido la idea de suma directa generaliza la de la descomposición de $\mathbb{R}^2$ a partir del eje $x$ y el eje $y$. Más aún, note que si se toma $v \in K^2$ tal que $v \notin \langle e_1 \rangle$, entonces*

$$K^2 = \langle e_1 \rangle \oplus \langle v \rangle.$$

EJEMPLO 4.2. *Sea $K$ un campo y defina*

$$S_n(K) = \{A \in M_n(K) \mid A^t = A\}$$

$$A_n(K) = \{A \in M_n(K) \mid A^t = -A\}$$

*Entonces $S_n(K), A_n(K) \leq M_n(K)$. A $S_n(K)$ se le conoce como el espacio de matrices simétricas, mientras que $A_n(K)$ es el espacio de matrices antisimétricas. Además, si $1 + 1 \neq 0$, entonces*

$$M_n(K) = S_n(K) \oplus A_n(K)$$

EJEMPLO 4.3. *(Tarea) Sean $P(\mathbb{R}), I(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ el conjunto de funciones pares e impares respectivamente. Estos subconjuntos son subespacios de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, más aún,*

$$\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = P(\mathbb{R}) \oplus I(\mathbb{R})$$

Otro ejemplo interesante se muestra en el ejercicio 4.33.

Existe un teorema de caracterización de cuándo un espacio se escribe como suma directa de subespacios, el cual tiene que ver con las combinaciones $K$-lineales que se mencionan en la observación 4.1. Este se presenta a continuación:

PROPOSICIÓN 4.1. *Sean $U,W$ subespacios de $V$. Entonces $V$ es suma directa de $U$ y $W$ si y sólo si para todo $v \in V$ existen únicos $u \in U$ y $w \in W$ tales que $v = u + w$.*

DEMOSTRACIÓN. $\Rightarrow$) Si $V = U \oplus W$, entonces por una observación previa todo elemento de $V$ se escribe como suma de uno de $U$ y uno de $W$. Vamos a ver que esta descomposición es única. Para esto suponemos que $x = u + w = u' + w'$ con $u, u' \in U$ y $w, w' \in W$. Esta igualdad implica que

$$u - u' = w' - w.$$

Dado que $W \leq V$, entonces $w' - w \in W$, mientras que por un argumento análogo se deduce que $u - u' \in U$, así que la igualdad anterior implica que $u - u' \in U \cap W = 0$, por lo tanto $u = u'$ y así $w = w'$.

$\Leftarrow$) La existencia de la descomposición implica que $V = U + W$. Lo que resta ver es que $U \cap W = 0$. Para esto, sea $x \in U \cap W$ y observe que se tienen dos descomposiciones para $x$ como suma de un elemento de $U$ y de $W$ como sigue:

$$x = x + 0 = 0 + x$$

La unicidad de las descomposición de $x \in V$ implica que $x = 0$ y por lo tanto, esto demuestra la contención no trivial en la igualdad $U \cap W = 0$ y concluye la prueba. $\square$

En este momento podemos plantearnos una pregunta muy interesante ya que los ejemplos discutidos de suma directa tienen como particularidad que en cada uno de ellos hemos propuesto los subespacios que descomponen al espacio en cuestión. Es entonces cuando se puede plantear la siguiente pregunta:

¿Dado un subespacio $U \leq V$, existe $W \leq V$ tal que $V = U \oplus W$?

La respuesta es afirmativa, sin embargo, en este momento no tenemos la herramienta para dar una demostración sencilla (ver proposición **??**). Sin embargo, en torno a esta pregunta podemos decir lo siguiente:

OBSERVACIÓN 4.2. *La respuesta a la pregunta planteada no es única. El ejemplo inmediato es considerar $\mathbb{R}^2$ y $U = \langle e_1 \rangle$ con $e_1 = (1,0)$. Note que $W = \langle e_2 \rangle$, con $e_2 = (0,1)$, este cumple que $V = U \oplus W$, pero el espacio $W' = \langle (1,1) \rangle$ también cumple que $V = U \oplus W'$. De hecho, dado cualquier $v \notin \langle e_1 \rangle$ puede demostrarse que $U \oplus \langle v \rangle = \mathbb{R}^2$, como se vio en uno de los ejemplos anteriores.*

Para tomar cierta intuición de cómo es que se va a hacer la prueba de que la respuesta a la pregunta plateada es cierta, vale la pena mencionar el siguiente resultado.

PROPOSICIÓN 4.2. *Sean $W, U \leq V$. Son equivalentes:*

1. $V = U \oplus W$
2. $U \leq V$ *es máximo respecto a la propiedad* $W \cap U = 0$

DEMOSTRACIÓN. $1 \Rightarrow 2)$ Por definición se cumple que $W \cap U = 0$. Respecto a la propiedad de maximalidad, sea $U' \leq V$ tal que $U \lneq U'$. Observe que se tiene la cadena de igualdades:

$$U' = U' \cap V = U' \cap (W + U) = U' \cap W + U,$$

donde la última igualdad se da por la ley modular. Además de la igualdad se deduce que $U' \cap W \neq 0$, ya que en caso contrario $U = U'$, lo cual termina la demostración.

$2 \Rightarrow 1)$ Lo que resta demostrar es que $V = U + W$, para lo que pocedemos por contradicción, es decir, suponemos que $U + W \lneq V$. Entonces, existe $x \in V \setminus (U + W)$. Así, considere $U + \langle x \rangle \leq V$, que claramente satisface que $U \lneq U + \langle x \rangle$. Además, observe que si $y \in W \cap (U + \langle x \rangle)$, entonces $y = u + \lambda x$ para algunos $u \in U$ y $\lambda \in K$. Note que si $\lambda \neq 0$, entonces $x = \lambda^{-1} y - \lambda^{-1} u \in W + U$, lo que sería una contradicción, por lo tanto, $y = u \in U \cap W = 0$, lo que muestra la contención no trivial en la igualdad $W \cap (U + \langle x \rangle) = 0$. Pero esto es imposible pues $U$ era máximo con la propiedad $W \cap U = 0$. $\square$

En virtud a la observación anterior, dado un $U \leq V$, a un subespacio $W \leq V$ que satisface que $U \oplus W = V$ se le conoce como un **pseudocomplemento** de $U$. Este nombre proviene de la teoría de órdenes (definición 5.11). Además, se recomienda realizar el ejercicio 4.35.

Respecto a cómo la proposición da intuición de como resolver el problema de la existencia de pseudocomplementos, lo que hay que buscar es un resultado del estilo del principio del buen orden o el axioma del supremo que garantice como encontrar elementos máximos en un orden parcial. Dicho teorema es el importante Lema de Zorn que como se mencionó, se estudiará en el siguiente capítulo.

## Espacios Cocientes

DEFINICIÓN 4.2. *Sea $V$ un $K$-espacio y $W \leq V$. Derfinimos la siguiente relación $\sim_W$ en $V$, $v \sim_W w$ con $v, w \in V$ si $v - w \in W$.*

PROPOSICIÓN 4.3. *Sea $V$ un $K$-espacio y $W \leq V$. Entonces $\sim_W$ es una relación de equivalencia*

DEMOSTRACIÓN.

- Tenemos que $0 \in W$, pero $v - v = 0$ para todo $v \in V$. Por lo que $v \sim_W v$ para toda $v \in V$.
- Si $v \sim_W w$, entonces $v - w \in W$. Pero $w - v = -(v - w) \in W$. Por lo que $w \sim_W v$.
- Si $v \sim_W w$ y $w \sim_W u$, entonces $v - w, w - u \in W$. Así mismo, $v - u = (v - w) + (w - u) \in W$. Por lo tanto $v \sim_W u$.

□

DEFINICIÓN 4.3. *Sea $V$ un $K$-espacio, $v \in W$, y $W \leq V$. Denotamos por $v + W = \{v + w \in V \mid w \in W\}$. Observamos que $v + W \subseteq V$.*

PROPOSICIÓN 4.4. *Sea $V$ un $K$-espacio, $v \in W$, y $W \leq V$. Entonces $[v]_{\sim_W} = v + W$. Recordamos $[v]_{\sim_W} = \{u \in V \mid u \sim_W v\}$.*

DEMOSTRACIÓN. $\subseteq$) Sea $u \in [v]_{\sim_W}$. Entonces $u \sim_W v$ y de aquí tenemos que $u - v \in W$. Por lo cual se sigue que existe $w \in W$ tal que $u - v = w$. Despejando obtenemos $u = v + w \in v + W$.

$\supseteq$) Sea $u \in v + W$. Por lo que existe $w \in W$ tal que $u = v + w$. Despejando $u - v = w \in W$. Por lo que $u \sim_W v$. Por lo tanto $u \in [v]_{\sim_W}$.

□

EJEMPLO 4.4. *Sean $V = \mathbb{R}^2$ y $W \leq V$ una línea que pasa por el origen. Por ejemplo, si $W = \{(x, 0) \in V \mid x \in \mathbb{R}\}$ es el eje $x$ entonces $(0, 1) + W$ es la recta paralela a $W$ que pasa por el $(0, 1)$. Sigamos jugando con este ejemplo. Así $(2, 1) + W$ también es recta paralela a $W$ que pasa por el $(0, 1)$. Esto debido a que $(2, 1) - (0, 1) = (2, 0) \in W$. Esto ejemplifica que los conjuntos $v + W$ pueden tener más de una expresión. Recordando un poco clases de equivalencias $v$ sería el representante de la clase de equivalencia, así mismo podemos que ver que los representantes de $(0, 1) + W$ son los elementos de $(x, y) \sim_W (0, 1)$. Pero esto pasa si y sólo si $(x, y - 1) \in W$, es decir, si $y - 1 = 0$. Por lo que $(0, 1) + W = \{(x, 1) \in V \mid x \in \mathbb{R}$. Realmente es dar un ligero paso el observar que si $v + W$ siempre será una recta paralela al eje $x$.*

*Ahora consideremos la clase $(x_0, y_0) + W$, notemos que un elemento $(x, y) \in V$ pertenece sólamente si $(x_0 - x, y_0 - y) \in W$, es decir, es de la forma $(x, y_0)$ con $x \in \mathbb{R}$. Así tenemos* *el resultado mencionado las clases de equivalencia de $W$ son rectas paralelas a $W$ que pasan por el punto* $(0, y_0)$.

Una observación importante a notar es que $0+W=W$, esto nos dice, 0 sólo esta en está clase de equivalencia, por lo que las demás clases de equivalentecia no pueden ser subespacios. Recordemos que las clases de equivalencia de una relación de equivalencia forman una partición y así mismo las clases son disjuntas, esto es, que no tienen elementos en común por lo que el 0 sólo puede pertenecer a una clase.

Como el nombre de esta sección bien lo sugiere vamos a hablar de un espacio.

DEFINICIÓN 4.4. *Sea $V$ un $K$-espacio y $W \leq V$. Notacionalmente escribiremos $V/W$ en vez de $V/\sim_W$.*

PROPOSICIÓN 4.5. *Sea $V$ un $K$-espacio y $W \leq V$. Entonces $V/W$ es un $K$-espacio con las operaciones:*

$$(v+W)+(w+W) := (v+w)+W$$

*para $v+W, w+W \in V/W$, y*

$$\lambda(v+W) := \lambda v+W$$

*para $v+W \in V/W$ y $\lambda \in K$*

DEMOSTRACIÓN. Lo primero es ver que estas operaciones estan bien definidas y no dependen del representante. Por lo que consideremos $v+W=v'+W$, y $w+W=w'+W$. Por hipotesis tenemos que $v-v', w-w' \in W$ De aquí $(v+w)-(v'+w') = v-v'+w-w' \in W$. Por lo que $(v+w)+W=(v'+w')+W$. Por lo que la función esta bien definidad. Por otro lado también tenemos que $\lambda v - \lambda v' = \lambda(v-v') \in W$

Ahora bien, los axiomas de espacio vectorial se siguen de que sean válidos en $V$. □

## Ejercicios

EJERCICIO 4.1. *Defínase un nuevo producto en $\mathbb{R}$ mediante $a \odot b = a^7 b$. ¿Qué axiomas de campo satisface $(\mathbb{R}, +, \odot)$?.*

EJERCICIO 4.2. *Considere $L=(1,\infty)$ y defínanse dos operaciones $\oplus$ y $\odot$ cuyas reglas de correspondencia son $a \oplus b = a+b-ab$ y $a \odot b = 1-e^{\ln(1-a)\ln(1-b)}$. ¿Es $(L, \oplus, \odot)$ un campo?*

EJERCICIO 4.3. *Sea* $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ *el conjunto de reales extendidos. Se definen dos funciones mediante* $a \boxplus b = \text{mín}\{a,b\}$ *y* $a \boxdot b = a + b$*. ¿Qué axiomas de campo cumple* $(\overline{\mathbb{R}}, \boxplus, \boxdot)$*?*

EJERCICIO 4.4. *Sea* $d \in \mathbb{Z}$ *y se define el conjunto* $\mathbb{Q}(\sqrt{d}) := \{a + b\sqrt{d} \mid a, b \in \mathbb{Q}\} \subseteq \mathbb{C}$*. ¿Es* $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ *con las operaciones obvias un campo?*

EJERCICIO 4.5. *¿Es* $\mathbb{Z}_4$ *un* $\mathbb{Z}_2$*-espacio vectorial? Demuestre su afirmación.*

EJERCICIO 4.6. *Demuestre que* $\mathbb{Z}$ *no tiene estructura espacio vectorial para ningun campo con su estructura aditiva usual.*

EJERCICIO 4.7. *De un ejemplo de un espacio vectorial con cardinalidad* 512*.*

EJERCICIO 4.8. *Demuestre que* $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ *es un* $\mathbb{R}$*-espacio vectorial.*

EJERCICIO 4.9. *Sea* $W \subseteq V$*. Demuestre que son equivalentes:*

1. $W$ *es un subespacio de* $V$*.*
2. $a) W \neq \emptyset$*.*
   $b)$ *Para todo* $v, w \in W$*,* $v + w \in W$*.*
   $c)$ *Para todo* $\lambda \in K$ *y* $v \in V$*,* $\lambda v \in W$*.*
3. $a') W \neq \emptyset$*.*
   $b')$ *Para todo* $v, w \in W$ *y* $\lambda \in K$*,* $\lambda v + w \in W$*.*

EJERCICIO 4.10. *Demuestre que las parábolas en* $\mathbb{Z}_2$ *son espacios vectoriales.*

DEFINICIÓN 4.5. *Una función* $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ *es lineal a tramos si existen* $a_0, \ldots, a_{n+1}, b_1, \ldots., b_n \in \mathbb{R}$ *y* $x_1, \ldots, x_{n+1} \in \mathbb{R}$ *con* $x_i < x_{i+1}$*, tales que:*

$$f(x) = \begin{cases} a_0, & Si\ x < x_1 \\ a_i x + b_i, & Si\ x_i \leq x < x_{i+1}\ para\ i = 1, \ldots, n \\ a_{n+1}, & Si\ x_{n+1} \leq x \end{cases}$$

EJERCICIO 4.11.

- *Demuestre que $W$ el subconjunto de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ de todas las funciones lineales a tramos es un subespacio.*
- *Demuestre que $W$ el subconjunto de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ de todas las funciones acotadas es un subespacio.*
- *Demuestre que $W = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid \exists a \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq a|x|\}$ es un subespacio.*
- *Demuestre que $W$ el conjunto de todas las funciones pares es un subespacio.*
- *Demuestre que $W$ el conjunto de todas las funciones impares es un subespacio.*

EJERCICIO 4.12. *Sea $\mathscr{S}$ el subconjunto de todas las funciones de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ que son infinitamente diferenciales y tales que para cualesquiera $n,m \in \mathbb{N}$ existe $c_{n,m} \in \mathbb{R}^+$ tal que para todo $x \in \mathbb{R}$, $|x^n \frac{d^m f}{dx^m}| \leq c_{n,m}$. Demuestre que $\mathscr{S}$ es un subespacio del conjunto de funciones de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ acotadas.*

EJERCICIO 4.13. *Para todo $0 < t \leq 1$ sea $V_t$ el conjunto de todas las funciones $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ tales que si $a < b$, existe $k_{a,b} \in \mathbb{R}$ tal que para todo $x, y \in [a,b]$, $|f(x) - f(y)| \leq k(a,b)|x-y|^t$. ¿Para qué valores de $t$ es $V_t$ un subespacio de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$?.*

EJERCICIO 4.14. *Sean $v, w \in V$ distintos y $U := \{tv + (1-t)w \mid t \in K\}$. Demuestre que existe $x \in V$ tal que el conjunto $W = \{u + x \mid u \in U\}$ es un subespacio de $V$.*

EJERCICIO 4.15. *Sea $W = \{\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid$ Si $a_i \neq 0$, entonces para todo $j \in \mathbb{N}$, $a_{ij} \neq 0\}$. ¿Es $W$ un subespacio de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$?*

EJERCICIO 4.16. *Sea $W = \{\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid$ Si $a_i \neq 0$ entonces para todo $j \in \mathbb{N}^+$, $a_{ij} = 0\}$. ¿Es $W$ un subespacio de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$?*

EJERCICIO 4.17. *Se define el conjunto* $\ell_2(\mathbb{R}) = \{\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 < \infty\}$. *¿Es* $\ell_2(\mathbb{R})$ *un subespacio de* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$*?*

EJERCICIO 4.18. *Considere a* $\mathbb{R}$ *como* $\mathbb{Q}$ *espacio vectorial. Para todo* $W \subseteq \mathbb{R}$ *se defíne el conjunto* $\overline{W} := \{b \in \mathbb{R} \mid \exists \{a_n\}_{n=0}^{\infty} \subseteq W^{\mathbb{N}},\ \text{lím}_{n\to\infty} a_n = b\ \}$. *Demuestre que si* $W$ *es un subespacio de* $\mathbb{R}$ *entonces* $\overline{W}$ *es un subespacio de* $\mathbb{R}$. *¿Es cierto el regreso de esta proposición?*

EJERCICIO 4.19. *Sea* $f : V \to [0,1] \subseteq \mathbb{R}$ *una función tal que para cualesquiera* $\lambda, \mu \in K$ *y* $v, u \in V$, $f(\lambda v + \mu u) \geq \text{mín}\{f(v), f(u)\}$. *Demuestre las siguientes afirmaciones:*

1. $\text{máx}_{v\in V} f(v) = f(0)$.
2. *Si* $h \in \mathbb{R}$ *es tal que* $0 \leq h \leq f(0)$, *entonces el conjunto* $V_h := \{v \in V \mid h \leq f(v)\}$ *es un subespacio de* $V$.

EJERCICIO 4.20. *Sean* $p \in \mathbb{N}$ *primo y* $V$ *un* $\mathbb{Z}_p$*-espacio vectorial. Demuestre que* $V$ *no es union de* $k$ *subespacios para todo* $k \leq p$.

EJERCICIO 4.21. *Sea* $V \neq 0$ *un* $\mathbb{R}$*-espacio vectorial. Se define* $\mu : \mathbb{C} \times V \to V$ *mediante* $\mu(z,v) = Re(z)v$. *¿Es* $(V,+,\mu)$ *un* $\mathbb{C}$*-espacio vectorial?*

EJERCICIO 4.22. *Sea* $X$ *un conjunto arbitrario. Se define* $+ : \wp(X) \times \wp(X) \to \wp(X)$ *mediante* $A + B = A \triangle B$ *y, un producto por escalares* $\cdot : \mathbb{Z}_2 \times \wp(X) \to \wp(X)$ *mediante* $0 \cdot A = \emptyset$ *y* $1 \cdot A = A$.

1. *Demuestre que* $(\wp(X), +, \cdot)$ *es un* $\mathbb{Z}_2$*-espacio vectorial.*
2. *Sean* $V$ *es un* $K$*-espacio vectorial y* $Sub(V) := \{W \subseteq V \mid W \text{ es subespacio de } V\}$. *¿Es* $Sub(V)$ *un subespacio vectorial de* $\wp(V)$*?*

EJERCICIO 4.23. *Sea* $A \in M_{n\times m}(K)$. *Demuestre que el conjunto*

$$\mathscr{S} = \left\{ (x_1, ..., x_m) \in K^m \;\middle|\; \forall i = 1, ..., n \left( \sum_{j=1}^{m} A_{ij} x_j = 0 \right) \right\},$$

*es un subespacio de* $K^m$.

EJERCICIO 4.24. *Sean $W_1$ y $W_2$ subespacios de $V_K$.*

1. *Demuestre que $W_1 \cup W_2$ es un subespacio si y sólo si $W_1 \subseteq W_2$ o $W_2 \subseteq W_1$.*
2. *Demuestre que si $W_1 \subsetneq V$ entonces el $K$-espacio generado por $V \setminus W_1$ es $V$.*

EJERCICIO 4.25. *Sea $S \subseteq V_K$. Demuestre que:*

1. $\langle S \rangle = \{\sum_{i=0}^{n} \lambda_i v_i \mid n \in \mathbb{N}, \lambda_i \in K, v_i \in S\}$.
2. *Si $S' \subseteq V_K$ tal que $S \subseteq S'$ entonces $\langle S \rangle \subseteq \langle S' \rangle$.*
3. *$S$ es un $K$-subespacio vectorial si y sólo si $S = \langle S \rangle$.*

EJERCICIO 4.26. *Sean $S, T \subseteq V$ tales que $S \subseteq T \subseteq \langle S \rangle$. Demuestre que $\langle S \rangle = \langle T \rangle$.*

EJERCICIO 4.27. *Sean $v, w \in V$ y $S \subseteq V$ tales que $v \in \langle S \cup \{w\} \rangle \setminus \langle S \rangle$. Demuestre que $w \in \langle S \cup \{v\} \rangle$.*

EJERCICIO 4.28. *Sean $S_1, S_2 \subseteq V_K$.*

1. *Demuestre que $\langle S_1 \rangle + \langle S_2 \rangle = \langle S_1 \cup S_2 \rangle$.*
2. *Pruebe que si $V_1, V_2 \leq V$, entonces $V_1 + V_2 = \langle V_1 \cup V_2 \rangle$.*
3. *Demuestre que $\langle S_1 \cap S_2 \rangle \subseteq \langle S_1 \rangle \cap \langle S_2 \rangle$. De un ejemplo donde esta contención sea propia.*

EJERCICIO 4.29. *Sean $W_1, W_2, W_2 \in Sub(V)$. Demuestre las siguientes afirmaciones:*

1. *Si $W_1 \subseteq W_2$ entonces $W_1 + W_3 \subseteq W_2 + W_3$.*
2. *Son equivalentes:*

   $a)W_1 \subseteq W_2$

   $b)W_1 \cap W_2 = W_1$

   $c)W_1 + W_2 = W_2$.
3. $W_1 + (W_2 \cap W_3) \subseteq (W_1 + W_2) \cap (W_1 + W_3)$. *De un ejemplo donde la contención anterior sea propia.*

EJERCICIO 4.30. *Sean* $W_1, W_2, W_2 \in Sub(V)$. *Demuestre que* $W_3 \cap (W_2 + (W_1 \cap W_3)) = (W_1 \cap W_3) + (W_2 \cap W_3)$.

EJERCICIO 4.31. *Sea* $\{W_i\}_{i\in I}$ *una colección de subespacios de* $V$. *Demuestre que* $\sum_{i\in I} W_i = \langle \bigcup_{i\in I} W_i \rangle$.

EJERCICIO 4.32. *Considere* $W \leq V_K$. *Se define una relación* $\sim \subseteq V \times V$ *como sigue:*

$$v \sim w, \text{ si } v - w \in W.$$

1. *Demuestre que* $\sim$ *es una relación de equivalencia.*
2. *Denótese por* $V/W$ *al conjunto cociente* $V/\sim$ *y defina las asignaciones* $+ : V/W \times V/W \to V/W$ *y* $\cdot : K \times V/W \to V/W$ *como:*

$$[v] + [w] = [v + w]$$
$$\lambda \cdot [v] = [\lambda v]$$

   *donde* $[v], [w] \in V/W$ *y* $\lambda \in K$.

   *Demuestre que dichas asignaciones son funciones, es decir, que no dependen del representante elegido.*
3. *Demuestre que las funciones definidas anteriormente dotan a* $V/W$ *con estructura de* $K$*-espaci vectorial.*

EJERCICIO 4.33. *Sean* $W_1 = \{\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \in K^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, a_{2n} = 0\}$ *y* $W_2 = \{\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \in K^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, a_{2n+1} = 0\}$. *Demuestre que* $K^{\mathbb{N}} = W_1 \oplus W_2$.

EJERCICIO 4.34. *Sean* $P(\mathbb{R}), I(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ *el conjunto de funciones pares e impares respectivamente. Demuestre lo siguiente:*

1. $P(\mathbb{R}), I(\mathbb{R}) \leq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$
2. $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = P(\mathbb{R}) \oplus I(\mathbb{R})$

EJERCICIO 4.35. *Sean* $W, U \leq V$. *Demuestre que son equivalentes:*

1. $V = U \oplus W$
2. $U \leq V$ *es mínimo respecto a la propiedad* $V = U + W$

EJERCICIO 4.36. *Sea* $\{W_i\}_{i\in I}$ *una familia de subespacios de* $V$. *Decimos que* $V$ *es suma directa de la familia* $\{W_i\}_{i\in I}$ *si:*

1. $V = \sum_{i\in I} W_i$.
2. *Para todo* $i \in I$, $W_i \cap (\sum_{j\in I, j\neq i} W_j) = 0$.

*En tal caso se escribirá* $V = \bigoplus_{i\in I} W_i$.

EJERCICIO 4.37. *Sean* $W_1, W_2, W_3 \leq V$. *Demuestre que son equivalentes:*

1. $V = \bigoplus_{k=1}^{3} W_k$.
2. *Para todo* $v \in V$ *existen únicos* $w_1 \in W_1$, $w_2 \in W_2$ *y* $w_3 \in W_3$ *tales que* $v = w_1 + w_2 + w_3$

# Anexos

## 5. Retículas

DEFINICIÓN 5.1. *Sea $P$ un conjunto y $\leq$ una relación sobre $P$. Decimos que $P$ con $\leq$ es un conjunto parcialmente ordenado.*

1. *Para toda $x \in P$, $x \leq x$*
2. *Para todo $x, y \in P$, si $x \leq y$ e $y \leq x$, entonces $x = y$*
3. *Para todo $x, y, z \in P$, si $x \leq y$ e $y \leq z$, entonces $x \leq z$*

EJEMPLO 5.1. *Sea $X$ un conjunto. Entonces el conjunto potencia $\mathscr{P}(X)$ es un conjunto parcialmente ordenado con la contención $\subseteq$.*

DEFINICIÓN 5.2. *Sea $L$ un conjunto parcialmente ordenado. Decimos que $L$ tiene un elemento máximo $x$. Si para todo $y \in L$, $y \leq x$. Por la asimetría el elemento maximo es único y lo denotamos por $\bar{1}$.*

En el caso de $\mathscr{P}(X)$ su elemento máximo es $X$.

DEFINICIÓN 5.3. *Sea $L$ un conjunto parcialmente ordenado. Decimos que $L$ tiene un elemento mínimo $x$. Si para todo $y \in L$, $x \leq y$. Por la asimetría el elemento maximo es único y lo denotamos por $\bar{0}$.*

En el caso de $\mathscr{P}(X)$ su elemento mínimo es $\emptyset$.

DEFINICIÓN 5.4. *Sea $L$ un conjunto parcialmente ordenado, $S \subseteq L$ y $a \in L$. Decimos que $a$ es una cota superiorde $S$, si $x \leq a$ para toda $x \in S$.*

En caso de $S$ sea vacío, cualquier elemento de $L$ es cota superior.

DEFINICIÓN 5.5. *Sea $L$ un conjunto parcialmente ordenado, $S \subseteq L$ y $a \in L$. Decimos que $a$ es el supremo de $S$, si $a$ es la menor cota superior, es decir, si $a$ cumple:*

- *Para todo $x \in S$, $x \leq a$.*
- *Si $b \in L$ es tal que para todo $x \in S$ tenemos que $x \leq b$ , entonces $a \leq b$*

NOTACIÓN 5.1. *Sean $L$ una retícula, $S \subseteq L$ y $x, y \in L$. Denotamos por $\bigvee S$ al supremo de $S$. En caso de que $S = \{x, y\}$, ponemos $x \vee y$ para denotar al supremo.*

En caso de $S$ sea vacío, $\bigvee S = \bar{0}$.

DEFINICIÓN 5.6. *Sea $L$ un conjunto parcialmente ordenado, $S \subseteq L$ y $a \in L$. Decimos que $a$ es una cota inferior de $S$, si $a \leq x$ para toda $x \in S$.*

En caso de $S$ sea vacío, cualquier elemento de $L$ es cota inferior.

DEFINICIÓN 5.7. *Sea $L$ un conjunto parcialmente ordenado, $S \subseteq L$ y $a \in L$. Decimos que $a$ es el ínfimo de $S$, si $a$ es la menor cota inferior, es decir, si $a$ cumple:*

- *Para todo $x \in S$, $a \leq x$.*
- *Si $b \in L$ es tal que para todo $x \in S$ tenemos que $b \leq x$, entonces $b \leq a$*

NOTACIÓN 5.2. *Sean $L$ una retícula, $S \subseteq L$ y $x, y \in L$. Denotamos por $\bigwedge S$ al ínfimo de $S$. En caso de que $S = \{x, y\}$, ponemos $x \wedge y$ para denotar al ínfimo.*

En caso de $S$ sea vacío, $\bigwedge S = \bar{1}$.

DEFINICIÓN 5.8. *Sea $L$ un conjunto parcialmente ordenado. Decimos que $L$ es una retícula, si para todo $x, y \in L$ $x \wedge y$ y $x \vee y$ existen.*

DEFINICIÓN 5.9. *Una retícula $L$ es completa si todo subconjunto $S$ de $L$, $\bigvee S$ y $\bigwedge S$ existen.*

Tenemos que $\mathscr{P}(X)$ es una retícula completa.

PROPOSICIÓN 5.1. *Sean $L$ una retícula tal que existen todos los ínfimos. Entonces $L$ es una retícula completa.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $X$ una familia de $L$ y ponemos $Y$ como la familia de elementos de $L$ tal que $y \in Y$ si $x \leq y$ para todo $x \in X$, es decir, $Y$ es el conjunto de las cotas superiores de $X$. Afirmamos que $\bigwedge Y = \bigvee X$. Primero, notamos que $x \leq \bigwedge Y$ para toda $x \in X$. Puesto que para $x \in X$, $x \leq y$ para toda $y \in Y$, es decir, los elementos de $X$ resultan cotas inferiores de $Y$. Así, $\bigwedge Y$ es la máxima cota inferior.

Por otro lado $z \in L$ es una cota superior dd $X$, entonces $z \in Y$, entonces $\bigwedge Y \leq z$. Por lo que $\bigwedge Y$ cumple las dos propiedades del supremo. $\square$

DEFINICIÓN 5.10. *Una retícula $L$ es modular, si $a \leq b$ implica $a \vee (x \wedge b) = (a \vee x) \wedge b$ para cualesquiera $a, b, x \in L$.*

DEFINICIÓN 5.11. *Sean $L$ una retícula, y $x, y \in L$. Decimos que $y$ es un pseudocomplemento de $x$ si:*

- $x \wedge y = \bar{0}$.
- *Si $z \in L$ es tal que $z \wedge x = \bar{0}$ y $y \leq z$, entonces $z = y$.*

## 6. Relaciones de Equivalencia y Particiones

Una relación $R$ sobre un conjunto $X$ es un subconjunto de $R$ del conjunto $X \times X$. Obsevamos que notacionalmente escribimos $xRy$ en vez de $(x,y) \in R$. Consideremos los dos grandes ejemplos de relaciones $=$ y $\leq$, en ambos caso se nos hace extraño ver $= \subseteq X \times X$ o $\leq \subseteq X \times X$.

Dentro de las relaciones que más se estudian son los ordenes y la relaciones de equivalencia.

DEFINICIÓN 6.1. *Sea $X$ un conjunto y $R$ una relación sobre $X$ ($R \subseteq X \times X$). Decimos que:*

- *$R$ es reflexiva, si para todo $x \in X$ tenemos que $xRx$.*
- *$R$ es simétrica, si $xRy$ implica que $yRx$.*
- *$R$ es transitiva, si $xRy$ y $yRz$, entonces $xRz$.*

El ejemplo por excelencia de relación de equivalencia es la igualdad. Pero no es el caso así de los ordenes, que tienen la propiedad de la antisimétria. Notemos que un conjunto paracialmente ordenado que el orden una relación de equivalencia no es más que la igualdad.

Ahora bien, una relación de equivalencia $\sim$ induce una relación de igualdad, por lo que de alguna manera podemos pensar las relaciones de equivalencia como igualdades o preigualdades.

DEFINICIÓN 6.2. *Sea $X$ un conjunto y $\sim$ una relación de equivalencia sobre $X$. Definimos $[x]_\sim = \{y \in X \mid y \sim x\}$. Si la relación de equivalencia se sobre entiende simplemente escribiremos $[x]$. Por otor lado también es importante notar que $[x] \subseteq X$. Al conjunto $[x]$ lo llamaremos la clase de equivalencia de $x$*

PROPOSICIÓN 6.1. *un conjunto y $\sim$ una relación de equivalencia sobre $X$. Para $x, y \in X$ son equivalentes:*

1. $[x] = [y]$.
2. $x \sim y$.

DEMOSTRACIÓN. $1) \Rightarrow 2)$ Notemos que $x \in [x]$ puesto que la relación es reflexiva, y así tenemos que $x \sim x$. Por hipotesis $x \in [x] = [y]$. Así $x \in [y]$. De donde de $x \sim y$.

$2) \Rightarrow 1)$ Sea $z \in [x]$, entonces $x \sim z$. Por lo que usando la hipotesis $x \sim y$, concluimos que $y \sim z$. Así $z \in [y]$. La otra contención es análoga. □

La proposición anteiror nos dice que efectivamente las relaciones de equivalencia se comportan como igualdades con ciertos elementos. Solo falta tener un conjunto donde se defina y es lo que procederemos a hacer.

DEFINICIÓN 6.3. *Sea $X$ un conjunto y $\sim$ una relación de equivalencia sobre $X$. Definimos $X/\sim$ como la familia de clases de equivalencia de $X$, es decir, $\{[x] \mid x \in X\}$.*

Notamos que la relación de equivalencia $\sim$ induce una igualdad en $X/\sim$.

PROPOSICIÓN 6.2. *Sea $X$ un conjunto y $\sim$ una relación de equivalencia sobre $X$. Entonces:*

1. $\emptyset \notin X/\sim$
2. $[x] \cap [y] = \emptyset$ *si* $[x] \neq [y]$
3. $\bigcup_{x\in X} [x] = X$

DEMOSTRACIÓN.

1. Se sigue de que $x \in [x]$ para toda $x \in X$
2. Si $[x] \cap [y] \neq \emptyset$ entonces existe $z \in [x] \cap [y]$. Sea $w \in [x]$, entonces $w \sim x$ y $x \sim z$. Por lo que $w \sim z$ y $z \sim y$. Así $w \sim z$. Por lo que $[x] \subseteq [y]$. De forma analoga $[y] \subseteq [x]$. Por lo que $[x] = [y]$.
3. Como $x \in [x]$, tenemos que $X \subseteq \bigcup_{x\in X} [x]$.

□

DEFINICIÓN 6.4. *Sea $X$ un conjunto, y $\mathfrak{A}$ una familia de subconjuntos de $X$. Diremos que $\mathfrak{A}$ es una partición de $X$ si:*

1. $\emptyset \notin \mathfrak{A}$
2. $A \cap B = \emptyset$ *si* $A \neq B$ *para* $A, B \in \mathfrak{A}$
3. $\bigcup_{A\in\mathfrak{A}} A = X$

Como vimos en la proposición pasada, las relaciones de equivalencia inducen particiones.

## 7. Lema de Zorn

# Bibliografía

[1] J.S. Golan. *The Linear Algebra a Beginning Graduate Student Ought to Know*. Texts in the Mathematical Sciences. Springer, 2004.

[2] Serge Lang. *Introduction to linear algebra*. Springer Science & Business Media, 2012.

[3] Hugo Alberto Rincón Mejía. *Álgebra lineal*. UNAM, Facultad de Ciencias, 2006.

[4] Lawrence E Spence, Arnold J Insel, and Stephen H Friedberg. *Elementary linear algebra*. Prentice Hall, 2000.