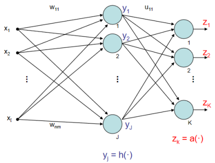
I & W



Neuronale Netze/Deep Learning und Predictive Maintenance

Felix Neubürger

01. Oktober 2025

Fachhochschule Südwestfalen, Ingenieurs- & Wirtschaftswissenschaften

Inhalte der Vorlesung

- **Mathematischer Refresher**: Lineare Algebra, Differentiation, Notation
- **Grundlagen Neuronaler Netze**: Perceptron, Universal Approximation Theorem
- **Mathematische Theorie**: Warum funktionieren neuronale Netze?
- **Training und Optimierung**: Gradientenabstieg, Backpropagation, ADAM
- **Deep Learning**: Vanishing Gradients, Aktivierungsfunktionen, tiefe Netze
- **Spezielle Architekturen**: CNNs, RNNs, LSTMs, GANs, Autoencoders

Ziele der Vorlesung - Welche Fragen sollen beantwortet werden?

- **Mathematisch**: Wie funktionieren neuronale Netze wirklich?
- **Theoretisch**: Warum können sie jede Funktion approximieren?
- **Praktisch**: Wie trainiert man sie effizient?
- **Architektur**: Welche speziellen Netze für welche Probleme?
- **Anwendung**: Wann ist Deep Learning die richtige Wahl?

[https://xkcd.com/2451/]

Mathematischer Refresher – Vektoren und Matrizen

- **Vektor**: Spaltenvektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ mit d Komponenten

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix} \tag{1}$$

- **Zeilenvektor**: $\mathbf{x}^T = (x_1, x_2, \dots, x_d)$ (Transponiert)
- **Matrix**: $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit m Zeilen und n Spalten

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{2}$$

Mathematischer Refresher – Grundoperationen

- **Skalarprodukt** (Dot Product): Für $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$

$$\mathbf{x}^T\mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_{i=1}^{d} x_i y_i \tag{3}$$

- **Matrix-Vektor-Multiplikation**: $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m, \quad y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \tag{4}$$

- **Matrix-Matrix-Multiplikation**: $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times k}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{k \times n}$

$$\mathbf{C} = \mathbf{A}\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad c_{ij} = \sum_{\ell=1}^{k} a_{i\ell} b_{\ell j} \tag{5}$$

- **Elementweise Operationen**: Hadamard-Produkt $\mathbf{A} \odot \mathbf{B}$

$$(\mathbf{A} \odot \mathbf{B})_{ij} = a_{ij} \cdot b_{ij} \tag{6}$$

Mathematischer Refresher – Normen und Abstände

- **Euklidische Norm**: $||\mathbf{x}||_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{d} x_i^2}$ (Länge des Vektors)
- **L1-Norm**: $||\mathbf{x}||_1 = \sum_{i=1}^{d} |x_i|$ (Manhattan-Distanz)
- **Unendlich-Norm**: $||\mathbf{x}||_\infty = \max_i |x_i|$ (Maximum-Norm)
- **Frobenius-Norm** (für Matrizen): $||\mathbf{A}||_F = \sqrt{\sum_{i,j} a_{ij}^2}$
- **Einheitsvektor**: $\mathbf{u}$ mit $||\mathbf{u}||_2 = 1$
- **Orthogonale Vektoren**: $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$ wenn $\mathbf{x}^T\mathbf{y} = 0$
- **Linearkombination**: $\mathbf{y} = \alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2 + \ldots + \alpha_k\mathbf{x}_k$

Mathematischer Refresher – Differentiation und Gradienten

- **Partielle Ableitung**: Für $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \lim_{h \to 0} \frac{f(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_i) - f(\mathbf{x})}{h} \tag{7}$$

- **Gradient**: Vektor aller partiellen Ableitungen

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix} \tag{8}$$

- **Kettenregel**: Für $f(g(x))$

$$\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x)) \cdot g'(x) \tag{9}$$

- **Multivariable Kettenregel**: Für $f(\mathbf{u}(\mathbf{x}))$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \sum_j \frac{\partial f}{\partial u_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = \nabla_{\mathbf{u}} f \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} \tag{10}$$

Mathematischer Refresher – Wichtige Funktionen und Eigenschaften

- **Exponentialfunktion**: e^x, Ableitung: $\frac{d}{dx}e^x = e^x$
- **Logarithmus**: $\ln(x)$, Ableitung: $\frac{d}{dx}\ln(x) = \frac{1}{x}$
- **Sigmoid-Funktion**: $\sigma(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$

$$\sigma'(x) = \sigma(x)(1 - \sigma(x)) \tag{11}$$

- **Quadratische Funktion**: $f(x) = ax^2 + bx + c$, Ableitung: $f'(x) = 2ax + b$
- **Produktregel**: $(fg)' = f'g + fg'$
- **Summenregel**: $(f + g)' = f' + g'$
- **Konstante Faktoren**: $(cf)' = cf'$ für Konstante c

Mathematische Notation – Überblick für diese Vorlesung

- **Skalare**: Kleinbuchstaben a, b, c, x, y, z
- **Vektoren**: Fettgedruckte Kleinbuchstaben $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{w}, \mathbf{b}$
- **Matrizen**: Fettgedruckte Großbuchstaben $\mathbf{A}, \mathbf{W}, \mathbf{X}$
- **Funktionen**: f, g, h, L (Verlustfunktion)
- **Aktivierungsfunktionen**: σ, ReLU, tanh
- **Indizes**:
  - i, j, k: Datenindizes, Neuron-Indizes
  - (ℓ): Schicht-Index, z.B. $\mathbf{W}^{(\ell)}$
  - (t): Zeit-/Iterationsindex, z.B. $\mathbf{w}^{(t)}$
- **Wahrscheinlichkeiten**: $P, p, \mathbb{E}[\cdot]$ (Erwartungswert)
- **Approximation**: $\approx$, Proportionalität: $\propto$

Was sind Neuronale Netze und was ist Deep Learning?

- Abstrakt: Verkettung nichtlinearer Abbildungen
- Die Parameter dieser Abbildungen wird mit vorhandenen Daten "gelernt"
- Verschiedene Optimierungsverfahren zur Festlegung der "besten" Parameter

[https://xkcd.com/1838/]

Warum funktionieren Neuronale Netze? – Mathematische Intuition

- **Grundproblem**: Finde eine Funktion $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^k$, die Eingaben $\mathbf{x}$ auf gewünschte Ausgaben $\mathbf{y}$ abbildet
- **Funktionsapproximation**: Neuronale Netze sind universelle Funktionsapproximatoren
- **Komposition einfacher Funktionen**:

$$f(\mathbf{x}) = f_L \circ f_{L-1} \circ \ldots \circ f_2 \circ f_1(\mathbf{x}) \tag{12}$$

- Jede Schicht f_i führt eine **affine Transformation** gefolgt von **Nichtlinearität** aus:

$$f_i(\mathbf{x}) = \sigma_i(\mathbf{W}_i\mathbf{x} + \mathbf{b}_i) \tag{13}$$

- **Warum Nichtlinearität wichtig ist**: Ohne sie wäre das gesamte Netz nur eine lineare Transformation

$$\mathbf{W}_L(\mathbf{W}_{L-1}(\ldots(\mathbf{W}_1\mathbf{x}))) = (\mathbf{W}_L\mathbf{W}_{L-1}\ldots\mathbf{W}_1)\mathbf{x} = \mathbf{W}_{\text{eff}}\mathbf{x} \tag{14}$$

Warum funktionieren Neuronale Netze? – Universal Approximation Theorem

- **Universal Approximation Theorem** [1, 2]:
- Ein Feedforward-Netz mit einer versteckten Schicht kann jede stetige Funktion auf einem kompakten Definitionsbereich beliebig genau approximieren
- **Mathematische Formulierung**: Sei $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine nicht-konstante, beschränkte und monotone Aktivierungsfunktion. Dann kann für jede stetige Funktion $g : [0, 1]^d \to \mathbb{R}$ und $\epsilon > 0$ eine Funktion

$$F(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \sigma(\mathbf{w}_i^T \mathbf{x} + b_i) \tag{15}$$

  gefunden werden, sodass $|F(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x})| < \epsilon$ für alle $\mathbf{x} \in [0, 1]^d$
- **Praktische Bedeutung**:
  - Theoretisch können neuronale Netze jede Funktion lernen
  - Problem: Anzahl der benötigten Neuronen kann exponentiell wachsen
  - Deep Learning: Mehr Schichten können effizienter sein als breitere Netze

Die Mathematik des Lernens – Warum Gradientenabstieg funktioniert

- **Optimierungsproblem**: Minimiere Verlustfunktion $L(\theta)$ über Parameter θ
- **Gradientenabstieg basiert auf Taylor-Entwicklung**:

$$L(\theta + \Delta\theta) \approx L(\theta) + \nabla L(\theta)^T \Delta\theta \tag{16}$$

- Um L zu minimieren, wähle $\Delta\theta = -\eta \nabla L(\theta)$ (mit $\eta > 0$)
- **Warum funktioniert das?** Für kleine η:

$$L(\theta - \eta \nabla L(\theta)) \approx L(\theta) - \eta ||\nabla L(\theta)||^2 \leq L(\theta) \tag{17}$$

- **Konvergenz-Eigenschaften**:
  - Für konvexe Funktionen: Garantierte Konvergenz zum globalen Minimum
  - Für nicht-konvexe Funktionen (neuronale Netze): Konvergenz zu lokalen Minima
  - **Überraschung**: Lokale Minima sind oft ”gut genug” für praktische Anwendungen

Konstruktion von Neuronalen Netzen: Single-Layer-Perceptron

- Einfacher binärer Klassifikator mit Aktivierungsfunktion

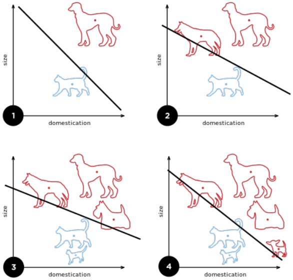
$$f(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{if } \mathbf{w}^T\mathbf{x} + b \geq \theta, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{18}$$

- mit dem Gewichtsvektor $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^d$, Eingabevektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$, Bias $b \in \mathbb{R}$ und Schwellwert θ
- Das Skalarprodukt: $\mathbf{w}^T\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{d} w_i x_i$
- Entscheidungsgrenze im 2D-Fall ($d = 2$): Gerade mit Gleichung

$$w_1 x_1 + w_2 x_2 + b = \theta \tag{19}$$

$$x_2 = -\frac{w_1}{w_2} x_1 - \frac{b - \theta}{w_2} \tag{20}$$

- Geometrische Interpretation: Hyperebene teilt den $\mathbb{R}^d$ in zwei Halbräume
- Linear separierbare Probleme: Klassen können durch Hyperebene getrennt werden

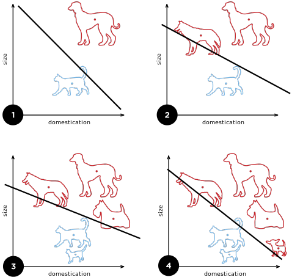


Perceptron Training: Lernalgorithmus

- **Gegeben**: Trainingsdaten $D = \{(\mathbf{x}_i, y_i)\}_{i=1}^{n}$ mit $y_i \in \{-1, +1\}$
- **Perceptron-Lernregel** [3]:

$$\mathbf{w}^{(t+1)} = \mathbf{w}^{(t)} + \eta \sum_{(\mathbf{x}_i, y_i) \in F^{(t)}} y_i \mathbf{x}_i \tag{21}$$

- **Fehlklassifizierungen**: $F^{(t)} = \{(\mathbf{x}_i, y_i) : y_i(\mathbf{w}^{(t)T}\mathbf{x}_i) \leq 0\}$
- **Algorithmus**:
  1. Initialisiere $\mathbf{w}^{(0)} = \mathbf{0}$
  2. Für jede Fehlklassifikation: Update $\mathbf{w}$
  3. Wiederhole bis Konvergenz
- **Konvergenz-Garantie**: Für linear separierbare Daten konvergiert in endlich vielen Schritten



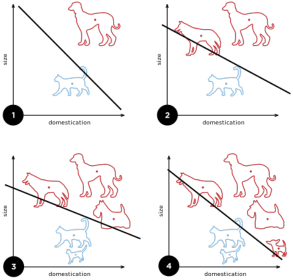
Gradientenabstieg: Allgemeines Optimierungsverfahren

- **Grundprinzip**: Iterative Minimierung der Verlustfunktion
- **Update-Regel**:

$$\theta^{(t+1)} = \theta^{(t)} - \eta \nabla_\theta L(\theta^{(t)}) \tag{22}$$

- **Parameter**:
  - $\eta > 0$: Lernrate (Schrittweite)
  - θ: Parametervektor (Gewichte)
  - ∇L: Gradient der Verlustfunktion
- **Intuition**: Gradient zeigt bergauf → $-\nabla L$ zeigt zum Minimum
- **Perceptron-Gradient**:

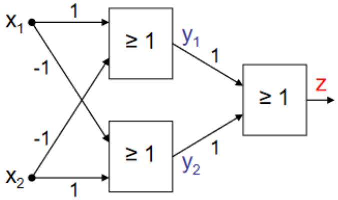
$$\nabla_{\mathbf{w}} L = -\sum_{(\mathbf{x}_i, y_i) \in F} y_i \mathbf{x}_i \tag{23}$$



Grenzen des Single-Layer-Perceptrons – Das XOR-Problem

- **Fundamentale Limitation**: Perceptron kann nur linear separierbare Probleme lösen
- **XOR-Problem** [4]:

x_1	x_2	XOR
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0



- **Mathematischer Beweis der Unmöglichkeit**:
- Angenommen, es existiert $\mathbf{w} = (w_1, w_2)$ und b, sodass:

$$w_1 \cdot 0 + w_2 \cdot 1 + b > 0 \quad \text{(für (0,1))} \tag{24}$$

$$w_1 \cdot 1 + w_2 \cdot 0 + b > 0 \quad \text{(für (1,0))} \tag{25}$$

$$w_1 \cdot 0 + w_2 \cdot 0 + b \leq 0 \quad \text{(für (0,0))} \tag{26}$$

$$w_1 \cdot 1 + w_2 \cdot 1 + b \leq 0 \quad \text{(für (1,1))} \tag{27}$$

- Aus (1) und (3): $w_2 > -b \geq 0 \Rightarrow w_2 > 0$

Konstruktion von Neuronalen Netzen: Multi-Layer-Perceptron

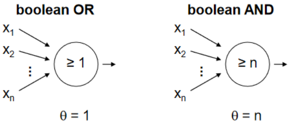
- **Lösung des XOR-Problems**: Mehrschichtige Netze!
- **Komposition von Hyperebenen**:
  - Erste Schicht: Erzeugt mehrere lineare Entscheidungsgrenzen
  - Zweite Schicht: Kombiniert diese zu komplexeren Formen
- **Mathematische Intuition für XOR**:

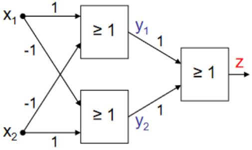
$$h_1 = \sigma(x_1 + x_2 - 0.5) \quad \text{(OR-Gate)} \tag{28}$$

$$h_2 = \sigma(-x_1 - x_2 + 1.5) \quad \text{(NAND-Gate)} \tag{29}$$

$$\text{XOR} = \sigma(h_1 + h_2 - 1.5) \tag{30}$$

- **Universal Approximation**: Mit einer versteckten Schicht können beliebige stetige Funktionen approximiert werden
- **Tiefe vs. Breite**: Tiefere Netze können effizienter sein als breitere





Training von Neuronalen Netzen: Multi-Layer-Perceptron

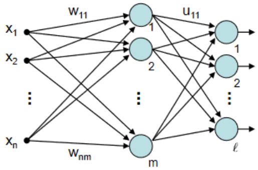
- **Multilayer Perceptron (MLP)**: Neuronales Netz mit versteckten Schichten
- Forward-Pass für 2-Schicht-Netz:

$$\mathbf{z}^{(1)} = \mathbf{W}^{(1)}\mathbf{x} + \mathbf{b}^{(1)} \quad \text{(lineare Transformation)} \tag{31}$$

$$\mathbf{a}^{(1)} = \sigma(\mathbf{z}^{(1)}) \quad \text{(Aktivierung)} \tag{32}$$

$$\mathbf{z}^{(2)} = \mathbf{W}^{(2)}\mathbf{a}^{(1)} + \mathbf{b}^{(2)} \tag{33}$$

$$\hat{\mathbf{y}} = \sigma(\mathbf{z}^{(2)}) \tag{34}$$



- Mean Squared Error (MSE) Loss:

$$L(\mathbf{W}, \mathbf{b}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} ||\hat{\mathbf{y}}_i - \mathbf{y}_i||_2^2 \tag{35}$$

- Problem der Heaviside-Funktion: $H(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$ nicht differenzierbar
- Lösung: Glatte Aktivierungsfunktionen (Sigmoid, Tanh, ReLU)

Training von Neuronalen Netzen: Multi-Layer-Perceptron

-

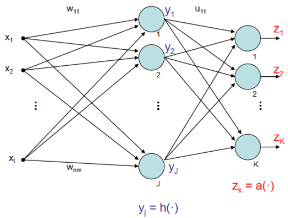
$$f(w) = \sum_{x \in B} ||g(w;x) - g^*(x)||^2 \quad \rightarrow \; \min \tag{36}$$

- mit dem Output des Netzes $g(w;x)$ und dem erwarteten Output $g^*(x)$
-

$$u^{(t+1)} = u^t - \gamma \nabla_u f(w_t, u_t) \tag{37}$$

$$w^{(t+1)} = w^t - \gamma \nabla_w f(w_t, u_t) \tag{38}$$

(39)



- x_i: Inputs
- y_j: Werte nach dem ersten Layer
- z_k: Werte nach dem zweiten Layer

Backpropagation: Grundidee

- **Backpropagation** [5]: Effizienter Algorithmus zur Berechnung von Gradienten
- **Problem**: Wie berechnen wir $\frac{\partial L}{\partial w_{ij}}$ in tiefen Netzen?
- **Lösung**: Anwendung der **Kettenregel** der Differentiation:

$$\frac{\partial L}{\partial w_{ij}^{(l)}} = \frac{\partial L}{\partial z_j^{(l)}} \cdot \frac{\partial z_j^{(l)}}{\partial w_{ij}^{(l)}} \tag{40}$$

- Definition der **lokalen Gradienten** (Deltas):

$$\delta_j^{(l)} = \frac{\partial L}{\partial z_j^{(l)}} \tag{41}$$

- **Idee**: Berechne Fehler rückwärts durch das Netz

Backpropagation: Algorithmus

- **Notation**:
  - L: Verlustfunktion, $a_j^{(l)}$: Aktivierung von Neuron j in Schicht l
  - $z_j^{(l)} = \sum_i w_{ij}^{(l)} a_i^{(l-1)} + b_j^{(l)}$: Eingabe vor Aktivierung
  - $\delta_j^{(l)} = \frac{\partial L}{\partial z_j^{(l)}}$: Lokaler Gradient (Fehlerterm)
- **Forward Pass**: Berechne Ausgaben für alle Schichten
- **Backward Pass**: Berechne Gradienten rekursiv
- **Output-Schicht**:

$$\delta_j^{(L)} = \frac{\partial L}{\partial a_j^{(L)}} \cdot \sigma'(z_j^{(L)}) \tag{42}$$

- **Versteckte Schichten**:

$$\delta_j^{(l)} = \left(\sum_k \delta_k^{(l+1)} w_{jk}^{(l+1)}\right) \sigma'(z_j^{(l)}) \tag{43}$$

- **Gradientenberechnung**:

$$\frac{\partial L}{\partial w_{ij}^{(l)}} = \delta_j^{(l)} \cdot a_i^{(l-1)} \tag{44}$$

(45)

MLP Training: Grundlagen

- Analog zum SLP: Gradientenabstieg zur Fehlerminimierung
- **Batch-Gradient**:

$$\nabla f(w, u) = \sum_{x, z^* \in B} \nabla f(w, u; x, z^*) \tag{46}$$

- **Sigmoid-Aktivierungsfunktion**:

$$\sigma(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}} \quad \text{mit} \quad \sigma'(x) = \sigma(x) \cdot (1 - \sigma(x)) \tag{47}$$

- **Kettenregel**:

$$[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x) \tag{48}$$

- **Fehlerterm** (Delta): $\delta_j = \frac{\partial L}{\partial z_j}$

MLP Training: Schritt 1 - Fehlerterm Output-Schicht

- **Ziel**: Berechne wie stark jedes Output-Neuron zum Gesamtfehler beiträgt
- **Verlustfunktion**: $L = \sum_k (z_k - z_k^*)^2$ (Mean Squared Error)
- **Schritt-für-Schritt Herleitung**:
  1. **Ableitung nach Aktivierung**: $\frac{\partial L}{\partial z_k} = 2(z_k - z_k^*)$
  2. **Aktivierung**: $z_k = \sigma(u_k) = \sigma(\sum_j u_{jk} y_j)$
  3. **Sigmoid-Ableitung**: $\sigma'(u_k) = \sigma(u_k)(1 - \sigma(u_k)) = z_k(1 - z_k)$
  4. **Kettenregel**: $\frac{\partial L}{\partial u_k} = \frac{\partial L}{\partial z_k} \cdot \frac{\partial z_k}{\partial u_k}$
- **Resultat - Fehlerterm Output**:

$$\delta_k^{(out)} = \frac{\partial L}{\partial u_k} = 2(z_k - z_k^*) \cdot z_k \cdot (1 - z_k) \tag{49}$$

MLP Training: Schritt 2 - Gradienten Output-Gewichte

- **Ziel**: Berechne Gradienten für Gewichte zwischen versteckter und Output-Schicht
- **Ausgangspunkt**: Wir haben $\delta_k^{(out)} = \frac{\partial L}{\partial u_k}$
- **Schritt-für-Schritt**:
  1. **Netzinput**: $u_k = \sum_j u_{jk} \cdot y_j$ (Gewicht × Aktivierung)
  2. **Ableitung nach Gewicht**: $\frac{\partial u_k}{\partial u_{jk}} = y_j$
  3. **Kettenregel anwenden**:

$$\frac{\partial L}{\partial u_{jk}} = \frac{\partial L}{\partial u_k} \cdot \frac{\partial u_k}{\partial u_{jk}} = \delta_k^{(out)} \cdot y_j \tag{50}$$

- **Interpretation**: Gradient = Fehlerterm × Eingangssignal
- **Gewicht-Update**: $u_{jk}^{neu} = u_{jk}^{alt} - \eta \cdot \delta_k^{(out)} \cdot y_j$

MLP Training: Schritt 3 - Fehlerterm versteckte Schicht

- **Problem**: Wie berechnen wir Fehler für versteckte Neuronen?
- **Idee**: Fehler "fließt rückwärts" von Output zu versteckter Schicht
- **Schritt-für-Schritt**:
  1. **Aktivierung versteckt**: $y_j = \sigma(h_j)$ mit $h_j = \sum_i w_{ij} x_i$
  2. **Einfluss auf alle Outputs**: y_j beeinflusst alle u_k über Gewichte u_{jk}
  3. **Kettenregel für mehrere Ausgänge**:
  $$\frac{\partial L}{\partial h_j} = \sum_k \frac{\partial L}{\partial u_k} \cdot \frac{\partial u_k}{\partial y_j} \cdot \frac{\partial y_j}{\partial h_j} \tag{51}$$
  4. **Einsetzen**: $\frac{\partial u_k}{\partial y_j} = u_{jk}$ und $\frac{\partial y_j}{\partial h_j} = y_j(1 - y_j)$
- **Resultat**:
$$\delta_j^{(hidden)} = y_j(1 - y_j) \sum_k \delta_k^{(out)} \cdot u_{jk} \tag{52}$$

MLP Training: Schritt 4 - Gradienten versteckte Gewichte

- **Letzter Schritt**: Gradienten für Gewichte zwischen Input und versteckter Schicht
- **Analogie zum Output**: Gleiche Logik wie bei Output-Gewichten
- **Schritt-für-Schritt**:
  1. **Wir haben**: $\delta_j^{(hidden)} = \frac{\partial L}{\partial h_j}$
  2. **Netzinput**: $h_j = \sum_i w_{ij} \cdot x_i$
  3. **Ableitung**: $\frac{\partial h_j}{\partial w_{ij}} = x_i$
  4. **Kettenregel**:

$$\frac{\partial L}{\partial w_{ij}} = \frac{\partial L}{\partial h_j} \cdot \frac{\partial h_j}{\partial w_{ij}} = \delta_j^{(hidden)} \cdot x_i \tag{53}$$

- **Gewicht-Update**: $w_{ij}^{neu} = w_{ij}^{alt} - \eta \cdot \delta_j^{(hidden)} \cdot x_i$
- **Backpropagation komplett**: Fehler propagiert von Output zurück zum Input!

Verallgemeinerung Training von Neuronalen Netzen: M-Layer-Perceptron

- bei einem Neuronalen Netz mi L Layern $S_1, S_2, ..., S_L$
- den Gewichten w_{ij} in der Matrix W
- dem output eines Neurons o_j
- ist der Fehlerterm:

$$\delta_j = \begin{cases} o_j \cdot (1 - o_j) \cdot (o_j - z_j*) & \text{if } j \in S_L, \text{output Neuron} \\ o_j \cdot (1 - o_j) \cdot \sum_{k \in S_{m+1}} \delta_k \cdot w_{jk} & \text{if } j \in S_m \text{and } m < L \end{cases}$$

- Der Korrekturterm für die einzelnen Gewichte ist dann:

$$w_{ij}^{(t+1)} = w_{ij}^{t} - \gamma \cdot o_i \cdot \delta_j \tag{54}$$

Fortgeschrittene Optimierungsalgorithmen

- **Momentum**: Beschleunigung in konsistente Richtungen

$$\mathbf{v}^{(t+1)} = \beta\mathbf{v}^{(t)} + \eta\nabla L(\theta^{(t)}) \tag{55}$$

$$\theta^{(t+1)} = \theta^{(t)} - \mathbf{v}^{(t+1)} \tag{56}$$

- **ADAM** [6] (Adaptive Moment Estimation) - Kombination aus Momentum und RMSprop:

$$m_w^{(t+1)} = \beta_1 m_w^{(t)} + (1 - \beta_1)\nabla_w L^{(t)} \quad \text{(1. Moment)} \tag{57}$$

$$v_w^{(t+1)} = \beta_2 v_w^{(t)} + (1 - \beta_2)(\nabla_w L^{(t)})^2 \quad \text{(2. Moment)} \tag{58}$$

$$\hat{m}_w^{(t)} = \frac{m_w^{(t+1)}}{1 - \beta_1^{t+1}} \quad \text{(Bias-Korrektur)} \tag{59}$$

$$\hat{v}_w^{(t)} = \frac{v_w^{(t+1)}}{1 - \beta_2^{t+1}} \quad \text{(Bias-Korrektur)} \tag{60}$$

$$w^{(t+1)} = w^{(t)} - \frac{\eta}{\sqrt{\hat{v}_w^{(t)}} + \epsilon}\hat{m}_w^{(t)} \tag{61}$$

- Typische Hyperparameter: $\beta_1 = 0.9$, $\beta_2 = 0.999$, $\epsilon = 10^{-8}$

Warum "Deep" Learning? – Mathematische Rechtfertigung für tiefe Netze

- **Representation Learning**: Tiefere Netze lernen hierarchische Merkmalsdarstellungen
- **Mathematischer Vorteil**: Exponentiell weniger Parameter für dieselbe Expressivität
- **Kompositionelle Struktur**: Viele reale Funktionen haben hierarchische Struktur

$$f(\mathbf{x}) = g_L(g_{L-1}(\ldots g_2(g_1(\mathbf{x}))\ldots)) \tag{62}$$

- **Feature Learning**: Jede Schicht ℓ lernt Features der Form:

$$\mathbf{h}^{(\ell)} = \sigma(\mathbf{W}^{(\ell)}\mathbf{h}^{(\ell-1)} + \mathbf{b}^{(\ell)}) \tag{63}$$

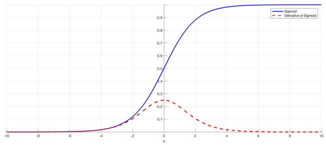
- **Intuition**:
  - Untere Schichten: Einfache Features (Kanten, Texturen)
  - Mittlere Schichten: Kombinationen (Formen, Teile)
  - Obere Schichten: Komplexe Konzepte (Objekte, Semantik)

Das Vanishing Gradient Problem – Warum tiefe Netze schwer zu trainieren sind

- **Problem**: Bei tiefen Netzen werden Gradienten exponentiell kleiner
- **Mathematische Analyse**: Für Sigmoid-Aktivierung $\sigma'(x) \leq 0.25$
- Gradient in Schicht ℓ proportional zu:

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{W}^{(\ell)}} \propto \prod_{i=\ell+1}^{L} \mathbf{W}^{(i)} \sigma'(\mathbf{z}^{(i)}) \tag{64}$$

- Für $L - \ell$ Schichten: Faktor $\leq (0.25)^{L-\ell}$
- **Beispiel**: Bei 10 Schichten kann Gradient um Faktor 10^{-6} schrumpfen!
- **Lösungsansätze**:
  - ReLU-Aktivierungen: $\text{ReLU}'(x) = 1$ für $x > 0$
  - Residual Connections (ResNets)
  - Normalization (BatchNorm, LayerNorm)
  - Bessere Initialisierung (Xavier, He)

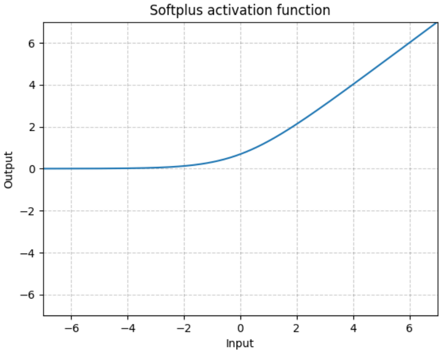


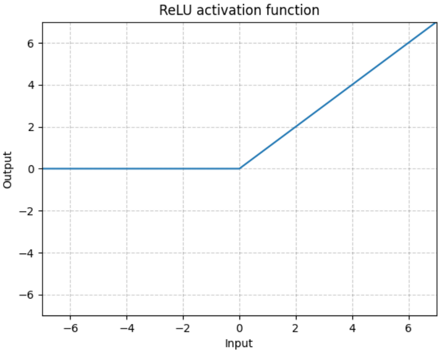
Aktivierungsfunktionen – Mathematische Eigenschaften und Warum sie wichtig sind

- **Sigmoid-Funktion**: $\sigma(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$, Ableitung: $\sigma'(x) = \sigma(x)(1 - \sigma(x))$
  - Glatt und differenzierbar, Ausgabe in $(0, 1)$
  - **Problem**: Vanishing Gradients für $|x| >> 0$: $\sigma'(x) \to 0$
- **Tanh-Funktion**: $\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$, Ableitung: $\tanh'(x) = 1 - \tanh^2(x)$
  - Ausgabe in $(-1, 1)$, zero-centered (bessere Konvergenz)
  - Ebenfalls Vanishing Gradient Problem
- **ReLU-Funktion** [7]: $\text{ReLU}(x) = \max(0, x)$, Ableitung: $\text{ReLU}'(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$
  - Löst Vanishing Gradient Problem für $x > 0$
  - Computationally efficient, führt zu sparse representations
  - **Problem**: "Dying ReLU" - Neuronen können "sterben" wenn $x \leq 0$
- **Warum Nichtlinearität essentiell ist**:

$$\text{Ohne } \sigma: f(\mathbf{x}) = \mathbf{W}_2(\mathbf{W}_1\mathbf{x}) = (\mathbf{W}_2\mathbf{W}_1)\mathbf{x} = \mathbf{W}_{\text{linear}}\mathbf{x} \tag{65}$$

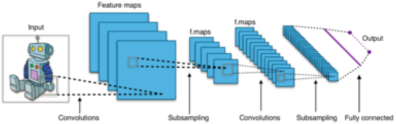
Häufige Aktivierungsfunktionen – Visualisierung

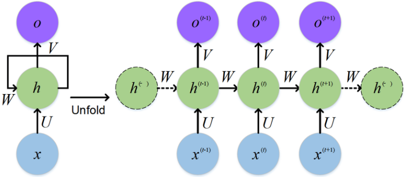




Weitere Netzwerk Architekturen

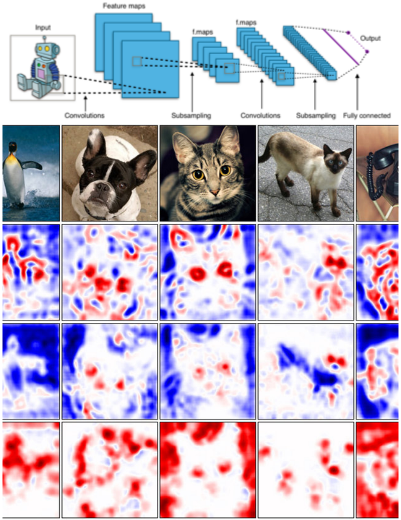
- spezielle Datenstrukturen profitieren von speziellen Architekturen
- Bilderkennung →Convolutional Neural Network (CNN)
- sequentielle Daten →Recurrent Neural Networks (RNN)
- im speziellen um Kausalität/Kontext herzustellen →Long Short Term Memory (LSTM)





Was sind Convolutional Neural Networks (CNNs)?

- **CNNs**: Speziell für räumliche Daten entwickelte neuronale Netze
- **Hauptanwendung**: Bildverarbeitung, Computer Vision
- **Grundidee**: Nutze lokale Strukturen in Bildern
- **Kernoperationen**:
  - **Convolution**: Filtere lokale Features
  - **Pooling**: Reduziere räumliche Dimensionen
  - **Fully Connected**: Klassifikation am Ende
- **Hierarchische Feature-Extraktion**:
  - **Layer 1**: Kanten, Ecken
  - **Layer 2**: Texturen, Formen
  - **Layer 3**: Objektteile
  - **Layer 4**: Vollständige Objekte
- **Vorteil**: Automatisches Lernen relevanter Features



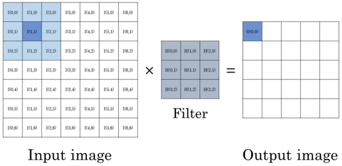
CNN Grundoperationen: Convolution

- **Convolution Operation**:

$$(f * g)(x, y) = \sum_m \sum_n f(m, n) \cdot g(x - m, y - n) \tag{66}$$

- **In CNNs**:

$$\text{Output}(i, j) = \sum_m \sum_n \text{Filter}(m, n) \cdot \text{Input}(i + m, j + n) \tag{67}$$



- **Filter (Kernel)**:
  - Kleine Matrizen (z.B. 3×3, 5×5)
  - Erkennen spezifische Muster
  - Gewichte werden gelernt
- **Beispiel**: Kantendetektor, Blur-Filter
- **Feature Maps**: Ausgabe nach Convolution + Aktivierung

Warum funktionieren CNNs? – Mathematische Prinzipien

- **Drei Schlüsselprinzipien von CNNs**:
- **1. Lokale Konnektivität**: Jedes Neuron ist nur mit lokalem Bereich verbunden

$$y_{i,j}^{(\ell)} = \sigma\left(\sum_{m=-k}^{k} \sum_{n=-k}^{k} w_{m,n}^{(\ell)} \cdot x_{i+m,j+n}^{(\ell-1)} + b^{(\ell)}\right) \tag{68}$$

- **2. Parameter Sharing**: Derselbe Filter $\mathbf{W}$ wird über gesamte Feature-Map verwendet
  - Reduziert Parameter von $O(H \cdot W \cdot d^2)$ auf $O(k^2 \cdot d)$
  - Erzwingt Translationsinvarianz
- **3. Equivarianz zu Translationen**: Wenn Input um $\mathbf{t}$ verschoben wird, verschiebt sich Output ebenfalls um $\mathbf{t}$

$$\mathrm{Conv}(T_{\mathbf{t}}[\mathbf{x}]) = T_{\mathbf{t}}[\mathrm{Conv}(\mathbf{x})] \tag{69}$$

- **Pooling** führt zu begrenzter Translationsinvarianz:

$$\mathrm{MaxPool}(\mathbf{X})_{i,j} = \max_{(p,q)\in N_{i,j}} \mathbf{X}_{p,q} \tag{70}$$

- **Hierarchische Feature-Extraktion**: Einfache → Komplexe Features

Spezielle Netzwerkarchitekturen: CNN – Implementierung

- **Convolutional Neural Networks** [8]: Spezialisiert auf gitterförmige Daten (Bilder)

- **Faltungsoperation** (2D-Convolution):

$$(\mathbf{I} * \mathbf{K})_{i,j} = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} \mathbf{I}_{i+m,j+n} \cdot \mathbf{K}_{m,n} \tag{71}$$

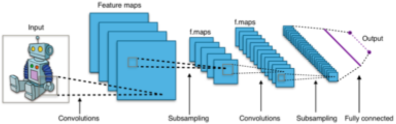
- $\mathbf{I}$: Input-Feature-Map, $\mathbf{K}$: Kernel (Filter) der Größe $M \times N$

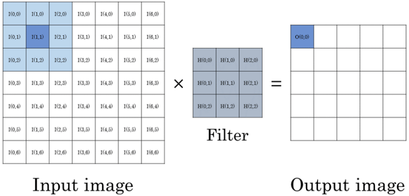
- **Pooling**: Dimensionsreduktion, z.B. Max-Pooling:

$$\text{MaxPool}(\mathbf{X})_{i,j} = \max_{p,q \in P_{i,j}} \mathbf{X}_{p,q} \tag{72}$$

- **Parameter Sharing**: Derselbe Filter wird über gesamte Feature-Map angewendet

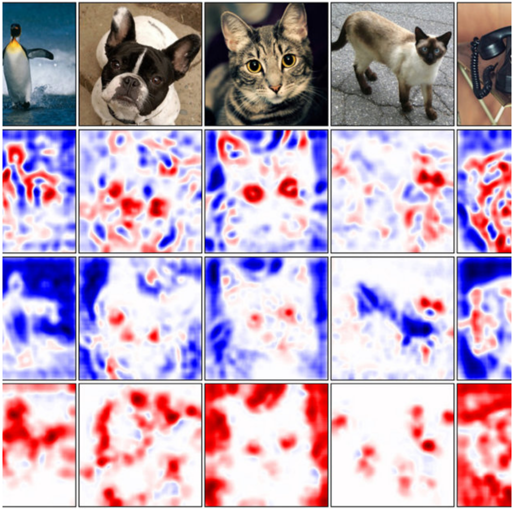
- **Translation Invariance**: Robustheit gegenüber Verschiebungen





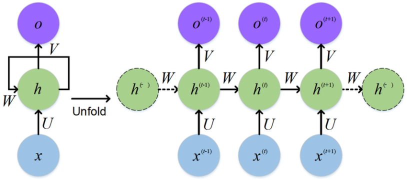
Spezielle Netzwerkarchitekturen: CNN

- Anschaulich: Formen werden erkannt
- Katzenohren sind anders als Hundeohren
- Verallgemeinerbar für andere Objektklassifizierungen
- für Details die XAI Vorlesung nächstes Semester



Spezielle Netzwerkarchitekturen: RNN

- Anschaulich: Schleife in Netzwerk ”merkt” sich voherige Zustände
- funktioniert für kurze Zeiträume
- Entfaltung eines RNN →viele zu trainierende Gewichte
- Problem: langfristige Zusammenhänge werden nicht erfasst
- Problem: Verschwindende Gradienten



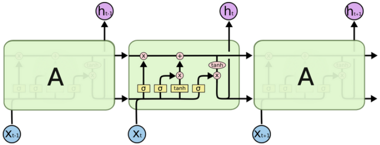
Spezielle Netzwerkarchitekturen: LSTM

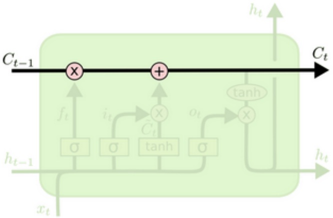
- **Long Short-Term Memory** [9]: Lösung des Vanishing Gradient Problems in RNNs

- **Cell State** $\mathbf{C}_t$: Langzeit-Gedächtnis der LSTM-Zelle

- **Hidden State** $\mathbf{h}_t$: Kurzzeit-Output der Zelle

- Drei Gating-Mechanismen kontrollieren Informationsfluss:
  - Forget Gate: Welche Informationen vergessen?
  - Input Gate: Welche neuen Informationen speichern?
  - Output Gate: Welche Teile des Cell States ausgeben?

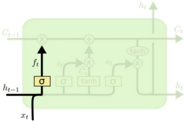




LSTM: Mathematische Formulierung

- **Forget Gate**: Entscheidet, welche Informationen aus $\mathbf{C}_{t-1}$ gelöscht werden

$$\mathbf{f}_t = \sigma(\mathbf{W}_f \cdot [\mathbf{h}_{t-1}, \mathbf{x}_t] + \mathbf{b}_f) \tag{73}$$

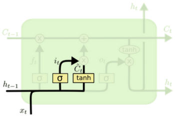


$$f_t = \sigma\left(W_f \cdot [h_{t-1}, x_t] \ + \ b_f\right)$$

- **Input Gate**: Bestimmt neue Informationen für Cell State

$$\mathbf{i}_t = \sigma(\mathbf{W}_i \cdot [\mathbf{h}_{t-1}, \mathbf{x}_t] + \mathbf{b}_i) \tag{74}$$

$$\tilde{\mathbf{C}}_t = \tanh(\mathbf{W}_C \cdot [\mathbf{h}_{t-1}, \mathbf{x}_t] + \mathbf{b}_C) \tag{75}$$



$$i_t = \sigma\left(W_i \cdot [h_{t-1}, x_t] \ + \ b_i\right)$$
$$\tilde{C}_t = \tanh(W_C \cdot [h_{t-1}, x_t] \ + \ b_C)$$

- **Cell State Update**:

$$\mathbf{C}_t = \mathbf{f}_t * \mathbf{C}_{t-1} + \mathbf{i}_t * \tilde{\mathbf{C}}_t \tag{76}$$

- **Output Gate** und **Hidden State**:

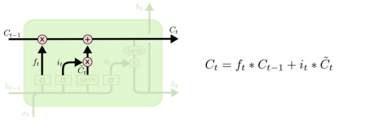
$$\mathbf{o}_t = \sigma(\mathbf{W}_o \cdot [\mathbf{h}_{t-1}, \mathbf{x}_t] + \mathbf{b}_o) \tag{77}$$

$$\mathbf{h}_t = \mathbf{o}_t * \tanh(\mathbf{C}_t) \tag{78}$$

LSTM: Cell State Update und Output

- **Cell State Update**: Kombination von alten und neuen Informationen

$$\mathbf{C}_t = \mathbf{f}_t \odot \mathbf{C}_{t-1} + \mathbf{i}_t \odot \tilde{\mathbf{C}}_t \qquad (79)$$

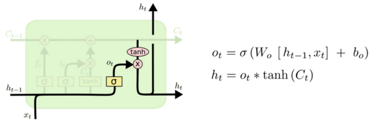


- **Output Gate**: Bestimmt, welche Teile des Cell States ausgegeben werden

$$\mathbf{o}_t = \sigma(\mathbf{W}_o \cdot [\mathbf{h}_{t-1}, \mathbf{x}_t] + \mathbf{b}_o) \qquad (80)$$

- **Hidden State**: Gefilterte Version des Cell States

$$\mathbf{h}_t = \mathbf{o}_t \odot \tanh(\mathbf{C}_t) \qquad (81)$$



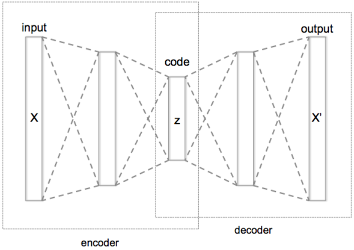
- **Warum funktioniert LSTM?**
  - Cell State kann Informationen über viele Zeitschritte transportieren
  - Gates kontrollieren selektiv Informationsfluss
  - Löst das Vanishing Gradient Problem von Standard-RNNs

Autoencoder: Grundlagen und Mathematik

- **Autoencoder**: Unsupervised Learning zur Dimensionsreduktion und Rekonstruktion
- **Encoder**: $\mathbf{z} = f_{enc}(\mathbf{x}; \theta_{enc})$ - Komprimierung in latenten Raum
- **Decoder**: $\hat{\mathbf{x}} = f_{dec}(\mathbf{z}; \theta_{dec})$ - Rekonstruktion aus latenter Repräsentation
- **Verlustfunktion**: Rekonstruktionsfehler

$$L(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}}) = ||\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}||^2 \tag{82}$$

- **Latenter Raum** $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^d$ mit d << Eingabedimension
- **Anwendungen**:
  - Dimensionsreduktion (wie PCA, aber nichtlinear)
  - Anomaly Detection (hoher Rekonstruktionsfehler)
  - Denoising (rauschhafte Eingaben, saubere Ziele)
  - Feature Learning für Downstream-Tasks



Variational Autoencoders (VAEs): Motivation

- **Problem klassischer Autoencoders**: Latenter Raum ist nicht interpretierbar oder strukturiert
- **Ziel der VAEs**: Lernen einer **probabilistischen** latenten Repräsentation
- **Generative Modellierung**: $p(\mathbf{x}) = \int p(\mathbf{x}|\mathbf{z})p(\mathbf{z})d\mathbf{z}$
- **Bayessche Perspektive**:
  - Prior: $p(\mathbf{z}) = N(\mathbf{0}, \mathbf{I})$ (Standard-Normalverteilung)
  - Likelihood: $p(\mathbf{x}|\mathbf{z})$ durch Decoder-Netzwerk
  - Posterior: $p(\mathbf{z}|\mathbf{x})$ durch Encoder-Netzwerk approximiert
- **Herausforderung**: $p(\mathbf{z}|\mathbf{x})$ ist analytisch nicht berechenbar
- **Lösung**: Variational Inference mit **Evidence Lower Bound (ELBO)**
- **Vorteil**: Latenter Raum ist **kontinuierlich** und **interpolierbar**
- **Anwendungen**: Bildgenerierung, Data Augmentation, Semi-Supervised Learning

VAEs: Mathematische Grundlagen

- **Variational Inference**: Approximiere $p(\mathbf{z}|\mathbf{x})$ durch $q_\phi(\mathbf{z}|\mathbf{x})$
- **Evidence Lower Bound (ELBO)**:

$$\log p(\mathbf{x}) \geq \mathbb{E}_{q_\phi(\mathbf{z}|\mathbf{x})}[\log p_\theta(\mathbf{x}|\mathbf{z})] - D_{KL}(q_\phi(\mathbf{z}|\mathbf{x})||p(\mathbf{z})) \tag{83}$$

- **Zwei Terme der Verlustfunktion**:
  - **Rekonstruktionsverlust**: $\mathbb{E}_{q_\phi(\mathbf{z}|\mathbf{x})}[\log p_\theta(\mathbf{x}|\mathbf{z})]$
  - **Regularisierungsterm**: $D_{KL}(q_\phi(\mathbf{z}|\mathbf{x})||p(\mathbf{z}))$
- **Encoder**: $q_\phi(\mathbf{z}|\mathbf{x}) = N(\mu_\phi(\mathbf{x}), \mathrm{diag}(\sigma_\phi^2(\mathbf{x})))$
- **Decoder**: $p_\theta(\mathbf{x}|\mathbf{z}) = N(\mu_\theta(\mathbf{z}), \sigma_\theta^2\mathbf{I})$
- **KL-Divergenz** (analytisch berechenbar für Gauß'sche Verteilungen):

$$D_{KL} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{d}(1 + \log(\sigma_j^2) - \mu_j^2 - \sigma_j^2) \tag{84}$$

VAEs: Reparameterization Trick

- **Problem**: Stochastisches Sampling $\mathbf{z} \sim q_\phi(\mathbf{z}|\mathbf{x})$ ist nicht differenzierbar
- **Lösung**: Reparameterization Trick (Kingma & Welling, 2013)
- **Statt**: $\mathbf{z} \sim N(\mu, \sigma^2)$
- **Verwende**:

$$\epsilon \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{I}) \quad \text{(deterministisches Rauschen)} \tag{85}$$

$$\mathbf{z} = \mu + \sigma \odot \epsilon \quad \text{(deterministische Transformation)} \tag{86}$$

- **Vorteil**: Gradienten können durch μ und σ zurückpropagiert werden
- **Praktische Implementierung**:
  - Encoder gibt $\mu(\mathbf{x})$ und $\log \sigma^2(\mathbf{x})$ aus
  - Sample $\epsilon \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{I})$
  - Berechne $\mathbf{z} = \mu + \exp(\frac{1}{2} \log \sigma^2) \odot \epsilon$
  - Führe $\mathbf{z}$ durch Decoder
- **Trainingsalgorithmus**: Standard-Backpropagation mit stochastischem Gradienten!

VAEs: Eigenschaften und Anwendungen

- **Interpolation im latenten Raum**: Glatte Übergänge zwischen Datenpunkten

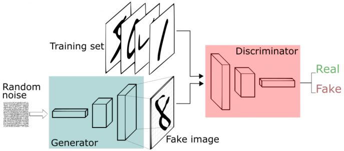
$$\mathbf{z}_{interp} = \alpha\mathbf{z}_1 + (1 - \alpha)\mathbf{z}_2, \quad \alpha \in [0, 1] \tag{87}$$

- **Generierung neuer Daten**: Sample $\mathbf{z} \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{I})$, dann $\mathbf{x}_{new} = \text{Decoder}(\mathbf{z})$
- **Disentangled Representations**: Verschiedene Dimensionen von $\mathbf{z}$ kodieren verschiedene Eigenschaften
- **Anwendungen**:
  - **Computer Vision**: Gesichtsgenerierung, Style Transfer
  - **NLP**: Text Generation, Sentence Interpolation
  - **Drug Discovery**: Molekularstruktur-Generation
  - **Anomaly Detection**: Niedrige Likelihood → Anomalie
  - **Data Augmentation**: Generierung synthetischer Trainingsdaten
- **Varianten**:
  - β-VAE: $\beta \cdot D_{KL}$ für bessere Disentanglement
  - Conditional VAE: $p(\mathbf{x}|\mathbf{y}, \mathbf{z})$ mit Labels $\mathbf{y}$
  - Hierarchical VAE: Mehrere latente Schichten

Generative Adversarial Networks (GANs): Grundprinzip

- **Grundidee**: Zwei neuronale Netze konkurrieren miteinander
  - **Generator** *G*: Erzeugt "gefälschte" Daten aus Rauschen
  - **Discriminator** *D*: Unterscheidet echte von gefälschten Daten
- **Adversarial Training**: Spieltheoretischer Ansatz

$$\min_G \max_D V(D,G) = \mathbb{E}_{x\sim p_{data}(x)}[\log D(x)] + \mathbb{E}_{z\sim p_z(z)}[\log(1 - D(G(z)))] \quad (88)$$



- **Training Process**:
  1. **Discriminator Training**: Maximiere $V(D,G)$
     - Lerne echte Daten als "echt" zu klassifizieren
     - Lerne generierte Daten als "gefälscht" zu erkennen
  2. **Generator Training**: Minimiere $V(D,G)$
     - Erzeuge Daten, die den Discriminator "täuschen"

GAN Training: Mathematische Details

- **Discriminator Loss** (Binary Cross-Entropy):

$$L_D = -\mathbb{E}_{x \sim p_{data}}[\log D(x)] - \mathbb{E}_{z \sim p_z}[\log(1 - D(G(z)))] \tag{89}$$

- **Generator Loss** (Ursprünglich):

$$L_G = \mathbb{E}_{z \sim p_z}[\log(1 - D(G(z)))] \tag{90}$$

- **Problem**: Vanishing Gradients bei schlechtem Generator
- **Praktische Generator Loss** (Non-saturating):

$$L_G = -\mathbb{E}_{z \sim p_z}[\log D(G(z))] \tag{91}$$

- **Nash-Gleichgewicht**: Theoretisch optimal wenn:

$$D^*(x) = \frac{p_{data}(x)}{p_{data}(x) + p_g(x)} = \frac{1}{2} \tag{92}$$

wenn $p_g = p_{data}$ (Generator erzeugt perfekte Datenverteilung)

GAN Varianten und Verbesserungen

- **Deep Convolutional GANs (DCGANs)**:
  - Verwendung von Convolutional Layers
  - Batch Normalization, LeakyReLU
  - Bessere Stabilität für Bildgenerierung
- **Wasserstein GAN (WGAN)**:
  - Earth Mover Distance statt JS-Divergenz
  - Stabileres Training, bessere Konvergenz-Eigenschaften
  - **Lipschitz-Constraint**: Kritisch für WGAN-Theorie
- **Conditional GANs (cGANs)**:
  - Bedingung auf Labels: $G(z|y)$, $D(x|y)$
  - Kontrollierte Generierung spezifischer Klassen
- **StyleGAN**:
  - Latent Space Manipulation
  - Progressive Growing, Style Transfer
  - State-of-the-art für hochauflösende Gesichter

WGAN und die Lipschitz-Constraint: Kurz erklärt

- **Problem bei Standard GANs**: Training instabil, Gradients verschwinden
- **WGAN Lösung**: Verwende Wasserstein-Distanz statt JS-Divergenz
- **Lipschitz-Constraint**:
  - **Einfach gesagt**: Discriminator darf nicht "zu steil" werden
  - **Mathematisch**: $|f(x_1) - f(x_2)| \leq L \cdot |x_1 - x_2|$
  - **Warum nötig?** Wasserstein-Distanz erfordert beschränkte Funktionen
- **Praktische Umsetzung**:
  - **Weight Clipping**: Einfach, aber problematisch
  - **Gradient Penalty**: Moderne Lösung - bestraft zu steile Gradienten
  - **Spectral Normalization**: Normalisiert Netzwerk-Gewichte
- **Resultat**: Stabileres Training, bessere Konvergenz
- **Take-away**: Theoretische Constraints führen zu praktischen Verbesserungen

GAN Herausforderungen und Lösungsansätze

- **Training Instabilität**:
  - **Problem**: Discriminator wird zu gut → Generator bekommt keine Gradienten
  - **Lösung**: Balanced Training, Learning Rate Scheduling
- **Mode Collapse**:
  - **Problem**: Generator erzeugt nur wenige Modi der Datenverteilung
  - **Lösung**: Unrolled GANs, Diversity-encouraging Loss Terms
- **Evaluation Metrics**:
  - **Inception Score (IS)**: Misst Bildqualität und Diversität
  - **Fréchet Inception Distance (FID)**: Vergleicht Feature-Statistiken
  - **Precision & Recall**: Qualität vs. Diversität Trade-off
- **Praktische Tipps**:
  - Feature Matching, Experience Replay
  - Spectral Normalization, Self-Attention
  - Progressive Growing für hohe Auflösungen

GANs vs. VAEs: Vergleich der generativen Modelle

- **Generative Adversarial Networks (GANs)**:
  - Adversarial Training: Generator vs. Discriminator
  - Sehr scharfe, realistische Bilder
  - Training instabil, Mode Collapse möglich
  - Kein Encoder - keine direkte latente Repräsentation von Daten
- **Variational Autoencoders (VAEs)**:
  - Likelihood-basiertes Training mit ELBO
  - Verschwommene Bilder durch Gauss-Annahme
  - Stabiles Training, theoretisch fundiert
  - Bidirektional: Encoding und Decoding möglich
- **Praktische Wahl**:
  - **GANs**: Wenn Bildqualität wichtigster Faktor
  - **VAEs**: Wenn interpretierbare latente Repräsentation wichtig
  - **Hybrid-Modelle**: VAE-GAN kombiniert beide Ansätze

Wann Deep Learning? Wann klassisches Machine Learning?

- **Deep Learning ist sinnvoll bei**:
  - **Große Datenmengen**: > 10.000 Samples (je mehr, desto besser)
  - **Komplexe Muster**: Bilder, Audio, Text, Sequenzen
  - **Hierarchische Strukturen**: Features müssen automatisch gelernt werden
  - **Raw Data**: Wenig/keine Feature-Engineering nötig
  - **End-to-End Learning**: Von Rohdaten zur Entscheidung
  - **Ausreichend Rechenkapazität**: GPUs verfügbar
- **Klassisches ML ist besser bei**:
  - **Kleine Datenmengen**: < 1.000 Samples
  - **Strukturierte/tabellarische Daten**: Features sind bereits bekannt
  - **Interpretierbarkeit wichtig**: Entscheidungen müssen erklärbar sein
  - **Schnelle Inferenz**: Real-time Anwendungen mit Latenz-Constraints
  - **Begrenzte Ressourcen**: Wenig Rechenleistung/Speicher
  - **Gut definierte Features**: Domain-Wissen kann genutzt werden

Praktische Entscheidungshilfe: Deep Learning vs. klassisches ML

- **Beispiele für Deep Learning**:
  - **Computer Vision**: Objekterkennung, medizinische Bildanalyse
  - **NLP**: Sprachübersetzung, Chatbots, Sentiment Analysis
  - **Predictive Maintenance**: Sensordaten, Zeitreihen mit vielen Features
  - **Generative Tasks**: Bild-/Texterstellung, Data Augmentation
- **Beispiele für klassisches ML**:
  - **Tabellarische Daten**: Kreditscoring, Kundenklassifikation
  - **Einfache Klassifikation**: Mit wenigen, gut verstandenen Features
  - **Regression**: Preisvorhersage, wissenschaftliche Analysen
  - **Clustering**: Kundensegmentierung, Anomalieerkennung
- **Hybride Ansätze**:
  - **Feature-Extraktion**: Deep Learning für Features + klassisches ML für Klassifikation
  - **Ensemble**: Kombination verschiedener Ansätze
  - **Transfer Learning**: Pretrained Models + Domain-spezifische Anpassung
- **Praktischer Tipp**: Beginne mit einfachsten Methoden, steigere Komplexität schrittweise

Zusammenfassung: Was haben wir gelernt?

- **Mathematische Grundlagen**: Lineare Algebra, Gradienten, Optimierung als Fundament
- **Perceptron bis Deep Learning**: Von linearer Separierung zum Universal Approximation Theorem
- **Training neuronaler Netze**: Backpropagation, Gradientenabstieg, moderne Optimierer (ADAM)
- **Warum Deep Learning funktioniert**: Hierarchische Features, Komposition, Expressivität
- **Herausforderungen**: Vanishing Gradients, Aktivierungsfunktionen, Regularisierung
- **Spezielle Architekturen**:
  - **CNNs**: Translation Equivarianz für Bilddaten
  - **RNNs/LSTMs**: Sequentielle Daten und Langzeit-Gedächtnis
  - **VAEs**: Probabilistische latente Repräsentationen
  - **GANs**: Adversarial Training für realistische Daten

Zentrale Erkenntnisse und Ausblick

- **Theoretisches Verständnis ist entscheidend**:
    - Neuronale Netze sind nicht "Black Boxes" - mathematisch fundiert
    - Universal Approximation erklärt das Potenzial
    - Gradient Flow erklärt Trainierbarkeit
- **Architektur-Wahl ist problemspezifisch**:
    - Nicht immer ist "Deep Learning" die beste Lösung
    - Inductive Biases nutzen (CNNs für Bilder, RNNs für Sequenzen)
    - Trade-offs zwischen Komplexität und Interpretierbarkeit
- **Praktische Anwendung erfordert**:
    - Datenqualität und -quantität
    - Richtige Problemformulierung
    - Evaluation und Validierung
    - Domain-Wissen einbeziehen
- **Zukunft**: Transformer, Attention, Self-Supervised Learning, Foundation Models
- **Ethik**: Verantwortlicher Einsatz, Bias, Interpretierbarkeit, Nachhaltigkeit

References I

- G. Cybenko, “Approximation by superpositions of a sigmoidal function,” Mathematics of control, signals and systems, vol. 2, no. 4, pp. 303–314, 1989.
- K. Hornik, “Approximation capabilities of multilayer feedforward networks,” Neural networks, vol. 4, no. 2, pp. 251–257, 1991.
- F. Rosenblatt, “The perceptron: a probabilistic model for information storage and organization in the brain,” Psychological review, vol. 65, no. 6, pp. 386–408, 1958.
- M. Minsky and S. Papert, Perceptrons: An introduction to computational geometry. MIT press, 1969.
- D. E. Rumelhart, G. E. Hinton, and R. J. Williams, “Learning representations by back-propagating errors,” Nature, vol. 323, no. 6088, pp. 533–536, 1986.
- D. P. Kingma and J. Ba, “Adam: A method for stochastic optimization,” arXiv preprint arXiv:1412.6980, 2014.
- V. Nair and G. E. Hinton, “Rectified linear units improve restricted boltzmann machines,” in Proceedings of the 27th international conference on machine learning (ICML-10), pp. 807–814, 2010.
- Y. LeCun, L. Bottou, Y. Bengio, and P. Haffner, “Gradient-based learning applied to document recognition,” Proceedings of the IEEE, vol. 86, no. 11, pp. 2278–2324, 1998.

References II

S. Hochreiter and J. Schmidhuber, “Long short-term memory,” Neural computation, vol. 9, no. 8, pp. 1735–1780, 1997.