Алгоритмы и структуры данных Лабораторная работа по приоритетным очередям и СНМ, 2019 год

Использовать стандартную библиотеку (std::priority_queue, java.util.PriorityQueue, std::set, java.util.TreeSet) не разрешается. Все задачи решаются с помощью СНМ или приоритетных очередей, никаких неизученных структур данных не требуется.

Задача А. Хип ли?

Имя входного файла: стандартный ввод Имя выходного файла: стандартный вывод

Ограничение по времени: 2 секунды Ограничение по памяти: 64 мегабайта

Структуру данных Неар можно реализовать на основе массива.

Для этого должно выполнятся *основное свойство Heap'a*, которое заключается в следующем. Для каждого $1 \leqslant i \leqslant n$ выполняются следующие условия:

- Если $2i\leqslant n$, то $a[i]\leqslant a[2i]$
- Если $2i+1\leqslant n$, то $a[i]\leqslant a[2i+1]$

Дан массив целых чисел. Определите является ли он Неар'ом.

Формат входных данных

Первая строка входного файла содержит целое число n ($1 \le n \le 10^5$). Вторая строка содержит n целых чисел по модулю не превосходящих $2 \cdot 10^9$.

Формат выходных данных

Выведите «YES», если массив является Heap'ом и «NO» в противном случае.

| стандартный ввод | стандартный вывод |
|------------------|-------------------|
| 5 | NO |
| 1 0 1 2 0 | |
| 5 | YES |
| 1 3 2 5 4 | |

Задача В. Система непересекающихся множеств

Имя входного файла: стандартный ввод Имя выходного файла: стандартный вывод

Ограничение по времени: 2 секунды Ограничение по памяти: 64 мегабайта

Реализуйте систему непересекающихся множеств. Вместе с каждым множеством храните минимальный, максимальный элемент в этом множестве и их количество.

Формат входных данных

Первая строка входного файла содержит n — количество элементов в носителе ($1 \le n \le 300\,000$). Далее операций с множеством. Операция get должна возвращать минимальный, максимальный элемент в соответствующем множестве, а также их количество.

Формат выходных данных

Выведите последовательно результат выполнения всех операций get.

| стандартный ввод | стандартный вывод |
|------------------|-------------------|
| 5 | 3 3 1 |
| union 1 2 | 1 2 2 |
| get 3 | 1 3 3 |
| get 2 | 5 5 1 |
| union 2 3 | 4 5 2 |
| get 2 | 1 5 5 |
| union 1 3 | |
| get 5 | |
| union 4 5 | |
| get 5 | |
| union 4 1 | |
| get 5 | |

Задача С. Приоритетная очередь – 2

Имя входного файла: стандартный ввод Имя выходного файла: стандартный вывод

Ограничение по времени: 2 секунды Ограничение по памяти: 64 мегабайта

Реализуйте приоритетную очередь. Ваша очередь должна поддерживать следующие операции: добавить элемент, извлечь минимальный элемент, уменьшить элемент, добавленный во время одной из операций.

Если какой-нибудь decrease-key уменьшает уже удаленный элемент, то ничего делать не нужно. Все операции нумеруются по порядку, начиная с 1.

Формат входных данных

Входной файл содержит описание операций со очередью. В очередь помещаются и извлекаются только целые числа, не превышающие по модулю 10^9 .

Гарантируется, что для любого decrease-key ${\tt x}$ ${\tt v}$ из входных данных операция под номером x является push.

Формат выходных данных

Выведите последовательно результат выполнения всех операций extract-min из двух целых чисел: значение элемента и номер операции push, при котором этот элемент был добавлен. Если в очереди есть несколько минимальных элементов, выведите любой. Если перед очередной операцией extract-min очередь пуста, выведите звездочку.

| 2 3 |
|-----|
| |
| 1 2 |
| 3 1 |
| * |
| |
| |
| |
| |
| |

Задача D. Парковка

Имя входного файла: стандартный ввод Имя выходного файла: стандартный вывод

Ограничение по времени: 2 секунды Ограничение по памяти: 64 мегабайта

На кольцевой парковке есть n мест пронумерованых от 1 до n. Всего на парковку приезжает n машин в порядке нумерации. У i-й машины известно место p_i , которое она хочет занять. Если машина приезжает на парковку, а её место занято, то она едет далее по кругу и встаёт на первое свободное место.

Формат входных данных

В первой строке входного файла находится число n ($1 \le n \le 300\,000$) — размер парковки и число машин. Во второй строке записаны n чисел, i-е из которых p_i ($1 \le p_i \le n$) — место, которое хочет занять машина с номером i.

Формат выходных данных

Выведите n чисел: i-е число — номер парковочного места, которое было занято машиной с номером i.

| стандартный ввод | стандартный вывод |
|------------------|-------------------|
| 3 | 2 3 1 |
| 2 2 2 | |
| 3 | 1 2 3 |
| 1 1 2 | |

Задача E. Yet another set merging

Имя входного файла: стандартный ввод Имя выходного файла: стандартный вывод

Ограничение по времени: 2 секунды Ограничение по памяти: 256 мегабайт

Вам задано n различных чисел от 1 до n. Изначально каждое число лежит в своем множестве. Обозначим множество, которому принадлежит элемент i как s(i).

Ваша задача поддерживать три вида операций:

- 1. Объединить множества s(x) и s(y), где $1 \le x, y \le n$. Если s(x) совпадает с s(y), ничего делать не требуется.
- 2. Объединить множества $s(x), s(x+1), \ldots, s(y)$, где $1 \le x \le y \le n$.
- 3. Ответить на вопрос, правда ли, что числа x и y лежат в одном множестве $(1 \le x, y \le n)$.

Формат входных данных

Первая строка входных данных содержит два целых числа n и q ($1 \leqslant n \leqslant 200\,000$, $1 \leqslant q \leqslant 500\,000$) — количество чисел и количество запросов.

В последующих q строках находятся запросы. Каждый запрос имеет вид $type \ x \ y$, где $type \in \{1,2,3\}$. Обратите внимание, что x может равняться y в запросе любого типа.

Формат выходных данных

На каждый запрос типа 3 выведите «YES» или «NO» (без кавычек), в зависимости от того, находятся ли числа в одном множестве.

| стандартный ввод | стандартный вывод |
|------------------|-------------------|
| 8 6 | NO |
| 3 2 5 | YES |
| 1 2 5 | YES |
| 3 2 5 | |
| 2 4 7 | |
| 2 1 2 | |
| 3 1 7 | |

Задача F. Разрезание графа

Имя входного файла: стандартный ввод Имя выходного файла: стандартный вывод

Ограничение по времени: 2 секунды Ограничение по памяти: 256 мегабайт

Дан неориентированный граф. Над ним в заданном порядке производят операции следующих двух типов:

- cut разрезать граф, то есть удалить из него ребро;
- ask проверить, лежат ли две вершины графа в одной компоненте связности.

Известно, что после выполнения всех операций типа **cut** рёбер в графе не осталось. Найдите результат выполнения каждой из операций типа **ask**.

Формат входных данных

Первая строка входного файла содержит три целых числа, разделённые пробелами — количество вершин графа n, количество рёбер m и количество операций k ($1 \le n \le 50\,000,\ 0 \le m \le 100\,000,\ m \le k \le 150\,000$).

Следующие m строк задают рёбра графа; i-я из этих строк содержит два числа u_i и v_i ($1 \le u_i, v_i \le n$), разделённые пробелами — номера концов i-го ребра. Вершины нумеруются с единицы; граф не содержит петель и кратных рёбер.

Далее следуют k строк, описывающих операции. Операция типа cut задаётся строкой " cut u v" $(1 \leq u, v \leq n)$, которая означает, что из графа удаляют ребро между вершинами u и v. Операция типа ask задаётся строкой " ask u v" $(1 \leq u, v \leq n)$, которая означает, что необходимо узнать, лежат ли в данный момент вершины u и v в одной компоненте связности. Гарантируется, что каждое ребро графа встретится в операциях типа cut ровно один раз.

Формат выходных данных

Для каждой операции **ask** во входном файле выведите на отдельной строке слово "YES", если две указанные вершины лежат в одной компоненте связности, и "NO" в противном случае. Порядок ответов должен соответствовать порядку операций **ask** во входном файле.

| стандартный ввод | стандартный вывод |
|------------------|-------------------|
| 3 3 7 | YES |
| 1 2 | YES |
| 2 3 | NO |
| 3 1 | NO |
| ask 3 3 | |
| cut 1 2 | |
| ask 1 2 | |
| cut 1 3 | |
| ask 2 1 | |
| cut 2 3 | |
| ask 3 1 | |

Задача G. RMQ Наоборот

Имя входного файла: стандартный ввод Имя выходного файла: стандартный вывод

Ограничение по времени: 2 секунды Ограничение по памяти: 256 мегабайт

Рассмотрим массив a[1..n]. Пусть Q(i,j) — ответ на запрос о нахождении минимума среди чисел $a[i], \ldots, a[j]$. Вам даны несколько запросов и ответы на них. Известно, что ответы на запросы непротиворечивы, восстановите исходный массив.

Формат входных данных

Первая строка входного файла содержит число n — размер массива, и m — число запросов $(1\leqslant n,m\leqslant 300\,000)$. Следующие m строк содержат по три целых числа i,j и q, означающих, что Q(i,j)=q $(1\leqslant i\leqslant j\leqslant n,-2^{31}\leqslant q\leqslant 2^{31}-1)$.

Гарантируется, что ответы на запросы непротиворечивы.

Формат выходных данных

Выведите элементы массива. Элементами массива должны быть целые числа в интервале от -2^{31} до $2^{31}-1$ включительно. Если решений несколько, выведите любое. Гарантируется, что существует ответ с заданными ограничениями.

| стандартный ввод | стандартный вывод |
|------------------|-------------------|
| 3 2 | 1 2 3 |
| 1 2 1 | |
| 2 3 2 | |

Задача Н. Двудольный граф

Имя входного файла: стандартный ввод Имя выходного файла: стандартный вывод

Ограничение по времени: 1 секунда Ограничение по памяти: 512 мегабайт

Задан неориентированный граф из n вершин без рёбер. Каждая вершина графа в каждый момент времени покрашена в один из цветов: 0 или 1-и верно, что цвета вершин, между которыми есть ребро, различны.

Поступают два вида запросов:

- заданы два элемента x и y из разных компонент связности: добавить в граф ребро xy, изменив цвета вершин, что вершины были покрашены в соответствии с условием;
- ullet заданы два элемента x, y из одной компоненты связности: ответить, правда ли, что их цвета одинаковы.

Формат входных данных

В первой строке заданы два целых числа n и m $(1 \le n, m \le 2 \cdot 10^5)$.

В следующих m строках содержится описание запросов.

- Запрос первого типа имеет вид 0 **a b**, означающий, что нужно объединить компоненты связности вершин x и y, такие что $x \mod n = (a + shift) \mod n$, $y \mod n = (b + shift) \mod n$.
- Запрос второго типа имеет вид 1 а b, означающий, что нужно проверить одинаковы ли цвета вершин x и y, таких что x mod n = (a + shift) mod n, y mod n = (b + shift) mod n.

Если при запросе второго типа вершины x и y одинакового цвета, то нужно выполнить присвоение $shift = (shift + 1) \bmod n$.

Формат выходных данных

Для каждой операции второго типа выведите «YES», если заданные вершины одинакового цвета, и «NO», иначе.

| стандартный ввод | стандартный вывод |
|------------------|-------------------|
| 3 5 | NO |
| 0 1 2 | YES |
| 0 2 3 | NO |
| 1 1 2 | |
| 1 1 3 | |
| 1 1 3 | |

Задача І. Ещё одна задача про деревья

Имя входного файла: стандартный ввод Имя выходного файла: стандартный вывод

Ограничение по времени: 2 секунды Ограничение по памяти: 256 мебибайт

Есть граф из N вершин. Изначально он пустой. Нужно обработать M запросов:

- 1. добавить ребро из вершины v_1 в вершину v_2 , при этом вершины v_1 и v_2 находятся в разных деревьях и вершина v_2 является корнем какого-то дерева.
- 2. по двум вершинам a и b определить, лежат ли они в одном дереве.

Решение задачи: реализуем СНМ с эвристикой сжатия путей:

```
int n, m, p[NMAX];
int find set(int v)
        if (p[v] != v)
                p[v] = find set(p[v]);
        return p[v];
}
int main()
{
        scanf ("%d%d", &n, &m);
        for (int i = 1; i \le n; i ++)
                p[i] = i;
        for (int i = 1; i \le m; i + +)
                 int x, y, z;
                 scanf ("%d%d%d", &z, &x, &y);
                 if (z == 1) {
                         p[y] = x;
                 } else {
                         if (find set(x) = find set(y))
                                  printf ("YES\n");
                         else
                                  printf ("NO\n");
                 }
        }
}
```

Вам же предстоит сделать тест, на котором это решение будет работать долго. Более точно, нужно сделать тест, на котором количество вызовов функции find_set будет не меньше, чем $\frac{1}{4}M\log_2 M$.

Формат входных данных

Входной файл содержит два целых числа N и M $(1 \leqslant N \leqslant 10^6, 1 \leqslant M \leqslant 10^5, M \leqslant N).$

Формат выходных данных

Выведите M строк. i-ая строка должна иметь вид 1 x y, если i-ый запрос заключается в добавлении ребра из вершины x в вершину y, или 0 x y, если спрашивается, лежат ли вершины x и y в одном дереве.

Алгоритмы и структуры данных Лабораторная работа по приоритетным очередям и СНМ, 2019 год

| стандартный ввод | стандартный вывод |
|------------------|-------------------|
| 2 2 | 1 1 2 |
| | 0 1 2 |

Задача J. Всем чмоки в этом чатике!

Имя входного файла: стандартный ввод Имя выходного файла: стандартный вывод

Ограничение по времени: 2 секунды Ограничение по памяти: 256 мегабайт

Сегодня Мэри, как программисту социальной сети «Телеграфчик», предстоит реализовать сложную систему управления чатами.

Задача Мэри усложняется тем, что в социальную сеть «Телеграфчик» внедрена продвинутая система шифрования «ZergRus», простая, как всё гениальное. Суть её в том, что в системе хранится одна переменная zerg, которая принимает значения от 0 (включительно) до $p = 10^6 + 3$ (исключая p) и меняется в зависимости от событий в системе.

В социальной сети всего n пользователей ($1 \le n \le 10^5$). В начале дня каждый пользователь оказывается в своём собственном чате, в котором больше никого нет. Переменная zerg в начале дня устанавливается равной 0.

В течение дня происходят события типов:

- 1. Участник с номером $(i + zerg) \mod n$ посылает сообщение всем участникам, сидящим с ним в чате (в том числе и себе самому), при этом переменная zerg заменяется на $(30 \cdot zerg + 239) \mod p$.
- 2. Происходит слияние чатов, в которых сидят участники с номерами $(i + zerg) \mod n$ и $(j + zerg) \mod n$. Если участники и так сидели в одном чате, то ничего не происходит. Если в разных, то чаты объединяются, а переменной zerg присваивается значение $(13 \cdot zerg + 11) \mod p$.
- 3. Участник с номером $(i + zerg) \mod n$ хочет узнать, сколько сообщений он не прочитал, и прочитать их. Если участник прочитал q новых сообщений, то переменной zerg присваивается значение $(100\,500\cdot zerg+q) \mod p$.

Вы поможете Мэри реализовать систему, обрабатывающую эти события?

Формат входных данных

В первой строке входного файла записаны натуральные числа n $(1\leqslant n\leqslant 10^5)$ — число пользователей социальной сети. и m $(1\leqslant m\leqslant 3\cdot 10^5)$ — число событий, произошедших за день. В следующих m строках содержится описание событий. Первое целое число в строке означает тип события t $(1\leqslant t\leqslant 3)$. Если t=1, далее следует число i $(0\leqslant i< n)$, по которому можно вычислить, какой участник послал сообщение. Если t=2, далее следуют числа i и j $(0\leqslant i,j< n)$, по которым можно вычислить номера участников, чаты с которыми должны объединиться. Если t=3, далее следует число i $(0\leqslant i< n)$, по которому можно вычислить номер участника, желающего узнать, сколько у него сообщений, и прочитать их.

Формат выходных данных

Для каждого события типа 3 нужно вывести число непрочитанных сообщений у участника.

| стандартный ввод | стандартный вывод | Пояснение |
|------------------|-------------------|-----------|
| 4 10 | 1 | 4 10 |
| 1 0 | 1 | 1 0 |
| 1 2 | 2 | 1 1 |
| 1 1 | | 1 2 |
| 1 2 | | 1 3 |
| 3 1 | | 3 0 |
| 2 1 2 | | 2 0 1 |
| 1 3 | | 1 1 |
| 3 3 | | 3 0 |
| 2 3 2 | | 2 2 1 |
| 3 2 | | 3 1 |

Задача К. Биномиальная куча

Имя входного файла: стандартный ввод Имя выходного файла: стандартный вывод

Ограничение по времени: 2 секунды Ограничение по памяти: 256 мегабайт

Реализуйте биномиальную кучу.

Формат входных данных

В первой строке содержится два целых числа: N- общее количество куч и M- количество операций ($1 \le N \le 1000, 1 \le M \le 1000\,000$). Изначально все кучи пусты.

Требуется поддерживать следующие операции:

- 0 v a добавить элемент со значением v в кучу с номером a. Вновь добавленный элемент имеет уникальный индекс равный порядковому номеру соответствующей *операции добавления*. Нумерация начинается с единицы.
- 1 а b переложить все элементы из кучи с номером a в кучу с номером b. После этой операции куча a становится пустой.
- 2 і удалить элемент с индексом i.
- 3 і v—присвоить элементу с индексом i значение v. Гарантируется, что элемент существует.
- 4 а вывести на отдельной строке значение минимального элемента в куче с номером a. Гарантируется, что куча не пуста.
- 5 а удалить минимальный элемент из кучи с номером а. Если таковых несколько, то выбирается элемент с минимальным индексом. Гарантируется, что куча не пуста.

Формат выходных данных

Для каждой операции поиска минимального элемента выведите единственное число: значение искомого элемента.

| стандартный ввод | стандартный вывод |
|------------------|-------------------|
| 3 19 | 10 |
| 0 1 10 | 5 |
| 4 1 | 7 |
| 0 2 5 | 7 |
| 0 2 7 | 10 |
| 4 2 | 3 |
| 3 2 20 | 10 |
| 4 2 | 8 |
| 1 2 1 | |
| 4 1 | |
| 5 1 | |
| 4 1 | |
| 3 2 3 | |
| 4 1 | |
| 2 2 | |
| 4 1 | |
| 0 1 9 | |
| 1 1 3 | |
| 0 3 8 | |
| 4 3 | |