Na aula do dia 10 de setembro, analisamos o pior caso do tempo de execução do insertion-sort. Chegamos à (fórmula de) recorrência:

$$def.: \begin{cases} T(1) = c \\ T(n) = T(n-1) + c * n + c \end{cases}$$

Um colega propôs que a fórmula abaixo equivale à recorrência (com a vantagem de não ser calculada a partir dos termos anteriores), mas não conhecíamos nenhuma técnica para demonstrar que ela é válida para todo $n > 0$.

$$conjectura: \; T(n) = c * \left(2n - 1 + \tfrac{n(n-1)}{2}\right)$$

nota: Nas notas da aula de 10 de setembro, faltou a constante que incluí agora.

A técnica que, agora, conhecemos é a demonstração por indução. Então vamos demonstrar, por indução, que a conjectura equivale à definição.

Iniciando pelo caso base:

$base$: para $n = 1$
(pela def.) $T(n) = c$
(pela conj.) $T(n) = c$

Como os resultados são iguais, para o caso base, definição e conjectura são equivalentes.

Escolhe-se a estratégia de demonstração do passo: *Supondo que vale para n-1, demonstre que vale para n.* Desta forma, a hipótese de indução é:

$$T(n-1) = c * \left(2(n-1) - 1 + \tfrac{(n-1)(n-2)}{2}\right)$$

A hipótese de indução pode ser usada na demonstração do passo de indução, quantas vezes for necessária e quando for conveniente.

Seguindo para a demonstração, inicia-se com alguma verdade, por exemplo, pela definição:

$$T(n) = T(n-1) + c * n + c$$

substituindo $T(n-1)$ pela hipótese de indução e calculando, obtém-se:

$$T(n) = c * \left(2(n-1) - 1 + \tfrac{(n-1)(n-2)}{2} + n + 1\right)$$
$$T(n) = c * \left(3n - 2 + \tfrac{(n-1)(n-2)}{2}\right)$$

Como a fórmula em que se quer chegar contém o termo $2n - 1$, então já o separo, o que resulta:

$$T(n) = c * \left(2n - 1 + (n-1) + \tfrac{(n-1)(n-2)}{2}\right)$$

Agora trabalho sobre o restante da expressão para chegar à fórmula:

$T(n) = c * \left(2n - 1 + \frac{2(n-1)+(n-1)(n-2)}{2}\right)$

Vou ocupar-me somente com o numerador:

$2(n-1) + (n-1)(n-2) = 2n - 2 + n^2 - 3n + 2 = n^2 - n = n(n-1)$

Voltando aa expressao inteira:

$T(n) = c * \left(2n - 1 + \frac{n(n-1)}{2}\right)$

Que é igual à conjectura, logo, demonstramos que a conjectura e definição são equivalentes para todo $n > 0$.