

Controlo de Voo
MEAer, 3^o ano, 2^o sem.

José Raul Azinheira
DEM, IST

Fevereiro de 2020

Conteúdo

1	Introdução	7
1.1	Definições e objectivos	7
1.2	O sistema de controlo	9
1.3	Controlo automatizado	9
1.4	Elementos de controlo	10
1.5	Projecto de controlador de voo	11
2	Equações e análise do movimento	13
2.1	Equações do movimento	13
2.1.1	Referenciais	13
2.1.2	Equações da dinâmica	15
2.1.3	Equações da cinemática	16
2.1.4	Modelo da mecânica de voo	17
2.1.5	Linearização	19
2.2	Modelos dinâmicos	23
2.2.1	Formulação em espaço de estados	24
2.2.2	Funções de transferência	25
2.2.3	Exemplos	26
2.2.4	Movimento longitudinal	27
2.2.5	Movimento lateral	28
2.2.6	Conclusão da linearização	28
2.2.7	Coeficientes e derivadas de estabilidade	30
2.2.8	Exercício	31
2.3	Análise do movimento	34
2.3.1	Exemplo longitudinal no Matlab	34
2.3.2	Aproximações longitudinais	35
2.3.3	Exemplo lateral no Matlab	36
2.3.4	Aproximações laterais	37
2.4	Qualidades de voo	38
2.4.1	Critérios longitudinais	40
2.4.2	Critérios laterais	40

3	Controlo automático	43
3.1	Introdução	43
3.2	Controlo clássico	44
3.2.1	Funções de transferência	44
3.2.2	Exemplos	45
3.2.3	Análise em frequência	47
3.2.4	LGR	48
3.2.5	Controladores PID	49
3.3	Realimentação de estado	51
3.3.1	Colocação de pólos	51
3.3.2	Seguimento de modelo	52
3.3.3	Controlo modal	53
3.3.4	Comparação das realimentações	55
3.4	Controlo Moderno	55
3.4.1	LQR	57
3.4.2	Variantes do LQR	59
3.4.3	LQRY	62
3.4.4	Seguimento de modelo com LQR	62
3.4.5	Estimação de estados	63
3.5	Controlo Digital	66
4	Pilotos automáticos	69
4.1	Introdução	69
4.2	Sistemas de aumento de estabilidade	69
4.2.1	Longitudinal	69
4.2.2	Lateral	75
4.3	Controlo de atitude	83
4.3.1	controlo do ângulo de picada	84
4.3.2	Controlo do ângulo de rolamento	87
4.3.3	Controlo do ângulo de derrapagem	89
4.4	Controlo de trajectória	90
4.4.1	Introdução	90
4.4.2	Altitude	91
4.4.3	Controlo da velocidade	93
4.4.4	Controlo de guinada e rumo	94
4.4.5	Seguimento de trajectória horizontal com GPS	96
4.4.6	Aterragem automática	98

5	Elementos complementares	103
5.1	Introdução	103
5.2	Sensores e Actuadores	103
5.2.1	Introdução	103
5.2.2	altitude barométrica	104
5.2.3	Velocidade	104
5.2.4	Razões angulares	104
5.2.5	Atitude	105
5.2.6	Aceleração	105
5.2.7	Ângulos aerodinâmicos	105
5.2.8	Rádio-altímetro	105
5.2.9	Receptor de GPS	106
5.2.10	Actuadores	106
5.3	Perturbações atmosféricas	106
5.3.1	Influência na dinâmica e equações de estado	107
5.3.2	Perturbações discretas e <i>wind shear</i>	109
5.3.3	Turbulência contínua	109
5.4	Aeroelasticidade	112
5.4.1	Flexão da asa	112
5.4.2	Torção da asa	113
5.4.3	Equações da dinâmica	114
5.5	Controlo avançado	114
A	Anexos	117
A.1	Transformada de Laplace	117
A.2	Relações entre ângulos e referenciais	118
A.3	Regulador quadrático linear (LQR)	119

Capítulo 1

Introdução

A unidade curricular de Controlo de Voo inscreve-se na sequência das unidades **Estabilidade de Voo** e **Introdução ao Controlo** do Mestrado Integrado em Engenharia Aeroespacial.

Após o resumo de algumas noções e apresentação da nomenclatura utilizada, são introduzidos os modelos da dinâmica de voo. São seguidamente apresentadas as técnicas e as soluções mais usuais no controlo automático do voo de uma aeronave.

A bibliografia de apoio e complementar proposta dedica-se especificamente ao controlo aeronáutico, o objecto primeiro da disciplina não sendo a teoria do controlo em si mas sim a sua aplicação.

1.1 Definições e objectivos

O voo é "o deslocamento de um corpo no ar"
(*Dicionário da Língua Portuguesa da Porto Editora*)

O corpo pode ser o corpo de um animal (insecto, ave ou morcego) ou ser uma aeronave (balão, avião ou helicóptero, foguete).

O voo supõe a existência de três tipos de forças:

- forças aerodinâmicas, entre as quais a sustentação que se opõe à gravidade
- a força propulsiva fornece a velocidade e permite o movimento
- a força de controlo permite alterar e manter as condições de voo pretendidas

A existência de condições de equilíbrio estacionário, onde a manutenção do voo é fácil e natural, corresponde à noção de estabilidade estática, noção importante no caso da aviação tripulada tradicional, que permite reduzir o esforço necessário para o controlo, mas que os sistemas modernos de controlo de alguma forma compensam ou simulam.

Os três tipos de aeronaves citados diferenciam-se primeiramente pela forma como conseguem a sustentação:

- **mais leve que o ar** (balão ou dirigível, *lighter than air* -LTA) utiliza a sustentação aerostática: é mais económico, mas as condições de operação limitam o seu uso;

- **helicóptero** (ou multi-cóptero, multi-rotor): a sustentação aerodinâmica é conseguida com asa rotativa; esta aeronave tem capacidade de voo pairado, apresenta uma boa contrabilidade mas é menos económica;
- **avião** (aeronave de asa fixa): a sustentação aerodinâmica de um avião é produzida pela velocidade ar sobre a asa fixa.

O balão, o avião e o helicóptero diferenciam-se igualmente pelo peso relativo da aeronave (o primeiro é mais leve que o ar, enquanto os outros são mais pesados que o ar) e pela sua contro-labilidade (as forças aerodinâmicas que actuam sobre o balão reduzem muito a sua capacidade de manobra).

Aqui será apenas considerado o caso do avião. A problemática do helicóptero pode ser abordada de forma semelhante, embora exiba um grau de complexidade ligeiramente superior e características específicas.

Objectivos do controlo de voo

Perguntar os objectivos do controlo de voo é a mesma coisa que perguntar os objectivos do voo: o controlo tentará então garantir o cumprimento destes objectivos.

Entre os objectivos possíveis poderemos citar:

- dar início e manter o voo, para missões de transporte, observação, turismo, treino, ou sem outro objectivo a não ser o próprio voo;
- deslocar o avião de um ponto inicial a um ponto final, para transporte de mercadorias ou passageiros por exemplo;
- deslocar o avião mas seguindo uma trajectória ou rota pré-definida, eventualmente com imperativos de tempo;
- acompanhar outro deslocamento, por exemplo o movimento de um veículo terrestre a vigiar.

Note-se que:

- A descolagem e a aterragem são as fases mais críticas do voo: devido à presença do solo, são descritas por equações mais completas e têm requisitos de precisão mais exigentes;
- As condições atmosféricas também influenciam o comportamento do avião: vento constante e turbulência atmosférica são perturbações ou entradas não controladas;
- um dos objectivos dos sistemas de controlo de voo é de garantir a qualidade ou a segurança do voo com condições não ideais.

Podemos resumir com os seguintes objectivos:

1. reduzir a influência de perturbações e manter o avião estável;
2. mudar a orientação, a altitude, a velocidade do avião;
3. seguir uma rota pré-definida.

É esta a sequência seguida na apresentação dos pilotos automáticos, aplicada ao caso particular do avião convencional.

1.2 O sistema de controlo

Do ponto de vista do seu controlo, o avião pode ser considerado como um sistema (figura 1.1) cuja entrada é a acção de controlo e cuja saída é o voo, o movimento, a trajectória...

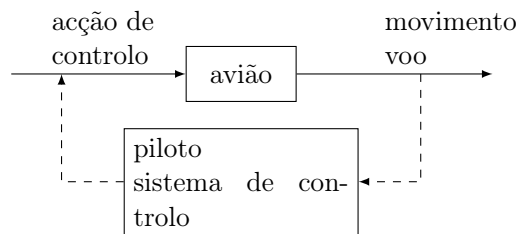


Figura 1.1: o avião como sistema

O controlo do avião supõe a existência de :

- actuadores, órgãos de controlo para aplicar as forças, os momentos necessários para produzir ou mudar as velocidades, por forma a gerar e corrigir o movimento do avião;
- sensores fornecendo informação sobre o voo, o movimento, o estado do avião;
- um piloto ou um sistema de controlo que "feche o anel": com base na informação fornecida pelos sensores, actua e controla o avião por forma a cumprir os objectivos específicos do voo.

1.3 Controlo automatizado

A tendência actual é de uma crescente automatização procurando ou impondo:

- uma redução dos erros de pilotagem;
- uma definição mais fina da trajectória;
- um melhor controlo, mais rápido, preservando a aeronave, e com capacidades de diagnóstico;
- uma facilidade de gestão da aeronave;
- a necessidade de redundâncias do sistema.

A disciplina de **Controlo de Voo** corresponde a uma introdução aos níveis mais baixos de automatização, permitindo nomeadamente o **controlo da trajectória**.

A um nível superior, no sistema de **gestão da aeronave**, torna-se preponderante a componente informática de gestão da informação necessária à gestão do voo e dos diversos sistemas da aeronave.

1.4 Elementos de controlo

Relativamente à parte da actuação, os elementos terminais de controlo de um avião podem ser agrupados da seguinte forma:

- superfícies de controlo convencionais;
- motores (a hélice ou a jacto);
- superfícies suplementares de controlo ou correcção da condição de voo: *canards*, *flaps*, superfícies hiper-sustentadoras, aero-freios...

Para a descrição e formulação matemática do controlo do avião, e de acordo com a acção "usual" do piloto, serão somente considerados os dois primeiros grupos, e em particular as superfícies de controlo convencionais.

Superfícies de controlo convencionais

As superfícies de controlo são os elementos terminais de controlo mais utilizados pelo piloto durante o voo. Na configuração convencional são ao número de três e produzem momentos nos 3 eixos do referencial do corpo (figura 1.2):

- o **leme de profundidade** (elevadores, *Elevators*), na empenagem horizontal, produz uma força de sustentação vertical adicional na cauda e logo um **momento de picada**;
- o **leme de direcção** (*Rudder*), na empenagem vertical, produz uma força lateral adicional na cauda e logo um **momento de guinada**;
- os **ailerons** (*Ailerons*), nos extremos das asas, deflectidos em sentidos opostos, produzem um **momento de rolamento**, em torno do eixo longitudinal do avião.

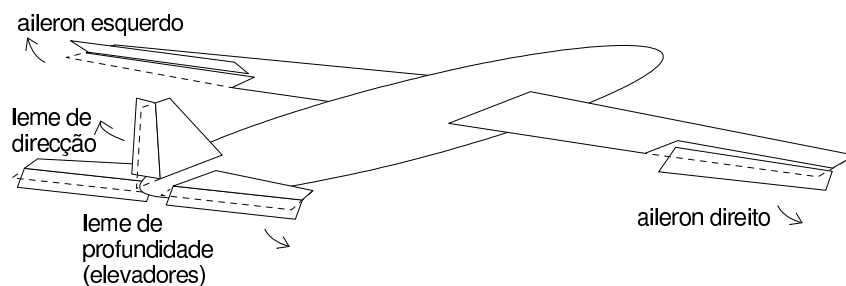


Figura 1.2: Superfícies de controlo convencionais e indicação do sentido das deflexões positivas

Estas superfícies operam idealmente de forma separada:

- no plano vertical do avião, o leme de profundidade é normalmente utilizado para corrigir a velocidade e/ou a altitude; alterações significativas de altitude, subidas e descidas, reclamam igualmente a alteração da força propulsiva (*Thrust*) através do comando do motor (*throttle*).

- no plano horizontal (direccional ou lateral), ailerons e leme de direcção permitem corrigir a orientação do avião em relação à terra e em relação ao vento (derrapagem), para controlar o seu rumo.

A deflexão das superfícies são quantificadas por três ângulos, associados à letra grega δ , com o índice inglês respectivo: δ_A para os ailerons, δ_E para o leme de profundidade e δ_R para o leme de direcção. Por convenção e tal como está indicado na figura, o sentido das deflexões positivas é aquele que produz um momento negativo.

Força propulsiva

A força propulsiva (*Thrust*) é mais diversificada, pelo número e pelo tipo de motores utilizados (um ou mais motores, a hélice ou a jacto, etc). A situação ideal corresponde a manter e regular uma força longitudinal por forma a fornecer a velocidade necessária à sustentação e ao deslocamento desejado.

De forma análoga ao caso das superfícies, a variação da força propulsiva total será associada a uma única variável de controlo δ_T , usualmente convertida em ângulo ou em fracção da força máxima (adimensional).

1.5 Projecto de controlador de voo

As etapas para o projecto de um controlador para o modelo de uma aeronave, numa dada condição de voo, são:

1. conhecido o modelo de uma aeronave e
2. definidos os objectivos/requisitos para o controlo, então
3. analisar as características do movimento,
4. deduzir as necessidades de controlo,
5. escolher a(s) estratégia(s) de controlo e
6. verificar o bom comportamento do anel fechado.

Os diversos capítulos que se seguem expõem a problemática e fornecem os elementos e ferramentas que permitem a síntese dos controladores de voo, de acordo com as etapas acima mencionadas. A sequência da apresentação inspira-se do McLean[3], mas foi devidamente adaptada de acordo com os objectivos específicos.

No projecto de aplicação, os alunos poderão implementar as noções adquiridas num exemplo concreto, já mais próximo de casos reais.

Capítulo 2

Equações e análise do movimento

2.1 Equações do movimento

Este capítulo faz essencialmente o resumo das noções vistas em Estabilidade de Voo, antes de introduzir algumas noções permitindo a análise do movimento —e posteriormente o seu controlo.

2.1.1 Referenciais

Antes de formular as equações do movimento é necessário escolher os referenciais utilizados e apresentar a nomenclatura associada.

Dois referenciais são essencialmente necessários em mecânica de voo (figura 2.1):

- o referencial fixo, ligado à superfície da terra (*Earth axes*), com os dois primeiros eixos tangentes ao meridiano e ao paralelo: na notação utiliza-se o índice E (x_E, y_E, z_E) ou, de forma mais explícita, é denominado referencial NED (*North-East-Down*) (N, E, D) : o referencial fixo é considerado inercial, despreza-se em particular a rotação da terra
- o referencial móvel (do corpo, local ou relativo), ligado ao corpo rígido do avião (*Body axis*, índice B), com origem no centro de gravidade (c.g.), por vezes denominado ABC (*Aircraft Body Centered*) : (x_B, y_B, z_B)

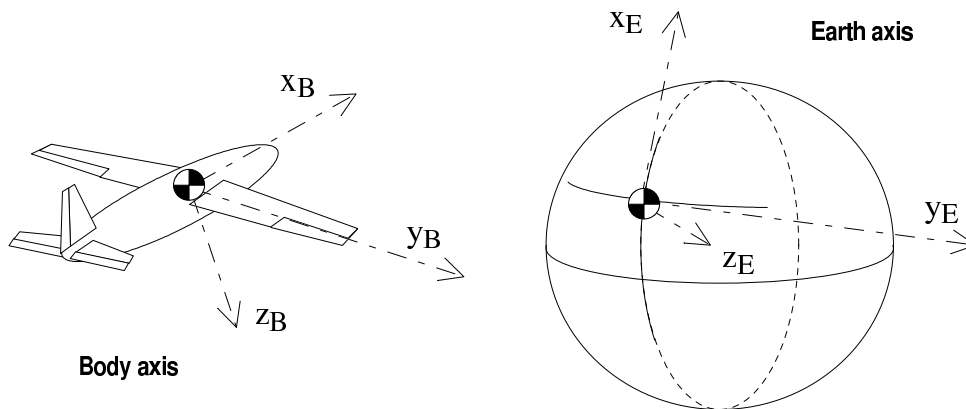


Figura 2.1: referenciais do corpo e da terra (relativo e fixo)

A passagem de um referencial para o outro envolve uma rotação: define-se a transformação \mathbf{S} que permite transformar um vector do referencial fixo para o referencial local: $v_B = \mathbf{S}v_E$ ou no sentido contrário: $v_E = \mathbf{S}^T v_B$.

Esta transformação pode ser expressa em função dos ângulos de Euler $\Phi = (\phi, \theta, \psi)$:

- ângulo de rolamento (*roll*): $\phi \in [-\pi; \pi] \text{ (rad)}$
- ângulo de picada (arfagem, *pitch*): $\theta \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \text{ (rad)}$
- ângulo de guinada (*yaw*): $\psi \in [0; 2\pi] \text{ (rad)}$

ou através dos quaterniões[2].

Esta última modelação tem a vantagem de não apresentar descontinuidades e de ter derivadas mais simples, mas o seu significado físico é menos intuitivo que com os ângulos de Euler: para pequenos ângulos, os 3 ângulos de Euler são simplesmente as 3 rotações em torno dos 3 eixos.

As diversas grandezas necessárias à modelação do movimento são expressas nestes referenciais. O referencial de trabalho, aquele onde são efectuadas as medidas e onde são aplicadas as forças de controlo, é o referencial do corpo (o referencial local).

A nomenclatura tradicional (de origem americana) atribui letras, na maioria sequenciais, para as três componentes dos vectores (aqui identificados como vectores coluna ou matrizes coluna de dimensão 3×1):

- velocidade ar (*air velocity*): $\mathbf{V}_a = [U, V, W]_B^T$
- velocidade angular: $\omega = [P, Q, R]_B^T$
- força externa: $\mathbf{F} = [X, Y, Z]_B^T$
- momento externo: $\mathbf{M} = [L, M, N]_B^T$
- posição: $\mathbf{P} = [N, E, D]_E^T$

A estes vectores convém acrescentar os parâmetros inerciais:

- massa (considerada constante): m
- matriz de inércia (considerada constante): $\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix}$

A orientação entre o vector velocidade ar e o referencial do corpo é igualmente expressa através da definição dos ângulos aerodinâmicos:

- ângulo de ataque (*angle of attack -AOA*): α
- ângulo de derrapagem (*sideslip angle* ou *angle of sideslip -AOS*): β

que permitem uma decomposição equivalente no referencial local¹:

$$\mathbf{V}_a = V_t \begin{bmatrix} c_\alpha c_\beta & s_\beta & s_\alpha c_\beta \end{bmatrix}$$

onde V_t é a norma do vector de velocidade ar (*true airspeed*, TAS).

A transformação do referencial fixo para o referencial do corpo é uma rotação que pode ser decomposta numa sequência de rotações para cada um dos ângulos de Euler, ou pode expressar-se passando pelo referencial aerodinâmico (ver figura 2.2), no qual caso se introduzem os ângulos de pranchamento μ , subida γ e rumo verdadeiro χ para passar do referencial fixo para o aerodinâmico.

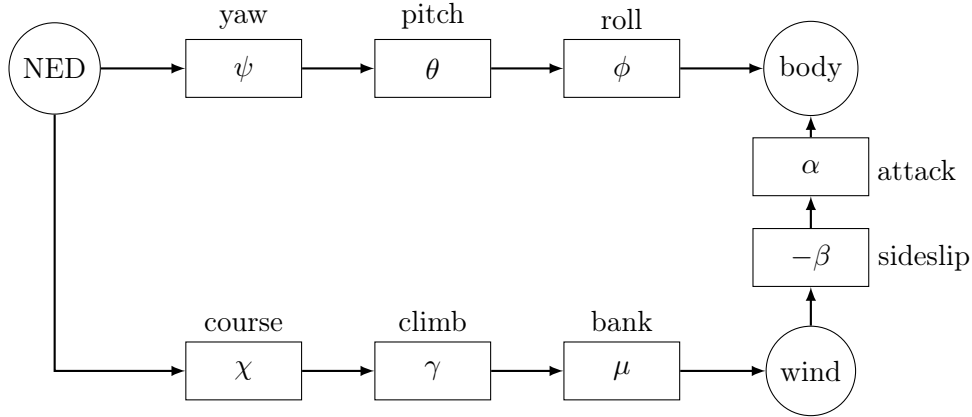


Figura 2.2: Ângulos e transformações entre o referencial fixo e o local

Dispensaremos dois referenciais por vezes também utilizados em mecânica de voo:

- o referencial de estabilidade (obtido a partir do referencial do corpo por uma rotação em torno do eixo lateral para anular o ângulo de ataque);
- o referencial do vento ou aerodinâmico (obtido a partir do referencial do corpo por rotação para anular os ângulos de ataque e derrapagem).

Convém no entanto mencionar o referencial geográfico (latitude, longitude, altitude –LLA), necessário quando se consideram tempos de voo e distâncias maiores.

2.1.2 Equações da dinâmica

A formulação de Newton-Euler da mecânica clássica permite obter as equações da dinâmica da aeronave, expressas no referencial fixo, considerado inercial.

Para o momento linear, expressa-se por:

$$\frac{d}{dt} [m\mathbf{V}]_E = \mathbf{F}$$

¹utiliza-se aqui a notação compacta de seno e cosseno: $s_\alpha = \sin(\alpha)$ e $c_\alpha = \cos(\alpha)$

e para o momento angular:

$$\frac{d}{dt} [\mathbf{I}\boldsymbol{\omega}]_E = \mathbf{M}$$

No referencial local, introduzindo o produto externo, notado \times , com a velocidade angular, fica:

- para o momento linear:

$$\frac{d}{dt} [m\mathbf{V}]_B + \boldsymbol{\omega} \times [m\mathbf{V}]_B = \mathbf{F}$$

- e para o momento angular:

$$\frac{d}{dt} [\mathbf{I}\boldsymbol{\omega}]_B + \boldsymbol{\omega} \times [\mathbf{I}\boldsymbol{\omega}]_B = \mathbf{M}$$

2.1.3 Equações da cinemática

A posição do c.g. no referencial fixo é obtida como a integração da *velocidade inercial*, soma da velocidade ar e da velocidade do vento (assumindo que a velocidade do vento \mathbf{V}_w é expressa no referencial fixo):

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{S}^T \mathbf{V}_a + \mathbf{V}_w$$

onde \mathbf{S} é a matriz de rotação do referencial fixo para o local:

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_\phi \mathbf{S}_\theta \mathbf{S}_\psi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_\phi & s_\phi \\ 0 & -s_\phi & c_\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_\theta & 0 & -s_\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ s_\theta & 0 & c_\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_\psi & s_\psi & 0 \\ -s_\psi & c_\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

No caso determinístico sem vento, fica mais simplesmente:

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{S}^T \mathbf{V}_a$$

A posição angular é obtida a partir da velocidade angular:

- de forma matricial:

$$\frac{d\mathbf{S}}{dt} = -\boldsymbol{\Omega}\mathbf{S}$$

onde $\boldsymbol{\Omega} = \begin{bmatrix} 0 & -R & Q \\ R & 0 & -P \\ -Q & P & 0 \end{bmatrix}$ é a forma matricial do produto externo à esquerda $\boldsymbol{\omega} \times$

- ou com os ângulos de Euler

$$\frac{d}{dt} \Phi = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \phi \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -s_\theta \\ 0 & c_\phi & c_\theta s_\phi \\ 0 & -s_\phi & c_\theta c_\phi \end{bmatrix}^{-1} \boldsymbol{\omega}$$

2.1.4 Modelo da mecânica de voo

O conjunto das equações da dinâmica e da cinemática resulta em:

- 4 equações matriciais, com 4 incógnitas: $(\mathbf{V}, \omega, \mathbf{P}, \Phi)$ ou
- 12 equações reais, com 12 incógnitas:

$$(U, V, W, P, Q, R, N, E, D, \phi, \theta, \psi)$$

cuja evolução no tempo depende das entradas que geram as forças externas aplicadas sobre a aeronave.

O problema da mecânica (ou dinâmica) de voo consiste no seguimento destas variáveis sob o efeito das forças e momentos aplicados (as entradas).

O controlo de voo vai em seguida determinar como alterar o valor das entradas por forma a obter a evolução desejada das variáveis.

Modelo SIMULINK do NAVION

A simulação não linear de uma aeronave consiste na integração dos vários sub-sistemas que descrevem uma aeronave. A título de exemplo, considere-se na figura 2.3 o modelo Simulink do Navion (pequeno avião de turismo) adaptado a partir do pacote Aerosim[5], com blocos que representam cada subconjunto das equações:

- bloco da cinemática (amarelo)
- blocos da dinâmica (verde)
- bloco das forças aerodinâmicas (ciano)
- bloco da força propulsiva (cinza)
- bloco das forças do trem (laranja)
- blocos de inércia, modelo da atmosfera e da terra (azul)

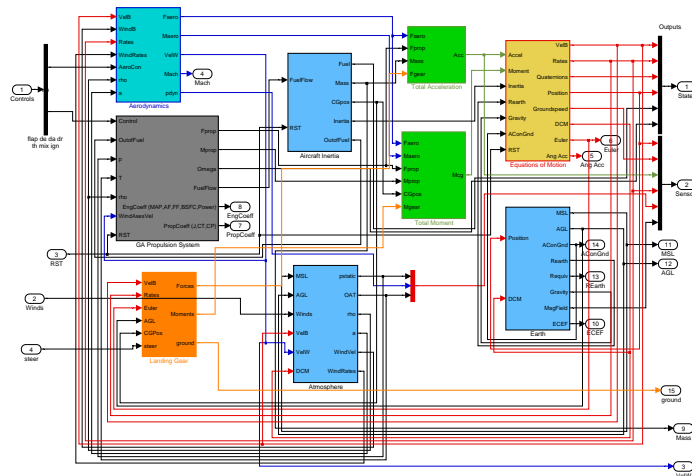


Figura 2.3: Modelo de uma aeronave em Simulink (adaptado do pacote Aerosim)

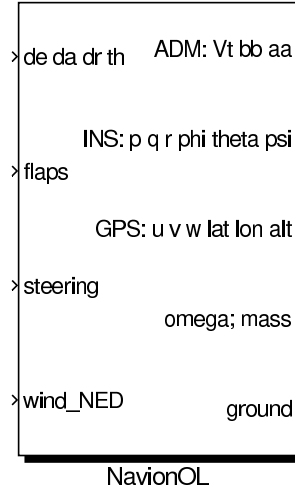


Figura 2.4: Entradas e saídas do modelo de aeronave em Simulink

Neste sistema (figura 2.4), o avião tem como entradas:

1. as 4 entradas usuais de controlo em voo: $\delta_E, \delta_A, \delta_R, \delta_T$;
2. uma entrada de configuração: a deflexão dos *flaps*;
3. uma entrada para controlo no solo: o ângulo da roda de nariz;
4. a velocidade do vento no referencial fixo, entrada não controlada ou perturbação.

e como saídas:

1. a velocidade ar e os ângulos aerodinâmicos: V_t, α, β ;
2. as medidas da plataforma de inércia: razões angulares e ângulos de Euler;
3. as medidas do GPS: velocidade inercial e posição geográfica;
4. a velocidade de rotação do motor e a massa do avião;
5. a compressão das molas dos 3 elementos do trem.

Forças

As forças externas aplicadas sobre uma aeronave são de três origens:

1. o peso, a força da gravidade \mathbf{F}_g é uma constante no referencial fixo e será expressa no referencial local através da transformação de Euler:

$$\mathbf{F}_{g,B} = \mathbf{S} \mathbf{m} \mathbf{g} = \mathbf{S} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \end{bmatrix} = mg \begin{bmatrix} -s_\theta \\ c_\theta s_\phi \\ c_\theta c_\phi \end{bmatrix}$$

2. as forças aerodinâmicas dependem, entre outras influências, do movimento relativo do avião no ar (a velocidade ar), das razões angulares, da posição das superfícies de controlo, etc:

$$\mathbf{F}_{a,B} = f(V_t, \alpha, \beta, P, Q, R, \delta_E, \delta_A, \delta_R, \dots)$$

3. as forças propulsivas dependem da velocidade ar, da altitude, da velocidade de rotação do motor ou hélice ou turbina (RPM ou N_1) e da posição do controlo do motor δ_T :

$$\mathbf{F}_{p,B} = f(V_t, \alpha, \beta, h, \delta_T, RPM, \dots)$$

Os momentos aplicados são de origem aerodinâmica ou propulsiva: eles dependem igualmente da velocidade relativa do avião no ar e dos comandos, etc.

A inclusão da gravidade nas equações de Newton-Euler, separando-a das forças aerodinâmicas e propulsiva, conduz a:

- para o momento linear:

$$m \left(\frac{d}{dt} \mathbf{V} + \boldsymbol{\Omega} \mathbf{V} - \mathbf{S} \mathbf{g} \right) = \mathbf{F}_a + \mathbf{F}_p$$

- e para o momento angular:

$$\mathbf{I} \frac{d}{dt} \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\Omega} \mathbf{I} \boldsymbol{\omega} = \mathbf{M}_a + \mathbf{M}_p$$

As forças aerodinâmicas e propulsiva são complexas e só se pode prosseguir recorrendo à **linearização** do sistema.

Sistema da dinâmica

As equações da dinâmica do movimento são primeiro escritas na forma de sistemas, considerando as componentes das diversas variáveis:

$$\begin{cases} X_a + X_p = m A_x = m (\dot{U} + QW - VR + g s_\theta) \\ Y_a + Y_p = m A_y = m (\dot{V} + UR - PW - g c_\theta s_\phi) \\ Z_a + Z_p = m A_z = m (\dot{W} + VP - UQ - g c_\theta c_\phi) \end{cases}$$

e, assumindo simplificações usuais devidas à simetria da aeronave $I_{yz} = I_{xy} = 0$, fica :

$$\begin{cases} L_a + L_p = I_{xx} \dot{P} - I_{xz} (\dot{R} + PQ) + QR (I_{zz} - I_{yy}) \\ M_a + M_p = I_{yy} \dot{Q} + I_{xz} (P^2 - R^2) + PR (I_{xx} - I_{zz}) \\ N_a + N_p = I_{zz} \dot{R} + I_{xz} (QR - \dot{P}) + PQ (I_{yy} - I_{xx}) \end{cases}$$

2.1.5 Linearização

A resolução das nove equações do movimento passa usualmente, e para efeitos de controlo, pela sua linearização, obtida através da teoria das pequenas perturbações. Cada variável (X) é assim expressa como a soma de um termo de equilíbrio (X_0) e de um termo de perturbação (x), pequeno relativamente ao primeiro :

$$X = X_0 + x$$

Tipicamente temos: $|u| \ll V_t$, $|v| \ll V_t$, $|w| \ll V_t$ ou $|\alpha| \ll 1$ ou $|\phi| \ll 1$, etc.

Uma função $f(X, Y, \dots)$ não linear pode ser aproximada em torno de ponto de referência escolhido (X_0, Y_0, \dots) pela função linear tangente, através da expansão de Taylor à primeira ordem:

$$f(X, Y, \dots) = f(X_0, Y_0, \dots) + \left. \frac{\partial f}{\partial X} \right|_0 (X - X_0) + \left. \frac{\partial f}{\partial Y} \right|_0 (Y - Y_0) + \dots$$

O processo supõe assim que:

1. O ponto de referência é usualmente um ponto de equilíbrio (X_0, Y_0, \dots) , correspondendo aqui a um voo estacionário (*trim flight*) a velocidade ar constante;
2. As equações linearizadas são então obtidas para pequenas perturbações $(x = X - X_0, y = Y - Y_0, \dots)$, em torno desse ponto, e permitem simplificar e melhor representar as forças e momentos de origem aerodinâmicos e de propulsão.

Voos estacionários

Outros tipos de voo estacionário podem ser definidos mas aqui só são considerados os dois mais importantes ao nível da prática de pilotagem: o voo rectilíneo e o voo circular uniforme.

Voos rectilíneo

Anulam-se as velocidades angulares (voo rectilíneo) e as derivadas (voo estacionário):

$$\begin{cases} X_0 = mg \sin(\theta_0) \\ Y_0 = -mg \cos(\theta_0) \sin(\phi_0) \\ Z_0 = -mg \cos(\theta_0) \cos(\phi_0) \\ L_0 = M_0 = N_0 \\ P_0 = Q_0 = R_0 \end{cases}$$

O voo mais simples, sem vento, tem um rolamento nulo, com $\phi_0 = 0$, e fornece um sistema simplificado, sem força lateral, logo **sem derrapagem**:

$$\begin{cases} X_0 = mg \sin(\theta_0) \\ Y_0 = 0 \\ Z_0 = -mg \cos(\theta_0) \\ L_0 = M_0 = N_0 \\ P_0 = Q_0 = R_0 \end{cases}$$

Volta coordenada

No voo circular uniforme, as derivadas são nulas, excepto a razão de guinada que é constante:

$$\dot{\psi} = cst$$

A cinemática é então:

$$\begin{cases} P = -\dot{\psi} \sin(\theta_0) \\ Q = \dot{\psi} \cos(\theta_0) \sin(\phi_0) \\ R = \dot{\psi} \cos(\theta_0) \cos(\phi_0) \end{cases}$$

A volta coordenada corresponde ao caso de um voo circular uniforme sem derrapagem ou com força lateral nula:

$$\begin{cases} X_0 = mg \sin(\theta_0) \\ Y_0 = m \left(U_0 \dot{\psi} \cos(\phi_0) - g \sin(\phi_0) \right) = 0 \\ Z_0 = m \left(-U_0 \dot{\psi} \sin(\phi_0) - g \cos(\phi_0) \right) \end{cases} \implies \dot{\psi} = \frac{g}{U_0} \tan(\phi_0)$$

Linearização das variáveis da dinâmica e atitude

Se o processo da linearização for aplicado ao lado direito das 9 equações às perturbações, correspondendo respectivamente à lei do momento linear, à lei do momento angular e à cinemática dos ângulos de Euler, resultam três sistemas:

$$\begin{cases} x = m (\dot{u} + Q_0 w + q W_0 - V_0 r - v R_0 + g c_{\theta_0} \theta) \\ y = m (\dot{v} + U_0 r + u R_0 - P_0 w - p W_0 - g c_{\theta_0} c_{\phi_0} \phi + g s_{\theta_0} s_{\phi_0} \theta) \\ z = m (\dot{w} + V_0 p + v P_0 - U_0 q - u Q_0 + g c_{\theta_0} s_{\phi_0} \phi + g s_{\theta_0} c_{\phi_0} \theta) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbf{l} = I_{xx} \dot{p} - I_{xz} (\dot{r} + P_0 q + p Q_0) + (Q_0 r + q R_0) (I_{zz} - I_{yy}) \\ \mathbf{m} = I_{yy} \dot{q} + 2 I_{xz} (P_0 p - R_0 r) + (P_0 r + p R_0) (I_{xx} - I_{zz}) \\ \mathbf{n} = I_{zz} \dot{r} - I_{xz} \dot{p} + (P_0 q + p Q_0) (I_{yy} - I_{xx}) + I_{xz} (Q_0 r + q R_0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} p = \dot{\phi} - \dot{\psi} s_{\theta_0} - \dot{\psi}_0 c_{\theta_0} \theta \\ q = \dot{\theta} c_{\phi_0} + \dot{\psi} c_{\theta_0} s_{\phi_0} - \dot{\psi}_0 s_{\theta_0} s_{\phi_0} \theta + (\dot{\psi}_0 c_{\theta_0} c_{\phi_0} - \dot{\theta}_0 s_{\phi_0}) \phi \\ r = -\dot{\theta} s_{\phi_0} + \dot{\psi} c_{\theta_0} c_{\phi_0} - \dot{\psi}_0 s_{\theta_0} c_{\phi_0} \theta + (\dot{\psi}_0 c_{\theta_0} s_{\phi_0} - \dot{\theta}_0 c_{\phi_0}) \phi \end{cases}$$

Equações às perturbações

Para evitar desenvolvimentos pesados, a linearização completa é calculada somente no caso do voo rectilíneo nivelado:

$$P_0 = Q_0 = R_0 = \dot{\psi}_0 = \dot{\theta}_0 = 0$$

$$\phi_0 = 0 = V_0$$

Para este caso, as equações simplificam-se:

- para as forças

$$\begin{cases} x = m (\dot{u} + q W_0 + g c_{\theta_0} \theta) \\ y = m (\dot{v} + U_0 r - p W_0 - g c_{\theta_0} \phi) \\ z = m (\dot{w} - U_0 q + g s_{\theta_0} \theta) \end{cases}$$

- para os momentos

$$\begin{cases} \mathbf{l} = I_{xx} \dot{p} - I_{xz} \dot{r} \\ \mathbf{m} = I_{yy} \dot{q} \\ \mathbf{n} = I_{zz} \dot{r} - I_{xz} \dot{p} \end{cases}$$

- para os ângulos de Euler

$$\begin{cases} p = \dot{\phi} - \dot{\psi} s_{\theta_0} \\ q = \dot{\theta} \\ r = \dot{\psi} c_{\theta_0} \end{cases}$$

Uma **consequência da linearização** para o caso rectilíneo nivelado é a **separação** entre dois movimentos desacoplados:

- o **movimento longitudinal**, com as variáveis u, w, q, θ

$$\begin{cases} x = m (\dot{u} + qW_0 + gc_{\theta_0}\theta) \\ z = m (\dot{w} - U_0q + gs_{\theta_0}\theta) \\ \mathbf{m} = I_{yy}\dot{q} \\ q = \dot{\theta} \end{cases}$$

- o **movimento lateral**, com as variáveis v, p, r, ϕ, ψ

$$\begin{cases} y = m (\dot{v} + U_0r - pW_0 - gc_{\theta_0}\phi) \\ \mathbf{l} = I_{xx}\dot{p} - I_{xz}\dot{r} \\ \mathbf{n} = I_{zz}\dot{r} - I_{xz}\dot{p} \\ p = \dot{\phi} - \dot{\psi} s_{\theta_0} \\ r = \dot{\psi} c_{\theta_0} \end{cases}$$

Linearização das forças

A linearização das forças assume a separação dos dois movimentos:

- as forças e momentos longitudinais só dependem das variáveis longitudinais e das suas derivadas;
- as forças e momentos laterais só dependem das variáveis laterais e derivadas;
- as entradas convencionais também respeitam a separação.

Introduzindo a notação condensada para as derivadas parciais, denominadas **derivadas de estabilidade**:

$$F_i = \frac{1}{m} \frac{\partial F}{\partial i}$$

e

$$M_i = \frac{1}{I_i} \frac{\partial M}{\partial i}$$

obtém-se a expansão das forças e momentos do movimento longitudinal:

$$\begin{cases} \frac{x}{m} = X_u u + X_{\dot{u}} \dot{u} + X_w w + X_{\dot{w}} \dot{w} + X_q q + X_{\dot{q}} \dot{q} + X_{\delta_E} \delta_E + X_{\delta_T} \delta_T \\ \frac{z}{m} = Z_u u + Z_{\dot{u}} \dot{u} + Z_w w + Z_{\dot{w}} \dot{w} + Z_q q + Z_{\dot{q}} \dot{q} + Z_{\delta_E} \delta_E + Z_{\delta_T} \delta_T \\ \frac{\mathbf{m}}{I_{yy}} = M_u u + M_{\dot{u}} \dot{u} + M_w w + M_{\dot{w}} \dot{w} + M_q q + M_{\dot{q}} \dot{q} + M_{\delta_E} \delta_E + M_{\delta_T} \delta_T \end{cases}$$

Como algumas derivadas são usualmente desprezáveis:

$$X_{\dot{u}}, X_q, X_{\dot{q}}, X_{\dot{w}}, Z_{\dot{u}}, Z_q, Z_{\dot{q}}, Z_{\dot{w}}, M_{\dot{u}}, M_{\dot{q}}$$

fica

$$\begin{cases} \frac{\dot{x}}{m} = X_u u + X_w w + X_{\delta_E} \delta_E + X_{\delta_T} \delta_T \\ \frac{\dot{z}}{m} = Z_u u + Z_w w + Z_{\delta_E} \delta_E + Z_{\delta_T} \delta_T \\ \frac{\dot{m}}{I_{yy}} = M_u u + M_w w + M_{\dot{w}} \dot{w} + M_q q + M_{\delta_E} \delta_E + M_{\delta_T} \delta_T \end{cases}$$

Para o lateral, desprezando:

$$Y_{\dot{v}}, Y_{\dot{p}}, Y_{\dot{r}}, Y_{\delta_A}, L_{\dot{v}}, L_{\dot{p}}, L_{\dot{r}}, N_{\dot{v}}, N_{\dot{p}}, N_{\dot{r}}$$

fica

$$\begin{cases} \frac{\dot{y}}{m_l} = Y_v v + Y_p p + Y_r r + Y_{\delta_R} \delta_R \\ \frac{\dot{l}}{I_{xx}} = L_v v + L_p p + L_r r + L_{\delta_A} \delta_A + L_{\delta_R} \delta_R \\ \frac{\dot{n}}{I_{zz}} = N_v v + N_p p + N_r r + N_{\delta_A} \delta_A + N_{\delta_R} \delta_R \end{cases}$$

Equações linearizadas

Juntando forças e variáveis linearizadas, obtêm-se os modelos linearizados descrevendo o movimento da aeronave:

- o movimento longitudinal

$$\begin{cases} \dot{u} + qW_0 + gc_{\theta_0}\theta &= X_u u + X_w w + X_{\delta_E} \delta_E + X_{\delta_T} \delta_T \\ \dot{w} - U_0 q + gs_{\theta_0}\theta &= Z_u u + Z_w w + Z_{\delta_E} \delta_E + Z_{\delta_T} \delta_T \\ \dot{q} &= M_u u + M_w w + M_{\dot{w}} \dot{w} + M_q q \\ &\quad + M_{\delta_E} \delta_E + M_{\delta_T} \delta_T \end{cases}$$

- o movimento lateral

$$\begin{cases} \dot{v} + U_0 r - pW_0 - gc_{\theta_0}\phi &= Y_v v + Y_p p + Y_r r + Y_{\delta_R} \delta_R \\ \dot{p} - \frac{I_{xz}}{I_{xx}} \dot{r} &= L_v v + L_p p + L_r r + L_{\delta_A} \delta_A + L_{\delta_R} \delta_R \\ \dot{r} - \frac{I_{xz}}{I_{zz}} \dot{p} &= N_v v + N_p p + N_r r + N_{\delta_A} \delta_A + N_{\delta_R} \delta_R \end{cases}$$

Referencial de estabilidade

No referencial de estabilidade, obtido por rotação de α_0 em torno do eixo lateral, o ângulo de ataque relativo é nulo e logo $W_0 = 0$ e $\theta_0 = 0$, simplificando um pouco mais as equações.

No entanto, porque (a) o ângulo de ataque depende da condição de voo e (b) as variáveis são medidas e a actuação efectua-se no referencial do corpo, são as equações no referencial do corpo que serão utilizadas.

2.2 Modelos dinâmicos

A análise da dinâmica dos movimentos de um avião requer uma modelação do sistema apropriada, em termos de funções de transferência (análise em frequência) ou, melhor, na *formulação em espaço de estados*.

Lembrando que o movimento da aeronave pode ser descrito como um sistema onde as entradas permitem controlar a evolução das variáveis de estado, nomeadamente a posição e a velocidade.

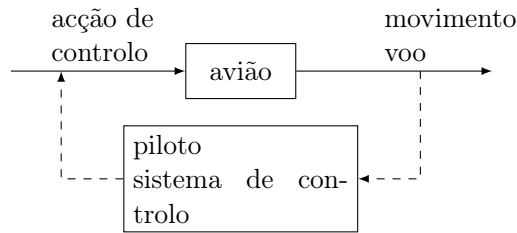


Figura 2.5: A aeronave como sistema

2.2.1 Formulação em espaço de estados

Uma equação em espaço de estados é uma equação vectorial diferencial de primeira ordem. É uma forma natural de apresentar a dinâmica de um sistema qualquer, em especial quando se trata de um sistema multivariável como é o caso do movimento de uma aeronave.

A forma mais geral de apresentar a **equação da dinâmica** de um sistema em espaço de estados será:

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{d}, t)$$

onde

- \mathbf{x} é o vector de estados
- \mathbf{u} é o vector de entradas
- \mathbf{d} é o vector de perturbações (disturbances)
- t é o tempo

A esta equação da dinâmica está normalmente associada uma **equação de saída**, expressando a relação entre as grandezas medidas ou outros parâmetros pretendidos, e as variáveis de estado:

$$\mathbf{y} = h(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{n}, t)$$

onde

- \mathbf{n} é o vector de ruído de sensores (noise)

A resolução da equação da dinâmica na sua forma mais geral é tarefa complexa ainda tema de trabalho para muitos investigadores...

Para sistemas lineares invariantes no tempo (*Linear Time Invariant -LTI*), a expressão simplifica-se; ela tem coeficientes constantes e é expressa por duas equações matriciais:

- no caso estocástico:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} + \mathbf{Ed} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{Cx} + \mathbf{Du} + \mathbf{Fn}\end{aligned}$$

- no caso determinístico (sem perturbações nem ruído):

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{Cx} + \mathbf{Du}\end{aligned}$$

onde

A é a matriz da dinâmica
 B é a matriz de entrada
 C é a matriz de saída
 D é matriz de saída directa

Em termos de diagrama de blocos, a formulação em espaço de estados corresponde a um diagrama multivariável com blocos de ganho matriciais, realimentação e integrador.

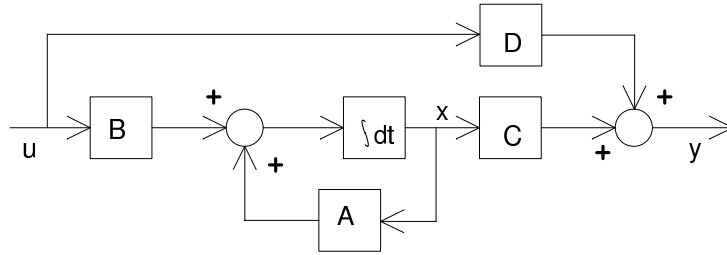


Figura 2.6: Diagrama de blocos da formulação em espaço de estados

2.2.2 Funções de transferência

No caso de sistemas lineares determinísticos, aplicando a transformada de Laplace às equações, com condições iniciais nulas:

$$sX(s) = AX(s) + BU(s)$$

obtém-se a solução para o estado

$$X(s) = (sI - A)^{-1} BU(s)$$

e logo para a saída

$$Y(s) = \{C(sI - A)^{-1}B + D\}U(s)$$

Esta fórmula corresponde a uma matriz de transferência:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

ou a um conjunto de funções de transferência para os diversos pares entrada/saída

$$G_{ij}(s) = \frac{Y_i(s)}{U_j(s)}$$

Os **pólos do sistema** são:

- as singularidades da matriz de transferência ou
- os valores próprios da matriz da dinâmica A ou
- as raízes da equação característica:

$$\Delta(s) = \text{Det}(sI - A) = 0$$

onde $\Delta(s)$ é o **polinómio característico** do sistema.

2.2.3 Exemplos

Exemplo a: formulação em espaço de estados de um sistema passa-baixo de 1^a ordem

$$G(s) = \frac{k}{1 + Ts}$$

onde k é o ganho estático e T é a constante de tempo.

A partir da definição:

$$\frac{Y}{U} = \frac{k}{1 + Ts}$$

obtém-se

$$(1 + Ts)Y = kU$$

ou

$$sY = -\frac{1}{T}Y + \frac{k}{T}U$$

Se assumirmos que

$$y = x$$

então deduz-se pela transformada inversa a formulação em espaço de estados

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -\frac{1}{T}x + \frac{k}{T}u \\ y &= x\end{aligned}$$

Note-se: A escolha $y = x$ é aqui natural mas ela é arbitrária: **a formulação em espaço de estados não é única!**

Exemplo b: Obtenha a FT do sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix} x - u\end{aligned}$$

Aplicando a fórmula genérica

$$G = C(sI_2 - A)^{-1}B + D$$

obtém-se

$$G = \begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+2 & 1 \\ -1 & s \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 1$$

ou

$$G = \frac{s(-s+1)}{(s+1)^2}$$

Exemplo c: Um passa baixo de 2^a ordem tem como FT:

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

onde ω_n é a frequência natural e ξ é o factor de amortecimento.

Resolvendo

$$(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2) Y = \omega_n^2 U$$

ou

$$s^2 Y = -2\xi\omega_n s Y - \omega_n^2 Y + \omega_n^2 U$$

Se assumirmos

$$\begin{aligned} x_1 &= y \\ x_2 &= \dot{x}_1 \end{aligned}$$

então

$$s X_2 = -2\xi\omega_n X_2 - \omega_n^2 X_1 + \omega_n^2 U$$

logo temos a formulação em espaço de estados:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -2\xi\omega_n x_2 - \omega_n^2 x_1 + \omega_n^2 u \\ y &= x_1 \end{aligned}$$

Na forma matricial fica:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_n^2 & -2\xi\omega_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_n^2 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + [0] u \end{aligned}$$

2.2.4 Movimento longitudinal

Para colocar as equações do movimento na forma de espaço da dinâmica (derivada de 1^a ordem só na esquerda), a partir das equações obtidas anteriormente:

$$\begin{aligned} \dot{u} &= X_u u + X_w w - W_0 q - g c_{\theta_0} \theta + X_{\delta_E} \delta_E + X_{\delta_T} \delta_T \\ \dot{w} &= Z_u u + Z_w w + U_0 q - g s_{\theta_0} \theta + Z_{\delta_E} \delta_E + Z_{\delta_T} \delta_T \\ \dot{q} &= M_u u + M_w w + M_{\dot{w}} \dot{w} + M_q q + M_{\delta_E} \delta_E + M_{\delta_T} \delta_T \\ \dot{\theta} &= q \end{aligned}$$

basta substituir a variável \dot{w} pela expressão da segunda equação. Obtém-se um sistema de 4^a ordem:

- com estado $\mathbf{x} = [u, w, q, \theta]^T$ e
- entrada $\mathbf{u} = [\delta_E, \delta_T]^T$

Resulta o sistema seguinte:

$$\begin{aligned} \dot{u} &= X_u u + X_w w - W_0 q - g c_{\theta_0} \theta + X_{\delta_E} \delta_E + X_{\delta_T} \delta_T \\ \dot{w} &= Z_u u + Z_w w + U_0 q - g s_{\theta_0} \theta + Z_{\delta_E} \delta_E + Z_{\delta_T} \delta_T \\ \dot{q} &= (M_u + M_{\dot{w}} Z_u) u + (M_w + M_{\dot{w}} Z_w) w + (M_q + M_{\dot{w}} U_0) q \\ &\quad - g s_{\theta_0} M_{\dot{w}} \theta + (M_{\delta_E} + M_{\dot{w}} Z_{\delta_E}) \delta_E + (M_{\delta_T} + M_{\dot{w}} Z_{\delta_T}) \delta_T \\ \dot{\theta} &= q \end{aligned}$$

Introduzindo novas derivadas: $\widetilde{M}_u = M_u + M_{\dot{w}}Z_u$ etc, conclui-se

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} X_u & X_w & -W_0 & -gc_{\theta_0} \\ Z_u & Z_w & U_0 & -gs_{\theta_0} \\ \widetilde{M}_u & \widetilde{M}_w & \widetilde{M}_q & \widetilde{M}_\theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} X_{\delta_E} & X_{\delta_T} \\ Z_{\delta_E} & Z_{\delta_T} \\ \widetilde{M}_{\delta_E} & \widetilde{M}_{\delta_T} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}$$

2.2.5 Movimento lateral

Para colocar as equações do movimento na forma de espaço da dinâmica, a partir das equações obtidas anteriormente:

$$\begin{aligned} \dot{v} &= Y_v v + (Y_p + W_0)p + (Y_r - U_0)r + gc_{\theta_0}\phi + Y_{\delta_R}\delta_R \\ \dot{p} - \frac{I_{xz}}{I_{xx}}\dot{r} &= L_v v + L_p p + L_r r + L_{\delta_A}\delta_A + L_{\delta_R}\delta_R \\ \dot{r} - \frac{I_{xz}}{I_{zz}}\dot{p} &= N_v v + N_p p + N_r r + N_{\delta_A}\delta_A + N_{\delta_R}\delta_R \\ \dot{\phi} &= p + t_{\theta_0}r \\ \dot{\psi} &= \frac{r}{c_{\theta_0}} \end{aligned}$$

basta resolver as segunda e terceira equações, considerando que I_{xz} é pequeno.

Obtém-se um sistema de 5ª ordem:

- com estado $\mathbf{x} = [v, p, r, \phi, \psi]^T$ e
- entrada $\mathbf{u} = [\delta_A, \delta_R]^T$

Introduzindo as novas derivadas de estabilidade:

$$\begin{aligned} L'_v &= L_v + \frac{I_{xz}}{I_{xx}}N_v \\ N'_v &= N_v + \frac{I_{xz}}{I_{zz}}L_v \end{aligned}$$

etc, fica a equação da dinâmica lateral (lateral/direccional):

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} Y_v & Y_p + W_0 & Y_r - U_0 & gc_{\theta_0} & 0 \\ L'_v & L'_p & L'_r & 0 & 0 \\ N'_v & N'_p & N'_r & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t_{\theta_0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/c_{\theta_0} & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} Y_{\delta_A} & Y_{\delta_R} \\ L'_{\delta_A} & L'_{\delta_R} \\ N'_{\delta_A} & N'_{\delta_R} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}$$

2.2.6 Conclusão da linearização

O processo de modelação e linearização das equações da dinâmica e cinemática angular leva a descrever o movimento de uma aeronave convencional com dois sistemas desacoplados:

- o movimento longitudinal, de 4ª ordem, com variáveis u, w, q, θ ;
- o movimento lateral, de 5ª ordem, com variáveis v, p, r, ϕ, ψ .

Estes modelos não incluem a posição NED do avião (cinemática de translação). Se se desejar seguir a posição, basta acrescentar a equação da cinemática de translação (ou as 3 equações com as três componentes).

A escolha das variáveis dos dois modelos está de acordo com a dedução a partir das equações de Newton-Euler mas existem alternativas:

- para os estados
- para as saídas

Estados alternativos

1) A velocidade ar e os **ângulos aerodinâmicos** são fundamentais na manutenção do voo e podem ser considerados como alternativa para os estados da velocidade.

No lugar das componentes cartesianas $\mathbf{V}_a = [U, V, W]_B$ são considerados os ângulos através da definição da velocidade ar $\mathbf{V}_a = V_t \begin{bmatrix} c_\alpha c_\beta & s_\beta & s_\alpha c_\beta \end{bmatrix}_B$, que, após o processo de linearização e para pequenos ângulos, fornece:

$$\begin{aligned} V_t &\simeq V_{t0} + v_t \simeq U_0 + u \\ v &\simeq U_0 \beta \\ w &\simeq U_0 \alpha \end{aligned}$$

Pode então considerar-se:

- o movimento longitudinal com estado $[u, \alpha, q, \theta]$ ou $[v_t, \alpha, q, \theta]$
- e o movimento lateral com estado $[\beta, p, r, \phi, \psi]$

No referencial de estabilidade, o estado usual $[v_t, \alpha, q, \theta]$ resulta numa matriz da dinâmica simplificada, onde ($X_\theta = -g$; $Z_\theta = 0$).

2) O **ângulo de subida** γ é por vezes utilizado no lugar do ângulo de picada, com base na equação : $\gamma = \theta - \alpha$.

3) No longitudinal, a **altitude** $h = -D$ não aparece: quando se pretende acompanhar a altitude, ela pode ser obtida por integração da velocidade ou do ângulo de subida γ :

$$\dot{h} = V_t \sin(\gamma) \simeq U_0 \gamma$$

ou seja

$$\dot{h} = U_0 (\theta - \alpha) = U_0 \theta - w$$

A altitude pode ser introduzida no modelo longitudinal como um 5º estado $x_5 = h$:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} X_u & X_w & -W_0 & -gc_{\theta_0} & 0 \\ Z_u & Z_w & U_0 & -gs_{\theta_0} & 0 \\ \widetilde{M}_u & \widetilde{M}_w & \widetilde{M}_q & \widetilde{M}_\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & U_0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} X_{\delta_E} & X_{\delta_T} \\ Z_{\delta_E} & Z_{\delta_T} \\ \widetilde{M}_{\delta_E} & \widetilde{M}_{\delta_T} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}$$

A 5ª coluna a zeros indica que o estado h é um integrador puro dos outros estados e não influencia a evolução destes.

4) Inversamente ao caso da altitude, no lateral, o ângulo de guinada ψ é um integrador puro e não influencia os outros 4 estados: **a dinâmica lateral é assim caracterizada como um sistema de 4ª ordem com os estados v, p, r, ϕ ou β, p, r, ϕ .**

Variáveis de saída

Alguns exemplos frequentes podem ser definidos além dos próprios estados.

- 1) ângulo de subida γ ou razão de subida $V_s = \dot{h}$ podem ser vistos como saídas do longitudinal
- 2) aceleração normal no c.g.

Lembrando a equação da força vertical deduz-se a aceleração:

$$A_z = \dot{W} + VP - UQ - g \cos(\theta) \cos(\phi)$$

que podemos aproximar à 1ª ordem para um voo de equilíbrio rectilíneo nivelado

$$A_z \simeq -g \cos(\theta_0) + \overbrace{\dot{w} - U_0 q + g \sin(\theta_0) \theta}^{a_z}$$

A perturbação da aceleração normal aparece assim como uma saída do movimento longitudinal

$$y = a_z = \begin{bmatrix} Z_u & Z_w & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} Z_{\delta_E} & Z_{\delta_T} \end{bmatrix} \mathbf{u}$$

- 3) o factor de carga é a conversão da aceleração (positivo para cima) : $n_z = -\frac{a_z}{g}$
- 4) a aceleração lateral no piloto: a aceleração sentida pelo piloto será deduzida da aceleração no c.g., conhecendo as coordenadas do piloto.

No caso da aceleração lateral obtém-se:

$$a_{y,pil} = a_{y,c.g.} + x_{pil} \dot{r} - z_{pil} \dot{p}$$

- 5) o ângulo de rumo

Sem vento, a tangente da trajectória tem um ângulo relacionado com as variáveis do lateral:

$$\lambda = \beta + \psi$$

Com vento, o rumo depende da velocidade do vento.

Lembra-se que a velocidade chão \mathbf{V}_G é a soma vectorial da velocidade ar $\mathbf{V}_A = \mathbf{V}_T$ com a velocidade do vento \mathbf{V}_w

$$\mathbf{V}_G = \mathbf{V}_a + \mathbf{V}_w$$

A definição do rumo verdadeiro χ é : $\tan(\chi) = \frac{\dot{E}}{N}$

2.2.7 Coeficientes e derivadas de estabilidade

As derivadas de estabilidade são as grandezas dimensionais que definem o modelo e dependem essencialmente da condição de voo :

- velocidade ar $V_t \simeq U_0$
- altitude h_0 (e logo a densidade ρ)
- ângulo da subida γ_0 (e logo ângulo de picada θ_0)
- inércias: massa m e matriz \mathbf{I}

Além dos dados geométricos da asa da aeronave:

- superfície alar S
- corda média da asa \bar{c}
- envergadura b

as derivadas de estabilidade dependem dos coeficientes (adimensionais) de estabilidade, eles próprios função em particular da velocidade ar (U_0, α_0, β_0) na condição de voo considerada.

As tabelas seguintes resumem a relação entre as derivadas de estabilidade e os coeficientes adimensionais (é introduzido o parâmetro $\mu = \frac{m}{\rho S U_0}$ em segundos).

derivadas do longitudinal		
$X_u = -(C_{D_u} + 2C_{D_0}) \frac{1}{2\mu}$	$Z_u = -(C_{L_u} + 2C_{L_0}) \frac{1}{2\mu}$	$M_u = C_{m_u} \frac{m\bar{c}}{2\mu I_{yy}}$
$X_w = -(C_{D_\alpha} - C_{L_0}) \frac{1}{2\mu}$	$Z_w = -(C_{L_\alpha} + C_{D_0}) \frac{1}{2\mu}$	$M_w = C_{m_\alpha} \frac{m\bar{c}}{2\mu I_{yy}}$
$Z_{\dot{w}} = -C_{L_{\dot{\alpha}}} \frac{\bar{c}}{4\mu U_0}$	$Z_q = -C_{L_q} \frac{\bar{c}}{4\mu U_0}$	$M_q = C_{m_q} \frac{m\bar{c}^2}{4\mu I_{yy}}$
$M_{\dot{w}} = C_{m_{\dot{\alpha}}} \frac{m\bar{c}^2}{4\mu I_{yy} U_0}$	$Z_{\delta_E} = -C_{L_{\delta_E}} \frac{U_0}{2\mu}$	$M_{\delta_E} = C_{m_{\delta_E}} \frac{mU_0\bar{c}}{2\mu I_{yy}}$

(2)

derivadas do lateral		
$Y_v = C_{Y_\beta} \frac{1}{2\mu}$	$L_\beta = C_{l_\beta} \frac{mU_0b}{2\mu I_{xx}}$	$N_\beta = C_{n_\beta} \frac{mU_0b}{2\mu I_{zz}}$
$Y_p = C_{Y_p} \frac{b}{4\mu}$	$L_p = C_{l_p} \frac{mb^2}{4\mu I_{xx}}$	$N_p = C_{n_p} \frac{mb^2}{4\mu I_{zz}}$
$Y_r = C_{Y_r} \frac{b}{4\mu}$	$L_r = C_{l_r} \frac{mb^2}{4\mu I_{xx}}$	$N_r = C_{n_r} \frac{mb^2}{4\mu I_{zz}}$
$Y_\delta = C_{Y_\delta} \frac{U_0}{2\mu}$	$L_\delta = C_{l_\delta} \frac{mU_0b}{2\mu I_{xx}}$	$N_\delta = C_{n_\delta} \frac{mU_0b}{2\mu I_{zz}}$

2.2.8 Exercício

Num voo a 67.7 m/s, o movimento longitudinal do corpo rígido de um avião em resposta ao elevadores é descrito pelas equações:

$$\begin{cases} \dot{w} = -w + 67.7q - 5.24\delta_E \\ \dot{q} = -0.03w - 0.75q - 2.24\delta_E \end{cases}$$

- Determine as matrizes da dinâmica e de entrada deste sistema.
- Identifique os pólos e deduza os seus parâmetros físicos.
- Determine a resposta estática do sistema em termos de ângulo de ataque para uma deflexão de 5 graus do leme de profundidade.

²Para aviões a hélice: $C_{D_u} \simeq \frac{T_0}{U_0}$

d) A realimentação da razão de picada corresponde a fornecer $\delta_E = 0.5q$: deduza os pólos do novo sistema e compare.

Reconhece-se o estado $x = [w, q]^T$ e a entrada δ_E

$$\text{Logo } A = \begin{bmatrix} -1 & 67.7 \\ -0.03 & -0.75 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} -5.24 \\ -2.24 \end{bmatrix}$$

Estas são as variáveis do período curto: trata-se da aproximação (de 2^a ordem).

Os pólos são as raízes do polinómio característico:

$$\Delta = \text{Det}(sI - A) = \begin{vmatrix} s+1 & -67.7 \\ 0.03 & s+0.75 \end{vmatrix} = (s+1)(s+0.75) + 67.7 \times 0.03 = s^2 + 1.75s + 2.78$$

por identificação com o sistema de 2^a ordem $s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2$ vem:

$$\begin{cases} \xi = 0.525 \\ \omega_n = 1.67 \text{ (rad/s)} \end{cases}$$

A resposta estática com entrada constante corresponde ao caso estacionário quando

$$\dot{\mathbf{x}} = 0 = A\mathbf{x} + B\delta_E$$

logo

$$\mathbf{x}_\infty = -A^{-1}B\delta_E$$

$$\begin{bmatrix} w_\infty \\ q_\infty \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -56 \text{ (m/s/rad)} \\ -0.75 \text{ (rad/s/rad)} \end{bmatrix} \delta_E$$

Para 5 graus no leme, o ângulo de ataque é dado por:

$$\alpha_\infty = \frac{w_\infty}{U_0} = \frac{-56 \times 5}{67.7} = -4.1^\circ$$

Substituindo a entrada com a realimentação indicada o sistema tem uma dinâmica em anel fechado:

$$A_f = A + B \begin{bmatrix} 0 & 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 65 \\ -0.03 & -1.87 \end{bmatrix}$$

Os pólos deste sistema são então: $-1.44 \pm 1.33i$ ou seja

$$\begin{cases} \xi = 0.73 \\ \omega_n = 1.96 \text{ (rad/s)} \end{cases}$$

Esta realimentação aumentou amortecimento e frequência.

Exemplo no Matlab

No Matlab é possível obter um exemplo com valores numéricos.


```

% ALPHA-1 longitudinal data .m file example
deg=pi/180;
g=9.81; u0=67.7; aa0=6.5*deg; gg0=0; tt0=aa0+gg0;
xu=-0.0166; xw=0.108; xde=0.6; xdt=0.92e-4;
zu=-0.175; zw=-1.01; zde=-5.24;
mu=0.0043; mw=-0.033; mwp=-0.003; mq=-0.546;
mde=-2.26; mdt=-0.65e-5;
a=[
xu xw -aa0*u0 -g*cos(tt0);
zu zw u0 -g*sin(tt0);
mu+mwp*zu mw+mwp*zw mq+mwp*u0 -mwp*g*sin(tt0);
0 0 1 0];
b=[xde xdt;zde 0;mde+mwp*zde mdt;0 0];
[a b]
ans =
    -0.0166    0.1080   -7.6803   -9.7469    0.6000    0.0001
    -0.1750   -1.0100   67.7000   -1.1105   -5.2400         0
     0.0048   -0.0300   -0.7491    0.0033   -2.2443    0.0000
         0         0    1.0000         0         0         0

eig(a)
ans =
    -0.8787 + 1.4240i
    -0.8787 - 1.4240i
    -0.0092 + 0.1874i
    -0.0092 - 0.1874i

damp(a)
ans =
    Eigenvalue      Damping      Freq. (rad/sec)
    -0.0092 + 0.1874i    0.0489      0.1876
    -0.0092 - 0.1874i    0.0489      0.1876
    -0.8787 + 1.4240i    0.5251      1.6733
    -0.8787 - 1.4240i    0.5251      1.6733

```

Comentário: aparecem dois modos -dois pares de pólos complexos conjugados:

- um modo muito lento e pouco amortecido: o modo **fugóide**
- um modo mais rápido, mais amortecido: o **período curto**

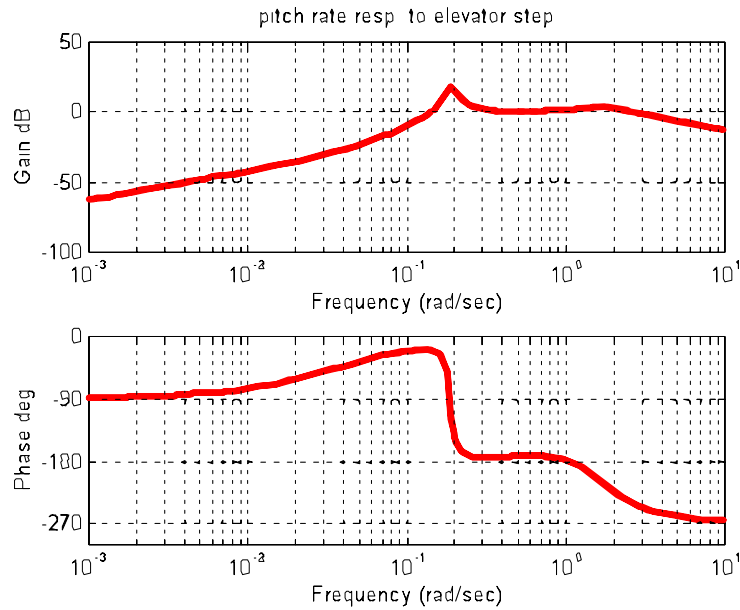
Veremos mais longe as aproximações que descrevem estes modos e permitem uma melhor compreensão da sua realidade física.

A análise no domínio da frequência pode como exemplo utilizar o diagrama de Bode da resposta da razão de picada à entrada do leme.

```

%frequency analysis: response from elev. to pitch rate
bode(ss(a,b(:,1),[0 0 1 0],[0 0]))

```



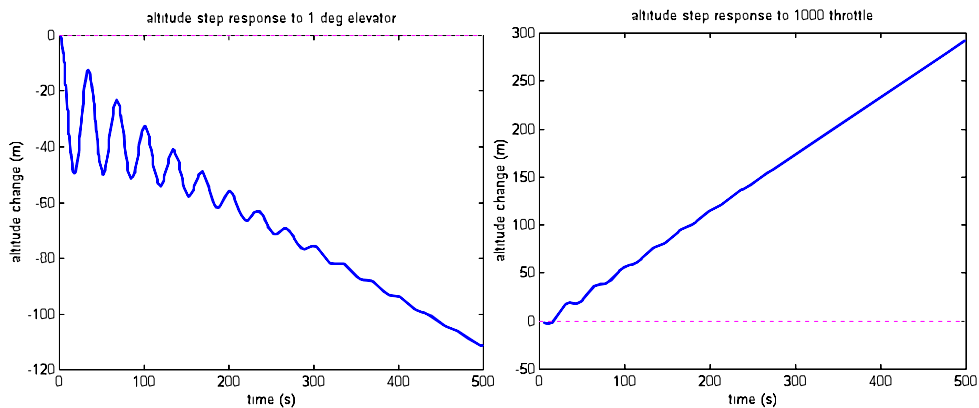
Reconhecem-se as frequências dos 2 modos, nomeadamente a ressonância da fugóide (em 0.2 rad/s) e o modo amortecido do período curto (ligeiramente abaixo de 2 rad/s).

2.3 Análise do movimento

2.3.1 Exemplo longitudinal no Matlab

A resposta no domínio do tempo pode ser obtida no Matlab com a função *step*.

```
% time response analysis
%add altitude state and as output
ah=[a zeros(4,1);0 -1 0 u0 0];bh=[b;0 0];
ch=[0 0 0 0 1];dh=[0 0];
D=diag([1*deg,1000]); % resp. to 1 deg or 1000 throttle
step(ah,bh*D,ch,dh*D)
```



Reconhece-se a oscilação pouco amortecida da fugóide que é o modo dominante. Também fica evidente o comportamento estacionário.

A resposta estática é igualmente obtida com a função *dcgain*.

```
% dc response
%resp. to 1 deg or 1000 throttle
dcgain(ss(a,b*D,eye(4),zeros(4,2)))
ans =
    3.69    0.62
   -0.71   -0.12
    0        0
   -0.013    0.007
ans(1,:)./ans(4,:) %ratio u/theta (m/s/rad)
ans =
   -283.846    88.571
```

Comentário: a resposta estática não é intuitiva:

- o motor altera a velocidade de subida -e o ângulo de picada;
- o leme altera o ângulo de ataque -e a velocidade longitudinal.

2.3.2 Aproximações longitudinais

Aproximação do período curto

O período curto corresponde ao movimento de rotação do corpo rígido em torno do eixo lateral, em resposta ao leme de profundidade.

A aproximação do período curto consiste em:

- desprezar as variações da velocidade longitudinal $u = 0$;
- desprezar o ângulo de picada de referência $\theta_0 = 0$;
- só se consideram as equações em w e q com a entrada em δ_E .

Resulta num sistema de 2ª ordem:

$$\begin{cases} \dot{w} = Z_w w + U_0 q + Z_{\delta_E} \delta_E \\ \dot{q} = \widetilde{M}_w w + \widetilde{M}_q q + \widetilde{M}_{\delta_E} \delta_E \end{cases}$$

O polinómio característico é : $\Delta = s^2 - (Z_w + \widetilde{M}_q) s - \widetilde{M}_w U_0 + \widetilde{M}_q Z_w$.

A frequência natural é $\omega_n = \sqrt{-\widetilde{M}_w U_0 + \widetilde{M}_q Z_w}$ e o factor de amortecimento $\xi = -\frac{Z_w + \widetilde{M}_q}{2\omega_n}$.

É tipicamente um modo rápido (alguns rad/s) e de amortecimento intermédio (de 0.4 a 0.8).

Aproximação da fugóide

O modo fugóide corresponde ao movimento do c.g. na troca de energia cinética com energia potencial.

A aproximação consiste em:

- considerar a velocidade vertical nula e constante $w = 0 = \dot{w}$ (ou com ângulo de ataque nulo e constante $\alpha = 0 = \dot{\alpha}$);

- desprezar a rotação do corpo rígido -e logo a equação em q ;
- só se consideram as equações em u e θ (normalmente com entrada no motor).

No referencial de estabilidade as equações deste sistema de 2ª ordem ficam na forma mais simples:

$$\begin{cases} \dot{u} = X_u u - g\theta + X_{\delta_E} \delta_E + X_{\delta_T} \delta_T \\ \dot{\theta} = -\frac{Z_u}{U_0} u - \frac{Z_{\delta_E}}{U_0} \delta_E - \frac{Z_{\delta_T}}{U_0} \delta_T \end{cases}$$

É tipicamente um modo muito lento e muito pouco amortecido.

Os pólos da fugóide fornecem: $\omega_n = \sqrt{-\frac{Z_u g}{U_0}}$ e $\xi = -\frac{X_u}{2\omega_n}$

Numa abordagem grosseira, podemos desprezar C_{L_u} e C_{D_u} nas expressões das derivadas de estabilidade, obtendo:

$$X_u = -C_D \frac{\rho S U_0}{m}$$

e

$$Z_u = -C_L \frac{\rho S U_0}{m}$$

Como a sustentação compensa aproximadamente o peso:

$$L = \frac{1}{2} C_L \rho S U_0^2 = mg$$

Deduz-se

$$\omega_n \simeq \sqrt{2} \frac{g}{U_0}$$

e

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{D}{L}$$

De onde se conclui que :

- a frequência não depende da aeronave mas só da velocidade;
- existe uma contradição entre a aerodinâmica, que pretenderia reduzir a relação D/L , e a dinâmica de voo, que desejaria um amortecimento maior.

2.3.3 Exemplo lateral no Matlab

Considere-se o modelo de um avião de turismo obtido no Matlab.

```
% GOLF-1 lateral data .m file example
deg=pi/180; g=9.81;
u0=50; tt0=0;
yv=-0.145; yp=.087; lbb=-2.18; lp=-2.01; lr=0.303;
nbb=2.182; np=-0.222; nr=-0.27;
ybbdr=0.038; lda=1.541; ldr=0.6; nda=-0.036; ndr=-1.25;
a=[yv yp -1 g/u0;lbb lp lr 0;nbb np nr 0;0 1 0 0];
b=[0 ybbdr;lda ldr;nda ndr;0 0];
[a b]
```

```
ans =
-0.1450  0.0870 -1.0000  0.1962  0.0000  0.0380
-2.1800 -2.0100  0.3030  0.0000  1.5410  0.6000
 2.1820 -0.2220 -0.2700  0.0000 -0.0360 -1.2500
 0.0000  1.0000  0.0000  0.0000  0.0000  0.0000
```

```
damp(a);
Eigenvalue      Damping      Freq. (rad/sec)
 0.0026          -1.0000      0.0026
-0.1747 + 1.6007i  0.1085      1.6102
-0.1747 - 1.6007i  0.1085      1.6102
-2.0783          1.0000      2.0783
```

Comentário: aparecem três modos:

- um pólo simples perto da origem (aqui instável) : o modo **espiral**;
- um par de pólos complexos, rápido e pouco amortecido: o modo de **rolamento Holandês**;
- um pólo simples rápido : o modo de **rolamento puro**.

2.3.4 Aproximações laterais

Aproximação do rolamento puro

A aproximação do rolamento consiste em :

- só considerar a rotação em torno do eixo longitudinal
- desprezar derrapagem e razão de guinada

e descreve a resposta da razão de rolamento à entrada dos ailerons :

$$\dot{p} = L'_p p + L'_{\delta_A} \delta_A$$

Este sistema de 1^a ordem pode ser escrito com a FT :

$$G(s) = \frac{p(s)}{\delta_A(s)} = \frac{L'_{\delta_A}}{s - L'_p} = \frac{K_p}{1 + T_p s}$$

e é caracterizado pela sua constante de tempo T_p e o seu ganho estático K_p .

No exemplo anterior: $G = \frac{1.541}{s+2.01} = \frac{0.77}{1+0.5s}$ a constante de tempo é $T_p = 0.5$ (s).

O pólo da aproximação está em -2.01 (rad/s), a comparar com o pólo no modelo completo em -2.08 (rad/s): esta aproximação do rolamento puro é usualmente muito boa.

Aproximação do rolamento Holandês

O modo do rolamento Holandês pode ser descrito por uma aproximação de 2^a ordem que consiste em:

- só considerar o movimento no plano horizontal e

- desprezar o rolamento.

Resulta num sistema de 2^a ordem, com razão de guinada e derrapagem sob o efeito do leme:

$$\begin{aligned}\dot{\beta} &= Y_{\beta}\beta + \left(\frac{Y_r}{U_0} - 1\right)r + \frac{Y_{\delta_R}}{U_0}\delta_R \\ \dot{r} &= N'_{\beta}\beta + N'_r r + N'_{\delta_R}\delta_R\end{aligned}$$

```
%modelo golf1
arh=a(1:2:3,1:2:3)
arh =
-0.1450 -1.0000
 2.1820 -0.2700

damp(arh)
Eigenvalue      Damping Freq.(rad/s)
-0.2075 + 1.4758i  0.1392  1.4904
-0.2075 - 1.4758i  0.1392  1.4904
```

A comparação entre os parâmetros da aproximação e do modelo completo:

```
% aproximação
-0.2075 + 1.4758i  0.1392  1.4904
% modelo completo
-0.1747 + 1.6007i  0.1085  1.6102
```

evidencia uma ordem de grandeza similar, com uma diferença de cerca de 25% e 7%: esta aproximação é usualmente boa.

Aproximação do modo espiral

Não existe uma boa aproximação para o modo espiral mas a melhor seria de juntar este modo ao modo de rolamento puro e considerar o ângulo de rolamento como integrador puro da razão de rolamento:

$$\begin{aligned}\dot{p} &= L'_p p + L'_{\delta_A} \delta_A \\ \dot{\phi} &= p\end{aligned}$$

resultando num pólo na origem (para a espiral), além do pólo do rolamento puro.

2.4 Qualidades de voo

Um dos objectivos da fase da modelação e análise do movimento é de :

- saber avaliar as características dinâmicas da aeronave e
- concluir sobre as eventuais necessidades de correcções ou controlo.

Para tal é necessário definir uma grelha de avaliação e os critérios quantitativos a respeitar/utilizar. Esta grelha corresponde à noção de **qualidades de voo**.

Os serviços responsáveis pela certificação das aeronaves elaboraram procedimentos e grelhas para esta avaliação das qualidades de voo. Estas grelhas são demasiado complexas e o que vamos aqui apresentar é uma forma de introdução ao problema inspirado do Nelson[1], do McLean[3] e do McCormick[4].

As qualidades de voo são analisadas a partir dos modelos de 4^a ordem, longitudinal e lateral, com base nos parâmetros físicos dos modos da aeronave convencional.

A avaliação das qualidades de voo de um modelo supõe:

- a identificação da classe da aeronave
- a identificação da fase de voo

Logo, com base nos parâmetros físicos dos diversos modos, deduzem-se as qualidades de voo, quantificadas em termos de nível.

O tipo de aeronave é definido de acordo com a tabela seguinte.

classe	características do avião
I	avião de turismo (até 5 000 kg)
II	avião de peso <30 000 kg e manobrabilidade moderados
III	avião pesado com manobrabilidade moderada
IV	avião muito manobrável

A fase de voo é qualificada em 3 categorias.

categoria	definição
A	fase de voo não terminal, com manobras rápidas e/ou controlo preciso de trajectória
B	fase de voo não terminal, com manobras moderadas ou lentas e eventualmente algum controlo da trajectória
C	fase terminal, com manobras lentas e controlo preciso

A saída do processo de avaliação em termos de nível está associado à tabela qualitativa seguinte.

nível	definição
1	qualidades completamente adequadas à fase de voo
2	qualidades adequadas à fase de voo mas requerendo alguma sobrecarga de pilotagem ou limitando o perfeito cumprimento da missão
3	qualidades tais que o avião é controlável mas exige uma carga de pilotagem próxima do limite ou impossibilita o cumprimento da missão

2.4.1 Critérios longitudinais

Nos modos longitudinais, as qualidades de voo são expressas essencialmente em termos de factor de amortecimento.

Para a fugóide:

nível	ξ
1	> 0.04
2	> 0
3	período $> 55s$

Para o período curto:

categoria	nível 1	nível 2	nível 3
A	$0.35 < \xi < 1.3$	$0.25 < \xi < 2$	$\xi > 0.1$
B	$0.3 < \xi < 2.0$	$0.2 < \xi < 2$	$\xi > 0.1$
C	$0.35 < \xi < 1.3$	$0.35 < \xi < 2$	$\xi > 0.25$

Para aeronaves em pilotagem manual, o nível 1 supõe também que haja uma boa separação de modos: $\omega_{pc} > 10\omega_f$.

2.4.2 Critérios laterais

O **modo espiral**, normalmente instável, é quantificado em tempo T_2 necessário para duplicar a amplitude³:

categoria	nível 1	nível 2	nível 3
A,C	>12 s	>8 s	>5 s
B	>20 s	>8 s	>5 s

Se a espiral for estável, o modo é de nível 1!

O **rolamento** está directamente relacionado com a manobrabilidade lateral/direccional e deve ter uma constante de tempo máxima de acordo com a tabela a seguir:

categoria	nível 1	nível 2	nível 3
A I,IV	1.0	1.4	10
A II,III	1.4	3.0	10
B	1.4	3.0	10
C I,IV	1.0	1.4	10
C II,III	1.4	3.0	10

O rolamento holandês tem limites mínimos de amortecimento, de frequência natural e do produto:

³Para um pólo simples instável: $T_2 = \frac{\ln(2)}{\text{pólo}}$

nível	1			2			3		
categoria	ξ	$\xi\omega_n$	ω_n	ξ	$\xi\omega_n$	ω_n	ξ	ω_n	
A I,IV	0.19	0.35	1.0	0.02	0.05	0.5	0.02	-	0.4
A II,III	0.19	0.35	0.5						
B	0.08	0.15	0.5						
C I,IV	0.08	0.15	1.0						
C II,III	0.08	0.1	0.5						

Capítulo 3

Controlo automático

3.1 Introdução

Com base no sistema em anel aberto, o projecto de um controlador consiste na escolha ou alteração dos valores da entrada por forma a **levar a saída para um valor desejado**, com um comportamento desejado...

Existem soluções de controlo:

- em anel aberto ou
- em anel fechado ou por realimentação (*feedback control*)

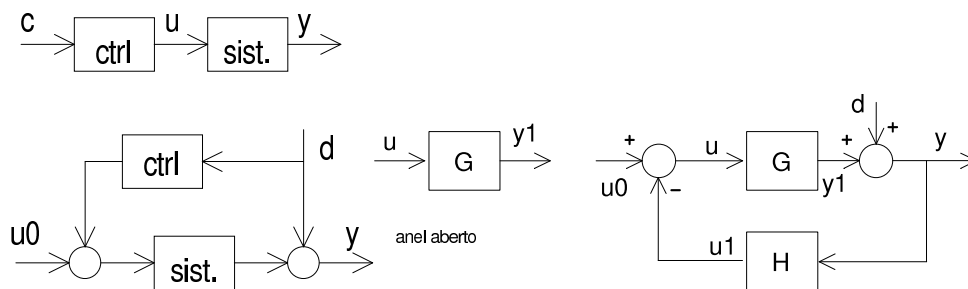


Figura 3.1: Controlo em anel aberto ou fechado

Porque são mais robustas a perturbações e erros de modelo, as soluções em anel fechado são geralmente preferidas.

Em alternativa ao diagrama com compensador no anel de realimentação, é por vezes utilizada a realimentação do erro (servomecanismo): são em particular os controladores P, I, PI, PD ou PID.

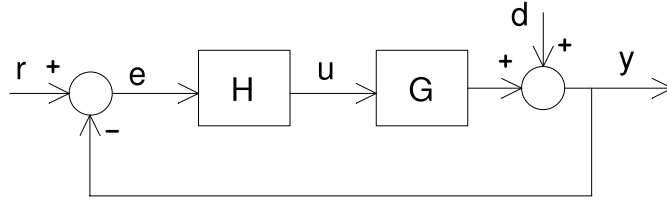


Figura 3.2: Controlo com realimentação unitária

A entrada do anel fechado é então uma referência ou valor desejado para a saída.

Em resumo, os objectivos no projecto do sistema de controlo serão que ele deve garantir um funcionamento em anel fechado:

- com um bom seguimento entre entrada e saída ou referência e saída (resposta estacionária);
- com uma dinâmica rápida e correcta em resposta aos comandos do piloto (resposta dinâmica) ;
- estável, insensível ou pouco sensível às perturbações (robustez às perturbações).

É necessária uma forma de quantificar o cumprimento destes objectivos mas essa forma depende muito do método utilizado para a síntese do controlador.

Neste capítulo:

1. Numa primeira fase, vamos lembrar algumas noções de controlo clássico com sistemas univariáveis (ou **siso** -*single input single output*), com uma análise baseada nas funções de transferência;
2. Em seguida introduziremos a abordagem do controlo moderno, baseada na formulação em espaço de estados, mais adequada para sistemas multivariáveis (ou **mimo** -*multiple input multiple output*).

3.2 Controlo clássico

3.2.1 Funções de transferência

A função de transferência (FT) para um sistema LTI simples é

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

onde $U(s)$ e $Y(s)$ são as transformadas de Laplace da entrada $u(t)$ e da saída $y(t)$, assumindo condições iniciais nulas.

A FT resulta numa fracção de polinómios $G(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$, onde:

- as raízes do numerador são os **zeros** do sistema;
- as raízes do denominador são os **pólos** do sistema;
- um sistema causal tem um denominador de grau superior ou igual ao numerador;
- a estabilidade do sistema está associada à localização dos pólos no plano complexo (não dos zeros).

3.2.2 Exemplos

Sistema de 1^a ordem

O passa baixo de 1^a ordem tem como FT

$$G(s) = \frac{k}{1 + Ts}$$

onde k é o ganho estático e T é a constante de tempo

Se o pólo for negativo ($T > 0$), o sistema é estável.

A resposta a um degrau é da forma:

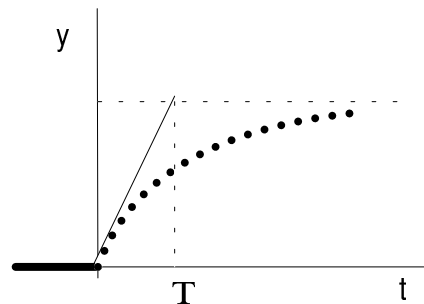


Figura 3.3: Resposta de um sistema de 1^a ordem a um degrau

Sistema de 2^a ordem

O passa baixo de 2^a ordem tem como FT

$$G(s) = \frac{k\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

onde k é o ganho estático, e ξ é o factor de amortecimento e ω_n é a frequência natural.

Para $0 < \xi \leq 1$, os pólos são dois complexos conjugados do SPE $(-\xi \pm i\sqrt{1-\xi^2})\omega_n$ e o sistema é estável

A resposta a um degrau é da forma:

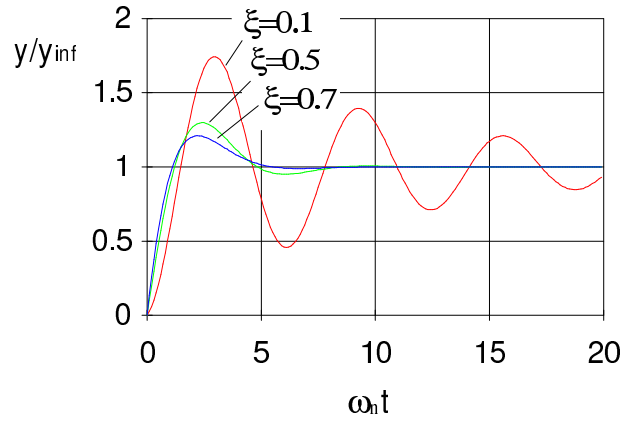


Figura 3.4: Resposta de um sistema de 2ª ordem a um degrau

Exemplo de controlador em servomecanismo

Considere-se o diagrama de blocos da figura seguinte.

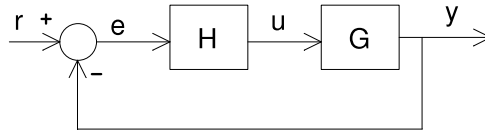


Figura 3.5: Diagrama de blocos de um servomecanismo

com:

$$G = \frac{k}{s(s+1)} \quad H = \frac{1}{s+10}$$

Determine e caracterize: a FT do anel fechado (AF), a FT referência-actuador e a FT referência-erro

Os 3 blocos correspondem a:

$$\begin{cases} y = Gu \\ u = He \\ e = r - y \end{cases}$$

Por eliminação das variáveis internas deduz-se¹:

$$\begin{cases} y = GH(I + GH)^{-1} r \\ u = H(I + GH)^{-1} r \\ e = (I + GH)^{-1} r \end{cases}$$

Substituindo com as expressões fornecidas de G e H vem:

$$\frac{y}{r} = \frac{k}{k+s(s+1)(s+10)} \quad \frac{u}{r} = \frac{s(s+1)}{k+s(s+1)(s+10)} \quad \frac{e}{r} = \frac{s(s+1)(s+10)}{k+s(s+1)(s+10)}$$

Note-se:

¹Estas equações são válidas também para o caso multivariável

- o denominador é comum às 3 FT;
- o AF tem ganho estático unitário $y \rightarrow r$ (sem erro estacionário $e \rightarrow 0$) -devido ao pólo de G na origem.

3.2.3 Análise em frequência

Uma das ferramentas de análise, denominada análise na frequência, considera o sistema em resposta forçada a uma entrada sinusoidal estabelecida, em função da frequência ω do sinal. A FT é obtida com a substituição $s = j\omega$.

Existem várias ferramentas gráficas:

- Diagrama de Bode:
curvas de amplitude em decibéis (dB) e fase em função da frequência
- Diagrama de Nyquist:
curva polar de $G(j\omega)$ no contorno de Nyquist $-\infty \leq \omega \leq \infty$
- Diagrama de Nichols:
curva de amplitude em dB em função da fase

No caso do diagrama de Bode, representam-se duas curvas (em função da frequência numa escala logarítmica):

- a magnitude (ou amplitude) em dB: $|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log_{10} |G(j\omega)|$
- a fase, em radianos ou graus: $\phi = \arg(G(j\omega))$

A robustez da estabilidade ou estabilidade relativa do sistema pode ser quantificada com:

- a margem de ganho: $G_m = -|G|_{\phi=-\pi}$
- a margem de fase: $\phi_m = -\pi + \phi_{|G|=0dB}$

Um sistema com ($G_m = 6dB, \phi_m > 30^\circ$) pode duplicar o seu ganho e permanece estável.

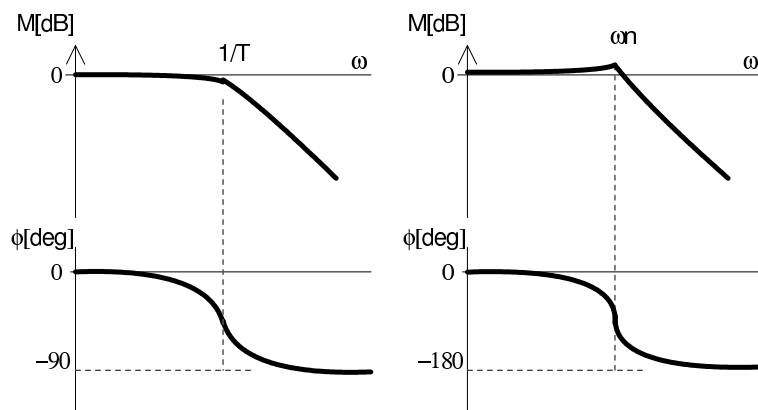


Figura 3.6: Exemplo de D. de Bode para um sistema passa baixo de 1^a ordem (esq.) e 2^a ordem (dir.)

3.2.4 LGR

O Lugar Geométrico das Raízes (LGR) ou *root locus* é uma ferramenta de análise e projecto.

O LGR representa a evolução no plano complexo dos pólos do sistema quando a realimentação é um ganho puro $0 < k < +\infty$ (por defeito o MATLAB assume uma realimentação negativa: $u = u_0 - ky$).

A FT do anel fechado com uma realimentação com ganho puro $u = -ky$ é

$$G_f = \frac{y}{u_0} = \frac{G}{1 + kG}$$

Para um anel aberto (AA) da forma $G = \frac{N}{D}$, resulta:

$$G_f = \frac{N}{D + kN}$$

mostrando que:

- esta realimentação não altera os zeros do sistema;
- os pólos do sistema assumem os valores do AA para $k = 0$;
- os pólos tendem para os zeros quando $k \rightarrow +\infty$ ($D_f \simeq kN$).

Exemplo de LGR

Considere-se a FT de resposta da razão de picada à deflexão do leme de profundidade:

$$\frac{q}{\delta_E} = \frac{2.24(s + 0.92)(s + 0.04)s}{(s^2 + 0.017s + 0.036)(s^2 + 1.76s + 2.8)}$$

com dois pares de pólos complexos conjugados:

Eigenvalue	Damping Freq. (rad/sec)	
-0.0084 + 0.1886i	0.0445	0.1888
-0.0084 - 0.1886i	0.0445	0.1888
-0.8816 + 1.4239i	0.5264	1.6747
-0.8816 - 1.4239i	0.5264	1.6747

Reconhece-se:

- a fugóide pouco amortecida e perto da origem;
- o período curto mais rápido.

O LGR é representado na figura seguinte.

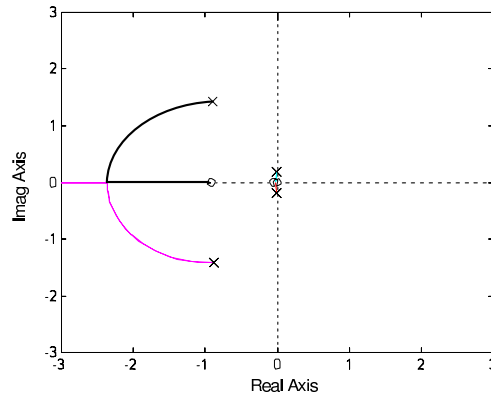


Figura 3.7: Exemplo de LGR

Constata-se que a realimentação essencialmente aumenta o amortecimento do período curto.

Segue-se a escolha do ganho: é necessário definir um critério: por exemplo com $\xi = 0.7$, a 45° , obtém-se: $k = 0.6$, com unidade (s).

O resultado nos pólos do AF é obtido no Matlab:

Eigenvalue	Damping	Freq. (rad/sec)
-0.0101 + 0.1553i	0.0651	0.1557
-0.0101 - 0.1553i	0.0651	0.1557
-1.5510 + 1.2888i	0.7691	2.0166
-1.5510 - 1.2888i	0.7691	2.0166

Nota-se que:

- A realimentação aumenta o amortecimento do período curto;
- A fugóide permanece quase inalterada.

3.2.5 Controladores PID

A realimentação em servo-mecanismo tem como base o controlo proporcional, com ganho puro k_p . Se existir um erro estático, este pode ser anulado por inclusão de um termo integrativo $\frac{k_i}{s}$. Eventualmente um termo derivativo é também introduzido para aumentar a rapidez da resposta $k_d s$.

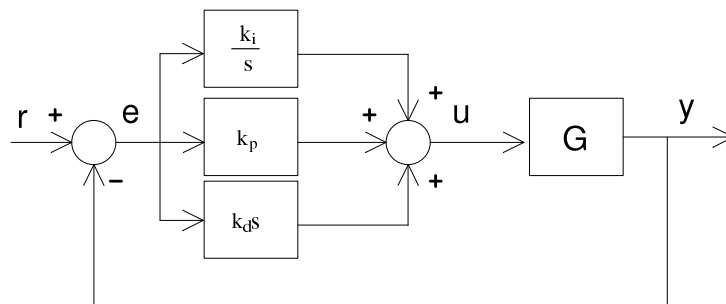


Figura 3.8: controlador PID

O controlador PID tem a forma

$$H(s) = k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s = k_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right)$$

onde:

- T_i é a constante de tempo do integrador
- T_d é a constante de tempo do derivador

Note-se que o sistema ganha um pólo suplementar na origem (devido ao integrador) e é não causal (devido ao derivador).

Controladores PID: exemplo

Considere-se o sistema:

$$G = \frac{1}{s+1}$$

para o qual a realimentação proporcional tem um erro estático

$$G_p = \frac{k_p}{s + k_p + 1} \xrightarrow{s \rightarrow 0} \frac{k_p}{k_p + 1} \neq 1$$

A inclusão de um termo integrativo permite anular o erro

$$G_{pi} = \frac{k_p s + k_i}{s(s+1) + k_p s + k_i} = \frac{k_p s + k_i}{s^2 + (1+k_p)s + k_i} \xrightarrow{s \rightarrow 0} 1$$

resulta num AF sistema de 2^a ordem cujos parâmetros devem ser ajustados em função dos critérios definidos...

Para a resolução em espaço de estados, um segundo estado integrativo é introduzido:

$$\begin{aligned} x_1 &= y \\ x_2 &= \int x_1 dt \end{aligned}$$

logo

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

A realimentação de todos os estados: $K = [k_1 \ k_2]$ fornece para o AF

$$\dot{x} = Ax + Bu = (A - BK)x + Bu_0 = \begin{bmatrix} -1 - k_1 & -k_2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x + Bu_0$$

O polinómio característico é então

$$\Delta = (s + 1 + k_1)s + k_2 = s^2 + (1 + k_1)s + k_2$$

Por identificação, verifica-se que:

$$\begin{aligned} k_1 &= k_p \\ k_2 &= k_i \end{aligned}$$

Para anular o erro estático num estado deve introduzir-se o estado integrador desse estado.

3.3 Realimentação de estado

3.3.1 Colocação de pólos

A colocação de pólos consiste em escolher a localização dos pólos para o AF e deduzir a realimentação necessária: **a solução é uma realimentação de todos os estados!**

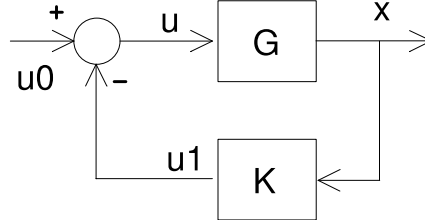


Figura 3.9: Realimentação de todos os estados

Exemplo: Considere-se o sistema:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 4 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

com pólos em $[-1, -3, -7]$ que se pretende colocar em $[-3, -5, -10]$

A realimentação $u = -Kx = -[k_1 \ k_2 \ k_3] x$

A matriz da dinâmica do AF é dada por $A_f = A - BK$; logo a equação característica é $|sI_3 - A + BK| = 0$

$$\begin{vmatrix} s+3 & -2 & 0 \\ k_1-4 & s+k_2+5 & k_3-1 \\ k_1 & k_2 & s+k_3+3 \end{vmatrix} = 0$$

ou seja

$$s^3 + (11 + k_2 + k_3)s^2 + (31 + 2k_1 + 7k_2 + 8k_3)s + 21 + 8k_1 + 12k_2 + 7k_3 = 0$$

a comparar com o desejado:

$$(s+3)(s+5)(s+10) = s^3 + 18s^2 + 95s + 150 = 0$$

De onde se deduz um sistema de 3 equações e 3 incógnitas:

$$\begin{cases} 18 = 11 + k_2 + k_3 \\ 95 = 31 + 2k_1 + 7k_2 + 8k_3 \\ 150 = 21 + 8k_1 + 12k_2 + 7k_3 \end{cases}$$

cuja solução é

$$K = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 20 & 16 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6.667 & 5.333 & 1.667 \end{bmatrix}$$

No Matlab a resolução utiliza a função *place*:

```
>> p=[-3 -5 -10];
>> place(a,b,p)
place: ndigits= 16
ans =
6.6667 5.3333 1.6667
```

3.3.2 Seguimento de modelo

Uma variante da colocação dos pólos corresponde a uma saída em seguimento de modelo:

- deseja-se seguir o modelo cuja saída y_m tem a dinâmica

$$\dot{y}_m = Ly_m$$

- com o sistema em espaço de estados

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

Assumindo uma realimentação de todos os estados: $u = -Kx$, a dinâmica da saída do AF é:

$$\dot{y} = CAx + CBu = (CA - CBK)x$$

a comparar com a dinâmica desejada: $\dot{y} = Ly = LCx$

Logo, pode deduzir-se

$$LC = CA - CBK$$

Se existir, a solução é então:

$$K = (CB)^+ (CA - LC)$$

onde $(CB)^+$ é a inversa ou pseudoinversa de CB .

Exemplo: deseja-se obter uma saída que responda como um sistema de 1^a ordem com constante de tempo de 1s para o sistema:

$$G = \frac{-s + 0.1}{s^2 + 0.14s + 0.01}$$

Note-se que é um sistema com um zero de fase não mínima em 0.1(rad/s)!

O modelo é

$$G_m = \frac{k}{s + 1}$$

ou, no domínio do tempo

$$\dot{y}_m = -y_m$$

ou seja

$$L = -1$$

A resolução pode ser obtida no no Matlab.

```

[a,b,c,d]=tf2ss([0 -1 0.1],[1 0.14 0.01]);
L=-1;
c*b
ans= -1
k=-(c*a-L*c)
k=
0.7600 -0.1100
eig(a-b*k)
ans=
-1.0000
0.1000

```

Esta solução resulta num cancelamento de pólo!... Na prática a solução não é utilizável.

3.3.3 Controlo modal

Uma segunda variante da colocação dos pólos mas mais ambiciosa consiste em escolher não só os valores próprios do anel fechado mas também os seus vectores próprios, tipicamente para obter desacoplamento entre modos.

A solução resulta novamente numa realimentação de todos os estados, eventualmente completada por um ganho inicial F para obter um AF com ganho unitário entre uma referência y_{ref} e a saída y .

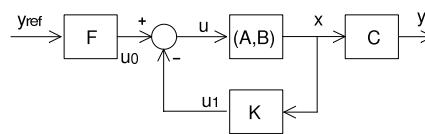


Figura 3.10: Controlo modal

A definição simultânea de valores e vectores próprios resulta num número de equações superior ao número de incógnitas e a solução obtida pelos mínimos quadrados corresponde ao melhor compromisso.

Consideremos um sistema de ordem n em espaço de estados:

$$\dot{x} = ax + Bu$$

$$y = Cx$$

para o qual desejamos um conjunto de n pares de valores e vectores próprios: (λ_i, v_i) .

Como escolher o ganho K da realimentação de estado: $u = -Kx$?

A partir do enunciado do problema, deduzem-se n equações:

$$(A - BK)v_i = \lambda_i v_i$$

com as quais se deve encontrar o ganho K .

Numa formulação alternativa, considerando que os vectores próprios são aproximados: $y_i \simeq v_i$ e introduzindo a entrada $z_i \simeq K v_i$, obtém-se:

$$\begin{aligned} (\lambda_i I - A) y_i + B z_i &= 0 \\ \Gamma y_i &= \Gamma v_i \end{aligned}$$

onde Γ é a matriz de saída expressando os constrangimentos efectivos na definição dos vectores próprios (deixando algum estado como grau de liberdade na definição dos vectores próprios).

Constrói-se a equação matricial:

$$\begin{bmatrix} \lambda_i I - A & B \\ \Gamma & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_i \\ z_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \Gamma v_i \end{bmatrix}$$

cuja solução utilizando a pseudoinversa à esquerda: $X^+ = (X^T X)^{-1} X^T$

$$\begin{bmatrix} y_i \\ z_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_i I - A & B \\ \Gamma & 0 \end{bmatrix}^+ \begin{bmatrix} 0 \\ \Gamma v_i \end{bmatrix}$$

contém os vectores próprios realizáveis y_i e a entrada associada z_i .

O ganho de realimentação é obtido com a pseudoinversa à direita

$$X^{-d} = X^T (X X^T)^{-1} = (X^T)^{+T}$$

a partir das matrizes juntando as soluções para os diversos valores próprios:

$$K = \begin{bmatrix} z_1 & z_2 & \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots \end{bmatrix}^{-d}$$

O ganho estático do anel fechado para uma entrada estática u_e é facilmente calculado a partir da dinâmica do anel fechado:

$$\dot{x} = (A - BK) x + B u_e$$

levando a $x_e = -(A - BK)^{-1} B u_e$ e logo a saída é

$$y_e = -C (A - BK)^{-1} B u_e = G u_e$$

Basta inverter este ganho estático $F = G^{-1}$ para obter uma resposta unitária entre a saída e a sua referência.

A título de exemplo, considere-se o modelo lateral do Navion, para o qual se deseja um desacoplamento entre rolamento Holandês e rolamento, com valores próprios:

- rolamento Holandês (RH): $\lambda = 1.5(-1 \pm i)$, com vectores em (β, r)
- rolamento (e espiral): $\lambda = -2 \pm 1.5i$, com vectores em (p, ϕ)

e considerando uma saída $y = [\beta, \phi]^T$.

O resultado é apresentado na figura seguinte com a resposta a uma entrada com:

1. um degrau de 20° para $t = 1s$, no ângulo de rolamento
2. um degrau de 10° para $t = 4s$, no ângulo de derrapagem

Verifica-se que seguimento e desacoplamento são ambos excelentes.

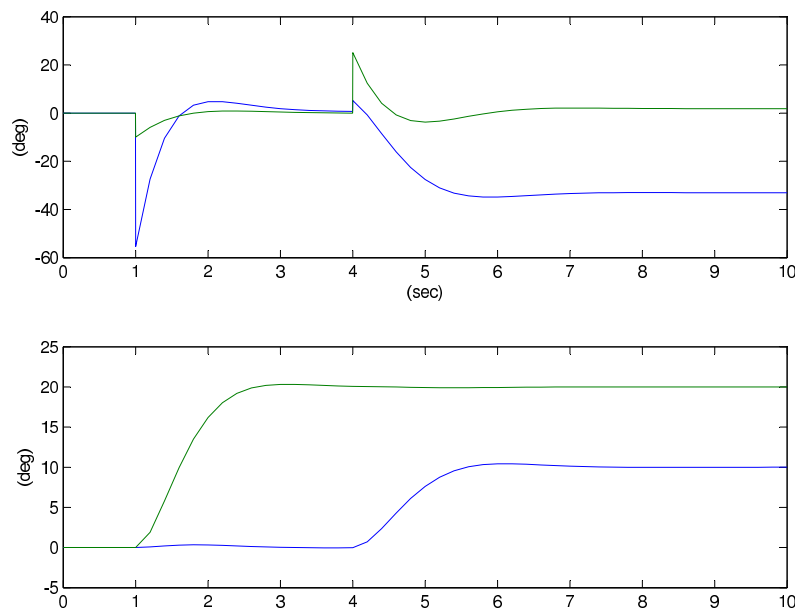


Figura 3.11: Resposta em controlo modal: deflexões das entradas no topo (ailerons em azul, leme em verde), e saída em baixo (derrapagem em azul, rolamento em verde).

Uma dificuldade associada ao controlo modal, similar ao caso da mais simples colocação de pólos, resulta da necessidade de escolher valores e vectores próprios “aceitáveis” para o sistema em causa, o que supõe uma boa compreensão do problema.

3.3.4 Comparação das realimentações

As ferramentas de projecto apresentadas nas secções anteriores tentam todas *fixar o comportamento do anel fechado* pela definição de uma realimentação. A forma de definir o comportamento desejado é gradualmente mais ambiciosa e o projecto é mais exigente.

A tabela a seguir faz um resumo comparativo das soluções de projecto vistas nesta secção, em termos de critérios de desempenho e do tipo de realimentação resultante.

	pólos	resp. estática	transiente	SISO/MIMO	realimentação
LGR	✓		—	SISO	saída
PID	✓	✓	✓	SISO +	saída+1
colocação	✓		—	MIMO	estado
seguimento	✓		✓	MIMO	estado
cont. modal	✓	✓	✓	MIMO	estado

3.4 Controlo Moderno

Em contraste com o **controlo clássico** que:

- está baseado na FT, i.e. no domínio da frequência (com a variável de Laplace);
- está virado preferencialmente para sistemas univariáveis;

- lida com sistemas multivariáveis por separação de modos, com anéis interno/externo;
- com muitas variáveis ou com acoplamentos, resulta num projecto do controlador mais difícil;

o controlo moderno, ou melhor o **controlo óptimo**:

- considera o sistema no domínio do tempo (em espaço de estados);
- está preparado para controlar sistemas com vários estados;
- consegue lidar com sistemas multivariáveis globalmente;
- ao contrário das variantes de realimentação de estado na secção anterior, não define os pólos do anel fechado e estes são obtidos como consequência da optimização.

Controlabilidade/Observabilidade

Num primeiro passo, o controlo moderno permite uma abordagem sistematizada para a análise e síntese de controladores:

- o sistema é controlável se o vector de controlo permite atingir qualquer valor do vector dos estados num tempo finito;
- o sistema é observável se o vector de saída permite determinar o valor do seu vector de estado com um número finito de observações.

Estas duas noções são definidas rigorosamente em termos matemáticos para um sistema expresso em espaço de estados, com n estados, m entradas e p saídas:

- o sistema é completamente controlável se e só se a matriz de controlabilidade

$$W = [B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B]$$

for de característica n ;

- o sistema é completamente observável se e só se a matriz de observabilidade

$$V = [C^T \quad A^T C^T \quad (A^T)^2 C^T \quad \dots \quad (A^T)^{n-1} C^T]$$

for de característica n .

Note-se que:

1. A controlabilidade é uma condição suficiente para o anel fechado ser estabilizável.
2. Eventualmente nem todos os estados são controláveis/observáveis e só um subconjunto é.
3. Em termos de controlo clássico, as condições significam que não há cancelamento de pólos :
 - à entrada do sistema (controlabilidade) $F_c = (sI - A)^{-1} B$
 - à saída do sistema (observabilidade) $F_o = C (sI - A)^{-1}$

3.4.1 LQR

O controlo moderno é denominado controlo óptimo porque o controlador é obtido como solução de um processo de optimização:

- pretende-se minimizar uma função de custo: $J = \int L(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) dt$
- com a restrição imposta pela dinâmica do sistema: $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u}$

A função de custo é tipicamente uma energia associada ao (erro no) estado e à (ao erro na) entrada.

Como exemplo, para um sistema de primeira ordem, o custo pode ser uma simples ponderação entre estado e entrada:

$$J = \int_{t_1}^{t_2} \left((x - x_{ref})^2 + \lambda u^2 \right) dt$$

com $\lambda > 0$.

Minimizar J corresponde a utilizar o “melhor” valor de u para reduzir o erro no estado x .

O **regulador quadrático linear (LQR)** corresponde a uma função de custo:

$$J = \frac{1}{2} \int_0^\infty (\mathbf{x}^T Q \mathbf{x} + \mathbf{u}^T R \mathbf{u}) dt$$

onde $Q \geq 0$ e $R > 0$ são matrizes de ponderação de estados e entradas.

A minimização fornece uma realimentação óptima:

$$\mathbf{u}^o = -K\mathbf{x}$$

que é **uma realimentação de estado** com uma matriz de ganho K constante.

A resolução do problema de minimização resulta em procurar a matriz simétrica P solução de uma **equação algébrica de Riccati** (aqui estacionária):

$$A^T P + P A - P B R^{-1} B^T P + Q = 0$$

resultando no ganho de realimentação

$$K = R^{-1} B^T P$$

O projecto do regulador quadrático linear tem assim os seguintes passos:

1. definir o sistema (A, B)

2. definir a função de custo, ou seja escolher as matrizes (Q, R) e então:
3. obtém-se o controlador: $K = \text{lqr}(A, B, Q, R)$
4. para uma realimentação óptima: $\mathbf{u}^\circ = -K\mathbf{x}$

Exercício

Considere o sistema com a seguinte dinâmica:

$$a = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- a) Verifique a sua controlabilidade com matriz de entrada $b_1^T = [1, 0]$ ou $b_2^T = [0, 1]$.
- b) Verifique a sua observabilidade com matriz de saída $c_1 = [1, 0]$ ou $c_2 = [0, 1]$.
- c) Com b_1 e c_1 , o LQR definido com $J = \int (x^2 + u^2) dt$ fornece um ganho de realimentação $k = [0.414, 0]$: justifique a definição da função de custo e determine a dinâmica e as características do sistema realimentado.

Exemplo com LQR

```
% BRAVO-4 longitudinal model example
[a b] =
-0.0070  0.0120 -14.6608 -9.7917  0
-0.1280 -0.5400  1.0000 -0.0025 -0.0360
 0.0653  0.9654 -0.9900  0.3054 -12.6116
 0  0  1.0000  0  0
damp(a);
Eigenvalue      Damping Freq. (rad/sec)
 0.8369         -1.0000 0.8369
-0.5536 + 0.7147i 0.6124 0.9041
-0.5536 - 0.7147i 0.6124 0.9041
-1.2666         1.0000 1.2666
```

Note-se que este movimento é instável! o período curto degenerou !!

Para o cálculo do controlador, aqui a escolha de Q, R é essencialmente arbitrária...

```
k=lqr(a,b,diag([1 10 50 1]),5)
k = 0.4508 -0.5023 -3.2993 -1.7899

damp(a-b*k)
Eigenvalue      Damping Freq. (rad/sec)
-0.6565 + 0.1923i 0.9597 0.6840
-0.6565 - 0.1923i 0.9597 0.6840
-2.0071          1.0000 2.0071
-39.8449         1.0000 39.8449
```

A resposta da velocidade a um degrau unitário no leme pode ser então obtida.

```
step(a-b*k,b,[1 0 0 0],0)
```

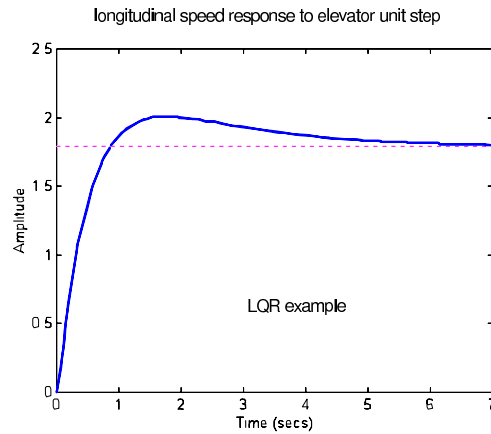


Figura 3.12: Resposta da velocidade a um degrau unitário no leme

3.4.2 Variantes do LQR

Podemos resumir o processo de síntese de controlador com o LQR:

- definição do sistema (A, B)
- definição do custo (Q, R) no estado: $J = \frac{1}{2} \int_0^\infty (\mathbf{x}^T Q \mathbf{x} + \mathbf{u}^T R \mathbf{u}) dt$
- a solução é a realimentação: $\mathbf{u}^\circ = -K \mathbf{x}$

A partir deste processo, vamos apresentar na sequência algumas dicas na implementação deste processo, algumas variantes e finalmente o estimador de estados:

1) Dicas:

- ajuda para a escolha do custo: método de Bryson
- inclusão de estados integrativos
- variáveis em servomecanismo

2) Variantes:

- LQRY: o custo é definido na saída: $J = \frac{1}{2} \int_0^\infty (\mathbf{y}^T Q \mathbf{y} + \mathbf{u}^T R \mathbf{u}) dt$
- seguimento de modelo: o custo é o erro de seguimento:

$$J = \frac{1}{2} \int_0^\infty \left((\dot{\mathbf{y}} - L \mathbf{y})^T Q (\dot{\mathbf{y}} - L \mathbf{y}) + \mathbf{u}^T R \mathbf{u} \right) dt$$

3) Se os estados não são todos medidos (e não só):

- observador/estimador de estados

Método de Bryson

Conhecido o sistema, a função de custo vai determinar as características do anel fechado e a *dificuldade* da síntese está na sua definição. Por forma a ajudar nesta escolha e reduzir o nível de arbitrário, o método de Bryson sugere uma definição para as matrizes de ponderação dos estados e entradas, respectivamente Q e R , como matrizes diagonais onde cada termo é o quadrado do inverso do máximo esperado para a variável durante a manobra:

$$Q = \text{diag}(Q_i) \quad \text{com } Q_i = \frac{1}{x_{i,max}^2}$$

$$R = \text{diag}(R_i) \quad \text{com } R_i = \frac{1}{u_{i,max}^2}$$

onde os valores máximos $u_{i,max}$ e $x_{i,max}$ são valores indicando os **extremos das perturbações** desejados para a variável u_i ou x_i para o AF durante uma “manobra normal” (não são os máximos absolutos).

O método de Bryson :

- facilita a escolha das matrizes Q, R
- fornecendo valores iniciais destas matrizes
- com compensação das unidades através do adimensionamento
- a síntese do controlador será depois muito rápida

Esta definição da função de custo, ainda deixa ao projectista alguma liberdade para um acerto fino do comportamento final do anel fechado mas corresponde a um bom compromisso inicial.

Realimentação com variáveis integrativas

Exactamente como o controlo PI do controlo clássico visto anteriormente, em controlo óptimo é possível introduzir termos integrativos por forma a não só estabilizar estados ou saídas mas também para forçar a sua anulação em entradas constantes.

Quando se pretende anular uma variável x_i em condições estacionárias, pode introduzir-se um estado suplementar com essa variável integrada: $x_{n+1} = \int_0^t x_i dt$ ou seja com uma dinâmica:

$$\dot{x}_{n+1} = x_i$$

Exemplo: considere-se um integrador puro: $G = \frac{1}{s}$ ou $\dot{x} = u$

Para este sistema: ($a = 0; b = 1; c = 1; d = 0$) considera-se o custo: $J = \int (x^2 + u^2) dt$ que resulta num ganho $k = 1$.

O Anel Fechado é então:

$$\dot{x} = (a - bk)x + bu = -x + u$$

Em estacionário temos: $\dot{x} = 0 = -x^\infty + u$ ou seja $x^\infty = u \neq 0$

Para anular a saída, introduzimos um 2º estado integrativo:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u \\ \dot{x}_2 = x_1 \end{cases}$$

e corrigimos o custo: $J = \int (x_1^2 + x_2^2 + u^2) dt$

Resulta no ganho $k = \begin{bmatrix} 1.73 & 1 \end{bmatrix}$ e agora o Anel Fechado é

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -1.73x_1 - x_2 + u \\ \dot{x}_2 = x_1 \end{cases}$$

indicando um sistema de 2ª ordem com amortecimento de 0.86 e valor final nulo $x_1^\infty = 0$.

Realimentação com variáveis em servomecanismo

Tal como para toda realimentação de todos os estados, a matriz de realimentação K pode ser colocada tanto no anel de realimentação, por forma a estabilizar o sistema, como no anel directo, para controlar (não anular) o erro entre o valor dos estados e a referência, expressa em termos de vector de estados de referência.

Por exemplo, consideremos um exemplo onde se deseja o controlo do longitudinal da velocidade e do ângulo de picada:

- o estado é $\mathbf{x} = [u, w, q, \theta]^T$
- a saída é $\mathbf{y} = [u, \theta]^T$

Define-se o estado complementar: $\mathbf{x}_c = [w, q]^T$

A partir da realimentação

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^1 - K\mathbf{x} = \mathbf{u}^1 - \begin{bmatrix} K_u & K_w & K_q & K_\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ w \\ q \\ \theta \end{bmatrix}$$

ao introduzir a realimentação do erro, obtém-se:

$$\mathbf{u} = - \begin{bmatrix} K_u & K_\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u - u_{ref} \\ \theta - \theta_{ref} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} K_w & K_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ q \end{bmatrix}$$

ou seja:

$$\mathbf{u} = K_y (\mathbf{y}_{ref} - \mathbf{y}) - K_c \mathbf{x}_c$$

Esta realimentação corresponde ao diagrama de blocos da figura seguinte.

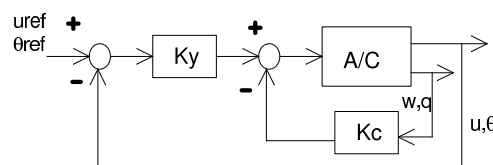


Figura 3.13: Realimentação com variáveis em servomecanismo

3.4.3 LQRY

Como variante de projecto do controlador óptimo, a função de custo pode ser expressa em termos de estabilização de saída e entrada no lugar do estado:

$$J = \frac{1}{2} \int_0^\infty (\mathbf{y}^T Q \mathbf{y} + \mathbf{u}^T R \mathbf{u}) dt$$

resultando ainda na realimentação: $\mathbf{u}^o = -K\mathbf{x}$

Considerando a equação de saída $\mathbf{y} = C\mathbf{x} + D\mathbf{u}$, a integranda fica

$$L = (C\mathbf{x} + D\mathbf{u})^T Q (C\mathbf{x} + D\mathbf{u}) + \mathbf{u}^T R \mathbf{u}$$

ou

$$L = \mathbf{x}^T C^T Q C \mathbf{x} + 2\mathbf{x}^T C^T Q D \mathbf{u} + \mathbf{u}^T (R + D^T Q D) \mathbf{u}$$

que podemos por na forma

$$L = \mathbf{x}^T \hat{Q} \mathbf{x} + \hat{\mathbf{u}}^T \hat{R} \hat{\mathbf{u}}$$

Se definirmos:
$$\begin{cases} \hat{Q} = C^T Q C - C^T Q D R^{-1} D^T Q C \\ \hat{R} = R + D^T Q D \\ \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{u} + \hat{R}^{-1} D^T Q C \mathbf{x} \end{cases}$$

a realimentação será

$$\hat{\mathbf{u}}^o = -\hat{R}^{-1} B^T \hat{P} \mathbf{x}$$

ou seja

$$\mathbf{u}^o = \hat{\mathbf{u}}^o - \hat{R}^{-1} D^T Q C \mathbf{x} = -\hat{R}^{-1} (B^T \hat{P} + D^T Q C) \mathbf{x}$$

3.4.4 Seguimento de modelo com LQR

O seguimento de modelo pode ser visto como a regulação da dinâmica da saída: considere-se uma saída com dinâmica desejada $\dot{\mathbf{y}} = L\mathbf{y}$

Define-se a função de custo

$$J = \frac{1}{2} \int_0^\infty ((\dot{\mathbf{y}} - L\mathbf{y})^T Q (\dot{\mathbf{y}} - L\mathbf{y}) + \mathbf{u}^T R \mathbf{u}) dt$$

Esta função corresponde a considerar uma nova saída:

$$\mathbf{Y} = \dot{\mathbf{y}} - L\mathbf{y}$$

ou, substituindo

$$\mathbf{Y} = C\mathbf{A}\mathbf{x} + C\mathbf{B}\mathbf{u} - LC\mathbf{x}$$

e logo

$$\mathbf{Y} = (CA - LC)\mathbf{x} + C\mathbf{B}\mathbf{u}$$

que podemos por na forma

$$\mathbf{Y} = \tilde{C}\mathbf{x} + \tilde{D}\mathbf{u}$$

mostrando que o problema recai assim no anterior LQRY.

3.4.5 Estimação de estados

Considerando que:

- os estados de um sistema não estão todos disponíveis
- as medições não são perfeitas

a utilização das soluções baseadas na realimentação de todos estados supõe primeiro a reconstrução dos estados: corresponde à noção de observadores ou estimadores de estados.

O projecto de um estimador baseia-se no modelo do sistema e eventualmente das perturbações e do ruído, que neste caso não é possível desprezar. A qualidade do estimador depende da adequação e da qualidade da modelação.

O estimador é um sistema com dinâmica, normalmente da mesma ordem que o próprio sistema.

Do ponto de vista matemático, considere-se um sistema LTI estocástico:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u} + E\mathbf{d} \\ \mathbf{y} = C\mathbf{x} + D\mathbf{u} + F\mathbf{n} \end{cases}$$

onde aparecem os ruídos (*noises*):

- ruído de processo \mathbf{d} ou perturbações (*disturbances*)
- ruído de medição \mathbf{n}

Pretende-se estimar o valor dos estados a partir da saída e, para tal, supõe-se que pode ser construído um estimador do estado \mathbf{x} com a mesma dinâmica mas controlado pelo erro entre a saída estimada e a saída \mathbf{y} real: o estimador define um sistema onde o estado estimado $\hat{\mathbf{x}}$ vai tentar acompanhar a evolução do estado real, com uma dinâmica:

$$\begin{cases} \dot{\hat{\mathbf{x}}} = A\hat{\mathbf{x}} + B\mathbf{u} + L(\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}) \\ \hat{\mathbf{y}} = C\hat{\mathbf{x}} + D\mathbf{u} \end{cases}$$

onde o erro na saída é realimentado para corrigir a evolução do estado.

O ganho de realimentação L deve ser determinado para que o erro da estimação $\mathbf{e} = \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}$ seja regulado (a zero).

A dinâmica do erro é:

$$\dot{\mathbf{e}} = (\mathbf{A} - \mathbf{LC})\mathbf{e} + \mathbf{Ed} + \mathbf{LFn}$$

Esta dinâmica pode comparar-se com o anel fechado do LQR:

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{BK})\mathbf{x} + \mathbf{Bu}_1$$

onde a incógnita é a matriz K .

Introduz-se o sistema dual:

$$\dot{\mathbf{X}}_1 = \mathbf{A}^T \mathbf{X}_1 + \mathbf{C}^T \mathbf{U}_1$$

e o processo de LQR fornece o ganho

$$L = K_1^T$$

por minimização do custo definido a partir das covariâncias dos ruídos do sistema: Q covariância das perturbações e R covariância das medições.

O estimador óptimo descrito para o domínio do contínuo é denominado filtro de Kalman-Bucy, ou filtro de Kalman contínuo estacionário. A matriz L é o ganho de Kalman.

A partir do estado estimado é possível fechar o anel para controlo:

$$\mathbf{u}^o = -\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}$$

A síntese de estimador e controlador podem efectuar-se independentemente.

O controlo óptimo com estimador óptimo é por vezes denominado **Linear Quadratic Gaussian (LQG)**

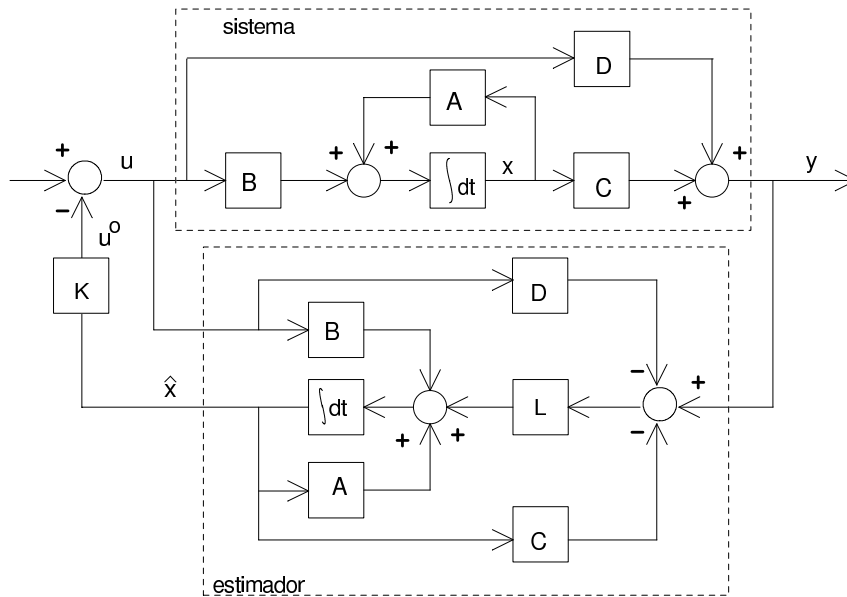


Figura 3.14: diagrama de blocos do lqg

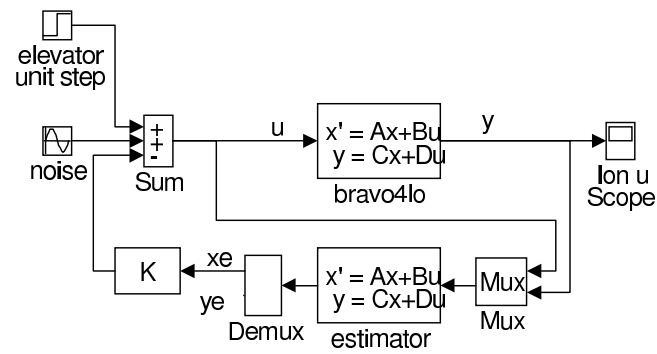


Figura 3.15: exemplo de lqg no SIMULINK

Estimação de estados: exemplo

```
% BRAVO-4 longitudinal model example
%lqg example with lon speed output

c=[1 0 0 0];d=0;

g0=eye(4);
q0=.01*eye(4); r0=.01;

L=lqe(a,g0,c,q0,r0);

L'
L'= 6.3789 -0.9982 -0.8986 -0.6870

[ae,be,ce,de]=estim(a,b,c,d,L,1,1);

%see simulation with SIMULINK
```

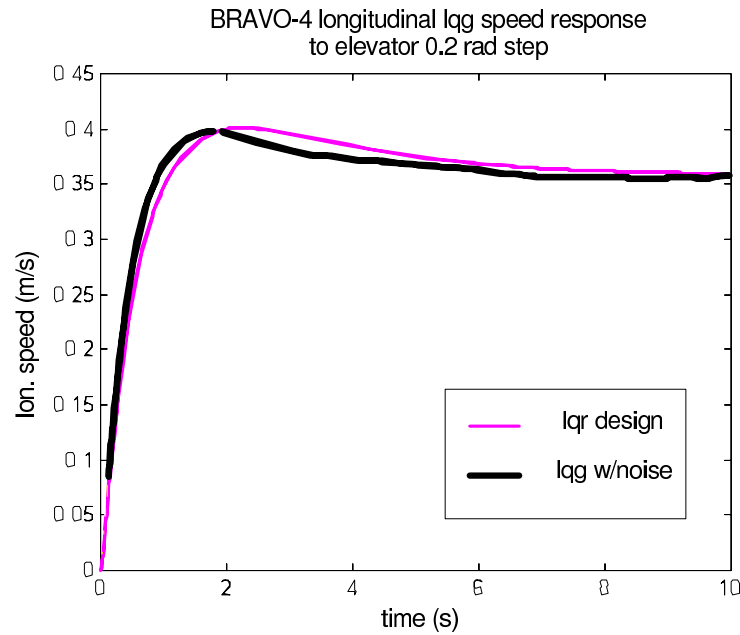


Figura 3.16: exemplo de lqg no SIMULINK

Note-se que, do ponto de vista da síntese do controlador e dos critérios a serem utilizados, nomeadamente na escolha das matrizes de ponderação, ainda resta algum grau de liberdade, arbitrariedade, intuição ou experiência...

3.5 Controlo Digital

Os controladores para controlo de voo beneficiam dos progressos da electrónica digital, processadores digitais de sinal, sensores e actuadores, permitindo os sistemas "*fly by wire*" ou "*fly by light*".

A concepção inicial é realizada em contínuo, o controlo efectuado por sistemas computadorizados é efectuado em discreto.

Os controladores devem ser transpostos para o domínio discreto.

A implementação de um sistema de controlo digital obedece ao diagrama de blocos seguinte.

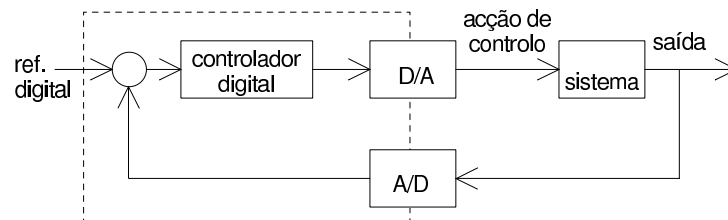


Figura 3.17: Implementação de um controlador digital

Entre as vantagens dos sistemas digitais, citemos:

- potência e velocidade de cálculo dos processadores e conversores

- maior precisão e imunidade ao ruído
- implementação possível em software, com facilidade acrescida de manutenção e desenvolvimento

A digitalização do controlo implica uma dupla discretização:

1. no domínio do tempo, o que corresponde à amostragem dos sinais ou saídas
2. nos domínios das variáveis, onde cada saída é quantificada num número finito de intervalos discretos, com resolução finita (1 em 1024 para 10 bits, 1 em 65536 para 16 bits).

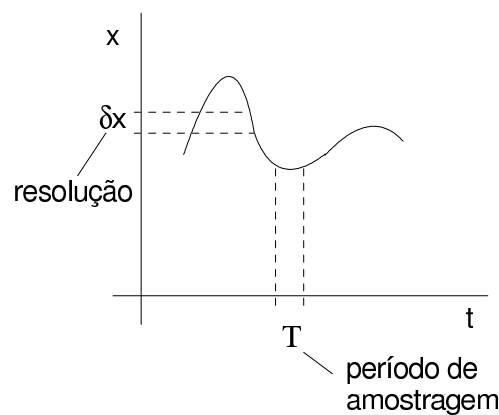


Figura 3.18: Amostragem e digitalização

Amostragem

Para a escolha da frequência de amostragem f_s :

- segundo o critério de Nyquist: $f_s > 2f_{max}$
- na prática deveríamos ter uma década em relação à largura de banda: $f_s > 10f_{BW}$

Os pilotos automáticos modernos têm amostragens superiores a 25Hz.

Note-se que os próprios sensores são cada vez mais discretos: o GPS é um exemplo onde a informação é usualmente fornecida a 1Hz.

Controlador discreto

Para a síntese do controlador discreto dois métodos são possíveis:

- o método de emulação consiste em aproximar o controlador contínuo obtido numa síntese contínua, assumindo que a frequência é suficiente

- o método directo (exacto) consiste em discretizar o modelo do sistema e proceder a uma síntese no domínio discreto

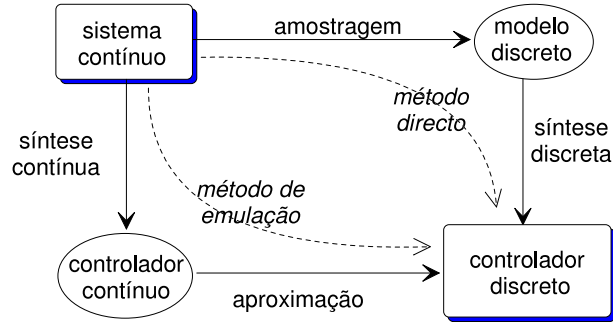


Figura 3.19: Do modelo contínuo até ao controlador discreto

Em controlo clássico, o método directo utiliza a transformada em z

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k) z^{-k}$$

e a função de transferência discreta

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)}$$

Em controlo moderno, o método directo utiliza o espaço de estados discretos

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \Phi x_k + \Delta u_k \\ y_k &= C x_k + D u_k \end{aligned}$$

Para o caso de uma amostragem com retentor (*Zero Order Hold -ZOH*), as matrizes do modelo discreto são obtidas com a função exponencial:

$$\begin{bmatrix} \Phi & \Delta \\ 0 & I \end{bmatrix} = \exp \left(\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{bmatrix} T \right)$$

Existem no Matlab as funções para a passagem entre contínuo e discreto e para a síntese dos controladores em contínuo ou em discreto.

Capítulo 4

Pilotos automáticos

4.1 Introdução

Existem tradicionalmente três níveis de automatização:

1. sistema de aumento de estabilidade (*Stability Augmentation System* -SAS) ou sistema de aumento de controlo (*Control Augmentation System* -CAS): é uma ajuda para a pilotagem manual, através da correcção da dinâmica do avião
2. piloto automático (P/A): o piloto define referências e o resto é assumido pelo controlador
3. guiamento e sistema de gestão de voo: a trajectória é planeada previamente e o sistema controla a trajectória (denominado guiamento) e o seguimento da rota, nomeadamente definida como uma sucessão de pontos de passagem.

Muitos aviões modernos, sobretudo militares ou com um elevado grau de manobrabilidade, são naturalmente instáveis e requerem um SAS ou CAS para serem pilotáveis.

O SAS também é uma forma de normalizar a pilotagem, corrigindo as características dinâmicas do avião.

Só será considerado o movimento do avião, sendo desprezadas as dinâmicas dos sensores e actuadores (assumidos assim como componentes ideais). Esta aproximação corresponde ao primeiro passo e só será abandonada em simulações mais pormenorizadas, começando por uma modelação de primeira ordem.

4.2 Sistemas de aumento de estabilidade

4.2.1 Longitudinal

No movimento longitudinal, o período curto requer por vezes um **aumento do seu** factor de amortecimento

A solução mais usual é a realimentação da razão de picada:

$$\delta_E = k_q q$$

Alternativas são as realimentações :

- ângulo de ataque: $\delta_E = k_\alpha \alpha$
- factor de carga: $\delta_E = k_n n_z$

Período curto com LGR -root locus

Uma primeira forma de dimensionar a realimentação consiste em utilizar a FT SISO do elevador para a razão de picada (por exemplo) e deduzir então do *root locus* o valor eleito para o ganho de realimentação.

```
%exemplo ALPHA-1 com LGR
Eigenvalue Damping Freq. (rad/sec)
-0.0092 + 0.1874i 0.0489 0.1876
-0.0092 - 0.1874i 0.0489 0.1876
-0.8787 + 1.4240i 0.5251 1.6733
-0.8787 - 1.4240i 0.5251 1.6733
```

Como primeiro exemplo, procede-se a partir da aproximação do período curto:

```
damp(asp) Eigenvalue Damping Freq. (rad/sec)
-0.8796 + 1.4184i 0.5270 1.6690
-0.8796 - 1.4184i 0.5270 1.6690
```

Note-se que a aproximação está muito próxima !

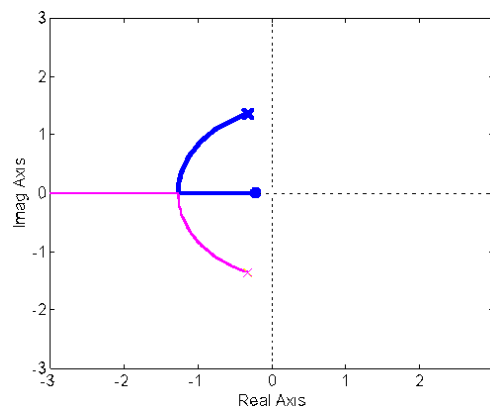


Figura 4.1: LGR de realimentação da razão de picada

```
Select a point in the graphics window
escolhendo um amortecimento de 0.7 (45 deg)
selected_point =
-1.3435 + 1.3570i
ans = 0.4145 > é o ganho!
damp(asp+bspe*[0 .41])
Eigenvalue Damping Freq. (rad/sec)
-1.3396 + 1.3623i 0.7011 1.9106
-1.3396 - 1.3623i 0.7011 1.9106
% no modelo completo
damp(a+b(:,1)*[0 0 .41 0])
Eigenvalue Damping Freq. (rad/sec)
```

```
-0.0098 + 0.1636i 0.0596 0.1639
-0.0098 - 0.1636i 0.0596 0.1639
-1.3382 + 1.3699i 0.6988 1.9150
-1.3382 - 1.3699i 0.6988 1.9150
```

Comentários:

- o dimensionamento com a aproximação dá o período curto de um amortecimento próximo do desejado
- a frequência é muito pouco alterada por esta realimentação

Período curto com colocação de pólos

As realimentações da razão de picada ou alternativas são as mais usuais. Por razões didáticas vamos considerar outras opções.

Uma segunda solução de realimentação para correcção da dinâmica será por colocação de pólos:

- é eleita uma localização ideal para ambos os modos
- a escolha não pode ser completamente arbitrária, deve manter-se a separação entre os dois modos e alterar a posição dos pólos o menos possível para não ser necessária demasiada energia para o controlo do avião.

```
%exemplo ALPHA-1 pole placement
damp(a)
Eigenvalue Damping Freq. (rad/sec)
-0.0092 + 0.1874i 0.0489 0.1876
-0.0092 - 0.1874i 0.0489 0.1876
-0.8787 + 1.4240i 0.5251 1.6733
-0.8787 - 1.4240i 0.5251 1.6733
wsp=2.1;wph=.17;
s1=(1+i)/1.4; s2=(1-i)/1.4; % 0.7 damping
k=place(a,be,[-wsp*s1 -wsp*s2 -wph*s1 -wph*s2])
place: ndigits= 17
k = 0.0001 0.0005 -0.6549 -0.4758
damp(a-be*[0 0 -.65 -.47]) % valores aproximados
Eigenvalue Damping Freq. (rad/sec)
-0.1181 + 0.1232i 0.6922 0.1707
-0.1181 - 0.1232i 0.6922 0.1707
-1.4991 + 1.5268i 0.7006 2.1397
-1.4991 - 1.5268i 0.7006 2.1397
```

Pode visualizar-se a resposta da razão de picada

$$y = q$$

em AF com: $u = u_1 - Kx$ no Matlab.

```
step(a-be*[0 0 -.65 -.47],b(:,1),[0 0 1 0],0)
```

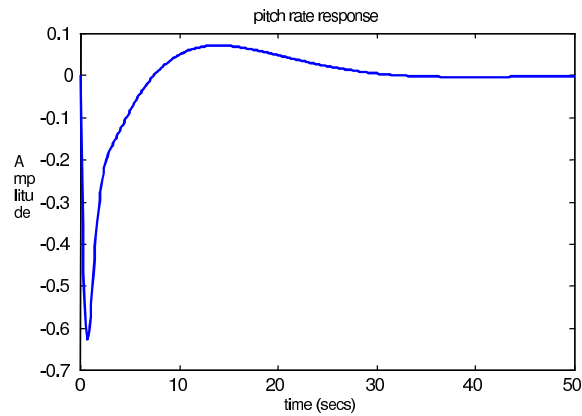


Figura 4.2: Resposta da razão de picada com colocação de pólos

O pedido ao leme na manobra corresponde à saída:

$$y = u_1 - Kx$$

```
step(a-be*[0 0 -.65 -.47],be,-[0 0 -.65 -.47],1)
```

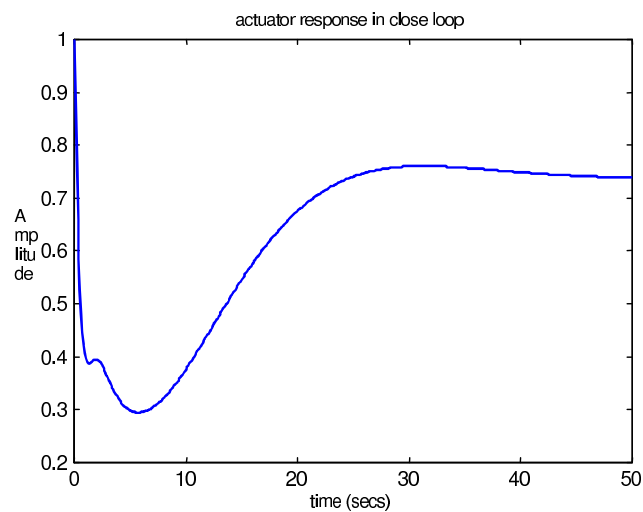


Figura 4.3: Pedido ao actuador com colocação de pólos

Note-se que, após um impulso inicial correspondendo ao degrau do pedido, o leme é corrigido pela realimentação para um valor estacionário reduzido a pouco mais de 0.7.

Período curto com LQR

Em alternativa à colocação de pólos, o controlo óptimo:

- é uma também realimentação de todos os estados

- mas menos arbitrária que a colocação
- e que permite ponderar as estabilizações dos estados e do controlo

Considere-se novamente o mesmo exemplo:

```
%exemplo ALPHA-1 lqr
q=diag([.03 .1 4 2]); r=50;
k=lqr2(a,be,q,r)
k = 0.0165 -0.0097 -0.9279 -0.9231

damp(a-be*k)
Eigenvalue Damping Freq. (rad/sec)
-0.1525 + 0.2223i 0.5656 0.2696
-0.1525 - 0.2223i 0.5656 0.2696
-1.8071 + 2.0739i 0.6569 2.7508
-1.8071 - 2.0739i 0.6569 2.7508
```

As respostas da razão de picada e da actuação do leme são obtidas como anteriormente.

```
step(a-be*k,be,[0 0 1 0],0)
step(a-be*k,be,-k,1)
```

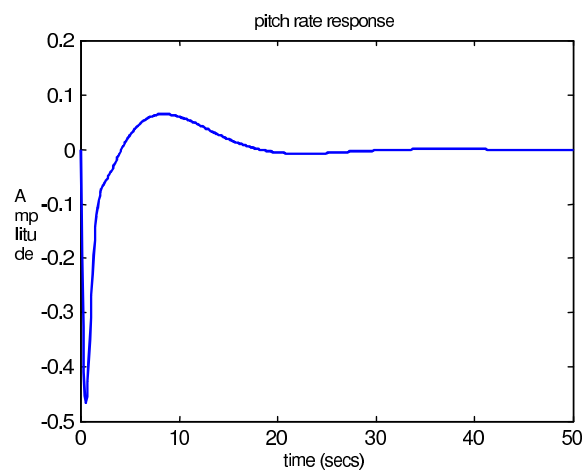


Figura 4.4: Resposta da razão de picada com LQR

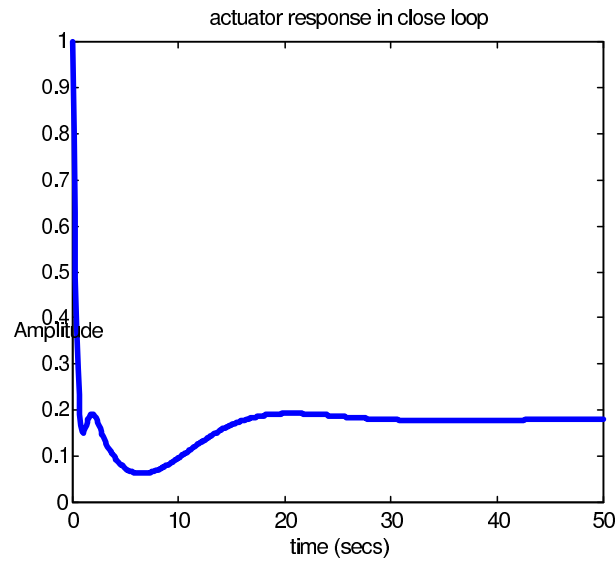


Figura 4.5: Actuação com LQR

No caso de um avião com estrutura da dinâmica diferente, ou instável em algumas condições de voo, o controlador deve permitir estabilizar o avião. Com o exemplo do BRAVO, cujo modelo 2 é estável e os outros são instáveis, o lqr é uma boa solução.

```
%BRAVO-1 lon example
[a b]
-0.0170 0.0260 -8.3078 -9.7917 0
-0.0011 -1.0200 1.0000 -0.0044 -0.0005
0.0007 2.0732 -1.1900 0.0029 -11.5597
0 0 1.0000 0 0
damp(a)
Eigenvalue Damping Freq. (rad/sec)
0.3701 -1.0000 0.3701
-0.0249 + 0.1207i 0.2022 0.1232
-0.0249 - 0.1207i 0.2022 0.1232
-2.5472 1.0000 2.5472
```

Note-se:

- é um modelo não convencional:
- tem um par de pólos conjugados
- e dois pólos simples, **um deles instável**

A dinâmica do anel fechado é dada por:

```
k = 0.4421 -0.2443 -3.2421 -2.8948

damp(a-b*k)
Eigenvalue Damping Freq. (rad/sec)
-0.9930 + 0.5344i 0.8806 1.1276
-0.9930 - 0.5344i 0.8806 1.1276
-1.1093 1.0000 1.1093
-36.6092 1.0000 36.6092
```

As respostas da razão de picada e actuação são dadas na figura seguinte.

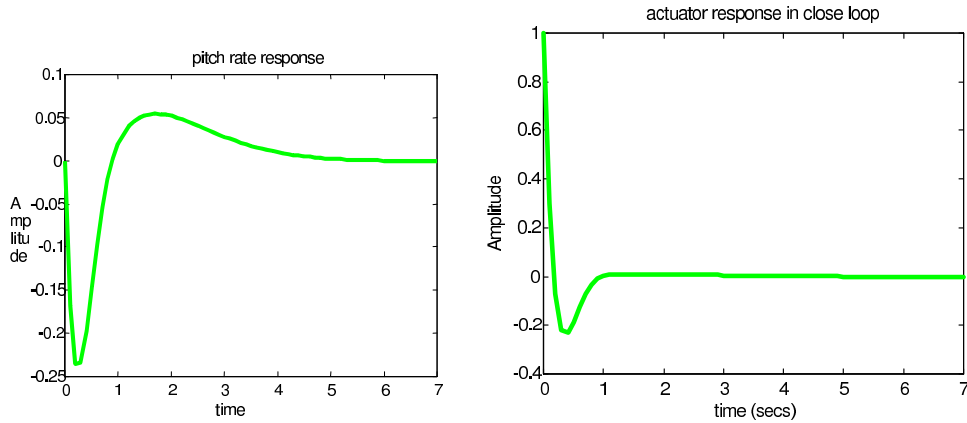


Figura 4.6: Respostas da razão de picada e actuação com BRAVO1

As respostas são similares aos resultados obtidos como o modelo anterior.

No entanto a realimentação resultante necessita de todos os estados e, embora controle a amplitude, o sistema é muito mais rápido e autoriza ou pede frequências elevadas possivelmente não aceitáveis pelos actuadores.

4.2.2 Lateral

No caso do movimento lateral, três tipos de sistemas de SAS são utilizados, amortecendo os três modos laterais:

- o rolamento holandês
- o rolamento
- o modo espiral

Uma diferença notável com o movimento longitudinal é:

- a grande interacção entre as duas superfícies de controlo (ailerons e leme de direcção)
- enquanto o movimento longitudinal era controlado pelo único leme de profundidade

Rolamento Holandês

É usual os aviões apresentarem um rolamento holandês com amortecimento insuficiente, demonstrando assim uma oscilação direcciona, com algum acoplamento no rolamento.

O SAE do modo mais frequente corresponde a aumentar o coeficiente do amortecimento através da realimentação da razão de guinada.

Uma primeira solução recorre à aproximação de 2^a ordem do movimento direcciona:

$$\begin{bmatrix} \dot{\beta} \\ \dot{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{\beta} & -1 \\ N'_{\beta} & N'_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta \\ r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Y_{\delta_A} & Y_{\delta_R} \\ N'_{\delta_A} & N'_{\delta_R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_A \\ \delta_R \end{bmatrix}$$

Mas também se pode utilizar directamente o modelo de 4^a ordem.

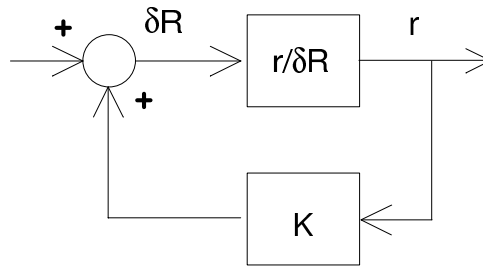


Figura 4.7: SAE do RH yaw damper

```
%CHARLIE-1 lat example
deg=pi/180; g=9.81;
aa0=8.5*deg; u0=67; gg0=0; w0=aa0*u0; tt0=aa0+gg0;
yv=-.089; ybbdr=.015;
lbb=-1.33; lp=-.98; lr=.33; lda=0.23; ldr=0.06;
nbb=.17; np=-.17; nr=-.217; nda=.026; ndr=-.15;
a=[yv aa0 -1 g*cos(tt0)/u0;lbb lp lr 0;nbb np nr 0;0 1 tan(tt0) 0]; b=[0 ybbdr; lda ldr;nda ndr;0 0];
c=[0 0 1 0]; d=[0 0];
nn=ndr*[0 1 -yv+ybbdr*nbb/ndr];
dd=[1 -(yv+nr) yv*nr+nbb];
damp(den)
Eigenvalue Damping Freq. (rad/sec)
-0.1530 + 0.4073i 0.3516 0.4351
-0.1530 - 0.4073i 0.3516 0.4351
% O LGR com a aproximação fornece:
rlocus(-nn,dd)
```

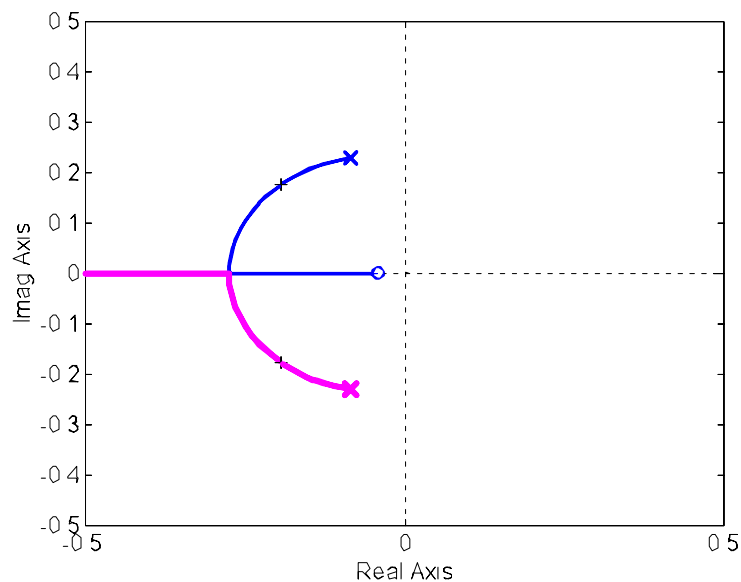


Figura 4.8: LGR do yaw damper (2^a ordem)

```
k=rlocfind(-nn,dd)
Select a point in the graphics window
selected_point = -0.3582 + 0.2965i
```

```

k = 2.7663
damp(dd-k*nn)
Eigenvalue Damping Freq. (rad/sec)
-0.3605 + 0.2987i 0.7700 0.4682
-0.3605 - 0.2987i 0.7700 0.4682

```

Pode verificar-se e comparar o modelo completo em AA e AF

```

damp(a)
Eigenvalue      Damping Freq. (rad/sec)
-0.0412         1.0000 0.0412
-0.0643 + 0.7374i 0.0868 0.7402
-0.0643 - 0.7374i 0.0868 0.7402
-1.1163         1.0000 1.1163
damp(a+b(:,2)*k*[0 0 1 0])
Eigenvalue      Damping Freq. (rad/sec)
-0.1756         1.0000 0.1756
-0.1909 + 0.6830i 0.2691 0.7092
-0.1909 - 0.6830i 0.2691 0.7092
-1.1436         1.0000 1.1436

```

No modelo completo a realimentação está longe do esperado!

O dimensionamento e a análise da realimentação com o modelo completo revela uma estrutura e um root locus algo diferente, conduzindo um valor de ganho mais elevado.

```
rlocus(a,b(:,2),-[0 0 1 0],0)
```

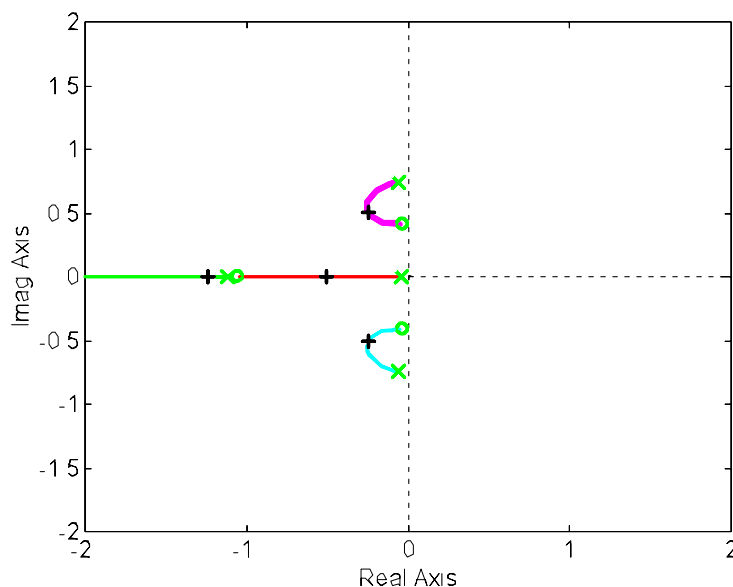


Figura 4.9: LGR do yaw damper (4^a ordem)

```

k=rlocfind(a,b(:,2),-[0 0 1 0],0)
Select a point in the graphics window
selected point = -0.2552 + 0.5059i
k = 6.390
damp(a+b(:,2)*k*[0 0 1 0])
Eigenvalue      Damping Freq. (rad/sec)

```

-0.2493 + 0.5082i	0.4404	0.5661
-0.2493 - 0.5082i	0.4404	0.5661
-0.5030	1.0000	0.5030
-1.2430	1.0000	1.2430

Comentários:

- pelo LGR, com esta realimentação o amortecimento não pode ser melhor;
- a espiral também é estabilizada.

A resposta no tempo com condição inicial não nula é obtida no Matlab:

```
t=0:.1:50;
y0=initial(a,b(:,2),c,0,[0 0 10/57.3 0],t);
y1=initial(a+b(:,2)*k*c,b(:,2),c,0,[0 0 10/57.3 0],t);
plot (t,0*t,'r:',t,y0,t,y1)
```

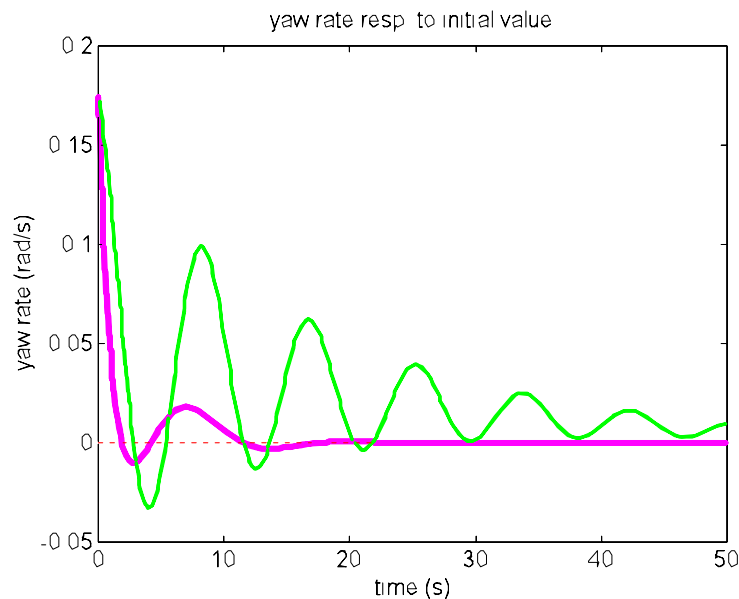


Figura 4.10: Resposta com yaw damper

O sistema é originalmente estável, com o pólo do modo espiral muito lento, e a realimentação da razão de guinada aumenta a estabilidade do modo espiral e amortece o rolamento holandês.

Para aviões estáveis, a realimentação da razão de guinada fornece uma resposta estática ao degrau de amplitude limitada pelo sistema de controlo e de alguma forma opõe-se ao comando do avião: uma solução consiste em introduzir um filtro passa alto na realimentação (*washout filter*) para só corrigir a dinâmica e deixar a resposta estacionária do Anel Aberto.

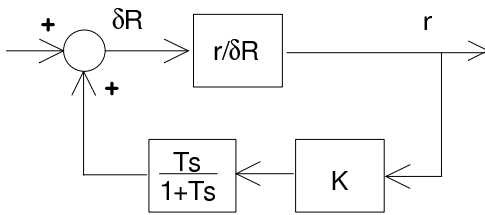


Figura 4.11: DB com passa-alto no yaw damper

```
[aw,bw,cw,dw]=tf2ss([1 0],[1 1]); % 1 sec washout filter
[ac,bc,cc,dc]=feedback(a,b(:,2),c,0,3,aw,bw,-k*cw,-k*dw);
damp(ac)
Eigenvalue      Damping      Freq. (rad/sec)
-0.0318         1.0000         0.0318
-0.0877 + 0.6097i 0.1424         0.6159
-0.0877 - 0.6097i 0.1424         0.6159
-1.0513         1.0000         1.0513
-1.9861         1.0000         1.9861
%resposta a um degrau
y2=step(ac,bc,cc,dc,1,t);
plot(t,y1,'r:',t,y0,'- ',t,y2,'-')
```

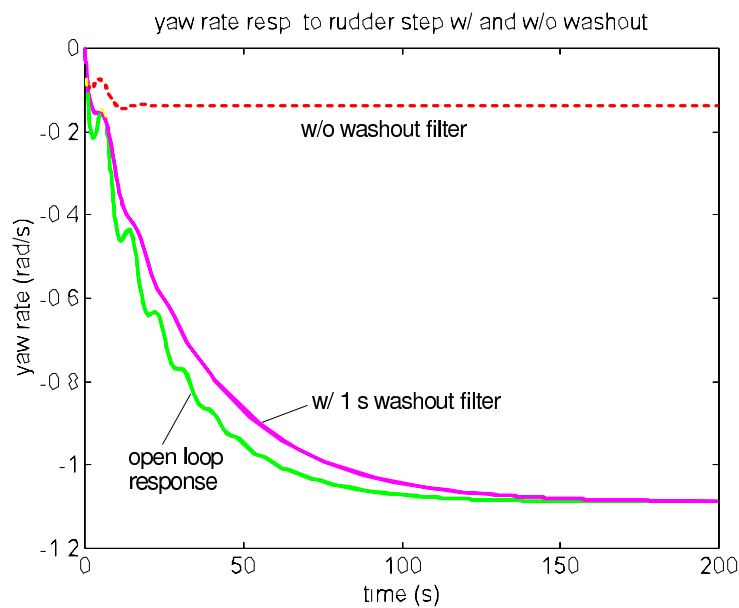


Figura 4.12: Resposta com yaw-damper e passa alto

Repare-se que o amortecimento do rolamento holandês diminuiu mas que o ganho estático foi corrigido.

Para o dimensionamento da realimentação com o filtro passa alto é preferível introduzir um estado suplementar no modelo lateral com a saída filtrada. Depois pode determinar-se o ganho de forma clássica.

Modo de rolamento

O dimensionamento dos ailerons garante que o modo de rolamento tem normalmente características adequadas. A sua dinâmica pode também ser corrigida com base na FT dos ailerons para a razão de rolamento.

Esta FT é aproximada pelo modelo de primeira ordem:

$$G(s) = \frac{p}{\delta_A}(s) = \frac{K_p}{1 + T_p s}$$

A realimentação da razão de rolamento com um ganho K fornece uma FT em Anel Fechado:

$$G_f(s) = \frac{G}{1 + KG}$$

ou

$$G_f(s) = \frac{\frac{K_p}{1 + T_p s}}{1 + K \frac{K_p}{1 + T_p s}}$$

ou

$$G_f(s) = \frac{K_p}{1 + T_p s + K K_p}$$

ou

$$G_f = \frac{K_f}{1 + T_f s}$$

com

$$K_f = \frac{K_a}{1 + K K_p} \quad T_f = \frac{T_p}{1 + K K_p}$$

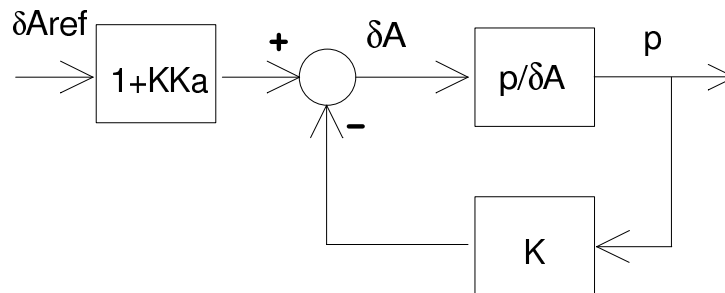


Figura 4.13: Diagrama de blocos com correcção do ganho estático

Modo espiral

O modo espiral é usualmente instável mas não tem normalmente um SAE.

O seu controlo é efectuado pelo anel de controlo do ângulo de rolamento (controlo de atitude).

A estabilização dos modos laterais de rolamento (rolamento puro e espiral) pode ser conseguida por uma realimentação cruzada, denominada em inglês **ARI**, *Aileron to Rudder Interconnection*, realimentando a razão de guinada para os ailerons (eventualmente com filtro passa alto).

O dimensionamento da realimentação **ARI** pode ser efectuado a partir da FT aproximada de 2ª ordem passa baixo

$$G(s) = \frac{r}{\delta_A}(s) = \frac{gL_{\delta_A}/U_o}{s^2 - (L_p - L_{\beta}N_p/N_{\beta} + gL_{\beta}/N_{\beta}/U_o)s + g(L_{\beta}N_r/N_{\beta} - L_r)/U_o}$$

ou a partir do modelo completo.

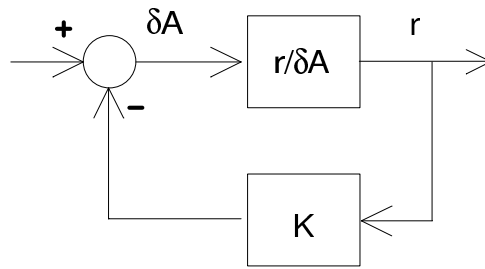


Figura 4.14: ARI *spiral damping*

Considere-se o LGR da realimentação positiva da razão de guinada para ailerons (após um yaw damper) obtido no Matlab.

```
rlocus(a+b(:,2)*k*[0 0 1 0],b(:,1),[0 0 -1 0],0,1)
```

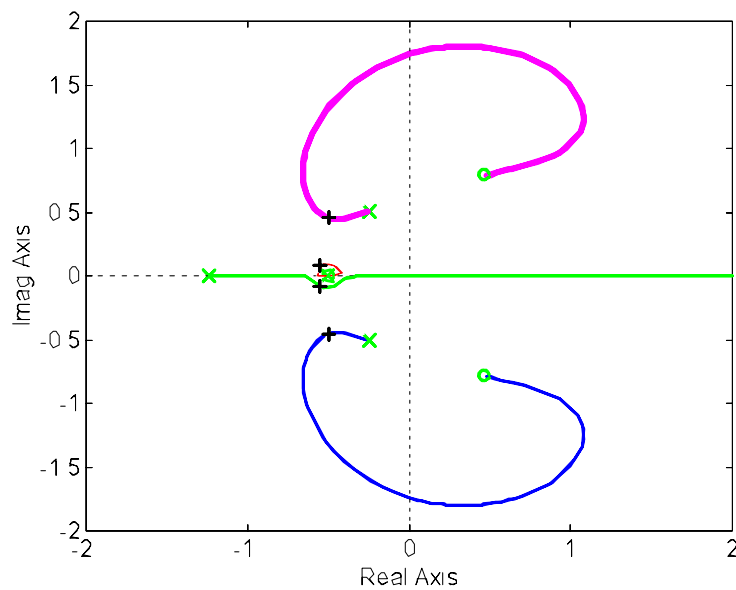


Figura 4.15: LGR de um ARI

```
rlocfind(a+b(:,2)*k*[0 0 1 0],b(:,1),[0 0 -1 0],0,1)
select a point in the graphics window
selected_point = -0.5429 + 0.4706i
ans = 5.7688
damp(a+b(:,2)*k*c+b(:,1)*5.77*[0 0 1 0])
Eigenvalue      Damping Freq. (rad/sec)
-0.5085 + 0.0987i  0.9817 0.5180
-0.5085 - 0.0987i  0.9817 0.5180
-0.5388 + 0.4764i  0.7491 0.7192
-0.5388 - 0.4764i  0.7491 0.7192
```

A resposta comparada a um degrau nos ailerons fornece:

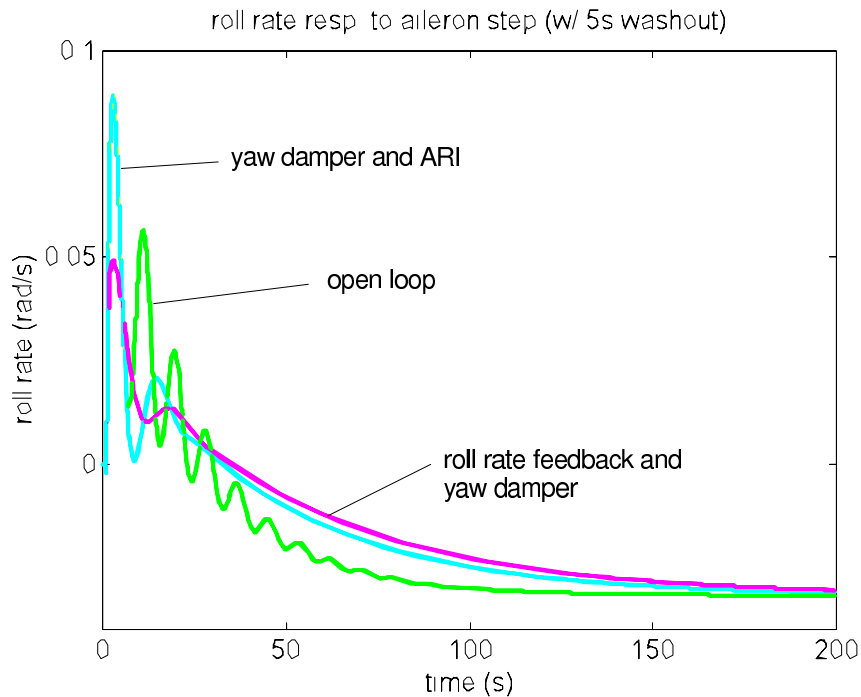


Figura 4.16: Respostas com SAE do lateral

Lateral: com controlo óptimo

A realimentação de todos os estados através de LQR com matrizes de ponderação adequadas pode permitir melhores resultados, mas introduz a necessidade de medir ou estimar todos os estados

```
%CHARLIE-1 lat lqr SAS example
q=diag([1 .01 1 .01]); r=diag([1 .1]);
k=lqr(a,b,q,r)

k =
-0.0280 0.0465 0.0160 0.0448
1.8252 0.4767 -4.2277 0.0842

damp(a-b*k)
Eigenvalue      Damping Freq. (rad/sec)
-0.1498         1.0000 0.1498
-0.3594 + 0.7533i 0.4306 0.8346
-0.3594 - 0.7533i 0.4306 0.8346
-1.1187         1.0000 1.1187
```

Novamente, sendo o objectivo o aumento de estabilidade da dinâmica, i.e. o aumento do factor de amortecimento, mas sem alterar o comportamento a baixas frequências e o ganho estático, um filtro passa alto na realimentação permite obter o resultado pretendido, em termos de compromisso.

```
[a2,b2,c2,d2]=append(aw,bw,cw,dw,aw,bw,aw,dw)
[ac,bc,cc,dc]=feedbk(a,b,eye(4),0*b,3,a2,b2*k,c2,d2*k);

damp(ac)
Eigenvalue      Damping Freq. (rad/sec)
```

-0.0362	1.0000	0.0362
-0.1633 + 0.6207i	0.2544	0.6418
-0.1633 - 0.6207i	0.2544	0.6418
-1.0026	1.0000	1.0026
-1.1190	1.0000	1.1190
-1.5029	1.0000	1.5029

Os pólos do sistema realimentado com filtro passa alto são obviamente menos amortecidos.

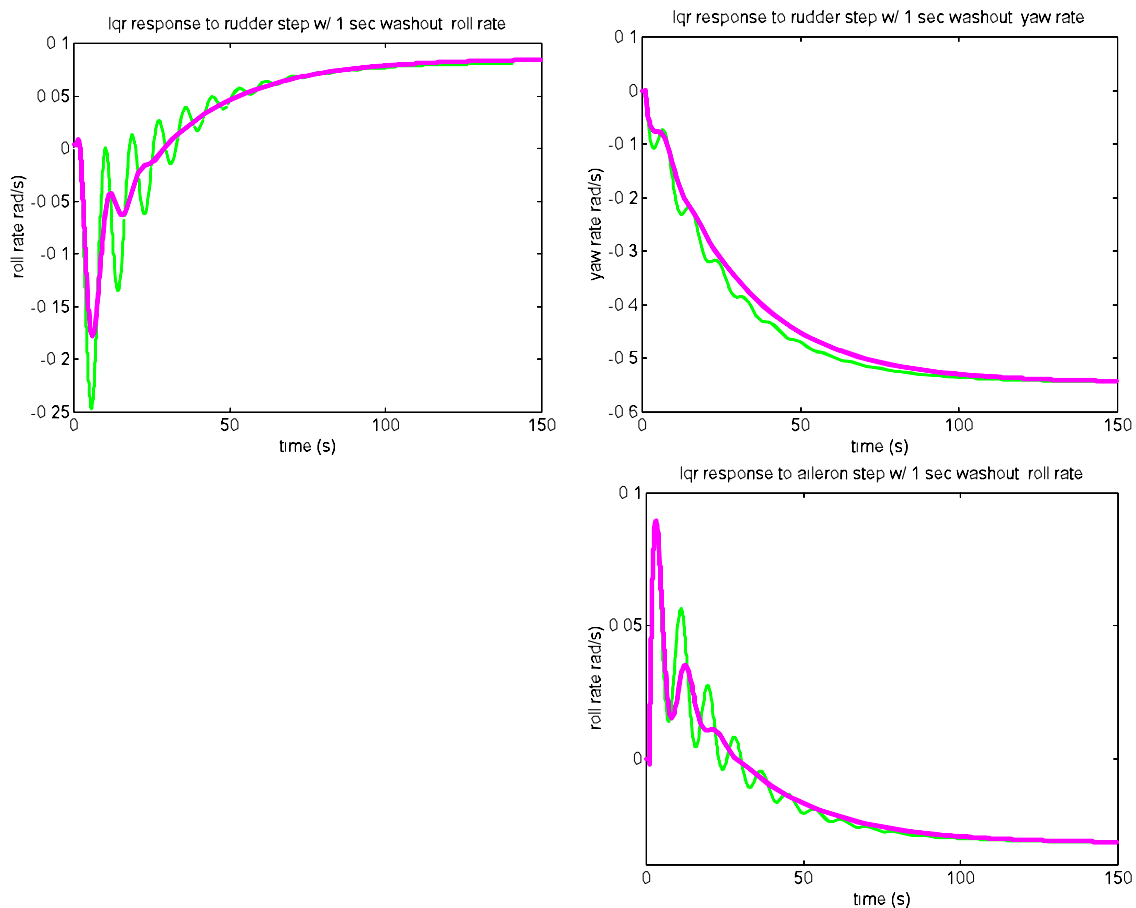


Figura 4.17: Respostas com SAE do lateral

4.3 Controlo de atitude

Os controladores de atitude :

- não se limitam a melhorar a dinâmica
- mas sim asseguram a manutenção ou o seguimento automáticos da atitude de referência.

A configuração poderá ser:

- com compensador no anel de realimentação
- como controlador em servo-mecanismo.

Nos aviões comerciais ou militares mais recentes, os comandos fornecidos pelo piloto ao sistema de controlo do avião através do manche lateral (*side stick*) correspondem a **pedidos de atitude ou às suas derivadas**.

Existem protecções nomeadamente para:

- o ângulo de ataque,
- a velocidade longitudinal,
- o ângulo de rolamento ou
- factor de carga

É uma verificação das condições de voo e a protecção do envelope. Esta verificação é eventualmente ultrapassável (*overriden*) pelo piloto.

4.3.1 controlo do ângulo de picada

O controlo do ângulo de picada é efectuado a partir

- do leme de profundidade ou
- do motor, quando se deseja uma mudança de nível.

Uma primeira solução consiste em realimentar o ângulo de picada

$$\delta_E = \delta_E^o + k_\theta \theta$$

A FT pode ser obtida a partir da aproximação da fugóide, de segunda ordem. Também pode ser obtida a partir do modelo completo.

A realimentação conjunta da razão de picada e do ângulo de picada

$$\delta_E = \delta_E^o + k_\theta \theta + k_q q$$

constitui um controlador PD, ao qual se pode acrescentar um termo integrativo se houver problemas de ganho estático.

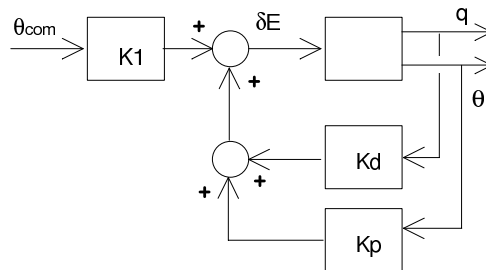


Figura 4.18: Realimentação PD para controlo de atitude

```
%ALPHA-1 pitch attitude control example
c=[0 0 0 1]; d=0; be=b(:,1);
rlocus(a,be,-c,-d)
rlocfind(a,be,-c,-d)
```

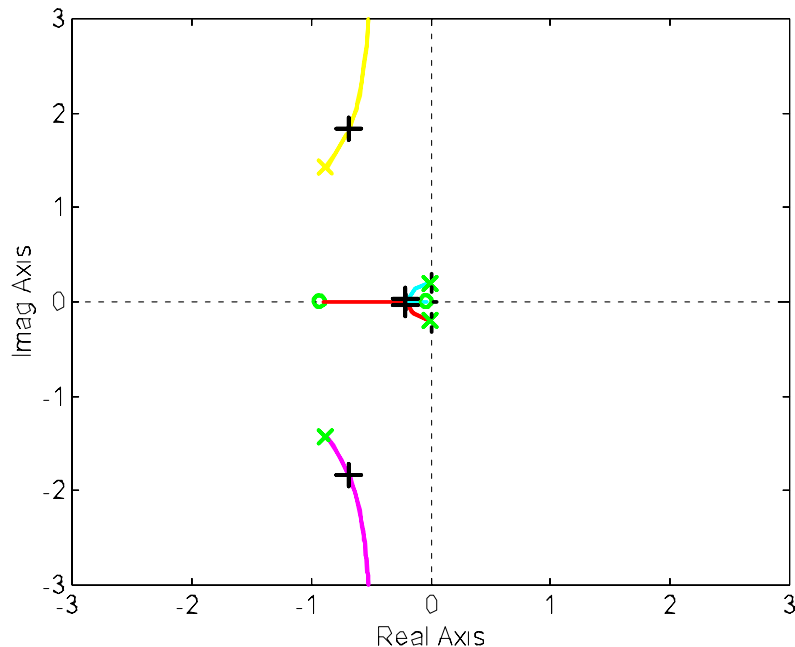


Figura 4.19: LGR de realimentação da picada

```
selected_point = -0.1879 + 0.0176i
ans = 0.6683
~

damp(a+.67*be*c)
Eigenvalue      Damping Freq. (rad/sec)
-0.1975 + 0.0113i  0.9984 0.1978
-0.1975 - 0.0113i  0.9984 0.1978
-0.6904 + 1.8193i  0.3548 1.9459
-0.6904 - 1.8193i  0.3548 1.9459

%realimentação PD
rlocus(a+.67*be*[0 0 0 1],b(:,1),-[0 0 1 0],0);
rlocfind(a+.67*be*[0 0 0 1],b(:,1),-[0 0 1 0],0)
Select a point in the graphics window

selected_point = -2.5708 + 0.0235i
ans = 1.5965

damp(a+be*[0 0 1.59 0.67])
Eigenvalue      Damping Freq. (rad/sec)
-0.1185 + 0.0927i  0.7878 0.1504
-0.1185 - 0.0927i  0.7878 0.1504
-2.5535 + 0.1623i  0.9980 2.5587
-2.5535 - 0.1623i  0.9980 2.5587
~

k=[0 0 1.59 0.67];
initial(a+b(:,1)*k,b(:,1),[0 0 0 1],0,[0 0 0 .1])
```

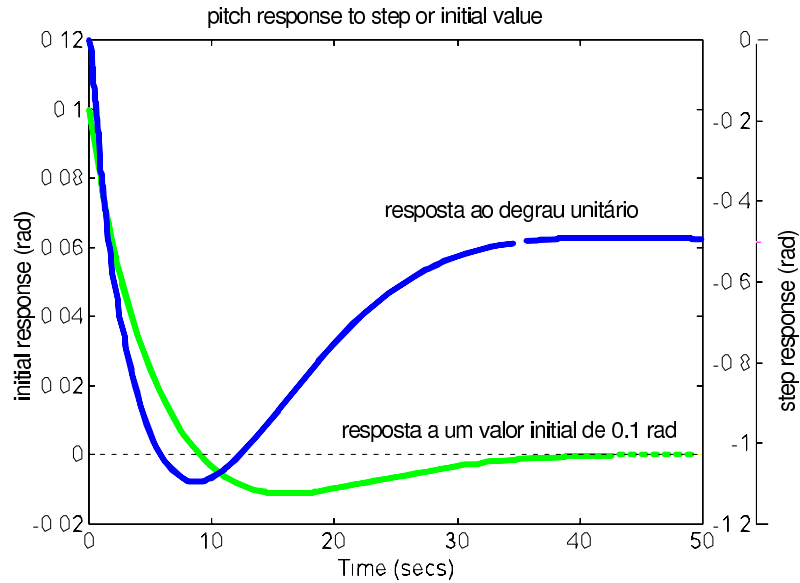


Figura 4.20: Resposta inicial com controlo da picada

Para obter um ganho unitário no controlo do ângulo de picada, em forma de servo-mecanismo, é necessário introduzir um bloco inicial K_1 com um ganho inverso do ganho estático apresentado pelo sistema realimentado.

Eventualmente, para diminuir o sobre-impulso na resposta ao degrau, é possível introduzir dinâmica no bloco inicial e substituí-lo por um filtro passa-baixo.

A solução de lqr apresentada para o SAS longitudinal estabiliza igualmente o ângulo de picada e poderia ser usada, talvez após acerto dos valores das matrizes de ponderação, para o controlo da atitude.

A configuração anterior tem um equivalente mais modular com anel interno de aumento de estabilidade e anel externo de controlo da atitude em servo-mecanismo:

- realimentação (q, θ)
- servomecanismo de θ

O diagrama de blocos pode utilizar o único leme: é para uma regulação.

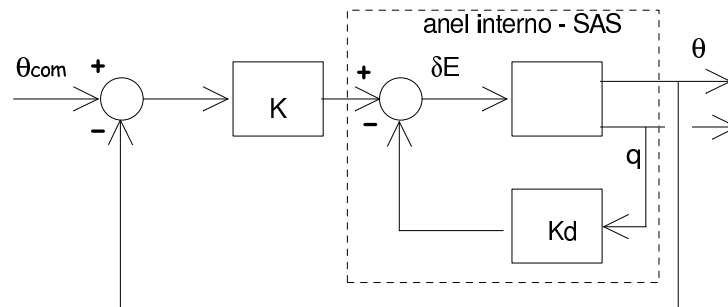


Figura 4.21: Servo-mecanismo com anel interno de SAS para controlo de atitude

a estabilidade é a mesma que anteriormente

o ganho estático não é unitário: falta introduzir, por exemplo um ganho directo inverso do ganho estático

Uma alternativa com entrada no motor teria o diagrama de blocos a seguir. com leme e motor: seguimento.

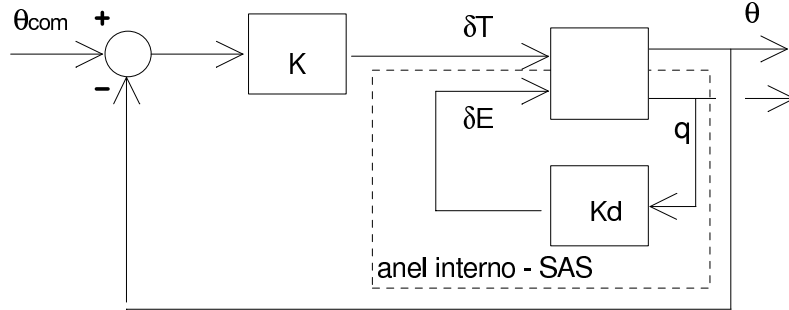


Figura 4.22: Entrada no motor para controlo de atitude

4.3.2 Controlo do ângulo de rolamento

O controlo do ângulo de rolamento (ou pranchamento - *bank angle*) é efectuada de forma eficaz a partir dos ailerons. O controlo pode ser considerado isoladamente ou em conjunto com um amortecimento do rolamento.

Numa primeira solução, a resposta da razão de rolamento aos ailerons pode ser aproximada pelo sistema de primeira ordem e é projectado um controlador proporcional.

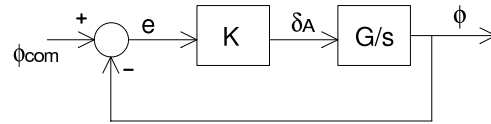


Figura 4.23: Controlo do rolamento a partir da aproximação

O LGR deste caso é muito simples.

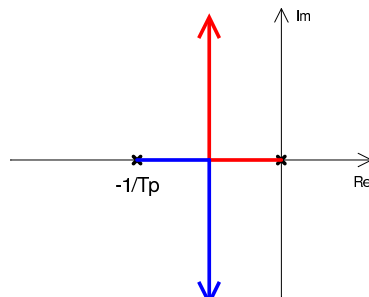


Figura 4.24: LGR do rolamento

Calculando a FT do anel fechado:

$$G = \frac{K_p}{1+T_p s} \Rightarrow G_f = \frac{\phi}{\phi_{com}} = \frac{KG/s}{1+KG/s} = \frac{KK_p}{s(1+T_p s)+KK_p}$$

fica

$$G_f = \frac{\frac{KK_p}{T_p}}{s^2 + \frac{1}{T_p}s + \frac{KK_p}{T_p}}$$

evidenciando uma FT de passa baixo de 2^a ordem:

- $2\xi\omega_n = \frac{1}{T_p}$ constante: a partir de um certo valor são dois pólos conjugados num eixo vertical de abcissa $-\frac{1}{2T_p}$, o que indica uma constante de tempo equivalente $T_e = 2T_p$;
- $\omega_n^2 = \frac{KK_p}{T_p}$ aumenta com o ganho K : logo o amortecimento diminui e o AF fica mais oscilatório;
- o ganho estático é unitário devido ao pólo da espiral na origem.

Eventualmente um controlo PD permite ter mais um grau de liberdade para a colocação dos pólos do AF, com o Diagrama de Blocos seguinte.

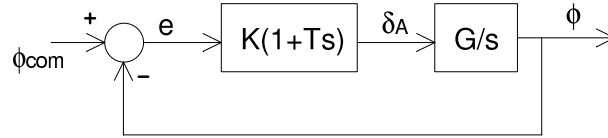


Figura 4.25: Diagrama de Blocos de controlo PD do rolamento

Calculando esta realimentação verificamos que a FT do AF é:

$$G_f = \frac{\phi}{\phi_{com}} = \frac{K(1+Ts)G/s}{1 + K(1+Ts)G/s} = \frac{K(1+Ts)K_p}{s(1+T_p s) + K(1+Ts)K_p}$$

ou

$$G_f = \frac{\frac{K(1+Ts)K_p}{T_p}}{s^2 + \frac{(1+TKK_p)}{T_p}s + \frac{KK_p}{T_p}}$$

A escolha de (ξ, ω_n) fornece duas equações de onde se obtêm os dois parâmetros do controlador com (K, T) .

Em alternativa, a realimentação da razão de rolamento pode substituir o derivativo, de acordo com o diagrama de blocos da figura seguinte.

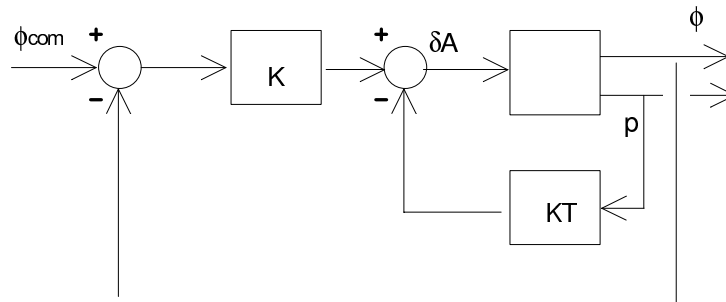


Figura 4.26: Controlo PD do rolamento com realimentação da razão de rolamento

Exercício:

Controlo do ângulo de rolamento do CHARLIE-2: A FT do anel aberto do rolamento é dada por

$$G(s) = \frac{p}{\delta_A} = \frac{0.21}{s + 0.09}$$

- Determine a realimentação para obter um amortecimento de 0.6. Deduza a frequência natural.
- Responda à mesma pergunta se desejarmos manter a frequência natural em 0.5 rad/s.
- Responda à mesma pergunta se a estrutura do controlador com anel de SAE.

4.3.3 Controlo do ângulo de derrapagem

Há tipicamente duas situações clássicas que necessitam um controlo do ângulo de derrapagem:

- numa **volta coordenada**, pretende-se anular o ângulo de derrapagem
- em **aterragem com vento cruzado** é necessário alinhar o avião com a pista e manter um ângulo de derrapagem sensivelmente constante não nulo.

Ângulo de derrapagem em volta coordenada

A definição da volta coordenada é se:

- a força lateral é nula ou
- a aceleração lateral é nula:

$$A_y = \dot{V} + UR - PW - gc_\theta s_\phi = 0$$

Para um voo rectilíneo nivelado:

$$\dot{v} + U_0 r - W_0 p - g_{\theta_0} s_\phi = 0 = Y_v v + Y_p p + Y_r r + Y_{\delta_R} \delta_R$$

com derrapagem nula $\dot{\beta} = 0$ e rolamento constante $p = 0$, obtém-se:

$$r = \frac{g}{U_0} \sin(\phi)$$

Considerando a segunda equação

$$Y_v U_0 \beta + Y_r r + Y_{\delta_R} \delta_R = 0$$

A derrapagem só é nula se Y_r e Y_{δ_R} forem desprezáveis:

$$\beta = -\frac{Y_r r}{Y_v U_0} - \frac{Y_{\delta_R} \delta_R}{Y_v U_0} \simeq 0$$

A trajectória circular efectua-se a velocidades constantes, com uma aceleração centrípeta

$$a_c = \omega V_t = \omega U_0 = \frac{U_0 r}{\cos(\phi)}$$

em equilíbrio com a aceleração da gravidade e logo:

$$\omega = \frac{g}{U_0} \tan(\phi)$$

Ângulo de derrapagem constante

Num voo rectilíneo estacionário com derrapagem constante, as equações do modelo lateral:

$$\begin{cases} 0 = Y_\beta \beta + g c_{\theta_0} \phi + Y_{\delta_R} \delta_R \\ 0 = L'_\beta \beta + L'_{\delta_A} \delta_A + L'_{\delta_R} \delta_R \\ 0 = N'_\beta \beta + N'_{\delta_A} \delta_A + N'_{\delta_R} \delta_R \end{cases}$$

No caso de uma aterragem com vento cruzado, o ângulo de derrapagem é imposto pelas condições de aterragem. Restam 3 incógnitas: ϕ, δ_A, δ_R .

Para $\beta \neq 0$ verifica-se que o rolamento é não nulo: $\phi \neq 0$!

controlo de trajectória

4.4 Controlo de trajectória

4.4.1 Introdução

Comparado com o aumento de estabilidade e controlo de atitude, o controlo da trajectória tem características específicas:

- as variáveis são diferentes:
 - o objectivo do aumento de estabilidade é o controlo das velocidades angulares,
 - o controlo de atitude mantém a posição angular do avião,
 - o controlo da trajectória vigia o cg do avião, no espaço e no tempo
- a trajectória do avião efectua-se não em relação ao ar mas em relação ao referencial fixo: são necessários sensores para as variáveis absolutas relacionadas com a trajectória
- existem dois níveis de precisão:
 - o controlo de rota, com pouca precisão tanto no espaço como no tempo.
 - Algumas manobras são no entanto mais exigentes, como por exemplo o controlo de e com mísseis, combate aéreo, seguimento de alvo, aterragem automática.

Os comandos emitidos pelo piloto correspondem normalmente a ordens de rotação nos três eixos do corpo, rolamento, picada e guinada.

O único controlo a actuar directamente na trajectória é o motor, a força propulsiva e o controlo da velocidade longitudinal. As outras correcções de trajectória são obtidas de forma indirecta pelas alterações de orientação e atitude do avião. Tem-se frequentemente:

- um anel interno para a atitude e
- um externo para a trajectória.

No movimento longitudinal, associado à trajectória no plano vertical, as duas variáveis a controlar são a altitude e a velocidade: correspondem aos modos familiares de piloto automático, "**altitude hold**" e "**speed hold**".

No movimento lateral/direccional, associado à trajectória no plano horizontal, a variável a controlar é o ângulo de guinada, ou o rumo: corresponde ao "**heading hold**".

Os sistemas de rádio-ajudas permitem assegurar o controlo horizontal do avião e, no caso da aterragem, o controlo de ambos os movimentos.

Exercício 10.3

Pretende-se controlar o ângulo de derrapagem num movimento lateral descrito pelo sistema

$$A = \begin{bmatrix} -0.1 & -1 \\ 5.2 & -0.25 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -0.014 \\ -2.6 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

seguindo o modelo dado pelo sistema de primeira ordem com dinâmica $L = -5$.

A aplicação das fórmulas de seguimento de modelo permitem obter uma realimentação de estados: δ_R , com uma matriz

$$K = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix} = (CB)^{-1} (LC - CA) = \begin{bmatrix} 350 & -71.42 \end{bmatrix}$$

A identificação com o diagrama de blocos proposto: $\delta_R = 100(\beta_{com} + K_{rg}r - K_\beta\beta)$ fornece

$$\begin{cases} K_1 = -100K_\beta \\ K_2 = 100K_{rg} \end{cases}$$

4.4.2 Altitude

Para a altitude, existem:

- os modos de controlo da velocidade de subida/descida ou
- de aquisição de altitude,

mas o sistema mais generalizado garante a **manutenção da altitude** a um nível obtido anteriormente por outra forma, manualmente ou por controlo de atitude: trata-se de um problema de **regulação**.

Um diagrama de blocos possível é o da figura seguinte.

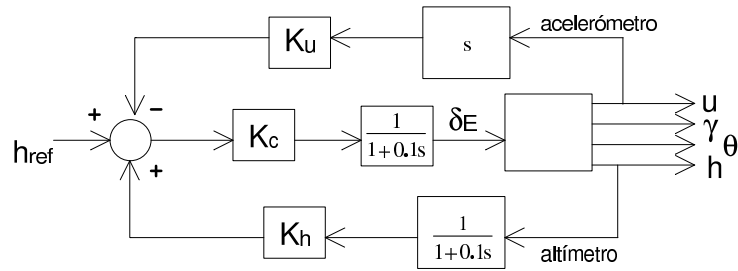


Figura 4.27: Sistema para controlo de altitude

Note-se:

- um acelerómetro, medindo a aceleração longitudinal
- um altímetro, com dinâmica não desprezada
- a dinâmica do actuador também não é desprezada
- este regulador recorre unicamente ao leme

Um segundo diagrama de blocos possível é da figura seguinte.

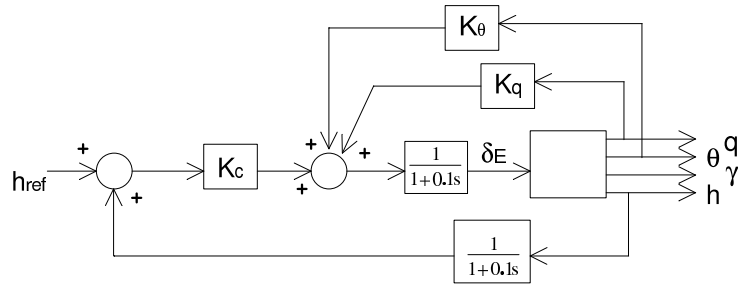


Figura 4.28: Controlo de altitude com dois anéis

Evidenciando:

- uma estrutura com:
 - anel interno de SAE (realimentação de q) e atitude (θ) e
 - anel externo de regulação da altitude
- um altímetro, com dinâmica não desprezada
- a dinâmica do actuador também não é desprezada
- este regulador recorre unicamente ao leme

Note-se:

- um dos problemas específicos da altitude vem do mau comportamento da derivada

$$a_u = \frac{1}{m} \left(\frac{\partial D}{\partial u} - \frac{\partial T}{\partial u} \right)$$

em função da curva de potência: pode mudar de sinal e dificultar a síntese do controlador

- o projecto do controlador supõe a utilização de um modelo longitudinal com 5 estados

4.4.3 Controlo da velocidade

A velocidade controla a dimensão temporal da trajectória.

Existem várias velocidades:

- a velocidade do avião em relação ao ar V_t , *True Air Speed* (TAS),
- a velocidade do avião em relação ao referencial fixo ou velocidade no solo V_g , *Ground Speed* (GS),
- a velocidade fornecida pelo Pitot é uma estimativa da velocidade ar a partir da medição da pressão dinâmica $p_d \simeq \frac{1}{2}\rho V_t^2$, considerando uma densidade ao nível do solo (*Indicated Air Speed* -IAS ou *Calibrated Air Speed* -CAS).

Mas a velocidade ar está associada à optimização do desempenho da aeronave: **a regulação visa normalmente a velocidade ar** e a velocidade no solo é uma consequência das condições de vento \vec{V}_w :

$$\vec{V}_g = \vec{V}_a + \vec{V}_w$$

Para velocidades subsónicas superiores a 0.5 a variável considerada é frequentemente o número de Mach: $M = \frac{V_t}{a}$.

A mudança de velocidade recorre ao motor mas este é um actuador com constante de tempo comparativamente elevada (de 0.3s a 2s). Além disto, é um actuador com dinâmica não linear, dependente de variáveis como altitude ou temperatura externa, e estados internos, o que limita a validade dos modelos (de primeira ordem) aqui utilizados a amplitudes reduzidas em torno do ponto de referência.

Os diagramas a seguir são essencialmente reguladores, com entrada no motor ou no leme...

Uma solução de controlo da velocidade é apresentado na figura seguinte, baseada num sistema em servo-mecanismo PI, com um sensor de velocidade barométrica e um acelerómetro.

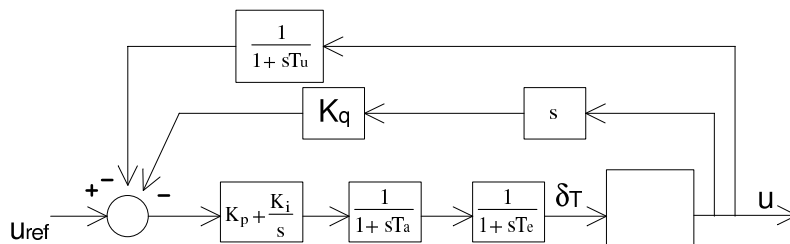


Figura 4.29: Controlo da velocidade longitudinal

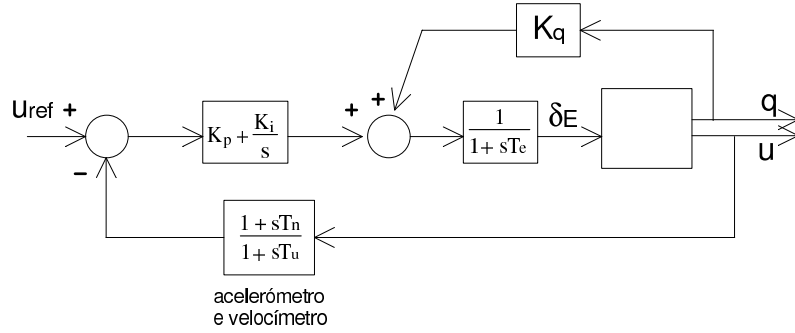


Figura 4.30: Exemplo de controlo da velocidade com base no leme

As variáveis de altitude e velocidade estão muito correlacionadas e é usual considerar ambas estas variáveis resultando num controlador de altitude e velocidade (u, h) , com as entradas de motor e leme (δ_T, δ_E) , possivelmente com anel ou anéis interno(s)...

4.4.4 Controlo de guinada e rumo

Se considerarmos um voo sem derrapagem $\lambda \simeq \psi$, a orientação do veículo é dada pelo ângulo de guinada, controlado pela actuação dos ailerons em voltas coordenadas

$$\dot{\psi} = \frac{r}{\cos(\theta_0)} \simeq \frac{g}{U_0} \phi$$

Supondo a existência de uma bússola, com sinal proporcional ao ângulo de guinada, uma solução consiste no controlo proporcional do ângulo de rolamento em volta coordenada

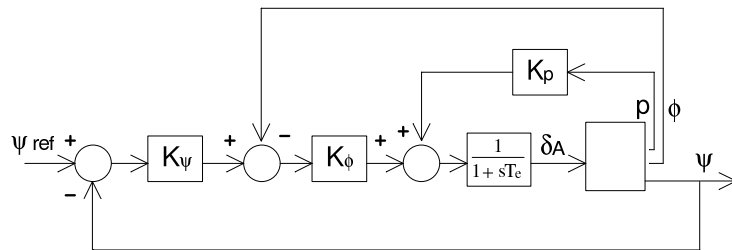


Figura 4.31: Controlo do ângulo de guinada com anéis de rolamento e aumento de estabilidade

Uma solução menos usada consistiria na utilização do leme de direcção para controlar o rumo do avião, com derrapagem não nula, com anel interno de aumento de estabilidade do rolamento holandês e anel externo de controlo do rumo verdadeiro χ .

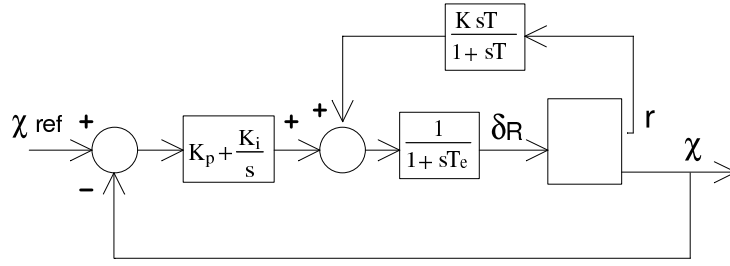


Figura 4.32: Controlo de orientação em derrapagem

A dificuldade desta solução vem do passa-alto no amortecimento do rolamento holandês e, numa primeira fase, pode proceder-se ao dimensionamento sem esse filtro passa-alto.

A melhoria do controlo da trajectória no plano horizontal é conseguida através do uso de sistemas de rádio-ajudas (VOR e DME), implementadas a partir de 1945, fornecendo um sensor suplementar para a orientação absoluta da trajectória.

A medição facultada pelo sistema VOR (*VHF Omnidirectional Range*) resulta da comparação de dois sinais electromagnéticos emitidos na banda VHF, um omni-direccional e modulado a 30 Hz e o outro rotativo, com frequência de rotação de 30 rotações por segundo.

A fase entre os dois sinais recebidos indica o azimuth da posição relativa do avião. Um sinal DME (*Distance Measuring Equipment*), na banda UHF, é usado em conjunção com o VOR para obter a distância ao rádio-farol.

A distância alcançada pelo sinal VOR é de cerca de 100 milhas, com uma precisão de até 1 %. O sinal tem no entanto uma sensibilidade que varia inversamente com a distância, alterando o ganho da realimentação e, no limite, instabilizando o sistema.

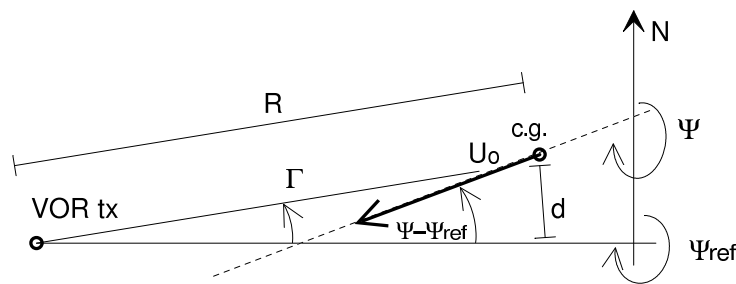


Figura 4.33: Geometria da utilização de rádio-ajudas

A dinâmica do erro detectado pelo receptor VOR, supondo o erro pequeno e um alcance R constante, obedece às seguintes equações

$$\Gamma \simeq \frac{d}{R}$$

$$\dot{d} = U_0 \sin(\psi - \psi_{ref}) \simeq U_0 (\psi - \psi_{ref})$$

$$\Rightarrow \Gamma(s) = \frac{U_0 (\psi - \psi_{ref})}{Rs}$$

Na prática, a introdução do VOR acrescenta um anel suplementar à primeira solução apresentada anteriormente.

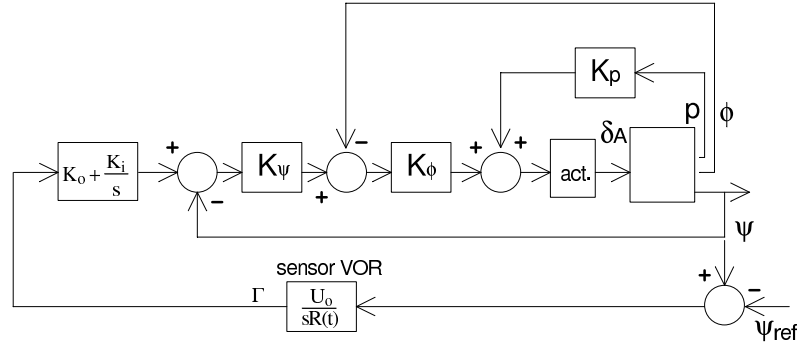


Figura 4.34: Sistema de controlo de orientação com sinal VOR

O guiamento das aeronaves consiste então na definição de uma rota como sequência de rádio-ajudas.

A introdução do GPS permite uma maior precisão de navegação e é possível libertar-se das rádio-ajudas e seguir rotas directas.

4.4.5 Seguimento de trajectória horizontal com GPS

Considerando unicamente o caso da trajectória horizontal, a trajectória desejada é usualmente expressa como uma sequência de pontos de passagem, com segmentos de recta ou de arco de circunferência entre estes pontos de passagem. A existência de sistemas de navegação tais como o GPS permitem sem rádio-ajudas um seguimento de trajectória comparando a posição actual com o desejado e reduzindo o erro de seguimento.

Nomeadamente para aeronaves não tripuladas têm sido propostos vários algoritmos, seja com controlo da velocidade (*path tracking*) seja para uma trajectória sem requisitos de tempo (*path following*), mas aqui vamos mencionar somente 3 sem controlo de velocidade: os guiamentos por pontos de passagem, por linha de vista ou por distância L_1 .

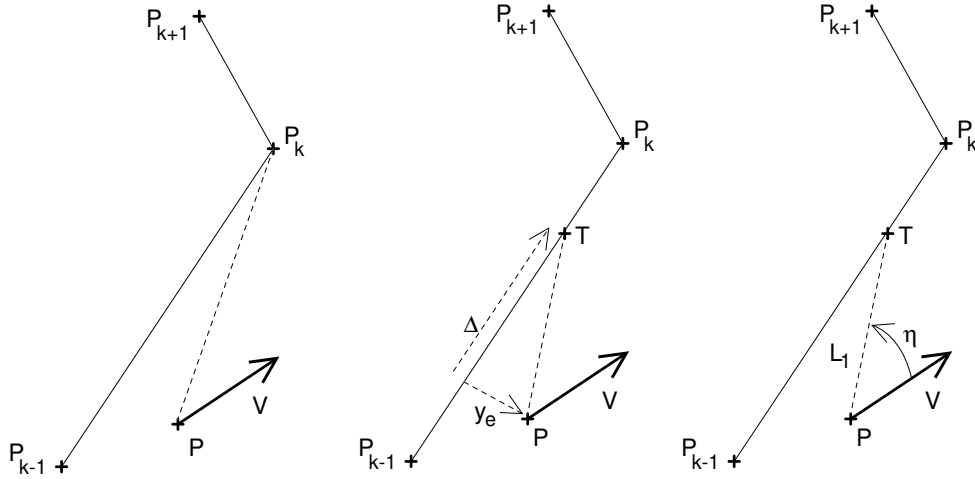


Figura 4.35: Guiamento horizontal: por pontos de passagem à esquerda, por linha de vista no centro, por distância L_1 à direita

1. Para o caso de segmentos de recta, a solução mais simples e na directa sequência do anterior consiste em apontar a trajectória para o próximo ponto de passagem, com realimentação do ângulo de rumo verdadeiro χ ; deve ser definido um raio para determinar quando o ponto se considera atingido e se deve considerar o segmento e o ponto de passagem seguintes. Ao utilizar o rumo verdadeiro e não o ângulo de guinada, o vento é naturalmente compensado.
2. No guiamento por linha de vista (*Line Of Sight -LOS*) aponta-se o veículo para um ponto (x_{LOS}, y_{LOS}) colocado no segmento seguido: (i) a uma distância escolhida R da posição actual (x, y) , $\chi_d = \text{atan2}(y_{LOS} - y, x_{LOS} - x)$ ou (ii) a uma distância fixa à frente (*look-ahead distance*) Δ (ver fig.) e realimentando o erro de posição perpendicular (*cross-track error*) y_e : $\chi_d = \chi_p + \arctan(-y_e/\Delta)$
3. O guiamento por distância L_1 , segue uma lógica ainda com um ponto alvo, situado na trajectória desejada a uma distância L_1 da posição actual (ver fig.), mas, no lugar dos dois anéis de guiamento e controlo de rumo, o erro angular η da velocidade é convertido no pedido de aceleração num único anel: $a_y^d = \frac{2V^2}{L_1} \sin(\eta)$; se for assumida volta coordenada, esta aceleração é convertida num pedido de ângulo de rolamento no anel de controlo de atitude.

O caso do seguimento de um alvo pode também ser visto nesta perspectiva de guiamento. Duas opções de guiamento utilizam o ângulo χ_r da linha de vista (LOS) entre o seguidor e o alvo:

1. na solução mais simples aponta-se o seguidor para o alvo $\chi_d = \chi_r$
2. na solução conhecida como navegação proporcional, a aceleração desejada é proporcional à velocidade e à derivada do ângulo: $a_y^d = kV\dot{\chi}_r$

O seguimento de alvo pode abranger tanto um míssil apontando para um avião como o voo em formação com líder e seguidor, ou então o seguimento de uma trajectória onde o alvo virtual se desloca ao longo da trajectória desejada com velocidade constante ou não. A extensão ao caso do guiamento vertical não apresenta dificuldades, nem para apontar ao alvo nem em acção proporcional. O controlo da velocidade longitudinal pode por exemplo ser uma simples realimentação do erro na distância ao alvo.

4.4.6 Aterragem automática

A aterragem automática supõe um controlo da trajectória muito mais preciso que as condições normais de voo e só é possível:

- em pistas equipadas com sistemas de ajudas, denominados ILS (*Instrument Landing System*), fornecendo ao avião medições da posição e sobretudo desvios em relação à trajectória ideal, tanto no plano vertical como no plano horizontal
- com aeronaves equipadas para receber e utilizar aqueles sinais para corrigir a sua trajectória

Uma trajectória ideal de aterragem está alinhada com o eixo da pista e desce segundo uma recta inclinada, a **ladeira** (*glide path* ou ***glide slope***), com um ângulo de descida γ_{GS} usualmente entre -2.5° e -5.5° .

A aterragem decompõe-se em três fases:

1. intercepção da ladeira
2. seguimento controlado da ladeira
3. arredondamento (*flare*) e aterragem na pista (*touchdown*)

Na vertical, a intercepção da ladeira pode ser feita vindo de cima ($\gamma > \gamma_{GS}$) ou por baixo ($\gamma < \gamma_{GS}$), sendo a segunda opção preferível, para evitar situações de perigo se o avião falhar o sinal da ladeira.

A informação do ILS, materializa a ladeira, com vários feixes rádio e é transmitida de três formas:

- no plano horizontal, o eixo da pista é sinalizado pelo feixe rádio VHF do *localizer*, com 3 a 6 graus de abertura total, a partir do fim da pista
- no plano vertical, a ladeira é sinalizada por um feixe UHF com uma abertura total de 1.4 graus, a partir do início da pista
- faróis (*beacons*) marcando as várias fases da aterragem, desde o início da ladeira a 8000 m da pista até ao ponto de aterragem
 - 1-*Outer Marker* a 4.7 milhas do início da pista (*runway threshold*)
 - 2-*Middle Marker* a 3500 pés (altitude de decisão CAT I)
 - 3-*Inner Marker* a 1000 pés (altitude de decisão CAT II)

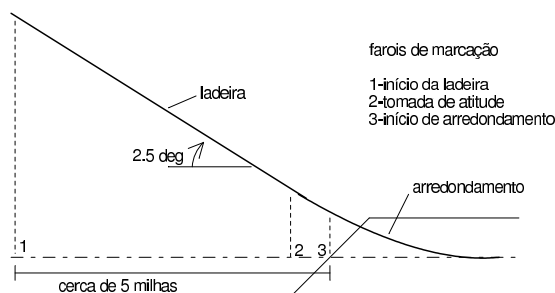


Figura 4.36: Geometria do procedimento de aterragem

As categorias de aproximações ILS estão descritas na tabela seguinte¹

Cat.	DH	RVR	Remarks
I	200 ft	2400 ft	
I	200 ft	1800 ft	With touchdown zone and runway centerline lighting
II	100 ft	1200 ft	Half the minimums of a standard Cat I approach
IIIa	<100 ft	700 ft	
IIIb	<50 ft	150 ft < RVR < 700 ft	
IIIc	NO	NO	Pray that your electronics and autopilot are reliable

Data from Aeronautical Information Manual, AIM

O sensor de ILS fornece dois sinais que são função dos desvios angulares em relação ao eixo da pista e à ladeira, a partir dos quais é possível efectuar a realimentação e o controlo da descida

O controlo ao longo da ladeira obedece a leis similares ao controlo com sinal VOR, agora para os dois movimentos, vertical e lateral.

Os casos de controlo longitudinal e lateral respectivamente estão apresentados nas figuras seguintes.

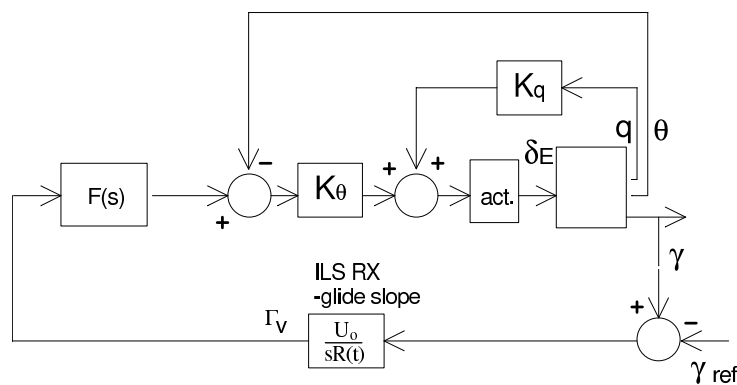


Figura 4.37: Controlo de ladeira ILS -vertical (glide slope)

¹

DH: *Decision Height* (MDA/MDH: *Minimum Descent Altitude/Height*)
RVR: *Runway Visual Range* (distância horizontal)

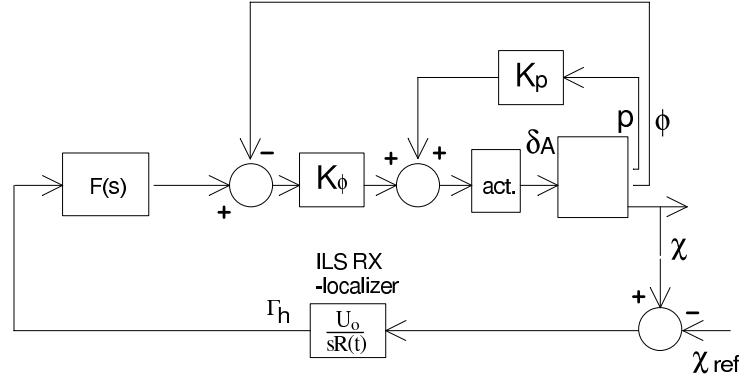


Figura 4.38: Controlo de ladeira ILS -horizontal (localizer)

Aqui novamente o alcance R tem um valor crítico e deve permitir obter uma transição para o arredondamento estabilizada.

A última fase da aterragem é frequentemente manual, com valores mínimos de visibilidade (cerca de 300 na horizontal e 50 m na vertical) abaixo dos quais a manobra não é permitida.

Recentemente, com os sistemas de controlo de voo modernos e nos aeroportos devidamente equipados, é possível a aterragem automática até à saída da pista para o táxi.

O arredondamento corresponde à fase derradeira da descida efectuando a transição da ladeira para a pista e o ponto de aterragem.

Na fase de **arredondamento**, o avião descreve uma trajectória vertical curva, aproximada por uma exponencial, e simultaneamente adquire a atitude necessária para tocar a pista com o trem principal.

A altitude durante a fase da ladeira é descrita por

$$\dot{h} \simeq U_0 \gamma \simeq U_0 \gamma_{GS}$$

e no arredondamento por

$$h = h_0 e^{-t/\tau}$$

ou $\dot{h} = -\frac{h}{\tau}$, levando a

$$-\frac{h_0}{\tau} = U_0 \gamma_{GS}$$

Estando o ponto de aterragem normalmente previsto para cerca de 300 m após o início da pista e, se se considerar que ele é obtido para um tempo 5τ , a distância horizontal percorrida será

$$x_0 \simeq 5U_0\tau = 300 \text{ (m)}$$

destas 2 equações tiramos as 2 incógnitas (h_0, τ) .

O sistema de controlo durante a fase de arredondamento é constituído por um anel interno de controlo do ângulo de picada e um anel externo de controlo da altitude. A precisão da medição da altitude é necessária e garantida por um radio-altímetro.

Um exemplo de diagrama de blocos é o da figura seguinte.

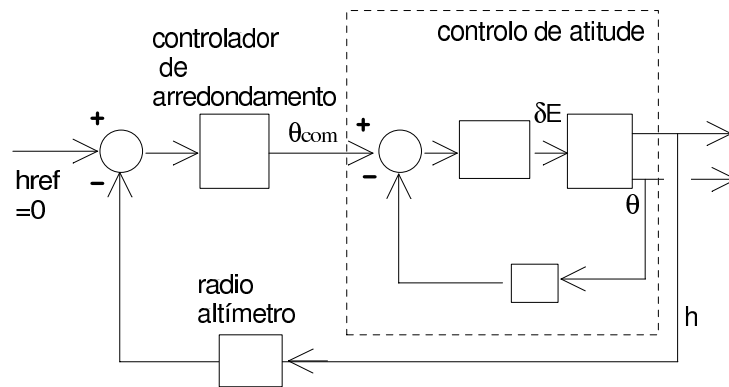


Figura 4.39: Controlo do arredondamento

Capítulo 5

Elementos complementares

5.1 Introdução

Os modelos considerados para apresentar as várias soluções mais ou menos tradicionais de controlo de voo são **modelos aproximados e linearizados**, correspondendo a uma primeira análise de abordagem do problema.

Para levar adiante a análise e nomeadamente conseguir uma simulação mais realista antes de passar à implementação das soluções encontradas e ao seu ensaio em voo, é necessário **rever algumas das limitações** dos modelos utilizados, verificar o domínio de validade das aproximações, **introduzir pormenores** suplementares e testar as alterações provocadas.

5.2 Sensores e Actuadores

5.2.1 Introdução

Os sensores e actuadores utilizados para transmitir a informação entre o avião e o controlador são elementos fundamentais, cuja qualidade, precisão e fiabilidade **dimensionam, permitem ou limitam a qualidade do controlo** conseguido.

As soluções encontradas em termos de sensores e actuadores condicionam as soluções de controlo e devem ser encontradas em paralelo com estas.

Um sensor será definido, acompanhado por várias características, que descrevem simultaneamente o seu funcionamento e as suas limitações. Estas características são:

- a grandeza medida pelo sensor, a relacionar com as grandezas que descrevem o movimento do avião;
- o princípio utilizado para relacionar a grandeza e o sinal de saída, se possível de forma linear
- a gama de entrada, intervalo de variação onde a grandeza é medida, normalmente de forma linear
- a sensibilidade e a gama de saída, sendo o sinal de saída normalmente eléctrico, analógico ou digital

- a precisão da medida, majorante do erro absoluto entre o valor ideal e fornecido pelo sensor
- a constante de tempo, para sensores com resposta lenta (comparativamente com as frequências do movimento do avião), aproximados normalmente por um sistema passa-baixo de primeira ordem
- o ruído presente à saída, medindo em termos de desvio padrão a componente aleatória do sinal de saída do sensor

Sem entrar em muitos pormenores, vamos apresentar os princípios físicos de alguns sensores importantes.

5.2.2 altitude barométrica

A altitude barométrica é fornecida por um sensor de pressão estática, correspondendo então a variação de pressão medida desde o solo ao peso da coluna de ar:

$$p - p_{SL} = \int_0^h \rho(z) g dz \simeq \bar{\rho} g h$$

Existem tabelas e fórmulas lineares ou mais complexas relacionando a pressão e a altitude. A precisão do sensor em termos de altitude está no entanto limitada pela variação da pressão atmosférica ao nível do solo, que pode variar de cerca de ± 25 mbar, i.e. 200 m!

5.2.3 Velocidade

A velocidade "barométrica" é medida por um tubo de Pitot pela pressão dinâmica, diferença entre a pressão total e pressão estática:

$$P_d = P_t - P_e = \frac{1}{2} \rho V_t^2$$

Não havendo medição da densidade do ar, esta é assumida igual ao valor ao nível do mar e fornece a velocidade calibrada (CAS) indicada pelo velocímetro. Esta é a IAS (*Indicated Air Speed*) quando somados os erros da medição.

Para efeitos de controlo de tráfego aéreo é a IAS que é a mais usual.

Os pilotos automáticos modernos têm um calculador dos dados aerodinâmicos para estimar a TAS.

5.2.4 Razões angulares

As razões angulares são normalmente medidas por giroscópios de razão. Estes instrumentos delicados aplicam o princípio giroscópio para medir velocidades angulares a partir do momento provocado sobre um corpo dotado de um elevado momento angular: $M = K \times \omega$

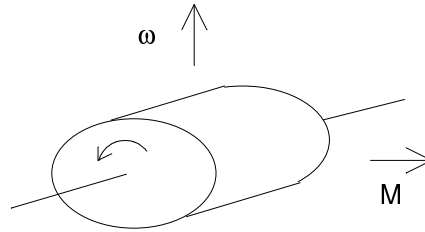


Figura 5.1: Giroscópio

O momento é medido através de uma mola e um sensor de posição fornecendo um sinal de saída proporcional à velocidade de rotação em torno do eixo sensível.

Outros princípios são eventualmente utilizáveis, com equipamentos piezo-eléctricos ou laser, fornecendo resultados comparáveis ou melhores.

5.2.5 Atitude

Os ângulos de picada e rolamento são fornecidos por um giroscópio vertical, instrumento ainda mais delicado, onde um corpo em rotação é mantido na vertical pela rotação e por sensores da gravidade, permitindo assim medir os dois ângulos de Euler entre a vertical e o corpo do avião.

5.2.6 Aceleração

Os acelerómetros são sensores que medem a força de inércia

$$f = ma$$

provocada pelas acelerações lineares a que é sujeito o corpo do avião.

Os acelerómetros utilizados na aeronáutica são normalmente do tipo servo-controlados, para os quais a força de inércia é medida por equilíbrio com uma força eléctrica necessária para manter a massa de teste na sua posição original. O sinal de saída é uma corrente directamente proporcional à aceleração, com uma precisão que pode ir até $10^{-4}G$.

5.2.7 Ângulos aerodinâmicos

Se necessário, os ângulos de ataque e de derrapagem são medidos por alhetas ou por sensores de pressão diferencial.

5.2.8 Rádio-altímetro

O rádio-altímetro, para altitudes reduzidas de até 3000 pés, mede a altitude até ao solo por medição do tempo entre emissão e reflexão de uma onda electromagnética. A precisão depende da atitude do avião e melhora ao se aproximar do solo. O ruído depende da qualidade do solo. É utilizado essencialmente na aterragem.

5.2.9 Receptor de GPS

O receptor de GPS (*Global Positioning System*) é um tipo de sensores recentemente introduzidos e ainda na fase de teste para utilização na aviação comercial, que a partir da medição dos ângulos entre rádio faróis instalados em satélites dedicados em rotação em torno da terra (a constelação total tem 24 satélites) fornece uma medição absoluta da posição do avião, nas três coordenadas latitude, longitude e altitude.

A informação do receptor de GPS é do tipo digital, emitida numa porta série a uma frequência típica de cerca de 1 Hz. Em termos absolutos (sensor embarcado), o sensor tem uma precisão de 10 a 100 m na horizontal e 20 a 200 m na vertical, suficiente para a gestão da rota mas insuficiente para a fase terminal.

Configurações diferenciais e melhorias nos algoritmos de processamento e filtragem permitem reduzir a precisão para cerca de um metro.

5.2.10 Actuadores

Esquecendo a força propulsiva, os actuadores utilizados em controlo de voo destinam-se ao posicionamento das superfícies de controlo.

O movimento destas é normalmente conseguido por acção hidráulica, tendo assim uma conversão eléctrico-hidráulica, com uma eléctrico-válvula controlando um cilindro que exerce a força necessária ao movimento pretendido da superfície. Um circuito de óleo sob pressão é assim necessário, complicando a rede de sistemas instalados, mas a energia hidráulica tem vantagens em termos de força disponível, fiabilidade, tolerância a resistências mecânicas...

Em algumas circunstâncias, para energias menores, actuadores eléctrico-mecânicos, com motores eléctricos e desmultiplicações adequadas são utilizados (para os *flaps* por exemplo).

A dinâmica do actuador é frequentemente aproximada sob a forma de um simples passa-baixo de 1ª ordem.

5.3 Perturbações atmosféricas

Um avião em voo atmosférico constitui um sistema estocástico, para o qual as entradas são de três tipos:

- ordens de controlo, emitidas por um piloto manual ou controlador automático
- ruído do processo, perturbações influenciando e alterando as variáveis do processo
- ruído do sistema, dos sensores ou de outro elemento do sistema de controlo

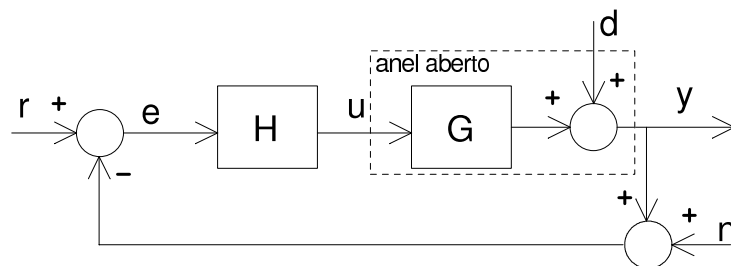


Figura 5.2: Diagrama de blocos com influência de perturbações e ruído

O ruído do processo corresponde essencialmente à influência da atmosfera sobre o movimento do avião, resultando nas denominadas perturbações atmosféricas (*gust disturbances*).

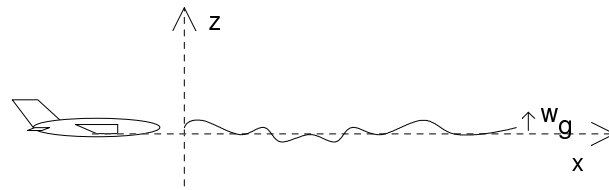


Figura 5.3: Efeito da turbulência no avião

O ar onde se desloca o avião nunca está perfeitamente parado e os movimentos da massa de ar resultam em movimento do avião.

A origem destes movimentos atmosféricos encontra-se:

- no próprio vento e
- na turbulência, turbulência de convecção no seio e em torno dos conjuntos de nuvens e turbulência do ar livre, resultando dos gradientes de temperatura no solo e junto ao relevo...

As perturbações atmosféricas são de natureza não determinística e frequentemente não previsíveis.

São tradicionalmente classificadas segundo três tipos, cada um descrito por um modelo matemático específico obviamente simplificado:

- perturbações discretas, correspondendo a um movimento do ar localizado e isolado;
- turbulência contínua, essencialmente aleatória, de distribuição não uniforme e correspondendo a variações mais lentas;
- a variação abrupta da velocidade do vento ao longo do corpo do avião de forma imprevista (*wind shear*), eventualmente no sentido descendente (*microbursts*): é um fenómeno muito perigoso, nomeadamente quando ocorre muito perto do solo.

5.3.1 Influência na dinâmica e equações de estado

Para a modelação física da influência das perturbações atmosféricas, considere-se um avião entrando numa zona onde existe um vento com uma dada distribuição, que se assume constante no tempo mas distribuída no espaço:

$$\begin{aligned}u_g &= u_g(x) \\v_g &= v_g(x) \\w_g &= w_g(x)\end{aligned}$$

A distribuição espacial, assumida constante no tempo ou não, é transformada pela deslocação do avião numa distribuição temporal:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V / \partial t}{\partial x / \partial t} = \frac{1}{U_0} \frac{\partial V}{\partial t}$$

O movimento perturbado do avião resultará então das forças aerodinâmicas provocadas não pela velocidade do avião num ar parado mas pela velocidade relativa, a **velocidade ar**:

$$V_a = \begin{bmatrix} u - u_g \\ v - v_g \\ w - w_g \end{bmatrix}$$

A distribuição de velocidades ao longo do corpo do avião, asas, fuselagem e cauda, provoca igualmente uma distribuição de velocidades angulares:

$$\begin{aligned} q_g &= -\frac{\partial w_g}{\partial x} \\ p_g &= \frac{\partial w_g}{\partial y} \\ r_g &= \frac{\partial v_g}{\partial x} \end{aligned} \Rightarrow \omega_a = \begin{bmatrix} p - p_g \\ q - q_g \\ r - r_g \end{bmatrix}$$

As alterações provocadas pela introdução das velocidades do ar na expressão das forças aerodinâmicas resulta na aparição de um termo suplementar nas equações de estados, termo de entrada das perturbações atmosféricas na dinâmica do movimento do avião:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{E}\mathbf{d}$$

no movimento longitudinal:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \\ \dot{q} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} X_u & X_w & X_q - W_0 & -gc_{\theta_0} \\ Z_u & Z_w & Z_q + U_0 & -gs_{\theta_0} \\ \tilde{M}_u & \tilde{M}_w & \tilde{M}_q & \tilde{M}_\theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ w \\ q \\ \theta \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} X_{\delta_E} & X_{\delta_T} \\ Z_{\delta_E} & Z_{\delta_T} \\ \tilde{M}_{\delta_E} & \tilde{M}_{\delta_T} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_E \\ \delta_T \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} -X_u & -X_w & -X_q \\ -Z_u & -Z_w & -Z_q \\ -\tilde{M}_u & -\tilde{M}_w & -\tilde{M}_q \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_g \\ w_g \\ q_g \end{bmatrix} \end{aligned}$$

no movimento lateral:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{p} \\ \dot{r} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} Y_v & Y_p - W_0 & Y_r - U_0 & gc_{\theta_0} \\ L'_v & L'_p & L'_r & 0 \\ N'_v & N'_p & N'_r & 0 \\ 0 & 1 & t_{\theta_0} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ p \\ r \\ \phi \end{bmatrix} \\
&+ \begin{bmatrix} Y_{\delta_A} & Y_{\delta_R} \\ L'_{\delta_A} & L'_{\delta_R} \\ N'_{\delta_A} & N'_{\delta_R} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_A \\ \delta_R \end{bmatrix} \\
&+ \begin{bmatrix} -Y_v & -Y_p & -Y_r \\ -L'_v & -L'_p & -L'_r \\ -N'_v & -N'_p & -N'_r \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_g \\ p_g \\ r_g \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

5.3.2 Perturbações discretas e *wind shear*

O modelo matemático das perturbações discretas mais aceite tem a forma de um período de coseno:

$$x_g(t) = \frac{k}{T} \left(1 - \cos \left(\frac{2\pi t}{T} \right) \right)$$

onde o comprimento temporal da perturbação depende de um comprimento característico que é usualmente assumido como igual a 25 vezes a corda média da asa $L = 25\bar{c}$.

Só em análises muito mais avançadas serão estudadas as eventuais consequências de uma variação repentina e radical do vento, o denominado *wind shear*, tipicamente modelado como um degrau ou escalão.

5.3.3 Turbulência contínua

A perturbação discreta, isolada, corresponde ao caso limite, simplificado.

A velocidade do avião e a própria variação da perturbação no espaço e no tempo levam a considerar uma **distribuição contínua** de perturbações, cuja análise estatística resulta no espectro de potência da perturbação e num modelo aproximado da sua dinâmica permitindo simulá-la.

A análise estatística da distribuição espacial da turbulência atmosférica (que depende em particular da altitude) resultou em dois modelos utilizados na aeronáutica:

- o **espectro de Von Karman** é talvez o mais rigoroso:

$$\Phi_u = \sigma_u^2 \frac{2L_u}{\pi} \frac{1}{\left(1 + (1.339L_u\Omega)^2 \right)^{5/6}}$$

- o **espectro de Dryden** é mais fácil de implementar nas simulações (sem potências fracionárias) e para a grande maioria dos casos constitui uma boa aproximação:

$$\Phi_u = \sigma_u^2 \frac{2L_u}{\pi} \frac{1}{(1 + L_u^2\Omega^2)^2}$$

Ambos os modelos introduzem comprimentos característicos L que dependem da altitude e uma constante descrevendo a intensidade da perturbação σ .

No modelo de Dryden na norma MIL-F-8785C, o comprimento característico (*scale length*) é dado por:

$$\begin{cases} h_0 = 1750 \text{ ft} = 533 \text{ m} \\ h_1 = 706 \text{ ft} = 215 \text{ m} \\ h > h_0 \implies L_u = L_v = L_w = h_0 \\ h < h_0 \implies L_u = L_v = h \left(\frac{1+h_0/h_1}{1+h/h_1} \right)^{1.2} \text{ and } L_w = h \end{cases}$$

A intensidade é frequentemente considerada isotrópica para $h > h_0$:

$$\frac{\sigma_u}{L_u} = \frac{\sigma_v}{L_v} = \frac{\sigma_w}{L_w}$$

e tem um valor máximo, com probabilidade de 10^{-6} , correspondendo a uma situação de tempestade, para o qual : $\sigma_u = \sigma_v = \sigma_w = 10 \text{ [m/s]}$ a 10000 pés.

Para altitudes médias e altas, a intensidade de turbulência está apresentada na figura a seguir (MATLAB/aeroblocks).

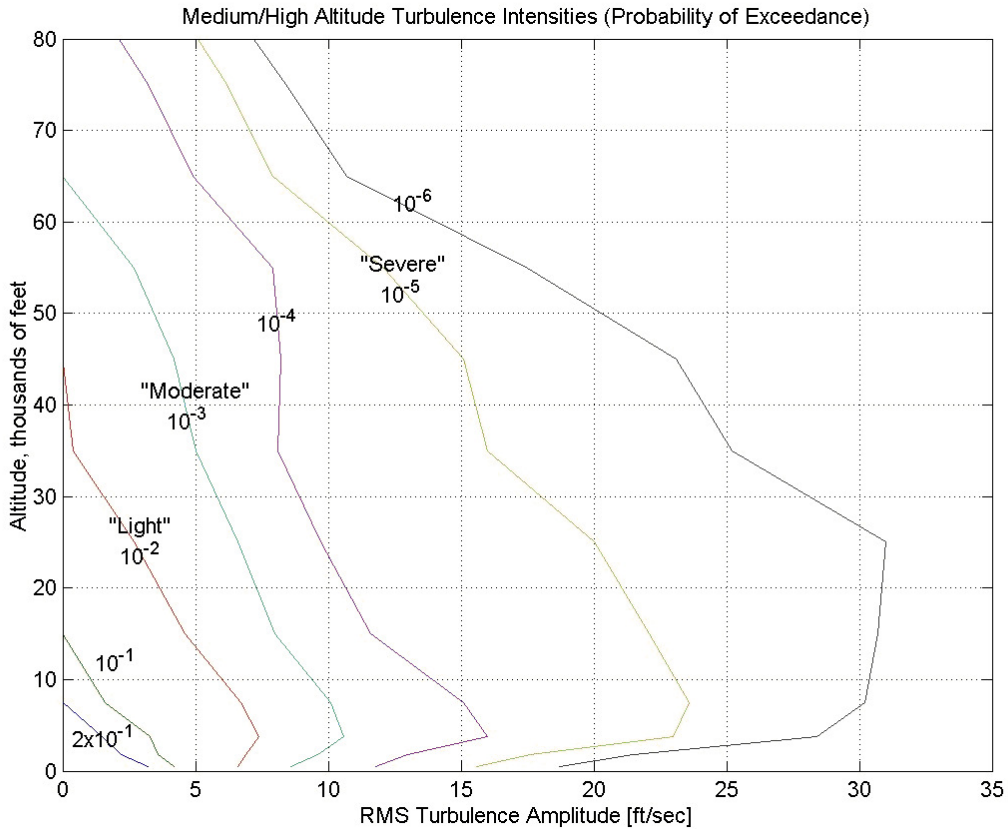


Figura 5.4: Intensidade de turbulência com a altitude

Adoptando assim o modelo de Dryden, obtém-se um conjunto de três espectros espaciais, convertidos em espectros temporais através da relação: $\omega = \Omega U_0$

$$\Phi(\omega) = \frac{1}{U_0} \Phi\left(\frac{\omega}{U_0}\right)$$

de onde se podem deduzir os filtros (passa-baixo) que permitem gerar a turbulência a partir de ruído branco unitário (cujo espectro é constante e igual à unidade):

$$\Phi(\omega) = G(j\omega) G(-j\omega) = |G(s)|_{s=j\omega}^2 \Phi_{ruído}$$

correspondendo ao diagrama de blocos da figura seguinte.



Figura 5.5: Geração do ruído de turbulência

Três filtros são assim deduzidos para as velocidades:

espectro	filtro	constantes
$\Phi_u(\omega) = \sigma_u^2 \frac{2L_u}{\pi U_0} \frac{1}{(1+L_u^2 \omega^2 / U_0^2)^2}$	$G_u(s) = \frac{\sigma_u K_u}{(1+T_u s)^2}$	$\begin{cases} K_u = \sqrt{2L_u / \pi U_0} \\ T_u = L_u / U_0 \end{cases}$
$\Phi_v(\omega) = \sigma_v^2 \frac{2L_v}{\pi U_0} \frac{1+3L_v^2 \omega^2 / U_0^2}{(1+L_v^2 \omega^2 / U_0^2)^2}$	$G_v(s) = \frac{\sigma_v K_v (1+\sqrt{3}T_v s)}{(1+T_v s)^2}$	$\begin{cases} K_v = \sqrt{L_v / \pi U_0} \\ T_v = L_v / U_0 \end{cases}$
$\Phi_w(\omega) = \sigma_w^2 \frac{2L_w}{\pi U_0} \frac{1+3L_w^2 \omega^2 / U_0^2}{(1+L_w^2 \omega^2 / U_0^2)^2}$	$G_w(s) = \frac{\sigma_w K_w (1+\sqrt{3}T_w s)}{(1+T_w s)^2}$	$\begin{cases} K_w = \sqrt{L_w / \pi U_0} \\ T_w = L_w / U_0 \end{cases}$

e para as razões angulares:

espectro	filtro	constantes
$\Phi_p(\omega) = \sigma_w^2 \frac{\frac{0.8}{L_w U_0} \left(\frac{\pi L_w}{4b}\right)^{1/3}}{1 + \left(\frac{4b\omega}{\pi U_0}\right)^2}$	$G_p(s) = \frac{\sigma_w K_p}{1+T_p s}$	$\begin{cases} K_p = \sqrt{\frac{0.8 \left(\frac{\pi L_w}{4b}\right)^{1/3}}{L_w U_0}} \\ T_u = 4b / \pi U_0 \end{cases}$
$\Phi_q(\omega) = \frac{\omega^2 / U_0^2}{1 + \left(\frac{4b\omega}{\pi U_0}\right)^2} \Phi_w(\omega)$	$G_q(s) = \frac{-s/U_0}{1+T_q s} G_w(s)$	$T_q = \frac{4b}{\pi U_0}$
$\Phi_r(\omega) = \frac{\omega^2 / U_0^2}{1 + \left(\frac{3b\omega}{\pi U_0}\right)^2} \Phi_v(\omega)$	$G_r(s) = \frac{s/U_0}{1+T_r s} G_v(s)$	$T_r = \frac{3b}{\pi U_0}$

Pode então integrar-se a perturbação num diagrama de blocos no SIMULINK tal como na figura seguinte.

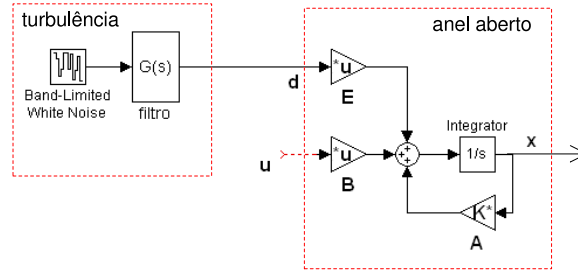


Figura 5.6: Entrada da turbulência no modelo Simulink.

5.4 Aeroelasticidade

As equações do movimento do avião foram obtidas através de algumas aproximações entre as quais está o considerar o avião como um **corpo rígido**.

Mas para aviões de grande porte ou com grandes preocupações de redução de peso, **a rigidez já não é garantida** e, em particular, as asas vão ser submetidas a movimentos de flexão e de torção, provocados pelo movimento e, em retorno, tendo a sua influência sobre o movimento.

É necessário verificar que os movimentos "aeroelásticos" das asas não são excessivos e não põem em causa a sua resistência (*flutter*).

É bom averiguar em que medida o movimento global do avião é alterado.

5.4.1 Flexão da asa

Considere-se uma asa submetida aos efeitos das forças aerodinâmicas provocadas pelo escoamento.

A força de sustentação é função do ângulo de ataque:

$$L = L_0 + L_\alpha = P_d S C_{L_\alpha} (\alpha - \alpha_0)$$

com um termo perturbado simplesmente proporcional ao ângulo de ataque: $L_\alpha = K_L \alpha$

Se considerarmos uma asa rígida ainda mas com uma ligação elástica à fuselagem

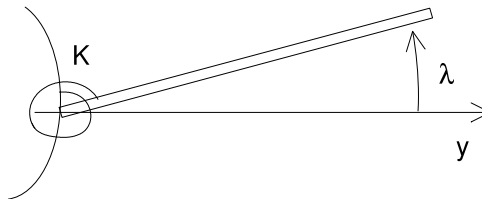


Figura 5.7: Flexão da asa

com constante da mola K , momento de inércia I , submetido à força da mola e à força aerodinâmica de sustentação.

A flexão pode ser aproximada pela fórmula (2ª lei de Newton):

$$I\ddot{\lambda} = -K\lambda - P_d \int_0^{b/2} \bar{c}y C_{L_\alpha} \alpha dy = -K\lambda - \frac{K_L b^2}{12V} \dot{\lambda}$$

onde λ é o ângulo da rotação, b a envergadura, \bar{c} a corda média, P_d a pressão dinâmica e α foi substituído utilizando $\alpha \simeq \frac{w}{V} = \frac{y\dot{\lambda}}{V}$.

Deduz-se então um sistema de segunda ordem $\ddot{\lambda} + 2\xi\omega_n\dot{\lambda} + \omega_n^2\lambda = 0$ onde

$$\begin{cases} \omega_n = K/I \\ \xi = \frac{K_L b^2}{24V\sqrt{KI}} \end{cases}$$

com um amortecimento de origem aerodinâmica.

$$\xi = \frac{K_L b^2}{24V\sqrt{KI}} = \frac{\frac{1}{2}\rho S V^2 C_{L_\alpha} b^2}{24V\sqrt{KI}}$$

ou seja

$$\xi = \frac{\rho S C_{L_\alpha} b^2}{48\sqrt{KI}} V$$

crescente com a velocidade!

5.4.2 Torção da asa

Um desenvolvimento idêntico mas agora com a asa em torção, sendo o ângulo de ataque local fornecido pelo próprio ângulo de torção (γ)

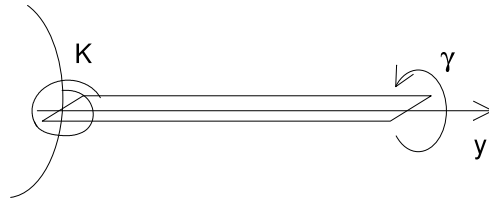


Figura 5.8: Torção da asa

fornece uma equação de segunda ordem:

$$I\ddot{\gamma} + (K_\gamma - h\bar{c}K_\alpha)\gamma = 0$$

onde $h\bar{c}$ é a distância entre centro de pressões e eixo de rotação.

A fórmula mostra que neste caso as forças aerodinâmicas não introduzem amortecimento mas reduzem o efeito de mola e, após um certo valor crítico, até podem causar a divergência do movimento.

5.4.3 Equações da dinâmica

Movimentos aeroelásticos de flexão e de torção, da asa e fuselagem, podem ser descritos através das suas componentes modais e permitem inserir essas equações de movimento elástico (com uma forma similar às acima apresentadas) nas equações de estado do movimento do avião.

Obtém-se assim um sistema de equações aumentado que descreve o movimento do avião flexível, com

os estados relativos ao movimento do corpo rígido e

os estados relativos aos movimentos de flexão e torção, com **dois estados suplementares para cada modo elástico** considerado.

5.5 Controlo avançado

Escalonamento de ganhos

A primeira variante, no limite do controlo linear e desde já integrada nos pilotos automáticos, corresponde ao escalonamento de ganhos, utilizando a solução linear em função da condição de voo corrente. Os parâmetros mais importantes são a velocidade ar e a altitude, mas devemos citar também a massa e matriz de inércia que variam com o consumo de combustível, a configuração de voo, com flaps ou não, etc:

$$\dot{X} = A(V_t, h, \dots)(X - X_0) + B(V_t, h, \dots)(U - U_0)$$

$$U = U_0 - K(V_t, h, \dots)(X - X_0)$$

No decorrer do voo, o ganho K assim como estados e entradas de equilíbrio (X_0, U_0) são escalonados de acordo com o modelo mais apropriado (V_t, h, \dots).

Controlo activo

A definição do controlo activo baseia-se essencialmente no uso de controlo moderno multivariável

- para otimizar o uso dos actuadores usuais ou adicionais
- por forma a garantir uma excepcional manobrabilidade ou
- reduzir os esforços impostos na estrutura, componentes e pilotos/passageiros/carga.

Aviões estaticamente instáveis, muito flexíveis ou que se pretendem isolar das perturbações atmosféricas são exemplos onde estas noções podem ser aplicadas.

A síntese dos controladores seguirá os procedimentos de controlo moderno apresentados, sendo necessário adaptar os modelos ou as funções de custo ao problema em análise.

Controlo não linear e adaptativo

Ao nível da teoria de controlo, regressando aos modelos do movimento do avião como corpo rígido: é necessário **analisar os limites impostos pelas aproximações** utilizadas, para a linearização em particular.

Será necessário **verificar a robustez** das soluções (nomeadamente perante a variação do ponto de referência, a incerteza dos modelos utilizados, a existência de ruídos) ou estudar formas de incluir na própria síntese do controlador os objectivos de robustez e/ou de optimização.

Entre as metodologias orientadas para esta análise podem mencionar-se:

- a teoria do controlo robusto H_2 , H_∞ etc
- o controlo adaptativo (o escalonamento de ganhos é a versão mais simples)
- controlo não linear (baseado na teoria de estabilidade de Lyapunov ou na dinâmica inversa, etc)

Apêndice A

Anexos

A.1 Transformada de Laplace

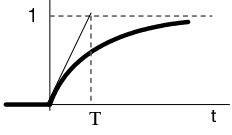
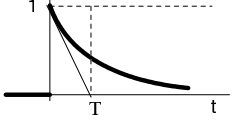
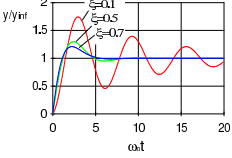
A Transformada de Laplace (TL) de um sinal analógico $x(t)$ é a função complexa da variável complexa s definida pelo integral:

$$X(s) = \mathcal{L}[x(t)](s) = \int_0^{\infty} x(t) e^{-st} dt$$

Se a variável de origem (t) for o tempo (em segundos), a variável (s) é uma frequência radial (em rad/s).

As propriedades da TL essenciais para a teoria de sistemas são:

1. linearidade: $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C} \quad \mathcal{L}[\alpha x(t) + \beta y(t)] = \alpha X(s) + \beta Y(s)$
2. unicidade/inversão: $(\mathcal{L}[x(t)] = \mathcal{L}[y(t)] \quad \forall s \in \mathbb{C}) \Leftrightarrow (x(t) = y(t) \quad \forall t > 0)$
3. derivada: $\mathcal{L}\left[\frac{dx}{dt}\right] = sX(s) - x_0$ onde $x_0 = x(t=0^+)$
e para condições iniciais nulas resulta em $\mathcal{L}\left[\frac{dx}{dt}\right] = sX(s)$
4. degrau unitário: $\mathcal{L}[h(t)] = \frac{1}{s}$ onde $h(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } t \leq 0 \\ 1 & \text{para } t > 0 \end{cases}$
5. pólo simples: $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{T}{1+Ts}\right] = e^{-t/T}h(t)$
6. par de pólos complexos conjugados: $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}\right] = \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \sin\left(\omega_n \sqrt{1-\xi^2} t\right)$

sistema	FT	resposta au degrau unitário ($t > 0$)	figura
passa-baixo unit.	$\frac{1}{1+Ts}$	$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{1+Ts} \frac{1}{s} \right]$ $= \int_0^t \left(\frac{e^{-t/T}}{T} \right) dt = (1 - e^{-t/T}) h(t)$	
passa-alto unit.	$\frac{Ts}{1+Ts}$	$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{Ts}{1+Ts} \frac{1}{s} \right]$ $= e^{-t/T} h(t)$	
passa-baixo unit.	$\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$ com $1 \geq \xi \geq 0$	$y(t) = 1 - e^{-\xi\omega_n t} \cos(\sqrt{1-\xi^2}\omega_n t)$ $- \frac{\xi e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\sqrt{1-\xi^2}\omega_n t)$	

Um sistema, com entrada $x(t)$ e saída $y(t)$, com valores iniciais nulos, descrito pela equação diferencial em ordem ao tempo de coeficientes constantes

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i y}{dt^i} = \sum_{k=0}^m b_k \frac{d^k x}{dt^k}$$

será igualmente descrito pela transformada desta equação, resultando numa equação algébrica nas transformadas X e Y:

$$\left(\sum_{i=0}^n a_i s^i \right) Y(s) = \left(\sum_{k=0}^m b_k s^k \right) X(s)$$

a partir da qual é definida a noção de função de transferência (FT):

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{\sum_{k=0}^m b_k s^k}{\sum_{i=0}^n a_i s^i} = K \frac{\prod_{k=0}^m (s - z_k)}{\prod_{i=0}^n (s - p_i)}$$

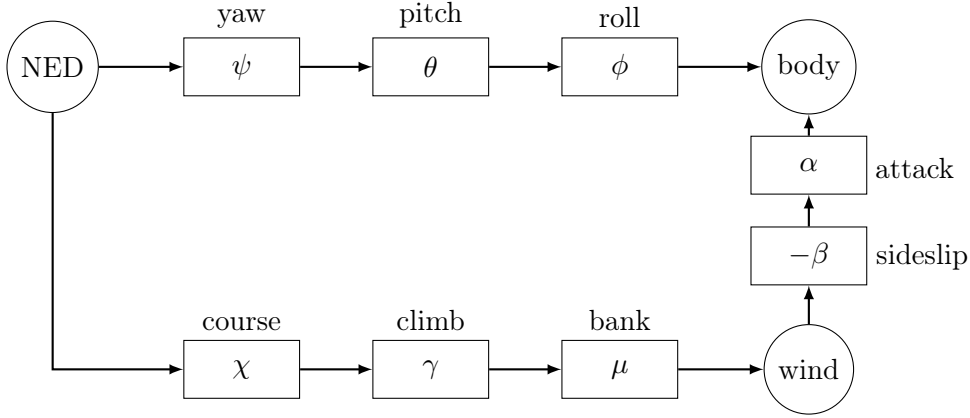
obtida como a razão de dois polinómios, numerador $N(s)$ e denominador $D(s)$, cujas raízes são respectivamente os zeros (z_k) e os pólos (p_i) da função de transferência. O grau (n) do denominador é chamado a ordem do sistema.

A resposta de um sistema a uma solicitação dada é obtida pelo produto da FT pela entrada:

$$Y(s) = G(s) X(s) \Leftrightarrow y(t) = \mathcal{L}^{-1} [G(s) X(s)]$$

A.2 Relações entre ângulos e referenciais

Esquema mostrando as rotações e os respectivos ângulos entre referenciais: NED (=inercial), local do corpo e aerodinâmico:



A.3 Regulador quadrático linear (LQR)

LQR optimal linear output feedback controller (see [2, 6])

Assume a LTI system, described in continuous state space formulation by:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \\ x(0) \end{cases}$$

Let us consider a quadratic performance index or cost function, based on the state and input:

$$J = \int_0^\infty (x^T Q x + u^T R u) dt$$

and an output feedback is searched in the form:

$$u = -Ky$$

then the close loop dynamic equation is given by:

$$\dot{x} = (A - BKC) x$$

leading to a close loop cost function:

$$J = \int_0^\infty x^T (Q + C^T K^T R K C) x dt = \int_0^\infty x^T S x dt$$

Assume there exists a symmetric matrix $P \geq 0$ so that

$$\frac{d}{dt} (-x^T P x) = x^T S x$$

then J may be written

$$J = x^T(0) P(0) x(0) - x^T(\infty) P(\infty) x(\infty) = x^T(0) P(0) x(0)$$

If P satisfies the above differential equation:

$$x^T S x = -\dot{x}^T P x - x^T \dot{P} x - x^T P \dot{x} = -x^T A_c^T P x - x^T \dot{P} x - x^T P A_c x$$

or

$$0 = x^T (\dot{P} + A_c^T P + P A_c + S) x$$

leading to

$$\dot{P} + A_c^T P + P A_c + Q + C^T K^T R K C = 0$$

For the stationary case, we thus have the final Riccati equation (symmetric linear matrix equation):

$$G = A_c^T P + P A_c + Q + C^T K^T R K C = 0$$

Hamiltonian approach

If an initial state matrix is defined: $X = x(0)x(0)^T$, then the cost function results in $J = \text{tr}(PX)$.

The minimization of the cost function subject to the Lyapunov constraint is performed through the minimization of the Hamiltonian:

$$H = \text{tr}(PX) + \text{tr}(GL)$$

where L is a symmetric matrix of Lagrange multipliers.

Introducing the matrix trace derivation properties: $\frac{\partial \text{tr}(ABC)}{\partial B} = A^T C^T$ and $\frac{\partial y}{\partial B^T} = \left(\frac{\partial y}{\partial B}\right)^T$, the optimization process leads to:

1. $\frac{\partial H}{\partial L} = G = PA_c + A_c^T P + C^T K^T R K C + Q = 0$
2. $\frac{\partial H}{\partial P} = X + LA_c + A_c L = 0$
3. $\frac{1}{2} \frac{\partial H}{\partial K} = RKCLC^T - B^T PLC^T = 0$

The feedback gain is obtained from the last equation:

$$K = R^{-1} B^T PLC^T (CLC^T)^{-1}$$

Alternative deduction

Since R is positive definite, it may be written as $R = T^T T$ and the Riccati equation may be written

$$G = (A - BKC)^T P + P(A - BKC) + C^T K^T T^T T K C + Q = 0$$

or

$$G = A^T P + PA + (TKC - T^{-T} B^T P)^T (TKC - T^{-T} B^T P) - PBR^{-1} B^T P + Q$$

Let us introduce the matrix derivation :

$$\frac{\partial}{\partial X} (Xa + b)^T C (Xa + b) = (C + C^T) (Xa + b) a^T$$

Solving the equation $G = 0$, where G is a quadratic function leads to the minimization of G with respect to the feedback Gain K leads to find the solution of

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial K} = 0 &= \frac{\partial}{\partial K} (TKC - T^{-T} B^T P)^T (TKC - T^{-T} B^T P) \\ &= \frac{\partial}{\partial K} (TKC - T^{-T} B^T P)^T (T^{-T} T^{-1}) (KC - R^{-1} B^T P) \\ &= \left(T^{-T} T^{-1} + (T^{-T} T^{-1})^T \right) (KC - R^{-1} B^T P) C^T \end{aligned}$$

leading to

$$K = R^{-1} B^T P C^T (C C^T)^{-1}$$

which is the full state feedback right-multiplied by the pseudo-inverse of C !

Full state feedback

For a full state feedback, the feedback gain is reduced to:

$$K = R^{-1}B^T P$$

leading to

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0$$

which is a Riccati equation solved (in Matlab with function **are**, for Algebraic Riccati Equation) by

$$P = \text{are}(A, BR^{-1}B^T, Q)$$

and thus the LQR state feedback design is a one-step straightforward process.

From Riccati equation to LQR

Consider the LTI system as previously defined

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx\end{aligned}$$

with n states, m inputs and p outputs.

Assume you want to minimize the quadratic cost for $Q = I_p$ and $R = I_m$

$$J = \int_0^\infty (y^T y + u^T u) dt = \|y\|_2^2 + \|u\|_2^2$$

Introduce the Riccati equation

$$A^T P + PA - PBB^T P + C^T C = 0$$

for which a solution is the symmetric matrix P .

Let us assume $V(x) = x^T P x$, then the derivative is

$$\dot{V}(x) = \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x}$$

or

$$\dot{V}(x) = (Ax + Bu)^T P x + x^T P (Ax + Bu)$$

$$\dot{V}(x) = u^T B^T P x + x^T P B u + x^T (A^T P + PA) x$$

$$\dot{V}(x) = u^T B^T P x + x^T P B u + x^T (PBB^T P - C^T C) x$$

and finally

$$\dot{V}(x) = (u + B^T P x)^T (u + B^T P x) - u^T u - y^T y$$

Then, returning to the Lyapunov function

$$\int_0^\infty \dot{V}(x) dt = V(x(\infty)) - V(x(0)) = \|u + B^T P x\|_2^2 - \|y\|_2^2 - \|u\|_2^2$$

or

$$\|y\|_2^2 + \|u\|_2^2 = \|u + B^T P x\|_2^2 + V(x(0)) - V(x(\infty))$$

If the system is stable, the last term vanishes.

The minimum is thus obtained with the state feedback given by

$$u = -B^T P x$$

Bibliografia

- [1] *Flight Stability and Automatic Control*, 2nd Edition , Robert Nelson, 1998, McGraw-Hill
- [2] *Aircraft Control and Simulation*, 2nd Edition, Brian Stevens & Frank Lewis, 2003, Wiley-Interscience
- [3] *Automatic Flight Control Systems*, Donald McLean, 1990, Prentice Hall
- [4] *Aerodynamics, Aeronautics and Flight Mechanics*, Barnes McCormick, John Wiley & Sons, 1995
- [5] <http://www.u-dynamics.com/aerosim> (unavailable as of 2 march 2022)
- [6] *Modern Control Engineering*, 3rd ed., K. Ogata, Prentice-Hall Int., 1997