Berechnung von Pi

Furkan Gedikoglu
Burak Kilinc
David Kondziella

Hochschule Rhein-Waal *

30. Januar 2021

Abstract

In this paper we will show two different approaches to calculate the mathematical constant pi (π). The collsion model is a method to represent the constant π mathematically by a physical experiment. In the experimental setup, two particles collide against a wall in a two-dimensional system. This makes it possible to calculate the number π in a base determined by the ratio of the masses of the two particles. This method is based on Galperin's Billiards Method, in which he presented his idea of two balls with different masses boucing off a wall in a three body system (counting m_1, m_2 and the hard wall). In the following we want to present a possibility to calculate π to an high accuracy, depending on the choosen ratio of the two masses. Although π is calculated by a physical model, we want to transfer that method into our own system to calculate π with a variety of different inputs and properties (mass, starting velocity, ...). At the end we want to contrast this approach with another principle to get a rough idea how different the calculations of π can be. The alternating series called Leibniz formula is a possibility to calculate π where the series converges slowly to π which requires around five billions terms to calculate π with ten correct decimal places. These calculations are, in particular the Leibniz formula, an approximation to π. On the other hand both are very unique represantations of π which we will show in the following.

*Herr Prof. Dr. Frank Zimmer

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung

Der folgende Abschnitt basiert auf Walz (2017).
Die Kreiszahl *pi*[1] oder einfach π, auch bekannt als *Ludolphsche Zahl*, *Kreiszahl* oder *Archimedes-Konstante*, ist die bekannteste mathematische Konstante. Die Geschichte von Pi erstreckt sich über mehrere tausend Jahre. Die Kreiszahl wurde schon in den frühsten mathematischen Überführungen behandelt.
Die Bezeichnung für π kommt aus dem griechischen nach dem Anfangsbuchstaben des griechischen Wortes – zu lateinisch *peripheria*, „Randbereich“ oder – *perimetros*, „Umfang“.
Ab dem 16. Jahrhundert nutzen Mathematiker diese Bezeichnung als Symbol für die Kreiszahl.

Pi ist definiert als Verhältnis von Kreisumfang U zu Kreisdurchmesser d:

$$U = 2\pi r \Leftrightarrow \pi \quad = \frac{U}{2r}$$

Eine alternative Definition ist Pi als Quotient aus dem Flächeninhalt A und des Quadrates von r:

$$A = \pi r^2 \Leftrightarrow \pi \quad = \frac{A}{r^2}$$

Die Kreiszahl π und speziell die Berechnung stellt in der Mathematik schon immer eine Herausforderung dar. Pi ist nämlich eine irrationale Zahl, d.h. sie kann nicht als als Bruch dargestellt werden und bricht nicht ab.[2]

1.1 Geschichte von Pi

Frühere Näherungen beginnen teilweise schon zwischen 1900 und 1600 v. Chr. Auf babylonischen Keilschrifttafeln aus dieser Zeit wird für π der Näherungswert $3\frac{1}{8} = 3.125$ benutzt und auf ägyptischen Ahmes-Rhind Papyrus wir der Wert $\pi = (\frac{16}{9})^2 = 3.16049\cdots$ angegeben.
Dabei ist Pi durch die ganze Welt gewandert. Auch in Indien gab es verschiedene Annäherungen, womöglich auch die, die man aus der Schule kennt wie z.B. $\frac{355}{113}$. (Walz, 2017, S.190)

Natürlich wollte man diese Zahl und deren Natur unbedingt weiter erforschen und hat Wege gesucht Pi zu approximieren. Dadurch dass Pi eine irrationale Zahl ist kann sie nicht durch einfache Wurzelausdrücke oder Brüche dargestellt werden, sondern nur als Grenzwert von Folgen, unendliche Reihen, unendliches Produkt u.v.m.
Wegen der geometrischen Bedeutung von Pi beruhen viele dieser Berechnungen auf geometrischen Zusammenhängen, wie z.B. auch das Kollisionsmodell von Galperin[3].

[1] π ist der griechische Buchstabe „pi“
[2] Im Jahr 1761 von Johann Heinrich Lambert bewiesen (Walz, 2017, S.189)
[3] GALPERIN (2003)

Der wohl erste iterative Algorithmus ist von Archimedes, der *Archimedes-Algorithmus*. Archimedes fand dieses Iterationsverfahren, mit dem Pi beliebig genau berechnet werden kann, im dritten Jahrhundert v. Chr. (Walz, 2017, S.190)
Später gab es dann mehrere Möglichkeiten zur Berechnung durch unendliche Produkte[4], Kettenbrüche[5], unendliche Reihen[6], Integrale, Monte-Carlo-Methoden und Moderne Algorithmen[7].
Vor allem brachte Srinivasa Ramanujan die Berechnung ein großes Stück weiter mit seiner im Jahr 1914 gefundenen sehr schnell konvergierenden Reihe:

$$\frac{1}{\pi} = \frac{\sqrt{8}}{9801} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n)!}{(n!)^4} \cdot \frac{1103 + 26390n}{396^{4n}}$$

Aufgrund der stetig voranschreitenden technischen Entwicklung lassen sich bereits Billionen von Dezimalstellen von Pi berechnen.
Das Problem bei Computern ist nicht die fehlende Software oder der mathematische Ansatz, sondern viel eher die hohe Komplexität und den daraus resultierenden Laufzeiten. Eine schlecht konvergierende Reihe[8] braucht für weniger als 10 Dezimalstellen schon sehr lange.
Mittlerweile gibt es aber schon wirklich sehr schnell konvergierende Reihen, mit denen man mehrere Millionen bis Milliarden Dezimalstellen von Pi bestimmen kann.
Die Kreiszahl π hat so einen sehr hohen Stellenwert in der Mathematik bekommen, da sich viele Berechnungen auf die Konstante stützen, die wiederum eine ganz eigene Problematik ausgelöst hat. (Walz, 2017)

Der Rekord von ausgerechneten Dezimalstellen von Pi liegt momentan[9] bei $5.0 \cdot 10^{13}$ Dezimalstellen. Der Rekord wurde aufgestellt von Timothy Mullican und dokumentiert[10].

1.2 Anwendungsbereiche

Pi ist vor allem wegen seine geometrischen Bedeutung in der Geometrie sehr wichtig zur Berechnung von kreisförmigen Objekten oder Kurven, aber auch in anderen Bereichen der Mathematik, sowie der Physik (Rotation, Wellen, ...).

[4] 1593 François Viète
[5] William Lord Viscount Brouncker, Euler und Leo J. Lange
[6] Isaac Newton, Gottfried Wilhelm Leibniz, Euler, ...
[7] Srinivasa Ramanujan, Jonathan Michael, Gebrüder Borwein, Gebrüder Chudnovsky, ...
[8] z.B. die Leibniz-Reihe
[9] Stand: 06.01.2021
[10] siehe Mullican (2019)

2 Motivation

Die Kreiszahl π lässt sich heutzutage auf einem Heimcomputer auf knapp 50 Billionen Stellen berechnen.[11] Im Folgenden wollen wir die Kreiszahl π mit zwei relativ unterschiedlichen Ansätzen berechnen und verwenden dafür zum einen ein Kollisions Modell, das auf der Idee von Galperins Billiard basiert und zum anderen die Leibniz-Reihe.
Die Idee war es π so darzustellen, dass es mathematisch korrekt ist, aber auch eine visuelle Darstellung bzw. ein Versuchsaufbau existiert, der zum Verständnis der Kreiszahl π beiträgt.
Das Kollision-Modell läuft in einer idealisierten Umgebung und lässt sich als Versuchsaufbau gut realisieren. Das Projekt war darauf ausgelegt diesen Aufbau digital zu verarbeiten.
Die Leibniz-Reihe dagegen ist eine unendliche Reihe, die mit zunehmenden Partialsummen gegen π konvergiert.
Durch die unterschiedlichen Ansätze soll verdeutlicht werden, wie verschieden die Berechnungen sind und wie sehr die daraus resultierenden Ergebnisse seien können. Das Kollisionsmodell geht hier einen relativ komplexen physikalisch-mathematischen Weg, der gut visualisiert werden kann. Wohingegen die Leibniz-Reihe dagegen einen sehr streng mathematischen Weg verfolgt, der durch addieren von Summanden sich der Kreiszahl π annähert.
Beide Ansätze sollen deutlich machen, welche Vorteile und Nachteile solche Berechnungen mit sich bringen. Auf der einen Seite eine einfache Methode, die sich simpel implementieren lässt und zum anderen ein physikalisches Modell, das wiederum komplex und dadurch schwerer zu implementieren ist. Durch die Anbindung zur Realität durch den physikalischen Bezug, wird der Vorgang verdeutlicht und das Resultat validiert. Leibniz ist durchaus simpel gehalten, aber das Ergebnis schwerer nachzuvollziehen, da keine realitätsnahe Erklärung exisiert, nur der mathematische Beweis.

[11] siehe Mullican (2019)

3 Die Kollions-Modell Methode

3.1 Nach Galperins Billiard Methode[12]

Das idealisierte Kollisions-Modell besteht aus zwei Teilchen, die mit unterschiedlicher Masse in einer Dimension auf eine harte Wand prallen. Wichtig hierbei ist, dass Reibung und andere physikalische Umgebungszustände vernachlässigt werden.
Der größere Körper kommt aus Richtung unendlich und der kleinere Körper bewegt sich zwischen der Wand und dem größerem Teilchen.

Wir notieren die beiden Massen als m und n für die jeweiligen Teilchen M und N. Beide Teilchen bewegen sich auf einer Linie von $[0, \infty)$, wobei bei $x = 0$ die Wand steht und N sich vor der Wand in Ruhe befindet.
M bewegt sich mit einer Geschwindigkeit v_1 von rechts nach links und bewegt sich auf N zu.
Angenommen das Verhältnis beider Massen ist:

$$\frac{m}{n} = 1$$

bzw. beide Massen sind gleich.
Dann ist folgendes zu beobachten:

1. Teilchen M bewegt sich in Richtung Teilchen N.
   Teilchen M prallt gegen N und übergibt seine kinetische Energie an N, d.h. $v_N = v_M$ und $v_M = 0$.

2. Teilchen M ist in Ruhe, während Teilchen N sich in Richtung Wand ($x = 0$) bewegt. Teilchen N prallt von der Wand ab und bewegt sich gleichförmig mit $v_N = -v_N$ weiter.

3. Teilchen N prallt gegen M und gibt seine kinetische Energie an M ab.
   N befindet sich in Ruhe. M bewegt sich gleichförmig in Richtung unendlich.

Das sind insgesamt 3 Kollisionen. Die erste Ziffer von π ist auch 3. Das kann für beliebig viele Nachkommastellen von π durchgeführt werden, wobei im Folgenden das Verfahren genauer erläutert wird.

[12] GALPERIN (2003)

3.2 Kollisionen

Der folgende Abschnitt basiert auf dem Video von 3Blue1Brown.[13]

Zu Beginn wird festgelegt, dass Reibung vernachlässigt werden kann.
Außerdem definieren wir für Objekt M die Masse und Geschwindigkeit

$$m_1 \text{ und } v_1$$

und für N

$$m_2 \text{ und } v_2$$

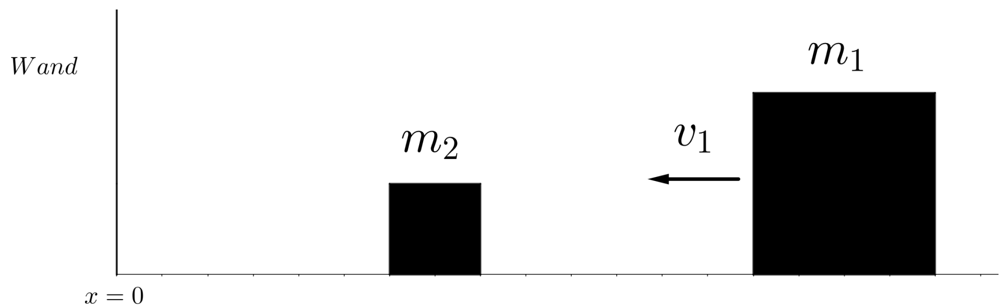

Abbildung 1: *Aufbau*
(Eigene Abbildung)

Es gelten der Impulserhaltungssatz

$$m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = const.$$

und der Energieerhaltungssatz

$$\frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot (v_1)^2 + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot (v_2)^2 = const.$$

Die kinetische Energie bleibt bei diesem idealisierten Modell immer gleich, während der Impulserhaltungssatz zwar auch konstant bleibt, aber sich bei Kollision mit der Wand verändert. Das liegt daran, dass die Wand eine, in diesem Fall, unendlich große Masse hat und den vollständigen Impuls zurückgibt.

[13] 3Blue1Brown (2019)

Beispiel für

$$m_1 = 10 \text{ und } v_1 = -1$$

$$m_2 = 1 \text{ und } v_2 = 0$$

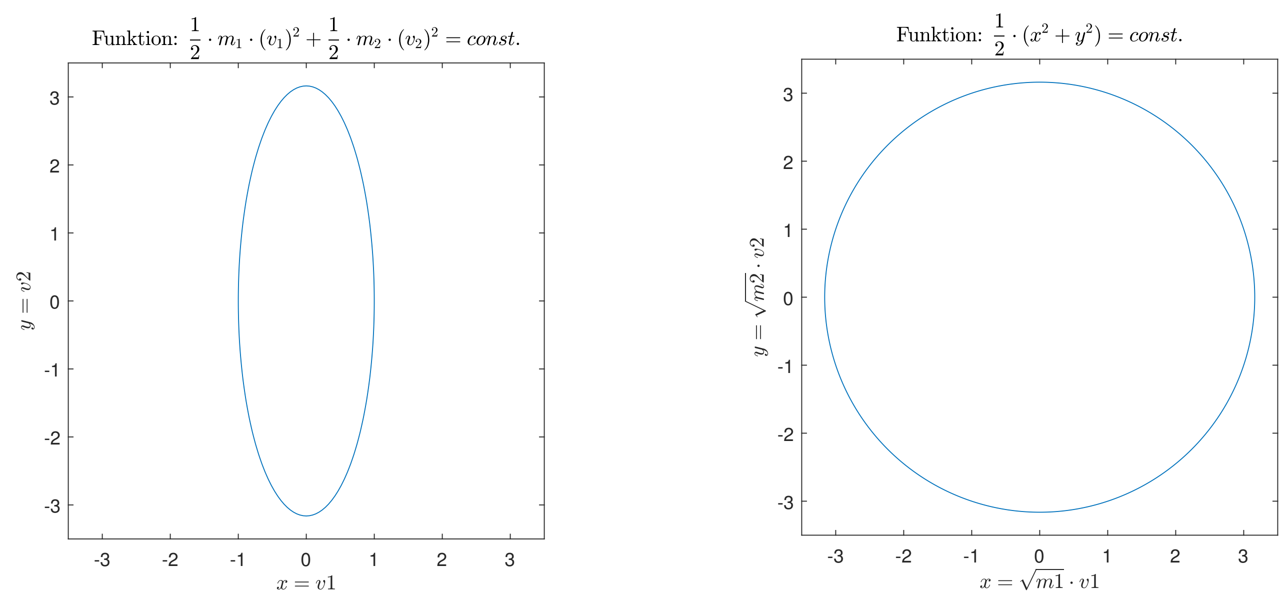

Abbildung 2: *Ellipse zu Kreis mit* $\sqrt{m_1}$ *und* $\sqrt{m_2}$
(Eigene Abbildung)

Wenn man die Gleichung für den Energieerhaltungssatz in einem Koordinatensystem darstellt, mit $x = v_1$ und $y = v_2$, dann bekommt man eine Ellipse, die alle Wertepaare (x, y) enthalten, die derselben Konstante (*const*) entsprechen. Da es um die Berechnung von π geht ist es geschickt die Achsen so zu verändern, dass aus der Ellipse ein Kreis entsteht.
Mit $x = \sqrt{m_1} \cdot v_1$ und $y = \sqrt{m_2} \cdot v_2$ ist das möglich.

Nun werden die einzelnen Wertepaare (x, y) der Kollision im Koordinatensystem dargestellt.
Diese Methode basiert auf der Idee der Phasenraumanalyse.[14] Es geht darum, mathematische Probleme, Situationen oder Systeme und deren Zustände geometrisch darzustellen, um z.B. mithilfe der trigonometrischen Funktionen diese Probleme zu lösen.

[14]https://www.biancahoegel.de/system/phasenraum.html

Für das Beispiel: Massenverhältnis = 10:1 sieht das Phasenraumdiagramm wie folgt aus:

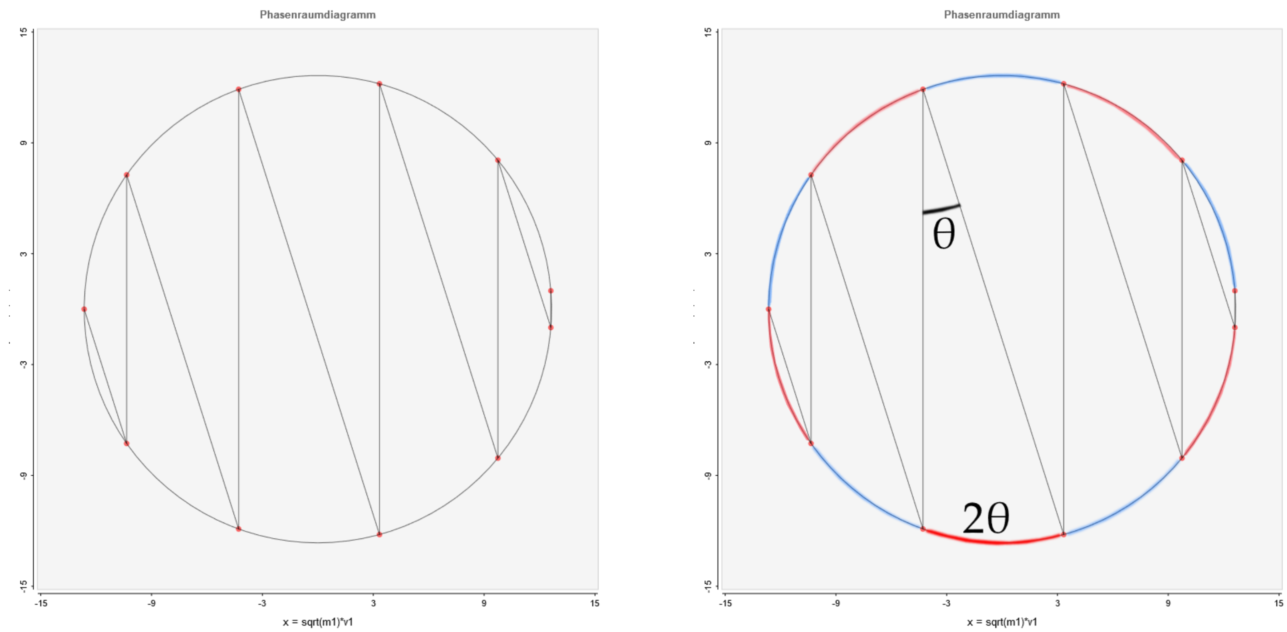

Abbildung 3: *Phasenraumdiagramme*
(Eigene Abbildung)

Es ist zu sehen, dass sich durch den Impulserhaltungssatz und die Kollision mit der Wand das Vorzeichen der Geschwindigkeit und somit nur die y-Koordinate des Wertepaares ändert, während die Kollision mit dem anderen Objekt eine Änderung des gesamten Punktes bzw. des Zustandes verursacht.
Zudem ist die Bogenlänge zwischen den Punkten immer gleich, d.h. die Länge der Bogenlänge beträgt 2θ in Radiant, wie in Abbildung 3 zu sehen ist.[15]
Eine andere wichtige Beobachtung ist, dass die Berechnung aufhört, sobald keine Bogenlänge 2θ mehr reinpasst.
Die Frage lautet also: Wie oft passt die Bogenlänge 2θ in den Kreis?
[16]Mathematisch ausgedrückt:

$$\underbrace{2\theta + 2\theta + 2\theta + \cdots + 2\theta}_{\text{Wie oft?}} < 2\pi = \underbrace{\lambda}_{?} \cdot \theta < \pi$$

Beispiel für $\theta = 0.01$ (rad)[17]

$$314 \cdot (0.01) = 3.14 < \pi$$

Ein Massenverhältnis, welches $\theta = 0.01$ zufolge hat, berechnet somit π auf zwei Nachkommastellen.

[15]Kreiswinkel
[16]$2\pi = 360°$ in Radiant
[17]in Radiant

Nun geht es um die Berechnung von θ für ein Massenverhältnis von beispielsweise 100:1.

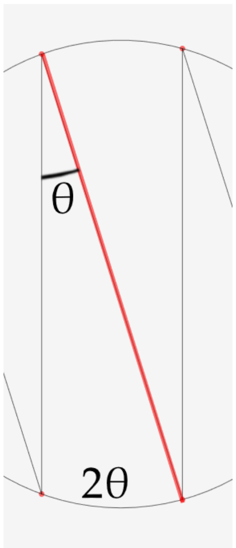

Abbildung 4: *Ausschnitt aus dem Phasenraumdiagramm* (Eigene Abbildung)

Um nun 2θ berechnen zu können müssen wir zuerst die Steigung der Geraden berechnen und anschließend mit dem $\tan(x)$ bzw. $\arctan(x)$ den Winkel θ ausrechnen.

Für

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = const.$$

$$\Rightarrow \sqrt{m_1} \cdot x + \sqrt{m_2} \cdot y = const.$$

und der Term zur Berechnung der Steigung:

$$ax + by = c$$

$$\Leftrightarrow by = c - ax$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{c}{b} - \frac{ax}{b}$$

$$\Leftrightarrow y = -(\frac{a}{b}) \cdot x + \frac{c}{b}$$

für $a = \sqrt{m_1}$ und $b = \sqrt{m_2}$:

$$\Rightarrow y = -(\frac{\sqrt{m_1}}{\sqrt{m_2}}) \cdot x + \dots$$

Somit lautet die Steigung für die Gerade:

$$s = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-\sqrt{m_1}}{\sqrt{m_2}}$$

Der $\tan(\theta)$ ist in unserem Beispiel:

$$\tan(\theta) = \frac{Gegenkathete}{Ankathete} = \frac{\sqrt{m_2}}{-(-\sqrt{m_1})} = \frac{\sqrt{1}}{-(-\sqrt{100})} = \frac{1}{10}$$

Für θ bedeutet das:

$$\theta = \arctan(\frac{1}{10}) \approx 0.0996686 \cdots \approx \frac{1}{10}$$

Die magische Zahl ist hierbei die 100er Potenz. Unsere Vermutung ist, dass 100er Potenzen, bzw. ein Massenverhältnis von 100^x:1, π berechnet.

Massenverhältnis	Formel für θ	Wert von θ
$m_1{:}m_2$	$\arctan(\frac{\sqrt{m_2}}{\sqrt{m_1}})$	
100:1	$\arctan(\frac{1}{10})$	$0.0996686\ldots$
10.000:1	$\arctan(\frac{1}{100})$	$0.0099996\ldots$
1.000.000:1	$\arctan(\frac{1}{1.000})$	$0.0009999\ldots$
100.000.000:1	$\arctan(\frac{1}{10.000})$	$0.0000999\ldots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Tabelle 1: *Massenverhältnistabelle*
(Eigene Abbildung)

Der Wert, der im arctan steht ist ungefähr gleich dem Wert von θ.
Was bedeutet das für unsere Frage: *Wie oft passt die Bogenlänge 2θ in den Kreis?*

$$\lambda \cdot \theta < \pi$$

Für unser Masseverhältnis von 100:1 bedeutet das folgendes:

$$1 \cdot (0.1) = 0.1 < \pi$$

$$1 \cdot \underbrace{(0.0996686)}_{\theta=\arctan(\frac{1}{10})} = 0.0996686 < \pi$$

Es kommt also immer fast derselbe Wert raus wie λ nur mit einem verschobenen Komma. Das bedeutet für unser π:

$$31 \cdot (0.1) = 3.1 < \pi$$

$$31 \cdot \underbrace{(0.0996686)}_{\theta=\arctan(\frac{1}{10})} = 3.0897266 < \pi$$

$$32 \cdot (0.1) = 3.2 > \pi$$

$$32 \cdot \underbrace{(0.0996686)}_{\theta=\arctan(\frac{1}{10})} = 3.1893952 > \pi$$

Deswegen kollidieren die Objekte bei einem Massenverhältnis von 100:1, 31 mal. Am Ende hat die Bogenlänge 2θ den Kreis fast ausgefüllt und ist kleiner als 2π.
Für die entsprechenden 100er Potenzen gilt dasselbe, jedoch hängt von der jeweiligen Potenz ab, auf wie viele Stellen π berechnet wird.

3.3 Genauigkeit und Komplexität des Algorithmus

Es gibt zwei wesentliche Berechnungen, die pro Zeitschritt[18] passieren.

- Prüfe, ob die Objekte miteinander kollidieren.
- Berechne die neue Geschwindigkeit für beide Objekte.

Es handelt sich hierbei um eine physikalische Simulation, daher werden Berechnungen immer iterativ erfolgen müssen, vor allem bei vielen Einflussfaktoren. In unserem Fall spielt z.B. die Reibung zwar keine Rolle, aber bei sehr vielen Kollisionen reicht ein Zeitschritt nicht aus, um für jede Kollision die notwendigen Berechnungen durchzuführen.
Das Problem dabei ist, dass einzelne Teilergebnisse unserer Berechnungen ungenau werden um einen bestimmten Wert ϵ_i für jeden vergangene Zeitschritt. Diese Fehler kumulieren und das Ergebnis weicht sehr stark von dem erwarteten Ergebnis ab. Eine Methode zur Minimierung des Fehlers ist das explizite Euler-Verfahren.[19] (Lakoba, 2012, S.7)
Im Prinzip geht es darum die Zeitschritte zu verkleinern bzw. mehrere Berechnungen pro einem Zeitschritt durchzuführen.

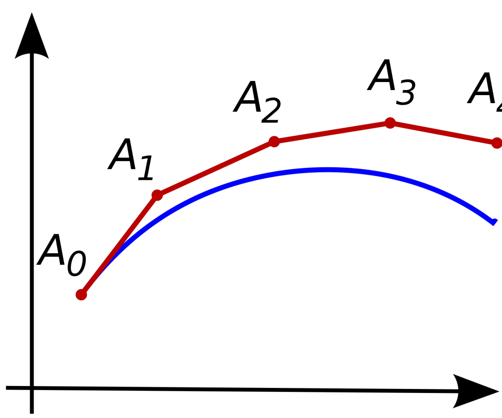

Abbildung 5: *Illustration of the Euler method*
(Abbildung von Oleg Alexandrov)
public domain license

Abbildung 5 demonstriert die Abweichung.
$A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n$ sind z.B. die Berechnungen pro Sekunde, während der blaue Graph die genaue Lösung darstellt. Je länger die Berechnung desto ungenauer wird das berechnete Ergebnis.
Wählt man nun eine andere Zeiteinheit bzw. führt mehrere Berechnungen pro Zeiteinheit durch, dann nähern sich $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n$ an das genaue Ergebnis an.

Die höhere Genauigkeit des Verfahrens erfordert auch offensichtlich eine höhere Komplexität bzw. einen höheren Rechenaufwand. (Richter und Wick, 2017, S.222)

Wenn also die Berechnung für jeden Zeitschritt N mal durchgeführt wird, dann ist die Komplexität des Algorithmus in der Größenordnung von $O(N \cdot x)$, also linear.

[18] angenommen pro Sekunde
[19] In der Physik auch *Methode der kleinen Schritte* genannt

4 Leibniz-Formel

In der Mathematik wird die alternierende Reihe (unendliche Reihe) als eine Reihe bezeichnet, deren Reihenglieder aus reellen Zahlen mit abwechselnden Vorzeichen bestehen. So auch die Leibniz Reihe zur Berechnung von π, benannt nach Gottfried Leibniz, die einen speziellen Fall der inversen Tangenten Funktion darstellt. (Roy, 1990)
Die Annäherung von π durch die Leibniz-Reihe wurde ursprünglich bereits vom indischen Mathematiker Madhava und dem schottischen Mathematiker Gregory vor 1671 verwendet, allerdings wurde sie nach Gottfried Leibniz benannt, nachdem Leibniz sie in seiner wissenschaftlichen Zeitschrift *Acta Eruditorum* publizierte. (Scholz, 1993)
Leibniz war unter anderem für die Infinitesimalrechnung bekannt, die er unabhängig von Isaac Newton entwickelte.
Durch die Leibniz-Reihe lässt sich die Näherung wie folgt berechnen:

$$\pi = 4 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \lim_{n \to \infty} \left(4 \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{2k+1} \right)$$

Diese ist eine einfache Methode, die mithilfe der Potenzreihe des *Arcustangens* abgeleitet wird, aber auch nur langsam konvergiert. So wird die Potenzreihe von $y = arctan(x)$ gebildet und differenziert nach $tan(y) = x$ lässt sich mit der Formel für unendliche geometrische Reihen, das Ergebnis in eine Potenzreihe umwandeln. ($s_\infty = \frac{1}{1-q}$)

Durch die Polynomdivision ergibt sich folgende Potenzreihe für $f'(x)$:

$$y' = 1 + (-x^2) + (-x^2)^2 + (x^2)^3 + (x^2)^4 + (x^2)^5 + \dots$$

$$y' = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - x^{10} + \dots$$

$$y' = \sum_{h=0}^{\infty} (-1)^h x^{2h}$$

nach Integration

$$\int_0^{\infty} (-1)^h x^{2h} \, \mathrm{d}x$$

erhält man:

$$arctan(x) = \sum_{h=0}^{\infty}(-1)^h x^{2h} dx = \sum_{h=0}^{\infty}(-1)^h \frac{x^2h+1}{2n+1}$$

$$arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \frac{x^{11}}{11} + \ldots$$

Das Ergebnis wäre hier der Radiant des $arctan(x)$. Wenn $x = 1$ erhält man durch den $arctan(1) = \frac{\pi}{4}$:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \ldots$$

Eine Idee diesen Algorithmus effizienter zu gestalten wäre die Konvergenzgeschwindigkeit zu erhöhen, durch sehr kleine Werte für x.

4.1 Komplexität des Algorithmus

Mit der Leibniz-Reihe (oder auch Gregory) ist es möglich die Konstante π auf ca. 100 Millionen Stellen zu berechnen. Allerdings berechnet die Leibniz Formel die Kreiszahl erst bei 10000 Iterationen auf etwa 4 Dezimalstellen und bei 100000 Iterationen auf 5 Dezimalstellen. Dieser Algorithmus lässt sich einfach implementieren und ist genauer als die einfache Annäherung, die oft in der Schule genannt wurde ($\frac{22}{7}$ oder $\frac{355}{113}$). Somit ist die Leibniz-Reihe eine durchaus wirksame Berechnung, aber zur heutigen Zeit schon veraltet und könnte durch effektivere Algorithmen ersetzt werden. Beispiele dafür wären arithmetisch-geometrische Mittel, die auch einfach zu implementieren sind (Borwein's Algorithmus).
Die letzten Rekordhalter für die Annäherung an π nutzten den Chudnovsky-Algorithmus, der mit:

$$\frac{1}{\pi} = 12 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (6k)! (545140134k + 13591409)}{(3k)!(k!)^3 640320^{3k+3/2}}$$

als schwer zu implementieren gilt, da diese Annäherung die Implementierung der Bailey-Borwein-Plouffe-Formel vorraussetzt. (Hamilton, 2017)

Es gibt bereits Möglichkeiten den Leibniz Algorithmus effizienter zu gestalten (Konvergenz-Beschleunigung). So lässt sich durch die Eulersche Reihentransformation eine schneller konvergierende Reihe entwickeln:

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 2}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \cdots + \frac{1 \cdot 2 \ldots n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n+1)}\right)$$

Allerdings ist auch nach passender Transformation die Leibniz-Reihe nicht effizient und kann durch die langsame Konvergenz nicht mit anderen Reihen und Annäherungen zu π verglichen werden. Moderne Verfahren sind schneller und effizienter.

Literaturverzeichnis

3Blue1Brown (2019) *Why do colliding blocks compute pi?*, Verfügbar unter <`https://www.youtube.com/watch?v=jsYwFizhncE`> [aufgerufen am 28. November 2020].

Galperin, G. (2003) *PLAYING POOL WITH π (THE NUMBER π FROM A BILLIARD POINT OF VIEW)*

Lakoba, Taras I. (2012) *Simple Euler method and its modifications* (Lecture notes for MATH334), University of Vermont
Verfügbar unter <`http://www.cems.uvm.edu/~tlakoba/math337/notes_1.pdf`> [aufgerufen am 06. Januar 2021].

Richter, T. und Wick, T. (2017) *Einführung in die Numerische Mathematik*
Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg

Walz, Guido (2017) *Lexikon der Mathematik: Band 4*
Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg

Mullican, Timothy (2019) *Calculating Pi: My attempt at breaking the Pi World Record*
Verfügbar unter <`https://blog.timothymullican.com/calculating-pi-my-attempt-breaking-pi-record`> [aufgerufen am 06. Januar 2021].

Scholz, Werner (1993) *Die Geschichte der Approximation der Zahl π*
Verfügbar unter `http://www.cwscholz.net/projects/fba/` [aufgerufen am 08.01.2021]

Lampret, Vito (2007) *Even from Gregory-Leibniz series π could be computed: an example of how convergence of series can be accelerated*
Verfügbar unter <`https://www.researchgate.net/publication/317035714_Even_from_Gregory-Leibniz_series_p_could_be_computed_an_example_of_how_convergence_of_series_can_be_accelerated`> [aufgerufen am 08.01.2021]

Roy, Ranjan (1990) *The Discovery of the Series Formula for π by Leibniz, Gregory and Nilakantha* veröffentlicht in *Mathematics Magazine Vol. 63 - Mathematical Association of America*

Craig-Wood, Nick (2011) *Pi - Gregory's Series*
Verfügbar unter <`https://www.craig-wood.com/nick/articles/pi-gregorys-series/`> [aufgerufen am 06. Januar 2021].

Sharma, Ishan (2014) *How do I determine whether my calculation of pi is accurate?* Verfügbar unter <`https://stackoverflow.com/questions/14283270/how-do-i-determine-whether-my-calculation-of-pi-is-accurate`> [aufgerufen am 09. Januar 2021].

Hamilton, Richsard (2017) *Why is the Leibniz method for approximating pi so inefficient* Verfügbar unter <`https://math.stackexchange.com/questions/1702694/why-is-the-leibniz-method-for-approximating-pi-so-inefficient`> [aufgerufen am 09. Januar 2021].

A Anhang

A.1 GitHub-URL

Anbei finden Sie den GitHub Link zu unserem Projekt.
Dort ist das ganze Projekt zur Berechnung von PI hochgeladen worden.
https://github.com/FNG-2002/collisionPiWebsite

A.2 Implementation des Algorithmus

Anbei finden Sie den Link zu unserem implementierten Algorithmus
https://furk.ddns.net/pi/