Notas de Conjuntos Simpliciales

Facultad de Ciencias, UNAM

Frank Patrick Murphy Hernandez

Luis Alberto Macías Barrales

Índice general

Introducción 5

Capítulo 1. Topología Combinatoria 7
  1. Conjuntos Convexos 7
  2. Complejos Simplicial Geométricos 9
  3. Homología Simplicial 11
  4. El Teorema de Aproximación 11
  5. Teorema del Punto Fijo 11
  Ejercicios 11

Capítulo 2. Complejos Simpliciales Abstractos 13
  1. Realización Geométrica 13
  2. Gráficas 13

Capítulo 3. Conjuntos Simpliciales 15
  1. Definición y ejemplos 15

Capítulo 4. Realización Geométrica 19
  1. 19

Capítulo 5. Complejos Simpliciales 21
  1. 21

Capítulo 6. Grupos de Homotopía 23
  1. 23

Introducción

El objetivo de estas notas es introducir una maquinaria de carácter algebraico y combinatoria para el estudio de la topología algebraica. Estas notas buscas empezar a presentar los conjuntos simpliciales desde un punto constructivo, para despues introducir las nociones categoricas.

Mis dos referencias favoritas sobre conjuntos simplicales son el clásico libro de Peter May [**?**] y el innovador libro de Goerss y Jardine [**?**].

Capítulo 1

Topología Combinatoria

“No existe tal cosa como matemáticas aburridas.”

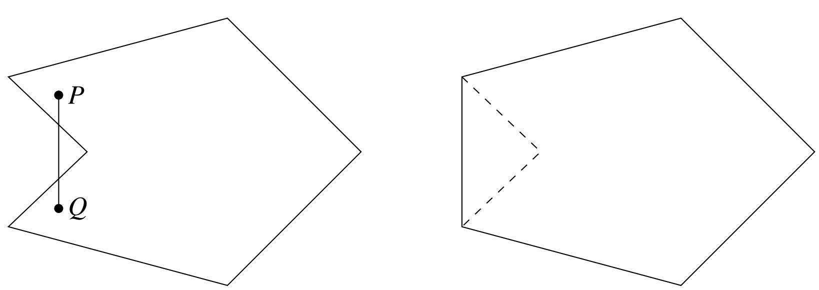
Edgster Dijsktra.

La referencia para conjuntos convexos es [**?**] y la referencia para topología combinatoria es el libro de Pontryagin [**?**].

1. Conjuntos Convexos

Intuitivamente un conjunto (subconjunto de $\mathbb{R}^n$) es convexo si para cualesquiera dos puntos, el segmento de recta que los une esta contenido dentro del conjunto.

Un conjunto no convexo **Un conjunto convexo**



Para poder dar una definción formal primero necesitamos definir el concepto de segemento de recta.

Definición 1. *Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$. Definimos el segemento de recta $[x,y]$ como*

$$\{tx + (1-t)y \in \mathbb{R}^n \mid t \in [0,1]\}$$

.

Notamos que como conjunto $[x,y] = [y,x]$, es decir, el segmento de recta no considera dirección. Para los efecto que nosotros lo usaremos esto queda bien.

Definición 2. *Sea $C \subseteq \mathbb{R}^n$. Decimos que C es un conjunto convexo, si $[x,y] \subseteq C$ para toda $x, y \in C$.*

Proposición 1. *La bola unitaria $\mathbb{B}^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$ es un conjunto convexo.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $x, y \in \mathbb{B}^n$ y $t \in [0,1]$. Entonces:

$$\|tx + (1-t)y\| \leq t\|x\| + (1-t)\|y\| \leq t + (1-t) = 1$$

De aquí $[x,y] \subseteq \mathbb{B}^n$. Por lo tanto $\mathbb{B}^n$ es un conjunto convexo. $\square$

PROPOSICIÓN 2. *Sea $\{C_i\}_{i\in I}$ una familia de conjuntos convexos de $\mathbb{R}^n$. Entonces $\bigcap_{i\in I} C_i$ es un conjunto convexo.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $x, y \in \bigcap_{i\in I} C_i$. Entonces $x, y \in C_i$ para toda $i \in I$. De aquí $[x,y] \subseteq C_i$ para toda $i \in I$. Así $[x,y] \subseteq \bigcap_{i\in I} C_i$. Por lo tanto $\bigcap_{i\in I} C_i$ es convexo. $\square$

DEFINICIÓN 3. *Sea $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Definimos su cápsula convexa $\langle S\rangle$ como:*

- *$S \subseteq \langle S\rangle$.*
- *$\langle S\rangle \subseteq \mathbb{R}^n$ es un conjunto convexo.*
- *Si $S \subseteq S'$ y S' es un conjunto convexo, entonces $\langle S\rangle \subseteq S'$.*

NOTACIÓN 1. *Sean $v_0, \ldots, v_m \in \mathbb{R}^n$. Escribimos $\langle v_0, \ldots, v_m\rangle$ en vez de $\langle\{v_0, \ldots, v_m\}\rangle$.*

PROPOSICIÓN 3. *Sean $S, S' \subseteq \mathbb{R}^n$. Entonces:*

1. *S es convexo si y sólo si $\langle S\rangle = S$.*
2. *Si $S \subseteq S'$, entonces $\langle S\rangle \subseteq \langle S'\rangle$.*
3. *$\langle S\rangle \cup \langle S'\rangle \subseteq \langle S \cup S'\rangle$*
4. *$\langle S \cap S'\rangle \subseteq \langle S\rangle \cap \langle S'\rangle$*

DEMOSTRACIÓN. $\square$

DEFINICIÓN 4. *Ponemos $\mathfrak{C}_n$ como el conjunto de todos los subconjuntos convexos de $\mathbb{R}^n$.*

PROPOSICIÓN 4. *Sea $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Entonces $\langle S\rangle = \bigcap\{C \in \mathfrak{C}_n \mid S \subseteq C\}$.*

DEMOSTRACIÓN. $\square$

DEFINICIÓN 5. *Sean $v_0, \ldots, v_m, w \in \mathbb{R}^n$. Decimos que w es una combinación convexa de $v_0, \ldots, v_m$ si existen $\lambda_0, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ tales que $w = \sum_{i=0}^m \lambda_i v_i$ con $\sum_{i=0}^m \lambda_i = 1$ y $\lambda_i \geq 0$ para todo $i = 0, \ldots, m$.*

PROPOSICIÓN 5. *Sea $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Entonces $\langle S\rangle$ es el conjunto de combinaciones convexas de elementos de S.*

DEMOSTRACIÓN. $\square$

DEFINICIÓN 6. *Sea X un conjunto. Denotamos por $\mathscr{P}_f(X)$ a la familia de subconjuntos finitos de X.*

PROPOSICIÓN 6. *Sea $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Entonces $\langle S \rangle = \bigcup_{X \in \mathscr{P}_f(S)} \langle X \rangle$.*

DEMOSTRACIÓN. $\square$

DEFINICIÓN 7. *Sean $v_0, \ldots, v_m \in \mathbb{R}^n$. Decimos que $v_0, \ldots, v_m$ son afínmente independiente si $v_1 - v_0, \ldots, v_m - v_0$ son linealmente independiente.*

PROPOSICIÓN 7. *Sean $v_0, \ldots, v_m \in \mathbb{R}^n$. Entonces $v_0, \ldots, v_m$ es afinmente independiente si y sólo si $\sum_{i=0}^m \lambda_i v_i = 0$ con $\sum_{i=0}^m \lambda_i = 0$ implica que $\lambda_j = 0$ para toda $j = 0, \ldots, m$.*

DEMOSTRACIÓN. $\square$

PROPOSICIÓN 8. *Sean $v_0, \ldots, v_m \in \mathbb{R}^n$ afinmente independientes. Si $v_{i_0}, \ldots, v_{i_k}$ son algunos de los vectores de $v_0, \ldots, v_m \in \mathbb{R}^n$, entonces $v_{i_0}, \ldots, v_{i_k}$ son afinmente independientes.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $\lambda_{i_0}, \ldots, \lambda_{i_k} \in \mathbb{R}$ tales que $\sum_{j=0}^k \lambda_{i_j} v_{i_j} = 0$ con $\sum_{j=0}^k \lambda_{i_j} = 0$. Si completamos los $\lambda_{i_0}, \ldots, \lambda_{i_k}$ a $\lambda_0, \ldots, \lambda_m$ de modo que los nuevos lambdas sean cero. Por lo que tenemos que $\sum_{i=0}^m \lambda_i v_i = 0$ y $\sum_{i=0}^m \lambda_i = 0$. De donde se sigue que $\lambda_j = 0$ para toda $j = 0, \ldots, m$. En particular tenemos que $\lambda_{i_j} = 0$ para toda $j = 0, \ldots, k$. $\square$

PROPOSICIÓN 9. *Sean $v_0, \ldots, v_m \in \mathbb{R}^n$ afinmente independientes. Entonces para $w \in \langle v_0, \ldots, v_m \rangle$ existen únicos $\lambda_0, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ tales que $w = \sum_{i=0}^m \lambda_i v_i$ con $\sum_{i=0}^m \lambda_i = 1$ y $\lambda_i \geq 0$ para todo $i = 0, \ldots, m$.*

DEMOSTRACIÓN. $\square$

2. Complejos Simplicial Geométricos

DEFINICIÓN 8. *Sea $C \subseteq \mathbb{R}^n$. Decimos que C es un k-simplejo si es la cápsula convexa de un conjunto S de $k+1$ elementos afinmente independientes. Comúnmente llamaremos a C un simplejo y $dim(C) = k$. Decimos que $\langle S \rangle$ es una m-cara de C, si $S \subseteq C$ es un conjunto no vacío y $|S| = m+1$. A una m-cara la llamamos propia si $m < k$. A las 0-caras de C, las llamamos vértices de C. A las 1-caras, las llamamos aristas de C. A las $(k-1)$-caras, las llamamos facetas de C.*

EJEMPLO 1. *Para n un natural, definimos el n-simplejo estandar* Δ^n *como la cápsula convexa de la base canónica de* $\mathbb{R}^{n+1}$. *Notamos que:*

$$\Delta^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=0}^{n} x_i = 1, x_i \geq 0 \text{ para todo } i = 0, \ldots, n\}$$

DEFINICIÓN 9. *Un complejo simplicial geométrico* $\mathscr{K}$ *es una colección finita de simplejos en* $\mathbb{R}^n$ *que cumple:*

- *Si* $C \in \mathscr{K}$ *y D es una cara de* σ*, entonces* $D \in \mathscr{K}$
- *Sean* $C_1, C_2 \in \mathscr{K}$. *Si* $C_1 \cap C_1 \neq \emptyset$*, entonces* $C_1 \cap C_2$ *es una cara de* C_1 *y* C_2.

A los 0*-simplejos de* $\mathscr{K}$ *los llamamos vértices de* $\mathscr{K}$. *Llamamos dimensión de* $\mathscr{K}$ *a* $max\{dim(C) \mid C \in \mathscr{K}\}$. *La denotamos por* $dim(\mathscr{K})$.

DEFINICIÓN 10. *Para* $\mathscr{K}$ *un complejo simplicial geométrico, definimos* $F(\mathscr{K})$ *como el conjunto de todas las caras propias de* $\mathscr{K}$.

PROPOSICIÓN 10. *Sea* $\mathscr{K}$ *un complejo simplicial geométrico. Entonces* $F(\mathscr{K})$ *es un complejo simplicial geométrico.*

DEMOSTRACIÓN. $\square$

PROPOSICIÓN 11. *Sea* $\mathscr{K}$ *un complejo simplicial geométrico. Entonces* $dim(F(\mathscr{K})) = dim(\mathscr{K}) - 1$.

DEMOSTRACIÓN. $\square$

DEFINICIÓN 11. *Sea* $\mathscr{K}$ *un complejo simplicial geométrico. La realización geométrica de* $\mathscr{K}$ *la definimos como* $\bigcup \mathscr{K}$*, y la denotamos por* $|\mathscr{K}|$.

PROPOSICIÓN 12. *Sea* $\mathscr{K}$ *un complejo simplicial geométrico. Entonces* $\partial(|\mathscr{K}|) = |F(\mathscr{K})|$.

DEMOSTRACIÓN. $\square$

DEMOSTRACIÓN. $\square$

3. Homología Simplicial

4. El Teorema de Aproximación

5. Teorema del Punto Fijo

Ejercicios

EJERCICIO 1. *Sea* $x \in \mathbb{R}^n$. *Entonces* $\{x\}$ *es un conjunto convexo.*

Capítulo 2

Complejos Simpliciales Abstractos

1. Realización Geométrica

DEFINICIÓN 12. *Sea X un conjunto finito. Un complejo simplicial abstracto $\mathbb{K}$ sobre X es una familia de subconjuntos de X tal que:*

- $\emptyset \notin \mathbb{K}$
- $X = \bigcup \mathbb{K}$
- *Si $\sigma \in \mathbb{K}$ y $\tau \subseteq \sigma$ con $\tau \neq \emptyset$, entonces $\tau \in \mathbb{K}$.*

A X lo llamamos el conjunto de vértices de $\mathbb{K}$.

DEFINICIÓN 13. *Sea $\mathbb{K}$ un complejo simplicial abstracto y $\sigma \in \mathbb{K}$. Decimos que σ es n-simplejo abstracto, si $|\sigma| = n+1$. Con esta definición tenemos que los 0-simplejos abstractos son los vértices de $\mathbb{K}$. Definimos la dimensión de $\mathbb{K}$ como $max\{|\sigma| - 1 \mid \sigma \in \mathbb{K}\}$, y la denotamos por $dim(\mathbb{K})$*

DEFINICIÓN 14. *Sea $\mathbb{K}$ con complejo simplicial abstracto con conjunto de vértices $X = \{x_0, \ldots, x_n\}$. Para $\sigma \in \mathbb{K}$, definimos $\sigma_G = \langle e_i \mid x_i \in \sigma \rangle$ donde $e_0, \ldots, e_n$ es la base canónica de $\mathbb{R}^{n+1}$. Es evidente que σ_G es un simplejo. Defimos $G(\mathbb{K})$ como la familia de simplejos geométricos $\{\sigma_G \mid \sigma \in \mathbb{K}\}$.*

PROPOSICIÓN 13. *Sea $\mathbb{K}$ un complejos simplicial abstracto. Entonces $G(\mathbb{K})$ es un complejo simplicial geométrico.*

DEMOSTRACIÓN. $\square$

2. Gráficas

Capítulo 3

Conjuntos Simpliciales

1. Definición y ejemplos

DEFINICIÓN 15. *Un conjunto simplicial es una terna* (K,δ,σ)*, donde* K *es una familia de conjuntos indicada en los naturales* $K=\{K_n\}_{n=0}^{\infty}$*,* δ *es una familia de funciones* $\delta_i^n : K_n \longrightarrow K_{n-1}$ *con* $n\in\mathbb{N}^+$ *y* $0\le i\le n$ *y* σ *es una familia de funciones* $\sigma_i^n : K_n \longrightarrow K_{n+1}$ *con* $n\in\mathbb{N}$ *y* $0\le i\le n$*, y estas familias de funciones satisfacen las siguientes igualdades:*

$$
\begin{array}{lr}
\delta_i^{n-1}\delta_j^n = \delta_{j-1}^{n-1}\delta_i^n & 0\le i<j\le n \\
\sigma_i^{n+1}\sigma_j^n = \sigma_{j+1}^{n+1}\sigma_i^n & 0\le i\le j\le n \\
\delta_i^{n+1}\sigma_j^n = \sigma_{j-1}^{n-1}\delta_i^n & 0\le i<j\le n \\
\delta_j^{n+1}\sigma_j^n = 1_{K_n} & 0\le j\le n \\
\delta_{j+1}^{n+1}\sigma_j^n = 1_{K_n} & 0\le j\le n \\
\delta_i^{n+1}\sigma_j^n = \sigma_j^{n+1}\delta_{i-1}^n & 1\le j+1<i\le n+1
\end{array}
$$

Los elementos de K_n se llaman n simplejos, las funciones δ_i caras y las funciones σ_i degeneraciones.

EJEMPLO 2. *Se considera los simplejos:*

$$\Delta_n = \{(x_0,\ldots,x_n)\in\mathbb{R} \mid \sum_{i=0}^{n} x_i = 1, x_i\ge 0 \forall i=0,\ldots,n\}$$

donde n *es un natural. Sea* X *un espacio topológico, se considera* $S_n(X)$ *el conjunto de las funciones continuas de* Δ_n *en* X *donde* n *es un natural. Así es que de esta forma se obtiene un conjunto indicado en los naturales, a este conjunto se le llama el conjunto de los n-simplejos singulares de X. Solo basta decir quienes serán las familias de funciones y ver que cumplen las igualdades.*

Se observa que δ_i^n va de $S_n(X)$ en $S_{n-1}(X)$ por lo que un elemento $f \in S_n(X)$ es una función continua $f\colon \Delta_n \longrightarrow X$ y se le debe de asignar una función continua $\delta_i^n(f) \in S_{n-1}(X)$ que va de Δ_{n-1} en X.

Sea $(x_0,\dots,x_{n-1}) \in \Delta_{n-1}$. Se pone:

$$\delta_i^n(f)(x_0,\dots,x_{n-1}) = f(x_0,\dots,x_{i-1},0,x_i,\dots,x_{n-1})$$

De manera análoga, se tiene que para $(x_0,\dots,x_{n+1}) \in \Delta_{n+1}$:

$$\sigma_i^n(f)(x_0,\dots,x_{n+1}) = f(x_0,\dots,x_{i-1},x_i+x_{i+1},x_{i+2},\dots,x_{n+1})$$

Se hace notar que

$$(x_0,\dots,x_{i-1},0,x_i,\dots,x_{n-1}),(x_0,\dots,x_{i-1},x_i+x_{i+1},x_{i+2},\dots,x_{n+1}) \in \Delta_n$$

por lo que ambas funciones estan bien definidas. Más aún se pueden crear dos familias de funciones auxiliares, las primeras $d_i^n\colon \Delta_{n-1} \longrightarrow \Delta_n$ con $n \geq 1$ y $0 \leq i \leq n$ dadas por:

$$d_i^n(x_0,\dots,x_{n-1}) = (x_0,\dots,x_{i-1},0,x_i,\dots,x_{n-1})$$

y las segundas $s_i^n\colon \Delta_{n+1} \longrightarrow \Delta_n$ con $n \in \mathbb{N}$ y $0 \leq i \leq n$ dadas por

$$s_i^n(x_0,\dots,x_{n+1}) = (x_0,\dots,x_{i-1},x_i+x_{i+1},x_{i+2},\dots,x_{n+1})$$

Es inmediato que $\delta_i^n(f) = f \circ d_i^n$ y $\sigma_i^n(f) = f \circ s_i^n$, por lo que para probar que $\delta_i^n(f)$ y $\sigma_i^n(f)$ son continuas bastaría ver que d_i^n y s_i^n son continuas, ya que composición de continuas es continua. Primero se ve que d_i^n es continua, ya que preserva distancias. Se tiene que s_i^n es continua, por que es el producto de identidades con la suma. Se procede a demostrar las identidades simpliciales:

Sean $0 \leq i < j \leq n$, entonces $\delta_i^{n-1}\delta_j^n(f) = f \circ d_j^n \circ d_i^{n-1}$ y $\delta_{j-1}^{n-1}\delta_i^n(f) = f \circ d_i^n \circ d_{j-1}^{n-1}$ para $f \in S_n(X)$. Por lo que basta demostrar que $d_j^n \circ d_i^{n-1} = d_i^n \circ d_{j-1}^{n-1}$. Sea $(x_0,\dots,x_{n-2}) \in \Delta_{n-2}$. Haciendo ambas cuentas:

$$\begin{aligned} d_j^n \circ d_i^{n-1}(x_0,\dots,x_{n-2}) &= d_j^n(x_0,\dots,x_{i-1},0,x_i,\dots,x_{n-2}) \\ &= (x_0,\dots,x_{i-1},0,x_i,\dots,x_{j-2},0,x_{j-1},\dots,x_{n-2}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_i^n \circ d_{j-1}^{n-1}(x_0,\dots,x_{n-2}) &= d_i^n(x_0,\dots,x_{j-2},0,x_{j-1},\dots,x_{n-2}) \\ &= (x_0,\dots,x_{i-1},0,x_i,\dots,x_{j-2},0,x_{j-1},\dots,x_{n-2}) \end{aligned}$$

Sean $0 \leq i \leq j \leq n$, entonces $\sigma_i^{n+1}\sigma_j^n(f) = f \circ s_j^n \circ s_i^{n+1}$ y $\sigma_{j+1}^{n+1}\sigma_i^n(f) = f \circ s_i^n \circ s_{j+1}^{n+1}$ para $f \in S_n(X)$. Por lo que basta demostrar que $s_j^n \circ s_i^{n+1} = s_i^n \circ s_{j+1}^{n+1}$. Sea $(x_0,\dots,x_{n+2}) \in \Delta_{n+2}$. Haciendo ambas cuentas:

$$s_j^n \circ s_i^{n+1}(x_0,\dots,x_{n+2}) = s_j^n(x_0,\dots,x_{i-1},x_i+x_{i+1},x_{i+2},\dots,x_{n+2})$$
$$= \begin{cases} (x_0,\dots,x_{i-1},x_i+x_{i+1}+x_{i+2},\dots,x_{n+2}) & \text{si } i=j \\ (x_0,\dots,x_{i-1},x_i+x_{i+1},\dots,x_{j+1}+x_{j+2},\dots,x_{n+2}) & \text{si } i<j \end{cases}$$

$$s_i^n \circ s_{j+1}^{n+1}(x_0,\dots,x_{n+2}) = s_i^n(x_0,\dots,x_j,x_{j+1}+x_{j+2},x_{i+2},\dots,x_{n+2})$$
$$= \begin{cases} (x_0,\dots,x_{i-1},x_i+x_{i+1}+x_{i+2},\dots,x_{n+2}) & \text{si } i=j \\ (x_0,\dots,x_{i-1},x_i+x_{i+1},\dots,x_{j+1}+x_{j+2},\dots,x_{n+2}) & \text{si } i<j \end{cases}$$

Sean $0 \leq i < j \leq n$, entonces $\delta_i^{n+1}\sigma_j^n(f) = f \circ s_j^n \circ d_i^{n+1}$ y $\sigma_{j-1}^{n-1}\delta_i^n(f) = f \circ d_i^n \circ s_{j-1}^{n-1}$ para $f \in S_n(X)$. Por lo que basta demostrar que $s_j^n \circ d_i^{n+1} = d_i^n \circ s_{j-1}^{n-1}$. Sea $(x_0,\dots,x_n) \in \Delta_n$. Haciendo ambas cuentas:

$$s_j^n \circ d_i^{n+1}(x_0,\dots,x_n) = s_j^n(x_0,\dots,x_{i-1},0,x_i,\dots,x_n)$$
$$= (x_0,\dots,x_{i-1},0,\dots,x_{j-1}+x_j,\dots,x_n)$$

$$d_i^n \circ s_{j-1}^{n-1}(x_0,\dots,x_n) = d_i^n(x_0,\dots,x_{j-1}+x_j,\dots,x_n)$$
$$= (x_0,\dots,x_{i-1},0,\dots,x_{j-1}+x_j,\dots,x_n)$$

A este conjunto simplicial se le conoce como el complejo singular total de X.

EJEMPLO 3. *Un complejo simplicial abstracto Δ sobre un conjunto X es una familia de de subconjuntos finitos de X no vacíos, tal que si $\sigma \in \Delta$ y $\tau \subseteq \sigma$ con $\tau \neq \emptyset$ entonces $\tau \in \Delta$.*

Para un complejo simplicial abstracto Δ y n es un natural, se pone:

$$K_n = \{(x_0,\dots,x_n) \in X^{n+1} \mid \{x_0,\dots,x_n\} \in \Delta\}$$

Las funciones cara están dada por:

$$\delta_i^n(x_0,\dots,x_n) = (x_0,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_n)$$

Las funciones degeneración están dadas por:

$$\sigma_i^n(x_0,\dots,x_n) = (x_0,\dots,x_i,x_i,\dots,x_n)$$

EJEMPLO 4. *Sea X un espacio topológico y $\mathscr{G}$ una cubierta abierta de X, se define $N(\mathscr{G})$ como el conjunto de todos los subconjuntos finitos $\mathscr{K}$ de $\mathscr{G}$ no vacíos tales que $\bigcap \mathscr{K} \neq \emptyset$. Por lo que $N(\mathscr{G})$ induce un conjunto simplicial como en el exampleplo anterior.*

EJEMPLO 5. *Sea P un orden parcial. Para n un natural se pone:*

$$P_n = \{(x_0, \ldots, x_n) \in P^{n+1} \mid x_i \leq x_{i+1} \forall i = 0, \ldots, n-1\}$$

Capítulo 4

Realización Geométrica

1.

Capítulo 5

Complejos Simpliciales

1.

Capítulo 6

Grupos de Homotopía

1.