Notas de Análisis Matemático 1

Facultad de Ciencias, UNAM

Frank Patrick Murphy Hernandez

Jaime García Villeda

Índice general

Introducción

[**1**] [**2**]

Preliminares

El conjunto de los naturales $\mathbb{N}$ incluye al 0.

Capítulo 1

Espacios Métricos

"Si una cantidad no negativa fuera tan pequeña que resultara menor que cualquier otra dada, ciertamente no podría ser sino cero.
A quienes preguntan qué es una cantidad infinitamente pequeña en matemáticas, nosotros respondemos que es, de hecho, cero.
Así pues, no hay tantos misterios ocultos en este concepto como se suele creer. Esos supuestos misterios han convertido el cálculo de lo infinitamente pequeño en algo sospechoso para mucha gente.
Las dudas que puedan quedar las resolveremos por completo en las páginas siguientes, donde explicaremos este cálculo." **Leonard Euler.**

1. Espacios Métricos

DEFINICIÓN 1. *Sean X un conjunto no vacío y $d\colon X \times X \longrightarrow [0,\infty)$ una función. Diremos que (X,d) es un espacio métrico y que d es una métrica si:*

- *Para toda $x,y \in X$, $d(x,y) = 0$ si y sólo $x = 0$.*
- *Para toda $x,y \in X$, $d(x,y) = d(y,x)$.*
- *Para toda $x,y,z \in X$, $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.*

EJEMPLO 1. *Sea X un conjunto no vacío. Definimos $d\colon X \times X \longrightarrow [0,\infty)$ como:*

$$d(x,y) = \begin{cases} 1 & \textit{if } x = y \\ 0 & \textit{if } x \neq y \end{cases}$$

Este espacio se conoce como discreto y a la métrica como discreta.

EJEMPLO 2. *El conjunto de los reales $\mathbb{R}$ con $d(x,y) = |x-y|$ para $x,y \in \mathbb{R}$ es un espacio métrico.*

EJEMPLO 3. *Para toda $n \in \mathbb{N}^+$, $\mathbb{R}^n$ es un espacio métrico con $d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}$.*

EJEMPLO 4. *Para toda $n \in \mathbb{N}^+$ y $p > 1$, $\mathbb{R}^n$ es un espacio métrico con $d(x,y) = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^p}$.*

EJEMPLO 5. *El conjunto de los reales positivos* $\mathbb{R}^+$ *con* $d(x,y) = |ln(\frac{x}{y})|$ *para* $x,y \in \mathbb{R}^+$ *es un espacio métrico.*

EJEMPLO 6. *Para un campo* K *y para naturales* $m,n \in \mathbb{N}^+$, $M_{n\times m}(K)$ *es un espacio métrico con* $d(A,B) = rank(A-B)$ *para* $A,B \in M_{n\times m}(K)$. *Donde rank es la función rango.*

Hay una noción más débil que se llama espacio pesudométrico, en este caso se solicita que $d(x,x) = 0$. A la función se le llama una pseudométrica.

2. Subconjuntos Abiertos

DEFINICIÓN 2. *Sea* (X,d) *un espacio métrico. Para* $r > 0$ *y* $x \in X$, *la bola con radio* r *y centro* x, *se define como:*

$$B_r(x) = \{y \in X \mid d(x,y) < r\}$$

PROPOSICIÓN 1. *Sea* (X,d) *un espacio métrico,* $x \in X$ *y* $R,r < 0$. *Si* $r < R$ *entonces* $B_r(x) \subseteq B_R(x)$.

DEFINICIÓN 3. *Sea* (X,d) *un espacio métrico. Para* $r > 0$ *y* $x \in X$, *la esfera con radio* r *y centro* x, *se define como:*

$$S_r(x) = \{y \in X \mid d(x,y) = r\}$$

DEFINICIÓN 4. *Sea* (X,d) *un espacio métrico y* $A \subseteq X$. *Decimos que* A *es un abierto de* X, *si para todo* $x \in A$, *existe* $r > 0$ *tal que* $B_r(x) \subseteq A$.

PROPOSICIÓN 2. *Sea* (X,d) *un espacio métrico. Entonces:*

- $\emptyset$ *y* X *son abiertos.*
- *Si* A *y* B *son abiertos de* X, *entonces* $A \cap B$ *es abierto en* X.
- *Si* $\{A_i\}_{i\in I}$ *es una familia de abiertos de* X, *entonces* $\bigcup_{i\in I} A_i$ *es un abierto de* X.

DEFINICIÓN 5. *Sean* (X,d) *un espacio métrico y* $A \subseteq X$. *Definimos el interior de* A, A°, *como* $\bigcup\{U \subseteq X \mid U \text{ es abierto }, U \subseteq A\}$.

PROPOSICIÓN 3. *Sean* (X,d) *un espacio métrico y* $A,B,U \subseteq X$. *Entonces:*

- *Si* $U \subseteq A$ *y* U *es abierto, entonces* $U \subseteq A^\circ$.
- A° *es abierto.*

- $(A^\circ)^\circ = A^\circ$.
- $A^\circ \subseteq A$.
- *Si* $A \subseteq B$, *entonces* $A^\circ \subseteq B^\circ$.
- $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$
- $A^\circ \cup B^\circ \subseteq (A \cup B)^\circ$

3. Subconjuntos Cerrados

DEFINICIÓN 6. *Sean* (X,d) *un espacio métrico y* $A \subseteq X$. *Se dice que* $x \in X$ *es un punto de adherencia de A, si para toda* $\varepsilon > 0$, $B_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset$. *El conjunto de puntos de adherencia de A se denota por* $\overline{A}$ *y se le llama la clausura de A.*

DEFINICIÓN 7. *Sean* (X,d) *un espacio métrico y* $A \subseteq X$. *Decimos que A es cerrado en X, si* $\overline{A} = A$.

PROPOSICIÓN 4. *Sean* (X,d) *un espacio métrico y* $A,B,C \subseteq X$. *Entonces:*

- *Si* $A \subseteq C$ *y C es cerrado, entonces* $\overline{A} \subseteq C$.
- $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.
- $\overline{A}$ *es cerrado.*
- $A \subseteq \overline{A}$.
- *Si* $A \subseteq B$, *entonces* $\overline{A} \subseteq \overline{B}$.
- $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
- $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$

PROPOSICIÓN 5. *Sean* (X,d) *un espacio métrico y* $A \subseteq X$. *Entonces A es abierto si y sólo si* $X \setminus A$ *es cerrado.*

PROPOSICIÓN 6. *Sea* (X,d) *un espacio métrico. Entonces:*

- $\emptyset$ *y* X *son cerrados.*
- *Si A y B son cerrados de* X, *entonces* $A \cup B$ *es cerrado en* X.
- *Si* $\{A_i\}_{i \in I}$ *es una familia de abiertos de* X, *entonces* $\bigcap_{i \in I} A_i$ *es un cerrado de* X.

PROPOSICIÓN 7. *Sean (X,d) un espacio métrico y $A \subseteq X$. Entonces:*

$$\overline{A} = \bigcap \{C \subseteq Z \mid C \text{ es cerrado }, A \subseteq C\}$$

DEFINICIÓN 8. *Sea (X,d) un espacio métrico. Una sucesión en X es una función $x\colon \mathbb{N} \longrightarrow X$, donde notacionalmente se esribirá $x_n := x(n)$ para $n \in \mathbb{N}$ y la sucesión se le denotará por $\{x_n\}_{n=0}^{\infty} := x$ (observamos que se denota a la sucesión por su imagen). Diremos que la suceción converge, si existe $x \in X$ tal que para toda $\varepsilon > 0$ existe $N = N(\varepsilon)$ natural (que depende de ε) tal que para todo $n \geq N$, $d(x_n, x) < \varepsilon$. En cuyo caso se escribirá* $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, *se dirá que el límite de la sucesión es x.*

PROPOSICIÓN 8. *Sean (X,d) un espacio métrico, $A \subseteq X$ y $x \in X$. Entonces x es un punto de adherencia de A si y sólo si existe una sucesión $\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \subseteq A$ tal que* $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

PROPOSICIÓN 9. *Sean (X,d) un espacio métrico y $C \subseteq X$. Entonces C es cerrado si y sólo si para toda sucesión $\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \subseteq C$ convergente,* $\lim_{n\to\infty} x_n \in C$.

De la última proposición podemos darnos cuenta que el nombre cerrado hace referencia es que el conjunto es cerrado bajo tomar límites.

DEFINICIÓN 9. *Sean (X,d) un espacio métrico y $A \subseteq X$. Se dice que $x \in X$ es un punto de acumulación de A, si para toda $\varepsilon > 0$, $B_\varepsilon(x) \cap A$ es infinito.*

PROPOSICIÓN 10. *Sean (X,d) un espacio métrico, $A \subseteq X$ y $x \in X$. Entonces x es un punto de acumulación si y sólo si $(B_\varepsilon(x) \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$, para todo $\varepsilon > 0$.*

PROPOSICIÓN 11. *Sean (X,d) un espacio métrico, $A \subseteq X$ y $x \in X$. Entonces x es un punto de acumulación de A si y sólo si existe una sucesión $\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \subseteq A$ de puntos distintos tal que* $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

4. Funciones Continuas

DEFINICIÓN 10. *Sean (X,d) y (X',d') espacios métricos y $f\colon X \longrightarrow X'$. Decimos que f es continua, si para toda $x \in X$ y $\varepsilon = \varepsilon(x) > 0$, existe $\delta = \delta(\varepsilon, x) > 0$, para todo $y \in X$, si $d(x,y) < \delta$ entonces $d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$.*

PROPOSICIÓN 12. *Sean (X,d) y (X',d') espacios métricos y $f\colon X \longrightarrow X'$. Son equivalentes:*

- *f es continua.*

- *$f^{-1}(A)$ es abierto, para todo $A \subseteq X'$ abierto.*
- *Si $\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \subseteq X$ converge, entonces $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to\infty} x_n)$*

DEFINICIÓN 11. *Sean (X,d) y (X',d') espacios métricos. Decimos X y X' son homeomorfos si existen funciones continuas $f\colon X \longrightarrow X'$ y $g\colon X' \longrightarrow X$ que son inversas.*

5. Subconjuntos Densos

DEFINICIÓN 12. *Sea (X,d) es un espacio métrico y $D \subseteq X$. Decimos que D es denso en X, si $\overline{D} = X$.*

PROPOSICIÓN 13. *Sea (X,d) es un espacio métrico y $D \subseteq X$. Entonces D es denso en X si y sólo si para toda $f\colon D \longrightarrow Y$ continua existe una única función continua $F\colon X \longrightarrow Y$ tal que $F|_D = f$*

6. Frontera de un Subconjunto

DEFINICIÓN 13. *Sea (X,d) es un espacio métrico, $A \subseteq X$ y $x \in X$. Decimos que x es un punto frontera de A,si para toda $\varepsilon > 0$, $B_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset$ y $B_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset$ y $B_\varepsilon(x) \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$.*

7. Métricas Equivalentes

DEFINICIÓN 14.

DEFINICIÓN 15. *Sea (X,d) un espacio métrico. Definimos $\overline{d}(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$ para toda $x,y \in X$*

PROPOSICIÓN 14. *Sea (X,d) un espacio métrico. Entonces $(X,\overline{d})$ es un espacio métrico.*

PROPOSICIÓN 15. *Sean $(X,d_X),(X,d'_X),(Y,d_Y)$ y (Y,d'_Y) tales que d_X y d'_X son métricas equivalentes y d_Y y d'_Y son métricas equivalentes, y $f\colon X \longrightarrow Y$ una función. Entonces $f\colon (X,d_X) \longrightarrow (Y,d_Y)$ es continua si y sólo si $f\colon (X,d'_X) \longrightarrow (Y,d'_Y)$ es continua.*

8. Subconjuntos Acotados

DEFINICIÓN 16. *Sea (X,d) un espacio métrico. Si existe $M > 0$ y $x \in X$ tal que $X \subseteq B_M(x)$, entonces diremos que X es acotado.*

DEFINICIÓN 17. *Sea (X,d) un espacio métrico. Entonces se define el diametro de X como:*

$$\delta(X) = \sup\{d(x,y) \mid x,y \in X\}$$

PROPOSICIÓN 16. *Sea (X,d) un espacio métrico. Entonces X es acotado si y sólo si $\delta(X) < \infty$.*

9. Construcciones

9.1. Producto de Espacios Métricos.

PROPOSICIÓN 17. *Sea $\{(X_i,d_i)\}_{i=0}^{\infty}$ una familia de espacios métricos. Entonces $X = \prod_{i=0}^{\infty} X_i$ con la función $d(x,y) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\overline{d_i}(x_i,y_i)}{2^i}$ es un espacio métrico.*

A este espacio métrico se le conoce como el producto de espacios métricos.

9.2. Subespacio.

9.3. Coproducto de Espacios Métricos.

PROPOSICIÓN 18.

$$d(x_i,x_j) = \begin{cases} 1 & si\ i \neq j \\ \overline{d_i}(x_i,x_j) & si\ i = j \end{cases}$$

con $x_i \in X_i$ y $x_j \in X_j$, es un espacio métrico.

PROPOSICIÓN 19.

9.4. Espacio Cociente.

9.5. Límite Inverso de Espacios Métricos.

DEFINICIÓN 18 (Sistema Codirigido). *Sea $\{(X_i,d_i)\}_{i=0}^{\infty}$ una familia de espacios métricos y una familia de funciones continuas $\{\alpha_i^j : X_j \longrightarrow X_i\}_{i \leq j \in \mathbb{N}}$ que cumple:*

- *$\alpha_i^i = 1_{X_i}$ para toda $i \in \mathbb{N}$*
- *Si $i \leq j \leq k \in \mathbb{N}$, entonces $\alpha_i^j \alpha_j^k = \alpha_i^k$*

A esta pareja de familias la denotaremos por (X_i,α_i^j) y la llamaremos un sistema codirigido.

Observemos que sólo basta tener α_{i+1}^i para todo $i \in \mathbb{N}$, para poder definir recursivamente el sistema codirigido.

DEFINICIÓN 19. *Sea (X_i,α_i^j) un sistema codirigido, el límite inverso de sistema codirigido, $\varprojlim(X_i,\alpha_i^j)$, se define como:*

$$\{x \in \prod_{i=0}^{\infty} \mid \alpha_i^j(x_j) = x_i, i \leq j\}$$

Este es un espacio métrico considerandolo como un subespacio de un producto espacios.

DEFINICIÓN 20. *Sea* (X_i, α_i^j) *un sistema codirigido y una familia de funciones continuas* $\{f_i \colon Y \longrightarrow X_i\}_{i=1}^{\infty}$*, decimos que la familia es compatible (con el sistema codirigido), si* $\alpha_i^j f_j = f_i$ *para todo* $i \leq j \in \mathbb{N}$.

PROPOSICIÓN 20. *Sea* (X_i, α_i^j) *un sistema codirigido y* $\{f_i \colon Y \longrightarrow X_i\}_{i=1}^{\infty}$ *una familia compatible. Entonces existe una única función continua* $f \colon Y \longrightarrow \varprojlim(X_i, \alpha_i^j)$ *tal que* $\pi_i f = f_i$ *para todo* $i \in \mathbb{N}$.

EJEMPLO 7. *Sea* $\{(X_i, d_i)\}_{i=0}^{\infty}$ *una familia de espacios métricos tal que* $X_i \subseteq X_{i+1}$ *y* $\alpha_i^{i+1} \colon X_{i+1} \longrightarrow X_i$*. Entonces el límite inverso inducido por este sistema codirigido resulta ser homeomorfo a* $\bigcap_{i=0}^{\infty} X_i$.

10. Conjunto de Cantor

10.1. Construcción Usual.

10.2. Expansión Terciaria.

10.3. Métrica p-ádica.

10.4. Construcción por Límite Inverso.

DEFINICIÓN 21. *Denotaremos por I al intervalo cerrado* $[0, 1]$.

Notemos que los K_n son homeomorfos a los C_n.

PROPOSICIÓN 21. *Para todo* $n \in \mathbb{N}$*,* C_n *es homeomorfo a* K_n.

El conjunto de Cantor C es homeomorfo al límite inverso de (K_i, α_i^j).

Capítulo 2

Espacios Completos

"Los números son la libre creación de la mente humana".

Richard Dedekind.

1. Sucesiones de Cauchy

DEFINICIÓN 22. *Sea (X,d) un espacio métrico y $\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \subseteq X$. Decimos que $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy, si para todo $\varepsilon > 0$, existe $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n, m \geq N$, $d(x_n, x_m) < \varepsilon$.*

PROPOSICIÓN 22. *Sea (X,d) un espacio métrico y $\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \subseteq X$. Si $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ converge, entonces es de Cauchy.*

PROPOSICIÓN 23. *Sea (X,d) un espacio métrico y $\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \subseteq X$. Si $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ es de Cauchy, entonces es acotada.*

PROPOSICIÓN 24. *Sea (X,d) un espacio métrico y $\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \subseteq X$. Si $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ converge, entonces toda subsucesión converge.*

PROPOSICIÓN 25. *Sea (X,d) un espacio métrico y $\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \subseteq X$. Si $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ es de Cauchy y tiene una subsucesión convergente, entonces la sucesión converge.*

DEFINICIÓN 23. *Sea (X,d) un espacio métrico. Decimos que X es completo, si toda sucesión de Cauchy converge.*

PROPOSICIÓN 26. *Sea (X,d) un espacio métrico. Entonces X es completo si y sólo si toda sucesión decreciente de subespacios no vacíos con sucesión de diametros que converge a cero tiene intersección no vacía.*

PROPOSICIÓN 27. *Sean (X,d) un espacio métrico completo y $Y \subseteq X$. Si Y es cerrado, entonces Y es completo.*

PROPOSICIÓN 28. *Sean* (X,d) *un espacio métrico y* $Y \subseteq X$. *Si* Y *es completo, entonces* Y *es cerrado.*

DEFINICIÓN 24. *Sean* X *un conjunto y* $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$. *Decimos que* f *es acotada, si existe* $M > 0$ *tal que* $|f(x)| \leq M$ *para toda* $x \in X$.

DEFINICIÓN 25. *Sean* X *un conjunto. Definimos* $B(X)$ *el conjunto de todas las funciones* $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ *acotadas. Para* $f,g \in B(X)$ *ponemos* $d(f,g) = \sup_{x\in X} |f(x) - g(x)|$.

PROPOSICIÓN 29. *Sean* (X,d) *un espacio métrico. Entonces* $B(X)$ *es un espacio métrico completo.*

DEFINICIÓN 26. *Sea* X *conjunto,* (Y,d_Y) *espacio métrico y* $f\colon X \longrightarrow Y$. *Decimos que* f *es acotada,* $\mathrm{im} f \subseteq Y$ *es acotada.*

DEFINICIÓN 27. *Sea* X *conjunto y* (Y,d_Y) *espacio métrico. Definimos* $B(X,Y)$ *como el conjunto de funciones de* X *a* Y *acotadas. Para* $f,g \in B(X,Y)$ *ponemos* $d(f,g) = \sup_{x\in X}\{d_Y(f(x),g(x))\}$.

PROPOSICIÓN 30. *Sean* X *conjunto y* (Y,d_Y) *espacio métrico completo. Entonces* $B(X,Y)$ *es un espacio métrico completo.*

2. Completación de un Espacio

DEFINICIÓN 28. *Sean* (X,d_X) *y* (Y,d_Y) *espacios métricos y* $f\colon X \longrightarrow Y$ *una función. Decimos que* f *es una isometría, si* $d_Y(f(x),f(y)) = d_X(x,y)$.

Toda isometría es una función continua.

DEFINICIÓN 29. *Sean* (X,d_X) *y* (Y,d_Y) *espacios métricos y* $f\colon X \longrightarrow Y$ *una función. Si* f *es una isometría, la imagen de* f *es densa en* Y *y* Y *es un espacio completo, entonces decimos que* (Y,f) *es una completación de* X.

DEFINICIÓN 30. *Sea* (X,d) *un espacio métrico. Ponemos* $CS(X)$ *como el conjunto de todas las sucesiones de Cauchy en* X. *Definimos* $d_C(x,y) = \lim_{n\to\infty} d(x_n,y_n)$, *para* $x,y \in CS(X)$.

PROPOSICIÓN 31. *Sea* (X,d) *un espacio métrico. Entonces* $(CS(X),d_C)$ *es un espacio pseudométrico.*

DEMOSTRACIÓN. Lo primero que hay que ver es que $\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n)$ existe para $x, y \in CS(X)$. Para ver esto usaremos que los reales son completos, así que basta ver que la sucesión es de Cauchy. Sea $\varepsilon > 0$, como x y y son sucesiones de Cauchy existen $N_x = N_x(\frac{\varepsilon}{2}), N_y = N_y(\frac{\varepsilon}{2}) \in \mathbb{N}$ tal que: si $m, p \geq N_x$ entonces $d(x_m, x_p) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ y si $m, p \geq N_y$ entonces $d(y_m, y_p) \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Por lo que ponemos $N = \max\{N_x, N_y\}$.

Sean $m, p \geq N$, entonces:

$$\begin{aligned} d(x_m, y_m) - d(x_p, y_p) &\leq d(x_m, x_p) + d(x_p, y_m) - d(x_p, y_p) \\ &\leq d(x_m, x_p) + d(x_p, y_p) + d(y_p, y_m) - d(x_p, y_p) \\ &= d(x_m, x_p) + d(y_m, y_p) \end{aligned}$$

De manera similar $d(x_p, y_p) - d(x_m, y_m) \leq d(x_m, x_p) + d(y_m, y_p)$. De donde

$$\begin{aligned} |d(x_m, y_m) - d(x_p, y_p)| &\leq d(x_m, x_p) + d(y_m, y_p) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

□

Ahora hay que ver que cumple con los axiomas de métrica, ...

3. Teorema del Punto Fijo

DEFINICIÓN 31. *Sea (X, d) un espacio métrico y $f : X \longrightarrow Y$ una función. Decimos que f es una contracción, si existe $0 \leq \alpha < 1$ tal que $d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y)$ para todo $x, y \in X$.*

Toda contracción es una función continua.

PROPOSICIÓN 32 (Teorema del Punto Fijo de Banach). *Sea (X, d) un espacio métrico completo y $f : X \longrightarrow X$ una contracción. Entonces existe un único $x \in X$, tal que $f(x) = x$.*

PROPOSICIÓN 33. *Sea (X, d) un espacio métrico completo y $f : X \longrightarrow X$ una función continua. Si existe $n \in \mathbb{N}^+$ tal que f^n es una contracción, entonces f tiene un único punto fijo.*

4. Ecuaciones Diferenciales

PROPOSICIÓN 34 (Teorema de Picard). *Sean* $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ *tal que existe* $M > 0$ *que cumple que para* $(x,y),(x,y') \in D$, $|f(x,y) - f(x,y')| \leq M|y-y'|$ *y* $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$. *Entoces existe* $\varepsilon > 0$ *tal que en* $[x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon]$ *la ecuación diferencial:*

$$y'(x) = f(x,y(x))$$

con condición inicial $y(x_0) = y_0$ *tiene una única solución*

PROPOSICIÓN 35. *Sean* $K\colon [a,b]\times[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *y* $\phi\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *funciones continuas, y* $\lambda \in \mathbb{R}$. *Si* K *está acotado por* M *y* $|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}$, *entonces la ecuación integral de Fredholm de segundo orden:*

$$f(x) = \lambda \int_a^b K(x,y)f(y)dy + \phi(x)$$

tiene una única solución en $[a,b]$.

PROPOSICIÓN 36. *Sean* $K\colon [a,b]\times[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *y* $\phi\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *funciones continuas, y* $\lambda \in \mathbb{R}$. *Entonces la ecuación integral de Volterra:*

$$f(x) = \lambda \int_a^x K(x,y)f(y)dy + \phi(x)$$

tiene una única solución en $[a,b]$.

Capítulo 3

Espacios Compactos

"Todo aquello que se sobreentiende sin decirlo, queda mejor entendido diciéndolo".

Maurice Fréchet.

1. Espacios Compactos

DEFINICIÓN 32. *Sea (X,d) un espacio métrico y $\{U_i\}_{i\in I}$ una colección de abiertos de X. Si $X=\bigcup_{i\in I}U_i$, entonces decimos que $\{U_i\}_{i\in I}$ es una cubierta abierta. Si para $J\subseteq I$ se tiene que $X=\bigcup_{i\in J}U_i$, entonces decimos que $\{U_i\}_{i\in J}$ es una subcubierta de $\{U_i\}_{i\in I}$.*

DEFINICIÓN 33. *Sea (X,d) un espacio métrico. Decimos que X es compacto, si toda cubierta abierta tiene una subcubierta abierta finita.*

DEFINICIÓN 34. *Sea (X,d) un espacio métrico. Decimo que X es precompacto (totalmente acotado), si para toda $\varepsilon>0$ existen $x_1,\ldots,x_n\in X$ tales que $X=\bigcup_{i=1}^{n}B_\varepsilon(x_i)$.*

PROPOSICIÓN 37. *Sea (X,d) un espacio métrico. Si X es precompacto, entonces X es separable.*

PROPOSICIÓN 38. *Sea (X,d) un espacio métrico. Son equivalentes:*

1. *X es compacto.*
2. *Toda sucesión en X tiene una subsucesión convergente.*
3. *X es precompacto y completo.*

COROLARIO 1 (Heine-Borel). *Sea $C\subseteq\mathbb{R}^n$. Entonces C es compacto si y sólo si C es cerrado y acotado.*

PROPOSICIÓN 39. *Sea*

2. Propiedad de la Intersección Finita

PROPOSICIÓN 40. *Sea (X,d) un espacio métrico. Entonces X es compacto si y sólo si para toda familia de cerrados $\{C_i\}_{i\in I}$ en X tal que para todo $J \subseteq I$ finito $\bigcap_{i\in J} C_i \neq \emptyset$, se tiene que $\bigcap_{i\in I} C_i \neq \emptyset$.*

PROPOSICIÓN 41. *Sea $\mathscr{U}$ una cubierta abierta de un espacio métrico compacto (X,d). Entonces existe $\delta > 0$ tal que para cualesquiera $x,y \in X$ tales que $d(x,y) < \delta$, existe $U \in \mathscr{U}$ con la propiedad de que $x,y \in U$.*

DEFINICIÓN 35. *A un tal δ que satisface la conclusión del resultado anterior se le conoce como un número de Lebesgue de la cubierta $\mathscr{U}$.*

DEFINICIÓN 36. *Una función $f : (X,d) \to (Y,d')$ es uniformemente continua si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que para cualesquiera $x,y \in X$ con la propiedad de que $d(x,y) < \delta$, se tiene que $d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$.*

PROPOSICIÓN 42. *Sea $f : (X,d) \to (Y,d')$ una función continua con (X,d) compacto. Entonces f es uniformente continua.*

3. Teorema de Arzelá-Ascoli

DEFINICIÓN 37. *Sea (X,d) un espacio métrico y $A \subseteq X$. Decimos que A es compacto si A es compacto como subespacio métrico de X.*

PROPOSICIÓN 43. *Sea (X,d) un espacio métrico y $A \subseteq X$. Entonces A es compacto si y sólo si para toda cubierta abierta de A con abiertos de X, existe una subcubierta finita de A.*

PROPOSICIÓN 44. *Sea (X,d) un espacio métrico y $A \subseteq X$. Entonces:*

1. *Si A es compacto, entonces A es precompacto.*
2. *Si A es precompacto, entonces A es acotado.*
3. *Si $B \subseteq A$ y A es precompacto entonces B es precompacto.*
4. *Si A es precompacto entonces $\overline{A}$ es precompacto.*

DEFINICIÓN 38. *Sea (X,d) un espacio métrico y $A \subseteq X$. Decimos que A es relativamente compacto si $\overline{A}$ es compacto.*

COROLARIO 2. *Sea (X,d) un espacio métrico y $A \subseteq X$. Entonces A es precompacto si y sólo si A es relativamente compacto.*

DEFINICIÓN 39. *Sean (X,d) y (Y,d') espacios métricos. Dado $x \in X$ decimos que $\mathscr{H} \subseteq \mathscr{C}^0(X,Y)$ es equicontinuo en x si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que si $d(y,x) < \delta$ entonces $d'(f(y), f(x)) < \varepsilon$ para todo $f \in \mathscr{H}$.*

PROPOSICIÓN 45 (Teorema de Arzelá-Ascoli). *Sean (X,d) un espacio métrico compacto y (Y,d') un espacio métrico completo. Entonces $\mathscr{H} \subseteq \mathscr{C}^0(X,Y)$ es relativamente compacto si y sólo si $\mathscr{H}$ es equicontinuo y para todo $x \in X$, $\mathscr{H}(x) := \{f(x) \mid f \in \mathscr{H}\}$ es relativamente compacto en Y.*

4. Localmente Compacto

DEFINICIÓN 40. *Sea (X,d) un espacio métrico. Decimos que X es localmente compacto si todo punto $x \in X$ tiene una vecindad compacta.*

PROPOSICIÓN 46. *Sea (X,d) un espacio métrico localmente compacto. Si $E \subseteq X$ es compacto, entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(E)$ es relativamente compacto.*

PROPOSICIÓN 47. *Sea (X,d) un espacio métrico localmente compacto. Son equivalentes:*

1. *Existe una familia $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ de relativamente compactos tal que $\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n = X$ y $\overline{U_n} \subseteq U_{n+1}$.*
2. *X es unión numerable de compactos.*
3. *X es separable*

Capítulo 4

Espacios Conexos

"... dados dos instantes cualesquiera α y β, es posible considerar el estado del mundo en el instante anterior α como causa, y β al estado posterior como efecto por lo menos mediato, con tal de que tomemos en cuenta, como parte de la causa, las influencias inmediatas que Dios haya podido ejercer en el intervalo α".

Bernard Bolzano.

1. Conjuntos conexos y componentes conexas.

DEFINICIÓN 41. *Sea (X,d) un espacio métrico. Decimos que $D \subseteq X$ es disconexo, si existen abiertos disjuntos A y B de X no vacíos tales que $A \cap D \neq \emptyset$ y $B \cap D \neq \emptyset$, y $(A \cup B) \cap D = D$. Decimos que $C \subseteq X$ es conexo, si no es disconexo.*

PROPOSICIÓN 48. *Sea (X,d) un espacio. Si $A \subseteq B \subseteq \overline{A} \subseteq X$ con A conexo, entonces B es conexo.*

COROLARIO 3. *Sea (X,d) un espacio. Si $A \subseteq X$ con A conexo, entonces $\overline{A}$ es conexo.*

PROPOSICIÓN 49. *Sea (X,d) un espacio. Si $\{A_i\}_{i\in I}$ es una familia de conjuntos conexos de X y $\bigcap_{i\in I} A_i \neq \emptyset$, entonces $\bigcup_{i\in I} A_i$ es conexo.*

PROPOSICIÓN 50. *Sea (X,d) un espacio. Si $\{A_i\}_{i=1}^{n}$ es una familia de conjuntos conexos de X y $A_i \cap A_{i+1} \neq \emptyset$ para $i = 1 \ldots n-1$, entonces $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ es conexo.*

DEFINICIÓN 42. *Sea (X,d) un espacio métrico. Definimos la siguiente relación, para $x,y \in X$, $x \sim_C y$ si existe un conexo $C \subseteq X$ tal que $x,y \in C$.*

PROPOSICIÓN 51. *Sea (X,d) un espacio métrico. Entonces la relación $\sim_C$ es de equivalencia.*

DEFINICIÓN 43. *Sea (X,d) un espacio métrico. Si $x \in X$ entonces $\{x\}$ es un conjunto conexo. Por lo tanto el conjunto $\{C \subseteq X \mid C \text{ es conexo}, \ x \in C\}$ es no vacío. Así, por la proposición 46, $\bigcup\{C \subseteq X \mid C \text{ es conexo}, \ x \in C\}$ es un conexo al que se le conoce como la componete conexa de x y se denotará por C_x.*

PROPOSICIÓN 52. *Sea (X,d) un espacio métrico. Para todo $x \in X$, C_x es el conexo más grande al que pertenece x y este conjunto es cerrado.*

PROPOSICIÓN 53. *Sea (X,d) un espacio métrico. Entonces la familia de subconjuntos de X, $\{C_x \mid x \in X\}$, es una partición del X.*

PROPOSICIÓN 54. *Sean (X,d) y (Y,d') espacios métricos así como $f : X \to Y$ una función continua. Si $A \subseteq X$ es conexo, entonces $f(A) \subseteq Y$ es conexo.*

COROLARIO 4. *(Teorema de Bolzano) Sea (X,d) un espacio métrico conexo y $f : X \to \mathbb{R}$ una función continua. Si $a,b \in f(X)$ son tales que $a < b$, entonces para todo $c \in \mathbb{R}$ tal que $a < c < b$, $c \in f(X)$.*

2. Espacios métricos totalmente disconexos.

DEFINICIÓN 44. *Decimos que un espacio métrico (X,d) es totalmente disconexo si para todo $x \in X$, $C_x = \{x\}$.*

EJEMPLO 8. *Todo conjunto X con la métrica discreta es un espacio totalmente disconexo.*

EJEMPLO 9. *Lo racionales $\mathbb{Q}$ son un espacio totalmente disconexo como subespacio de $\mathbb{R}$.*

EJEMPLO 10. *El conjunto de Cantor C es un espacio totalmente disconexo como subespacio de $\mathbb{R}$.*

PROPOSICIÓN 55. *Sea (X,d) un espacio métrico. Entonces X es totalmente disconexo si y sólo si todo conjunto conexo en X es unitario.*

PROPOSICIÓN 56. *Sea (X,d) un espacio métrico y $A \subseteq X$ no vacío. Si X es un espacio totalmente disconexo entonces A es un espacio totalmente disconexo como subespacio de X.*

PROPOSICIÓN 57. *Si $\{(X_n,d_n)\}_{n=0}^{\infty}$ es una colección de espacios totalmente disconexos entonces $\prod_{n=0}^{\infty} X_n$ es totalmente disconexo.*

COROLARIO 5. *Si $\{(X_i,\alpha_i^j)\}$ es un sistema codirigido de espacios métricos totalmente disconexos entonces $\varprojlim(X_i,\alpha_i^j)$ es un espacio totalmente disconexo.*

3. Espacios métricos totalmente separados.

PROPOSICIÓN 58. *Sea (X,d) un espacio métrico. Entonces X es conexo si y sólo si existe $A \subseteq X$ abierto-cerrado con $A \neq \emptyset$ y $A \neq X$.*

DEFINICIÓN 45. *Un espacio métrico (X,d) es totalmente separado si para cualesquiera $x,y \in X$ con $x \neq y$, existe $A \subseteq X$ abierto-cerrado tal que $x \in A$ y $y \notin A$.*

EJEMPLO 11. *$\mathbb{Q}$ es totalmente separado como subespacio de $\mathbb{R}$.*

EJEMPLO 12. *$\mathbb{R}$ no es un espacio métrico totalmente separado.*

PROPOSICIÓN 59. *Todo espacio métrico totalmente separado es totalmente disconexo.*

PROPOSICIÓN 60. *Todo espacio métrico totalmente separado y compacto tiene una base para su topología formada por conjuntos abiertos-cerrados.*

4. Una caracterización del conjunto de Cantor.

DEFINICIÓN 46. *Sean (X,d) un espacio métrico y $\mathscr{U},\mathscr{V}$ cubiertas abiertas de X. Decimos que $\mathscr{V}$ refina a $\mathscr{U}$, lo que se denota por $\mathscr{U} \leq \mathscr{V}$, si para todo $U \in \mathscr{U}$ existe $V \in \mathscr{V}$ tal que $U \subseteq V$.*

PROPOSICIÓN 61. *Sea (X,d) un espacio métrico compacto y totalmente disconexo. Entonces para todo $n \in \mathbb{N}$ existe una cubierta abierta de X, $\mathscr{U}_n$, formada por conjuntos abiertos ajenos dos a dos con diametro menor a $\frac{1}{2^n}$. Más aún, la sucesión de cubiertas puede tomarse de tal manera que para todo $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{U}_n \leq \mathscr{U}_{n+1}$.*

DEFINICIÓN 47. *Sean $\mathbb{X} = \{(X_i,\alpha_i^j)\}$ y $\mathbb{Y} = \{(Y_i,\beta_i^j)\}$ dos sistemas codirigidos de espacios métricos. Un morfismo de $\mathbb{X}$ a $\mathbb{Y}$ es una familia de funciones $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$, con $f = \{f_i : X_i \to Y_i\}$, tal que para todo $i \leq j$, $f_i \circ \alpha_i^j = \beta_i^j \circ f_j$. Decimos que f es suprayectivo si para todo i, f_i es una función suprayectiva.*

PROPOSICIÓN 62. *Todo morfismo suprayectivo $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ entre sistemas codirigidos de espacios métricos compactos induce una función continua y suprayectiva $\varprojlim f : \varprojlim \mathbb{X} \to \varprojlim \mathbb{Y}$.*

Sea X un espacio métrico compacto y totalmente disconexo así como $\{\mathscr{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de particiones como en el lema 1. Para todo $n \in \mathbb{N}$ consideremos $\mathscr{U}_n$ como espacio métrico con la métrica discreta. Si $Y_n := (\mathscr{U}_n, d_{disc})$ entonces para todo $n \in \mathbb{N}^+$ existe $f_n : Y_n \to Y_{n-1}$ donde $f(U)$ es el único elemento de $\mathscr{U}_{n-1}$ tal que $U \subseteq f(U)$. Esto permite definir un sistema codirigido $\mathbb{Y} = (Y_i, f_i^j)$.

PROPOSICIÓN 63. *En el mismo contexto de la discusiíon previa X es homeomorfo a* $\varprojlim \mathbb{Y}$.

PROPOSICIÓN 64. *Sea* (X,d) *un espacio métrico compacto, totalmente disconexo y perfecto. Entonces para todo* $U \subseteq X$ *abierto no vacío y para todo* $n \in \mathbb{N}$ *existen* $U_1,...,U_n$ *abiertos ajenos de* X *tales que* $U = U_1 \cup ... \cup U_n$.

PROPOSICIÓN 65. *Cualesquiera dos espacios métricos compactos, totalmente disconexos y perfectos son homeomorfos.*

COROLARIO 6. *Todo espacio métrico compacto, totalmente disconexo y perfecto es homeomorfo al conjunto de Cantor.*

PROPOSICIÓN 66. *Todo espacio métrico compacto es imagen continua del conjunto de Cantor.*

Capítulo 5

Introducción a la Teoría de la Aproximación

"Un matemático no es digno de ese nombre si no es un poco poeta"

Karl Weierstrass.

1. El espacio de funciones continuas y acotadas.

DEFINICIÓN 48. *Sea X un conjunto. El conjunto de funciones con dominio X y codominio $\mathbb{R}$ acotadas se denota por $\mathscr{B}(X)$.*

PROPOSICIÓN 67. *Para todo X conjunto, $\mathscr{B}(X)$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial.*

DEFINICIÓN 49. *Sea X un conjunto. Dada $f \in \mathscr{B}(X)$ se define $\|f\|_\infty = \sup_{x\in X} |f(x)|$.*

PROPOSICIÓN 68. *Para todo X un conjunto, $(\mathscr{B}(X), \|\_\|_\infty)$ es un espacio normado.*

DEFINICIÓN 50. *Para (X,d) un espacio métrico $\mathscr{C}(X)$ denota el conjunto de funciones continuas de X a $\mathbb{R}$, mientras que $\mathscr{C}_b(X)$ denota el conjunto de funciones continuas y acotadas de X a $\mathbb{R}$.*

PROPOSICIÓN 69. *Si (X,d) un espacio métrico entonces $\mathscr{C}_b(X) \subseteq \mathscr{C}(X)$. Cuando (X,d) es compacto, $\mathscr{C}_b(X) = \mathscr{C}(X)$.*

PROPOSICIÓN 70. *Dado (X,d) un espacio métrico, $\mathscr{C}_b(X) \subseteq \mathscr{B}(X)$.*

PROPOSICIÓN 71. *Sea (X,d) un espacio métrico. Entonces $\mathscr{C}_b(X)$ es un subespacio cerrado de $\mathscr{B}(X)$.*

DEFINICIÓN 51. *Sean X un conjunto, $\{f_n\}_{n=0}^\infty \subseteq \mathscr{B}(X)$ y $f \in \mathscr{B}(X)$. Decimos que f_n converge a f de manera uniforme si $f_n \to f$ con $\|\_\|_\infty$.*

PROPOSICIÓN 72. *Si una sucesión de funciones converge de manera uniforme a una función, entonces dicha convergencia es puntual.*

PROPOSICIÓN 73. *Sea* $\{f_n\}_{n=0}^{\infty} \subseteq \mathscr{B}([0,1])$*, donde para todo* $n \in \mathbb{N}$*,* $f_n(x) = x^n$*. Entonces,*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0, & Si\ x = 0. \\ 1, & Si\ x = 1. \end{cases}$$

Esta sucesión de funciones proporciona un ejemplo de que en general la convergencia puntual en $\mathscr{B}(X)$ *no implica convergencia uniforme en dicho espacio.*

PROPOSICIÓN 74. *(Dini) Sean* (X,d) *un espacio métrico compacto y* $\{f_n\}_{n=0}^{\infty} \subseteq \mathscr{C}(X)$ *monótona tal que* $f_n \to f$ *de manera puntual. Entonces* f_n *converge a* f *de manera uniforme.*

2. El teorema de Stone- Weierstrass.

PROPOSICIÓN 75. *Sean* $a, b \in \mathbb{R}$ *con* $a < b$ *así como* $f \in \mathscr{C}([a,b])$*. Entonces para toda* $\varepsilon > 0$ *existe* $g_\varepsilon \in \mathscr{C}([a,b])$ *lineal a tramos tal que* $\|g_\varepsilon - f\|_\infty < \varepsilon$*.*

PROPOSICIÓN 76. *Sean* (X,d) *un espacio métrico y* $f, g \in \mathscr{C}_b(X)$*. Entonces* $fg \in \mathscr{C}_b(X)$ *y se cumple que*

$$\|fg\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|g\|_\infty.$$

COROLARIO 7. *Para todo* (X,d) *espacio métrico,* $\mathscr{C}_b(X)$ *es una* $\mathbb{R}$*-subálgebra de* $\mathscr{C}(X)$*.*

DEFINICIÓN 52. *Sea* (X,d) *un espacio métrico. Decimos que* $E \subseteq \mathscr{C}(X)$ *separa puntos si para cualesquiera* $x, y \in X$*, con* $x \neq y$*, existe* $f \in E$ *tal que* $f(x) \neq f(y)$*.*

Se busca demostrar el siguiente resultado.

PROPOSICIÓN 77 (Toerema de Stone-Weierstrass). *Sea* (X,d) *un espacio métrico compacto y* $A \leq \mathscr{C}(X)$ *una* $\mathbb{R}$*-subálgebra tal que:*

1. *A tiene todas las funciones constantes.*
2. *A separa puntos.*

Entonces A es densa en $\mathscr{C}(X)$*.*

La prueba se hace con los siguientes resultados previos.

PROPOSICIÓN 78. *Existe una suceción monótona creciente* $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ *de funciones polinomiales en* $[0,1]$ *que converge de manera uniforme a* $\sqrt{t}$.

PROPOSICIÓN 79. *Sean* (X,d) *un espacio métrico compacto y* $A \leq \mathscr{C}(X)$ *una subálgebra que satisface las hipótesis del teorema de Stone-Weierstrass. Para toda* $f \in \overline{A}$, $|f| \in \overline{A}$.

PROPOSICIÓN 80. *Sean* (X,d) *un espacio métrico compacto y* $A \leq \mathscr{C}(X)$ *una subálgebra que satisface las hipótesis del teorema de Stone-Weierstrass. Si* $f,g \in \overline{A}$, *entonces* $\max\{f,g\}, \min\{f,g\} \in \overline{A}$.

PROPOSICIÓN 81. *Sean* (X,d) *un espacio métrico compacto y* $A \leq \mathscr{C}(X)$ *una subálgebra que satisface las hipótesis del teorema de Stone-Weierstrass. Dados* $x,y \in X$, *con* $x \neq y$, *y* $a,b \in \mathbb{R}$, *existe* $f \in A$ *tal que* $f(x) = a$ *y* $f(y) = b$.

PROPOSICIÓN 82. *Sean* (X,d) *un espacio métrico compacto y* $A \leq \mathscr{C}(X)$ *una subálgebra que satisface las hipótesis del teorema de Stone-Weierstrass. Sean* $f \in \mathscr{C}(X)$, $x_0 \in X$ *y* $\varepsilon > 0$, *entonces existe* $g \in \overline{A}$ *tal que para toda* $x \in X$, $g(x) \leq f(x) + \varepsilon$ *y* $g(x_0) = f(x_0)$.

COROLARIO 8. *(Teorema de aproximación de Weierstrass) Sea* $X \subseteq \mathbb{R}^n$ *un conjunto compacto. Entonces para toda* $f \in \mathscr{C}(X)$ *existe una sucesión de funciones polinomiales* $\{p_n\}_{n=0}^{\infty} \subseteq \mathscr{C}(X)$ *que converge de manera uniforme a* f.

COROLARIO 9. *Para cualesquiera* $a,b \in \mathbb{R}$ *con* $a < b$, $\mathscr{C}([a,b])$ *es un espacio normado separable.*

Capítulo 6

Integral de Riemman-Stieljes

En este capítulo $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$.

1. Funciones de variación acotada.

DEFINICIÓN 53. *Una partición del intervalo $[a,b]$ es un conjunto finito $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ tal que $x_0 = a$, $x_n = b$ y para todo $k \in \{1, \ldots, n\}$, $x_{k-1} < x_k$. El conjunto de particiones del intervalo $[a,b]$ se denota por $\mathscr{P}[a,b]$. Para $P = \{x_0 = a, x_1, \ldots, x_n = b\}$ una partición definimos su norma, la que se denota por $\|P\|$, como $\max_{k=1,\ldots,n} |x_k - x_{k-1}|$.*

DEFINICIÓN 54. *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función.*

1. *Dada $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ una partición del intervalo $[a,b]$, definimos la variación de f respecto a P, la que se denota por $V(f,P)$, como el real posiblemente extendido $\sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})|$.*
2. *Decimos que f es de variación acotada si $\sup\{V(f,P) \mid P \in \mathscr{P}[a,b]\} < \infty$. El tal decimos que dicho número real es la variación total de f y lo denotaremos por $V(f)$ ó $V_{[a,b]}(f)$ si se quiere especificar el dominio de f. El conjunto de funciones de variación acotada en el intervalo $[a,b]$ se denota por $BV([a,b])$.*

EJEMPLO 13. *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función monótona entonces es de variación acotada. Además, $V(f) = |f(b) - f(a)|$.*

PROPOSICIÓN 83. *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función. Entonces $V(f) = 0$ si y sólo si f es constante.*

PROPOSICIÓN 84. *Sea $f \in BV([a,b])$. Se cumple lo siguiente.*

1. *f es acotada.*
2. *Si $[c,d] \subseteq [a,b]$, entonces $f \in BV([c,d])$. Además, $V_{[c,d]}(f) \leq V_{[a,b]}(f)$.*
3. *$BV([a,b])$ es una $\mathbb{R}$-subálgebra de $\mathbb{R}^{[a,b]}$. De hecho, para cualesquiera $f, g \in BV([a,b])$ se satisface que*

$$V(f+g) \leq V(f) + V(g).$$

$$V(fg) \le \left(\sup_{x\in[a,b]} |f(x)|\right) V(g) + \left(\sup_{x\in[a,b]} |g(x)|\right) V(f).$$

4. *Para todo* $c \in (a,b)$, $V_{[a,c]}(f) + V_{[c,b]}(f) = V_{[a,b]}(f)$.

PROPOSICIÓN 85. *Sea* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. *Entonces,* $f \in BV([a,b])$ *si y sólo si* f *es diferencia de dos funciones monótonas crecientes.*

2. Definición y propiedades básicas de la integral de Riemann-Stieltjes.

DEFINICIÓN 55. *Dadas* $P, P' \in \mathscr{P}[a,b]$ *decimos que* P' *refina a* P, *o que* P' *es más fina que* P, *si* $P \subseteq P'$.

DEFINICIÓN 56. *Sean* $f, \alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ *dos funciones,* $P = \{x_0, ..., x_n\} \in \mathscr{P}[a,b]$ *y para todo* $k \in \{1, ..., n\}$, $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$. *Una suma de Riemann-Stieltjes de* f *respecto a* α *es una expresión de la forma* $\sum_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta\alpha_k$, *donde* $\Delta\alpha_k := \alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1})$. *Una de tales sumas se denota por* $S(P, f, \alpha)$.

DEFINICIÓN 57. *Sean* $f, \alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ *dos funciones. Decimos que* f *es integrable respecto a* α *si existe* $A \in \mathbb{R}$ *tal que para todo* $\varepsilon > 0$ *existe* $P_\varepsilon \in \mathscr{P}[a,b]$ *con la propiedad de que para toda* $P' \in \mathscr{P}([a,b])$ *más fina que* P_ε, *se tiene que* $|S(P', f, \alpha) - A| < \varepsilon$. *Si dicho elemento* $A \in \mathbb{R}$ *existe lo denotaremos por* $\int_a^b f d\alpha$ *o* $\int_a^b f(x) d\alpha(x)$, *y lo llamaremos la integral de Riemann-Stieltjes de* f *respecto a* α.

PROPOSICIÓN 86. *Sean* $f, g, \alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ *funciones y* $c \in \mathbb{R}$ *tales que* f *y* g *son integrables respecto a* α. *Entonces* $cf + g$ *es integrable respecto a* α *y se cumple que*

$$\int_a^b (cf+g)(x) d\alpha(x) = c \int_a^b f(x) d\alpha(x) + \int_a^b g(x) d\alpha(x).$$

PROPOSICIÓN 87. *Sean* $f, \alpha, \beta : [a,b] \to \mathbb{R}$ *funciones y* $c \in \mathbb{R}$ *tales que* f *es integrable respecto a* α *y* β. *Entonces* f *es integrable respecto a* $c\alpha + \beta$ *y se cumple que*

$$\int_a^b f(x) d(c\alpha+\beta)(x) = c \int_a^b f(x) d\alpha(x) + \int_a^b f(x) d\beta(x).$$

DEFINICIÓN 58. *Sean* $f, \alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$. *Se define* $\int_a^a f(x) d\alpha(x) = 0$ *y si* f *es integrable respecto a* α, $\int_b^a f(x) d\alpha(x) := -\int_a^b f(x) d\alpha(x)$.

PROPOSICIÓN 88. *Sean* $f, \alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ *funciones y* $c \in (a,b)$. *Si dos de las integrales* $\int_a^c f(x)d\alpha(x)$, $\int_c^b f(x)d\alpha(x)$ *y* $\int_a^b f(x)d\alpha(x)$ *existen, entonces existe la tercera y se satisface que*

$$\int_a^c f(x)d\alpha(x) + \int_c^b f(x)d\alpha(x) = \int_a^b f(x)d\alpha(x).$$

PROPOSICIÓN 89. *(Integración por partes) Sean* $f, \alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ *funciones tales que* f *es integrable respecto a* α *en* $[a,b]$. *Entonces* α *es integrable respecto a* f *en* $[a,b]$ *y además*

$$\int_a^b \alpha(x)df(x) = f(b)\alpha(b) - f(a)\alpha(a) - \int_a^b f(x)d\alpha(x).$$

PROPOSICIÓN 90. *(Teorema de cambio de variable) Sean* $f, \alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ *funciones y* $g : [c,d] \to [a,b]$ *una función continua monótona no decreciente tal que* $g(c) = a$ *y* $g(d) = b$. *Si* f *es integrable respecto a* α *en* $[a,b]$ *entonces* $f \circ g$ *es integrable respecto a* $\alpha \circ g$ *en* $[c,d]$ *y además*

$$\int_a^b f(x)d\alpha(x) = \int_c^d (f \circ g)(x)d(\alpha \circ g)(x).$$

PROPOSICIÓN 91. *Sean* $f, \alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ *funciones tales que* f *es integrable respecto a* α *en* $[a,b]$ *y* α *es de clase* C^1 *en* $[a,b]$. *Entonces* $f\alpha' : [a,b] \to \mathbb{R}$ *es Riemann-integrable y se cumple que*

$$\int_a^b f(x)d\alpha(x) = \int_a^b f(x)\alpha'(x)dx.$$

PROPOSICIÓN 92. *Sea* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *y para* $c \in (a,b)$ *definimos la función* $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ *cuya regla de correspondencia es:*

$$\alpha(x) = \begin{cases} \alpha(a), & \text{Si } a \le x < c. \\ \alpha(c), & \text{Si } x = c. \\ \alpha(b), & \text{Si } c < x \le b. \end{cases}$$

Si alguna de la funciones f *o* α *es continua por la derecha en* c *y también alguna de ellas es continua por la derecha de* c, *entonces* f *es integrable respecto a* α *y además*

$$\int_a^b f(x)d\alpha(x) = f(c)(\alpha(c^+) - \alpha(c^-)).$$

DEFINICIÓN 59. *Una función* $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ *se llama escalonada si existe* $P = \{x_0 = a, x_1, ..., x_n = b\} \in \mathscr{P}[a,b]$ *tal que para todo* $k \in \{1,...,n\}$*,* $\alpha|_{(x_{k-1},x_k)} : (x_{k-1},x_k) \to \mathbb{R}$ *es constante.*

PROPOSICIÓN 93. *Sean* $f, \alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ *funciones con* α *escalonada. Si alguna de las funciones* f *o* α *es continua por la derecha y lo mismo sucede por la izquierda en los puntos de una partición testigo de que* α *es escalonada, entonces existen* $x_1, ..., x_n \in [a.b]$ *y* $\alpha_1, ..., \alpha_k \in \mathbb{R}$ *tales que*

$$\int_a^b f(x)d\alpha(x) = \sum_{k=1}^n f(x_k)\alpha_k.$$

COROLARIO 10. *Toda suma finita se puede escribir como una integral de Riemann-Stieltjes.*

PROPOSICIÓN 94. *(Fórmula de Euler) Sea* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *una función de clase* $\mathscr{C}^1$ *en* (a,b)*. Si* $((x)) := x - \lfloor x \rfloor$*, entonces*

$$\sum_{a<n\leq b,\ n\in\mathbb{Z}} f(n) = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b f'(x)((x))dx + f(a)((a)) - f(b)((b)).$$

3. Integral respecto a una función creciente.

En esta sección $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ siempre será una función creciente.

DEFINICIÓN 60. *Para* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *acotada y* $P \in \mathscr{P}[a,b]$ *con* $P = \{x_0 = a, x_1, ..., x_n = b\}$*. Se definen los números reales:*

$$m_k(f) = \text{ínf}\{f(x) \mid x \in [x_{k-1}, x_k]\}$$
$$M_k(f) = \sup\{f(x) \mid x \in [x_{k-1}, x_k]\},$$

donde $k \in \{1,...,n\}$.

Además, en tal caso definimos la suma superior de Stieltjes de f *respecto a* α *en la partición* P*, la que denotamos por* $U(f,\alpha,P)$*, y la suma inferior de Stieltjes de* f *respecto a* α *en la partición* P*, la que denotamos por* $L(f,\alpha,P)$*, como:*

$$L(f,\alpha,P) = \sum_{k=1}^n m_k(f)\Delta\alpha_k$$

$$U(f,\alpha,P)=\sum_{k=1}^{n}M_k(f)\Delta\alpha_k.$$

PROPOSICIÓN 95. *Para $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ acotada y $P\in\mathscr{P}[a,b]$, $L(f,\alpha,P)\leq S(f,\alpha,P)\leq U(f,\alpha,P)$, donde $S(f,\alpha,P)$ es cualquier suma de Riemann-Stieltjes de f respecto a α en la partición P.*

PROPOSICIÓN 96. *Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función.*

1. *Si $P,P'\in\mathscr{P}[a,b]$ tales que $P\subseteq P'$, entonces*
$$L(f,\alpha,P)\leq L(f,\alpha,P')$$
$$U(f,\alpha,P')\leq U(f,\alpha,P)$$
2. *Para cualesquiera $P,P'\in\mathscr{P}[a,b]$, $L(f,\alpha,P)\leq U(f,\alpha,P')$.*

DEFINICIÓN 61. *Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función acotada. Se define la integral superior de Stieltjes de f respecto a α como:*

$$\overline{\int_a^b} f\,d\alpha=\text{ínf}\{U(f,\alpha,P)\mid P\in\mathscr{P}[a,b]\}.$$

Mientras que la integral inferior de Stieltjes de f respecto a α por:

$$\underline{\int_a^b} f\,d\alpha=\sup\{L(f,\alpha,P)\mid P\in\mathscr{P}[a,b]\}.$$

PROPOSICIÓN 97. *Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función acotada. Entonces,*
$$\underline{\int_a^b} f\,d\alpha\leq\overline{\int_a^b} f\,d\alpha.$$

PROPOSICIÓN 98. *La desigualdad en la proposición anterior puede ser estricta pues para $f=\chi_{\mathbb{Q}\cap[a,b]}$ se tiene que $\underline{\int_a^b} f\,d\alpha=0$ mientras que $\overline{\int_a^b} f\,d\alpha=b-a$.*

PROPOSICIÓN 99. *Sean $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ una funciones acotadas.*

1. *Para todo $c \in (a,b)$,*

$$\overline{\int_a^b} f d\alpha = \overline{\int_a^c} f d\alpha + \overline{\int_c^b} f d\alpha.$$

$$\underline{\int_a^b} f d\alpha = \underline{\int_a^c} f d\alpha + \underline{\int_c^b} f d\alpha.$$

2. $$\overline{\int_a^b} (f+g) d\alpha \leq \overline{\int_a^b} f d\alpha + \overline{\int_a^b} g d\alpha.$$

$$\underline{\int_a^b} f d\alpha + \underline{\int_a^b} g d\alpha \leq \underline{\int_a^b} (f+g) d\alpha.$$

PROPOSICIÓN 100. *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función acotada. Son equivalentes:*

1. *f es integrable respecto a α.*
2. *f satisface la condición de Riemann respecto a α, es decir, para toda $\varepsilon > 0$ existe $P_\varepsilon \in \mathscr{P}[a,b]$ tal que para toda $P \in \mathscr{P}[a,b]$ con $P_\varepsilon \subseteq P$, $U(f,\alpha,P) - L(f,\alpha,P) < \varepsilon$.*
3. $\underline{\int_a^b} f d\alpha = \overline{\int_a^b} f d\alpha$.

PROPOSICIÓN 101. *Sean $f,g : [a,b] \to \mathbb{R}$ funciones integrables respecto a α tales que $f \leq g$, entonces*

$$\int_a^b f(x) d\alpha(x) \leq \int_a^b g(x) d\alpha(x).$$

PROPOSICIÓN 102. *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función integrable respecto a α. Entonces $|f|$ es integrable respecto a α y además*

$$\left| \int_a^b f(x) d\alpha(x) \right| \leq \int_a^b |f(x)| d\alpha(x).$$

PROPOSICIÓN 103. *Sean $f,g : [a,b] \to \mathbb{R}$ funciones.*

1. *Si f es integrable respecto a α entonces f^2 es integrable respecto a α.*
2. *Si f y g son integrables respecto a α entonces fg es integrable respecto a α.*

4. Integrabilidad.

PROPOSICIÓN 104. *Si $f,\alpha:[a,b]\to\mathbb{R}$ son funciones con f continua y α de variación acotada, entonces f es integrable respecto a α.*

PROPOSICIÓN 105. *Sean $f,\alpha:[a,b]\to\mathbb{R}$ funciones con f acotada y α de variación acotada. Si se define $V:[a,b]\to\mathbb{R}$ donde $V(x)$ denota la variación total de α en el intervalo $[a,x]$, poniendo $V(a)=0$, y f es integrable respecto a α, entonces f es integrable respecto a V.*

Bibliografía

[1] Jean Dieudonné. *Foundations of modern analysis*. Read Books Ltd, 2013.

[2] Andrei Nikolaevich Kolmogorov and Sergei Vasilevich Fomin. *Introductory real analysis*. Courier Corporation, 1975.