Statistische Methoden der Datenanalyse

Blatt.08

Helena Nawrath
helena.nawrath@udo.edu

Stefan Weise
stefan.weise@udo.edu

Felix Neubürger
felix.neubuerger@udo.edu

17. Januar 2017

Aufgabe 1: *Likelihoodkurve*

a)

$$
\begin{aligned}
L(\lambda) &= \prod_{(}^{3} i = 1)\frac{\lambda^{x_i}}{x_i!}e^{-\lambda} \\
&= \frac{\lambda^{13}}{13!}e^{-\lambda}\frac{\lambda^{8}}{8!}e^{-\lambda}\frac{\lambda^{9}}{9!}e^{-\lambda} \\
&= \frac{\lambda^{30}}{8!\,9!\,13!}e^{-3\lambda} \\
\ln L(\lambda) &= 30\ln\lambda - \ln 8!\,9!\,13! - 3\lambda \\
-\ln L(\lambda) &= -30\ln\lambda + \ln 8!\,9!\,13! + 3\lambda
\end{aligned}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d} - \ln L(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda} &= 0 \\
= \frac{\mathrm{d}(-30\ln\lambda + \ln 8!\,9!\,13! + 3\lambda)}{\mathrm{d}\lambda} \\
&= \frac{-30}{\lambda} + 3 \\
&\Rightarrow \lambda = 10
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2 - \ln L(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda^2}&|_{\lambda=10} \\
\frac{\mathrm{d}(\,^{-30}/\lambda + 3}{\mathrm{d}\lambda}&|_{\lambda=10} \\
= \frac{-30}{\lambda^2}&|_{\lambda=10} \\
&= 0.3
\end{aligned}
$$

c) Die Linien stellen verschiedene Standardabweichungen dar.

$$\begin{aligned}
-30\ln 10 + 30 + 0.5 &= -30\ln\lambda + 3\lambda \\
\lambda_{\frac{1}{2}_1} &= 8.2836 \\
\lambda_{\frac{1}{2}_2} &= 11.9385 \\
-30\ln 10 + 30 + 2 &= -30\ln\lambda + 3\lambda \\
\lambda_{2_1} &= 6.7788 \\
\lambda_{2_2} &= 14.1088 \\
-30\ln 10 + 30 + \frac{9}{2} &= -30\ln\lambda + 3\lambda \\
\lambda_{\frac{9}{2}_1} &= 5.4743 \\
\lambda_{\frac{9}{2}_2} &= 16.5197
\end{aligned}$$

d) $-\ln L(\lambda) = f(\lambda)$ wird um den Punkt $\lambda = 10$ entwickelt.

$$\begin{aligned}
f(\lambda) &= -30\ln\lambda + \ln 8!\,9!\,13! + 3\lambda \\
f(10) &= 6.88104 \\
f'(\lambda) &= 3 - \frac{30}{\lambda} \\
f'(10) &= 0 \\
f''(\lambda) &= \frac{30}{\lambda^2} \\
f''(10) &= 0.3 \\
T(f(\lambda), \lambda = 10) &= 6.88104 + 0 + \frac{0.3}{2}(\lambda - 10)^2 = 0.15\lambda^2 - 3\lambda + 21.881
\end{aligned}$$

Kürzen von $-\ln L_{max}$ auf beiden Seiten führt zu den Lösungen für die verschiedenen Punkte.

$$0.15\lambda^2 - 3\lambda + 15 = 0.5$$
$$\lambda_{\frac{1}{2}_1} = 8.1743$$
$$\lambda_{\frac{1}{2}_2} = 11.8257$$
$$0.15\lambda^2 - 3\lambda + 15 = 2$$
$$\lambda_{2_1} = 6.3485$$
$$\lambda_{2_2} = 13.6515$$
$$0.15\lambda^2 - 3\lambda + 15 = \frac{9}{2}$$
$$\lambda_{\frac{9}{2}_1} = 4.5228$$
$$\lambda_{\frac{9}{2}_2} = 15.4772$$

Aufgabe 2: *F-Praktikum*

Aufgabe 2: F-Praktikum a) Designmatrix
Asymmetrie beschrieben durch

$$f(\psi) = A_0 \cos(\psi + \delta).$$

Wir nutzen den Ansatz eines linearen Modells

$$f(\psi) = a_1 f_1(\psi) + a_2 f_2(\psi)$$

mit

$$f_1(\psi) = \cos(\psi) + f_2(\psi) = \sin(\psi).$$

Zunaechst bestimmen wir die Designmatrix A mit den Spaltenelementen $f_1(\psi_i) = \cos(\psi_i)$ und $f_2(\psi_i) = \sin(\psi_i)$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\sqrt(3)}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt(3)}{2} \\ 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt(3)}{2} \\ -\frac{\sqrt(3)}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 \\ -\frac{\sqrt(3)}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt(3)}{2} \\ 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt(3)}{2} \\ \frac{\sqrt(3)}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

b) Berechnung des Vektors a

$\vec{a} = (A^T A)^{-1} A^T \vec{y}$

$$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\sqrt(3)}{2} & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & \cdots \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt(3)}{2} & 1 & \frac{\sqrt(3)}{2} & \cdots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\sqrt(3)}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt(3)}{2} \\ 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt(3)}{2} \\ -\frac{\sqrt(3)}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 \\ -\frac{\sqrt(3)}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt(3)}{2} \\ 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt(3)}{2} \\ \frac{\sqrt(3)}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Zur Bestimmung der Inversen einer Diagonalmatrix, muss jedes diagonale Element durch sein inverses ersetzt werden.

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{\sqrt(3)}{2} & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & \cdots \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt(3)}{2} & 1 & \frac{\sqrt(3)}{2} & \cdots \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{\sqrt(3)}{12} & \frac{1}{22} & 0 & -\frac{1}{12} & -\frac{\sqrt(3)}{12} & -\frac{1}{6} & -\frac{\sqrt(3)}{12} & -\frac{1}{12} & 0 & \frac{1}{12} & \frac{\sqrt(3)}{12} \\ 0 & \frac{1}{12} & \frac{\sqrt(3)}{12} & \frac{1}{6} & \frac{\sqrt(3)}{12} & \frac{1}{22} & 0 & -\frac{1}{12} & -\frac{\sqrt(3)}{12} & -\frac{1}{6} & -\frac{\sqrt(3)}{12} & -\frac{1}{12} \end{pmatrix}$$

Diese Matrix wird nun mit einem Vektor y multipliziert. Dieser Vektor enthält die gemessenen Asymmetrien.

$$\vec{y}^T = \begin{array}{cccccc} (& -0,032 & 0,010 & 0,057 & 0,068 & 0,076 & 0,080 \\ 0,031 & 0,005 & -0,041 & -0,090 & -0,088 & -0,074 &) \end{array}$$

Als Loesungsvektor erhaelt man $\vec{a} = \begin{pmatrix} -0,0341 \\ 0,0774 \end{pmatrix}$

c)

$$W(\vec{y}) = (0.011)^{-2})\, \mathbb{1}_{12x12}$$

$$V(a)^{-1} = A^T W A = (0.011)^{-2})\, A^T A = (0.011)^{-2}) \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$
$$V(a) = \frac{121}{6000000} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a_1 und a_2 korrelieren nicht. Die Standartabweichung beträgt ≈ 0.00449073 für a_1 und a_2.

d)

$$\begin{aligned} A_0 \cos(\psi + \delta) &= A_0 (\cos(\psi)\cos(\delta) - \sin(\psi)\sin(\delta)) \\ &= A_0 \cos(\psi)\cos(\delta) - A_0 \sin(\psi)\sin(\delta) \\ &= a_1 \cos(\delta) - a_2 \sin(\delta) \\ \cos(\delta) &= a_1 \left(\frac{a_2}{\sin(\delta)}^{-1} \right) \\ \delta &= \arctan\left(-\frac{a_1}{a_2}\right) = 1.12 \pm 0.05 \\ A_0 &= -\frac{a_2}{\sin\left(\arctan\left(-\frac{a_1}{a_2}\right)\right)} \end{aligned}$$

Bestimmung der Kovarianz–Matrix

$$V = B^T V(\vec{a}) B$$

$$B = \begin{pmatrix} \frac{\partial \gamma}{\partial a_1} & \frac{\partial \gamma}{\partial a_2} \\ \frac{\partial A_0}{\partial a_1} & \frac{\partial A_0}{\partial a_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a_1}{\sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2}} & \frac{a_2}{\sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2}} \\ \frac{a_2}{\sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2}} & -\frac{a_1}{\sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2}} \end{pmatrix} V = \begin{pmatrix} -0.4356 & -0.9001 \\ -0.9001 & 0.4356 \end{pmatrix}$$

e) Die Werte für a_1, a_2, δ und A_0 ändern sich nicht stark. Die Korrelation nimmt stark zu.

Aufgabe 3: *Regularisierte kleinste Quadrate*

siehe weitere pdf