

R1 Eksamen H2023 LK20 Løsningsforslag

Farhan Omar

24. november 2023



Figur 1: Hva er matematikk egentlig?!

DEL 1 (Uten hjelpemidler)

Oppgave 1 (2 poeng)

Vi bruker produktregel $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$:

$$f(x) = x^2 \cdot \ln(x)$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x \cdot \ln(x) + x^2 \cdot \frac{1}{x} \\ &= 2x \ln(x) + x \end{aligned}$$

Oppgave 2 (2 poeng)

$$2 \ln(e^3) = 2 \cdot 3 \cdot \ln(e) = 2 \cdot 3 \cdot 1 = 6$$

$$e^{3 \cdot \ln 2} = e^{\ln 2^3} = e^{\ln 8} = 8$$

$$\begin{aligned} 3 \lg(70) &= 3 \cdot \lg(7 \cdot 10) = 3 \cdot (\lg(7) + \lg(10)) \\ &= 3 \cdot (\lg(7) + 1) = 3 \cdot \lg 7 + 3 \end{aligned}$$

$$\lg(1) < \lg 7 < \lg(10)$$

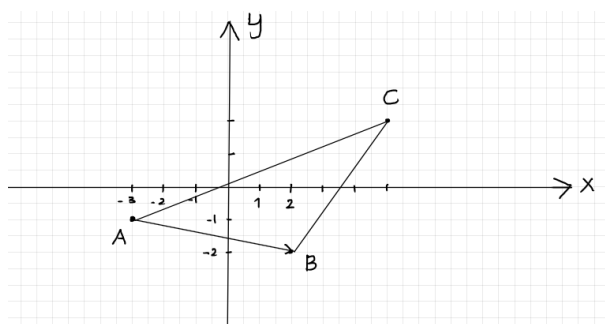
$$0 < \lg 7 < 1 \Rightarrow 3 \cdot \lg(70) < 6$$

Ut fra analysen over kan vi skrive tallene i stigende rekkefølge slik:

$$3 \cdot \lg 70, \quad 2 \ln e^3, \quad e^{3 \ln 2}$$

Oppgave 3 (4 poeng)

a)



$$AB = [2 - (-3), -2 - (-1)] = [2 + 3, -2 + 1] = [5, -1]$$

$$AC = [5 - (-3), 2 - (-1)] = [5 + 3, 2 + 1] = [8, 3]$$

$$BC = [5 - 2, 2 - (-2)] = [3, 2 + 2] = [3, 4]$$

$$|AB| = \sqrt{5^2 + (-1)^2} = \sqrt{25 + 1} = \sqrt{26}$$

$$|AC| = \sqrt{8^2 + 3^2} = \sqrt{64 + 9} = \sqrt{73}$$

$$|BC| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

Den korteste siden er $BC = 5$

b)

$$AB \cdot AC = 5 \cdot 8 + (-1) \cdot 3 = 40 - 3 = 37 > 0$$

$$BA \cdot BC = [-5, 1] \cdot [3, 4] = -5 \cdot 3 + 1 \cdot 4 = -15 + 4 = -11 < 0$$

$$CA \cdot CB = -AC \cdot (-BC) = AC \cdot BC = 8 \cdot 3 + 3 \cdot 4 = 24 + 12 = 36 > 0$$

Siden ingen av skalarproduktene for vektorene som danner alle tre vinklene i trekanten er null så ingen av vektor-parene er vinkelrette på hverandre og dermed ingen rettvinkel i trekanten.

Oppgave 4 (2 poeng)

a)

Eleven bruker strategien om å finne den deriverte numerisk i punktene fra $x = 0$ fram til den deriverte skifter fortegnet fra negativt til positivt som gir oss da bunnpunkt. Så lenge den deriverte er negativt (blir sjekket i while-løkke betingelsen), økes x-verdien med 1, og deretter beregnes den deriverte igjen til $f(x)' \geq 0$.

b)

Vi regner bunnpunktet slik:

$$f(x) = 2x^2 - 9x - 2$$

$$f'(x) = 4x - 9$$

$$f(x) = 0 \Rightarrow 4x - 9 = 0 \Rightarrow x = \frac{9}{4} = 2,25$$

x verdien til bunnpunktet er 2,25. Derfor må vi endre linje 11 til $a=a+0.01$ fordi vi går forbi bunnpunktet når x verdien økes med 1.

DEL 2 (Med hjelpemidler)

Oppgave 1 (6 poeng)

a)




Funksjonen $f(t)$ som oppgitt i oppgavenen, en sammensatt funksjon av en eksponential-funksjon $-2,5 \cdot 0,99^t$ og en konstantfunksjon $2,5$. Siden

$$-2,5$$

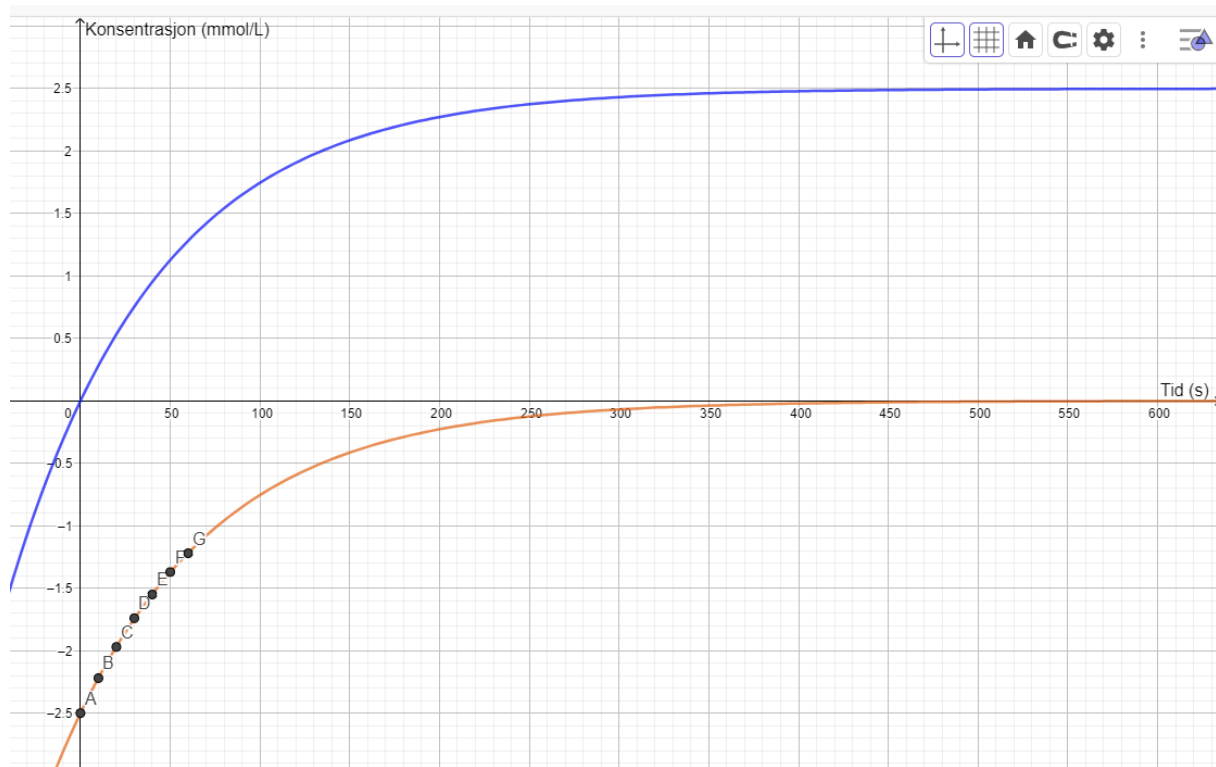
er startverdi i den eksponentiale delen og konsentrasjonen er null når tiden er null, og vi vet eksponential funksjon kan ikke være null, må vi trekke $2,5$ fra hver konsentrasjon. Vi legger punktene (tid med konsentrasjon $-2,5$) i et regneark i geogebra, lager liste med punkter så bruker vi eksponentiell regresjon som gir oss funksjon $f(x)$. Vi definerer en ny funksjon $g(x) = 2.5 + f(x)$. Vi ser fra utklippene under at g vil gå mot $2,5$ når t går mot uendelig

	A	B	C
1	Tid(s)	Konsentrasjon (mmol/L)	Konsentrasjon -2.5
2	0	0	-2.5
3	10	0.28	-2.22
4	20	0.53	-1.97
5	30	0.76	-1.74
6	40	0.95	-1.55
7	50	1.13	-1.37
8	60	1.28	-1.22

Figur 2

	$l1 = \{A, B, C, D, E, F, G\}$ $= \{(0, -2.5), (10, -2.22), (20, -1.97), (30, -1.74), (40, -1.55), (50, -1.37), (60, -1.22)\}$
	$f(x) = \text{RegEksp}(l1)$ $= -2.5 \cdot 0.99^x$
	$g(x) = 2.5 + f(x)$ $= 2.5 - 2.5 \cdot 0.99^x$

Figur 3

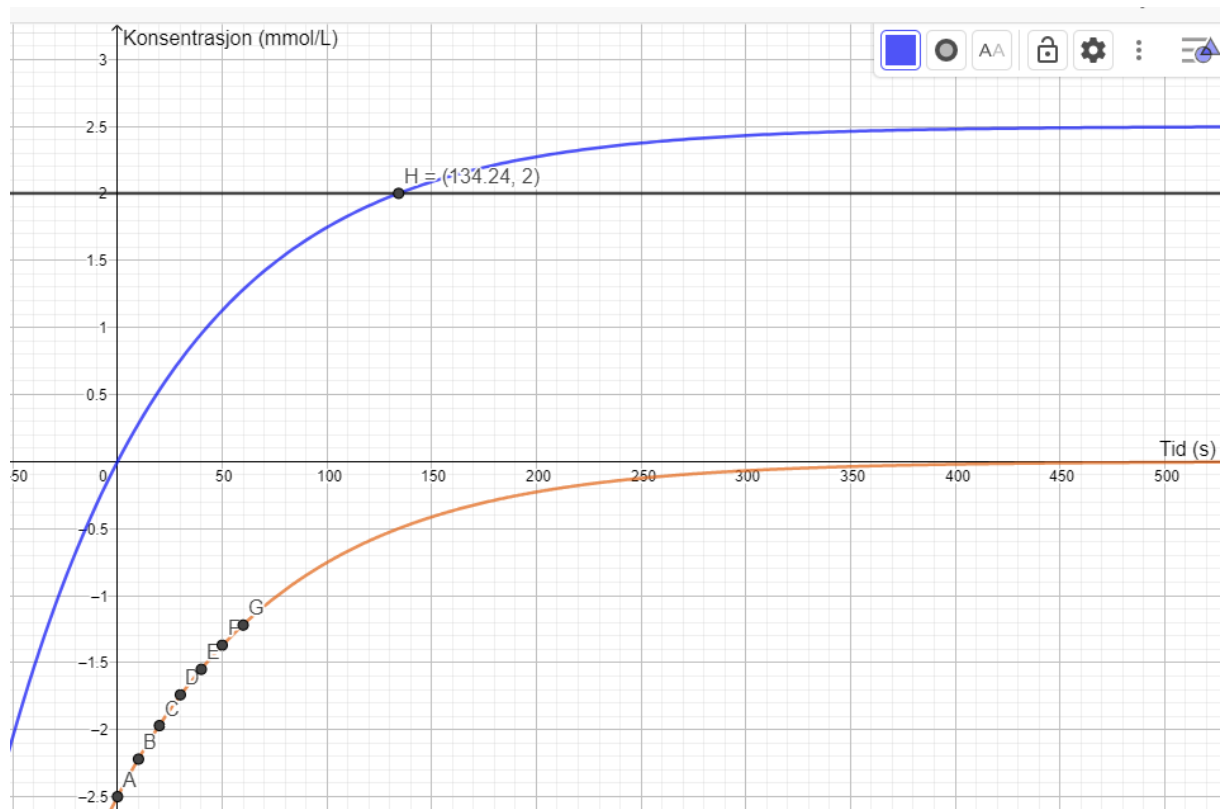


Figur 4

b)

Vi bruker graftegner til å tegne linjen $y = 2$, så velger vi Skjæring mellom to objekt fra algebrafelt meny og markerer grafen til $g(x)$ og linjen for å finne skjæringspunkt (se utklippene under).

	b)
	$h : y = 2$
	$H = \text{Skjæring}(g, h, (134.24, 2))$ $= (134.24, 2)$



Figur 5

Det går omtrent 134 sekunder før konsentrasjonen er på $2,5 \text{ mmol/L}$

c)

Konsentrasjonen øker med mindre enn 0.001 mmol/L per sekund når $f'(x) < 0,001$, vi finner tiden ved å løse ulikheten i Cas

	$g'(x) < 0.001$
1	Løs: $\left\{ x > \frac{\ln\left(\frac{-20000000000}{50012261128839 \ln\left(\frac{988080566224247}{1000000000000000}\right)}\right)}{\ln\left(\frac{988080566224247}{1000000000000000}\right)} \right\}$
2	\$1
	$\approx \{x > 283.6\}$

Figur 6

Det vi ta 283,6 sekunder før konsentrasjonen øker med mindre enn 0.001 mmol/L per sekund.

Oppgave 2 (6 poeng)

a)

En funksjon er kontinuert i et punkt hvis grenseverdien fra høyre er lik grenseverdi fra venstre (m.a.o. grenseverdien eksisterer) og den er lik funksjonsverdien i punktet. Denne funksjonen er kontinuert overalt (begge delene er polynomer av andregrad), men vi må sjekke kontinuitet i delingspunktet ($x = k$). For å gjøre utregninger enklere kaller jeg den øverste funksjonen for $g(x)$ og den nederste for $h(x)$,

$$g(x) = -x^2 + (2+k)x$$

$$h(x) = x^2 + (2-k)x$$

$$f(x) = \begin{cases} g(x), & x < k \\ h(x), & x \geq k \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow k^-} f(x) = g(k) = -k^2 + (2+k)k = -k^2 + 2k + k^2 = 2k$$

$$\lim_{x \rightarrow k^+} f(x) = h(k) = k^2 + (2-k) \cdot k = k^2 + 2k - k^2 = 2k$$

$$f(k) = h(k) = 2k$$

Funksjonen f er kontinuert i $x = k$ for alle verdier for k siden kontinuitetsbetingelsen er oppfylt for alle k -verdier.

b)

For å sjekke at f er deriverbar, kan vi derivere funksjonen og kreve at den deriverte er kontinuert for $x = k$

$$f'(x) = \begin{cases} g'(x), & x < k \\ h'(x), & x \geq k \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} -2x + 2 + k, & x < k \\ 2x + 2 - k, & x \geq k \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow k^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow k^+} f'(x)$$

$$-2k + 2 + k = 2k + 2 - k$$

$$-k + 2 = k + 2$$

$$-k = k$$

$$k = 0$$

$f(x)$ er deriverbar overalt hvis $k = 0$

c)

For at en funksjon skal ha omvendt, må den være én-til-en, det vil si at hver verdi for x skal gi én verdi for y og motsatt. Utfra dette en funksjon har omvendt hvis den er enten bare voksende eller bare avtagende. Vi finner den derivate og setter den lik null for å finne ekstremalpunkter.

$$f'(x) = \begin{cases} g'(x), & x < k \\ h'(x), & x \geq k \end{cases}$$

$$f'(x) = 0$$

$$g'(x) = 0 \Rightarrow -2x + 2 + k = 0 \Rightarrow x = \frac{k+2}{2}$$

$$h'(x) = 0 \Rightarrow 2x + 2 - k = 0 \Rightarrow x = \frac{k-2}{2}$$

$$f''(x) = \begin{cases} -2, & x < k \\ 2, & x \geq k \end{cases} \quad (1)$$

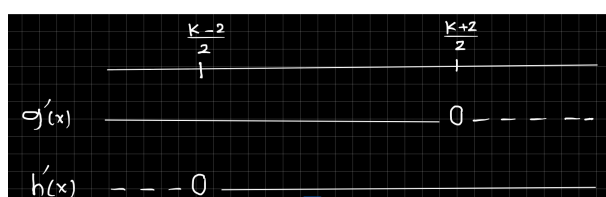
$$f''\left(\frac{k+2}{2}\right) = \begin{cases} -2, & \frac{k+2}{2} < k \\ 2, & \frac{k+2}{2} \geq k \end{cases} \quad (2)$$

$$= \begin{cases} -2, & k > 2 \\ 2, & k \leq 2 \end{cases} \quad (3)$$

$$f''\left(\frac{k-2}{2}\right) = \begin{cases} -2, & \frac{k-2}{2} < k \\ 2, & \frac{k-2}{2} \geq k \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -2, & k > -2 \\ 2, & k \leq -2 \end{cases}$$

Utfra andrederiverttest har funksjonen et toppunkt i $x = (k/2 + 1)$ via $g(x)$, men da må $k > 2$ og et bunnpunkt i $x = k/2 - 1$ via $h(x)$ og $k \leq -2$. Vi kan lage følgende fortegnsskjema,



Vi ser at f er strengt voksende i $[\frac{k-2}{2}, \frac{k+2}{2}]$ og k må være i intervallet $[-2, 2]$ for at f skal ha omvendt funksjon fordi ellers har funksjonen et toppunkt og\eller et bunnpunkt.

MERK: En alternativ tilnærming er å utføre en grafisk analyse ved å skrive funksjonen i algebrafeltet. Dette gir deg muligheten til å legge til en glider for parameteren k , slik at du kan undersøke om en horisontal linje $y = a$ skjærer grafen i ett punkt. I tillegg kan du vurdere om grafen enten bare stiger eller bare avtar, indikert ved fravær av ekstremalpunkter. Dette gir en visuell bekreftelse på om funksjonen er én-til-én og har en invers.

Oppgave 3 (6 poeng)

a)

Vi løser oppgaven i CAS:

La h stå for høyden av kassen og s for sidelengde på kvadratet i grunnflaten. Samlede areal er arealet av grunnflaten + arealene av de 4 like sideflatene og dette skal være mindre enn eller lik 120 (se rad 1 og 2). Størst volum er regnet i rad 3 og det er på 118,75 dm^3

1	$5^2 + 4 \cdot 5 h \leq 120$
<input type="radio"/>	Løs: $\left\{ h \leq \frac{19}{4} \right\}$
2	\$1
<input type="radio"/>	$\approx \{h \leq 4.75\}$
3	VolumKasse := $5^2 \cdot 4.75$
<input checked="" type="radio"/>	\approx VolumKasse := 118.75

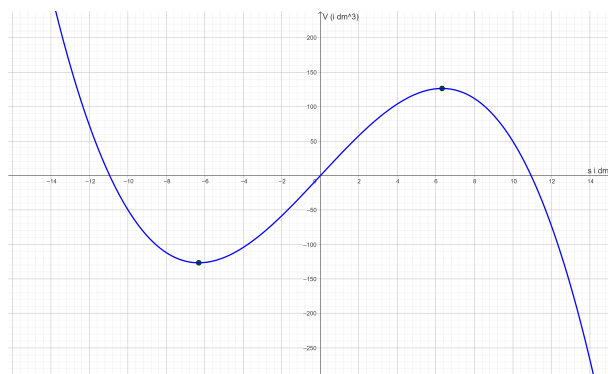
Figur 7

b)

Vi definerer en samlede areal funksjon (rad 5), så bruker vi betingelsen at samlede areal er mindre enn eller lik $120dm^2$ til å regne høyden som funksjon av sidelengden av grunnflaten. Deretter lager vi en funksjon for volum av kassen med s som variabel. Vi finner ekstremalpunkter for funksjonen og får to løsninger, men vi godtar kun den positive løsningen. Vi kan bekrefte at punktet $s = 6,325$ er et toppunkt enten grafisk (se utklippet under) eller via andrederiverttest (rad 10).

	volume := 110.15
4	b)
5	$A(s) := s^2 + 4 s h$ $\approx A(s) := s^2 + 4 h s$
6	$A(s) \leq 120$ <input type="radio"/> Løs: $\left\{ h = \frac{-s^2 + 120}{4 s} \right\}$
7	$V(s) := s^2 \text{ HøyreSide}(\$5, 1)$ <input checked="" type="radio"/> $\rightarrow V(s) := \frac{-1}{4} s^3 + 30 s$
8	Ekstremalpunkt(V) <input type="radio"/> $\rightarrow \left\{ (-2 \sqrt{10}, -40 \sqrt{10}), (2 \sqrt{10}, 40 \sqrt{10}) \right\}$
9	$l1 := \$7$ <input checked="" type="radio"/> $\approx l1 := \{(-6.325, -126.491), (6.325, 126.491)\}$
10	$V''(2 \sqrt{10})$ <input type="radio"/> $\rightarrow -3 \sqrt{10}$

Figur 8



Figur 9

c)

Vi bruker CAS til finne sidelengden s (se rad 12) og får 3 løsninger og dropper den negative løsningen. Vi definere en høyde funksjon (rad 13) og bruker den til å regne samlede areal (rad 14). Det minste samlede arealet er $924,04 \text{ dm}^2$

11	c)
12	$V(s) = 80$
<input type="radio"/>	LØS: $\{s = -12.101, s = 2.862, s = 9.239\}$
13	$H(s) := \frac{-s^2 + 120}{4} s$
<input checked="" type="radio"/>	$\rightarrow H(s) := \frac{-1}{4} s^3 + 30 s$
14	$H\text{øyreSide}(\$11)^2 + 4 H(H\text{øyreSide}(\$11)) H\text{øyreSide}(\$11)$
<input type="radio"/>	$\approx \{-3725.997, 924.04, 3041.956\}$

Figur 10

Oppgave 4 (6 poeng)

a)

Påstanden er ikke sann. Den generelle formen på en tredjegradsfunksjon er gitt i rad 1. Vi ser at den kan ha maks 2 ekstremalpunkter fordi den deriverte er andre gradspolynom og den kan ha enten et nullpunkt, 2 nullpunkter eller ingen i \mathbb{R} avhengig av uttrykket under kvadratrot tegnet. Hvis uttrykket under rottegnet er negativt er det ingen ekstremalpunkter, hvis det er null har funksjon et terrasepunkt (se rad 5) og hvis det er positivt har funksjonen et toppunkt og et bunnpunkt (rad 3).

1	$f(x) := a x^3 + b x^2 + c x + d$
	$\rightarrow f(x) := a x^3 + b x^2 + c x + d$
2	$f'(x)$
	$\rightarrow 3 a x^2 + 2 b x + c$
	$f'(x) = 0$
3	LØS: $\left\{ x = \frac{-\sqrt{-3 a c + b^2} - b}{3 a}, x = \frac{\sqrt{-3 a c + b^2} - b}{3 a} \right\}$
4	$-3ac + b^2 \geq 0$
<input type="radio"/>	LØS: $\left\{ ac \leq \frac{b^2}{3} \right\}$
5	$f''\left(-\frac{b}{3a}\right)$
<input checked="" type="radio"/>	$\rightarrow 0$

Figur 11

b)

Påstanden er sann siden $f(x)$ er et polynom, da er den kontinuerlig og har \mathbb{R} som definisjonsmengde og verdimengde og derfor en rettlinje skal skjære den i minst et punkt siden

en rettlinje er også uendelig lang.

Et mer abstrakt metode kunne vært å løse ligningen $f(x) = y$ eller alternativt finne nullpunktet til $g(x) = f(x) - y$ Vi definerer en funksjon $g(x)$

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$y = mx + n$$

$$g(x) = f(x) - y = ax^3 + bx^2 + (c - m)x + (d - n) = x^3 \left(a + \frac{b}{x} + \frac{c - m}{x^2} + \frac{d - n}{x^3} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \begin{cases} \infty, a > 0 \\ -\infty, a < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \begin{cases} -\infty, a > 0 \\ +\infty, a < 0 \end{cases}$$

Tredjegradspolynom $g(x)$ skal ha minst et nullpunkt fordi den går til uendelig (-uendelig) når x går mot uendelig (-uendelig) og da må grafen krysse x -aksen i minst et punkt.

c)

Påstanden er sann. Vi finner den dobbeltderiverte og setter den lik null i $x=3$ og da finner vi en sammenheng mellom a og b (rad 11). Vi bytter ut for a og sjekker likheten via geogebra og ser at påstanden er riktig.

9	c)
10	$f''(x)$ $\rightarrow 6ax + 2b$
11	$f''(3) = 0$ <input type="radio"/> Løs: $\left\{ a = \frac{-1}{9} b \right\}$
12	$f'(1)$ $\rightarrow 3a + 2b + c$
13	$f'(5)$ $\rightarrow 75a + 10b + c$
14	$\text{ByttUt}(f'(1), \$10) \stackrel{?}{=} \text{ByttUt}(f'(5), \$10)$ $\rightarrow \text{true}$

Figur 12

Oppgave 5 (6 poeng)

a)

Vi bruker Cas ved å først definere funksjonen $\vec{r}(t)$ så definere fartsvektor (rad 2)

2	$\vec{r}(t) := (8(e^{-t} - t), 5(e^{-t} - t))$
<input checked="" type="radio"/>	$\rightarrow \vec{r}(t) := (-8t + 8e^{-t}, -5t + 5e^{-t})$
3	$\vec{v}(t) := \vec{r}'(t)$
<input checked="" type="radio"/>	$\rightarrow \vec{v}(t) := (-8e^{-t} - 8, -5e^{-t} - 5)$
4	$ \vec{v}(0) $
<input type="radio"/>	≈ 18.868

Figur 13

Pucken hadde fart på 18,868 m/s da den ble sendt av gårde.

b)

For å finne tiden det tar før pucken treffer vantet, må vi finne t når $r(t)$ treffer veggene. Veggene er ved $x = \pm \frac{60}{2} = \pm 30$ og $y = \pm \frac{15}{2} = \pm 7,5$ (fordi banen er 60 m lang og 30 m bred og origo er i midten av banen).

6	$x(r(t)) = -\frac{60}{2}, t = 1$
<input type="radio"/>	NLøs: $\{t = 3.773\}$
7	$y(r(t)) = -\frac{30}{2}, t = 1$
<input type="radio"/>	NLøs: $\{t = 3.047\}$
8	$x(r(t)) = \frac{60}{2}, t = 1$
<input type="radio"/>	NLøs: $\{t = -1.009\}$
9	$y(r(t)) = \frac{30}{2}, t = 1$
<input type="radio"/>	NLøs: $\{t = -0.792\}$

Figur 14

Pucken treffer høyre vegg 3,8 sekunder etter den ble satt av gårde og nedre vegg 3,047 sekunder etter den ble satt av gårde.

c)

Vi lager en parameterframstilling for banen til andre hockey spilleren (rad 13) og prøver å finne ut om de er i krysningspunktet mellom banene til samme tid (rad 14 og 15). Vi ser at tiden er forskjellig og derfor vill ikke spilleren ble truffet av pucken.

11	$u := (3, -7)$
<input checked="" type="radio"/>	$\rightarrow u := \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \end{pmatrix}$
12	$P := (-18, 11)$
<input checked="" type="radio"/>	$\rightarrow P := (-18, 11)$
13	$L(t) := (-18 + 3t, 11 - 7t)$
<input checked="" type="radio"/>	$\rightarrow L(t) := (3t - 18, -7t + 11)$
14	$x(L(t)) = x(r(t))$
<input type="radio"/>	NLøs: $\{t = 1.761\}$
15	$y(L(t)) = y(r(t))$
<input type="radio"/>	NLøs: $\{t = -0.947, t = 5.49\}$

Oppgave 6 (6 poeng)

a)

Vi bruker Cas til å finne c (rad 1,2):

1	$f(x) := x^2 + 3x + 1$
<input checked="" type="radio"/>	$\rightarrow f(x) := x^2 + 3x + 1$
2	$f'(c) = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1}$
<input type="radio"/>	Løs: $\{c = 2\}$

Figur 15

Fra utklippet over ser vi at $c = 2$

b)

Vi kan bruke Python-programmet nedenfor:

```

1 def f(x):                # Definere funksjonen f(x) = x^2 + 3x + 1
2     return x**2 + 3*x + 1
3
4 def finn_c(a, b):
5     dfc = (f(b) - f(a)) / (b - a) # Beregn f'(c) = (f(b) - f(a)) / (b - a)
6     c = (dfc - 3) / 2           # Løs for c ved å sette f'(c) = df(c)
7     return c
8 # Test med a = 1 og b = 3
9 svar = finn_c(1, 3)
10 print("c =", svar)
11
c = 2.0

```

Figur 16

I linje 6 har vi funnet c slik:

$$f(x) = x^2 + 3x + 1$$

$$f'(x) = 2x + 3$$

$$f'(c) = 2c + 3 \Rightarrow c = \frac{f'(c) - 3}{2}$$

c)

Vi kjører koden nedenfor for flere verdier for a og b:

```

1 def f(x):                # Definere funksjonen f(x) = x^2 + 3x + 1
2     return x**2 + 3*x + 1
3
4 def finn_c(a, b):
5     dfc = (f(b) - f(a)) / (b - a) # Beregn f'(c) = (f(b) - f(a)) / (b - a)
6     c = (dfc - 3) / 2           # Løs for c ved å sette f'(c) = df(c)
7     return c
8 # Test med noen verdier for a og b ved å bruke vektorer
9 a = np.array([1, 2, 3, 5])
10 b = np.array([7, 8, 9, 12])
11
12 print('a.....b.....c....(a+b)/2')
13 for i, j in zip(a, b): # Loope over to verdier samtidig via zip funksjon
14     print(f"{i}.....{j}.....{c(i, j)}....{(i+j)/2}")
15
a.....b.....c....(a+b)/2
1.....7.....4.0....4.0
2.....8.....5.0....5.0
3.....9.....6.0....6.0
5.....12.....8.5....8.5

```

Figur 17

Fra utskriften til brogrammet over ser vi at $c = \frac{a+b}{2}$

d)

Anne's påstand er riktig. Vi definerer en generell andregradsfunksjon $g(x)$ (rad 4) i Cas og finner den deriverte av g i punktet $x = c$ og setter den lik uttrykket som er oppgitt i oppgaven og ser at $c = 5$ når $a = 2$ og $b = 8$ (rad 5)

4	$g(x) := m x^2 + n x + k$ $\rightarrow g(x) := m x^2 + n x + k$
5	$g'(c) = \frac{g(8) - g(2)}{8 - 2}$
<input type="radio"/>	Løs: $\{c = 5\}$

Figur 18