Notas de Conjuntos Simpliciales

Facultad de Ciencias, UNAM

Frank Patrick Murphy Hernandez

Índice general

Introducción 5

Capítulo 1. Topología Combinatoria 7
1. Conjuntos Convexos 7
2. Complejos Simplicial Geométricos 10
3. Homología Simplicial 11
4. El Teorema de Aproximación 11
5. Teorema del Punto Fijo 11
Ejercicios 11

Capítulo 2. Complejos Simpliciales Abstractos 13
1. Realización Geométrica 13
2. Gráficas 13

Capítulo 3. Conjuntos Simpliciales 15
1. Definición y ejemplos 15

Capítulo 4. Realización Geométrica 19
1. 19

Capítulo 5. Complejos Simpliciales 21
1. 21

Capítulo 6. Grupos de Homotopía 23
1. 23

Bibliografía 25

Introducción

El objetivo de estas notas es introducir una maquinaria de carácter algebraico y combinatoria para el estudio de la topología algebraica. Estas notas buscas empezar a presentar los conjuntos simpliciales desde un punto constructivo, para despues introducir las nociones categoricas.

Mis dos referencias favoritas sobre conjuntos simplicales son el clásico libro de Peter May [**3**] y el innovador libro de Goerss y Jardine [**1**].

[**?**] [**?**]

Capítulo 1

Topología Combinatoria

“No existe tal cosa como matemáticas aburridas.”

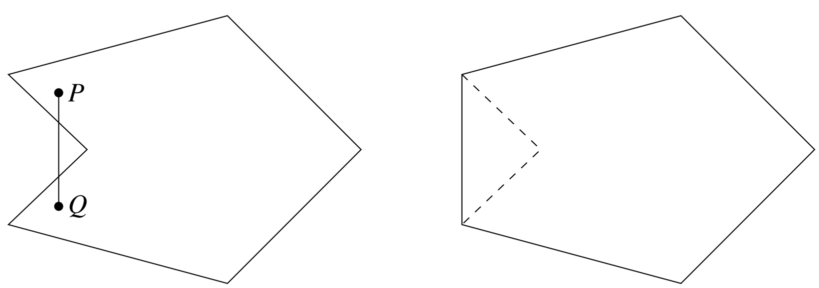
Edgster Dijsktra.

La referencia para conjuntos convexos es [**2**] y la referencia para topología combinatoria es el libro de Pontryagin [**4**].

1. Conjuntos Convexos

Intuitivamente un conjunto (subconjunto de $\mathbb{R}^n$) es convexo si para cualesquiera dos puntos, el segmento de recta que los une esta contenido dentro del conjunto.

Un conjunto no convexo **Un conjunto convexo**



Para poder dar una defición formal primero necesitamos definir el concepto de segemento de recta.

DEFINICIÓN 1. *Sean $x,y \in \mathbb{R}^n$. Definimos el segemento de recta $[x,y]$ como*

$$\{tx + (1-t)y \in \mathbb{R}^n \mid t \in [0,1]\}$$

.

Notamos que como conjunto $[x,y] = [y,x]$, es decir, el segmento de recta no considera dirección. Para los efecto que nosotros lo usaremos esto queda bien.

DEFINICIÓN 2. *Sea $C \subseteq \mathbb{R}^n$. Decimos que C es un conjunto convexo, si $[x,y] \subseteq C$ para toda $x,y \in C$.*

PROPOSICIÓN 1. *La bola unitaria $\mathbb{B}^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$ es un conjunto convexo.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $x,y \in \mathbb{B}^n$ y $t \in [0,1]$. Entonces:

$$\|tx+(1-t)y\| \leq t\|x\|+(1-t)\|y\| \leq t+(1-t)=1$$

De aquí $[x,y] \subseteq \mathbb{B}^n$. Por lo tanto $\mathbb{B}^n$ es un conjunto convexo. $\square$

PROPOSICIÓN 2. *Sea $\{C_i\}_{i\in I}$ una familia de conjuntos convexos de $\mathbb{R}^n$. Entonces $\bigcap_{i\in I} C_i$ es un conjunto convexo.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $x,y \in \bigcap_{i\in I} C_i$. Entonces $x,y \in C_i$ para toda $i \in I$. De aquí $[x,y] \subseteq C_i$ para toda $i \in I$. Así $[x,y] \subseteq \bigcap_{i\in I} C_i$. Por lo tanto $\bigcap_{i\in I} C_i$ es convexo. $\square$

DEFINICIÓN 3. *Sea $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Definimos su cápsula convexa $\langle S\rangle$ como:*

c1) $S \subseteq \langle S\rangle$.

c2) $\langle S\rangle \subseteq \mathbb{R}^n$ *es un conjunto convexo.*

c3) *Si $S \subseteq S'$ y S' es un conjunto convexo, entonces $\langle S\rangle \subseteq S'$.*

NOTACIÓN 1. *Sean $v_0,\dots,v_m \in \mathbb{R}^n$. Escribimos $\langle v_0,\dots,v_m\rangle$ en vez de $\langle\{v_0,\dots,v_m\}\rangle$.*

PROPOSICIÓN 3. *Sean $S,S' \subseteq \mathbb{R}^n$. Entonces:*

1. *S es convexo si y sólo si $\langle S\rangle = S$.*
2. *Si $S \subseteq S'$, entonces $\langle S\rangle \subseteq \langle S'\rangle$.*
3. $\langle S\rangle \cup \langle S'\rangle \subseteq \langle S\cup S'\rangle$
4. $\langle S\cap S'\rangle \subseteq \langle S\rangle \cap \langle S'\rangle$

DEMOSTRACIÓN. Las partes 1 y 2 se dejan como ejercicios.

Para la parte 3 notemos que $S,S' \subseteq S\cup S'$, por lo que de 2 se deduce que $\langle S\rangle, \langle S'\rangle \subseteq \langle S\cup S'\rangle$ por lo que $\langle S\rangle \cup \langle S\rangle \subseteq \langle S\cup S'\rangle$.

La parte 4 es análoga a la parte 3. $\square$

DEFINICIÓN 4. *Ponemos $\mathfrak{C}_n$ como el conjunto de todos los subconjuntos convexos de $\mathbb{R}^n$.*

PROPOSICIÓN 4. *Sea $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Entonces $\langle S\rangle = \bigcap\{C \in \mathfrak{C}_n \mid S \subseteq C\}$.*

DEMOSTRACIÓN. De c3 tenemos que $\langle S\rangle \subseteq C$, para cualquier $C \in \mathfrak{C}_n$ tal que $S \subseteq C$, por lo que $\langle S\rangle \subseteq \bigcap\{C \in \mathfrak{C}_n | S \subseteq C\}$. Por otro lado, como $\langle S\rangle$ es convexo y $S \subseteq \langle S\rangle$, entonces $\bigcap\{C \in \mathfrak{C}_n \mid S \subseteq C\} \subseteq \langle S\rangle$. $\square$

DEFINICIÓN 5. *Sean $v_0, \ldots, v_m, w \in \mathbb{R}^n$. Decimos que w es una combinación convexa de $v_0, \ldots, v_m$ si existen $\lambda_0, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ tales que $w = \sum_{i=0}^m \lambda_i v_i$ con $\sum_{i=0}^m \lambda_i = 1$ y $\lambda_i \geq 0$ para todo $i = 0, \ldots, m$.*

PROPOSICIÓN 5. *Sea $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Entonces $\langle S \rangle$ es el conjunto de combinaciones convexas de elementos de S.*

DEMOSTRACIÓN. $\square$

DEFINICIÓN 6. *Sea X un conjunto. Denotamos por $\mathscr{P}_f(X)$ a la familia de subconjuntos finitos de X.*

PROPOSICIÓN 6. *Sea $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Entonces $\langle S \rangle = \bigcup_{X \in \mathscr{P}_f(S)} \langle X \rangle$.*

DEMOSTRACIÓN. $\square$

DEFINICIÓN 7. *Sean $v_0, \ldots, v_m \in \mathbb{R}^n$. Decimos que $v_0, \ldots, v_m$ son afínmente independiente si $v_1 - v_0, \ldots, v_m - v_0$ son linealmente independiente.*

PROPOSICIÓN 7. *Sean $v_0, \ldots, v_m \in \mathbb{R}^n$. Entonces $v_0, \ldots, v_m$ es afinmente independiente si y sólo si $\sum_{i=0}^m \lambda_i v_i = 0$ con $\sum_{i=0}^m \lambda_i = 0$ implica que $\lambda_j = 0$ para toda $j = 0, \ldots, m$.*

DEMOSTRACIÓN. $\square$

PROPOSICIÓN 8. *Sean $v_0, \ldots, v_m \in \mathbb{R}^n$ afinmente independientes. Si $v_{i_0}, \ldots, v_{i_k}$ son algunos de los vectores de $v_0, \ldots, v_m \in \mathbb{R}^n$, entonces $v_{i_0}, \ldots, v_{i_k}$ son afinmente independientes.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $\lambda_{i_0}, \ldots, \lambda_{i_k} \in \mathbb{R}$ tales que $\sum_{j=0}^k \lambda_{i_j} v_{i_j} = 0$ con $\sum_{j=0}^k \lambda_{i_j} = 0$. Si completamos los $\lambda_{i_0}, \ldots, \lambda_{i_k}$ a $\lambda_0, \ldots, \lambda_m$ de modo que los nuevos lambdas sean cero. Por lo que tenemos que $\sum_{i=0}^m \lambda_i v_i = 0$ y $\sum_{i=0}^m \lambda_i = 0$. De donde se sigue que $\lambda_j = 0$ para toda $j = 0, \ldots, m$. En particular tenemos que $\lambda_{i_j} = 0$ para toda $j = 0, \ldots, k$. $\square$

PROPOSICIÓN 9. *Sean $v_0, \ldots, v_m \in \mathbb{R}^n$ afinmente independientes. Entonces para $w \in \langle v_0, \ldots, v_m \rangle$ existen únicos $\lambda_0, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ tales que $w = \sum_{i=0}^m \lambda_i v_i$ con $\sum_{i=0}^m \lambda_i = 1$ y $\lambda_i \geq 0$ para todo $i = 0, \ldots, m$.*

DEMOSTRACIÓN. $\square$

2. Complejos Simplicial Geométricos

DEFINICIÓN 8. *Sea $C \subseteq \mathbb{R}^n$. Decimos que C es un k-simplejo si es la cápsula convexa de un conjunto S de $k+1$ elementos afinmente independientes. Comúnmente llamaremos a C un simplejo y $dim(C) = k$. Decimos que $\langle S \rangle$ es una m-cara de C, si $S \subseteq C$ es un conjunto no vacío y $|S| = m+1$. A una m-cara la llamamos propia si $m < k$. A las 0-caras de C, las llamamos vértices de C. A las 1-caras, las llamamos aristas de C. A las $(k-1)$-caras, las llamamos facetas de C.*

EJEMPLO 1. *Para n un natural, definimos el n-simplejo estandar Δ^n como la cápsula convexa de la base canónica de $\mathbb{R}^{n+1}$. Notamos que:*

$$\Delta^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=0}^{n} x_i = 1, x_i \geq 0 \text{ para todo } i = 0, \ldots, n\}$$

DEFINICIÓN 9. *Un complejo simplicial geométrico $\mathscr{K}$ es una colección finita de simplejos en $\mathbb{R}^n$ que cumple:*

- *Si $C \in \mathscr{K}$ y D es una cara de σ, entonces $D \in \mathscr{K}$*
- *Sean $C_1, C_2 \in \mathscr{K}$. Si $C_1 \cap C_1 \neq \emptyset$, entonces $C_1 \cap C_2$ es una cara de C_1 y C_2.*

A los 0-simplejos de $\mathscr{K}$ los llamamos vértices de $\mathscr{K}$. Llamamos dimensión de $\mathscr{K}$ a $max\{dim(C) \mid C \in \mathscr{K}\}$. La denotamos por $dim(\mathscr{K})$.

DEFINICIÓN 10. *Para $\mathscr{K}$ un complejo simplicial geométrico, definimos $F(\mathscr{K})$ como el conjunto de todas las caras propias de $\mathscr{K}$.*

PROPOSICIÓN 10. *Sea $\mathscr{K}$ un complejo simplicial geométrico. Entonces $F(\mathscr{K})$ es un complejo simplicial geométrico.*

DEMOSTRACIÓN. □

PROPOSICIÓN 11. *Sea $\mathscr{K}$ un complejo simplicial geométrico. Entonces $dim(F(\mathscr{K})) = dim(\mathscr{K}) - 1$.*

DEMOSTRACIÓN. □

DEFINICIÓN 11. *Sea $\mathscr{K}$ un complejo simplicial geométrico. La realización geométrica de $\mathscr{K}$ la definimos como $\bigcup \mathscr{K}$, y la denotamos por $|\mathscr{K}|$.*

PROPOSICIÓN 12. *Sea $\mathscr{K}$ un complejo simplicial geométrico. Entonces $\partial(|\mathscr{K}|) = |F(\mathscr{K})|$.*

DEMOSTRACIÓN. □

3. Homología Simplicial

DEFINICIÓN 12. *Sea $\mathscr{K}$ un complejo simplicial geométrico y $C \in \mathscr{K}$ con n vértices. Denotamos por C_0 a su conjunto de vértices. Un ordenamiento de los vértices de C es un ordenamiento de C_0. Si llamamos $\mathscr{O}(C)$ al conjunto de ordenamientos de C, una orientación de C es una función $o\colon \mathscr{O}(C) \longrightarrow \{0,1\}$ tal que para toda permutación $\sigma \in S_n$ y para todo ordenamiento $x \in \mathscr{O}(C)$, $o(\sigma x) = sgn(\sigma)o(x)$*

Es inmediato notar que si o es una orientación de C, entonces $-o$ también es una orientación de C. En particular, un 0-simplejo $C = \{x\}$ tiene dos orientaciones, 1 y -1.

DEFINICIÓN 13. *Sea $\mathscr{K}$ un complejo simplicial geométrico y $C \in \mathscr{K}$ con n-simplejo. Si $C = \{x_0, \dots, x_n\}$, entonces obtenemos una de sus $n-1$-caras al eliminar uno de sus vértices. La cara obtenida al eliminar el vértice x_i, la llamamos la cara opuesta al vértice x_i.*

PROPOSICIÓN 13. *Sea $\mathscr{K}$ un complejo simplicial geométrico y $C \in \mathscr{K}$ con n-simplejo. Si $C = \{x_0, \dots, x_n\}$, D es la cara opuesta al vértice x_i y o es un ordenamiento de C, entonces $(-1)^i o|_D$ es un ordenamiento de D.*

DEMOSTRACIÓN. Hay que ver que esto no depende del orden original de $C = \{x_0, \dots, x_n\}$

□

4. El Teorema de Aproximación

5. Teorema del Punto Fijo

Ejercicios

EJERCICIO 1. *Sea $x \in \mathbb{R}^n$. Entonces $\{x\}$ es un conjunto convexo.*

EJERCICIO 2. *Demuestre 1 y 2 de la proposición 4*

Capítulo 2

Complejos Simpliciales Abstractos

1. Realización Geométrica

DEFINICIÓN 14. *Sea X un conjunto finito. Un complejo simplicial abstracto $\mathbb{K}$ sobre X es una familia de subconjuntos de X tal que:*

- $\emptyset \notin \mathbb{K}$
- $X = \bigcup \mathbb{K}$
- *Si $\sigma \in \mathbb{K}$ y $\tau \subseteq \sigma$ con $\tau \neq \emptyset$, entonces $\tau \in \mathbb{K}$.*

A X lo llamamos el conjunto de vértices de $\mathbb{K}$.

DEFINICIÓN 15. *Sea $\mathbb{K}$ un complejo simplicial abstracto y $\sigma \in \mathbb{K}$. Decimos que σ es n-simplejo abstracto, si $|\sigma| = n+1$. Con esta definición tenemos que los 0-simplejos abstractos son los vértices de $\mathbb{K}$. Definimos la dimensión de $\mathbb{K}$ como $max\{|\sigma| - 1 \mid \sigma \in \mathbb{K}\}$, y la denotamos por $dim(\mathbb{K})$*

DEFINICIÓN 16. *Sea $\mathbb{K}$ con complejo simplicial abstracto con conjunto de vértices $X = \{x_0, \ldots, x_n\}$. Para $\sigma \in \mathbb{K}$, definimos $\sigma_G = \langle e_i \mid x_i \in \sigma \rangle$ donde $e_0, \ldots, e_n$ es la base canónica de $\mathbb{R}^{n+1}$. Es evidente que σ_G es un simplejo. Defimos $G(\mathbb{K})$ como la familia de simplejos geométricos $\{\sigma_G \mid \sigma \in \mathbb{K}\}$.*

PROPOSICIÓN 14. *Sea $\mathbb{K}$ un complejos simplicial abstracto. Entonces $G(\mathbb{K})$ es un complejo simplicial geométrico.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $\sigma_G, \tau_G \in G(\mathbb{K})$ tales que $\sigma_G \cap \tau_G \neq \emptyset$. $\square$

2. Gráficas

Capítulo 3

Conjuntos Simpliciales

1. Definición y ejemplos

DEFINICIÓN 17. *Un conjunto simplicial es una terna* (K,δ,σ)*, donde* K *es una familia de conjuntos indicada en los naturales* $K=\{K_n\}_{n=0}^{\infty}$*,* δ *es una familia de funciones* $\delta_i^n\colon K_n \longrightarrow K_{n-1}$ *con* $n\in\mathbb{N}^+$ *y* $0\le i\le n$ *y* σ *es una familia de funciones* $\sigma_i^n\colon K_n\longrightarrow K_{n+1}$ *con* $n\in\mathbb{N}$ *y* $0\le i\le n$*, y estas familias de funciones satisfacen las siguientes igualdades:*

$$
\begin{array}{lr}
\delta_i^{n-1}\delta_j^n=\delta_{j-1}^{n-1}\delta_i^n & 0\le i<j\le n\\
\sigma_i^{n+1}\sigma_j^n=\sigma_{j+1}^{n+1}\sigma_i^n & 0\le i\le j\le n\\
\delta_i^{n+1}\sigma_j^n=\sigma_{j-1}^{n-1}\delta_i^n & 0\le i<j\le n\\
\delta_j^{n+1}\sigma_j^n=1_{K_n} & 0\le j\le n\\
\delta_{j+1}^{n+1}\sigma_j^n=1_{K_n} & 0\le j\le n\\
\delta_i^{n+1}\sigma_j^n=\sigma_j^{n+1}\delta_{i-1}^n & 1\le j+1<i\le n+1
\end{array}
$$

Los elementos de K_n se llaman n simplejos, las funciones δ_i caras y las funciones σ_i degeneraciones.

El concepto de conjunto simplicial no es intuitivo a primera instancia, pero trabajandosele un poco puede irse entiendo como una idea natural. Se empieza definiendo $[n]:=\{0,...,n\}$ para todo natural n. Para todo natural positivo n e $i=0,...n$ se define $d_i^n:[n-1]\longrightarrow[n]$ como:

$$d_i^n(x)=\begin{cases}x & \text{si } x<i\\ x+1 & \text{si } x\ge i\end{cases}$$

Para todo natural n e $i=0,...,n-1$ se define $s_i^n:[n+1]\longrightarrow[n]$

$$s_i^n(x)=\begin{cases}x & \text{si } x\le i\\ x-1 & \text{si } x>i\end{cases}$$

A las funciones s_i^n se les llama codegeneraciones y a las funciones d_i^n se les llama cocaras. Estas funciones cumplen unas identidades que se llaman identidades cosimpliciales.

$$d_j^{n+1}d_i^n = d_i^{n+1}d_{j-1}^n \qquad \text{si } i < j$$
$$s_j^n s_i^{n+1} = s_i^n s_{j+1}^{n+1} \qquad \text{si } i \leq j$$
$$d_j^{n-1}s_i^n = \begin{cases} s_i^{n-1}d_{j-1}^{n-2} & \text{si } i < j \\ 1 & \text{si } i = j \text{ o } i = j+1 \\ s_{i-1}^{n-1}d_j^{n-2} & \text{si } i > j+1 \end{cases} \qquad \text{si } n \geq 1$$

PROPOSICIÓN 15. *Se cumplen las identidades cosimpliciales.*

DEMOSTRACIÓN. 1) $d_j^{n+1}d_i^n = d_i^{n+1}d_{j-1}^n$ si $i < j$.

Si $x < i$, entonces $d_j^{n+1}(d_i^n(x)) = d_j^{n+1}(x) = x$ y $d_i^{n+1}(d_{j-1}^n(x)) = d_i^{n+1}(x) = x$, por lo que $d_j^{n+1}d_i^n(x) = d_i^{n+1}d_{j-1}^n(x)$.

Si $i \leq x < j-1$ entonces $d_j^{n+1}(d_i^n(x)) = d_j^{n+1}(x+1) = x$ y $d_i^{n+1}(d_{j-1}^n(x)) = d_i^{n+1}(x) = x+1$, por lo que $d_j^{n+1}d_i^n(x) = d_i^{n+1}d_{j-1}^n(x)$.

Si $j-1 \leq x$ entonces $d_j^{n+1}(d_i^n(x)) = d_j^{n+1}(x+1) = x+2$ y $d_i^{n+1}(d_{j-1}^n(x)) = d_i^{n+1}(x+1) = x+2$, por lo que $d_j^{n+1}d_i^n(x) = d_i^{n+1}d_{j-1}^n(x)$.

Se observa que para todo n natural, $[n]$ tiene el buen orden inducido por los naturales, es decir, $0 \leq 1 \leq 2 \leq ... \leq n$. Por lo cual se puede hablar de funciones monótonas. Una función monótona $f : [n] \longrightarrow [m]$ donde n y m son naturales, es una función que satisface: si $x \leq y$ entonces $f(x) \leq f(y)$. □

EJEMPLO 2. *Se considera los simplejos:*

$$\Delta_n = \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R} \mid \sum_{i=0}^{n} x_i = 1, x_i \geq 0 \forall i = 0, \dots, n\}$$

donde n es un natural. Sea X un espacio topológico, se considera $S_n(X)$ el conjunto de las funciones continuas de Δ_n en X donde n es un natural. Así es que de esta forma se obtiene un conjunto indicado en los naturales, a este conjunto se le llama el conjunto de los n-simplejos singulares de X. Solo basta decir quienes serán las familias de funciones y ver que cumplen las igualdades.

Se observa que δ_i^n va de $S_n(X)$ en $S_{n-1}(X)$ por lo que un elemento $f \in S_n(X)$ es una función continua $f\colon \Delta_n \longrightarrow X$ y se le debe de asignar una función continua $\delta_i^n(f) \in S_{n-1}(X)$ que va de Δ_{n-1} en X.

Sea $(x_0, \dots, x_{n-1}) \in \Delta_{n-1}$. Se pone:

$$\delta_i^n(f)(x_0, \dots, x_{n-1}) = f(x_0, \dots, x_{i-1}, 0, x_i, \dots, x_{n-1})$$

De manera análoga, se tiene que para $(x_0,\ldots,x_{n+1})\in\Delta_{n+1}$*:*

$$\sigma_i^n(f)(x_0,\ldots,x_{n+1}) = f(x_0,\ldots,x_{i-1},x_i+x_{i+1},x_{i+2},\ldots,x_{n+1})$$

Se hace notar que

$$(x_0,\ldots,x_{i-1},0,x_i,\ldots,x_{n-1}),(x_0,\ldots,x_{i-1},x_i+x_{i+1},x_{i+2},\ldots,x_{n+1})\in\Delta_n$$

por lo que ambas funciones estan bien definidas. Más aún se pueden crear dos familias de funciones auxiliares, las primeras $d_i^n\colon \Delta_{n-1}\longrightarrow\Delta_n$ con $n\geq 1$ y $0\leq i\leq n$ dadas por:

$$d_i^n(x_0,\ldots,x_{n-1}) = (x_0,\ldots,x_{i-1},0,x_i,\ldots,x_{n-1})$$

y las segundas $s_i^n\colon \Delta_{n+1}\longrightarrow\Delta_n$ con $n\in\mathbb{N}$ y $0\leq i\leq n$ dadas por

$$s_i^n(x_0,\ldots,x_{n+1}) = (x_0,\ldots,x_{i-1},x_i+x_{i+1},x_{i+2},\ldots,x_{n+1})$$

Es inmediato que $\delta_i^n(f)=f\circ d_i^n$ y $\sigma_i^n(f)=f\circ s_i^n$, por lo que para probar que $\delta_i^n(f)$ y $\sigma_i^n(f)$ son continuas bastaría ver que d_i^n y s_i^n son continuas, ya que composición de continuas es continua. Primero se ve que d_i^n es continua, ya que preserva distancias. Se tiene que s_i^n es continua, por que es el producto de identidades con la suma. Se procede a demostrar las identidades simpliciales:

Sean $0\leq i<j\leq n$, entonces $\delta_i^{n-1}\delta_j^n(f)=f\circ d_j^n\circ d_i^{n-1}$ y $\delta_{j-1}^{n-1}\delta_i^n(f)=f\circ d_i^n\circ d_{j-1}^{n-1}$ para $f\in S_n(X)$. Por lo que basta demostrar que $d_j^n\circ d_i^{n-1}=d_i^n\circ d_{j-1}^{n-1}$. Sea $(x_0,\ldots,x_{n-2})\in\Delta_{n-2}$. Haciendo ambas cuentas:

$$\begin{aligned} d_j^n\circ d_i^{n-1}(x_0,\ldots,x_{n-2}) &= d_j^n(x_0,\ldots,x_{i-1},0,x_i,\ldots,x_{n-2})\\ &= (x_0,\ldots,x_{i-1},0,x_i,\ldots,x_{j-2},0,x_{j-1},\ldots,x_{n-2}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_i^n\circ d_{j-1}^{n-1}(x_0,\ldots,x_{n-2}) &= d_i^n(x_0,\ldots,x_{j-2},0,x_{j-1},\ldots,x_{n-2})\\ &= (x_0,\ldots,x_{i-1},0,x_i,\ldots,x_{j-2},0,x_{j-1},\ldots,x_{n-2}) \end{aligned}$$

Sean $0\leq i\leq j\leq n$, entonces $\sigma_i^{n+1}\sigma_j^n(f)=f\circ s_j^n\circ s_i^{n+1}$ y $\sigma_{j+1}^{n+1}\sigma_i^n(f)=f\circ s_i^n\circ s_{j+1}^{n+1}$ para $f\in S_n(X)$. Por lo que basta demostrar que $s_j^n\circ s_i^{n+1}=s_i^n\circ s_{j+1}^{n+1}$. Sea $(x_0,\ldots,x_{n+2})\in\Delta_{n+2}$. Haciendo ambas cuentas:

$$\begin{aligned} s_j^n\circ s_i^{n+1}(x_0,\ldots,x_{n+2}) &= s_j^n(x_0,\ldots,x_{i-1},x_i+x_{i+1},x_{i+2},\ldots,x_{n+2})\\ &= \begin{cases} (x_0,\ldots,x_{i-1},x_i+x_{i+1}+x_{i+2},\ldots,x_{n+2}) & \text{si } i=j\\ (x_0,\ldots,x_{i-1},x_i+x_{i+1},\ldots,x_{j+1}+x_{j+2},\ldots,x_{n+2}) & \text{si } i<j \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_i^n\circ s_{j+1}^{n+1}(x_0,\ldots,x_{n+2}) &= s_i^n(x_0,\ldots,x_j,x_{j+1}+x_{j+2},x_{i+2},\ldots,x_{n+2})\\ &= \begin{cases} (x_0,\ldots,x_{i-1},x_i+x_{i+1}+x_{i+2},\ldots,x_{n+2}) & \text{si } i=j\\ (x_0,\ldots,x_{i-1},x_i+x_{i+1},\ldots,x_{j+1}+x_{j+2},\ldots,x_{n+2}) & \text{si } i<j \end{cases} \end{aligned}$$

Sean $0\leq i<j\leq n$, entonces $\delta_i^{n+1}\sigma_j^n(f)=f\circ s_j^n\circ d_i^{n+1}$ y $\sigma_{j-1}^{n-1}\delta_i^n(f)=f\circ d_i^n\circ s_{j-1}^{n-1}$ para $f\in S_n(X)$. Por lo que basta demostrar que $s_j^n\circ d_i^{n+1}=d_i^n\circ s_{j-1}^{n-1}$. Sea $(x_0,\ldots,x_n)\in\Delta_n$. Haciendo ambas cuentas:

$$\begin{aligned} s_j^n \circ d_i^{n+1}(x_0,\ldots,x_n) &= s_j^n(x_0,\ldots,x_{i-1},0,x_i,\ldots,x_n) \\ &= (x_0,\ldots,x_{i-1},0,\ldots,x_{j-1}+x_j,\ldots,x_n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_i^n \circ s_{j-1}^{n-1}(x_0,\ldots,x_n) &= d_i^n(x_0,\ldots,x_{j-1}+x_j,\ldots,x_n) \\ &= (x_0,\ldots,x_{i-1},0,\ldots,x_{j-1}+x_j,\ldots,x_n) \end{aligned}$$

A este conjunto simplicial se le conoce como el complejo singular total de X.

EJEMPLO 3. *Un complejo simplicial abstracto Δ sobre un conjunto X es una familia de de subconjuntos finitos de X no vacíos, tal que si $\sigma \in \Delta$ y $\tau \subseteq \sigma$ con $\tau \neq \emptyset$ entonces $\tau \in \Delta$.*

Para un complejo simplicial abstracto Δ y n es un natural, se pone:

$$K_n = \{(x_0,\ldots,x_n) \in X^{n+1} \mid \{x_0,\ldots,x_n\} \in \Delta\}$$

Las funciones cara están dada por:

$$\delta_i^n(x_0,\ldots,x_n) = (x_0,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n)$$

Las funciones degeneración están dadas por:

$$\sigma_i^n(x_0,\ldots,x_n) = (x_0,\ldots,x_i,x_i,\ldots,x_n)$$

EJEMPLO 4. *Sea X un espacio topológico y $\mathscr{G}$ una cubierta abierta de X, se define $N(\mathscr{G})$ como el conjunto de todos los subconjuntos finitos $\mathscr{K}$ de $\mathscr{G}$ no vacíos tales que $\bigcap \mathscr{K} \neq \emptyset$. Por lo que $N(\mathscr{G})$ induce un conjunto simplicial como en el exampleplo anterior.*

EJEMPLO 5. *Sea P un orden parcial. Para n un natural se pone:*

$$P_n = \{(x_0,\ldots,x_n) \in P^{n+1} \mid x_i \leq x_{i+1} \forall i = 0,\ldots,n-1\}$$

Capítulo 4

Realización Geométrica

1.

Capítulo 5

Complejos Simpliciales

1.

Se dice que un conjunto simplicial es un complejo fuertemente de Kan si $x_0,\ldots,x_n \in X_n$ son tales que $\delta_i^n(x_j)=\delta_{j-1}^n(x_i)$ para $i<j$ entonces existe $x\in X_{n+1}$ tal que $\delta_k^{n+1}(x)=x_k$ para $k=0,\ldots,n$.

Ésta defición puede parece un poquito demasiado artificial, pero, se puede pensar de éste modo. Si se empieza con un elemento x de X_n, se puede poner $x_k=\delta_k^{n+1}(x)$ para $k=0,\ldots,n$, la primera identidad simplicial dice que $\delta_i^n(x_j)=\delta_{j-1}^n(x_i)$ para $i<j$, por lo que es como una especie de recíproco, o una especie suprayectividad, no todos vendrán de alguien, pero si se cumple cierta condición se puede asegurar que se viene de alguien.

Se procede a analizar el ejemplo semicanónico. Sean $x^0,\ldots,x^n\in R_n$ que satifacen $\delta_i^n(x^j)=\delta_{j-1}^n(x^i)$ para $i<j$, si se pone a $x_k=(x_0^k,\ldots,x_n^k)$,

$$(x_0^j,\ldots,x_{i-1}^j,x_i^j+x_{i+1}^j,x_{i+2}^j,\ldots,x_n^j)=(x_0^i,..,x_{j-2}^i,x_{j-1}^i+x_j^i,x_{j+1}^i,\ldots,x_n^i)$$

para $i<j$. Es deseable analizar éste ejemplo a fondo, ya que es el canónico. Primero como $i<j\le n$, se observa que hay $\binom{n+1}{2}$. Se empieza con el caso cuando $j=n$ e $i=n-1$. En éste caso la igualdad es:

$$(x_0^j,\ldots,x_{i-1}^j,x_i^j+x_{i+1}^j)=(x_0^i,..,x_{j-2}^i,x_{j-1}^i+x_j^i)$$

De ésta igualdad se deduce que $x_k^i=x_k^j$ para $k=0,\ldots,n-2$ y $x_{n-1}^i+x_n^i=x_{n-1}^j+x_n^j$. . Esto da intuición a pensar sólo en los consecutivos, es decir, se toma $j=i+1\le n$, de aquí se tiene

$$\begin{aligned}(x_0^j,\ldots,x_{i-1}^j,x_i^j+x_{i+1}^j,x_{i+2}^j,\ldots,x_n^j)&=(x_0^i,..,x_{j-2}^i,x_{j-1}^i+x_j^i,x_{j+1}^i,\ldots,x_n^i)\\&=(x_0^i,..,x_{(i+1)-2}^i,x_{(i+1)-1}^i+x_{i+1}^i,x_{(i+1)+1}^i,\ldots,x_n^i)\\&=(x_0^i,..,x_{i-1}^i,x_i^i+x_{i+1}^i,x_{i+2}^i,\ldots,x_n^i)\end{aligned}$$

Lo que significa que $x_k^i=x_k^j$ para $k=0,\ldots,i-1,i+2,\ldots,n$ y $x_i^i+x_{i+1}^i=x_i^j+x_{i+1}^j$. En el caso de que $i<j-1$ se tiene que la igualdad implica que: $x_k^j=x_k^i$ para $k=0,..,i-1,j+2,\ldots,n$, $x_i^j+x_{i+1}^j=x_i^i$, $x_j^j=x_{j-1}^i+x_j^i$ y $x_k^j=x_{k-1}^i$ para $k=i+2,\ldots,j-1$.

Se procede a analizar en casos especiales, por ejemplo para $n=2$, se tienen tres 2-simplejos, $x^0=(x_0^0,x_1^0,x_2^0)$, $x^1=(x_0^1,x_1^1,x_2^1)$ y $x2=(x_0^2,x_1^2,x_2^2)$. Cómo $n=2$, se tienen $\binom{3}{2}=3$ igualdades que checar, $0<1,0<2$ y $1<2$, la primera es $\delta_0^2(x^1)=\delta_0^2(x^0)$ que implica:

$$(x_0^1+x_1^1,x_2^1)=(x_0^0+x_1^0,x_2^0)$$

que en un sistemas de ecuaciones dice:

$$\begin{cases} x_0^1 + x_1^1 & = x_0^0 + x_1^0 \\ x_2^1 & = x_2^0 \end{cases}$$

la segunda es $\delta_0^2(x^2) = \delta_1^2(x^0)$ que implica:

$$(x_0^2 + x_1^2, x_2^2) = (x_0^0, x_1^0 + x_2^0)$$

que en un sistemas de ecuaciones dice:

$$\begin{cases} x_0^2 + x_1^2 & = x_0^0 \\ x_2^2 & = x_1^0 + x_2^0 \end{cases}$$

la tercera es $\delta_1^2(x^2) = \delta_1^2(x^1)$ que implica:

$$(x_0^2, x_1^2 + x_2^2) = (x_0^1, x_1^1 + x_2^1)$$

que en un sistemas de ecuaciones dice:

$$\begin{cases} x_0^2 & = x_0^1 \\ x_1^2 + x_2^2 & = x_1^1 + x_2^1 \end{cases}$$

Si se juntan los sistemas de ecuaciones se tiene

$$\begin{cases} x_0^1 + x_1^1 & = x_0^0 + x_1^0 \\ x_2^1 & = x_2^0 \\ x_0^2 + x_1^2 & = x_0^0 \\ x_2^2 & = x_1^0 + x_2^0 \\ x_0^2 & = x_0^1 \\ x_1^2 + x_2^2 & = x_1^1 + x_2^1 \end{cases}$$

Es un sistema de 3 ecuaciones en 9 incógnitas, que no se sabe si tiene solución pero en caso de tener solución lo que interesa es encontrar $x = (x_0, x_1, x_2, x_3)$ un 3-simplejo tal que $\delta_k^n(x) = x_k$ para $k = 0, 1, 2$, esto es,

$$(x_0 + x_1, x_2, x_3) = (x_0^0, x_1^0, x_2^0)$$
$$(x_0, x_1 + x_2, x_3) = (x_0^1, x_1^1, x_2^1)$$
$$(x_0, x_1, x_2 + x_3) = (x_0^2, x_1^2, x_2^2)$$

Como x_0, x_1 y x_2 están dados se elige $x = (x_0^2, x_1^2, x_1^0, x_2^0)$. Se procede a verificar que éste x cumple los prometido:

$$\delta_0^2(x) = (x_0^2 + x_1^2, x_1^0, x_2^0) = (x_0^0, x_1^0, x_2^0)$$

Esto por la tercera ecuación del sistema de 6 ecuaciones.

$$\delta_1^2(x) = (x_0^2, x_1^2 + x_1^0, x_2^0) = (x_0^1, x_1^1, x_2^1)$$

Se ve que por la ecuación 5, $x_0^2 = x_0^1$, por la ecuación 2, $x_2^0 = x_2^1$, ahora se toma $x_1^2 + x_1^0 = x^2 + (x_2^2 - x_2^0)$ por que $x_1^0 = x_2^2 - x_2^0$ de la ecuación 4, se sigue con aplicar la ecuación 6 y luego la 2 para obtener $x_1^2 + x_1^0 = x_1^1$.

Ahora que se ha creado un poco de intuición de lo que hay que demostrar se puede plantear el caso general. Se quiere encontrar $x=(x_0,...,x_{n+1})$ tal que $\delta_k^{n+1}(x)=x^k$, es decir, $(x_0,...,x_{k-1},x_k+x_{k+1},x_{k+2},...,x_{n+1})=(x_0^k,...,x_n^k)$, esto puesto en sistema de ecuaciones es:

$$\begin{cases} x_0 & = x_0^k \\ \vdots & \quad\vdots \\ x_{k-1} & = x_{k-1}^k \\ x_k+x_{k+1} & = x_k^k \\ x_{k+2} & = x_{k+1}^k \\ \vdots & \quad\vdots \\ x_{n+1} & = x_n^k \end{cases}$$

A éste sistema se le llamará Sk, es un sistema en con $n+1$ ecuaciones y la i-ésima ecuación se le llamará $Sk-i$. Se nota que estos sistemas dicen quien debería de ser un candidato a X, es decir, de $S2-0$ y $S2-1$ se tiene que $x_0=x_0^2$ y $x_1=x_1^2$, de $S0$ se tiene que $x_i=x_{i-1}^0$ para $i=2,...,n+1$. Ahora se debe de demostrar que con está elección se satisfacen los sistemas de ecuaciones Sk para $k=0,...,n$, para esto, se había visto que se tenían dos familias de sistemas la primera es para cuando $j=i+1$, se tiene:

$$\begin{cases} x_0^j & = x_0^i \\ \vdots & \quad\vdots \\ x_{k-1}^j & = x_{k-1}^i \\ x_i^j+x_{i+1}^j & = x_i^i+x_{i+1}^i \\ x_{i+2}^j & = x_{i+1}^i \\ \vdots & \quad\vdots \\ x_{n+1}^j & = x_n^i \end{cases}$$

La segunda es:

$$\begin{cases} x_0^j & = x_0^i \\ \vdots & \quad\vdots \\ x_{i-1}^j = & x_{i-1}^i \\ x_i^j+x_{i+1}^j & = x_i^i \\ x_{i+2}^j & = x_{i+1}^i \\ \vdots & \quad\vdots \\ x_{j-1}^j & = x_{j-2}^i \\ x_j^j & = x_{j-1}^i+x_j^i \\ x_{j+1}^j & = x_{j+1}^i \\ \vdots & = \quad\vdots \\ x_n^j & = x_n^i \end{cases}$$

para cuando $i<j-1$.

Capítulo 6

Grupos de Homotopía

1.

Para toda n natural, se puede definir una relación en X_n, se dice que $x, x' \in X_n$ son homotópico si existe $y \in X_{n+1}$ tal que $\delta_{n-1}^{n+1}(y) = x$, $\delta_n^{n+1}(y) = x'$, $\delta_i^n(x) = \delta_i^n(x')$ para $i = 0, \ldots, n-1$ y $\delta_i^{n+1}(y) = \sigma n - 1_{n-1}(\delta_i^n(x)) = \sigma_{n-1}^{n-1}(\delta_i^n(x'))$ para $i = 0, \ldots, n-2$, se observa que la última igualdad sobra, pero es bueno que se tenga presente, otra observación pertinente es que ésta relación en X_0 sólo se limita a solicitar las dos primeras igualdades. Al elemento y se llama una homotopía de x a x'. Si x y x' son homotópicos se denotará por $x \sim x'$, y si se quiere resaltar la homotopía se escribirá $x \overset{y}{\sim} x'$.

Proposición 16. *Si el conjunto simplicial es un complejo fuertemente de Kan, entonces $\sim$ es una relación de equivalencia en X_n, para toda n natural.*

Demostración. Sea n un natural,

Reflexividad) Sea $x \in X_n$, se pone $y = \sigma_n^n(x)$. Primero $\delta_n^{n+1}(y) = \delta_n^{n+1}(\sigma_n^n(x)) = x$ y $\delta_{n-1}^{n+1}(y) = \delta_{n-1}^{n+1}(\sigma_n^n(x)) = x$, esto es por la identidades simpliciales. Obviamente $\delta_i^n(x) = \delta_i^n(x)$ para $i = 0, \ldots, n-1$. Finalmente $\delta_i^{n+1}(y) = \delta_i^{n+1}(\sigma_i^n(x)) = \sigma_{n-1}^{n-1}(\delta_i^n(x))$ para $i = 0, \ldots, n-2$. $\square$

Bibliografía

[1] Paul G Goerss and John F Jardine. *Simplicial homotopy theory*. Springer Science & Business Media, 2009.

[2] Niels Lauritzen. Lectures on convex sets. *Notas de aula, Aarhus University: http://home. imf. au. dk/niels/lecconset. pdf*, 2009.

[3] J Peter May. *Simplicial objects in algebraic topology*, volume 11. University of Chicago Press, 1992.

[4] Lev Semenovich Pontryagin. *Foundations of combinatorial topology*. Courier Corporation, 2015.