

Wissenschaftliche Methodik – Übung Quantitative Datenanalyse mit R

*erstellt von Professor*innen des ifes*

Stand WiSe 2017/18

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 0: Erste Schritte in R	6
Hinweise	6
R als Taschenrechner	7
R zur Datenanalyse	7
Erste Analyse des tips Datensatzes	8
mosaic	9
Übung: Teaching Rating	11
Daten importieren	12
Literatur	12
Lizenz	13
Versionshinweise:	13
Kapitel 1: Einführung in Daten	14
Datensatz	14
Grafische Verfahren der Datenanalyse	14
Balkendiagramm	14
Histogramm	16
Boxplots	17
Scatterplot (Streudiagramme)	19
Mosaicplot	20
Korrelationsplot	21
Kennzahlen der Datenanalyse	22
Lagemaße	22
Streuungsmaße	25
Zusammenhangsmaße	26
Übung: Teaching Rating	27
Literatur	27
Lizenz	28
Versionshinweise:	28
Kapitel 2: Einführung Wahrscheinlichkeit und Inferenz	29
Zufall und Wahrscheinlichkeit	29
Hypothesentest, p-Wert und Konfidenzintervall	33

Rechnen mit der Normalverteilung	37
Random Walk	37
Übung: Achtsamkeit	41
Übung: Intelligenzquotient	42
Literatur	42
Lizenz	42
Versionshinweise:	42
Kapitel 3: Einführung Inferenz kategoriale Werte	43
Globaler Index der Religiosität und Atheismus	43
Inferenz eines Anteilswerts	44
Differenz zweier Anteilswerte	47
Chi-Quadrat Unabhängigkeitstest	51
Übung: Trinkgelddaten	53
Literatur	53
Lizenz	53
Versionshinweise:	53
Kapitel 4: Einführung Inferenz metrische Werte	54
t-Test für eine Stichprobe	54
t-Test für eine abhängige/gepaarte Stichprobe	60
t-Test für zwei unabhängige Stichproben	62
Varianzanalyse (ANOVA)	66
Erweiterung: Mehrfaktorielle Varianzanalyse mit Wechselwirkung	73
Übung: Teaching Rating	75
Literatur	75
Lizenz	76
Versionshinweise:	76
Kapitel 5: Einführung Lineare Regression	77
Einfache Regression	77
Regression mit kategorialen Werten	83
Multivariate Regression	87
Inferenz in der linearen Regression	90
Erweiterungen	91
Modellwahl	91
Interaktionen	93
Weitere Modellierungsmöglichkeiten	95
Prognoseintervalle	95
Kreuzvalidierung	97
Übung: Teaching Rating	98
Literatur	99

Lizenz	99
Versionshinweise:	99
Kapitel 6: Einführung Logistische Regression	100
Vorbereitung	100
Problemstellung	100
Logistische Regression	103
Welche Unterschiede zur linearen Regression gibt es in der Ausgabe?	105
Interpretation der Koeffizienten	105
y-Achsenabschnitt (Intercept) β_0	105
Steigung β_i mit $i = 1, 2, \dots, K$	106
Kategoriale Variablen	107
Multiple Regression	109
Erweiterungen	110
Klassifikationsgüte	110
Modellschätzung	113
Likelihood Quotienten Test	114
Pseudo- R^2	115
Übung: Rot- oder Weißwein?	116
Literatur	116
Lizenz	116
Versionshinweise:	116
Kapitel 7: Dimensionsreduktion mit PCA und EFA	118
Dimensionsreduktion	118
Konstrukte	118
Was bedeutet Anerkennung?	118
Messung von Anerkennung	118
Zwei Methoden der Dimensionsreduktion	119
Welches ist die bessere Methode?	119
Faustregeln	119
Gründe für die Notwendigkeit der Datenreduktion	119
Benötigte Pakete	120
Daten	120
Einlesen	120
Neuskalierung der Daten	122
Zusammenhänge in den Daten	123
Daten mit fehlende Werten	124
Hauptkomponentenanalyse (PCA)	125
Bestimmung der Anzahl der Hauptkomponenten	125
Scree-Plot	126

Elbow-Kriterium	126
Eigenwert-Kriterium	127
Biplot	130
Extraktion der Komponenten	131
Interpretation der Ergebnisse der PCA I:	132
Grafische Darstellung	133
Exploratorische Faktorenanalyse (EFA)	133
Vergleich zur PCA	133
Finden einer EFA Lösung	134
Schätzung der EFA	134
Heatmap mit Ladungen	137
Berechnung der Faktor-Scores	137
Bildung der Konstrukte durch Mittelwertbildung	138
Interne Konsistenz der Skalen	138
Cronbachs Alpha	138
Bewertung von Sicherheit	139
Literatur	140
Versionshinweise:	140
Kapitel 8: Einführung Clusteranalyse	141
Clusteranalyse	141
Hierarchische Clusteranalyse	143
k-Means Clusteranalyse	145
Übung: B3 Datensatz	147
Literatur	148
Lizenz	148
Versionshinweise:	148
Anhang 1: R Kurzreferenz	149
Vorbemerkungen	149
Daten	149
Daten einlesen	150
Daten verarbeiten	150
Daten transformieren	150
Grafische Verfahren	151
Deskriptive Statistik	152
Inferenzstatistik	152
Randomisierung, Simulationen	152
Verteilungen	152
Testverfahren	153
Multivariate Verfahren	153

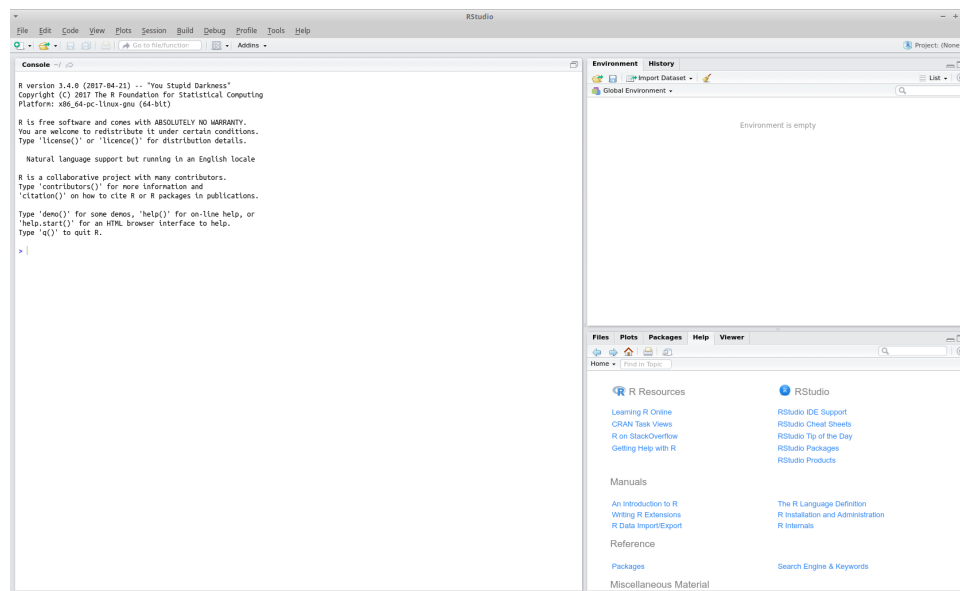
Versionshinweise:	153
Anhang 2: Datenjudo	155
Typische Probleme	157
Daten aufbereiten mit <code>dplyr</code>	157
Zeilen filtern mit <code>filter</code>	158
Aufgaben	159
Vertiefung: Fortgeschrittene Beispiele für <code>filter</code>	159
Spalten wählen mit <code>select</code>	159
Aufgaben	160
Zeilen sortieren mit <code>arrange</code>	161
Aufgaben	163
Datensatz gruppieren mit <code>group_by</code>	164
Aufgaben	165
Eine Spalte zusammenfassen mit <code>summarise</code>	165
Aufgaben	167
Zeilen zählen mit <code>n</code> und <code>count</code>	167
Aufgaben	169
Vertiefung	169
Die Pfeife	169
Werte umkodieren mit <code>car::recode</code>	171
“Binnen” mit <code>car::recode</code>	173
Numerische Werte in Klassen gruppieren mit <code>cut</code>	173
Verweise	175
Hinweis	175
Versionshinweise:	175
Anhang 3: Daten visualisieren mit ggplot	176
Ein Bild sagt mehr als 1000 Worte	177
Häufige Arten von Diagrammen	179
Eine kontinuierliche Variable	179
Zwei kontinuierliche Variablen	186
Eine diskrete Variable	190
Zwei diskrete Variablen	195
Zusammenfassungen zeigen	196
Verweise	198
Hinweis	198
Versionshinweise:	198

Kapitel 0: Erste Schritte in R

Hinweise

R ist der Name eines Programms für Statistik und Datenanalyse, RStudio ist eine komfortable Entwicklungsumgebung für R.

Nach dem Start von RStudio erscheint folgender Bildschirm, wobei die Version neuer sein kann.



Links, in der *Console* werden die Befehle eingegeben. Rechts oben können Sie z. B. die Daten, aber auch andere Objekte, mit denen Sie arbeiten, betrachten, auch die Historie der Befehle wird dort angezeigt. Rechts unten können Sie u. a. Dateien und Abbildungen auswählen, aber auch Hilfeseiten und Tipps betrachten.

Wir werden zunächst in der Konsole arbeiten.

Ein paar Anmerkungen vorweg:

- R unterscheidet zwischen Groß- und Kleinbuchstaben, d. h., Oma und oma sind zwei verschiedene Dinge für R!
- R verwendet den Punkt `.` als Dezimaltrennzeichen,
- Fehlende Werte werden in R durch NA kodiert,
- Kommentare werden mit dem Rautezeichen `#` eingeleitet; der Rest der Zeile von von R dann ignoriert.
- R wendet Befehle direkt an.
- R ist objektorientiert, d. h., dieselbe Funktion hat evtl. je nach Funktionsargument unterschiedliche Rückgabewerte
- Hilfe zu einem Befehl erhält man über ein vorgestelltes Fragezeichen `?`
- Zusätzliche Funktionalität kann über Zusatzpakete hinzugeladen werden. Diese müssen ggf. zunächst installiert werden,
- Mit der Pfeiltaste nach oben können Sie einen vorherigen Befehl wieder aufrufen,

- Sofern Sie das Skriptfenster verwenden: einzelne Befehle aus dem Skriptfenster in R Studio können Sie auch mit `Str` und `Enter` an die Console schicken,

R als Taschenrechner

Auch wenn Statistik nicht Mathe ist, so kann man mit R auch rechnen. Geben Sie zum Üben die Befehle in der R Konsole hinter der Eingabeaufforderung `>` ein und beenden Sie die Eingabe mit `Return` bzw. `Enter`.

```
4+2
```

```
## [1] 6
```

Das Ergebnis wird direkt angezeigt. Bei

```
x <- 4+2
```

erscheint zunächst kein Ergebnis. Über `<-` wird der Variable `x` der Wert `4+2` zugewiesen. Wenn Sie jetzt

```
x
```

eingeben, wird das Ergebnis

```
## [1] 6
```

angezeigt. Sie können jetzt auch mit `x` weiterrechnen.

```
x/4
```

```
## [1] 1.5
```

Vielleicht fragen Sie sich was die `[1]` vor dem Ergebnis bedeutet. R arbeitet vektororientiert, und die `[1]` zeigt an, dass es sich um das erste (und hier auch letzte) Element des Vektors handelt.

R zur Datenanalyse

Wir wollen R aber als Tool zur Datenanalyse verwenden. Daher müssen wir zunächst Daten einlesen.

Zunächst laden wir die Daten als `csv` Datei herunter

```
download.file("https://goo.gl/whKjnl", destfile = "tips.csv")
```

Der Inhalt der Datei ist jetzt als Tabelle `tips` in R verfügbar.

Hier können Sie mehr über die Daten erfahren.

Das Einlesen von `csv` Dateien aus dem Arbeitsverzeichnis in R kann erfolgen über

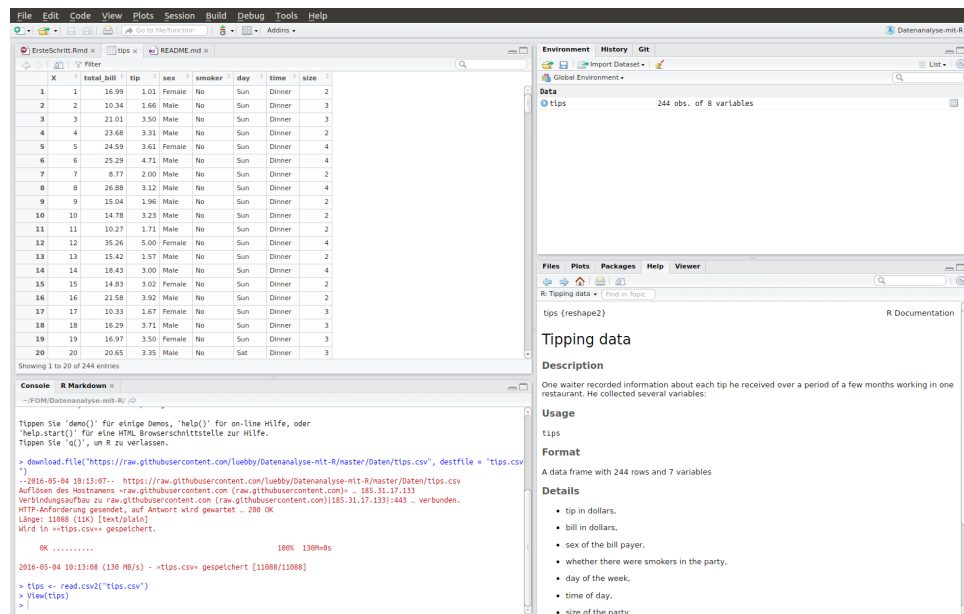
```
tips <- read.csv2("tips.csv")
```

Wo das lokale Verzeichnis (“working directory”) ist, können Sie über

```
getwd()
```

erfahren.

Der Datensatz `tips` taucht jetzt im Environment Fenster rechts oben in RStudio auf. Durch Klicken auf den Namen können Sie diese betrachten.



Alternativ können Sie Daten in RStudio komfortabel mit dem Button `Import Dataset` (im Fenster `Environment` oder über das Menü `File`) öffnen.

Erste Analyse des tips Datensatzes

Dieser Datensatz aus

Bryant, P. G. and Smith, M (1995) Practical Data Analysis: Case Studies in Business Statistics. Homewood, IL: Richard D. Irwin Publishing

enthält Trinkgelddaten. Diese sind in tabellarischer Form dargestellt, d. h. üblicherweise, dass die Beobachtungen zeilenweise untereinander stehen, die einzelnen Variablen spaltenweise nebeneinander. In R heißen solche Daten *data frame*. Um einen ersten Überblick über die verschiedenen Variablen zu erhalten geben wir den Befehl `str()` ein:

```
str(tips)
```

```
## 'data.frame':    244 obs. of  7 variables:
## $ total_bill: num  17 10.3 21 23.7 24.6 ...
## $ tip       : num  1.01 1.66 3.5 3.31 3.61 4.71 2 3.12 1.96 3.23 ...
## $ sex      : Factor w/ 2 levels "Female","Male": 1 2 2 2 1 2 2 2 2 2 ...
## $ smoker   : Factor w/ 2 levels "No","Yes": 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 ...
## $ day      : Factor w/ 4 levels "Fri","Sat","Sun",...: 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 ...
## $ time     : Factor w/ 2 levels "Dinner","Lunch": 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 ...
```



```
## $ size      : int  2 3 3 2 4 4 2 4 2 2 ...
```

Dieser enthält also 244 Zeilen (Beobachtungen) und 7 Spalten (Variablen). Alternativ kann man diese Information auch über

```
dim(tips)
```

```
## [1] 244    7
```

erhalten.

Numerische (metrische) Variablen sind in R in der Regel vom Typ `numeric` (stetig) oder `int` (Ganze Zahlen), kategorielle (nominale, ordinale) Variablen vom Typ `factor` (bei ordinal: Option `ordered = TRUE`) oder `character`. `str()` und `dim()` sind erste Befehle, d. h., Funktionen in R, denen in der Klammer das jeweilige Funktionsargument übergeben wird.

```
head(tips) # Obere Zeilen
tail(tips) # Untere Zeilen
```

ermöglichen ebenfalls einen Einblick über die Daten. Der Befehl

```
names(tips)
```

gibt die Variablennamen zurück. Mit Hilfe des `$` Operators kann auf einzelne Variablen eines Dataframes zugegriffen werden. Mit

```
tips$sex
```

erhalten Sie bspw. das Geschlecht des Rechnungszahlers.

Übung: Lassen Sie sich die Variable Rechnungshöhe (`total_bill`) anzeigen.

mosaic

`mosaic` ist ein Zusatzpaket, welches die Analyse mit R erleichtert. Sofern noch nicht geschehen, muss es *einmalig* über

```
install.packages("mosaic")
```

installiert werden.

Um es verwenden zu können, muss es – wie jedes Paket – für *jede* neue R-Sitzung über `library(mosaic)` geladen werden. Die angegebenen Hinweise sind keine Fehlermeldung!

```
library(mosaic)
```

Sollte beim Laden eines Paketes eine Meldung wie

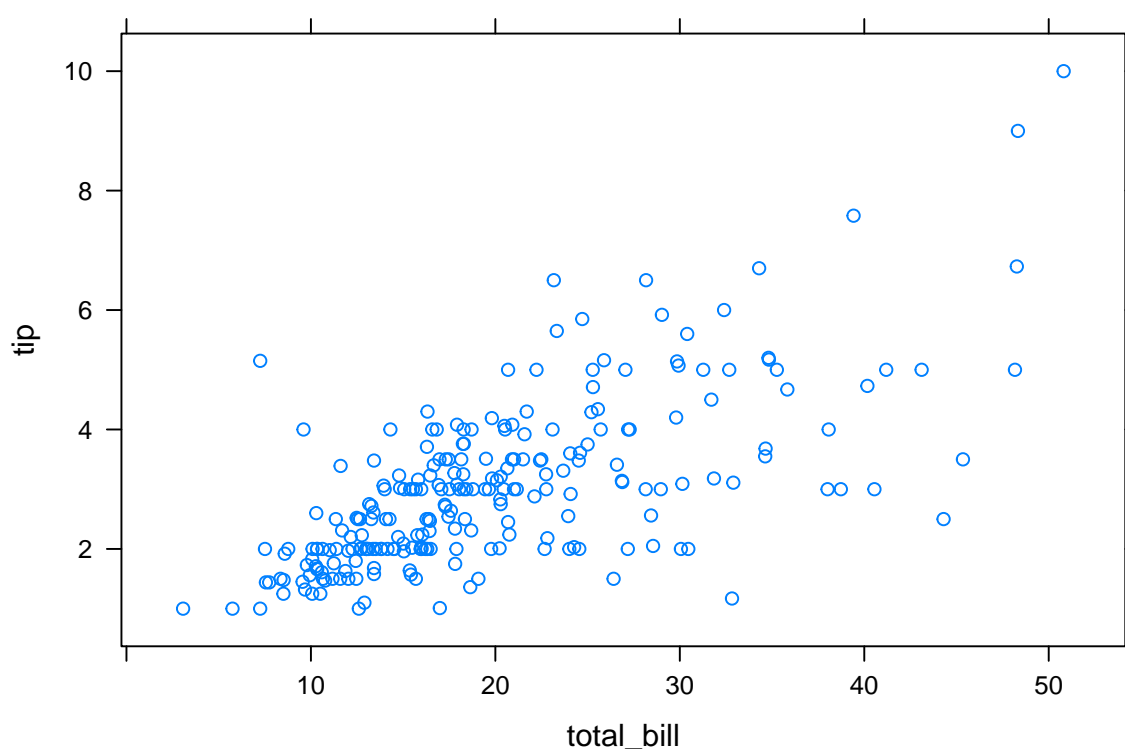
```
library(xyz)
```

```
## Error in library(xyz): there is no package called 'xyz'
```

erscheinen, muss das Paket *xyz* zunächst installiert werden (siehe oben).

Der Grundgedanke von *mosaic* ist *Modellierung*. In R und insbesondere in *mosaic* wird dafür die Tilde `~` verwendet. `y~x` kann dabei gelesen werden wie “y ist eine Funktion von x”. Um beispielsweise eine Abbildung (Scatterplot) des Trinkgeldes `tip` (auf der Y-Achse) und Rechnungshöhe `total_bill` (auf der X-Achse) zu erhalten, kann man in R folgenden Befehl eingeben:

```
xyplot(tip ~ total_bill, data=tips)
```



Das Argument `data=tips` stellt klar, aus welchen Datensatz die Variablen kommen. Die Abbildung ist im RStudio jetzt rechts unten im Reiter *Plots* zu sehen.

Übung: Wie würden Sie den Trend beschreiben?

Wie oben erwähnt können wir R auch gut als Taschenrechner benutzen, sollten aber bedenken, dass R vektorweise arbeitet. D. h.

```
tips$tip/tips$total_bill
```

gibt für *jede Beobachtung* die relative Trinkgeldhöhe bezogen auf die Rechnungshöhe an. Über

```
(tips$tip/tips$total_bill)<0.10
```

erhalten wir einen Vektor vom Typ `logical`. Dieser nimmt nur zwei Werte an, nämlich `TRUE` und `FALSE`, je nach dem, ob der jeweilige Wert kleiner als 0.10 ist oder nicht. Neben `<` und `>` bzw. `<=` und `>=` gibt es ja auch noch die Prüfung auf Gleichheit. Hierfür werden in R gleich *zwei* Gleichheitszeichen verwendet, also `==`.

Übung: Was gibt folgender der Befehl zurück?

```
tips$sex=="Female"
```

Logische Vektoren können z. B. mit “und” `&` oder “oder” `|` verknüpft werden:

```
tips$sex=="Female" & tips$smoker=="Yes"
```

gibt die Tischgesellschaften als `TRUE` wieder, in denen die Rechnung von Frauen beglichen wurde *und* geraucht wurde,

```
tips$sex=="Female" | tips$smoker=="Yes"
```

gibt die Tischgesellschaften als `TRUE` wieder, in denen die Rechnung von Frauen beglichen wurde *oder* geraucht wurde.

Intern wird `TRUE` in R mit der Zahl 1 hinterlegt, `FALSE` mit 0. Mit dem Befehl `sum()` kann man daher die Elemente eines Vektor aufsummieren, also erfahren wir über

```
sum(tips$sex=="Female" & tips$smoker=="Yes")
```

dass bei 33 Tischgesellschaften bei denen geraucht wurde, eine Frau die Rechnung bezahlte. Im Verhältnis zu allen Tischgesellschaften, bei denen eine Frau zahlte, liegt der Raucheranteil also bei 0.3793103:

```
sum(tips$sex=="Female" & tips$smoker=="Yes") / sum(tips$sex=="Female")
```

Übung: Wurde bei den Tischgesellschaften, bei denen ein Mann zahlte, relativ häufiger geraucht als bei den Frauen?

Übung: Teaching Rating

Dieser Datensatz analysiert u. a. den Zusammenhang zwischen Schönheit und Evaluierungsergebnis:

Hamermesh, D.S., and Parker, A. (2005). Beauty in the Classroom: Instructors' Pulchritude and Putative Pedagogical Productivity. Economics of Education Review, 24, 369–376.

Sie können ihn von <https://goo.gl/6Y3KoK> herunterladen. Hier gibt es eine Beschreibung.

1. Lesen Sie den Datensatz in R ein.
2. Wie viele Zeilen, wie viele Spalten liegen vor?
3. Wie heißen die Variablen?
4. Betrachten Sie visuell den Zusammenhang von dem Evaluierungsergebnis `eval` und Schönheit `beauty`. Was können Sie erkennen?
5. Sind relativ mehr Frauen oder mehr Männer (`gender`) in einem unbefristeten Arbeitsverhältnis (*Tenure Track*, `tenure`)?

Daten importieren

Der Datenimport in R ist in vielen unterschiedlichen Dateiformaten möglich. Das `csv` Format eignet sich besonders zum Übertragen von Datendateien. Im deutschsprachigen Raum wird dabei als *Dezimaltrennzeichen* das Komma `,` und als *Datentrennzeichen* das Semikolon `;` verwendet. In der ersten Zeile sollten die Variablennamen stehen. Das Einlesen in einen R Data-Frame (hier `meineDaten`) kann dann über

```
meineDaten <- read.csv2(file.choose()) # Datei auswählen
```

erfolgen.

Der Befehl `file.choose()` öffnet dabei den Dateiordner. Bei “internationalen” `csv` Dateien ist das Datentrennzeichen i. d. R. ein Komma `,`, das Dezimaltrennzeichen ein Punkt `.`. Hier funktioniert der Import in R dann über den Befehl `read.csv`.

In R Studio gibt es im Reiter `Environment` im Fenster Rechts oben einen Menüpunkt `Import Dataset` der mehr Einstellungsmöglichkeiten bietet.

Excel Dateien können unter anderem mit Hilfe des Zusatzpaketes `readxl` können eingelesen werden:

```
library(readxl) # Paket laden
meineDaten <- read_excel(file.choose()) # Datei auswählen und in R einlesen
```

Hier finden Sie eine Linksammlung zu verschiedenen Datenquellen.

Literatur

- Nicholas J. Horton, Randall Pruim, Daniel T. Kaplan (2015): Project MOSAIC Little Books *A Student's Guide to R* <https://github.com/ProjectMOSAIC/LittleBooks/raw/master/StudentGuide/MOSAIC-StudentGuide.pdf>, Kapitel 1, 2, 13
- Chester Ismay (2016): Getting used to R, RStudio, and R Markdown <https://ismayc.github.io/rbasics-book/>
- Maïke Luhmann (2015): *R für Einsteiger*, Kapitel 1-8
- Daniel Wollschläger (2014): *Grundlagen der Datenanalyse mit R*, Kapitel 1-4

Lizenz

Diese Übung wurde von Karsten Lübke entwickelt und orientiert sich an der Übung zum Buch OpenIntro von Andrew Bray, Mine Çetinkaya-Rundel und Mark Hansen und steht wie diese unter der Lizenz Creative Commons Attribution-ShareAlike 3.0 Unported.

Versionshinweise:

- Datum erstellt: 2017-09-16
- R Version: 3.4.1
- `mosaic` Version: 1.1.0

Kapitel 1: Einführung in Daten

Datensatz

Wir werden jetzt den *tips* Datensatz aus *Bryant, P. G. and Smith, M (1995) Practical Data Analysis: Case Studies in Business Statistics. Homewood, IL: Richard D. Irwin Publishing* näher analysieren.

Sofern noch nicht geschehen, können Sie ihn z. B. hier als csv-Datei direkt nach R herunterladen:

```
download.file("https://goo.gl/whKjnl", destfile = "tips.csv")
```

Wenn sich die Daten auf Ihrem Computer gespeichert sind, können Sie sie laden:

```
tips <- read.csv2("tips.csv")
```

Achtung: `read.csv` geht vom amerikanischen Format aus. Wenn es sich um eine “deutsche CSV-Datei” handelt, verwenden Sie `read.csv2`.

Tip: Wenn Sie nicht mehr wissen, wo die Daten liegen: statt `tips.csv` den Befehl `file.choose()` als Argument für die Funktion `read.csv2` verwenden.

Inwieweit das Einlesen wie gewünscht geklappt hat, kann über

```
str(tips)
```

überprüft werden: Der Datensatz hat also 244 Zeilen (= Beobachtungen) und 7 Spalten (= Merkmale/Variablen).

Zur folgenden Analyse muss zunächst das Paket `mosaic` geladen werden:

```
library(mosaic)
```

Grafische Verfahren der Datenanalyse

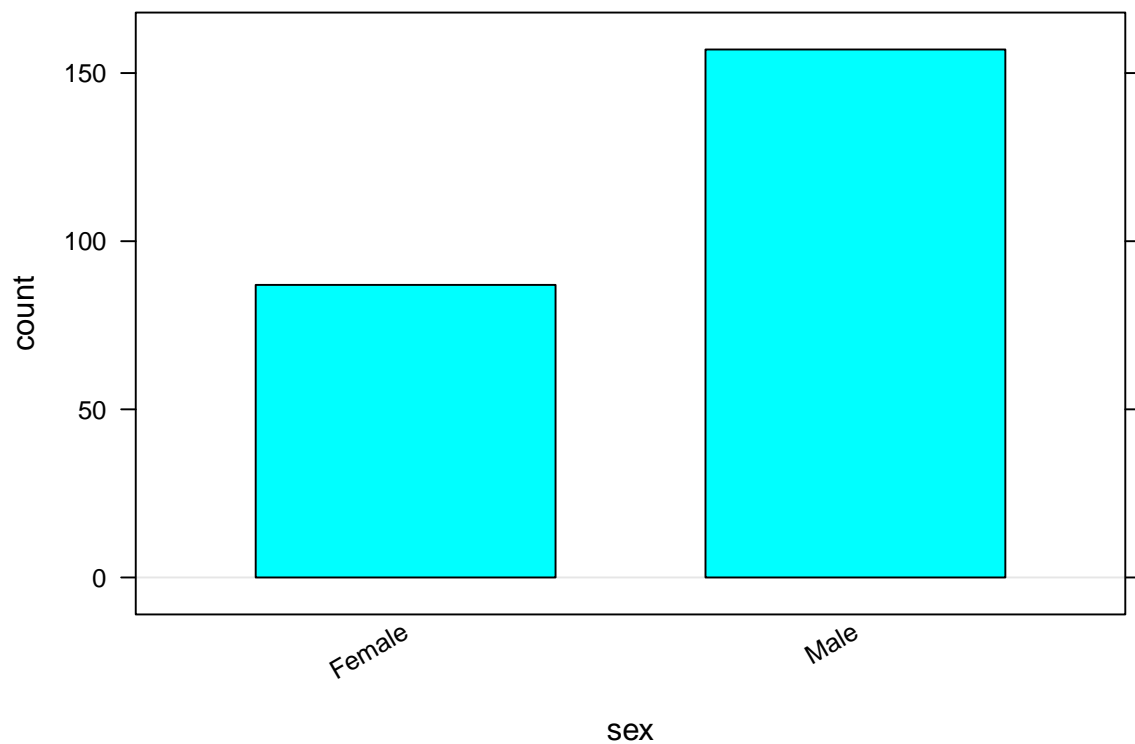
Bevor evtl. wichtige Information in zusammenfassenden Kennzahlen verloren geht, versuchen wir einen Gesamtüberblick zu erhalten.

Balkendiagramm

Balkendiagramme eignen sich am besten um Häufigkeiten darzustellen, also für kategorielle Variablen (`factor`) oder für metrische Variablen (`numeric`) mit wenigen Merkmalsausprägungen.

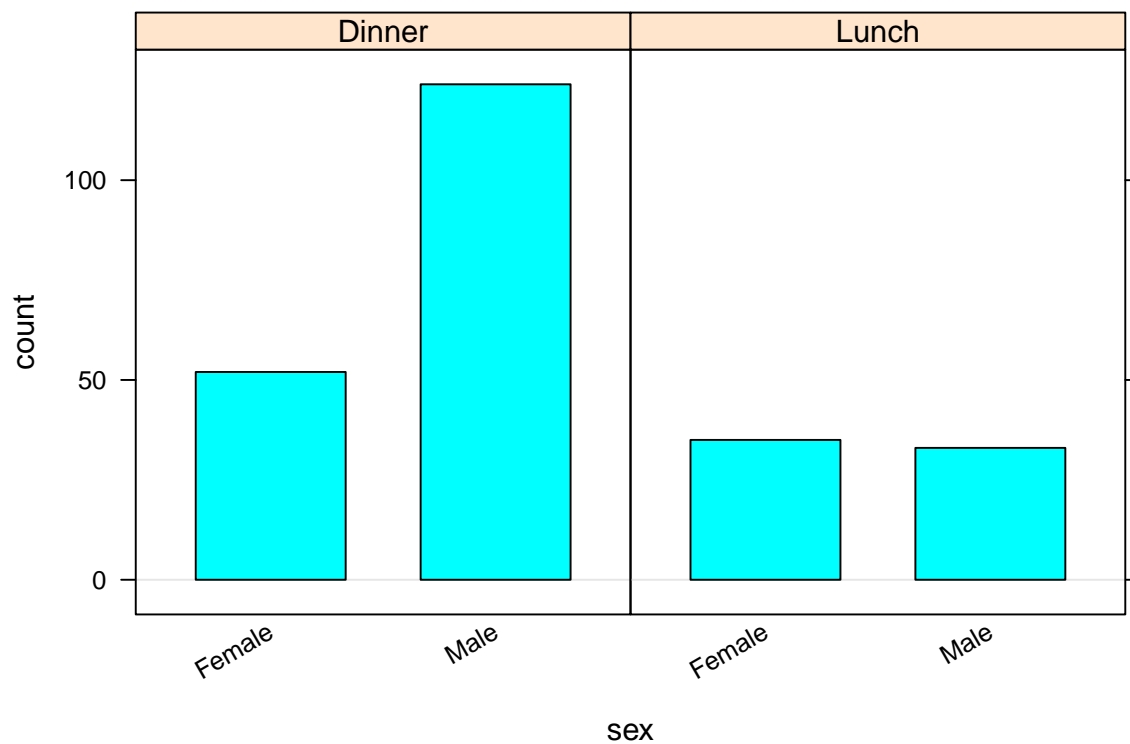
Um einen Überblick über die Geschlechterverteilung `sex` zu bekommen kann die Funktion `bargraph` aus dem Paket `mosaic` verwendet werden:

```
bargraph(~ sex, data=tips)
```



In mosaic wird (fast) immer die Formeldarstellung $y \sim x \mid z$ verwendet: y in Abhängigkeit von x (y wird modelliert durch x), gruppiert nach den Werten von z , wobei einzelne Teile fehlen können, so wie im Beispiel y und z . Aber um z. B. die Verteilung des Geschlechts des Zahlenden je Tageszeit $time$ darzustellen muss hier eingegeben werden:

```
bargraph(~ sex | time, data=tips)
```



Übung:

1. Zeichnen Sie ein Balkendiagramm des Rauchverhaltens `smoker` je Wochentag `day` und interpretieren Sie das Ergebnis.

Histogramm

Histogramme werden für metrische Daten verwendet, der Befehl lautet `histogram`.

Übung:

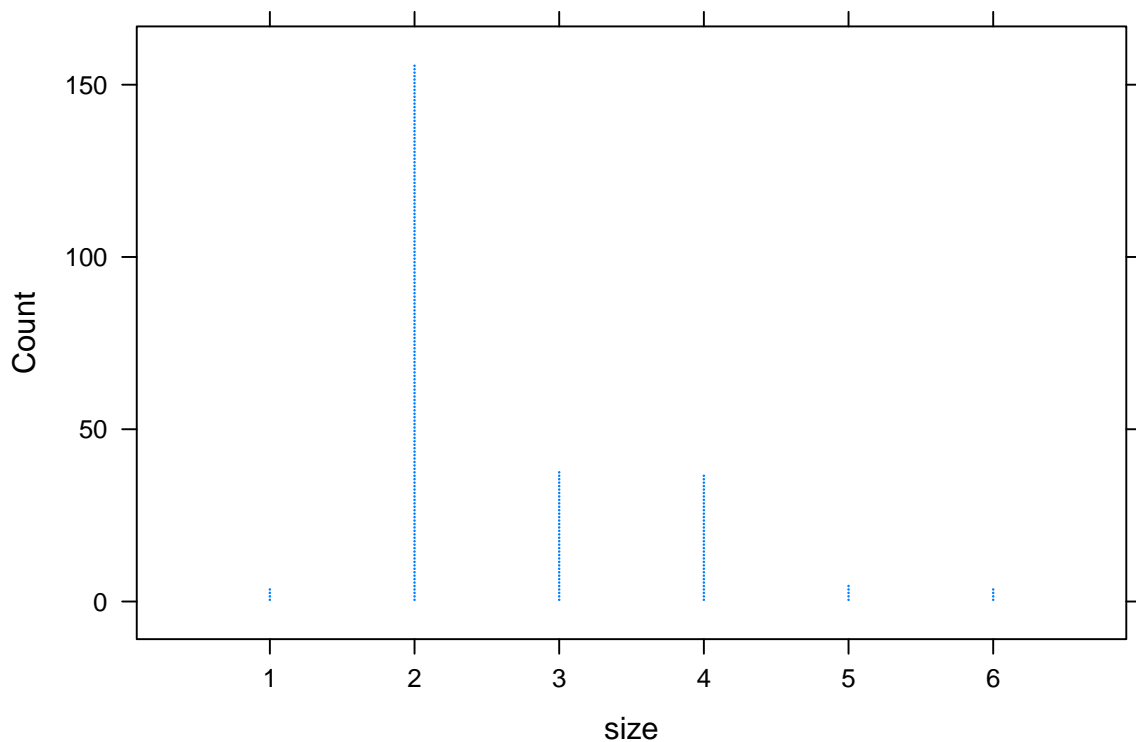
2. Welche Abbildung wird über

```
histogram(~ total_bill | sex, data=tips)
```

erzeugt?

Punktdiagramme sind eine Variante von Histogrammen, die besonders für metrische Variablen mit wenigen Merkmalsausprägungen geeignet sind.


```
dotPlot(~ size, nint=6, data=tips)
```

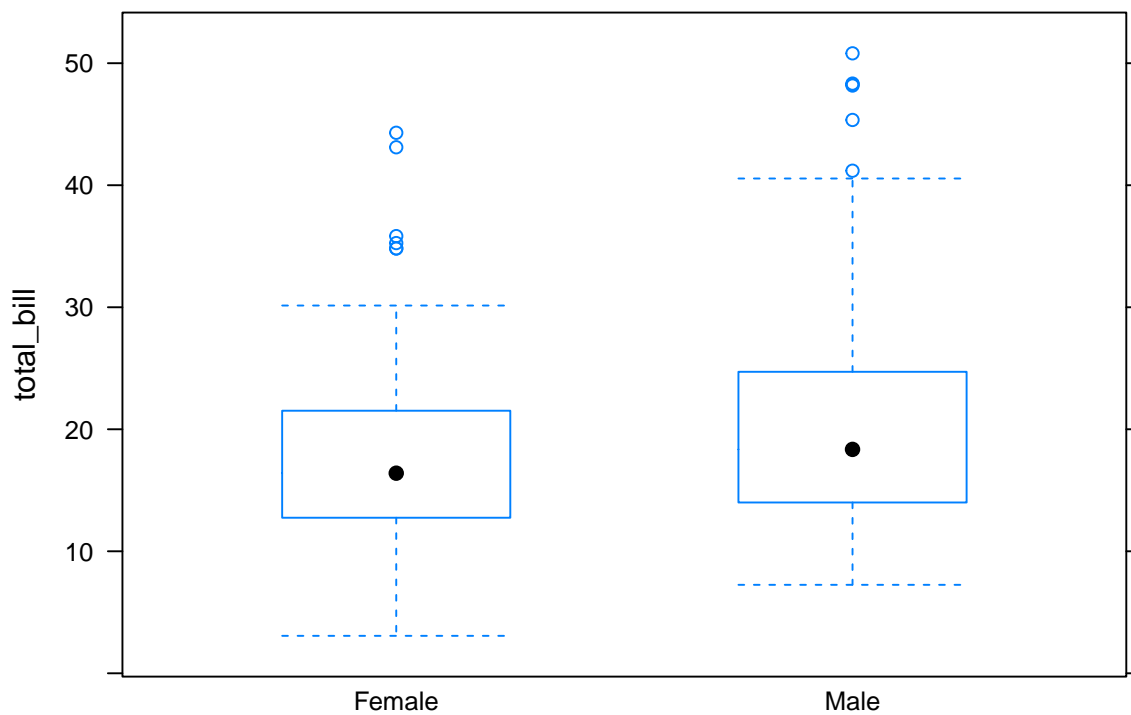


Hier wurde ein zusätzliche Parameter der Funktion `dotPlot` übergeben: `nint=6`. Dieser Parameter wurde verwendet, um die Abbildung schöner zu machen. Welche Optionen es gibt und was diese bedeuten, kann man in R häufig einfach über die Hilfe, hier also `?dotPlot`, erfahren.

Boxplots

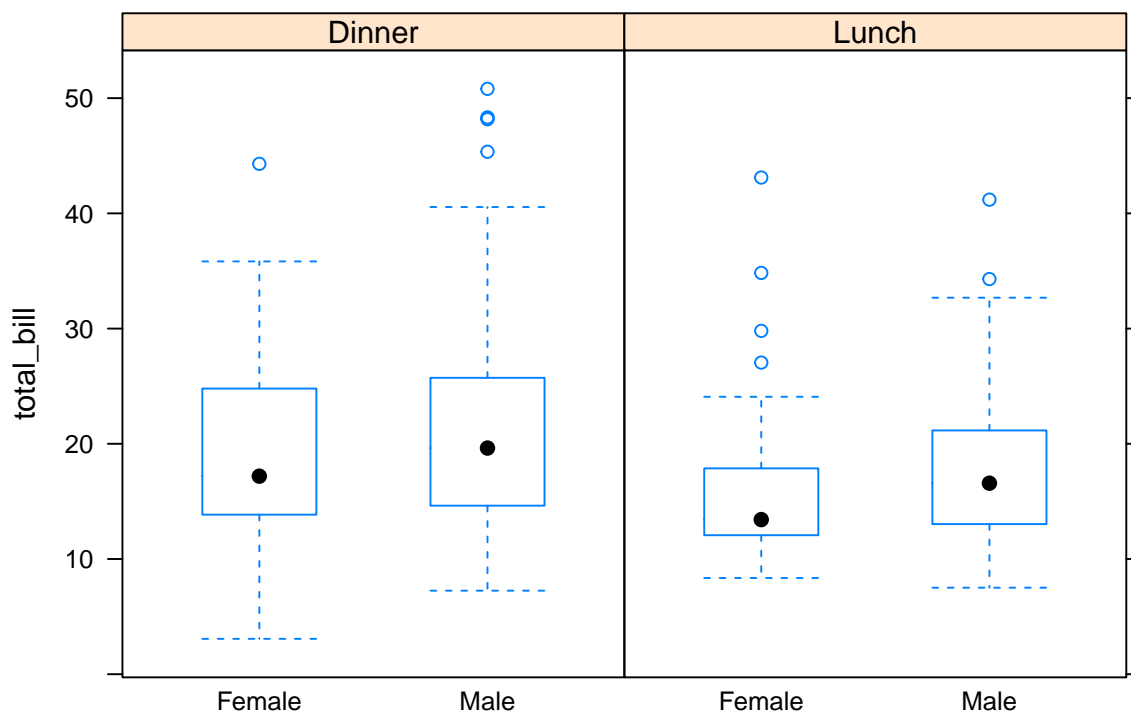
Boxplots zeigen nicht nur den Median (50%-Quantil) sowie das obere (75%) und untere (25%) Quartil - und damit den Interquartilsabstand -, sondern geben auch Hinweise auf potentielle Ausreißer:

```
bwplot(total_bill ~ sex, data=tips)
```



und gruppiert nach Tageszeit:

```
bwplot(total_bill ~ sex | time, data=tips)
```



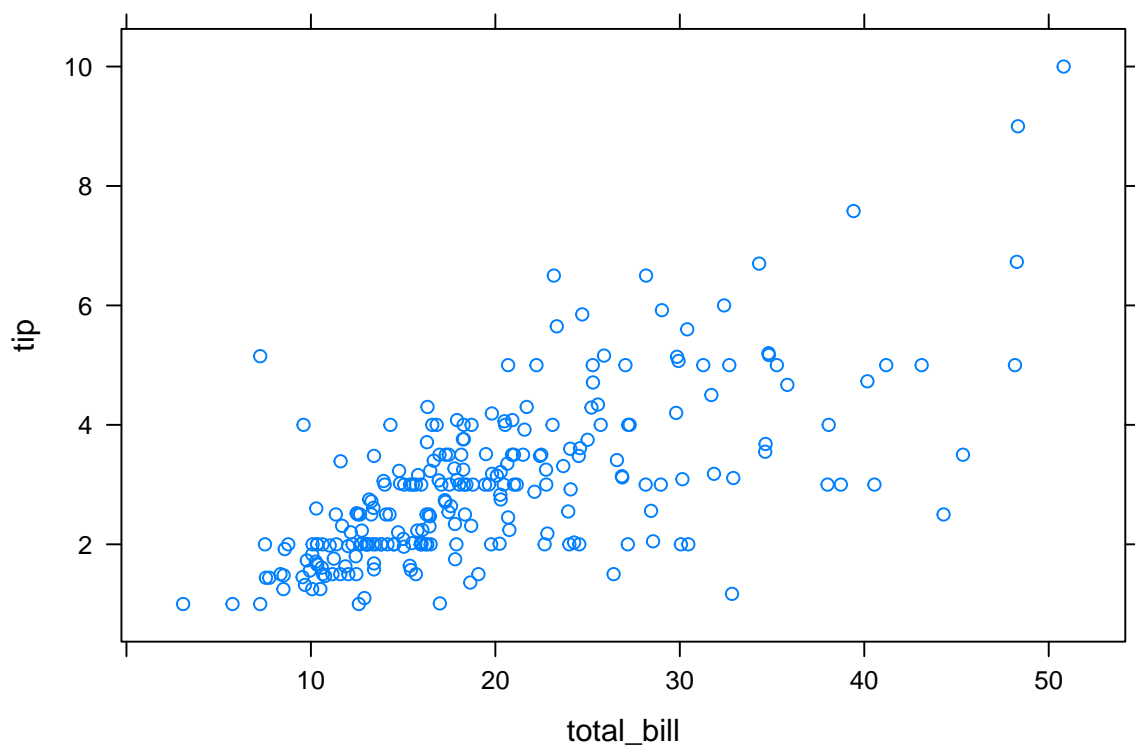
Übung:

3. Zeichnen Sie einen Boxplot für die Trinkgeldhöhe `tip` in Abhängigkeit davon, ob geraucht wurde (`smoker`). Gibt es Unterschiede in der Trinkgeldhöhe und, wenn ja, in welchem Bereich?
-

Scatterplot (Streudiagramme)

Streudiagramme sind besonders gut geeignet, um einen Überblick auf den Zusammenhang zweier metrischer Merkmale zu erhalten; beispielsweise um den Zusammenhang von `tip` und `total_bill` zu analysieren.

```
xyplot(tip ~ total_bill, data=tips)
```



Wenig überraschend steigt die Trinkgeldhöhe mit der Rechnung. Wie sieht es relativ aus? Dazu müssen wir zunächst ein neues Merkmal im Datensatz erzeugen, z. B.:

```
tips$tip_relativ <- tips$tip / tips$total_bill
```

Im Datensatz `tips` wird der (neuen) Variable `tip_relativ` der Quotient aus Trinkgeld und Rechnungshöhe zugewiesen.

Übung:

4. Erstellen Sie eine Abbildung, mit der Sie visuell gucken können, wie der Zusammenhang zwischen der relativen Trinkgeldhöhe (abhängige Variable) und der Rechnungshöhe (unabhängige Variable) aussieht, und ob sich dieser je nach Geschlecht des Rechnungszahlers unterscheidet.

Mosaicplot

Mosaicplots eignen sich, um den Zusammenhang zwischen kategoriellen Variablen darzustellen. Zunächst müssen wir dazu eine Kreuztabelle erstellen. Das geht in `mosaic` über den Befehl `tally`. Dieser Befehl ist recht mächtig – dazu später mehr. Wir erzeugen eine solche Kreuztabelle zwischen Tageszeit und Rauchen über

```
tab_smoke_time <- tally(smoker ~ time, data=tips)
```

Dem (neuen) R Objekt `tab_smoke_time` wird also das Ergebnis des `tally` Befehls zugewiesen. Wie das Ergebnis aussieht, und welchen Typ es hat erfahren wir über

```
print(tab_smoke_time)
```

```
##           time
## smoker Dinner Lunch
##    No      106    45
##   Yes       70    23
```

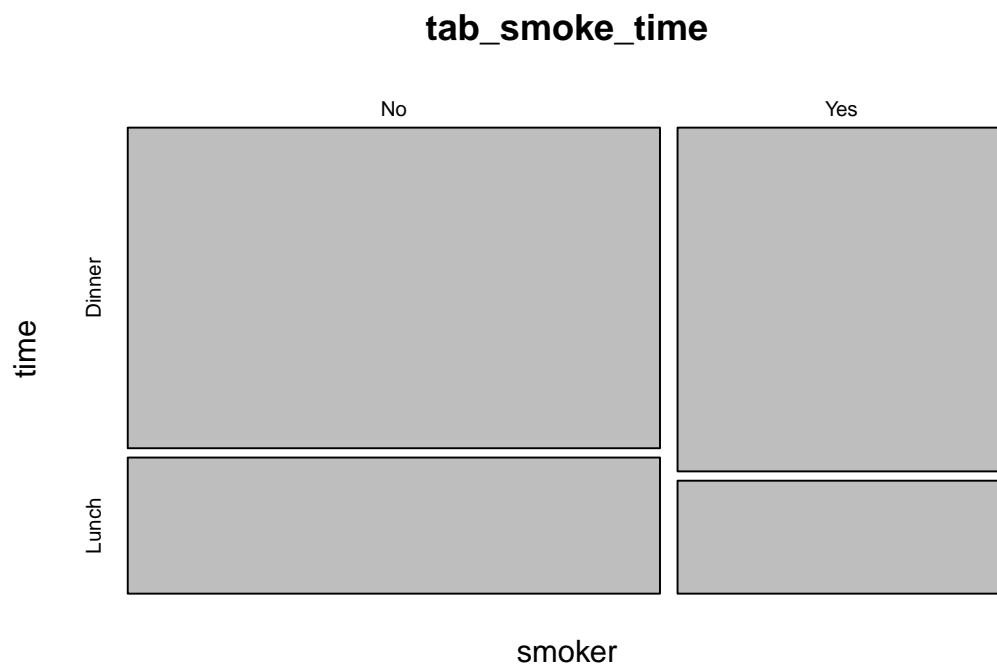
```
str(tab_smoke_time)
```

```
##  'table' int [1:2, 1:2] 106 70 45 23
## - attr(*, "dimnames")=List of 2
##   ..$ smoker: chr [1:2] "No" "Yes"
##   ..$ time  : chr [1:2] "Dinner" "Lunch"
```

Es handelt sich also um eine Tabelle (`table`) der Dimension 2, 2, also 2 Zeilen, 2 Spalten.

Der Befehl für einen Mosaicplot lautet `mosaicplot`:

```
mosaicplot(tab_smoke_time)
```



Korrelationsplot

Mit Hilfe des Zusatzpakets `corrplot` lassen sich Korrelationen besonders einfach visualisieren. Das Paket muss wie jedes Paket *einmalig* über

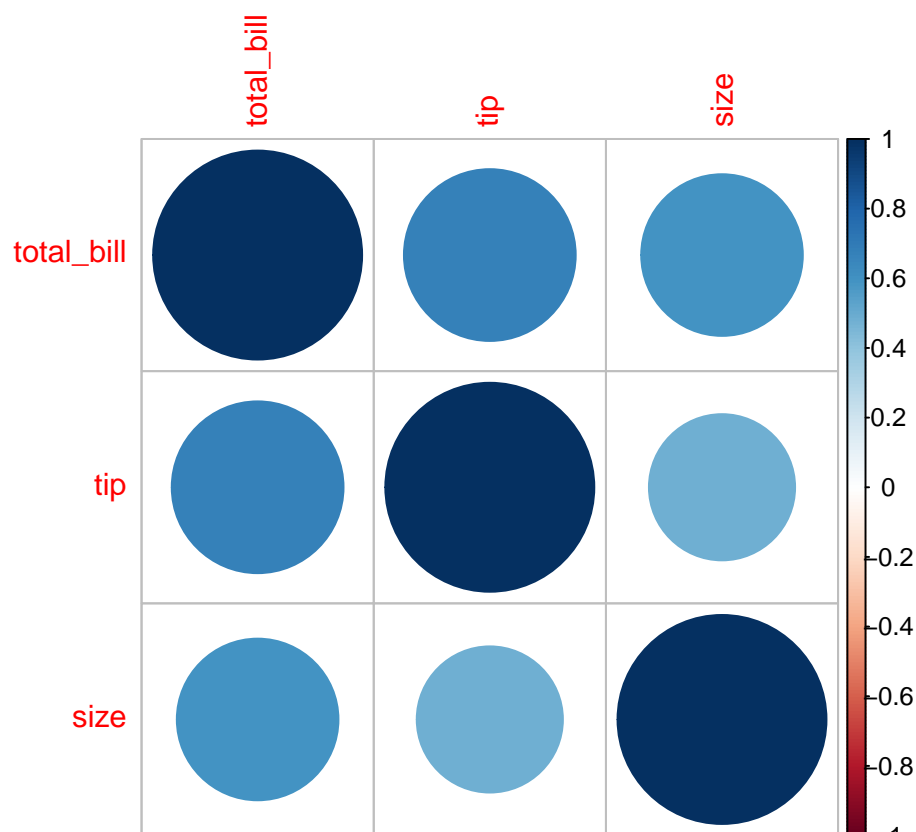
```
install.packages("corrplot")
```

installiert werden – wiederum werden evt. weitere benötigte Pakete mit-installiert. Nach dem Laden des Pakets über

```
library(corrplot)
```

kann dies über

```
corrplot(cor(tips[,c("total_bill", "tip", "size")]))
```



gezeichnet werden. Je intensiver die Farbe, desto höher die Korrelation. Hier gibt es unzählige Einstellmöglichkeiten, siehe `?corrplot` bzw. für Beispiele:

```
vignette("corrplot-intro")
```

Kennzahlen der Datenanalyse

Nachdem wir einen ersten visuellen Eindruck gewonnen haben, wollen wir uns jetzt Kennzahlen widmen.

Lagemaße

Das Minimum und Maximum von metrischen Daten kann einfach durch `min` bzw. `max` bestimmt werden, in `mosaic` auch “modelliert”:

```
min(~ total_bill | smoker, data=tips)
```

```
##   No   Yes
## 7.25 3.07
```

gibt also das Minimum der Rechnungshöhe, getrennt nach Raucher und Nichtraucher an, d. h. das Minimum bei den Rauchern lag bei 3.07\$.

Übung:

5. Bestimmen Sie das Maximum der Trinkgeldhöhe je Wochentag (day)

Lagemaße sollen die zentrale Tendenz der Daten beschreiben. Gebräuchlich sind in der Regel der arithmetische Mittelwert \bar{x}

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n}{n}$$

```
mean(~ total_bill, data=tips)
```

```
## [1] 19.78594
```

sowie der Median (Zentralwert) `median`:

```
median(~ total_bill, data=tips)
```

```
## [1] 17.795
```

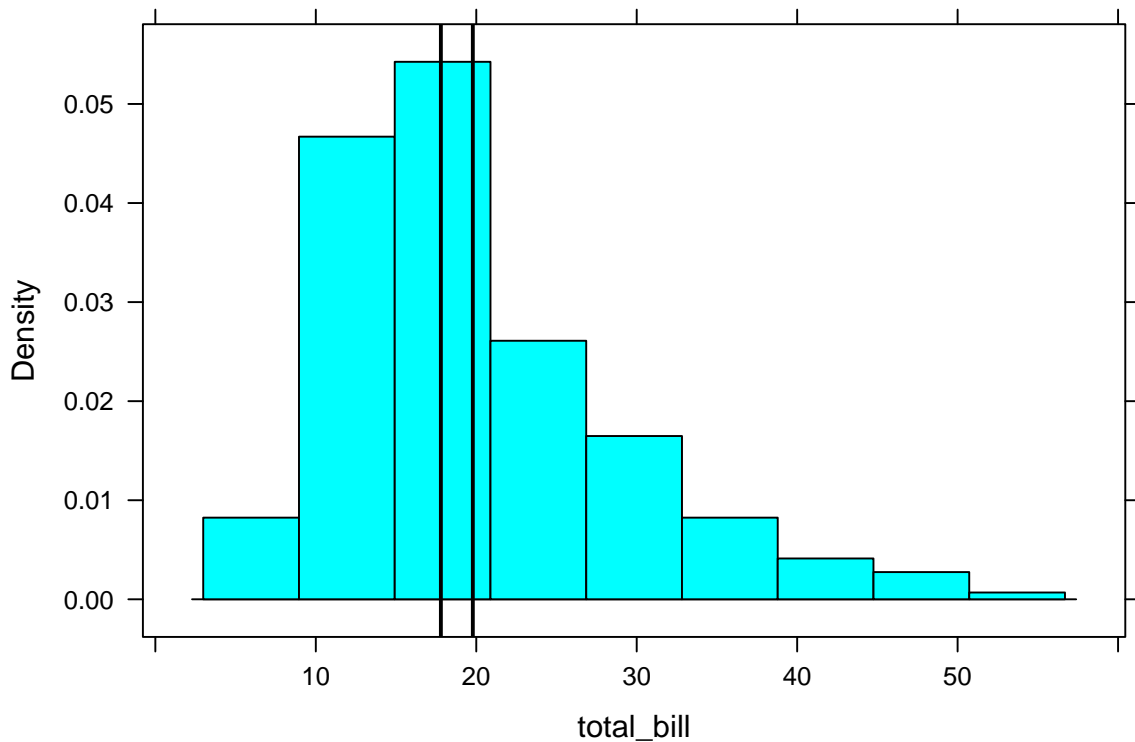
Den jeweiligen Rang der Beobachtungen erhalten Sie über

```
rank(tips$total_bill)
```

```
## [1] 113.0 25.5 162.5 179.0 187.0 192.0 12.0 199.0 82.0 79.0 21.0
## [12] 229.0 86.0 136.0 80.0 166.0 23.5 100.0 112.0 156.0 126.5 151.5
## [23] 91.0 234.0 147.0 123.0 62.0 51.0 167.0 144.0 13.0 135.0 83.0
## [34] 157.5 122.0 182.0 101.0 111.0 138.0 217.0 97.0 118.0 70.0 15.0
## [45] 215.0 133.5 169.0 220.0 207.0 128.0 48.0 22.0 227.0 17.0 193.0
## [56] 143.0 231.0 196.0 34.0 242.0 151.5 68.5 32.0 133.5 121.0 148.0
## [67] 105.0 1.0 149.0 81.0 41.0 114.0 198.0 191.0 78.0 27.0 126.5
## [78] 202.0 174.0 116.0 142.0 109.0 18.5 221.0 94.5 228.0 57.0 132.0
## [89] 188.0 164.0 208.0 171.0 2.0 102.0 173.0 235.0 203.0 42.0 162.5
## [100] 46.0 35.0 85.0 239.0 170.0 161.0 84.0 154.0 190.0 130.0 75.0
## [111] 71.0 3.5 232.0 180.0 194.0 117.0 212.0 30.0 45.0 183.0 39.0
## [122] 65.0 74.0 93.0 47.0 210.0 10.0 77.0 36.0 175.0 141.0 150.0
## [133] 33.0 44.0 131.0 9.0 23.5 73.0 96.0 59.0 119.0 224.0 237.0
## [144] 200.0 104.0 8.0 137.0 40.0 16.0 5.0 72.0 58.0 115.0 186.0
## [155] 145.0 211.0 241.0 189.0 63.0 107.0 165.0 50.0 98.0 68.5 120.0
## [166] 185.0 159.0 218.0 28.0 29.0 244.0 92.0 3.5 219.0 110.0 223.0
## [177] 125.0 76.0 14.0 225.0 226.0 178.0 240.0 177.0 236.0 157.5 160.0
## [188] 216.0 129.0 176.0 89.5 146.0 206.0 87.0 108.0 6.0 25.5 238.0
## [199] 55.5 67.0 139.0 52.0 55.5 103.0 155.0 106.0 197.0 233.0 184.0
## [210] 53.0 213.0 195.0 243.0 60.0 205.0 54.0 204.0 37.0 7.0 214.0
## [221] 43.0 65.0 11.0 94.5 65.0 99.0 20.0 153.0 61.0 168.0 181.0
## [232] 89.5 38.0 31.0 88.0 18.5 49.0 222.0 230.0 209.0 201.0 172.0
## [243] 124.0 140.0
```

Diese unterscheiden sich:

```
meantb <- mean(~ total_bill, data=tips) # Mittelwert
medianb <- median(~ total_bill, data=tips) # Median
histogram(~ total_bill, v=c(meantb, medianb), data=tips)
```



Über die Option `v=` werden vertikale Linien an den entsprechenden Stellen gezeichnet. Mit `h=` können horizontale Linien gezeichnet werden.

Übung:

6. Begründen Sie anhand des Histogramms, warum hier der Median kleiner als der arithmetische Mittelwert ist.

Auch Lagemaße zu berechnen in Abhängigkeit der Gruppenzugehörigkeit ist einfach. So können Sie den arithmetischen Mittelwert in Abhängigkeit von Geschlecht und Tageszeit berechnen:

```
mean(total_bill ~ sex + time, data=tips)
```

```
## Female.Dinner  Male.Dinner  Female.Lunch  Male.Lunch
##      19.21308     21.46145     16.33914     18.04848
```

Übung:

7. Bestimmen Sie den Median der Trinkgeldhöhe anhand der Anzahl Personen in der Tischgesellschaft.

Für kategorielle Variablen können eigentlich zunächst nur die Häufigkeiten bestimmt werden:

```
tally(~day, data=tips)
```

```
## day
##  Fri  Sat  Sun Thur
##   19   87   76   62
```

Relative Häufigkeiten werden bei `mosaic` mit der zusätzlichen Option `format='proportion'` angefordert:

```
tally(~day, format="proportion", data=tips)
```

```
## day
##           Fri           Sat           Sun           Thur
## 0.07786885 0.35655738 0.31147541 0.25409836
```

Streuungsmaße

Die Variation der Daten, die wir grafisch und auch in den (bedingten) Lagemaßen gesehen haben, ist eines der zentralen Themen der Statistik: Können wir die Variation vielleicht erklären? Variiert die Rechnungshöhe vielleicht mit der Anzahl Personen?

Zur Bestimmung der Streuung werden in der Regel der Interquartilsabstand `IQR` sowie Varianz `var` bzw. Standardabweichung `sd`

$$s = sd = \sqrt{s^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

herangezogen:

```
IQR(~total_bill, data=tips)
```

```
## [1] 10.78
```

```
var(~total_bill, data=tips)
```

```
## [1] 79.25294
```

```
sd(~total_bill, data=tips)
```

```
## [1] 8.902412
```

Um die Standardabweichung in Abhängigkeit der Gruppengröße zu berechnen genügt der Befehl:

```
sd(~total_bill | size, data=tips)
```

```
##           1           2           3           4           5           6
## 3.010729 6.043729 9.407065 8.608603 7.340396 9.382000
```

Bei 4 Personen lag die Standardabweichung als bei 8.61\$.

Um jetzt z. B. den Variationskoeffizienten zu berechnen, wird

```
sd(~total_bill | size, data=tips) / mean(~total_bill | size, data=tips)
```

```
##           1           2           3           4           5           6
## 0.4157031 0.3674443 0.4041247 0.3008579 0.2441265 0.2693655
```

gebildet.

Übung:

8. Zu welcher Tageszeit ist die Standardabweichung des Trinkgelds geringer? Zum Lunch oder zum Dinner?

Die *üblichen* deskriptiven Kennzahlen sind in `mosaic` übrigens in einer Funktion zusammengefasst: `favstats`.

```
favstats(tip~day, data=tips)
```

```
##   day  min    Q1 median    Q3   max   mean      sd  n missing
## 1  Fri 1.00 1.9600 3.000 3.3650 4.73 2.734737 1.019577 19         0
## 2  Sat 1.00 2.0000 2.750 3.3700 10.00 2.993103 1.631014 87         0
## 3  Sun 1.01 2.0375 3.150 4.0000 6.50 3.255132 1.234880 76         0
## 4  Thur 1.25 2.0000 2.305 3.3625 6.70 2.771452 1.240223 62         0
```

Zusammenhangsmaße

Kennzahlen für den linearen Zusammenhang von metrischen Variablen sind Kovarianz `cov`

$$s_{xy} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

und der Korrelationskoeffizient `cor`

$$r = \frac{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}} = \frac{s_{xy}}{s_x s_y}$$

```
cov(tip ~ total_bill, data=tips)
```

```
## [1] 8.323502
```

```
cor(tip ~ total_bill, data=tips)
```

```
## [1] 0.6757341
```

Für kategoriale Variablen wird in diesem Abschnitt zunächst nur die Kreuztabelle verwendet:

```
tally(smoker~sex, format="proportion", data=tips)
```

```
##           sex
## smoker   Female      Male
##   No  0.6206897 0.6178344
##   Yes 0.3793103 0.3821656
```

Übung:

9. Zu welcher Tageszeit wurde relativ häufiger von einer Frau die Rechnung bezahlt?

Übung: Teaching Rating

Dieser Datensatz analysiert u. a. den Zusammenhang zwischen Schönheit und Evaluierungsergebnis von Dozenten:

Hamermesh, D.S., and Parker, A. (2005). *Beauty in the Classroom: Instructors' Pulchritude and Putative Pedagogical Productivity*. *Economics of Education Review*, 24, 369–376.

Sie können ihn von <https://goo.gl/6Y3KoK> herunterladen.

1. Erstellen Sie ein Balkendiagramm der Variable `native` gruppiert nach der Variable `minority`.
2. Erstellen Sie ein Histogramm der Variable `beauty` gruppiert nach der Variable `gender`.
3. Vergleichen Sie das Evaluationsergebnis `eval` in Abhängigkeit ob es sich um einen Single-Credit Kurs `credits` handelt mit Hilfe eines Boxplots.
4. Zeichnen Sie ein Scatterplot der Variable `eval` in Abhängigkeit der zu definierenden Variable "Evaluierungsquote": `students/allstudents`.
5. Berechnen Sie deskriptive Kennzahlen der Variable `eval` in Abhängigkeit ob es sich um einen Single-Credit Kurs `credits` handelt.

Literatur

- David M. Diez, Christopher D. Barr, Mine Çetinkaya-Rundel (2014): *Introductory Statistics with Randomization and Simulation*, https://www.openintro.org/stat/textbook.php?stat_book=isrs, Kapitel 1
- Nicholas J. Horton, Randall Pruim, Daniel T. Kaplan (2015): *Project MOSAIC Little Books – A Student's Guide to R*, <https://github.com/ProjectMOSAIC/LittleBooks/raw/master/StudentGuide/MOSAIC-StudentGuide.pdf>, Kapitel 3.1, 3.2, 4.1, 5.1, 5.2, 6.1
- Chester Ismay, Albert Y. Kim (2017): *ModernDive – An Introduction to Statistical and Data Sciences via R*, <https://ismayc.github.io/moderndiver-book/>

- Maike Luhmann (2015): *R für Einsteiger*, Kapitel 9-11
- Andreas Quatember (2010): *Statistik ohne Angst vor Formeln*, Kapitel 1
- Daniel Wollschläger (2014): *Grundlagen der Datenanalyse mit R*, Kapitel 14

Lizenz

Diese Übung wurde von Karsten Lübke entwickelt und orientiert sich an der Übung zum Buch OpenIntro von Andrew Bray, Mine Çetinkaya-Rundel und Mark Hansen und steht wie diese unter der Lizenz Creative Commons Attribution-ShareAlike 3.0 Unported.

Versionshinweise:

- Datum erstellt: 2017-09-16
- R Version: 3.4.1
- `mosaic` Version: 1.1.0

Kapitel 2: Einführung Wahrscheinlichkeit und Inferenz

Zufall und Wahrscheinlichkeit

In dieser Übung werden wir ein wenig programmieren, daher bietet es sich an, die Befehle in einem Skript zu speichern. Gehen Sie dazu in RStudio in das Menü `File` und dort auf `New File` und wählen `R Script` aus. Dies können Sie dann am Ende über `File` und `Save` bzw. `Save as` speichern – und über `Open File` später auch wieder öffnen. Um die Befehle an die Konsole zu übergeben klicken Sie entweder auf `Run` (nur ausgewählte Zeile, Tastenkürzel `Strg+Enter`) oder `Source` (ganzes Programm).

Zunächst laden wir wieder das Zusatzpaket `mosaic`, falls noch nicht geschehen:

```
library(mosaic)
```

Um den Zufall zu bändigen, setzen wir den Zufallszahlengenerator, z. B. auf 1896

```
set.seed(1896)
```

Dieser Befehl sorgt dafür, dass wir immer denselben “Zufall” haben.

Beim Roulette gibt es 37 Zahlen und 3 Farben: 0-36, wobei 18 Zahlen Schwarz, 18 Zahlen Rot und die 0 Grün ist – auf die Farbe Grün können Sie auch nicht setzen.

Angenommen Sie setzen auf Farbe. Dann beträgt Ihre Gewinnwahrscheinlichkeit $\frac{18}{37}$, da 18 von 37 Fächern “ihre” Farbe hat, die Wahrscheinlichkeit eines Verlustes liegt bei $\frac{19}{37} = 1 - \frac{18}{37}$.

Definieren wir in R einen `factor`-Vektor mit zwei Elementen für Gewinn und Verlust:

```
roulette <- factor(c("Gewinn", "Verlust"))
```

Mit diesem Vektor können wir jetzt virtuell und ganz ohne Risiko über den Befehl `resample` Roulette spielen

```
resample(roulette, size=1, prob=c(18/37, 19/37))
```

```
## [1] Gewinn
```

```
## Levels: Gewinn Verlust
```

```
resample(roulette, size=10, prob=c(18/37, 19/37))
```

```
## [1] Gewinn Gewinn Gewinn Gewinn Gewinn Gewinn Verlust Gewinn
```

```
## [9] Verlust Gewinn
```

```
## Levels: Gewinn Verlust
```

Mit dem Argument `size` wird also eingestellt, wie oft Roulette gespielt wird, `prob` ist der Vektor der Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen Elemente im Ereignisvektor, hier `roulette`. `resample` heißt Ziehen mit Zurücklegen.

Über

```
spiele <- resample(roulette, size=100, prob=c(18/37, 19/37))
```

wird dem Vektor `spiele` das Ergebnis von 100 Roulettespielen zugewiesen. Die Häufigkeitsverteilung erhalten wir wie gewohnt über den Befehl `tally`:

```
tally(~spiele, format="proportion")
```

```
## spiele
## Gewinn Verlust
## 0.51 0.49
```

Das **Gesetz der großen Zahl** sagt aus, dass sich auf *lange* Sicht die beobachtete relative Häufigkeit der theoretischen Wahrscheinlichkeit annähert:

```
tally(~resample(roulette, size=10, prob=c(18/37, 19/37)), format="proportion")
```

```
## resample(roulette, size = 10, prob = c(18/37, 19/37))
## Gewinn Verlust
## 0.7 0.3
```

```
tally(~resample(roulette, size=100, prob=c(18/37, 19/37)), format="proportion")
```

```
## resample(roulette, size = 100, prob = c(18/37, 19/37))
## Gewinn Verlust
## 0.44 0.56
```

```
tally(~resample(roulette, size=1000, prob=c(18/37, 19/37)), format="proportion")
```

```
## resample(roulette, size = 1000, prob = c(18/37, 19/37))
## Gewinn Verlust
## 0.488 0.512
```

```
tally(~resample(roulette, size=1000000, prob=c(18/37, 19/37)), format="proportion")
```

```
## resample(roulette, size = 1e+06, prob = c(18/37, 19/37))
## Gewinn Verlust
## 0.486433 0.513567
```

Die theoretische Wahrscheinlichkeit eines Gewinns liegt bei $\frac{18}{37} \approx 0.4865$: Achtung, das Gesetz der großen Zahl gilt für den Durchschnitt und auf lange Sicht, evtl. Ungleichgewichte, z. B. 5 Gewinne in Folge, werden im Laufe der Zeit abgeschwächt und nicht durch anschließende 5 Verluste ausgeglichen.

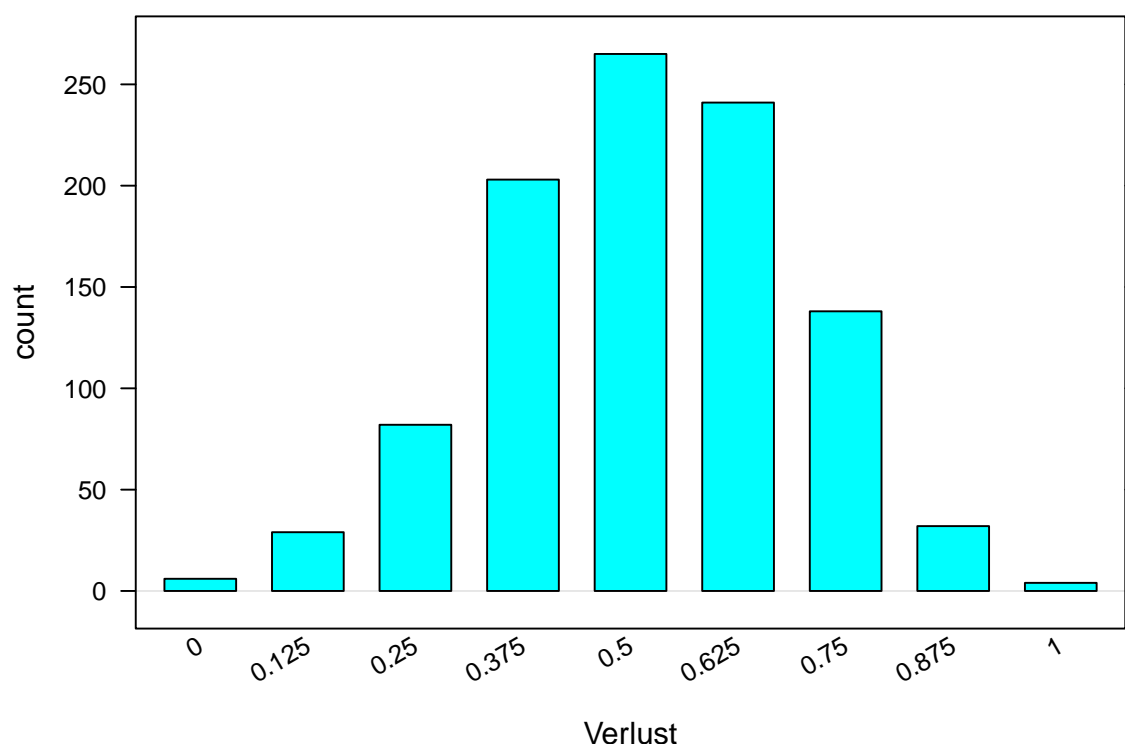
Bei bestimmten Spielstrategien, z. B. bei der sogenannten Martingale oder Verdoppelungsstrategie, ist man daran interessiert, wie wahrscheinlich es ist, z. B. 8-mal in Folge zu verlieren. Natürlich kann das mit Hilfe der *Binomialverteilung* ausgerechnet werden, wir können es aber auch simulieren: `do()` ist eine einfache Schleifenfunktion in *mosaic*. Um z. B. 1000-mal jeweils 8 Runden Roulette zu spielen – und das Ergebnis zu speichern – genügt:

```
farbspiele <- do(1000)*tally(~resample(roulette, size=8, prob=c(18/37, 19/37)),
                        format="proportion")
```

farbspiele ist jetzt ein Datensatz (data.frame) mit 1000 Zeilen (=Simulationen) und den relativen Häufigkeiten für Gewinn und Verlust in den 8 Spielen in den Spalten.

Das Balkendiagramm der relativen Verlusthäufigkeit zeigt, dass es zwar selten aber doch vorkommt, alle 8 Spiele zu verlieren.

```
bargraph(~Verlust, data=farbspiele)
```



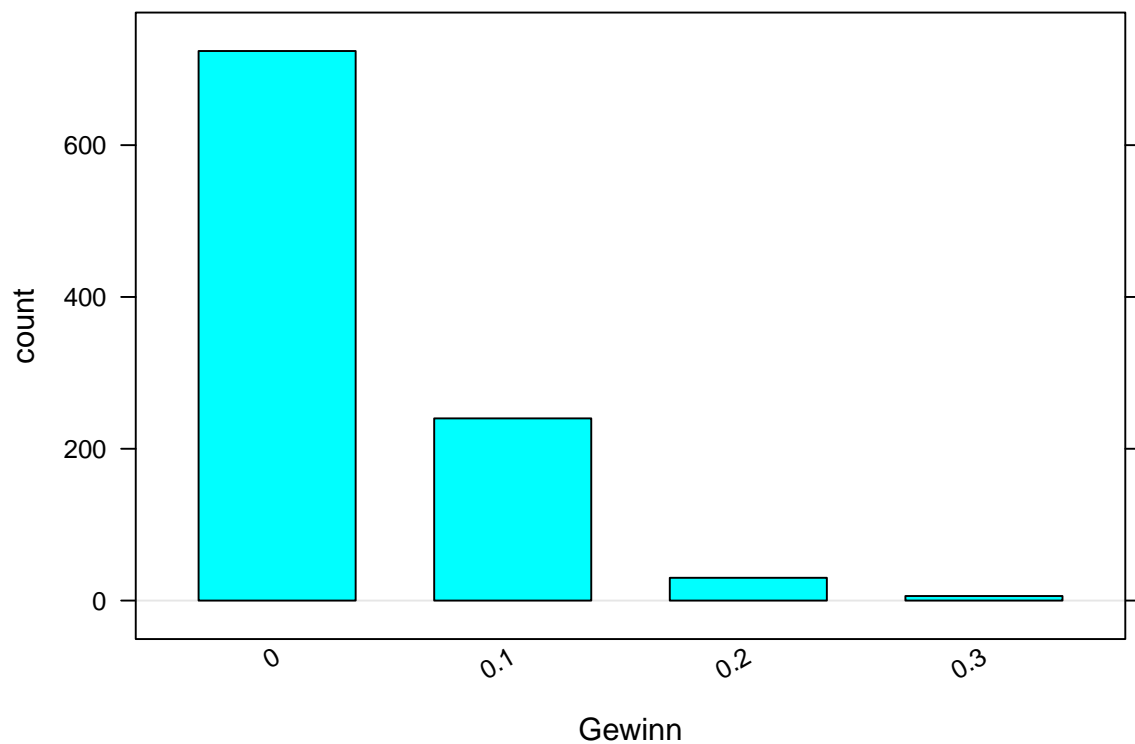
Wir haben in 4 von 1000 Wiederholungen nur verloren, d. h. 8 von 8 Spielen.

Übung:

1. Wenn Sie statt auf Farbe auf eine Zahl setzen, beträgt Ihre Gewinnwahrscheinlichkeit $\frac{1}{37}$. Simulieren Sie 1000-mal 10 Spiele. Wie oft haben Sie mindestens 1-mal gewonnen?

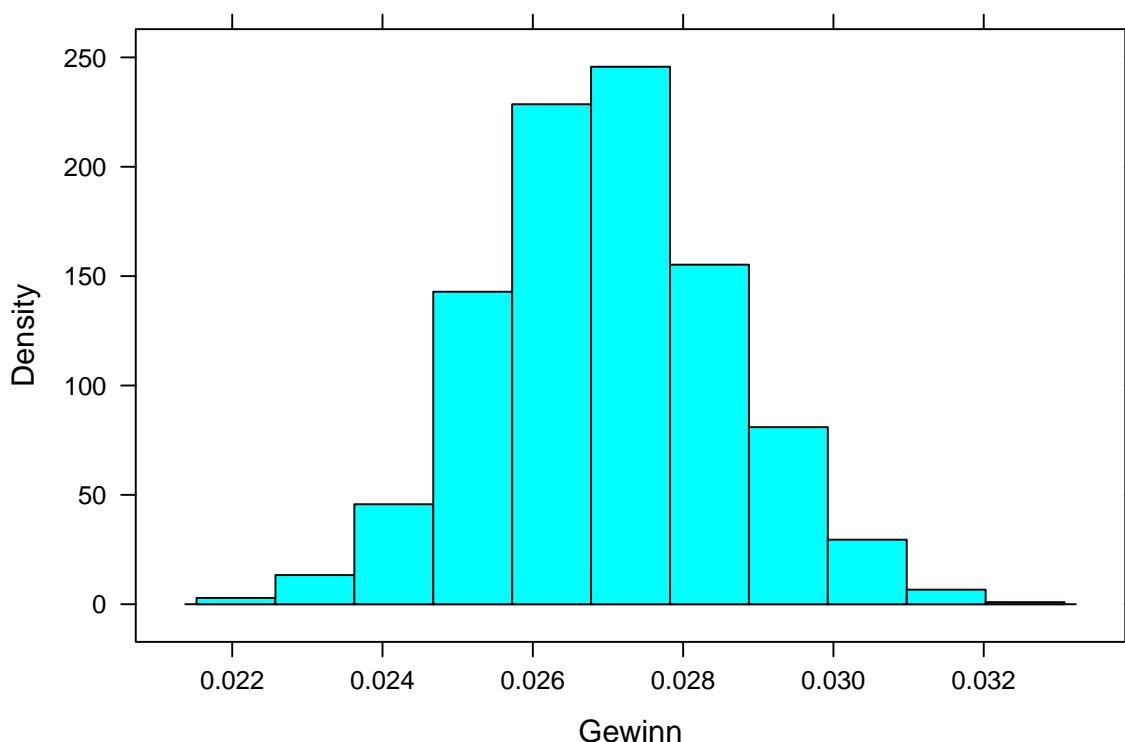
Wenn wir uns die Verteilung der Daten der Übung anschauen

```
zahlspiele <- do(1000)*tally(~resample(roulette, size=10,
                                      prob=c(1/37, 36/37)), format="proportion")
bargraph(~Gewinn, data=zahlspiele)
```



stellen wir fest, dass diese Daten (leider) extrem rechtsschief sind, d. h., i. d. R. gewinnen wir in keiner der 10 Runden, Gewinn=0. Wenn wir `size=10` durch `size=10000` ersetzen (d. h., bei jeden der 1000 Simulationen 10000 Runden spielen), passiert folgendes (Darstellung jetzt als Histogramm, da es zu sehr viele mögliche Ausprägungen für die Anzahl Gewinne gibt):

```
zahlspiele2 <- do(1000)*tally(~resample(roulette, size=10000,  
                                       prob=c(1/37, 36/37)), format="proportion")  
histogram(~Gewinn, data=zahlspiele2)
```

Die Daten werden *normaler*, symmetrischer, d. h., die Verteilung des Gewinnanteilswertes nähert sich einer Normalverteilung an. Dieses Phänomen ist der Hintergrund des **Zentralen Grenzwertsatzes**.

Übung:

- Zurück zum Farbspiel (`farbspiele`): Wie hoch schätzen Sie die Wahrscheinlichkeit anhand der Simulation, dass Sie mindestens die Hälfte Ihrer 8 Spiele gewinnen?

Richtig: 0.585, das ist also anscheinend recht wahrscheinlich, während der relative Anteil der Spiele, in denen Sie maximal 1 der 8 Spiele gewinnen, recht klein ist:

```
anteil <- prop(farbspiele$Gewinn <= 1/8)
anteil
```

Das kommt also eher selten vor. Pech. Vielleicht würden Ihnen aber auch Zweifel kommen, ob der Tisch fair ist. In der Simulation liegt also die Wahrscheinlichkeit, bei einem fairen Tisch bei 8 Spielen höchstens einmal zu gewinnen bei 3.6.

Hypothesentest, p-Wert und Konfidenzintervall

Im Paper *Hose, C., Lübke, K., Nolte, T., und Obermeier, T. (2012): Ratingprozess und Ratingergebnis: Ein Experiment bei qualitativen Ratingkriterien, Kredit & Rating Praxis (6), 12-14* wird folgendes Experiment

untersucht: Unterscheidet sich die Einschätzung (Rating) eines Unternehmens, je nach dem, ob die Person alleiniger Entscheider (Typ A) oder derjenige ist, der die Entscheidungsvorlage vorbereitet (Typ B). Im Rahmen des Experiments wurden die Studierenden zufällig den verschiedenen Typen A und B zugeordnet. Von 151 alleinigen Entscheidern (Typ A) beurteilten 79 das Beispielunternehmen überwiegend positiv (++), von 143 Entscheidungsvorlagenerstellern (Typ B) entschieden ebenfalls 79 überwiegend positiv.

Zeigt das unterschiedliche Verhältnis: Typ A: $\frac{79}{151} = 52.32$ zu Typ B: $\frac{79}{143} = 55.24$, dass alleinige Entscheider die Bonität kritischer einstufen, oder könnte das Ergebnis Zufall sein?

Das Chancenverhältnis, das **Odds Ratio** liegt bei $\frac{\frac{79}{151-79}}{\frac{79}{143-79}} = 0.89$, dass ein alleiniger Entscheider positiv einstuft – im Vergleich zum vorläufigen Entscheider.

Zunächst erzeugen wir einen Vektor der Länge 2 mit den Entscheidungstypen, aus dem wir simulieren können:

```
typ <- factor(c("A", "B"))
entscheider <- rep(typ, c(151, 143))
tally(~entscheider)
```

```
## entscheider
##      A      B
## 151 143
```

sowie einen Vektor der Entscheidungen:

```
rating <- factor(c("Positiv", "Nicht Positiv"))
entscheidungen <- rep(rating, c(79+79, (151+143)-(79+79)))
tally(~entscheidungen)
```

```
## entscheidungen
## Nicht Positiv      Positiv
##           136           158
```

Aus diesem Vektor ziehen wir eine zufällige Stichprobe von 151 Entscheidungen von Typ A.

```
simentscheidung <- sample(entscheidungen, size=151)
tally(~simentscheidung)
```

```
## simentscheidung
## Nicht Positiv      Positiv
##           71           80
```

Hier wären also zufällig 80 der 151 Entscheidungen des Typ A Positiv gewesen – wenn es keinen Zusammenhang zwischen Entscheidungstyp und Ratingentscheidung gibt. `sample` bedeutet Ziehen ohne Zurücklegen, d. h., jeder der Entscheidungen kann nur einmal gezogen werden.

Wir oft kommt also zufällig heraus, dass höchstens 79 der 151 Entscheidungen des Typs A (alleinige Entscheider) positiv zugeordnet werden? Simulieren wir das z. B. 1000-mal:

```
entsim <- do(1000)*tally(~sample(entscheidungen, size=151))
prop(entsim$Positiv<=79)
```

```
## TRUE
## 0.371
```

Unter der **Nullhypothese**, dass das Ergebnis zufällig war (d. h., es gibt keinen Zusammenhang zwischen Typ und Rating), wurden in der Simulation in 37.1 der Fälle höchstens 79 positive dem Typ A zufällig zugeordnet. Dieser **p-Wert** spricht also nicht wirklich gegen das Zufallsmodell. *Hinweis:* Wir werden in späteren Kapiteln bessere Methoden kennenlernen, insbesondere auch solche, die alle Informationen aus den Daten enthalten und sich nicht nur auf einen Anteilswert beziehen.

Über

```
typA <- rep(rating, c(79, 151-79))
```

erzeugen wir uns einen Vektor, der die 79 positiven und $151 - 79$ nicht positiven Urteile von Typ A (alleinige Entscheidung) enthält.

```
tally(~ typA)
```

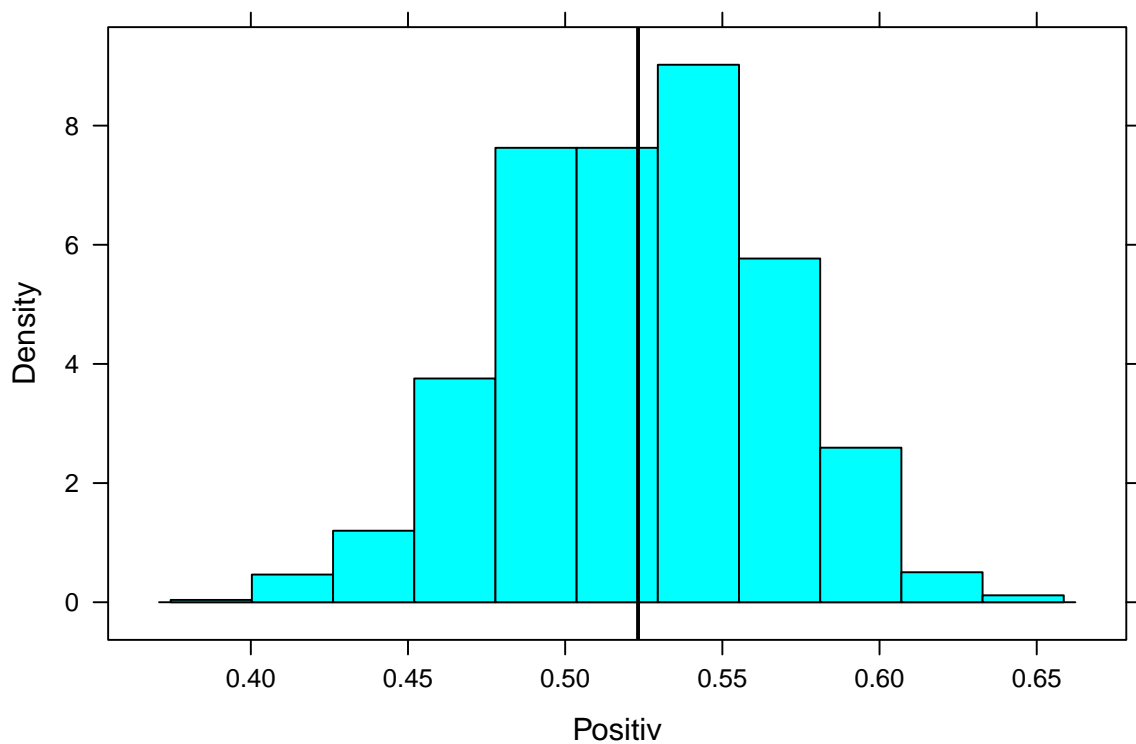
```
## typA
## Nicht Positiv      Positiv
##           72           79
```

Wenn wir jetzt diesen Vektor z. B. 1000-mal resampeln:

```
typAboot <- do(1000)*tally(~resample(typA), format="proportion")
```

erhalten wir 1000 (resampelte) Stichproben, die jeweils einen zufälligen Stichprobenanteil haben:

```
# 79/151: Anteil der Originalstichprobe
histogram(~Positiv, data=typAboot, v=79/151)
```

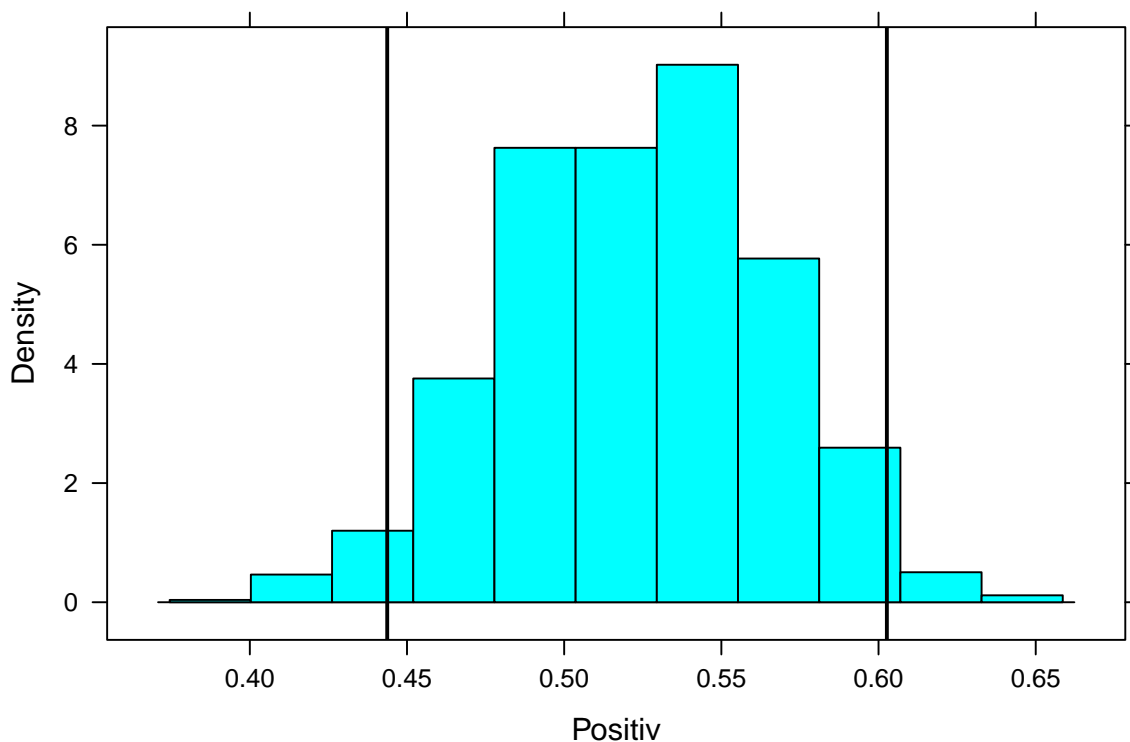


In 95 % der Fälle liegt dieser zufällige Stichprobenanteil hier zwischen

```
ki <- quantile(~Positiv, data=typAboot, probs = c(0.025, 0.975))
ki
```

```
##      2.5%      97.5%
## 0.4437086 0.6026490
```

```
histogram(~Positiv, data=typAboot, v=ki)
```



Dies ist das **Nicht-parametrische Bootstrap-Konfidenzintervall**.

Übung:

- Bestimmen Sie das 90 % nicht-parametrische Bootstrap-Konfidenzintervall für eine nicht-Positive Einschätzung im Fall Entscheidungsvorlage (Typ B). Würde damit eine Nullhypothese $p = 0.5$ zum Signifikanzniveau 10 % verworfen?
-

Rechnen mit der Normalverteilung

Random Walk

Beim Glücksspiel ist es offensichtlich, aber auch an vielen, vielen anderen Stellen im Leben begegnen wir dem *Zufall*. Daten, Beobachtungen sind häufig Realisationen von sogenannten Zufallsvariablen. Das sind Variablen, deren Werte vom Zufall (und damit auch seinen Modellen und Gesetzen) abhängen. So werden Aktienkurse und -renditen häufig als Random Walk aufgefasst und modelliert - häufig unter der *Annahme* einer Normalverteilung.¹

Hier drei Kennzahlen der logarithmierten Tagesrenditen von Aktienunternehmen in 2015 in %.

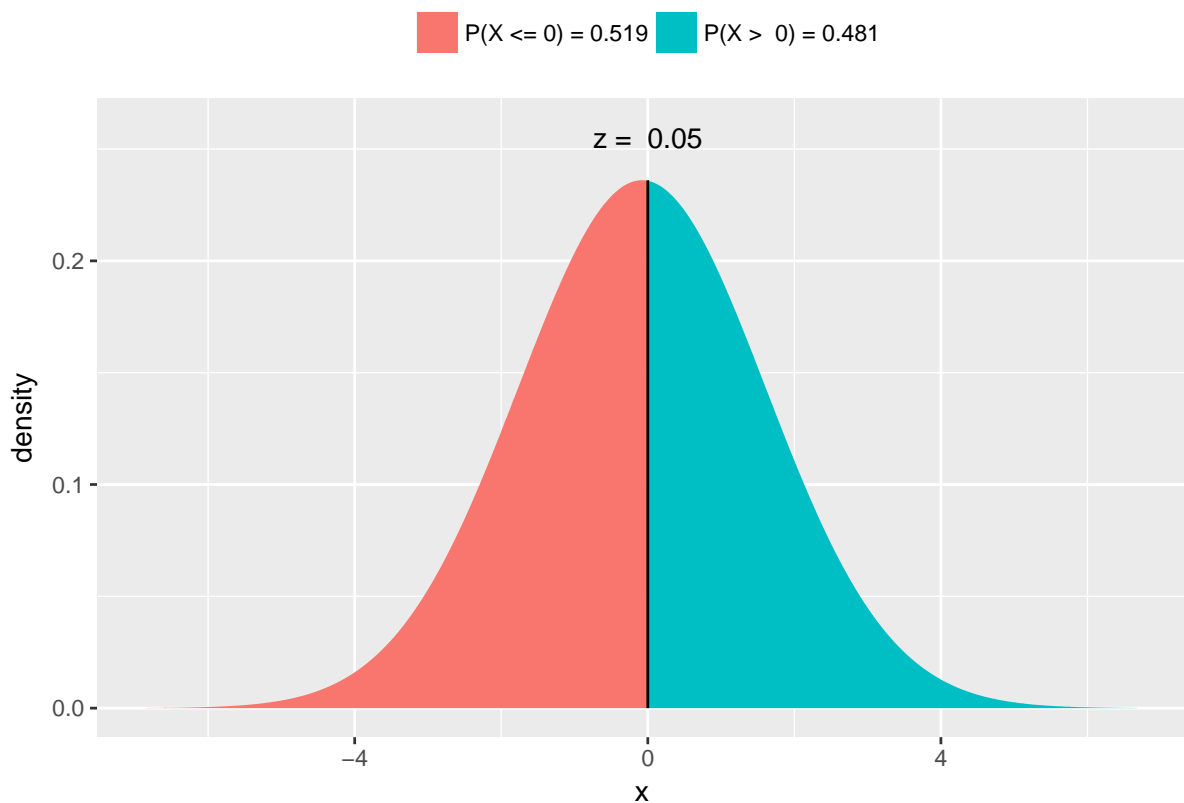
¹Sowohl die Annahme einer Normalverteilung, als auch die Annahme, dass die Renditen unabhängig voneinander sind (d. h., dass keine *Autokorrelation* vorliegt) und einer identischen Verteilung folgen (hier gleiche Varianz) sind in der Praxis kritisch zu hinterfragen.

Anlage	AAPL	FB	GOOGL
Mittelwert	-0.08	0.11	0.15
Standardabweichung	1.69	1.62	1.77

Unter der Annahme der unabhängig, identischen Normalverteilung der logarithmierten Renditen können wir jetzt die Wahrscheinlichkeit eines Tagesverlustes der Apple Aktie (AAPL) berechnen über

```
xpnorm(0, mean=-0.08, sd=1.69 )
```

```
##
## If X ~ N(-0.08, 1.69), then
## P(X <= 0) = P(Z <= 0.04734) = 0.5189
## P(X > 0) = P(Z > 0.04734) = 0.4811
##
```



```
## [1] 0.5188778
```

Die mosaic Funktion `xpnorm` ist eine Erweiterung der normalen R Funktion `pnorm`, die den Wert der Verteilungsfunktion an einer gegebenen Stelle zurückgibt – für jede Verteilung wird hierfür der vorgestellte Buchstabe `p` verwendet.

Für Facebook (FB) lag die Wahrscheinlichkeit eines Gewinns demnach bei

```
xpnorm(0, mean=0.11, sd=1.62, lower.tail = FALSE)
```

```
##
```

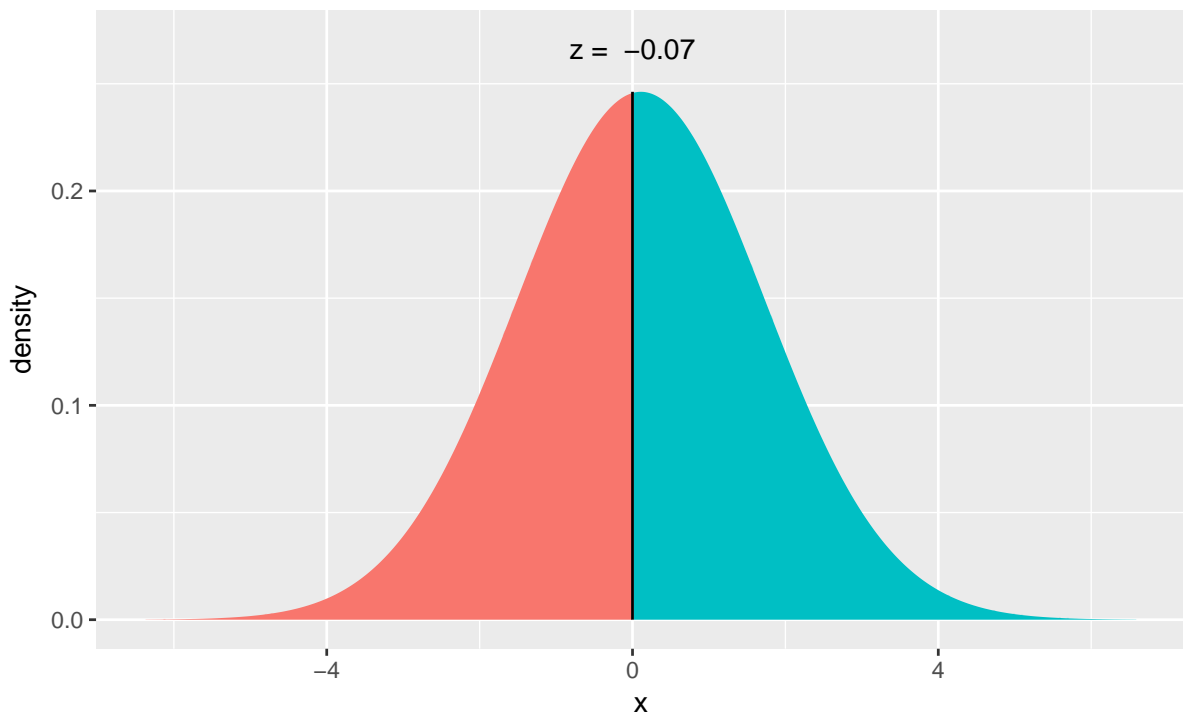
```
## If  $X \sim N(0.11, 1.62)$ , then
```

```
##  $P(X \leq 0) = P(Z \leq -0.0679) = 0.4729$ 
```

```
##  $P(X > 0) = P(Z > -0.0679) = 0.5271$ 
```

```
##
```

■ $P(X \leq 0) = 0.473$ ■ $P(X > 0) = 0.527$



```
## [1] 0.5270679
```

Die Voreinstellung ist `lower.tail = TRUE`, d. h., es wird die Unterschreitungswahrscheinlichkeit angezeigt. Da wir hier aber an der Überschreitungswahrscheinlichkeit (Gewinn) interessiert sind, muss die Option auf `FALSE` gesetzt werden.

Übung:

4. Welche der drei Aktien hat die höchste Wahrscheinlichkeit eine Tagesrendite über 2.5 % zu erzielen?

Dabei wird hier immer auch die Z-Transformation, die Standardisierung, mit angegeben. Am 26.05.2015 ($r = -2.23$) betrug der z -Wert der Apple Aktie demnach bei

```
(-2.23 - (-0.08)) / 1.69
```

```
## [1] -1.272189
```

Die Tagesrendite von Apple war also 1.2721893 Standardabweichungen *unter* dem Mittelwert. Für Facebook lag die Tagesrendite bei -1.51, der z -Wert demnach bei:

```
(-1.51 - (0.11)) / 1.62
```

```
## [1] -1
```

Der 26. Mai 2015 war also auch für Facebook-Anlegerinnen kein guter Tag, aber immer noch besser als bei Apple.

Übung:

5. Die Rendite von Google am 26.05.2015 betrug -1.33. Wie hoch ist der z -Wert? Interpretieren Sie die Aussage des Ergebnisses.
-

Wenn wir zu einen gegebenen Wert der Rendite den Wert der Verteilungsfunktion, d. h. den prozentualen Anteil kleiner oder gleich großer Werte suchen ($P(X \leq x)$) verwenden wir `pnorm` bzw. `xpnorm`. Wenn die Überschreitungswahrscheinlichkeit ($P(X > x)$) gesucht ist, kann zusätzlich die Option `lower.tail = TRUE` gesetzt werden, oder `1-pnorm()` gerechnet werden.

Um zu einem gegebenen Anteil (Prozentwert) den zugehörigen Wert der Rendite zu finden, wir also das Quantil suchen, dann wird `p` durch `q` ersetzt, also `qnorm` bzw. `xqnorm`.

Z. B. für die 5 % schlechtesten Tage der Appleaktie

```
xqnorm(0.05, mean=-0.08, sd=1.69 )
```

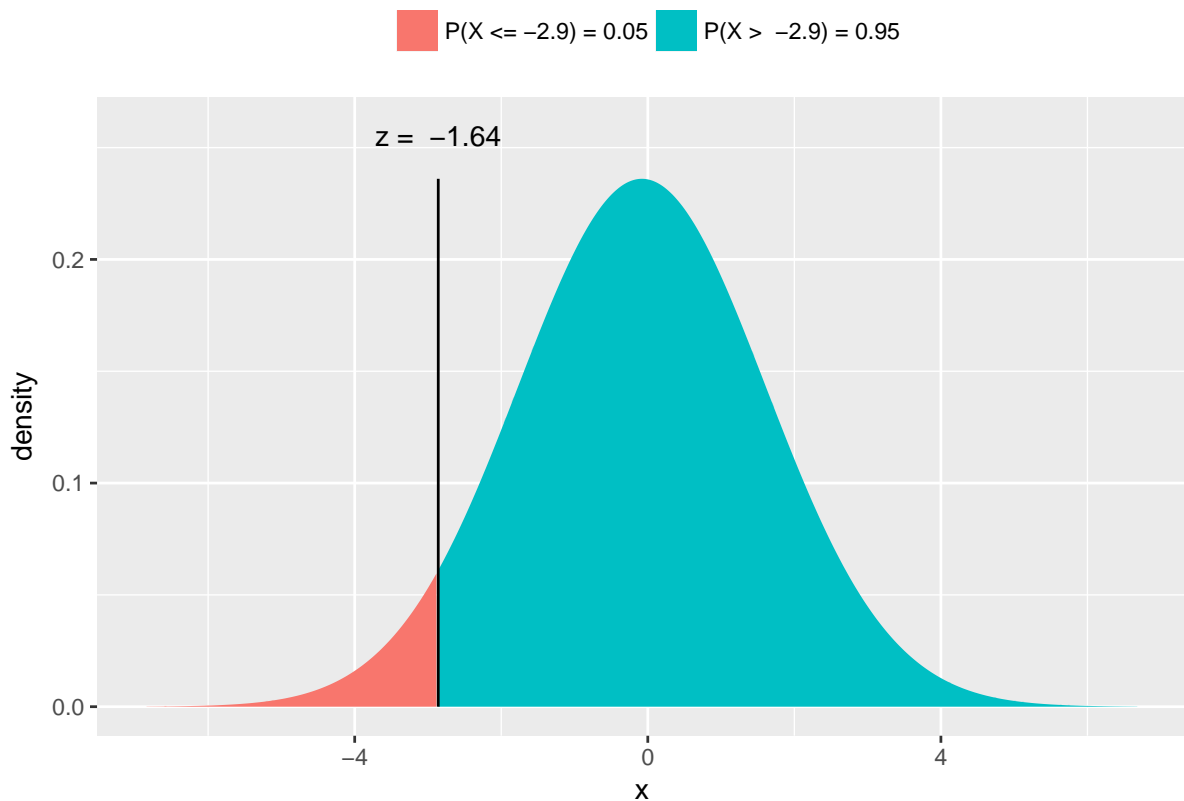
```
##
```

```
## If X ~ N(-0.08, 1.69), then
```

```
## P(X <= -2.859803) = 0.05
```

```
## P(X > -2.859803) = 0.95
```

```
##
```

```
## [1] -2.859803
```

Die Wahrscheinlichkeit beträgt also 5, dass die Tagesrendite unter -2.86 liegt.

Für die Facebook Aktie gilt, dass Sie nur mit einer Wahrscheinlichkeit von 1 über 3.8786836 lag:

```
xqnorm(0.01, mean=0.11, sd=1.62, lower.tail = FALSE)
```

Übung:

6. Sie wollen Ihre Google-Aktien absichern. Wie groß ist bei einer maximalen Eintretenswahrscheinlichkeit von 1 der Tagesverlust mindestens?

Übung: Achtsamkeit

In einem Test zur Achtsamkeit *Sauer S, Lemke J, Wittmann M, Kohls N, Mochty U, and Walach H. (2012) How long is now for mindfulness meditators? Personality and Individual Differences 52(6), 750–754* konnten 34 von 38 Studienteilnehmern der Kontrollgruppe nach einer Instruktion die Dauer der Fixierung des Necker Würfels (Link/Bild) steigern.

1. Kann diese Verbesserung bei fast 90 der Personen zufällig sein? Bestimmen Sie mit Hilfe einer Simulation die Wahrscheinlichkeit, dass zufällig mindestens 34 von 38 Personen eine Verbesserung erzielen.

2. Bestimmen Sie ein nicht-parametrisches Bootstrap-Konfidenzintervall, dass den Anteilswert der Verbesserung in 95 der Fälle überdeckt.

Übung: Intelligenzquotient

Der IQ hat nach Konstruktion einen arithmetischen Mittelwert von 100 bei einer Standardabweichung von 15.

1. Wie hoch ist der Anteil der Personen mit einem IQ von 130 oder größer?
2. Welchen IQ sollte eine Person mindestens haben, wenn Sie zu den 1 Personen mit dem höchsten IQ gehören will?

Literatur

- David M. Diez, Christopher D. Barr, Mine Çetinkaya-Rundel (2014): *Introductory Statistics with Randomization and Simulation*, https://www.openintro.org/stat/textbook.php?stat_book=isrs, Kapitel 2
- Nicholas J. Horton, Randall Pruim, Daniel T. Kaplan (2015): Project MOSAIC Little Books *A Student's Guide to R*, <https://github.com/ProjectMOSAIC/LittleBooks/raw/master/StudentGuide/MOSAIC-StudentGuide.pdf>, Kapitel 3.5, 3.6
- Chester Ismay, Albert Y. Kim (2017): ModernDive – An Introduction to Statistical and Data Sciences via R, <https://ismayc.github.io/moderndiver-book/>
- Maike Luhmann (2015): *R für Einsteiger*, Kapitel 12
- Andreas Quatember (2010): *Statistik ohne Angst vor Formeln*, Kapitel 2, 3.1-3.3, 3.13
- Daniel Wollschläger (2014): *Grundlagen der Datenanalyse mit R*, Kapitel 5, 11

Lizenz

Diese Übung wurde von Karsten Lübke entwickelt und orientiert sich an der Übung zum Buch OpenIntro von Andrew Bray, Mine Çetinkaya-Rundel und Mark Hansen und steht wie diese unter der Lizenz Creative Commons Attribution-ShareAlike 3.0 Unported.

Versionshinweise:

- Datum erstellt: 2017-09-16
- R Version: 3.4.1
- mosaic Version: 1.1.0

Kapitel 3: Einführung Inferenz kategoriale Werte

Globaler Index der Religiosität und Atheismus

Im Jahre 2012 führte das WIN/Gallup International Institut in 57 Ländern eine Untersuchung zur Religiosität durch. Die Pressemitteilung zur Studie finden Sie hier.

Dabei wurde die Frage gestellt: *Unabhängig davon, ob Sie an Gottesdiensten teilnehmen oder nicht ("attend place of worship"), würden Sie sagen, dass Sie ein religiöser Mensch sind, eine nicht religiöse Person oder ein überzeugter Atheist?*

Die Befragten hatten dabei drei Antwortmöglichkeiten: Religiöser Mensch ("A religious person"), Nicht religiöser Mensch ("Not a religious person"), und Atheist ("A convinced atheist"). Die Befragten klassifizierten sich, es wurden kategoriale (nominale) Daten (factor) erzeugt.

Übung:

1. Handelt es sich bei den im Bericht angegebenen Kennzahlen um *Stichprobenstatistiken* oder um *Populationsparameter*?
2. Um die Ergebnisse der Studie zu verallgemeinern, also auf die Gesamtbevölkerung zu schließen, welche Annahmen müssen dafür erfüllt sein und klingen diese hier plausibel erfüllt?

Ein Teil der Daten kann direkt von OpenIntro als R Datensatz heruntergeladen werden, und anschließend in R eingelesen:

```
meine_url <- "http://www.openintro.org/stat/data/atheism.RData"
load(url(meine_url)) # Einlesen
```

Einen Überblick erhält man wie immer über:

```
str(atheism) # Datenstruktur
```

```
## 'data.frame':    88032 obs. of  3 variables:
## $ nationality: Factor w/ 57 levels "Afghanistan",...: 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 ...
## $ response   : Factor w/ 2 levels "atheist", "non-atheist": 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 ...
## $ year       : int   2012 2012 2012 2012 2012 2012 2012 2012 2012 2012 ...
```

```
head(atheism) # Erste Beobachtungen
```

```
##   nationality    response year
## 1 Afghanistan non-atheist 2012
## 2 Afghanistan non-atheist 2012
## 3 Afghanistan non-atheist 2012
## 4 Afghanistan non-atheist 2012
## 5 Afghanistan non-atheist 2012
```

```
## 6 Afghanistan non-atheist 2012
```

```
tail(atheism) # letzte Beobachtungen
```

```
##      nationality      response year
## 88027      Vietnam non-atheist 2005
## 88028      Vietnam non-atheist 2005
## 88029      Vietnam non-atheist 2005
## 88030      Vietnam non-atheist 2005
## 88031      Vietnam non-atheist 2005
## 88032      Vietnam non-atheist 2005
```

Hinweis: Die drei Antwortmöglichkeiten wurden im verwendeten Datensatz zu zwei Levels (atheist, non-atheist) zusammengefasst.

Zur Analyse wird wieder das Paket mosaic verwendet:

```
library(mosaic)
```

Inferenz eines Anteilswerts

In Tabelle 6 der Pressemitteilung wird der Anteil der Atheisten für Deutschland mit 15 % angegeben. Dies ist eine *Statistik* der Stichprobe, nicht der Parameter der *Population*. Es wird also die Frage beantwortet “Wie hoch ist der Anteil der Atheisten in der Stichprobe?”. Um die Frage “Wie hoch ist der Anteil der Atheisten in der Population?” zu beantworten, muss von der Stichprobe auf die Population geschlossen werden, d. h., es wird z. B. der Anteilswert *geschätzt*.

Der folgende Befehl filtert den Datensatz auf das Ergebnis für Deutschland im Jahr 2012, d. h., es werden nur die gewünschten Zeilen im Datensatz belassen:

```
de12 <- filter(atheism, nationality == "Germany", year == "2012")
```

Die *Punktschätzung* des Anteilswertes der Atheisten für Deutschland im Jahr 2012 liegt dann bei

```
pdach <- tally(~response, data=de12, format='proportion')["atheist"]
```

```
pdach
```

```
##      atheist
## 0.1494024
```

also bei 15%.

Um jetzt ein 95 % Konfidenzintervall für den Populationsparameter zu konstruieren (*Bereichsschätzung*) muss der Standardfehler *se* bestimmt werden, hier:

```
n <- nrow(de12) # Anzahl Beobachtungen
se <- sqrt( pdach * (1-pdach) / n)
se
```

```
##      atheist
## 0.01591069
```

Der Standardfehler, d. h., die Standardabweichung des Anteilswertes liegt hier also bei 1.59 %. Zusammen mit dem 2,5 % und 97,5 % Quantil der Standardnormalverteilung ergibt sich folgendes Konfidenzintervall:

```
pdach + qnorm(c(0.025, 0.975)) * se
```

```
## [1] 0.1182180 0.1805868
```

Da der Populationsparameter unbekannt aber nicht zufällig ist, werden die 95 % auch als *Überdeckungswahrscheinlichkeit* bezeichnet.

In mosaic besteht die Möglichkeit, Punkt- und Bereichsschätzungen mit dem Befehl `prop.test` durchzuführen. Sofern kein Wert für `p` angegeben wird lautet die Nullhypothese $H_0 : p = 0.5$.

```
prop.test(~response, data=de12)
```

```
##
## 1-sample proportions test with continuity correction
##
## data:  de12$response [with success = atheist]
## X-squared = 245.42, df = 1, p-value < 2.2e-16
## alternative hypothesis: true p is not equal to 0.5
## 95 percent confidence interval:
##  0.1199815 0.1843172
## sample estimates:
##           p
## 0.1494024
```

Beachte, dass das Konfidenzintervall, anders als bei der *Approximation* über die Normalverteilung hier nicht symmetrisch um den Punktschätzer ist.

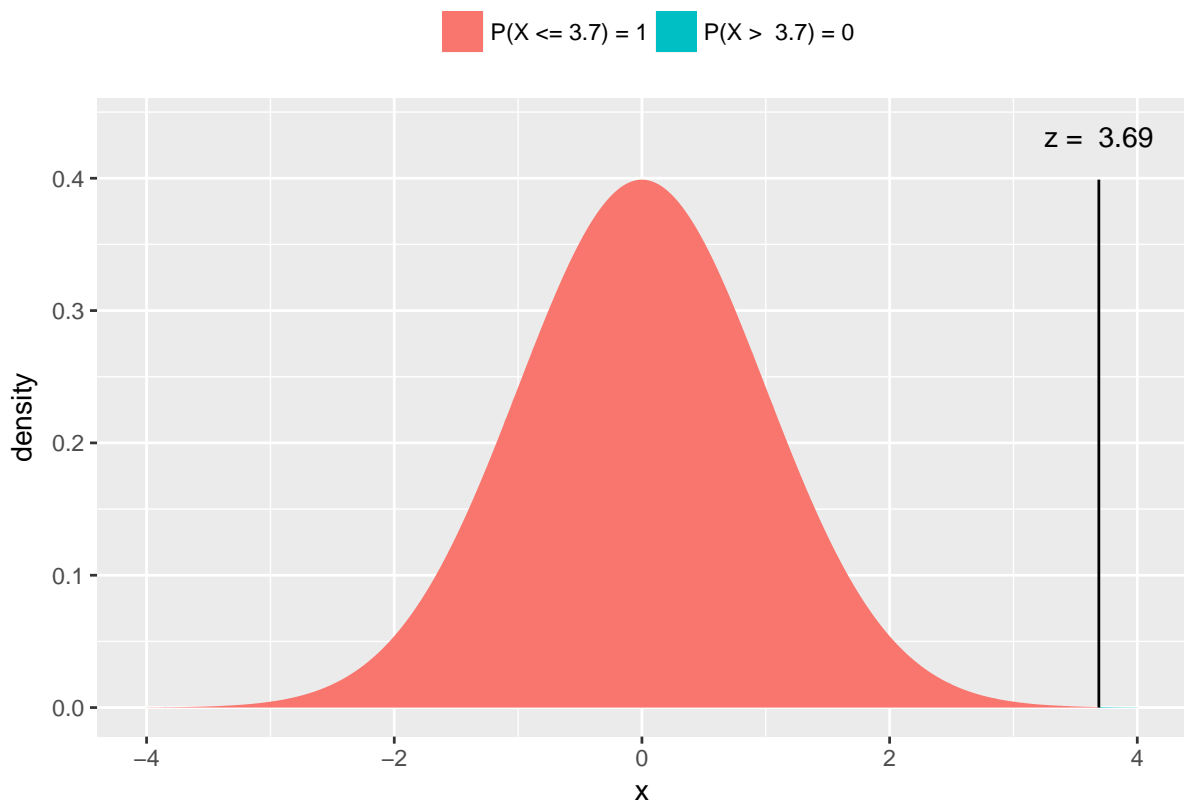
Übung:

- Bei annähernd gleicher Stichprobengröße liegt der Anteil der Atheisten in Saudi Arabien bei 5 %. Wie verändert sich der Standardfehler und damit die Breite des Konfidenzintervalls?
- Der Anteil der Atheisten in Südkorea liegt in etwa ebenfalls bei 15 %, allerdings liegen die Daten von 1523 Befragten vor. Wie verändert sich der Standardfehler und damit die Breite des Konfidenzintervalls?

Um für Deutschland die Nullhypothese “Der Anteil der Atheisten liegt nicht über 10 %” gegen die Alternativhypothese (Forschungshypothese) “Der Anteil der Atheisten liegt über 10 %” können entweder wieder Simulations- und Resamplingtechniken verwendet werden oder die Approximation durch die Normalverteilung:

```
se0 <- sqrt( (0.1 * (1-0.1)) / n)
z <- (pdach - 0.10) / se0
xpnorm(z, lower.tail = FALSE)
```

```
##
## If  $X \sim N(0, 1)$ , then
##  $P(X \leq 3.69) = P(Z \leq 3.69) = 0.9999$ 
##  $P(X > 3.69) = P(Z > 3.69) = 0.0001123$ 
##
```



```
##      atheist
## 0.0001123062
```

Der *p-Wert* liegt also bei 0.0112 %, die Nullhypothese wird also zum Signifikanzniveau von 5 % verworfen.

Auch hier direkt über `prop.test`:

```
prop.test(~response, p=0.1, alternative="greater", data=de12)
```

```
##
## 1-sample proportions test with continuity correction
##
## data:  de12$response [with success = atheist]
## X-squared = 13.07, df = 1, p-value = 0.0001501
```

```
## alternative hypothesis: true p is greater than 0.1
## 95 percent confidence interval:
##  0.1241944 1.0000000
## sample estimates:
##           p
## 0.1494024
```

Je nach Alternativhypothese ergeben sich unterschiedliche Tests:

- `alternative='two.sided'`: ungerichtet, d. h. zweiseitig: $H_0 : p = 0.1$ gegen $H_A : p \neq 0.1$
- `alternative='less'`: gerichtet, d. h. einseitig: $H_0 : p \geq 0.1$ gegen $H_A : p < 0.1$
- `alternative='greater'`: gerichtet, d. h. einseitig: $H_0 : p \leq 0.1$ gegen $H_A : p > 0.1$

Differenz zweier Anteilswerte

In den Daten liegen außerdem die Ergebnisse aus 2005 vor:

```
de05 <- filter(atheism, nationality == "Germany" & year == "2005")
```

Im Jahre 2005 lag der Anteil der Atheisten in Deutschland bei

```
tally(~response, data=de05, format="proportion")
```

```
## response
##      atheist non-atheist
## 0.09960159 0.90039841
```

Der Anteil lag also bei unter 10% – in der *Stichprobe*! Können wir daraus auf eine Erhöhung des Anteils von 2005 zu 2012 in der *Population* schließen?

```
# 2012
a12 <- tally(~response, data=de12) ["atheist"] # Anzahl Atheisten 2012
n12 <- nrow(de12) # Anzahl Studienteilnehmer 2012
p12 <- a12/n12 # Anteil Atheisten 2012

# 2005
a05 <- tally(~response, data=de05) ["atheist"] # Anzahl Atheisten 2005
n05 <- nrow(de05) # Anzahl Studienteilnehmer 2005
p05 <- a05/n05 # Anteil Atheisten 2005

# Punktschätzer Differenz Population
pdiff <- p12 - p05
pdiff
```

```
##      atheist
## 0.0498008
```

```
# Pooling zur Berechnung Standardfehler unter H_0
ppool <- (a12 + a05)/(n12+n05)
ppool

##  atheist
##  0.124502

# Standardfehler se
se0 <- sqrt( (ppool * (1-ppool) / n12) + (ppool * (1-ppool) / n05) )
se0

##  atheist
##  0.0208391

# z-Wert z
z <- (pdiff - 0)/se0

# p-Wert
xpnorm(z, lower.tail = FALSE)

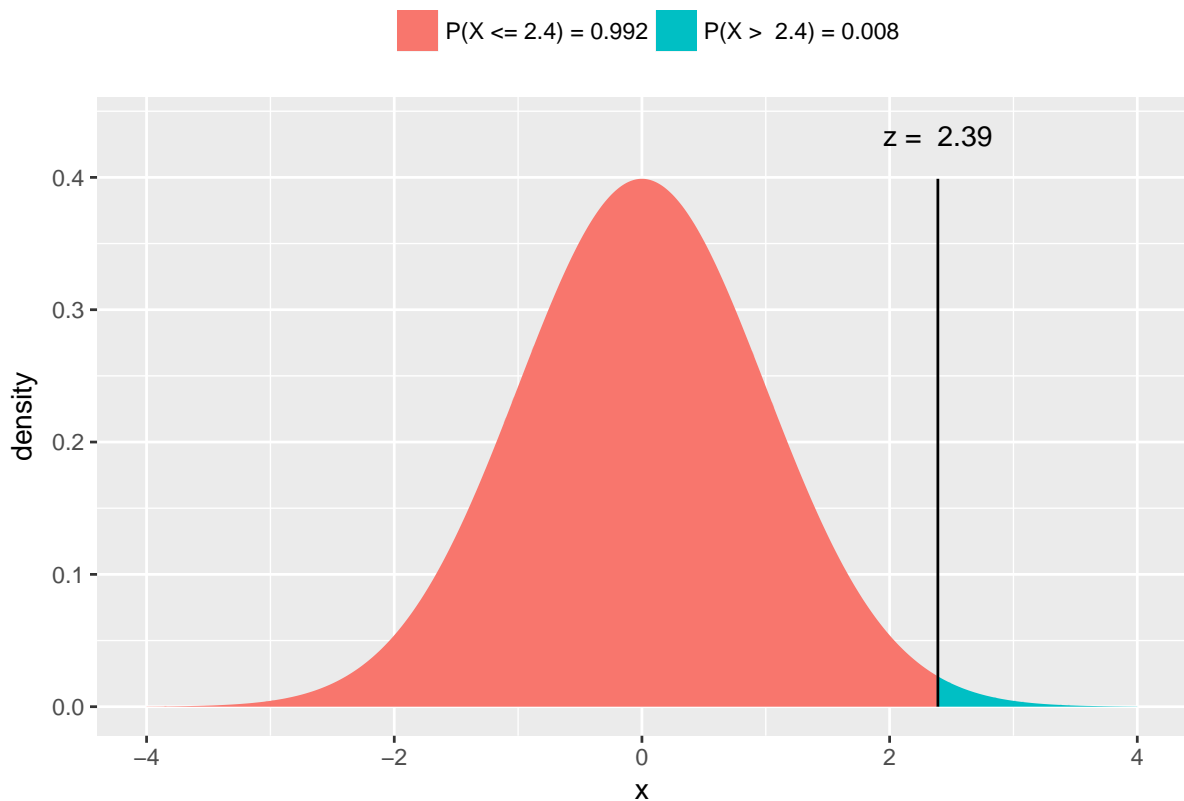
##

## If  $X \sim N(0, 1)$ , then

##  $P(X \leq 2.39) = P(Z \leq 2.39) = 0.9916$ 

##  $P(X > 2.39) = P(Z > 2.39) = 0.008429$ 

##
```

```
##      atheist
## 0.008429297
```

Der p-Wert ist klein und das Ergebnis damit *statistisch signifikant*. Die Wahrscheinlichkeit, *zufällig* eine solche Erhöhung der Anteilswerte zu beobachten, ist also gering – wenn die H_0 gilt! D. h., es wird auf eine Veränderung des Anteilswertes in der *Population* geschlossen.

Auch dies kann direkt durch den Befehl `prop.test` getestet werden. Dazu wird zunächst ein gemeinsamer Datensatz erzeugt:

```
de <- filter(atheism, nationality == "Germany")
```

und anschließend getestet:

```
prop.test(response~year, alternative="less", data=de)
```

```
##
## 2-sample test for equality of proportions with continuity
## correction
##
## data:  tally(response ~ year)
## X-squared = 5.2633, df = 1, p-value = 0.01089
## alternative hypothesis: less
## 95 percent confidence interval:
## -1.00000000 -0.01362913
```

```
## sample estimates:
##      prop 1      prop 2
## 0.09960159 0.14940239
```

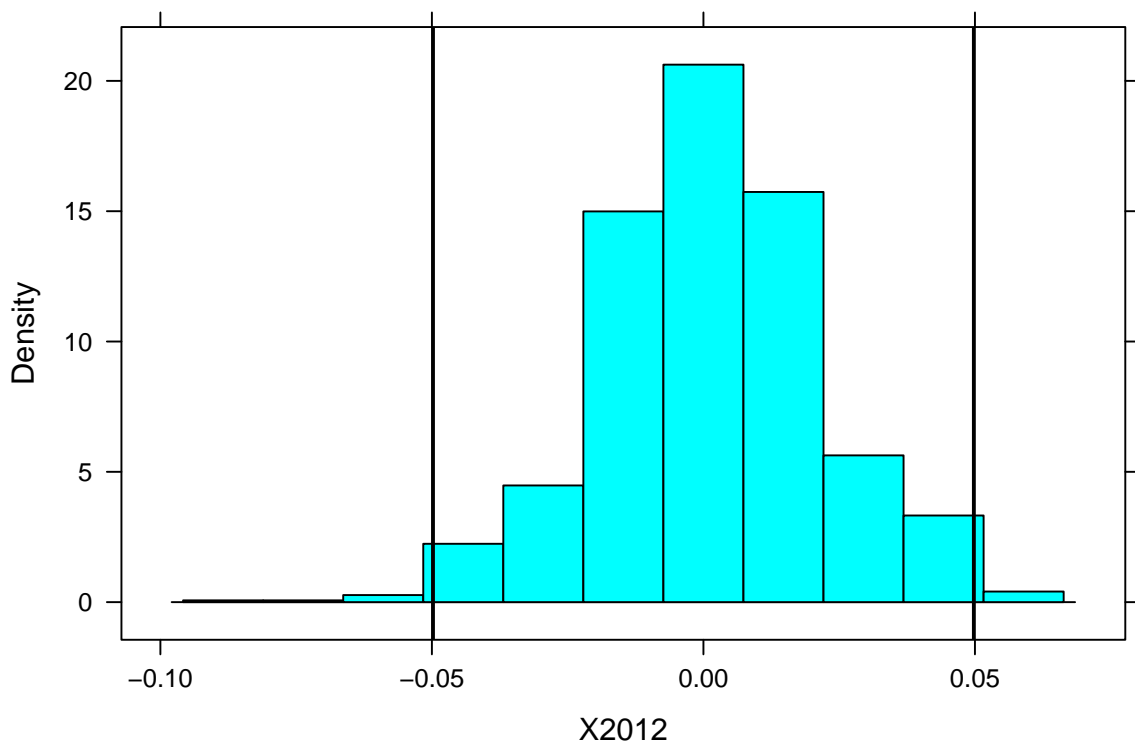
Hier wird die Alternativhypothese *less* verwendet: $H_0 : p_1 \geq p_2$, gegen $H_A : p_1 < p_2$.

Exkurs: Mit dem Paket *mosaic* können Sie das auch einfach über Permutationen testen, indem das Erhebungsjahr zufällig gesampelt wird, wobei hier ungerichtet, d. h., zweiseitig getestet wird. Mit anderen Worten ist sowohl eine Erhöhung als auch ein Verringerung des Anteils in der Alternativhypothese möglich, daher werden die Absolutwerte der Differenz (`abs()`) verwendet:

```
# Beobachtete Differenz
pdiff <- diff(tally( ~ response | year, format="proportion", data=de) ["atheist",])
pdiff

##      2012
## 0.0498008

# Zufallszahlengenerator setzen (Reproduzierbarkeit!)
set.seed(1896)
# 1000-mal das Jahr permutieren: Nullhypothese kein Unterschied
pdiff.null <- do(1000) * diff(tally( ~ response | shuffle(year), data=de, format="proportion"))
# Histogramm
histogram(~ X2012, data=pdiff.null, v=c(pdiff, -pdiff))
```



```
# p-Wert
prop(abs(pdifff.null$X2012) >= abs(pdifff))

## TRUE
## 0.02
```

Übung:

5. Überprüfen Sie für das Jahr 2012, ob es eine zum Niveau 5 % signifikante Differenz zwischen den Anteil der Atheisten in Deutschland und den Niederlanden (Netherlands) in der Population gibt.
 6. Überprüfen Sie für das Jahr 2012, ob es eine zum Niveau 5 % signifikante Differenz zwischen den Anteil der Atheisten in Deutschland und Polen (Poland) in der Population gibt.
-

Chi-Quadrat Unabhängigkeitstest

Soll allgemein der Zusammenhang zwischen zwei kategoriellen (nominalen) Variablen untersucht werden, wird der χ^2 -Unabhängigkeitstest verwendet. Diese testet die Nullhypothese der Unabhängigkeit gegen die Alternativhypothese des Zusammenhangs. Im vorliegenden Datensatz können wir z. B. testen, ob die Verteilung (Anteil) der Atheisten in den teilnehmenden G7 Ländern gleich ist:

```
G7 <- c("United States", "Canada", "Germany", "France", "Italy", "Japan")
G7.12 <- filter(atheism, nationality %in% G7 & year == 2012)
G7.12 <- droplevels(G7.12)
G7atheist <- tally(response ~ nationality, data = G7.12)
G7atheist
```

```
##              nationality
## response      Canada France Germany Italy Japan United States
##  atheist           90    485      75   79   372             50
## non-atheist       912   1203     427  908   840             952
```

(Der Befehl `droplevels` sorgt dafür, dass die nicht mehr benötigten Ausprägungen der kategoriellen Variablen (`factor`) gelöscht werden.)

Der Test selber erfolgt in `mosaic` über `xchisq.test`, d. h.:

```
xchisq.test(G7atheist)
```

```
##
## Pearson's Chi-squared test
##
## data:  x
## X-squared = 504.04, df = 5, p-value < 2.2e-16
```

```
##
##      90      485      75      79      372      50
## ( 180.40) ( 303.91) (  90.38) ( 177.70) ( 218.21) ( 180.40)
## [ 45.30] [107.91] [  2.62] [ 54.82] [108.39] [ 94.26]
## <-6.73> <10.39> <-1.62> <-7.40> <10.41> <-9.71>
##
##      912      1203      427      908      840      952
## ( 821.60) (1384.09) ( 411.62) ( 809.30) ( 993.79) ( 821.60)
## [  9.95] [ 23.69] [  0.57] [ 12.04] [ 23.80] [ 20.70]
## < 3.15> <-4.87> < 0.76> < 3.47> <-4.88> < 4.55>
##
## key:
##  observed
##  (expected)
##  [contribution to X-squared]
##  <Pearson residual>
```

Der Wert der Teststatistik χ^2 liegt bei 504.04, die Anzahl der Freiheitsgrade (“degrees of freedom”, df) bei 5, der p-Wert ist sehr klein, die Nullhypothese der Unabhängigkeit von Nationalität und Verteilung Atheismus wird für die *Population* verworfen.

Die Formel zur Berechnung der χ^2 Teststatistik lautet:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m \frac{(h_{ij} - e_{ij})^2}{e_{ij}}$$

mit den erwarteten Häufigkeiten $e_{ij} = \frac{h_{i.} \cdot h_{.j}}{n}$ wobei für die Zeilensumme $h_{i.} = \sum_{j=1}^m h_{ij}$ und für die Spaltensumme $h_{.j} = \sum_{i=1}^k h_{ij}$ gilt.

Mit diesen Daten kann auch über den Befehl `pchisq` der p-Wert berechnet werden:

```
pchisq(504, 5, lower.tail = FALSE)
```

```
## [1] 1.093548e-106
```

Übung:

- Gibt es einen Zusammenhang zwischen der Verteilung des Atheismus und der Nationalität im Jahr 2012 innerhalb der afrikanischen Länder `c('Nigeria', 'Kenya', 'Tunisia', 'Ghana', 'Cameroon', 'South Sudan')`?
-

Übung: Trinkgelddaten

Wir werden jetzt den *tips* Datensatz aus *Bryant, P. G. and Smith, M (1995) Practical Data Analysis: Case Studies in Business Statistics. Homewood, IL: Richard D. Irwin Publishing* weiter analysieren.

Sofern noch nicht geschehen, können Sie diesen als `csv` Datei herunterladen:

```
download.file("https://goo.gl/whKjnl", destfile = "tips.csv")
```

Das Einlesen erfolgt, sofern die Daten im aktuellen Verzeichnis liegen, über:

```
tips <- read.csv2("tips.csv")
```

Tipp: Wenn Sie nicht mehr wissen wo die Daten liegen: statt `tips.csv` den Befehl `file.choose()` als Argument für die Funktion `read.csv2` verwenden.

1. Bestimmen Sie ein 90 % Konfidenzintervall für den Anteil der Raucher (`smoker`) in der Population.
2. Testen Sie zum Niveau 5 %, ob sich der Anteil der Raucher in der Population beim Lunch von dem beim Dinner (`time`) unterscheidet.
3. Gibt es einen Zusammenhang zwischen Rauchen und Wochentag (`day`)?

Literatur

- David M. Diez, Christopher D. Barr, Mine Çetinkaya-Rundel (2014): *Introductory Statistics with Randomization and Simulation*, https://www.openintro.org/stat/textbook.php?stat_book=isrs, Kapitel 3
- Nicholas J. Horton, Randall Pruim, Daniel T. Kaplan (2015): *Project MOSAIC Little Books A Student's Guide to R*, <https://github.com/ProjectMOSAIC/LittleBooks/raw/master/StudentGuide/MOSAIC-StudentGuide.pdf>, Kapitel 4.2, 4.3, 6.3
- Maïke Luhmann (2015): *R für Einsteiger*, Kapitel 18.1
- Andreas Quatember (2010): *Statistik ohne Angst vor Formeln*, Kapitel 3.4, 3.6, 3.8
- Daniel Wollschläger (2014): *Grundlagen der Datenanalyse mit R*, Kapitel 10.2

Lizenz

Diese Übung wurde von Karsten Lübke entwickelt und orientiert sich an der Übung zum Buch *OpenIntro* von Andrew Bray, Mine Çetinkaya-Rundel und steht wie diese unter der Lizenz *Creative Commons Attribution-ShareAlike 3.0 Unported*.

Versionshinweise:

- Datum erstellt: 2017-09-16
- R Version: 3.4.1
- `mosaic` Version: 1.1.0

Kapitel 4: Einführung Inferenz metrische Werte

t-Test für eine Stichprobe

Der B3 Datensatz *Heilemann, U. and Münch, H.J. (1996): West German Business Cycles 1963-1994: A Multivariate Discriminant Analysis. CIRET-Conference in Singapore, CIRET-Studien 50.* enthält Quartalsweise Konjunkturdaten aus (West-)Deutschland von 1955-1994.

Er kann von <https://goo.gl/0YCEHf> heruntergeladen werden:

```
download.file("https://goo.gl/0YCEHf", destfile = "B3.csv")
```

Anschließend können die Daten in R eingelesen werden:

```
B3 <- read.csv2("B3.csv")
str(B3) # Datenstruktur
```

```
## 'data.frame': 157 obs. of 14 variables:
## $ PHASEN : int 2 2 3 3 3 3 3 3 3 3 ...
## $ BSP91JW : num 10.53 10.6 9.21 5.17 4.93 ...
## $ CP91JW : num 9.31 12.66 6.55 7.87 8.6 ...
## $ DEFRATE : num 0.05 0.06 0.05 0.05 0.04 0.04 0.04 0.03 0.03 0 ...
## $ EWAJW : num 5.7 5.2 4.8 3.3 2.1 3.2 2.5 2.7 3 0.3 ...
## $ EXIMRATE: num 3.08 1.96 2.82 3.74 4.16 2.9 3.65 4.57 4.37 2.89 ...
## $ GM1JW : num 11.15 11.03 10.04 8.33 7.69 ...
## $ IAU91JW : num 23.56 12.72 11.52 0.85 -2.08 ...
## $ IB91JW : num 14.69 24.95 14.9 7.55 3.23 ...
## $ LSTKJW : num 3 2.36 3.39 5.3 6.91 1.03 3.73 6.2 4.12 7.94 ...
## $ PBSPJW : num 2.89 2.59 3.01 3.03 3.46 1.95 3.18 3.98 3.29 5.63 ...
## $ PCPJW : num 1.91 2.2 3.09 2.08 1.48 1.65 1.47 3.29 3.59 4.19 ...
## $ ZINSK : num 6.27 4.6 6.19 6.71 7.1 4.96 5.21 4.83 4.5 3.83 ...
## $ ZINSLR : num 3.21 3.54 3.22 3.37 3.14 4.95 3.82 3.09 3.91 1.47 ...
```

```
head(B3); tail(B3)
```

```
## PHASEN BSP91JW CP91JW DEFRATE EWAJW EXIMRATE GM1JW IAU91JW IB91JW LSTKJW
## 1 2 10.53 9.31 0.05 5.7 3.08 11.15 23.56 14.69 3.00
## 2 2 10.60 12.66 0.06 5.2 1.96 11.03 12.72 24.95 2.36
## 3 3 9.21 6.55 0.05 4.8 2.82 10.04 11.52 14.90 3.39
## 4 3 5.17 7.87 0.05 3.3 3.74 8.33 0.85 7.55 5.30
## 5 3 4.93 8.60 0.04 2.1 4.16 7.69 -2.08 3.23 6.91
## 6 3 8.39 5.62 0.04 3.2 2.90 6.62 -3.76 14.58 1.03
## PBSPJW PCPJW ZINSK ZINSLR
## 1 2.89 1.91 6.27 3.21
## 2 2.59 2.20 4.60 3.54
```

```
## 3    3.01  3.09  6.19   3.22
## 4    3.03  2.08  6.71   3.37
## 5    3.46  1.48  7.10   3.14
## 6    1.95  1.65  4.96   4.95

##      PHASEN BSP91JW CP91JW DEFRATE EWAJW EXIMRATE GM1JW IAU91JW IB91JW
## 152      3    -1.27   1.29   -4.87 -1.97      6.03  9.79  -18.29   1.73
## 153      3    -2.13  -0.57   -2.98 -2.05      7.59  0.72  -15.82  -3.23
## 154      3     1.39   2.33   -2.86 -1.84      7.49 11.33  -10.59   4.62
## 155      4     1.63   0.64    1.20 -1.58      7.75 11.38   -4.90   3.62
## 156      1     1.40   0.57   -3.56 -1.34      5.58  9.53   -0.76   2.19
## 157      1     1.83  -0.08   -2.22 -0.93      7.50 15.20    2.75   6.12

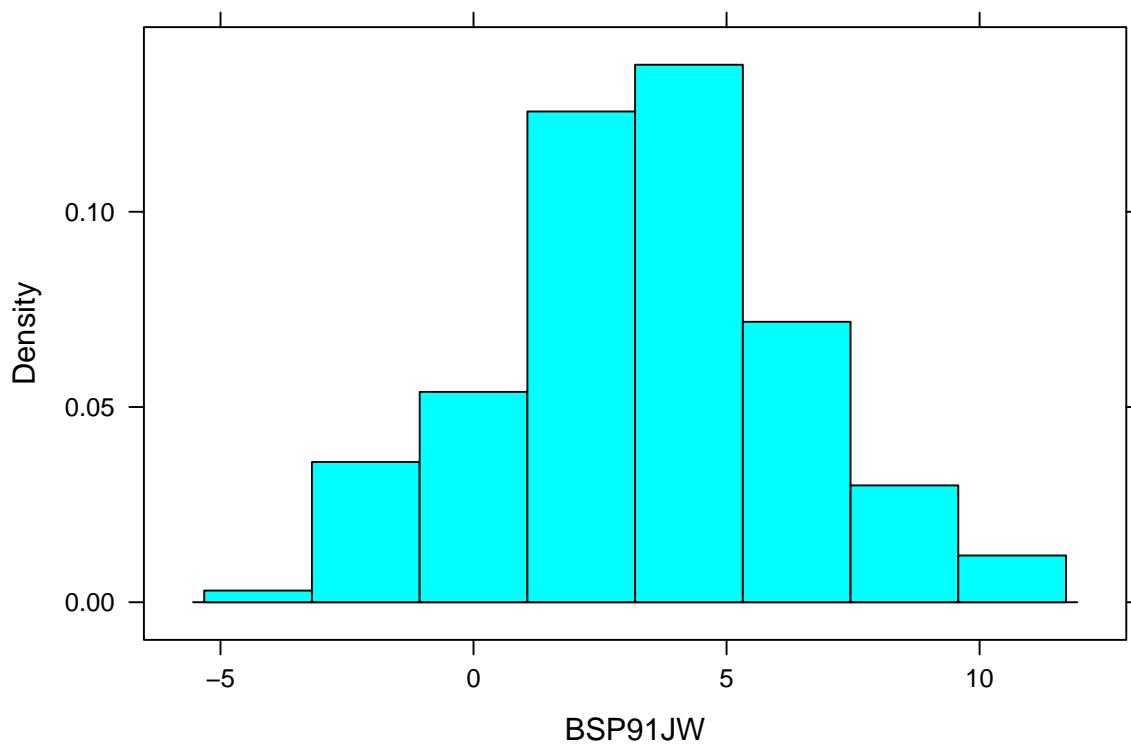
##      LSTKJW PBSPJW PCPJW ZINSK ZINSLR
## 152    1.08    2.73   2.98   6.83   3.55
## 153    1.67    2.67   3.31   6.35   3.05
## 154   -0.12    2.66   2.94   5.88   3.17
## 155   -1.81    1.77   2.58   5.29   4.82
## 156   -1.54    1.85   2.60   5.01   5.27
## 157   -0.92    1.79   2.49   5.28   5.62
```

Zur Analyse wird wieder das Paket mosaic verwendet:

```
library(mosaic)
```

Wie sah die (jährliche, quartalsweise) Entwicklung des Bruttonsozialproduktes (BSP91JW) in dem Zeitraum (1955-1994) aus?

```
histogram( ~ BSP91JW, data = B3)
```



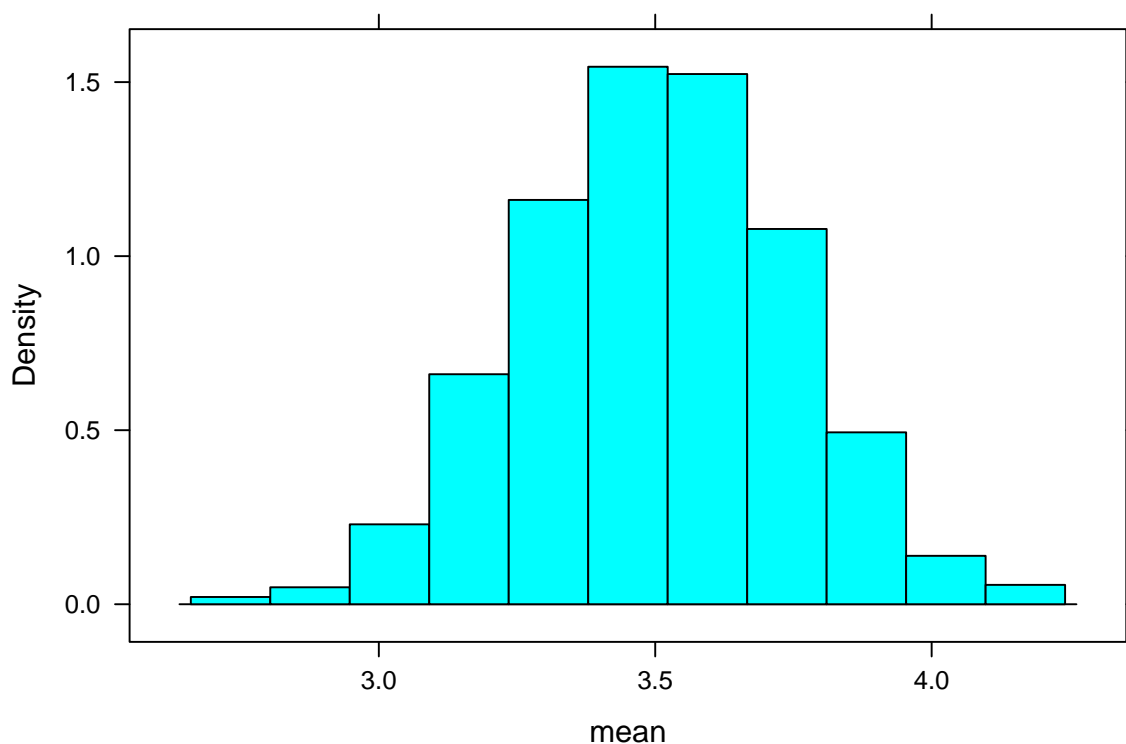
```
favstats( ~ BSP91JW, data = B3)
```

```
##      min   Q1 median   Q3    max      mean      sd  n missing
##  -3.78 1.58   3.59 5.17 11.12 3.498662 2.974273 157      0
```

Liefern die Daten Belege für die Forschungsthese, dass der Mittelwert nicht zufällig $> 0\%$ ist?

Zunächst ein Konfidenzintervall für den unbekannten Wert μ :

```
BootBSP91JW <- do(1000) * mean( ~ BSP91JW, data = resample(B3))
histogram( ~ mean, data = BootBSP91JW)
```

```
quantile( ~ mean, data = BootBSP91JW, probs=c(0.025, 0.975))
```

```
##      2.5%      97.5%
## 3.035919 3.963293
```

Hier ist die 0 schon einmal nicht enthalten.

Unter der Annahme einer Normalverteilung kann (mit) der geschätzten Standardabweichung eine Stichprobe der gegebenen Länge unter $H_0 : \mu = 0$ erzeugt werden:

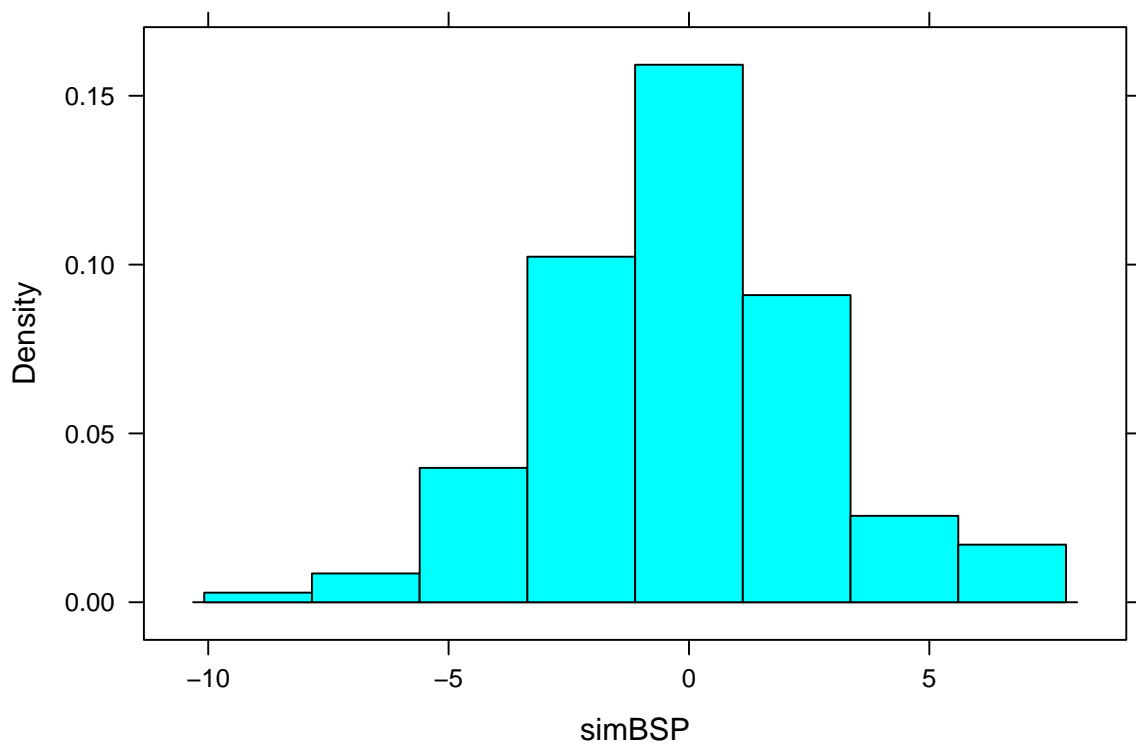
```
# Mittelwert
meandBSP <- mean( ~ BSP91JW, data = B3)

# Standardabweichung
sdBSP <- sd( ~ BSP91JW, data = B3)

# Anzahl Beobachtungen
n <- length( B3$BSP91JW)

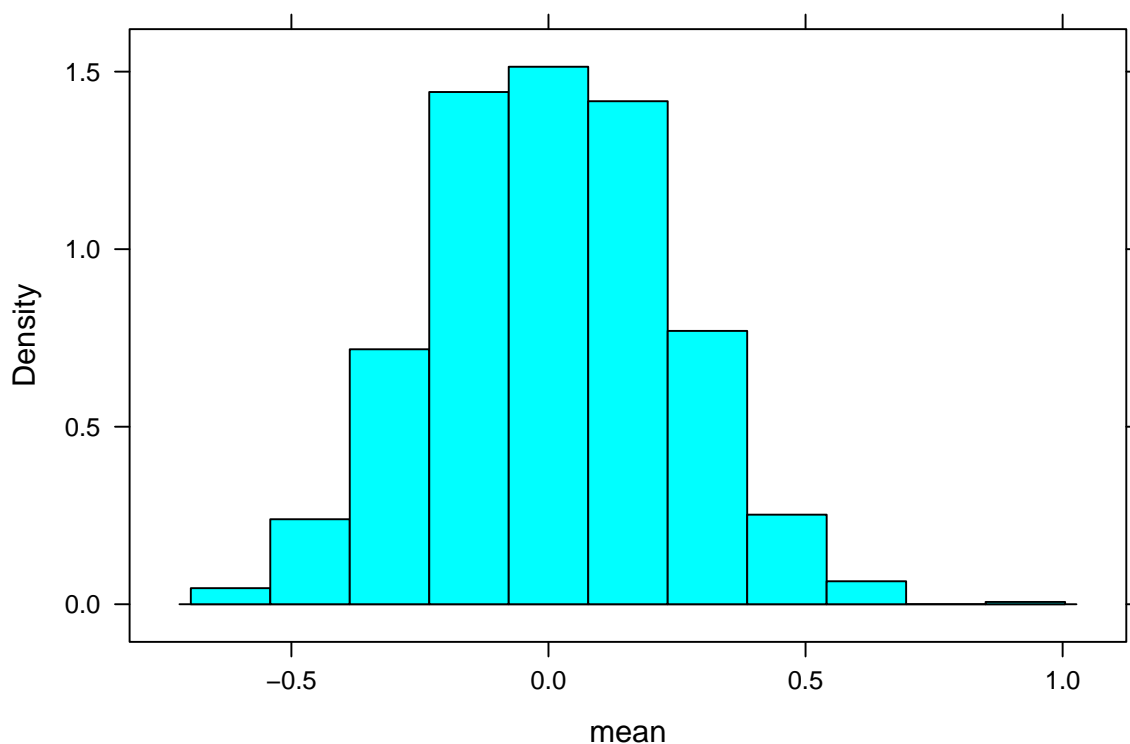
# Zufallszahlengenerator setzen
set.seed(1896)

simBSP <- rnorm(n=n, mean=0, sd=sdBSP)
histogram( ~ simBSP)
```



Für die Simulation der Verteilung unter H_0 wird dies jetzt z. B. 1000-mal wiederholt – und der Mittelwert berechnet:

```
SimBSP91JW <- do(1000) * mean( ~ rnorm(n=n, mean=0, sd=sdBSP) )  
histogram( ~ mean, SimBSP91JW)
```



Der Anteil der unter H_0 simulierten Daten, die einen größeren Mittelwert als den beobachteten aufweisen ist sehr klein:

```
prop( mean( ~mean, data=SimBSP91JW) >= meandBSP)
```

```
## TRUE
## 0
```

Der beobachtete Wert der Teststatistik ist also unter $H_0 : \mu \leq 0$ sehr unwahrscheinlich, H_0 würde also verworfen.

Dieses Ergebnis liefert auch der t-Test:

```
t.test( ~ BSP91JW, data = B3, alternative="greater")
```

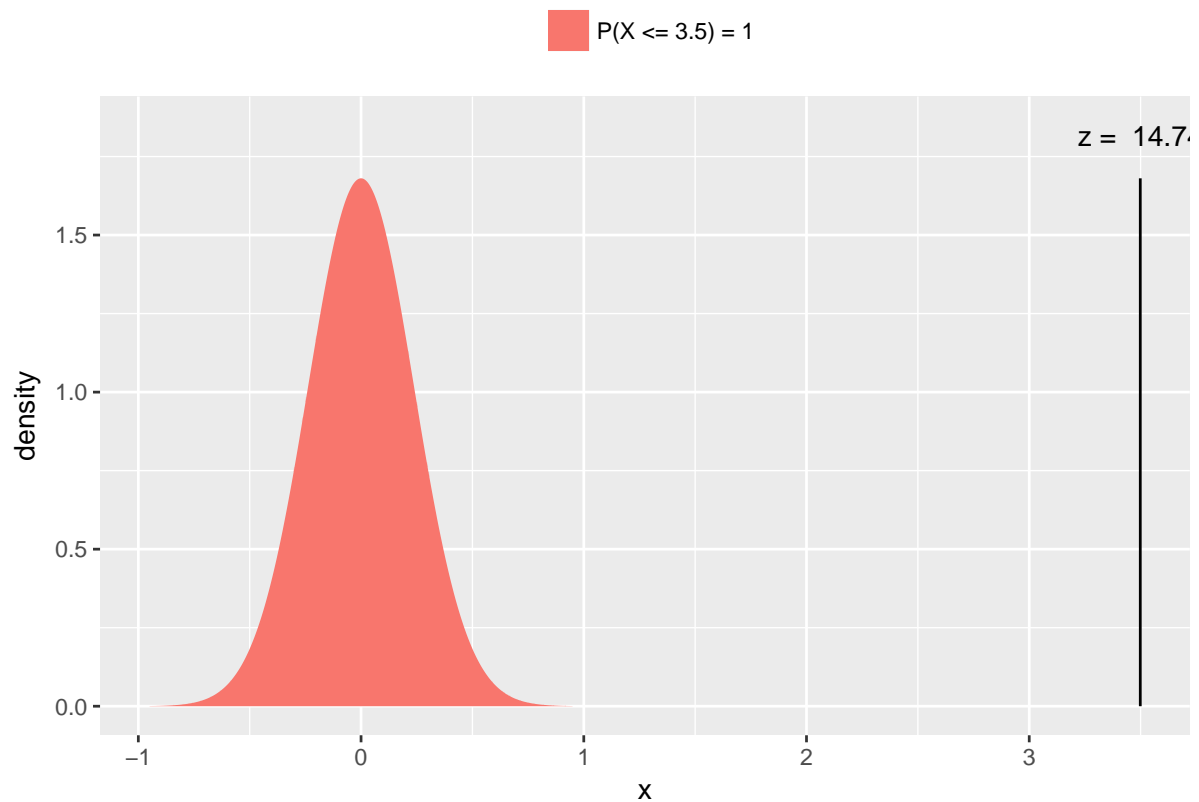
```
## ~BSP91JW
##
## One Sample t-test
##
## data:  BSP91JW
## t = 14.739, df = 156, p-value < 2.2e-16
## alternative hypothesis: true mean is greater than 0
## 95 percent confidence interval:
##  3.105886      Inf
## sample estimates:
```

```
## mean of x
## 3.498662
```

Oder eine Berechnung “per Hand”:

```
# Standardfehler
se <- sdBSP/sqrt(n)
# p-Wert
xpnorm( meandBSP, mean=0, sd=se, lower.tail = FALSE)
```

```
##
## If  $X \sim N(0, 0.2374)$ , then
##  $P(X \leq 3.499) = P(Z \leq 14.74) = 1$ 
##  $P(X > 3.499) = P(Z > 14.74) = 0$ 
##
```



```
## [1] 1.807738e-49
```

t-Test für eine abhängige/gepaarte Stichprobe

Hier interessieren besonders die (Veränderung der) Investitionen in Ausrüstungsgüter (IAUJW91) und in Bauten (IB91JW). Die deskriptiven Kennzahlen zeigen,

```
favstats( ~ IAU91JW, data=B3)
```

```
##      min      Q1 median  Q3      max      mean      sd      n missing
## -19.95 -1.25      5.3  9.1  27.25  3.992675  8.864805  157          0
```

```
favstats( ~ IB91JW, data=B3)
```

```
##      min      Q1 median  Q3      max      mean      sd      n missing
## -21.59 -1.16      2.6  5.55  40.25  2.565096  7.481063  157          0
```

dass im betrachteten Zeitraum die Investitionen in Ausrüstungsgüter mit dem arithmetischen Mittelwert von 3.99 im Mittel stärker gestiegen sind als die in Bauten mit 2.57. Da die Investitionen sicherlich in Zusammenhang mit der gesamten konjunkturellen Entwicklung stehen, ist davon auszugehen, dass es sich hier um vom jeweiligen Zeitpunkt abhängige Beobachtungen handelt. Daher wird hier die Differenz der Werte betrachtet: IB91JW - IAU91JW. Der R Befehl für einen t-Test lautet `t.test`:

```
t.test( ~ (IB91JW - IAU91JW), data=B3)
```

```
## ~ (IB91JW - IAU91JW)
##
## One Sample t-test
##
## data:  IB91JW
## t = -1.9612, df = 156, p-value = 0.05164
## alternative hypothesis: true mean is not equal to 0
## 95 percent confidence interval:
## -2.86544149  0.01028226
## sample estimates:
## mean of x
## -1.42758
## ~ (IB91JW - IAU91JW)
```

Der (umfangreichen) Ausgabe können Sie neben dem z- bzw. t-Wert (-1.96) mit unter der Nullhypothese der Gleichheit des Lageparameters

$$H_0 : \mu_{\text{IB91JW} - \text{IAU91JW}} = 0$$

insbesondere den p-Wert (0.0516) und das Konfidenzintervall (-2.87, 0.01) entnehmen. Zum Signifikanzniveau von 5 % wird die Nullhypothese also gerade so *nicht* abgelehnt, da der p-Wert über 5 % liegt sowie der Wert der Nullhypothese, $\mu = 0$, im Konfidenzintervall ist.

Übung:

1. Testen Sie, ob es einen nicht zufälligen mittleren Lageunterschied zwischen der Veränderung des

Preisindex des Bruttonsozialproduktes PBSPJW und dem des privaten Verbrauchs PCPJW gibt.

t-Test für zwei unabhängige Stichproben

Untersuchen wir, ob sich makroökonomische Kennzahlen im Auf- und Abschwung unterscheiden. Zunächst stellen wir fest, dass die eigentlich kategorielle Variable PHASEN hier numerisch kodiert wurde, was aber schnell verwirren würde.

```
typeof(B3$PHASEN)
```

```
## [1] "integer"
```

Typänderung zu factor geht einfach:

```
B3$PHASEN <- as.factor(B3$PHASEN)
```

Wenn wir die einzelnen levels des Faktors als numerische Werte verwenden wollen, würden wir den Befehl `as.numeric()` verwenden. Aber sicherheitshalber vorher über `levels()` schauen, ob die Reihenfolge auch stimmt.

Um die Interpretation zu erleichtern können wir hier einfach die Faktorstufe umbenennen.

```
levels(B3$PHASEN) <- c("Aufschwung", "Oberer Wendepunkt",  
                       "Abschwung", "Unterer Wendepunkt")
```

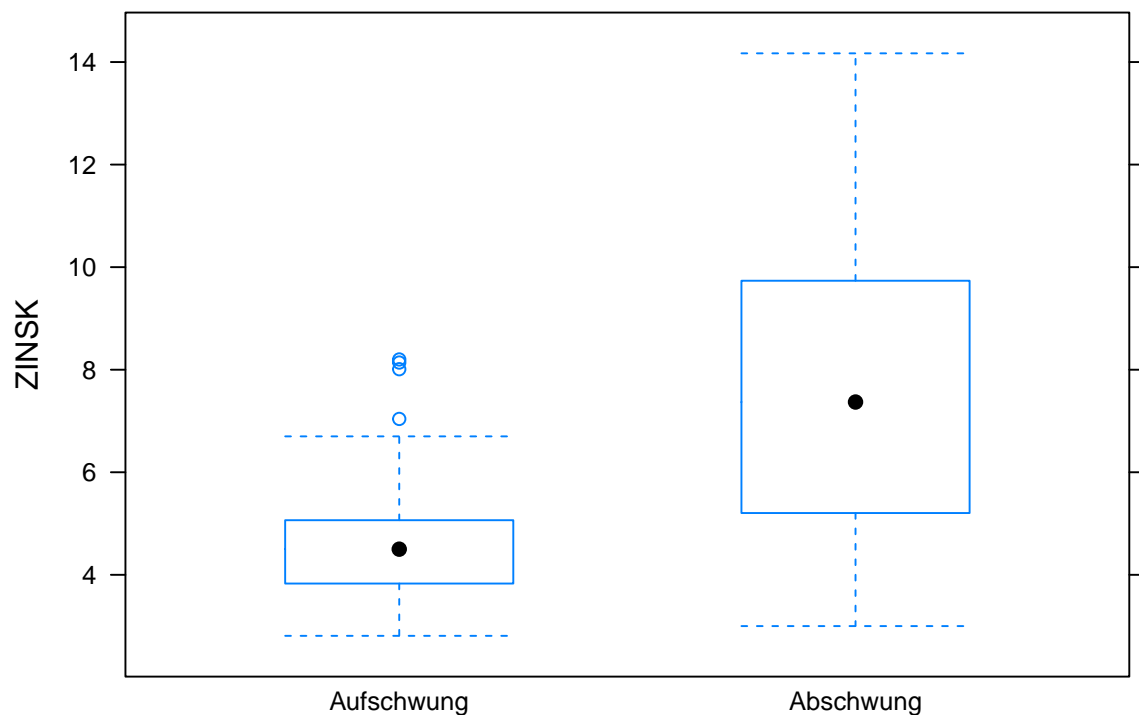
Jetzt ist keine Verwechslung von kategoriellen und metrischen Variablen mehr möglich.

Zunächst wird der Datensatz, der auch die konjunkturellen Wendepunkte enthält, nur auf Auf- und Abschwung eingeschränkt.

```
B3AufAb <- filter(B3, PHASEN %in% c("Aufschwung", "Abschwung"))  
B3AufAb <- droplevels(B3AufAb)
```

In der politischen Diskussion werden immer niedrige Zinsen gefordert. Schauen wir mal, wie die Zinsen in den Konjunkturphasen in der Vergangenheit (1955-1994) verteilt waren:

```
bwplot(ZINSK ~ PHASEN, data=B3AufAb)
```



Anscheinend waren die Zinsen in Zeiten des Aufschwungs niedriger.

Was sagen die deskriptiven Kennzahlen?

```
favstats (ZINSK ~ PHASEN, data=B3AufAb)
```

```
##          PHASEN  min    Q1 median    Q3    max    mean      sd  n missing
## 1 Aufschwung  2.81  3.830   4.50  5.065   8.20  4.715085  1.209989  59         0
## 2 Abschwung  3.00  5.205   7.37  9.735  14.17  7.682553  3.020254  47         0
```

Alle Lagemaße für die Zinskosten sind in der Aufschwungsphase niedriger.

Der t-Test der Zinskosten für

$$H_0 : \mu_{\text{Aufschwung}} = \mu_{\text{Abschwung}} \Leftrightarrow \mu_{\text{Aufschwung}} - \mu_{\text{Abschwung}} = 0$$

mit der Teststatistik

$$T = \frac{\bar{x}_A - \bar{x}_B}{\sqrt{\frac{sd_A^2}{n_A} + \frac{sd_B^2}{n_B}}}$$

hat dann den gleichen Aufbau der Syntax wie `bwplot` oder `favstats`: Teste die Zinskosten in Abhängigkeit der Konjunkturphase.

Die Berechnung der Teststatistik

```
t.test (ZINSK ~ PHASEN, data=B3AufAb)
```

```
## ZINSK ~ PHASEN
```

```
##
##  Welch Two Sample t-test
##
## data:  ZINSK by PHASEN
## t = -6.3426, df = 57.766, p-value = 3.743e-08
## alternative hypothesis: true difference in means is not equal to 0
## 95 percent confidence interval:
##  -3.904085 -2.030852
## sample estimates:
## mean in group Aufschwung  mean in group Abschwung
##                4.715085                7.682553
## ZINSK ~ PHASEN
```

Der kleine p-Wert von 3.7430775×10^{-8} zeigt, dass die Nullhypothese der Gleichheit der Lageparameter verworfen werden kann. Wir können der Funktion auch eine spezielle Alternativhypothese übergeben:

```
t.test(ZINSK ~ PHASEN, data=B3AufAb, alternative = "less")
```

```
## ZINSK ~ PHASEN
##
##  Welch Two Sample t-test
##
## data:  ZINSK by PHASEN
## t = -6.3426, df = 57.766, p-value = 1.872e-08
## alternative hypothesis: true difference in means is less than 0
## 95 percent confidence interval:
##      -Inf -2.185354
## sample estimates:
## mean in group Aufschwung  mean in group Abschwung
##                4.715085                7.682553
```

Jetzt haben wir die Nullhypothese “Das Lagemaß für die Zinskosten ist im Aufschwung *nicht* kleiner als im Abschwung” gegen die Alternativhypothese (Forschungshypothese) “Das Lagemaß für die Zinskosten ist im Aufschwung kleiner als im Abschwung” getestet:

$$H_0 : \mu_{\text{Aufschwung}} \geq \mu_{\text{Abschwung}} \quad \text{vs.} \quad H_A : \mu_{\text{Aufschwung}} < \mu_{\text{Abschwung}}$$

bzw.

$$H_0 : \mu_{\text{Aufschwung}} - \mu_{\text{Abschwung}} \geq 0 \quad \text{vs.} \quad H_A : \mu_{\text{Aufschwung}} - \mu_{\text{Abschwung}} < 0$$

Übung:

2. Untersuchen Sie, ob sich die mittlere Entwicklung des privaten Verbrauchs CP91JW zwischen den Konjunkturphasen unterscheidet.

Auch hier können wir, ohne eine Verteilungsannahme zu verwenden, permutieren.

```
mdiff <- diff(mean(ZINSK ~ PHASEN, data=B3AufAb))
mdiff

## Abschwung
## 2.967468
```

```
mdiff.null <- do(1000) * diff(mean(ZINSK ~ shuffle(PHASEN), data=B3AufAb))
```

Unter der Nullhypothese der Gleichheit der Lagemaße kommt eine gleich große oder größere Differenz also

```
prop(mdiff.null$Abschwung >= mdiff)

## TRUE
## 0
```

mal vor!

Da die statistische *Signifikanz* vom Standardfehler abhängt, welcher wiederum vom Stichprobenumfang abhängt, wurde von Cohen ein Maß für die *Effektstärke*, **Cohen's d** vorgeschlagen:

$$d = \frac{\bar{x}_A - \bar{x}_B}{sd_{\text{pool}}}$$

mit

$$sd_{\text{pool}} = \sqrt{\frac{1}{n_A + n_B - 2} \left((n_1 - 1)sd_A^2 + (n_2 - 1)sd_B^2 \right)}$$

```
# Kennzahlen 1. Stichprobe
m1 <- mean(B3$ZINSK[B3$PHASEN=="Aufschwung"])
sd1 <- sd(B3$ZINSK[B3$PHASEN=="Aufschwung"])
n1 <- length(B3$ZINSK[B3$PHASEN=="Aufschwung"])

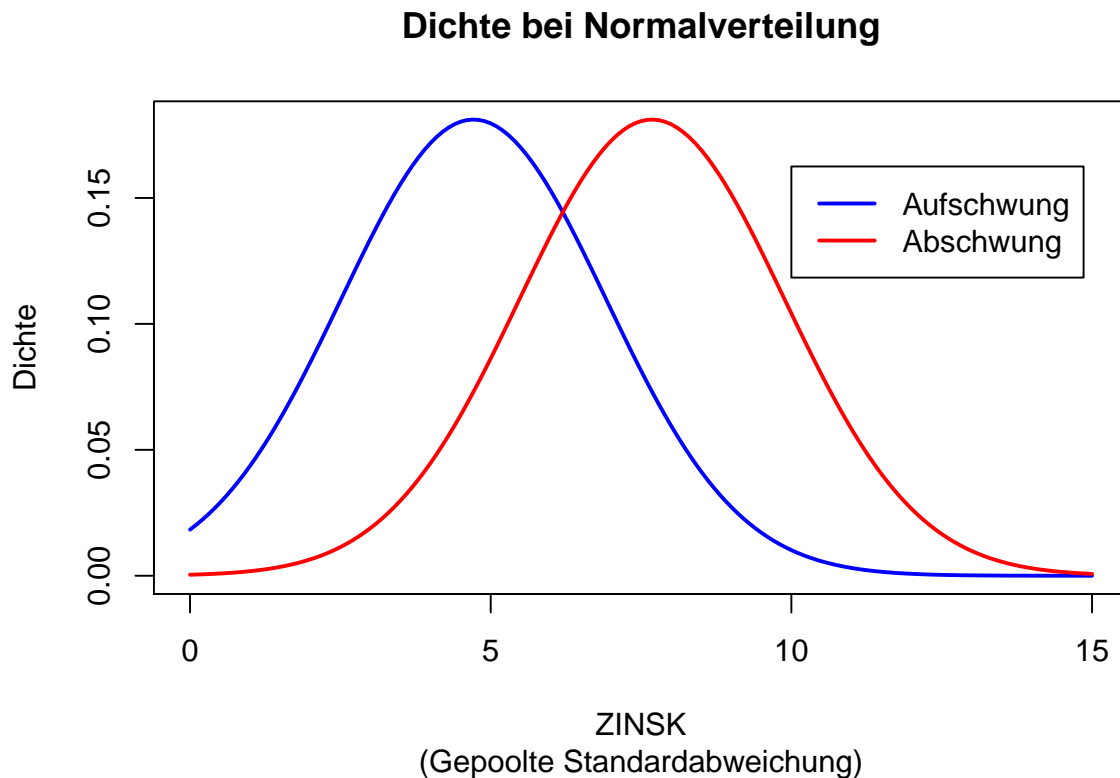
# Kennzahlen 2. Stichprobe
m2 <- mean(B3$ZINSK[B3$PHASEN=="Abschwung"])
sd2 <- sd(B3$ZINSK[B3$PHASEN=="Abschwung"])
n2 <- length(B3$ZINSK[B3$PHASEN=="Abschwung"])

# Gepoolte Standardabweichung
sdpool <- sqrt( ((n1-1)*sd1^2 + (n2-1)*sd2^2) / (n1+n2-2) )

# Cohen's d
d <- (m1-m2)/sdpool
d

## [1] -1.347291
```

Cohen's d ist ein Maß der Überlappung der Verteilungen:



Häufig werden Werte

- $|d| \leq 0.2$ als kleine
- $|d| \leq 0.5$ als mittlere
- $|d| \geq 0.8$ als große Effekte

bezeichnet.

Eine direkte Berechnung geht über das Paket `lsr`:

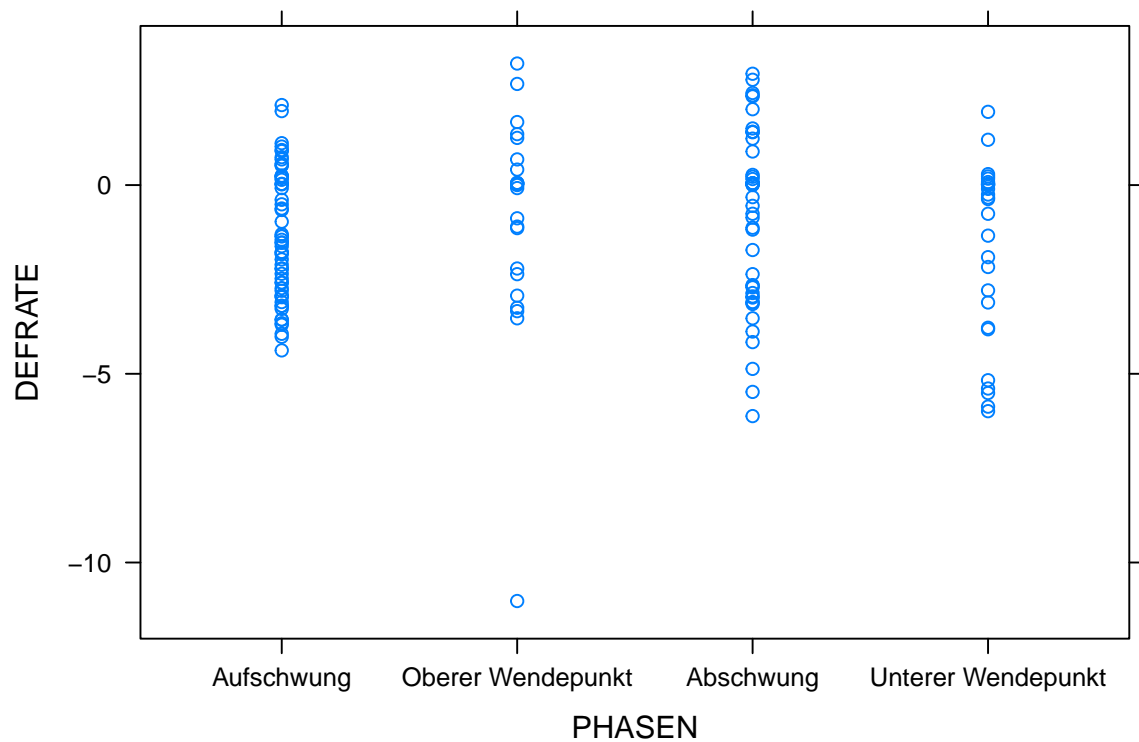
```
# Einmalig installieren:
# install.packages("lsr")
library(lsr)
cohensD(ZINSK ~ PHASEN, data=B3AufAb)
```

```
## [1] 1.347291
```

Varianzanalyse (ANOVA)

Bei mehr als zwei Gruppen funktionieren die Techniken des t-Tests nicht mehr. Um Lagemaßunterschiede zu testen, wird anstelle der Mittelwerte die Streuung verglichen: Ist die Streuung zwischen den Gruppen groß im Vergleich zur Streuung innerhalb der Gruppen?

```
xypplot (DEFRATE ~ PHASEN, data=B3)
```

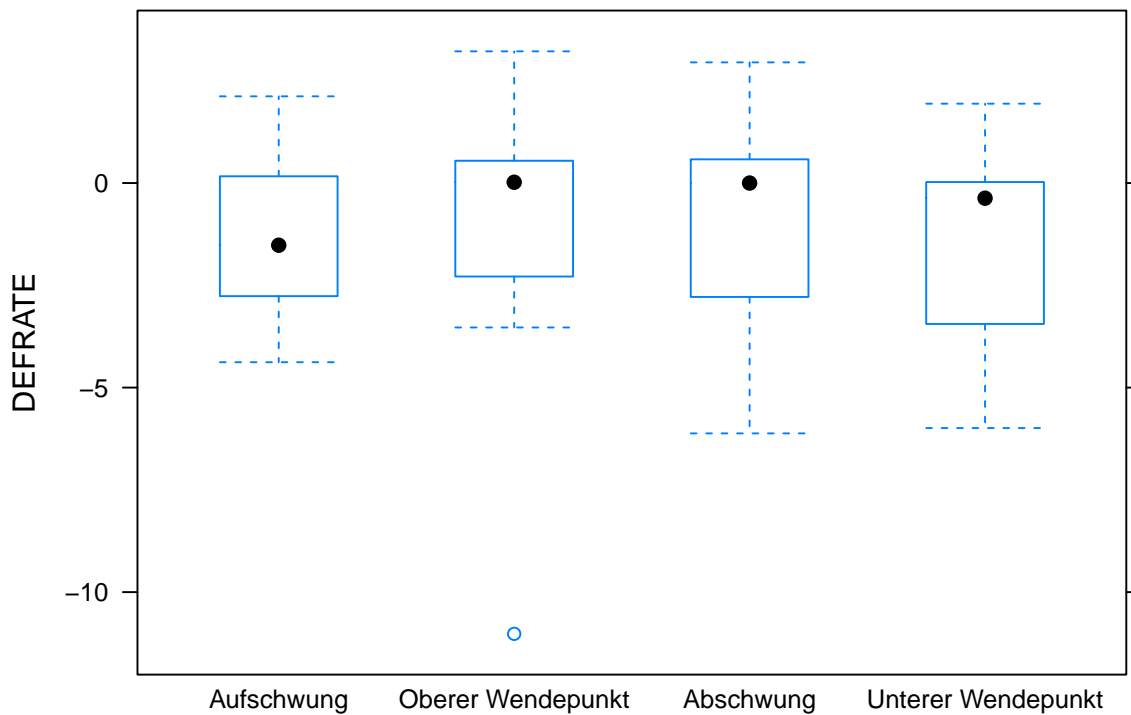


Es gilt, dass sich die Gesamtstreuung (SST) zusammensetzt aus der Streuung zwischen den Gruppen (SSG) und innerhalb der Gruppen (SSE), d. h.,

$$SST = SSG + SSE.$$

Unterscheidet sich der mittlere Anteil des Staatsdefizits $DEFRATE$ nicht zufällig zwischen den Konjunkturphasen?

```
bwplot (DEFRATE ~ PHASEN, data=B3)
```



```
favstats (DEF RATE ~ PHASEN, data=B3)
```

```
##           PHASEN      min      Q1 median      Q3      max      mean      sd
## 1      Aufschwung -4.38 -2.7650 -1.52 0.1650 2.12 -1.3394915 1.680638
## 2 Oberer Wendepunkt -11.02 -2.2475 0.02 0.4775 3.22 -0.8479167 2.836558
## 3      Abschwung -6.12 -2.7850 0.00 0.5800 2.95 -0.8380851 2.287536
## 4 Unterer Wendepunkt -5.99 -3.4450 -0.37 0.0250 1.94 -1.6548148 2.364026
##      n missing
## 1 59         0
## 2 24         0
## 3 47         0
## 4 27         0
```

Vielleicht, vielleicht nicht.

Um eine Varianzanalyse (*Analysis of Variance, ANOVA*) mit

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k$$

gegen

$$H_A : \text{Mindestens ein } \mu \text{ ist verschieden.}$$

durchzuführen kann in R u. a. der Befehl `aov` verwendet werden:

```
DEFaov <- aov(DEFRATE ~ PHASEN, data=B3)
summary(DEFaov)
```

```
##              Df Sum Sq Mean Sq F value Pr(>F)
## PHASEN          3    15.7    5.236    1.09  0.355
## Residuals     153   734.9    4.803
```

Der p-Wert des F-Tests der Nullhypothese

$$H_0 : \mu_{\text{Aufschwung}} = \mu_{\text{Oberer Wendepunkt}} = \mu_{\text{Abschwung}} = \mu_{\text{Unterer Wendepunkt}}$$

der Gleichheit der Lage ist mit 0.3552 größer als 0.05, die Nullhypothese kann also für das Staatsdefizit nicht verworfen werden.

Bei k Gruppen ist die mittlere quadratische Varianz $MSG = \frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^k n_i (\bar{x}_i - \bar{x})^2 = \underbrace{\frac{SSG}{k-1}}_{df_G}$ (n_i ist die Anzahl Beobachtungen in Gruppe i , \bar{x}_i der Gruppenmittelwert und \bar{x} der Gesamtmittelwert.) Hier also $MSG = 5.2361$. Der mittlere quadratische Fehler, MSE , ist dann $MSE = \frac{1}{n-k} \sum_{i=1}^k (n_i - 1) sd_i^2 = \underbrace{\frac{SSE}{n-k}}_{df_E}$,

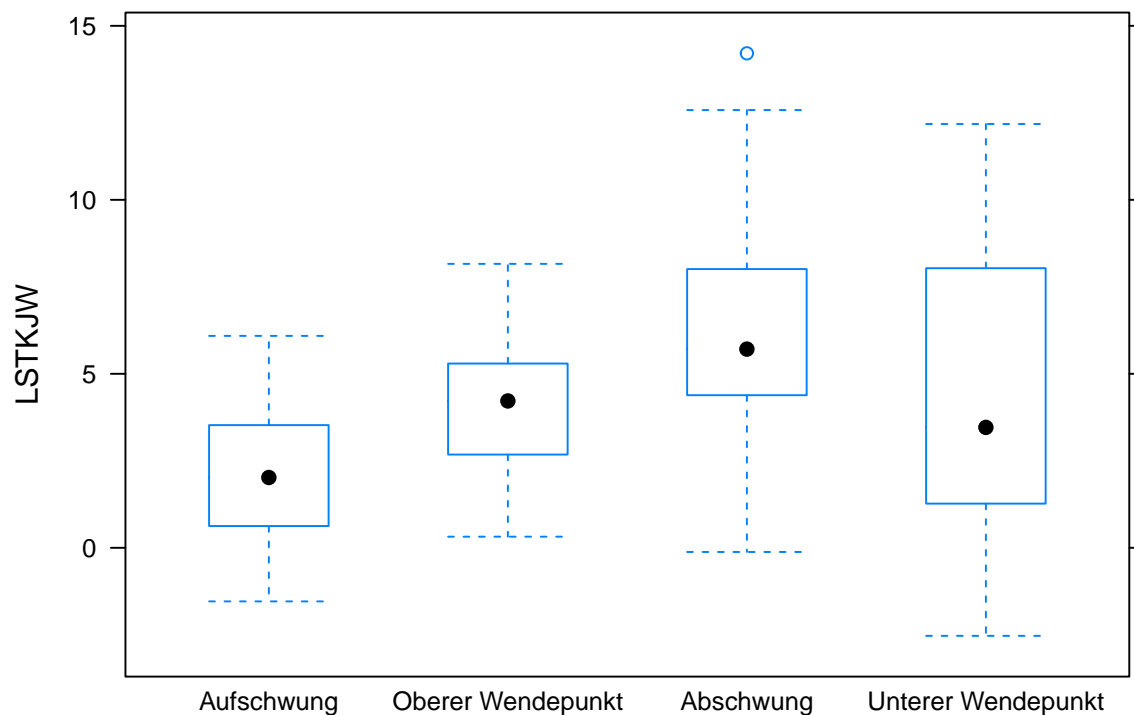
mit sd_i der Standardabweichung in Gruppe i . Hier: $MSE = 4.8032$.

Der Wert der Teststatistik F ist dann

$$F = \frac{MSG}{MSE} = \frac{5.2361}{4.8032} = 1.0901.$$

Unterscheidet sich das Lagemaß der Veränderung der Lohnstückkosten LSTKJW nicht zufällig?

```
bwplot(LSTKJW ~ PHASEN, data=B3)
```



```
favstats(LSTKJW ~ PHASEN, data=B3)
```

```
##          PHASEN   min    Q1 median    Q3   max    mean    sd   n
## 1      Aufschwung -1.54 0.625  2.02 3.5250  6.09 2.111017 1.837423 59
## 2 Oberer Wendepunkt 0.32 2.840  4.22 5.2225  8.16 4.195833 2.074516 24
## 3      Abschwung -0.12 4.385  5.71 8.0100 14.21 6.291064 3.122604 47
## 4 Unterer Wendepunkt -2.53 1.270  3.46 8.0350 12.18 4.249630 4.449861 27
## missing
## 1      0
## 2      0
## 3      0
## 4      0
```

```
LSTKaov <- aov(LSTKJW ~ PHASEN, data=B3)
```

```
summary(LSTKaov)
```

```
##          Df Sum Sq Mean Sq F value    Pr(>F)
## PHASEN      3  459.5   153.15   18.62 2.37e-10 ***
## Residuals 153 1258.2     8.22
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

Die Nullhypothese der Gleichheit wird hier also verworfen. Interessanterweise unterscheiden sich insbesondere die Lagemaße von Auf- und Abschwung, die beiden Wendepunkte liegen dazwischen.

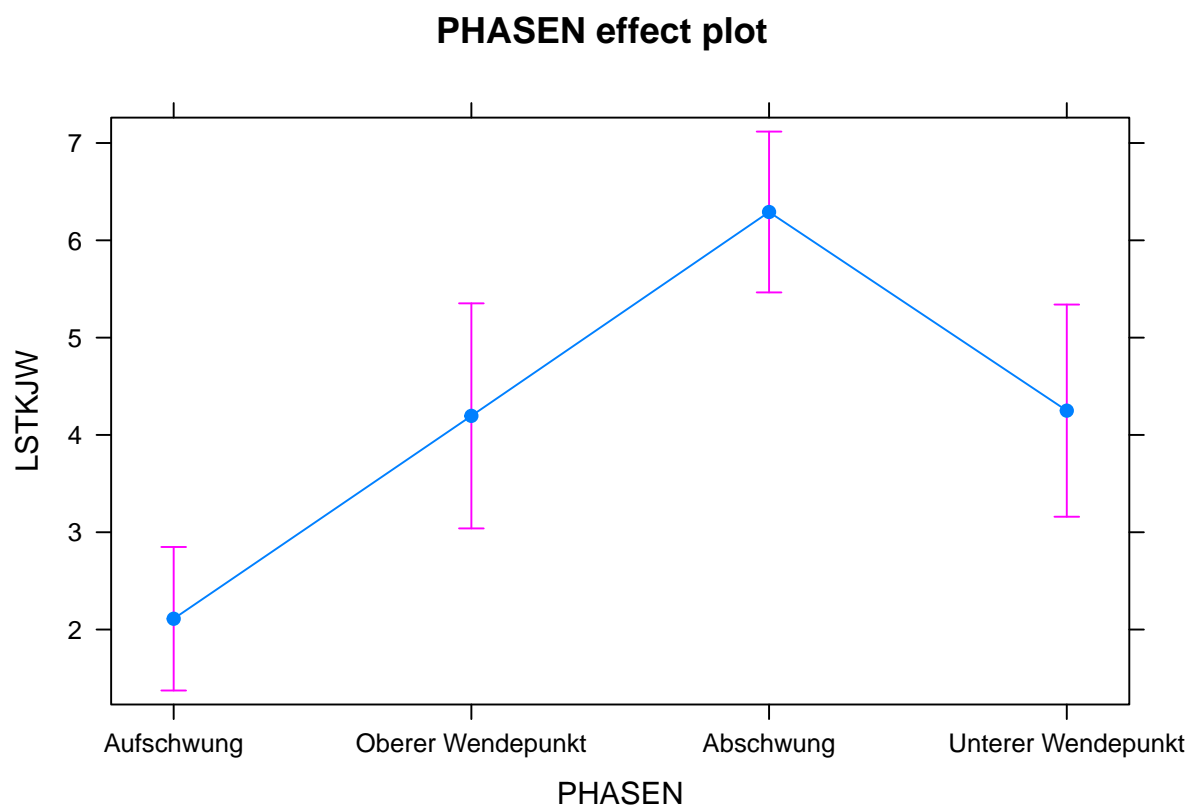
Im Paket `effects` gibt es übrigens eine schöne Plotfunktion für die Effekte:

```
# Einmalig installieren:
# install.packages("effects")
library(effects)

## Loading required package: carData

## Use the command
##   lattice::trellis.par.set(effectsTheme())
##   to customize lattice options for effects plots.
## See ?effectTheme for details.

plot(allEffects(LSTKaov))
```



Neben dem arithmetischen Mittelwert (Punktschätzer) wird in der Standardeinstellung das 95 % Konfidenzintervall eingezeichnet.

Um nach einer signifikanten Varianzanalyse sogenannte Post-Hoc Analysen durchzuführen (z. B. welche der paarweisen Vergleiche sind signifikant?) kann die Funktion `TukeyHSD()` (Tukey's "Honest Significant Difference") verwendet werden. Aufgrund des multiplen Testproblems (Kumulierung Fehler 1. Art) müssen die p-Werte angepasst werden.

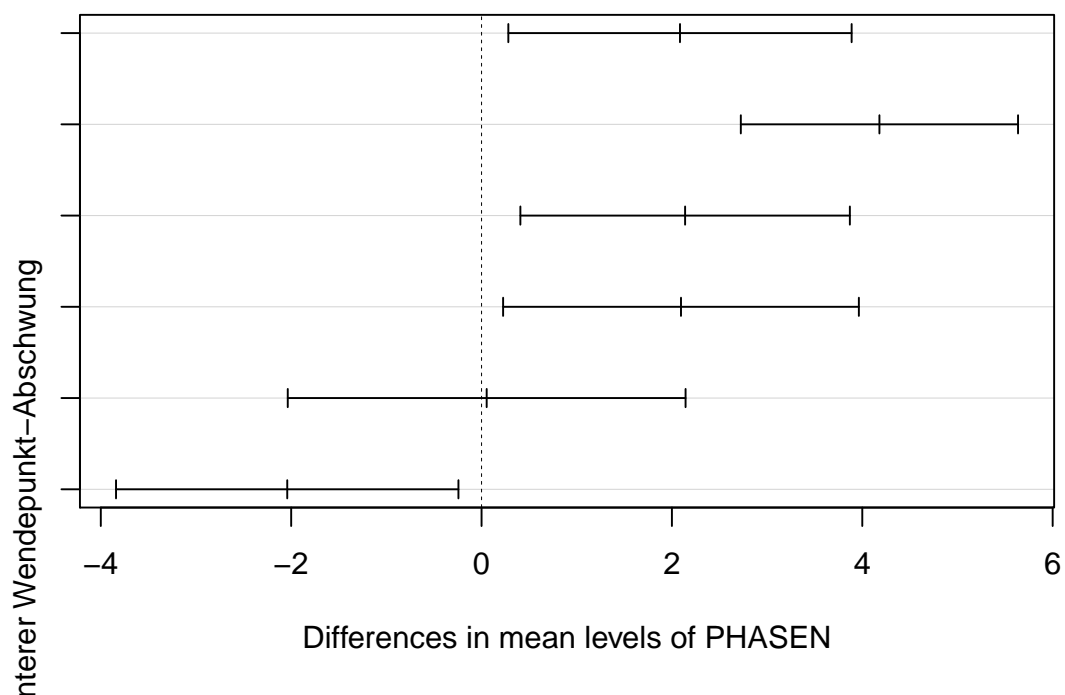
```
LSTKposthoc <- TukeyHSD(LSTKaov)
LSTKposthoc
```

```
## Tukey multiple comparisons of means
```

```
##      95% family-wise confidence level
##
## Fit: aov(formula = LSTKJW ~ PHASEN, data = B3)
##
## $PHASEN
##
##              diff          lwr          upr
## Oberer Wendepunkt-Aufschwung      2.0848164  0.2814507  3.888182
## Abschwung-Aufschwung              4.1800469  2.7237350  5.636359
## Unterer Wendepunkt-Aufschwung      2.1386127  0.4079289  3.869296
## Abschwung-Oberer Wendepunkt      2.0952305  0.2264813  3.963980
## Unterer Wendepunkt-Oberer Wendepunkt  0.0537963 -2.0358558  2.143448
## Unterer Wendepunkt-Abschwung     -2.0414342 -3.8401454 -0.242723
##
##              p adj
## Oberer Wendepunkt-Aufschwung      0.0163388
## Abschwung-Aufschwung              0.0000000
## Unterer Wendepunkt-Aufschwung      0.0087085
## Abschwung-Oberer Wendepunkt      0.0212622
## Unterer Wendepunkt-Oberer Wendepunkt  0.9998923
## Unterer Wendepunkt-Abschwung      0.0191825
```

```
plot(LSTKposthoc)
```

95% family-wise confidence level



Hinweis: Da die einzelnen Faktorstufen hier unbalanciert sind (d .h., unterschiedliche Stichprobenumfänge

haben) ist das Ergebnis hier nicht exakt.

Übung:

3. Gibt es nicht zufällige Lageunterschiede bei der Änderung der Erwerbstätigen EWAJW zwischen den Konjunkturphasen?

Erweiterung: Mehrfaktorielle Varianzanalyse mit Wechselwirkung

Betrachten wir noch einmal den *tips* Datensatz aus *Bryant, P. G. and Smith, M (1995) Practical Data Analysis: Case Studies in Business Statistics. Homewood, IL: Richard D. Irwin Publishing.*

Sofern noch nicht geschehen, können Sie in hier als csv-Datei herunterladen:

```
download.file("https://goo.gl/whKjnl", destfile = "tips.csv")
```

Das Einlesen der Daten in R erfolgt, sofern die Daten im Arbeitsverzeichnis liegen, über:

```
tips <- read.csv2("tips.csv")
```

Um zu schauen, inwieweit das Trinkgeld vom Geschlecht *und* dem Rauchverhalten abhängt, kann folgende Analyse durchgeführt werden:

```
favstats(tip ~ sex + smoker, data=tips)
```

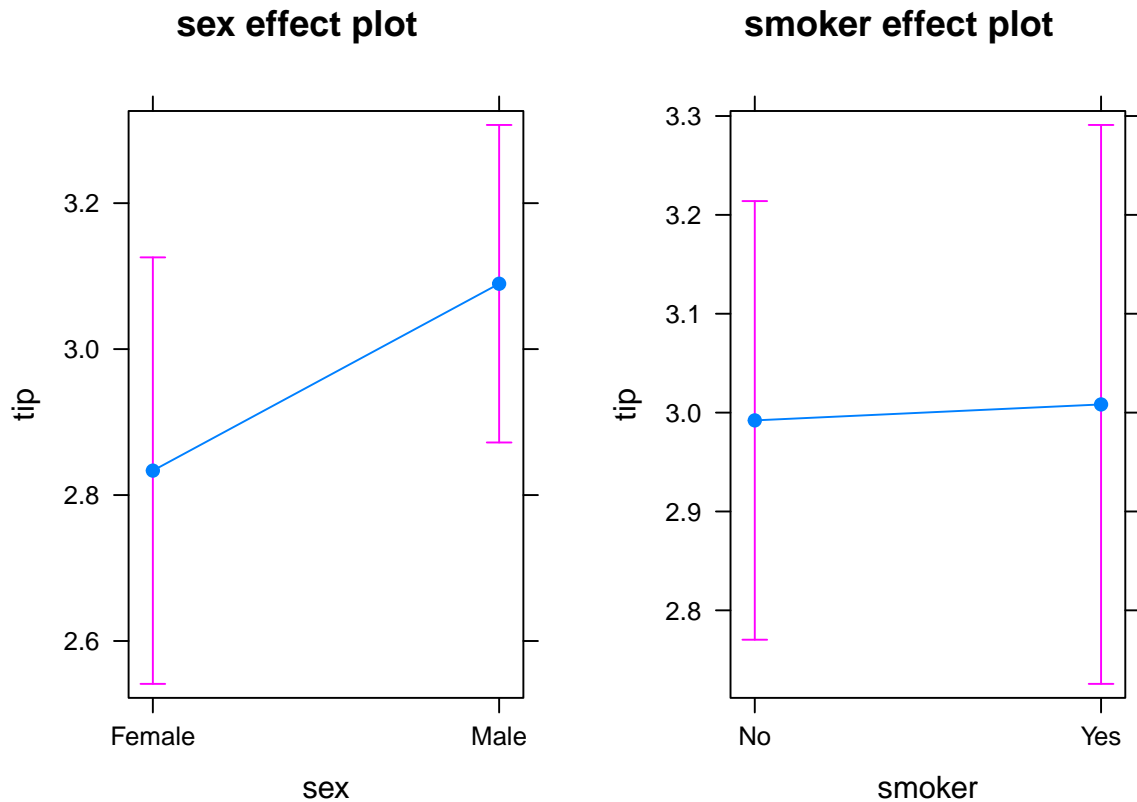
```
## sex.smoker min Q1 median Q3 max mean sd n missing
## 1 Female.No 1.00 2 2.68 3.4375 5.2 2.773519 1.128425 54 0
## 2 Male.No 1.25 2 2.74 3.7100 9.0 3.113402 1.489559 97 0
## 3 Female.Yes 1.00 2 2.88 3.5000 6.5 2.931515 1.219916 33 0
## 4 Male.Yes 1.00 2 3.00 3.8200 10.0 3.051167 1.500120 60 0
```

```
tipaov <- aov(tip ~ sex + smoker, data=tips)
```

```
summary(tipaov)
```

```
## Df Sum Sq Mean Sq F value Pr(>F)
## sex 1 3.7 3.674 1.918 0.167
## smoker 1 0.0 0.015 0.008 0.930
## Residuals 241 461.5 1.915
```

```
plot(allEffects(tipaov))
```



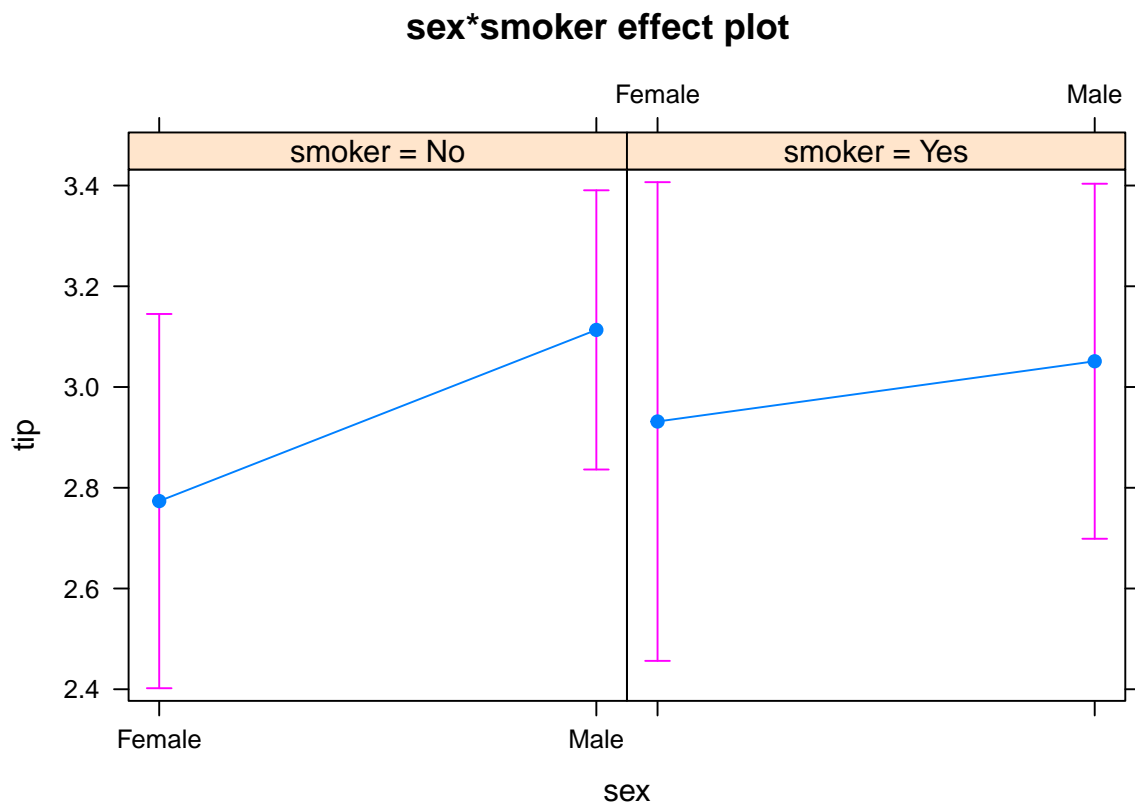
Beide Faktoren sind zum Signifikanzniveau 5% *nicht* signifikant, d. h., H_0 , dass sich die Mittelwerte in der Population nicht unterscheiden, wird nicht verworfen.

Allerdings beobachten wir etwas anderes: Während der Mittelwert des Trinkgeldes bei den Frauen bei den Rauchern größer ist, ist es bei den Männern umgekehrt. Hier könnte also eine Wechselwirkung, eine Interaktion, vorliegen. Diese wird in R über ein `:` in der Formel eingefügt:

```
tipaovvw <- aov(tip ~ sex + smoker + sex:smoker, data=tips)
summary(tipaovvw)
```

```
##           Df Sum Sq Mean Sq F value Pr(>F)
## sex         1    3.7   3.674    1.913  0.168
## smoker      1    0.0   0.015    0.008  0.930
## sex:smoker  1    0.6   0.640    0.333  0.564
## Residuals 240 460.9   1.920
```

```
plot(allEffects(tipaovvw))
```



Auch hier gilt: Mit einem p-Wert von 0.564 wird die Nullhypothese, dass in der Population keine Wechselwirkung von Geschlecht und Rauchverhalten für den Mittelwert vorliegt, nicht verworfen.

Übung: Teaching Rating

Dieser Datensatz analysiert u. a. den Zusammenhang zwischen Schönheit und Evaluierungsergebnis von Dozenten:

Hamermesh, D.S., and Parker, A. (2005). *Beauty in the Classroom: Instructors' Pulchritude and Putative Pedagogical Productivity*. *Economics of Education Review*, 24, 369–376.

Sie können ihn, sofern noch nicht geschehen, von <https://goo.gl/6Y3KoK> als csv herunterladen.

1. Ist das arithmetische Mittel der Evaluierung `eval` nicht zufällig größer als befriedigend (3)?
2. Gibt es einen nicht zufälligen Unterschied im Lagemaß der Evaluation `eval` zwischen männlichen und weiblichen Dozent/innen (`gender`)?

Literatur

- David M. Diez, Christopher D. Barr, Mine Çetinkaya-Rundel (2014): *Introductory Statistics with Randomization and Simulation*, https://www.openintro.org/stat/textbook.php?stat_book=isrs, Kapitel 4

- Nicholas J. Horton, Randall Pruim, Daniel T. Kaplan (2015): Project MOSAIC Little Books *A Student's Guide to R*, <https://github.com/ProjectMOSAIC/LittleBooks/raw/master/StudentGuide/MOSAIC-StudentGuide.pdf>, Kapitel 7, 10.1
- Maïke Luhmann (2015): *R für Einsteiger*, Kapitel 13, 14
- Andreas Quatember (2010): *Statistik ohne Angst vor Formeln*, Kapitel 3.5, 3.7, 3.12
- Daniel Wollschläger (2014): *Grundlagen der Datenanalyse mit R*, Kapitel 7.2, 7.3, 7.5

Lizenz

Diese Übung wurde von Karsten Lübke entwickelt und orientiert sich an der Übung zum Buch OpenIntro von Andrew Bray, Mine Çetinkaya-Rundel und steht wie diese unter der Lizenz Creative Commons Attribution-ShareAlike 3.0 Unported.

Versionshinweise:

- Datum erstellt: 2017-09-16
- R Version: 3.4.1
- `mosaic` Version: 1.1.0

Kapitel 5: Einführung Lineare Regression

Einfache Regression

Wir werden weiter den *tips* Datensatz aus *Bryant, P. G. and Smith, M (1995) Practical Data Analysis: Case Studies in Business Statistics. Homewood, IL: Richard D. Irwin Publishing* analysieren.

Sofern noch nicht geschehen, können Sie in hier als csv-Datei herunterladen:

```
download.file("https://goo.gl/whKjnl", destfile = "tips.csv")
```

Das Einlesen erfolgt, sofern die Daten im Arbeitsverzeichnis liegen, über:

```
tips <- read.csv2("tips.csv")
```

Zur Unterstützung der Analyse wird (wieder) *mosaic* verwendet; außerdem laden wir *ggplot2* für *qplot*:

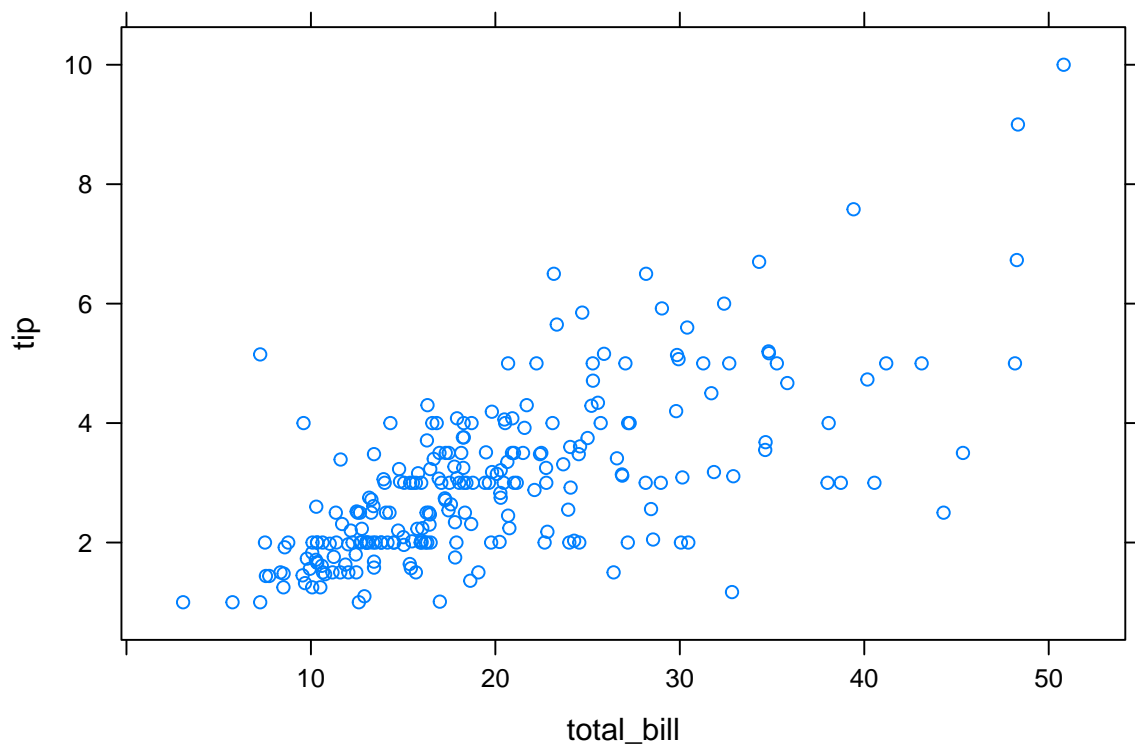
```
library(mosaic)
```

Wie hängen Trinkgeldhöhe *tip* und Rechnungshöhe *total_bill* zusammen? Kann die Höhe des Trinkgeldes als *lineare* Funktion der Rechnungshöhe linear modelliert werden?

$$tip_i = \beta_0 + \beta_1 \cdot total_bill_i + \epsilon_i$$

Zunächst eine visuelle Analyse mi Hilfe eines Scatterplots (Streudiagramms).

```
xyplot(tip ~ total_bill, data=tips)
```



Es scheint einen positiven Zusammenhang zu geben. Modellieren wir die **abhängige** Variable `tip` (inhaltliche Entscheidung!) als lineare Funktion der **unabhängigen** Variable `total_bill`:

```
LinMod.1 <- lm(tip ~ total_bill, data=tips)
summary(LinMod.1)
```

```
##
## Call:
## lm(formula = tip ~ total_bill, data = tips)
##
## Residuals:
##      Min       1Q   Median       3Q      Max
## -3.1982 -0.5652 -0.0974  0.4863  3.7434
##
## Coefficients:
##              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept)  0.920270   0.159735   5.761 2.53e-08 ***
## total_bill   0.105025   0.007365  14.260 < 2e-16 ***
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 1.022 on 242 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.4566, Adjusted R-squared:  0.4544
```

```
## F-statistic: 203.4 on 1 and 242 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

Der Achsenabschnitt (intercept) wird mit 0.92 geschätzt, die Steigung in Richtung `total_bill` mit 0.11: steigt `total_bill` um einen Dollar, steigt im *Durchschnitt* `tip` um 0.11\$. Die (Punkt-)Prognose für `tip` lautet also

$$\text{tip} = 0.92 + 0.11 * \text{total_bill}$$

Die Koeffizienten werden dabei so geschätzt, dass $\sum \epsilon_i^2$ minimiert wird. Dies wird auch als *Kleinste Quadrate* (*Ordinary Least Squares, OLS*) Kriterium bezeichnet. Eine robuste Regression ist z. B. mit der Funktion `rlm()` aus dem Paket MASS möglich.

In mosaic kann ein solches Modell einfach als neue Funktion definiert werden:

```
LinMod.1Fun <- makeFun(LinMod.1)
```

Die (Punkt-)Prognose für die Trinkgeldhöhe, bspw. für eine Rechnung von 30\$ kann dann berechnet werden

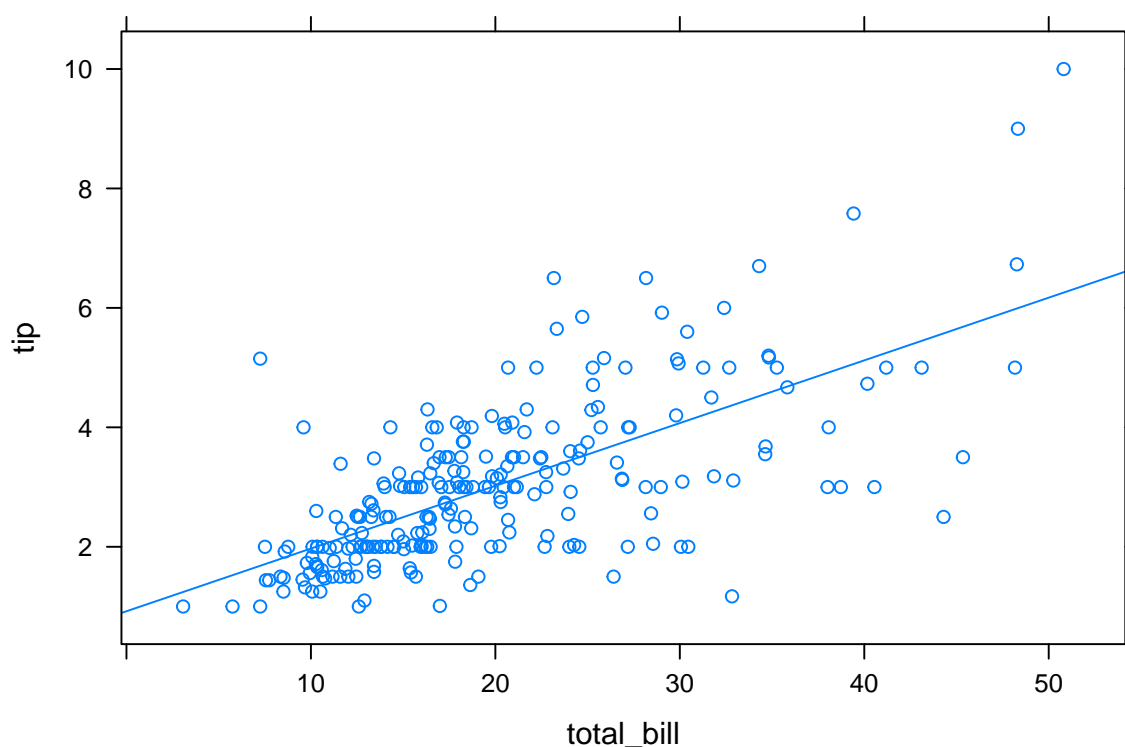
```
LinMod.1Fun(total_bill=30)
```

```
##          1
## 4.071005
```

also 4.07\$.

In mosaic kann die Modellgerade über

```
plotModel(LinMod.1)
```



betrachtet werden. Das **Bestimmtheitsmaß**, d. h. der Anteil der im Modell erklärten Varianz,

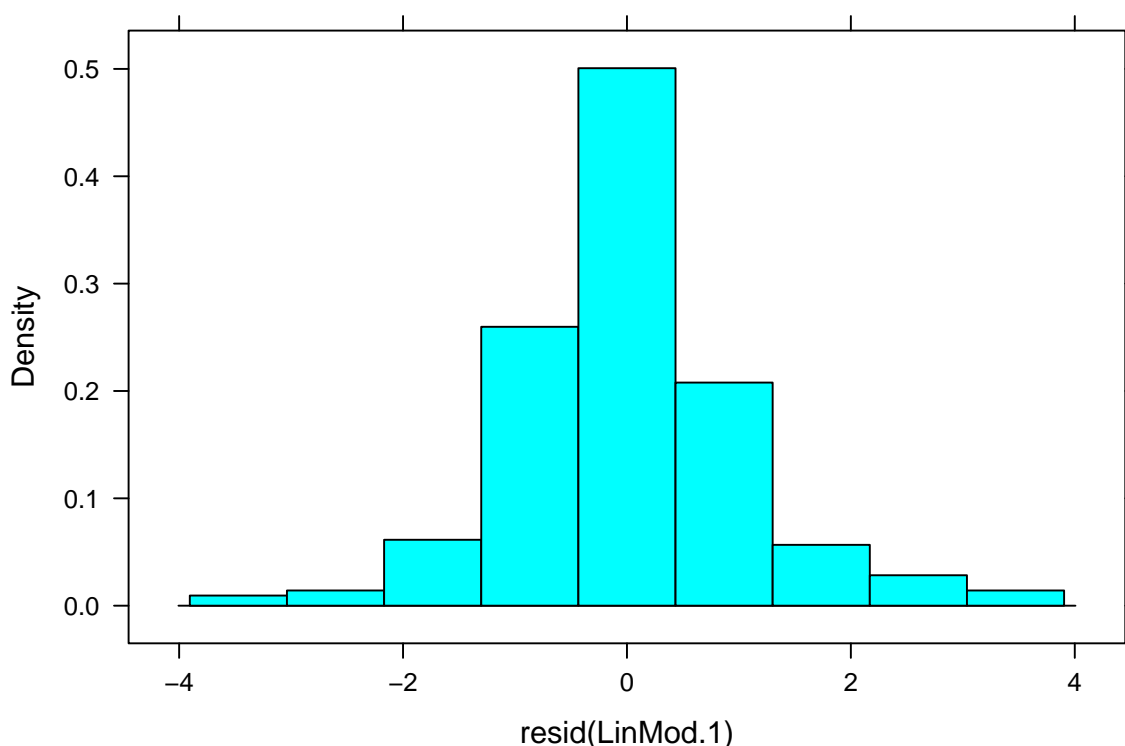
$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}$$

ist mit 0.46 “ok”: 46 % der Variation des Trinkgeldes wird im Modell erklärt.

Aber wie sieht es mit den Annahmen aus?

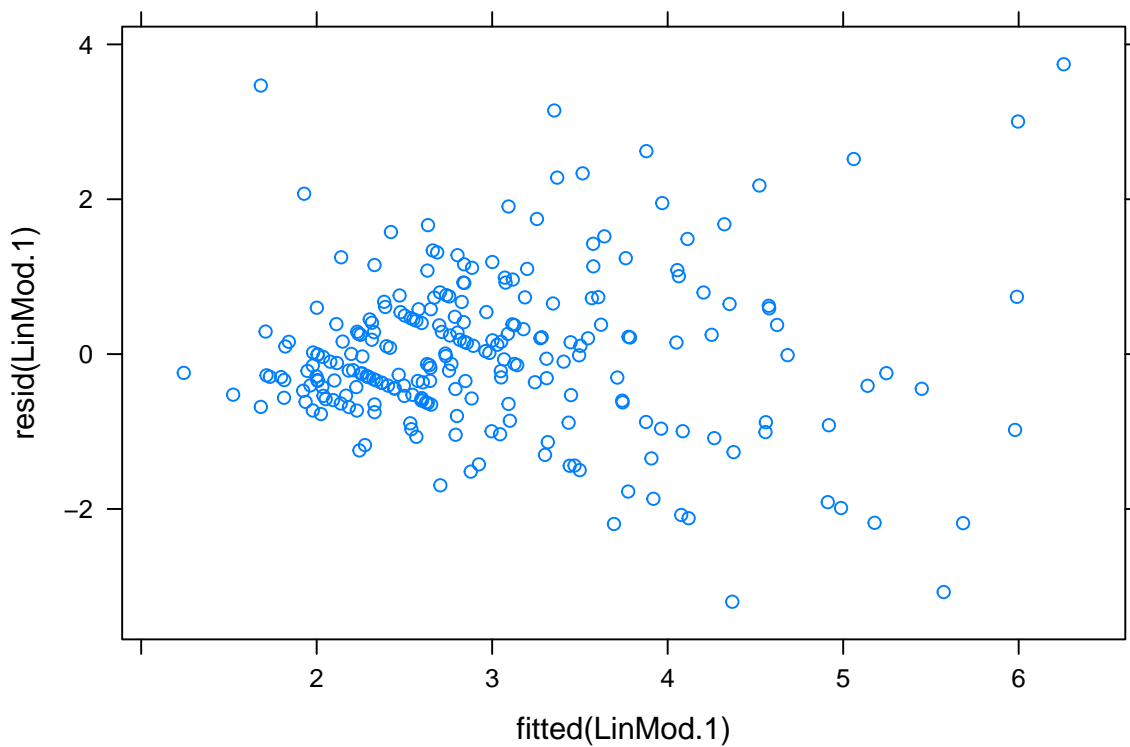
- Die Linearität des Zusammenhangs haben wir zu Beginn mit Hilfe des Scatterplots “überprüft”.
- Zur Überprüfung der Normalverteilung der Residuen zeichnen wir ein Histogramm. Die Residuen können über den Befehl `resid()` aus einem Linearen Modell extrahiert werden. Hier scheint es zu passen:

```
histogram( ~ resid(LinMod.1) )
```



- Konstante Varianz: Dies kann z. B. mit einem Scatterplot der Residuen auf der y-Achse und den angepassten Werten auf der x-Achse überprüft werden. Die angepassten Werte werden über den Befehl `fitted()` extrahiert. Diese Annahme scheint verletzt zu sein (siehe unten): je größer die Prognose des Trinkgeldes, desto größer wirkt die Streuung der Residuen. Dieses Phänomen ließ sich schon aus dem ursprünglichen Scatterplot `xyplot(tip ~ total_bill, data=tips)` erahnen. Das ist auch inhaltlich plausibel: je höher die Rechnung, desto höher die Varianz beim Trinkgeld. Die Verletzung dieser Annahme beeinflusst *nicht* die Schätzung der Steigung, sondern die Schätzung des Standardfehlers, also des p-Wertes des Hypothesentests, d. h., $H_0 : \beta_1 = 0$.

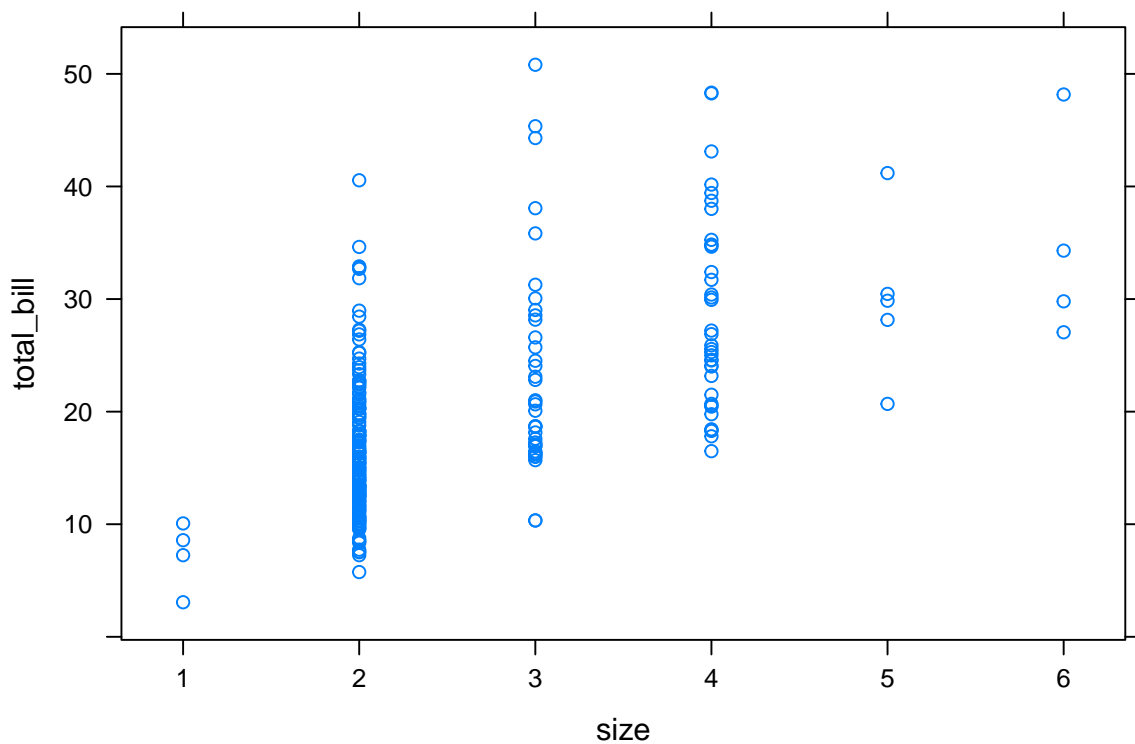

```
xyplot(resid(LinMod.1) ~ fitted(LinMod.1))
```



- Extreme Ausreißer: Wie am Plot der Linearen Regression `plotModel(LinMod.1)` erkennbar, gibt es vereinzelt Ausreißer nach oben, allerdings ohne einen extremen Hebel.

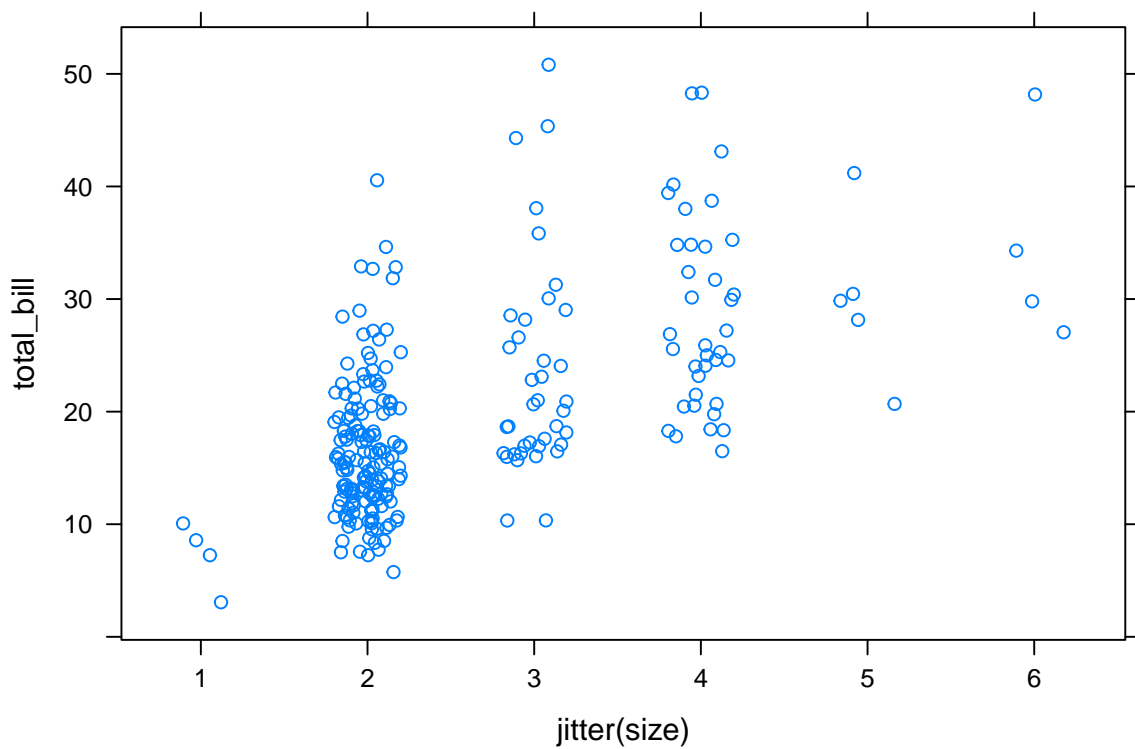
Hängt die Rechnungshöhe von der Anzahl der Personen ab? Bestimmt, aber wie?

```
xyplot(total_bill ~ size, data=tips)
```



Da bei diskreten metrischen Variablen (hier `size`) Punkte übereinander liegen können, sollte man “jittern”, d. h., eine (kleine) Zufallszahl addieren:

```
set.seed(1896) # Zufallszahlengenerator setzen
xyplot(total_bill ~ jitter(size), data=tips)
```



Übung:

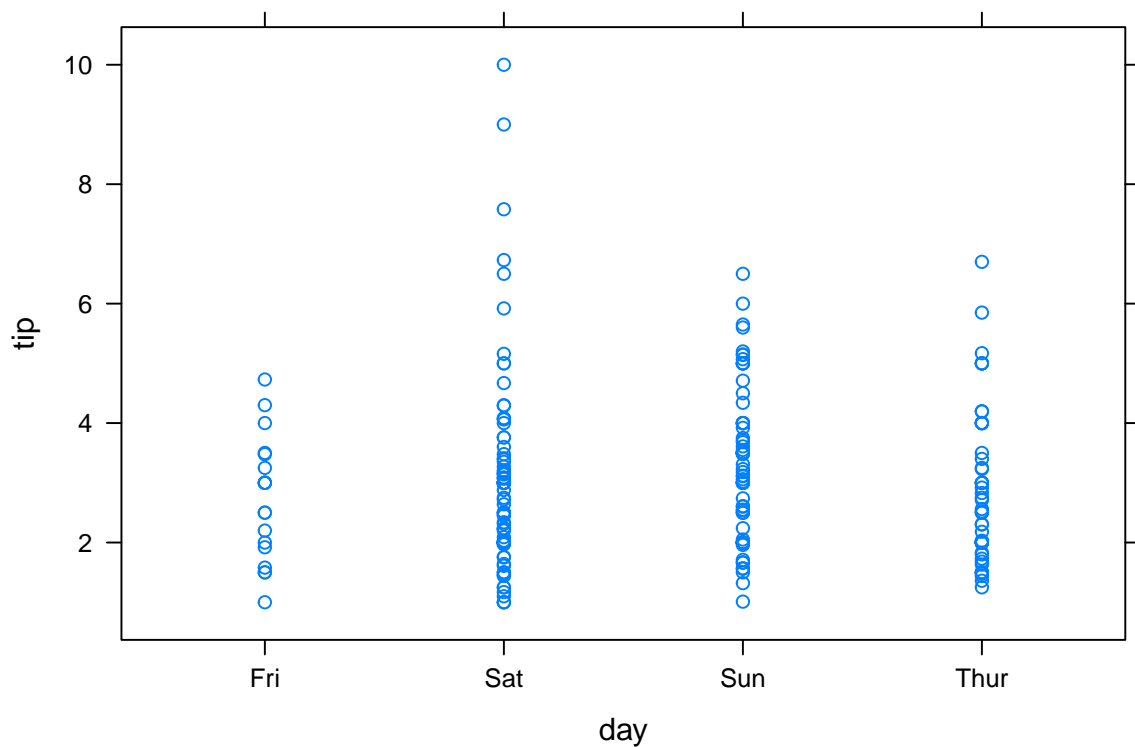
1. Um wie viel Dollar steigt im Durchschnitt das Trinkgeld, wenn eine Person mehr am Tisch sitzt?
 2. Für wie aussagekräftig halten Sie Ihr Ergebnis aus 1.?
-

Regression mit kategorialen Werten

Der Wochentag `day` ist eine kategoriale Variable. Wie sieht eine Regression des Trinkgeldes darauf aus?

Zunächst grafisch:

```
xyplot(tip ~ day, data=tips)
```



Und als Lineares Modell:

```
LinMod.2 <- lm(tip ~ day, data=tips)
summary(LinMod.2)
```

```
##
## Call:
## lm(formula = tip ~ day, data = tips)
##
## Residuals:
##      Min       1Q   Median       3Q      Max
## -2.2451 -0.9931 -0.2347  0.5382  7.0069
##
## Coefficients:
##              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept)  2.73474    0.31612   8.651 7.46e-16 ***
## daySat       0.25837    0.34893   0.740  0.460
## daySun       0.52039    0.35343   1.472  0.142
## dayThur      0.03671    0.36132   0.102  0.919
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 1.378 on 240 degrees of freedom
```

```
## Multiple R-squared:  0.02048,    Adjusted R-squared:  0.008232
## F-statistic: 1.672 on 3 and 240 DF,  p-value: 0.1736
```

Die im Modell angegebenen Schätzwerte sind die Änderung der Trinkgeldprognose, wenn z. B. der Tag ein Samstag (daySat) im Vergleich zu einer Referenzkategorie. Dies ist in R das erste Element des Vektors der Faktorlevel. Welcher dies ist ist über den Befehl `levels()` zu erfahren

```
levels(tips$day)
```

```
## [1] "Fri" "Sat" "Sun" "Thur"
```

hier also Fri (aufgrund der standardmäßig aufsteigenden alphanumerischen Sortierung). Dies kann über `relevel()` geändert werden. Soll z. B. die Referenz der Donnerstag, Thur sein:

```
tips$day <- relevel(tips$day, ref = "Thur")
levels(tips$day)
```

```
## [1] "Thur" "Fri" "Sat" "Sun"
```

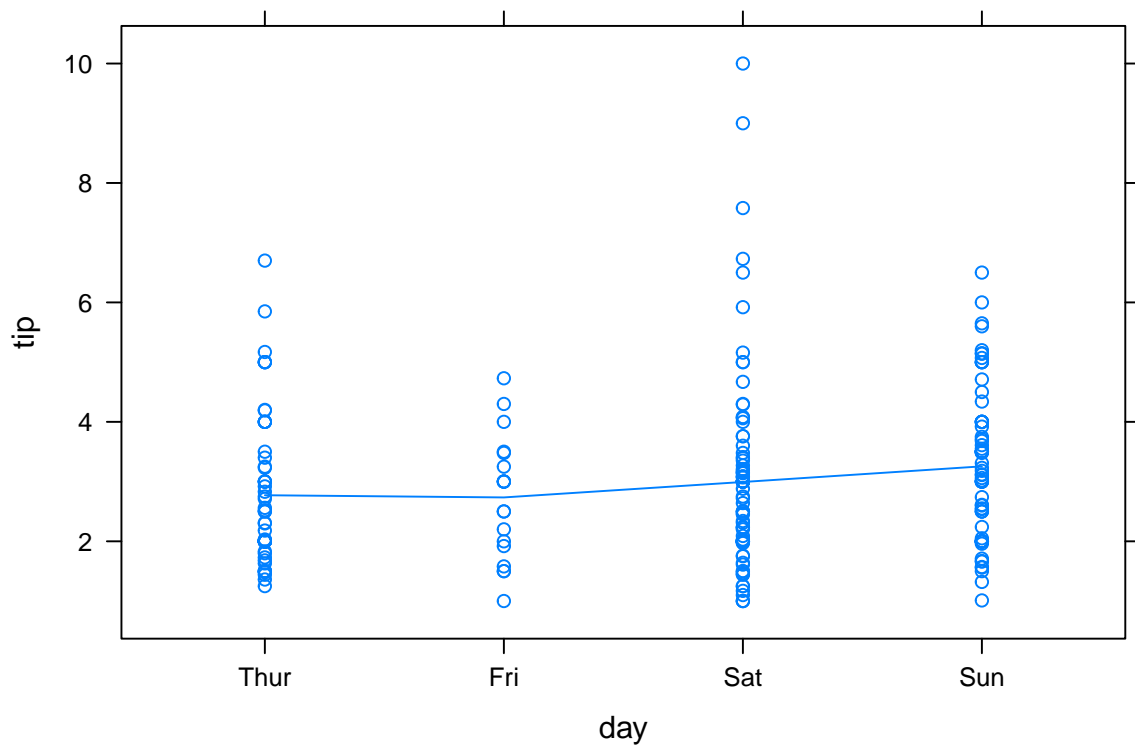
Das Modell ändert sich entsprechend:

```
LinMod.3 <- lm(tip ~ day, data=tips)
summary(LinMod.3)
```

```
##
## Call:
## lm(formula = tip ~ day, data = tips)
##
## Residuals:
##      Min       1Q   Median       3Q      Max
## -2.2451 -0.9931 -0.2347  0.5382  7.0069
##
## Coefficients:
##              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept)   2.77145     0.17500  15.837  <2e-16 ***
## dayFri        -0.03671     0.36132  -0.102   0.9191
## daySat         0.22165     0.22902   0.968   0.3341
## daySun         0.48368     0.23581   2.051   0.0413 *
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 1.378 on 240 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.02048,    Adjusted R-squared:  0.008232
## F-statistic: 1.672 on 3 and 240 DF,  p-value: 0.1736
```

sowie als Plot:

```
plotModel(LinMod.3)
```



Eine Alternative zu `relevel()` zur Bestimmung der Referenzkategorie ist es, innerhalb von `factor()` die Option `levels=` direkt in der gewünschten Sortierung zu setzen.

```
day <- factor(tips$day, levels=c("Thur", "Fri", "Sat", "Sun"))
```

Die (Punkt-)Prognose für die Trinkgeldhöhe, bspw. an einen Freitag kann dann berechnet werden

```
LinMod.3Fun <- makeFun(LinMod.3)
```

```
LinMod.3Fun(day="Fri")
```

```
##          1
## 2.734737
```

Übung:

3. Wie verändert sich die Rechnungshöhe im Durchschnitt, wenn die Essenszeit Dinner statt Lunch ist?
 4. Wie viel % der Variation der Rechnungshöhe können Sie durch die Essenszeit modellieren?
-

Multivariate Regression

Aber wie wirken sich die Einflussgrößen *zusammen* auf das Trinkgeld aus?

```
LinMod.4 <- lm(tip ~ total_bill + size + sex + smoker + day + time, data=tips)
summary(LinMod.4)
```

```
##
## Call:
## lm(formula = tip ~ total_bill + size + sex + smoker + day + time,
##     data = tips)
##
## Residuals:
##      Min       1Q   Median       3Q      Max
## -2.8475 -0.5729 -0.1026  0.4756  4.1076
##
## Coefficients:
##              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept)  0.641558   0.497586   1.289   0.1985
## total_bill   0.094487   0.009601   9.841 <2e-16 ***
## size         0.175992   0.089528   1.966  0.0505 .
## sexMale      -0.032441   0.141612  -0.229  0.8190
## smokerYes    -0.086408   0.146587  -0.589  0.5561
## dayFri       0.162259   0.393405   0.412  0.6804
## daySat       0.040801   0.470604   0.087  0.9310
## daySun       0.136779   0.471696   0.290  0.7721
## timeLunch    0.068129   0.444617   0.153  0.8783
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 1.024 on 235 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.4701, Adjusted R-squared:  0.452
## F-statistic: 26.06 on 8 and 235 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

Interessant sind die negativen Vorzeichen vor den Schätzwerten für `sexMale` und `smokerYes` – anscheinend geben Männer und Raucher weniger Trinkgeld, wenn alle anderen Faktoren konstant bleiben. Bei einer rein univariaten Betrachtung wäre etwas anderes herausgekommen.

```
summary(lm(tip ~ sex, data=tips))
```

```
##
## Call:
## lm(formula = tip ~ sex, data = tips)
##
```

```
## Residuals:
##      Min       1Q   Median       3Q      Max
## -2.0896 -1.0896 -0.0896  0.6666  6.9104
##
## Coefficients:
##              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept)   2.8334      0.1481  19.137  <2e-16 ***
## sexMale       0.2562      0.1846   1.388   0.166
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 1.381 on 242 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.007896,    Adjusted R-squared:  0.003797
## F-statistic: 1.926 on 1 and 242 DF,  p-value: 0.1665
```

```
summary(lm(tip ~ smoker, data=tips))
```

```
##
## Call:
## lm(formula = tip ~ smoker, data = tips)
##
## Residuals:
##      Min       1Q   Median       3Q      Max
## -2.0087 -0.9936 -0.1003  0.5580  6.9913
##
## Coefficients:
##              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept)   2.99185      0.11283  26.517  <2e-16 ***
## smokerYes     0.01686      0.18276   0.092   0.927
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 1.386 on 242 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  3.515e-05,    Adjusted R-squared:  -0.004097
## F-statistic: 0.008506 on 1 and 242 DF,  p-value: 0.9266
```

Diese *Umkehrung* des modellierten Effektes liegt daran, dass es auch einen positiven Zusammenhang zur Rechnungshöhe gibt:

```
summary(lm(total_bill ~ sex, data=tips))
```

```
##
## Call:
```



```
## lm(formula = total_bill ~ sex, data = tips)
##
## Residuals:
##      Min       1Q   Median       3Q      Max
## -14.99   -6.02   -1.94    3.99   30.07
##
## Coefficients:
##              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept)  18.0569     0.9463  19.081  <2e-16 ***
## sexMale       2.6872     1.1797   2.278   0.0236 *
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 8.827 on 242 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.02099,    Adjusted R-squared:  0.01694
## F-statistic: 5.188 on 1 and 242 DF,  p-value: 0.02361
```

```
summary(lm(total_bill ~ smoker, data=tips))
```

```
##
## Call:
## lm(formula = total_bill ~ smoker, data = tips)
##
## Residuals:
##      Min       1Q   Median       3Q      Max
## -17.686   -6.459   -1.888    4.583   30.054
##
## Coefficients:
##              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept)  19.1883     0.7233  26.529  <2e-16 ***
## smokerYes     1.5681     1.1716   1.338   0.182
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 8.888 on 242 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.007348,    Adjusted R-squared:  0.003246
## F-statistic: 1.791 on 1 and 242 DF,  p-value: 0.182
```

Im vollem Modell `LinMod.4` sind alle unabhängigen Variablen berücksichtigt, die Koeffizienten beziehen sich dann immer auf: gegeben, die anderen Variablen bleiben konstant, d. h. *ceteris paribus*.

Vergleichen wir mal zwei Modelle:

```

LinMod.5a <- lm(tip ~ sex, data=tips)
coef(LinMod.5a) # Koeffizienten extrahieren

## (Intercept)      sexMale
##    2.8334483    0.2561696

LinMod.5b <- lm(tip ~ sex + total_bill, data=tips)
coef(LinMod.5b) # Koeffizienten extrahieren

## (Intercept)      sexMale total_bill
##    0.93327849 -0.02660871  0.10523236

```

Ohne die Berücksichtigung der **Kovariablen/Störvariablen** Rechnungshöhe geben Male ein um im Durchschnitt 0.26\$ *höheres* Trinkgeld, bei Kontrolle, d. h. gleicher Rechnungshöhe, ein um 0.03\$ *niedrigeres* Trinkgeld als die Referenzklasse Female (`levels(tips$sex)[1]`).

Inferenz in der linearen Regression

Kehren wir noch einmal zur multivariaten Regression (LinMod.4) zurück.

```

summary(LinMod.4)

##
## Call:
## lm(formula = tip ~ total_bill + size + sex + smoker + day + time,
##     data = tips)
##
## Residuals:
##      Min       1Q   Median       3Q      Max
## -2.8475 -0.5729 -0.1026  0.4756  4.1076
##
## Coefficients:
##              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept)  0.641558   0.497586   1.289   0.1985
## total_bill   0.094487   0.009601   9.841 <2e-16 ***
## size         0.175992   0.089528   1.966   0.0505 .
## sexMale      -0.032441   0.141612  -0.229   0.8190
## smokerYes    -0.086408   0.146587  -0.589   0.5561
## dayFri        0.162259   0.393405   0.412   0.6804
## daySat        0.040801   0.470604   0.087   0.9310
## daySun        0.136779   0.471696   0.290   0.7721
## timeLunch     0.068129   0.444617   0.153   0.8783
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

```

```
##
## Residual standard error: 1.024 on 235 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.4701, Adjusted R-squared:  0.452
## F-statistic: 26.06 on 8 and 235 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

In der 4. Spalte der mit Zeilenamen versehenen Tabelle `Coefficients` stehen die p-Werte der Nullhypothese, die unabhängige Variable hat, gegeben alle anderen Variablen im Modell, keinen linearen Einfluss auf die abhängige Variable: $H_0 : \beta_i = 0$. Zur Bestimmung des p-Wertes wird der Schätzer (Estimate) durch den Standardfehler (Std. Error) dividiert. Der resultierende t-Wert (t value) wird dann, zusammen mit der Anzahl an Freiheitsgraden zur Berechnung des p-Wertes (`Pr(>|t|)`) verwendet. Ein einfacher t-Test!

Zur schnelleren Übersicht finden sich dahinter “Sternchen” und “Punkte”, die die entsprechenden Signifikanzniveaus symbolisieren: *** bedeutet eine Irrtumswahrscheinlichkeit, Wahrscheinlichkeit für Fehler 1. Art, von unter 0.001, d. h. unter 0,1 %. ** entsprechend 1 %, * 5 % und . 10 %.

Zum Signifikanzniveau von 10 % sind hier also zwei Faktoren und der Achsenabschnitt (`(Intercept)`) signifikant – nicht notwendigerweise relevant: Rechnungshöhe `total_bill` sowie Anzahl Personen `size`. Beides wirkt sich linear positiv auf die Trinkgeldhöhe aus: Mit jedem Dollar Rechnungshöhe steigt im Mittelwert die Trinkgeldhöhe um 0.09 Dollar, mit jeder Person um 0.18 Dollar – gegeben alle anderen Faktoren bleiben konstant. Das Bestimmtheitsmaß R^2 (`Multiple R-squared:`) liegt bei 0.47, also 47 % der Variation des Trinkgeldes wird im Modell erklärt.

Außerdem wird getestet, ob alle Koeffizienten der unabhängigen Variablen gleich Null sind:

$$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_k = 0$$

Das Ergebnis des zugrundeliegenden F-Tests (vgl. Varianzanalyse) wird in der letzten Zeile angegeben (`F-Statistic`). Hier wird H_0 also verworfen.

Erweiterungen

Modellwahl

Das Modell mit allen Variablen des Datensatzes, d. h. mit 6 unabhängigen (`LinMod.4`), erklärt 47.01 % der Variation, das Modell *nur* mit der Rechnungshöhe als erklärende Variable (`LinMod.1`) schon 45.66 %, der Erklärungszuwachs liegt also gerade einmal bei 1.35 Prozentpunkten. In der Statistik ist die Wahl des *richtigen* Modells eine der größten Herausforderungen, auch deshalb, weil das wahre Modell in der Regel nicht bekannt ist und es schwer ist, die richtige Balance zwischen Einfachheit und Komplexität zu finden. Aufgrund des Zufalls kann es immer passieren, dass das Modell sich zu sehr an die *zufälligen* Daten anpasst (Stichwort: Overfitting). Es gibt unzählige Modellwahlmethoden, und leider garantiert keine, dass immer das beste Modell gefunden wird. Eine Möglichkeit ist die sogenannte Schrittweise-Rückwärtsselektion auf

Basis des Akaike-Informationskriteriums (AIC)². Diese ist nicht nur recht weit verbreitet – und liefert unter bestimmten Annahmen das “richtige” Modell – sondern in R durch den Befehl `step()` einfach umsetzbar:

```
step(LinMod.4)
```

```
## Start:  AIC=20.51
## tip ~ total_bill + size + sex + smoker + day + time
##
##           Df Sum of Sq   RSS   AIC
## - day      3     0.609 247.14 15.116
## - time     1     0.025 246.55 18.538
## - sex      1     0.055 246.58 18.568
## - smoker   1     0.365 246.89 18.874
## <none>                246.53 20.513
## - size     1     4.054 250.58 22.493
## - total_bill 1    101.595 348.12 102.713
##
## Step:  AIC=15.12
## tip ~ total_bill + size + sex + smoker + time
##
##           Df Sum of Sq   RSS   AIC
## - time     1     0.001 247.14 13.117
## - sex      1     0.042 247.18 13.157
## - smoker   1     0.380 247.52 13.490
## <none>                247.14 15.116
## - size     1     4.341 251.48 17.365
## - total_bill 1    101.726 348.86 97.232
##
## Step:  AIC=13.12
## tip ~ total_bill + size + sex + smoker
##
##           Df Sum of Sq   RSS   AIC
## - sex      1     0.041 247.18 11.157
## - smoker   1     0.379 247.52 11.491
## <none>                247.14 13.117
## - size     1     4.342 251.48 15.366
## - total_bill 1    103.327 350.46 96.350
##
## Step:  AIC=11.16
```

²siehe z. B. Rob J Hyndman & George Athanasopoulos, Forecasting: principles and practice, Kapitel 5.3: Selecting predictors, <https://www.otexts.org/fpp/5/3>

```
## tip ~ total_bill + size + smoker
##
##           Df Sum of Sq    RSS    AIC
## - smoker    1      0.376 247.55  9.528
## <none>                        247.18 11.157
## - size      1      4.344 251.52 13.408
## - total_bill 1     104.263 351.44 95.029
##
## Step:  AIC=9.53
## tip ~ total_bill + size
##
##           Df Sum of Sq    RSS    AIC
## <none>                        247.55  9.528
## - size      1      5.235 252.79 12.634
## - total_bill 1     106.281 353.83 94.685
##
## Call:
## lm(formula = tip ~ total_bill + size, data = tips)
##
## Coefficients:
## (Intercept)  total_bill      size
##    0.66894      0.09271      0.19260
```

In den letzten Zeilen der Ausgabe steht das beste Modell, das diese Methode (schrittweise, rückwärts) mit diesem Kriterium (AIC) bei diesen Daten findet (Punktpgnose, d. h. ohne Residuum):

```
tip = 0.66894 + 0.09271 * total_bill + 0.1926 * size
```

Der Ausgabe können Sie auch entnehmen, welche Variablen in welcher Reihenfolge *entfernt* wurden: Zunächst day, dann time, danach sex und schließlich smoker. Hier sind also dieselben Variablen noch im Modell, die auch in LinMod.4 signifikant zum Niveau 10% waren, eine Auswahl der dort signifikanten Variablen hätte also dasselbe Modell ergeben. Das ist häufig so, aber nicht immer!

Interaktionen

Wir haben gesehen, dass es einen Zusammenhang zwischen der Trinkgeldhöhe und der Rechnungshöhe gibt. Vielleicht unterscheidet sich der Zusammenhang je nachdem, ob geraucht wurde, d. h., vielleicht gibt es eine Interaktion (Wechselwirkung). Die kann in `lm` einfach durch ein `*` zwischen den unabhängigen Variablen modelliert werden (`a*b` entspricht in R Formeln `a+b+a:b`):

```
LinMod.6 <- lm(tip ~ smoker*total_bill, data = tips)
summary(LinMod.6)
```

```
##
## Call:
## lm(formula = tip ~ smoker * total_bill, data = tips)
##
## Residuals:
##      Min       1Q   Median       3Q      Max
## -2.6789 -0.5238 -0.1205  0.4749  4.8999
##
## Coefficients:
##              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept)    0.360069   0.202058   1.782 0.076012 .
## smokerYes      1.204203   0.312263   3.856 0.000148 ***
## total_bill     0.137156   0.009678  14.172 < 2e-16 ***
## smokerYes:total_bill -0.067566   0.014189  -4.762 3.32e-06 ***
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 0.9785 on 240 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.506, Adjusted R-squared:  0.4998
## F-statistic: 81.95 on 3 and 240 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

Der Schätzwert für die Interaktion steht bei `:`. Hier also: Wenn geraucht wurde, ist die Steigung im Durchschnitt um 6,8 Cent geringer. Aber wenn geraucht wurde, ist die Rechnung im Achsenabschnitt erstmal um 1,20\$ höher (Effekt, *ceteris paribus*). Wer will, kann ausrechnen, ab welcher Rechnungshöhe Rauchertische im Mittelwert lukrativer sind ...

Das gleiche Bild (höherer Achsenabschnitt, geringere Steigung) ergibt sich übrigens bei getrennten Regressionen:

```
lm(tip~total_bill, data=tips, subset = smoker=="Yes")
```

```
##
## Call:
## lm(formula = tip ~ total_bill, data = tips, subset = smoker ==
##      "Yes")
##
## Coefficients:
## (Intercept)  total_bill
##      1.56427      0.06959
```

```
lm(tip~total_bill, data=tips, subset = smoker=="No")
```

```
##
## Call:
```

```
## lm(formula = tip ~ total_bill, data = tips, subset = smoker ==
##      "No")
##
## Coefficients:
## (Intercept)    total_bill
##      0.3601      0.1372
```

Weitere Modellierungsmöglichkeiten

Über das Formelinterface $y \sim x$ können auch direkt z. B. Polynome modelliert werden. Hier eine quadratische Funktion:

```
summary(lm(tip~I(total_bill^2)+total_bill, data=tips))

##
## Call:
## lm(formula = tip ~ I(total_bill^2) + total_bill, data = tips)
##
## Residuals:
##      Min       1Q   Median       3Q      Max
## -3.2005 -0.5586 -0.0979  0.4838  3.7762
##
## Coefficients:
##              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept)    0.8911170   0.3467554   2.570  0.010776 *
## I(total_bill^2) -0.0000571   0.0006025  -0.095  0.924573
## total_bill      0.1078555   0.0307696   3.505  0.000544 ***
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 1.024 on 241 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.4566, Adjusted R-squared:  0.4521
## F-statistic: 101.3 on 2 and 241 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

D. h., die geschätzte Funktion ist eine “umgedrehte Parabel” (negatives Vorzeichen bei $I(\text{total_bill}^2)$), bzw. die Funktion ist konkav, die Steigung nimmt ab. Allerdings ist der Effekt nicht signifikant. **Hinweis:** Um zu “rechnen” und nicht beispielsweise Interaktion zu modellieren, geben Sie die Variablen in der Formel in der Funktion $I()$ (*As Is*) ein.

Prognoseintervalle

Insgesamt haben wir viel “Unsicherheit” u. a. aufgrund von Variabilität in den Beobachtungen und in den Schätzungen. Wie wirken sich diese auf die Prognose aus?

Dazu können wir über die Funktion `predict` Prognoseintervalle berechnen – hier für das einfache Modell `LinMod.1`:

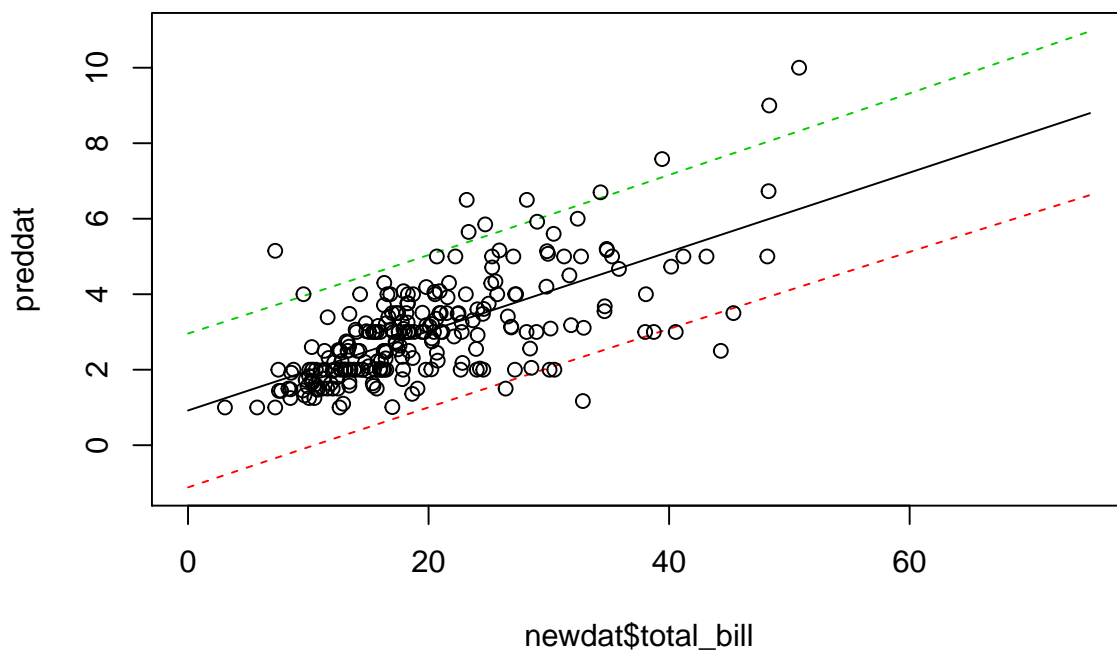
```
newdat <- data.frame(total_bill = seq(0, 75))
preddat <- predict(LinMod.1, newdata = newdat, interval = "prediction")
head(preddat)
```

```
##           fit           lwr           upr
## 1 0.9202696 -1.1174151 2.957954
## 2 1.0252941 -1.0103977 3.060986
## 3 1.1303186 -0.9034818 3.164119
## 4 1.2353432 -0.7966677 3.267354
## 5 1.3403677 -0.6899557 3.370691
## 6 1.4453922 -0.5833461 3.474130
```

```
tail(preddat)
```

```
##           fit           lwr           upr
## 71 8.271986 6.127124 10.41685
## 72 8.377010 6.227178 10.52684
## 73 8.482035 6.327145 10.63692
## 74 8.587059 6.427028 10.74709
## 75 8.692084 6.526825 10.85734
## 76 8.797108 6.626538 10.96768
```

```
matplot(newdat$total_bill, preddat, lty = c(1,2,2), type="l" )
points(x=tips$total_bill, y=tips$tip)
```

Sie sehen, dass 95 % Prognoseintervall ist recht breit: über den gewählten Rechnungsbereich von 0 – 75 \$ im Mittelwert bei 4.11 \$.

```
favstats((preddat[,3]-preddat[,2]))
```

```
##      min      Q1   median      Q3      max      mean      sd  n
## 4.034738 4.044428 4.072224 4.171158 4.341141 4.115859 0.09042352 76
## missing
##      0
```

Zu den Rändern hin wird es breiter. Am schmalsten ist es übrigens beim Mittelwert der unabhängigen Beobachtungen, hier also bei 19.79 \$.

Kreuzvalidierung

Je komplexer und flexibler ein Modell ist, desto besser kann es sich an die *vorhandenen*, sogenannte Trainingsdaten anpassen, **aber** für *neue*, sogenannte Testdaten wird es nicht immer besser – siehe z. B. Kapitel 2.2 aus James et. al (2013).

Allgemein können Modelle mit Hilfe des Mean Squared Error verglichen werden:

$$MSE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{f}(x_i))^2$$

Vorhandene Daten können aber genutzt werden um die Prognose für neue Daten (x_0, y_0) zu simulieren:

z. B. über Kreuzvalidierung. Im einfachen Fall einer Leave-One-Out Kreuzvalidierung werden alle Beobachtungen bis auf die i -te, $i = 1, 2, \dots, n$ zum Schätzen oder Lernen des Modells verwendet, das Testen des Modells erfolgt dann anhand der Prognosegüte für die i -te, $i = 1, 2, \dots, n$ Beobachtung. In R kann dies einfach über *Schleifen* durchgeführt werden:

```
n <- nrow(tips) # Anzahl Beobachtungen
y <- tips$tip # "Wahre" Werte
yprog <- numeric(n) # Vektor in dem die Prognosen geschrieben werden

### Modellanpassung
mod <- lm(tip ~ ., data=tips) # Modell mit allen Beobachtungen schätzen
yfit <- mod$fitted.values # "Vorhersagen" für Trainingsdaten

### Leave-One-Out Kreuzvalidierung
for (i in 1:n) # i nehme nacheinander die Werte von 1 bis n an
{
  # Modell schätzen ohne i-te Beobachtung
  modloo <- lm(tip ~ ., data=tips[-i,])
  # Vorhersage von y_i anhand des Modells
  yprog[i] <- predict(modloo, newdata = tips[i,])
}

### Vergleich:
MSEfit <- mean((y-yfit)^2)
MSEprog <- mean((y-yprog)^2)

cat("MSE Modellanpassung: ", MSEfit, "\n")

## MSE Modellanpassung: 1.010354

cat("MSE Kreuzvalidierung: ", MSEprog, "\n")
```

```
## MSE Kreuzvalidierung: 1.100501
```

Der Mean Squared Error ist also bei der Leave-One-Out Kreuzvalidierung um 9% schlechter als bei der Modellanpassung.

Übung: Teaching Rating

Dieser Datensatz analysiert u. a. den Zusammenhang zwischen Schönheit und Evaluierungsergebnis von Dozenten:

Hamermesh, D.S., and Parker, A. (2005). Beauty in the Classroom: Instructors' Pulchritude and Putative

Pedagogical Productivity. Economics of Education Review, 24, 369–376.

Sie können ihn, sofern noch nicht geschehen, von <https://goo.gl/6Y3KoK> als `csv` herunterladen.

Versuchen Sie, das Evaluierungsergebnis als abhängige Variable anhand geeigneter Variablen des Datensatzes zu erklären. Wie groß ist der Einfluss der Schönheit? Sind die Modellannahmen erfüllt und wie beurteilen Sie die Modellgüte?

Literatur

- David M. Diez, Christopher D. Barr, Mine Çetinkaya-Rundel (2014): *Introductory Statistics with Randomization and Simulation*, https://www.openintro.org/stat/textbook.php?stat_book=isrs, Kapitel 5, 6.1-6.3
- Nicholas J. Horton, Randall Pruim, Daniel T. Kaplan (2015): Project MOSAIC Little Books *A Student's Guide to R*, <https://github.com/ProjectMOSAIC/LittleBooks/raw/master/StudentGuide/MOSAIC-StudentGuide.pdf>, Kapitel 5.4, 10.2
- Gareth James, Daniela Witten, Trevor Hastie, Robert Tibshirani (2013): *An Introduction to Statistical Learning – with Applications in R*, <http://www-bcf.usc.edu/~gareth/ISL/>, Kapitel 3
- Maike Luhmann (2015): *R für Einsteiger*, Kapitel 16, 17.1-17.3
- Andreas Quatember (2010): *Statistik ohne Angst vor Formeln*, Kapitel 3.11
- Daniel Wollschläger (2014): *Grundlagen der Datenanalyse mit R*, Kapitel 6

Lizenz

Diese Übung wurde von Karsten Lübke entwickelt und orientiert sich an der Übung zum Buch OpenIntro von Andrew Bray, Mine Çetinkaya-Rundel und steht wie diese unter der Lizenz Creative Commons Attribution-ShareAlike 3.0 Unported.

Versionshinweise:

- Datum erstellt: 2017-09-16
- R Version: 3.4.1
- `mosaic` Version: 1.1.0

Kapitel 6: Einführung Logistische Regression

Vorbereitung

Hier werden wir den Datensatz *Aktienkauf* der Universität Zürich (Universität Zürich, Methodenberatung) analysieren. Es handelt es sich hierbei um eine Befragung einer Bank im Zusammenhang mit den Fakten, die mit der Wahrscheinlichkeit, dass jemand Aktien erwirbt, zusammenhängen. Es wurden 700 Personen befragt. Folgende Daten wurden erhoben: Aktienkauf (0 = nein, 1 = ja), Jahreseinkommen (in Tausend CHF), Risikobereitschaft (Skala von 0 bis 25) und Interesse an der aktuellen Marktlage (Skala von 0 bis 45).

Den Datensatz können Sie in von hier als csv-Datei herunterladen:

```
download.file("https://goo.gl/AiUSSl", destfile = "Aktienkauf.csv")
```

Das Einlesen erfolgt, sofern die Daten im Arbeitsverzeichnis liegen, über:

```
Aktien <- read.csv2("Aktienkauf.csv")
```

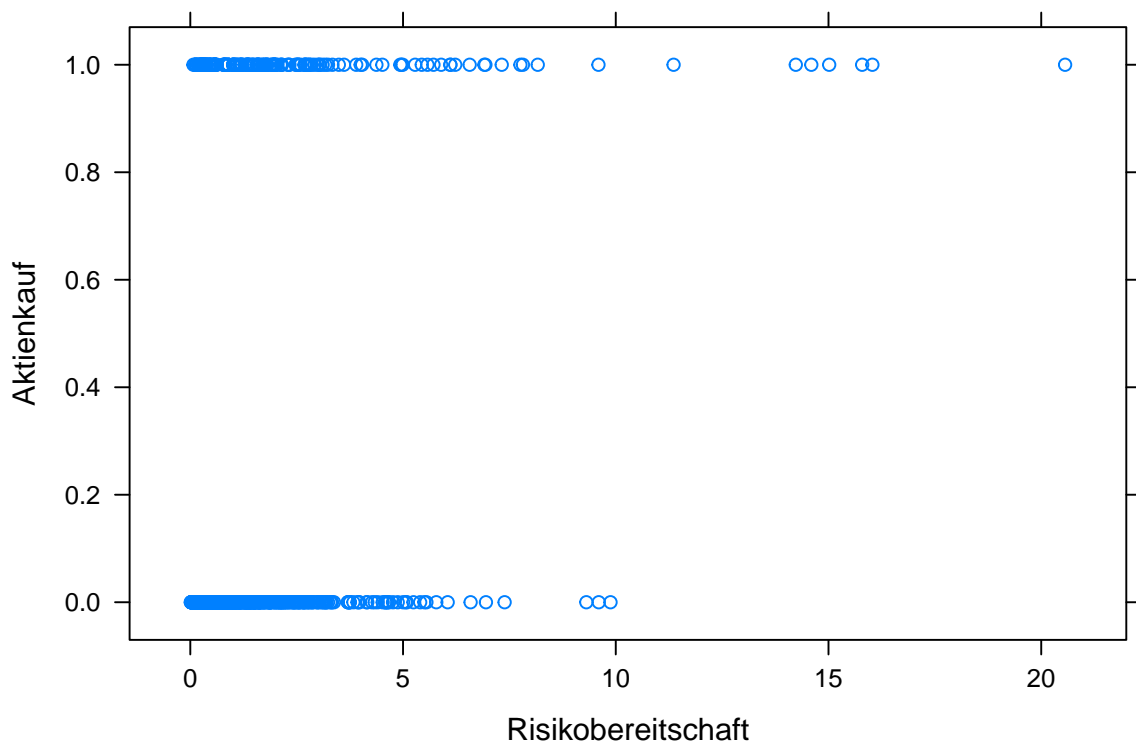
Zur Unterstützung der Analyse wird (wieder) *mosaic* verwendet.

```
library(mosaic)
```

Problemstellung

Können wir anhand der Risikobereitschaft abschätzen, ob die Wahrscheinlichkeit für einen Aktienkauf steigt? Schauen wir uns zunächst ein Streudiagramm an:

```
xyplot(Aktienkauf ~ Risikobereitschaft, data = Aktien)
```



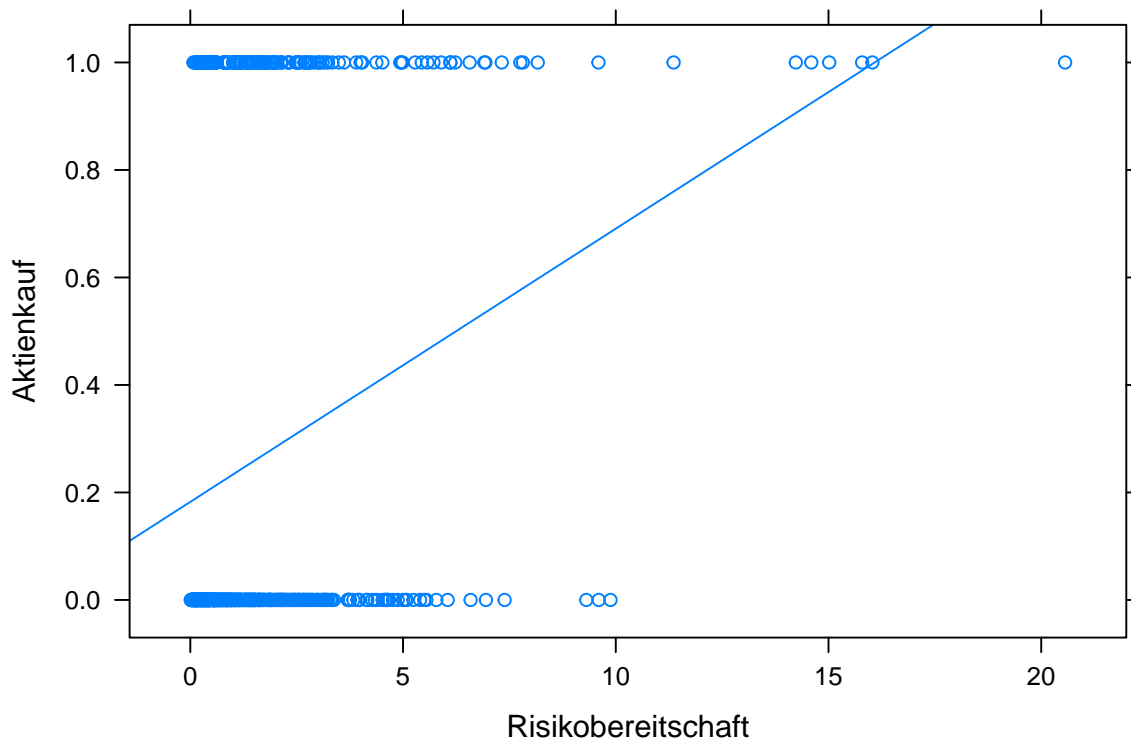
Der Zusammenhang scheint nicht sehr ausgeprägt zu sein. Lassen Sie uns dennoch eine lineare Regression durchführen und das Ergebnis auswerten und graphisch darstellen.

```
lm1 <- lm(Aktienkauf ~ Risikobereitschaft, data = Aktien)
summary(lm1)
```

```
##
## Call:
## lm(formula = Aktienkauf ~ Risikobereitschaft, data = Aktien)
##
## Residuals:
##      Min       1Q   Median       3Q      Max
## -0.6845 -0.2434 -0.2044  0.3480  0.8138
##
## Coefficients:
##              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept)    0.182460   0.020007   9.120  < 2e-16 ***
## Risikobereitschaft 0.050831   0.007622   6.669 5.25e-11 ***
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 0.4267 on 698 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.0599, Adjusted R-squared:  0.05855
```

```
## F-statistic: 44.47 on 1 and 698 DF,  p-value: 5.249e-11
```

```
plotModel(lm1)
```



Der Schätzer für die Steigung für *Risikobereitschaft* ist signifikant. Das Bestimmtheitsmaß R^2 ist allerdings sehr niedrig, aber wir haben bisher ja auch nur eine unabhängige Variable für die Erklärung der abhängigen Variable herangezogen.

Doch was bedeutet es, dass die Wahrscheinlichkeit ab einer *Risikobereitschaft* von ca. 16 über 1 liegt?

Wahrscheinlichkeiten müssen zwischen 0 und 1 liegen. Daher brauchen wir eine Funktion, die das Ergebnis einer linearen Regression in einen Bereich von 0 bis 1 bringt, die sogenannte *Linkfunktion*. Eine häufig dafür verwendete Funktion ist die logistische Funktion:

$$p(y = 1) = \frac{e^{\eta}}{1 + e^{\eta}} = \frac{1}{1 + e^{-\eta}}$$

η , das sogenannte *Logit*, ist darin die Linearkombination der Einflussgrößen:

$$\eta = \beta_0 + \beta_1 \cdot x_1 + \dots$$

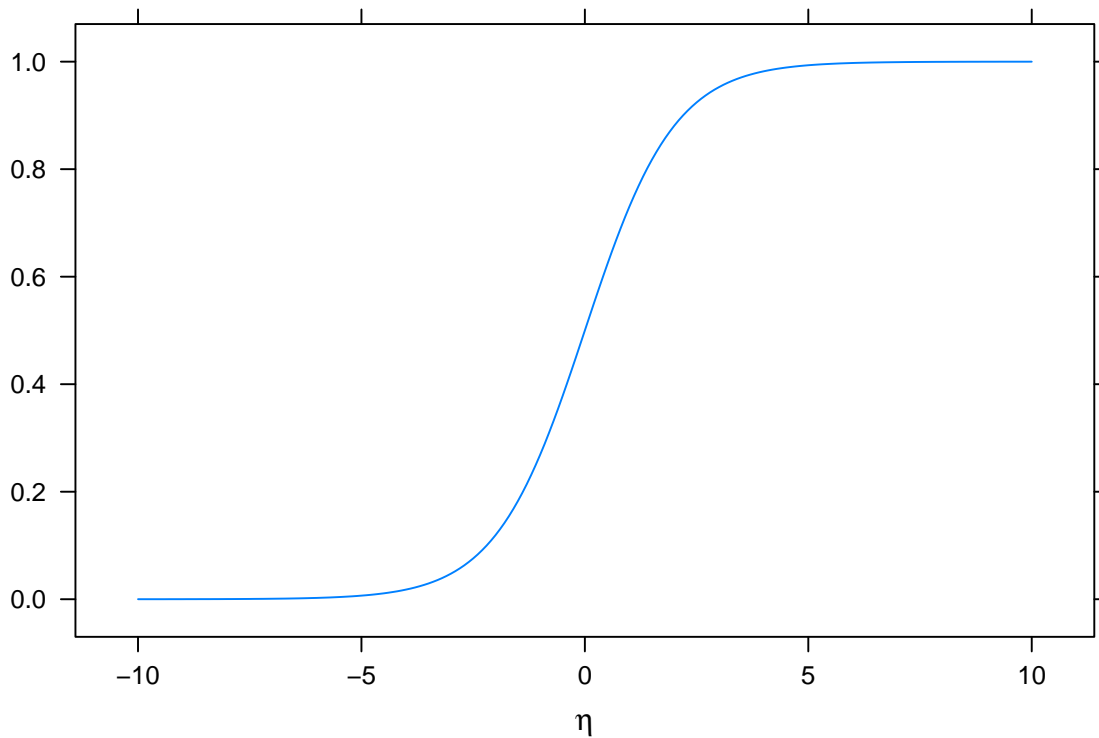
Exemplarisch können wir die logistische Funktion für einen Bereich von $\eta = -10$ bis $+10$ darstellen:

```
# eta-Werte von -10 bis +10 erzeugen
eta <- seq(-10, 10, by = 0.1)
# y-Werte mit logistischer Funktion berechnen
```

```

y <- 1/(1+exp(-eta))      # exp() ist die e-Funktion
# Graphik ausgeben mit folgenden Plotparametern:
# für das Label der x-Achse wird ein mathematisches Symbol genutzt
# Label der y-Achse wird nicht angezeigt
# statt Punkten wird eine Liniengraphik ausgegeben
xyplot(y ~ eta, xlab = expression(eta), ylab = "", type = "l")

```



Logistische Regression

Die logistische Regression ist eine Anwendung des allgemeinen linearen Modells (*general linear model*, *GLM*). Die Modellgleichung lautet:

$$p(y_i = 1) = L(\beta_0 + \beta_1 \cdot x_{i1} + \dots + \beta_K \cdot x_{ik}) + \epsilon_i$$

L ist die Linkfunktion, in unserer Anwendung die logistische Funktion.

x_{ik} sind die beobachteten Werte der unabhängigen Variablen X_k .

k sind die unabhängigen Variablen 1 bis K .

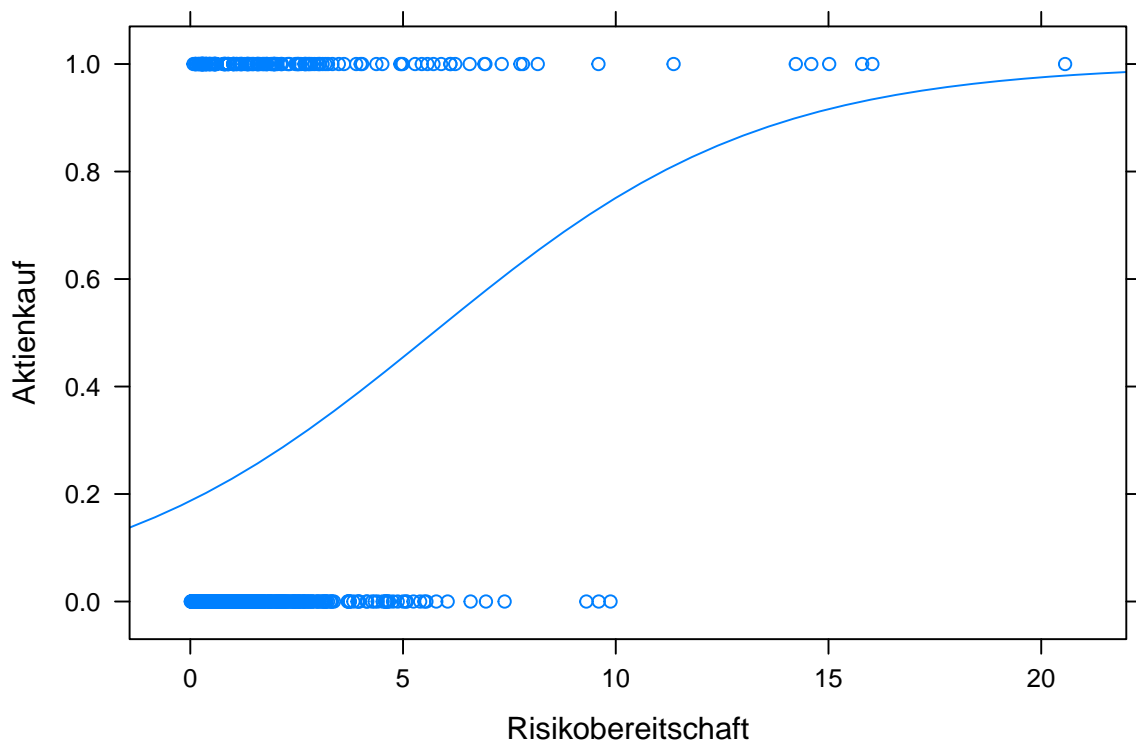
Die Funktion `glm` führt die logistische Regression durch. Wir schauen uns im Anschluss zunächst den Plot an.

```

glm1 <- glm(Aktienkauf ~ Risikobereitschaft, family = binomial("logit"),
            data = Aktien)

```

```
plotModel(glm1)
```



Es werden ein Streudiagramm der beobachteten Werte sowie die *Regressionslinie* ausgegeben. Wir können so z. B. ablesen, dass ab einer Risikobereitschaft von etwa 7 die Wahrscheinlichkeit für einen Aktienkauf nach unserem Modell bei mehr als 50 % liegt.

Die Zusammenfassung des Modells zeigt folgendes:

```
summary(glm1)
```

```
##
## Call:
## glm(formula = Aktienkauf ~ Risikobereitschaft, family = binomial("logit"),
##      data = Aktien)
##
## Deviance Residuals:
##      Min       1Q   Median       3Q      Max
## -1.6531  -0.7384  -0.6766   0.8247   1.8226
##
## Coefficients:
##              Estimate Std. Error z value Pr(>|z|)
## (Intercept)    -1.46895    0.11842  -12.405  < 2e-16 ***
## Risikobereitschaft  0.25726    0.04676   5.501 3.77e-08 ***
## ---
```



```
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## (Dispersion parameter for binomial family taken to be 1)
##
##      Null deviance: 804.36  on 699  degrees of freedom
## Residual deviance: 765.86  on 698  degrees of freedom
## AIC: 769.86
##
## Number of Fisher Scoring iterations: 4
```

Der Achsenabschnitt (intercept) des logits η wird mit -1.47 geschätzt, die Steigung in Richtung Risikobereitschaft mit 0.26. Die (Punkt-)Prognose für die Wahrscheinlichkeit eines Aktienkaufs $p(y = 1)$ benötigt anders als in der linearen Regression noch die Linkfunktion und ergibt sich somit zu:

$$p(\text{Aktienkauf} = 1) = \frac{1}{1 + e^{-(-1.47 + 0.26 \cdot \text{Risikobereitschaft})}}$$

Die p-Werte der Koeffizienten können in der Spalte $\text{Pr}(>|z|)$ abgelesen werden. Hier wird ein *Wald*-Test durchgeführt, nicht wie bei der linearen Regression ein t-Test, ebenfalls mit der $H_0 : \beta_i = 0$. Die Teststatistik (z value) wird wie in der linearen Regression durch Divisions des Schätzers (Estimate) durch den Standardfehler (Std. Error) ermittelt. Im *Wald*-Test ist die Teststatistik allerdings χ^2 -verteilt mit einem Freiheitsgrad.

Welche Unterschiede zur linearen Regression gibt es in der Ausgabe?

Es gibt kein R^2 im Sinne einer erklärten Streuung der y -Werte, da die beobachteten y -Werte nur 0 oder 1 annehmen können. Das Gütemaß bei der logistischen Regression ist das *Akaike Information Criterion* (*AIC*). Hier gilt allerdings: je **kleiner**, desto **besser**. (Anmerkung: es kann ein Pseudo- R^2 berechnet werden – kommt später.)

Es gibt keine F-Statistik (oder ANOVA) mit der Frage, ob das Modell als Ganzes signifikant ist. (Anmerkung: es kann aber ein vergleichbarer Test durchgeführt werden – kommt später.)

Interpretation der Koeffizienten

y-Achsenabschnitt (Intercept) β_0

Für $\beta_0 > 0$ gilt, dass selbst wenn alle anderen unabhängigen Variablen 0 sind, es eine Wahrscheinlichkeit von mehr als 50% gibt, dass das modellierte Ereignis eintritt. Für $\beta_0 < 0$ gilt entsprechend das Umgekehrte.

Steigung β_i mit $i = 1, 2, \dots, K$

Für $\beta_i > 0$ gilt, dass mit zunehmenden x_i die Wahrscheinlichkeit für das modellierte Ereignis steigt. Bei $\beta_i < 0$ nimmt die Wahrscheinlichkeit entsprechend ab.

Eine Abschätzung der Änderung der Wahrscheinlichkeit (*relative Risiko, relative risk RR*) kann über das Chancenverhältnis (*Odds Ratio OR*) gemacht werden.³ Es ergibt sich vereinfacht e^{β_i} . Die Wahrscheinlichkeit ändert sich näherungsweise um diesen Faktor, wenn sich x_i um eine Einheit erhöht. **Hinweis:** $RR \approx OR$ gilt nur, wenn der Anteil des modellierten Ereignisses in den beobachteten Daten sehr klein ($< 5\%$) oder sehr groß ist ($> 95\%$).

Übung: Berechnen Sie das relative Risiko für unser Beispielmmodell, wenn sich die Risikobereitschaft um 1 erhöht (Funktion `exp()`). Vergleichen Sie das Ergebnis mit der Punktprognose für Risikobereitschaft= 7 im Vergleich zu Risikobereitschaft= 8. Zur Erinnerung: Sie können `makeFun(model)` verwenden.

```
# aus Koeffizient abgeschätzt
exp(coef(glm1)[2])

## Risikobereitschaft
##          1.293379

# mit dem vollständigen Modell berechnet
fun1 <- makeFun(glm1)
fun1(Risikobereitschaft = 7)

##          1
## 0.582213

fun1(Risikobereitschaft = 8)

##          1
## 0.6431639

# als Faktor ausgeben
fun1(Risikobereitschaft = 8)/fun1(Risikobereitschaft = 7)

##          1
## 1.104688
```

Sie sehen also, die ungefähr abgeschätzte Änderung der Wahrscheinlichkeit weicht hier doch deutlich von der genau berechneten Änderung ab. Der Anteil der Datensätze mit Risikobereitschaft= 1 liegt allerdings auch bei 0.26.

³Wahrscheinlichkeit vs. Chance: Die Wahrscheinlichkeit bei einem fairen Würfel, eine 6 zu würfeln, ist $1/6$. Die Chance (*Odd*), eine 6 zu würfeln, ist die Wahrscheinlichkeit dividiert durch die Gegenwahrscheinlichkeit, also $\frac{1/6}{5/6} = 1/5$.

Kategoriale Variablen

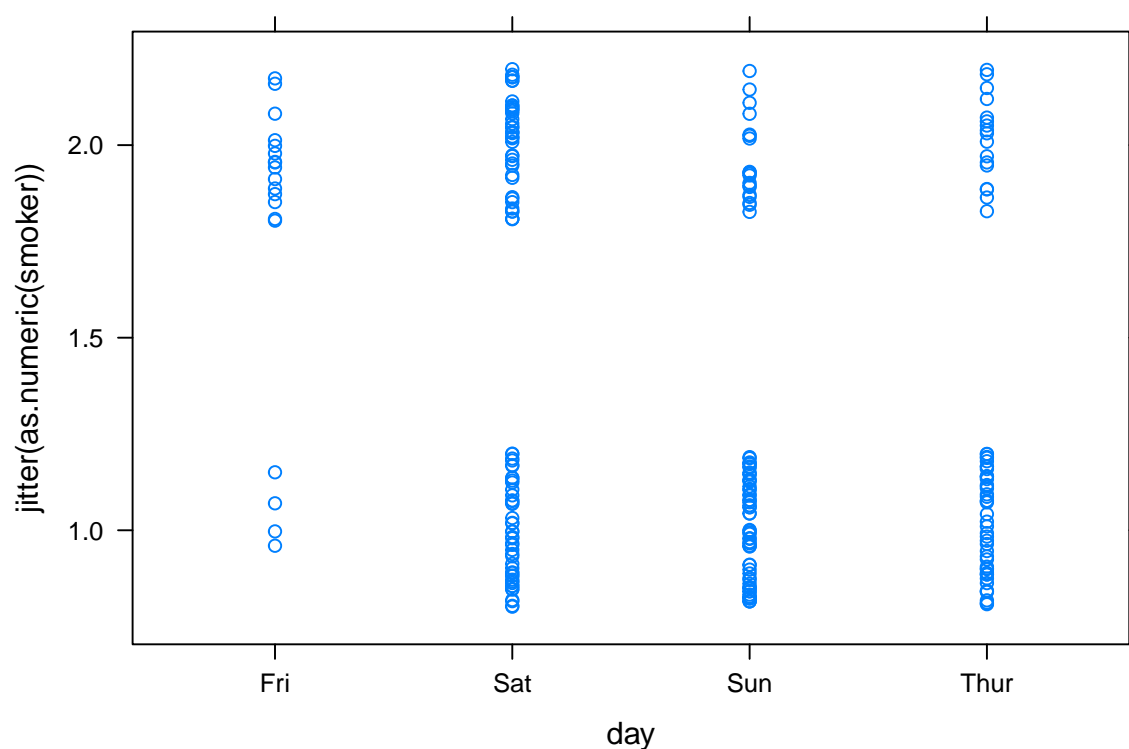
Wie schon in der linearen Regression können auch in der logistischen Regression kategoriale Variablen als unabhängige Variablen genutzt werden. Als Beispiel nehmen wir den Datensatz `tips` und versuchen abzuschätzen, ob sich die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Raucher bezahlt hat (`smoker = yes`), in Abhängigkeit vom Wochentag ändert.

Sofern noch nicht geschehen, können Sie in hier als `csv`-Datei herunterladen:

```
download.file("https://goo.gl/whKjnl", destfile = "tips.csv")
```

Zunächst ein Plot:

```
tips <- read.csv2("tips.csv")
xyplot(jitter(as.numeric(smoker)) ~ day, data = tips)
```



Hinweis: Um zu sehen, ob es an manchen Tagen mehr Raucher gibt, sollten Sie zumindest eine Variable “verrauschen” (“*jittern*”). Da die Variable `smoker` eine nominale Variable ist und die Funktion `jitter()` nur mit numerischen Variablen arbeitet, muss sie mit `as.numeric()` in eine numerische Variable umgewandelt werden.

Die relativen Häufigkeiten zeigt folgende Tabelle:

```
(tab_smoke <- tally(smoker ~ day, data = tips, format = "proportion"))
```

```
##      day
## smoker  Fri    Sat    Sun    Thur
```

```
##      No  0.2105263 0.5172414 0.7500000 0.7258065
##      Yes 0.7894737 0.4827586 0.2500000 0.2741935
```

Hinweis: Durch die Klammerung wird das Objekt `tab_smoke` direkt ausgegeben.

Probieren wir die logistische Regression aus:

```
glmTips <- glm(smoker ~ day, family = binomial("logit"), data = tips)
summary(glmTips)

##
## Call:
## glm(formula = smoker ~ day, family = binomial("logit"), data = tips)
##
## Deviance Residuals:
##      Min       1Q   Median       3Q      Max
## -1.7653  -0.8006  -0.7585   1.2068   1.6651
##
## Coefficients:
##              Estimate Std. Error z value Pr(>|z|)
## (Intercept)   1.3218     0.5627   2.349 0.018833 *
## daySat        -1.3907     0.6022  -2.309 0.020928 *
## daySun        -2.4204     0.6220  -3.891 9.96e-05 ***
## dayThur       -2.2952     0.6306  -3.639 0.000273 ***
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## (Dispersion parameter for binomial family taken to be 1)
##
##      Null deviance: 324.34  on 243  degrees of freedom
## Residual deviance: 298.37  on 240  degrees of freedom
## AIC: 306.37
##
## Number of Fisher Scoring iterations: 4
```

Auch hier können wir die Koeffizienten in Relation zur Referenzkategorie (hier: Freitag) interpretieren. Die Wahrscheinlichkeit ist an einem Samstag niedriger, der Wert für `daySat` ist negativ. Eine Abschätzung erhalten wir wieder mit e^{β_i} :

```
exp(coef(glmTips)[2])
```

```
##      daySat
## 0.2488889
```

Daher ist das Chancenverhältnis (*Odds Ratio*), dass am Samstag ein Raucher am Tisch sitzt, näherungs-

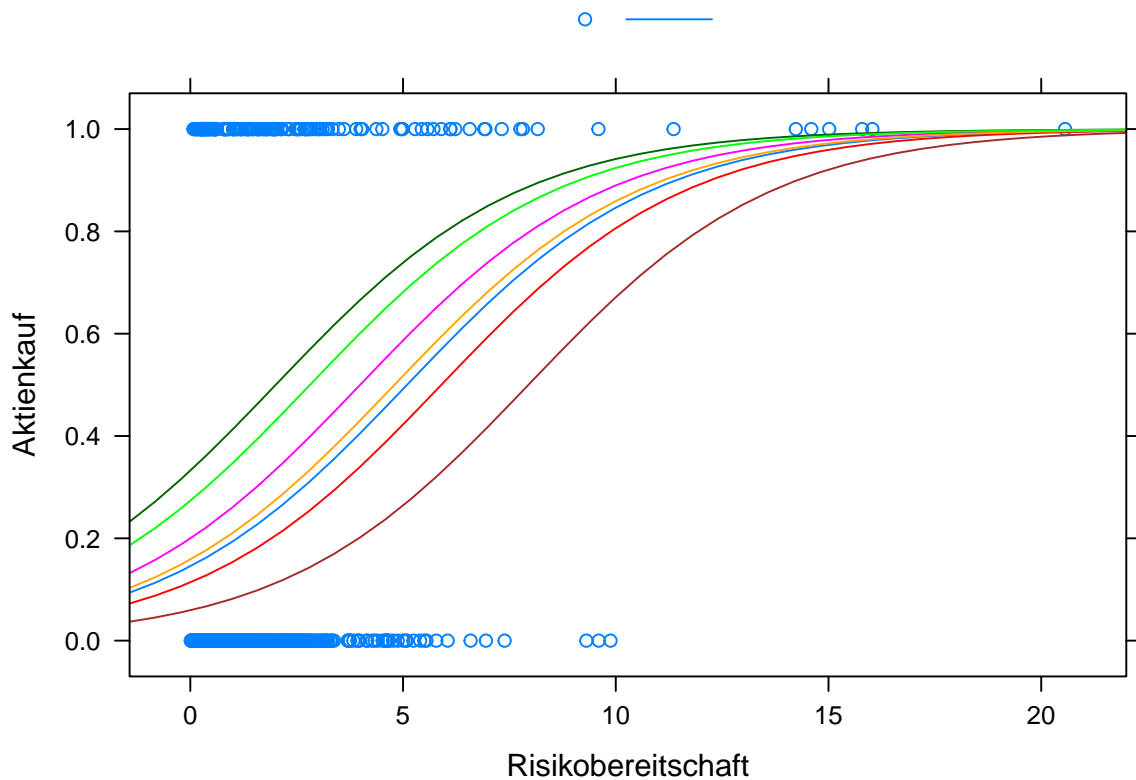
weise um den Faktor 0.25 niedriger als am Freitag:

$$OR = \frac{\frac{P(Raucher|Samstag)}{1-P(Raucher|Samstag)}}{\frac{P(Raucher|Freitag)}{1-P(Raucher|Freitag)}} = \frac{\frac{0.4828}{0.5172}}{\frac{0.7895}{0.2105}} \approx 0.2489$$

Multiple Regression

Wir kehren wieder zurück zu dem Datensatz *Aktienkauf*. Können wir unser Model `glm1` mit nur einer erklärenden Variable verbessern, indem weitere unabhängige Variablen hinzugefügt werden?

```
glm2 <- glm(Aktienkauf ~ Risikobereitschaft + Einkommen + Interesse,
            family = binomial("logit"), data = Aktien)
plotModel(glm2)
```



```
summary(glm2)
```

```
##
## Call:
## glm(formula = Aktienkauf ~ Risikobereitschaft + Einkommen + Interesse,
##      family = binomial("logit"), data = Aktien)
##
## Deviance Residuals:
##      Min       1Q   Median       3Q      Max
## -2.1303  -0.7150  -0.5390   0.5178   3.2143
```

```
##
## Coefficients:
##              Estimate Std. Error z value Pr(>|z|)
## (Intercept)   -1.667913    0.279029  -5.978 2.27e-09 ***
## Risikobereitschaft  0.347805    0.088224   3.942 8.07e-05 ***
## Einkommen     -0.021573    0.005636  -3.828 0.000129 ***
## Interesse       0.085200    0.017751   4.800 1.59e-06 ***
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## (Dispersion parameter for binomial family taken to be 1)
##
##      Null deviance: 804.36  on 699  degrees of freedom
## Residual deviance: 679.01  on 696  degrees of freedom
## AIC: 687.01
##
## Number of Fisher Scoring iterations: 5
```

Alle Schätzer sind signifikant zum 0.1 %-Niveau (***) in der Ausgabe). Zunehmende Risikobereitschaft (der Einfluss ist im Vergleich zum einfachen Modell stärker geworden) und zunehmendes Interesse erhöhen die Wahrscheinlichkeit für einen Aktienkauf. Steigendes Einkommen hingegen senkt die Wahrscheinlichkeit.

Ist das Modell besser als das einfache? Ja, da der AIC-Wert von 769.86 auf 687.01 gesunken ist.

Die Graphik zeigt die Verläufe in Abhängigkeit von den verschiedenen Variablen und den Kombinationen der Variablen.

Erweiterungen

Klassifikationsgüte

Logistische Regressionsmodelle werden häufig zur Klassifikation verwendet, z. B. ob der Kredit für einen Neukunden ein “guter” Kredit ist oder nicht. Daher sind die Klassifikationseigenschaften bei logistischen Modellen wichtige Kriterien.

Hierzu werden die aus dem Modell ermittelten Wahrscheinlichkeiten ab einem Schwellenwert (*cutpoint*), häufig 0.5, einer geschätzten 1 zugeordnet, unterhalb des Schwellenwertes einer 0. Diese aus dem Modell ermittelten Häufigkeiten werden dann in einer sogenannten Konfusionsmatrix (*confusion matrix*) mit den beobachteten Häufigkeiten verglichen.

Daher sind wichtige Kriterien eines Modells, wie gut diese Zuordnung erfolgt. Dazu werden die Sensitivität (*True Positive Rate*, *TPR*), also der Anteil der mit 1 geschätzten an allen mit 1 beobachteten Werten, und die Spezifität (*True Negative Rate*) berechnet. Ziel ist es, dass beide Werte möglichst hoch sind.

Sie können die Konfusionsmatrix “zu Fuß” berechnen, in dem Sie eine neue Variable einfügen, die ab dem cutpoint 1 und sonst 0 ist und mit dem Befehl `tally()` ausgeben. Alternativ können Sie das Paket `SDMTools` verwenden mit der Funktion `confusion.matrix()`. Ein Parameter ist `cutpoint`, der standardmäßig auf 0.5 steht.

```
# Konfusionsmatrix "zu Fuß" berechnen
# cutpoint = 0.5 setzen
# neue Variable predicted anlegen mit 1, wenn modellierte Wahrscheinlichkeit > 1 ist
cutpoint = 0.5
Aktien$predicted <- ((glm1$fitted.values) > cutpoint)*1
# Kreuztabelle berechnen
(cm <- tally(~predicted+Aktienkauf, data = Aktien))
```

```
##           Aktienkauf
## predicted    0    1
##           0 509 163
##           1   8  20
```

```
# Sensitivität (TPR)
cm[2,2]/sum(cm[,2])
```

```
## [1] 0.1092896
```

```
# Spezifität (TNR)
cm[1,1]/sum(cm[,1])
```

```
## [1] 0.9845261
```

```
# mit Hilfe des Pakets SDMTools
# ggf. install.packages("SDMTools")
library(SDMTools)
# optional noch Parameter cutpoint = 0.5 angeben
(cm <- confusion.matrix(Aktien$Aktienkauf, glm1$fitted.values))
```

```
##      obs
## pred   0    1
##      0 509 163
##      1   8  20
## attr(,"class")
## [1] "confusion.matrix"
```

```
sensitivity(cm)
```

```
## [1] 0.1092896
```

```
specificity(cm)
```

```
## [1] 0.9845261
```

Wenn die Anteile der 1 in den beobachteten Daten sehr gering sind (z. B. bei einem medizinischem Test auf eine seltene Krankheit, Klicks auf einen Werbefbanner oder Kreditausfall), kommt eine Schwäche der logistischen Regression zum Tragen: Das Modell wird so optimiert, dass die Wahrscheinlichkeiten $p(y = 1)$ alle unter 0.5 liegen. Das würde zu einer Sensitivität von 0 und einer Spezifität von 1 führen. Daher kann es sinnvoll sein, den Cutpoint zu variieren. Daraus ergibt sich ein verallgemeinertes Gütemaß, die *ROC-Kurve* (*Return Operating Characteristic*) und den daraus abgeleiteten *AUC-Wert* (*Area Under Curve*).

Hierzu wird der Cutpoint zwischen 0 und 1 variiert und die Sensitivität gegen 1–Spezifität (welche Werte sind als 1 modelliert worden unter den beobachten 0, *False Positive Rate*, *FPR*). Um diese Werte auszugeben, benötigen Sie das Paket *ROCR* und die Funktion `performance()`.

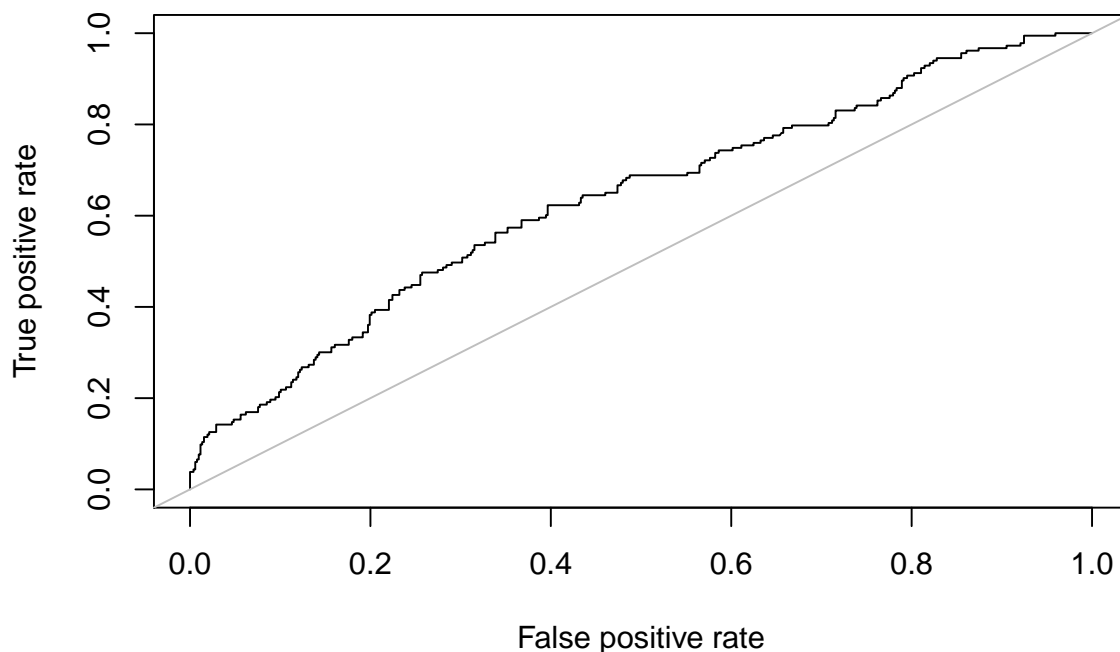
```
# ggf. install.packages("ROCR")
library(ROCR)

## Loading required package: gplots

##
## Attaching package: 'gplots'

## The following object is masked from 'package:stats':
##
##      lowess

# Ein für die Auswertung notwendiges prediction Objekt anlegen
pred <- prediction(glm1$fitted.values, Aktien$Aktienkauf)
# ROC Kurve
perf <- performance(pred, "tpr", "fpr")
plot(perf)
abline(0,1, col = "grey")
```

```
# Area under curve (ROC-Wert)
performance(pred, "auc")@y.values

## [[1]]
## [1] 0.6361892
```

AUC liegt zwischen 0.5, wenn das Modell gar nichts erklärt (im Plot die graue Linie) und 1. Hier ist der Wert also recht gering. Akzeptable Werte liegen bei 0.7 und größer, gute Werte sind es ab 0.8.⁴

Modellschätzung

Das Modell wird nicht wie bei der lineare Regression über die Methode der kleinsten Quadrate (OLS) geschätzt, sondern über die *Maximum Likelihood* Methode. Die Koeffizienten werden so gewählt, dass die beobachteten Daten am wahrscheinlichsten (*Maximum Likelihood*) werden.

Das ist ein iteratives Verfahren (OLS erfolgt rein analytisch), daher wird in der letzten Zeile der Ausgabe auch die Anzahl der Iterationen (*Fisher Scoring Iterations*) ausgegeben.

Die Devianz des Modells (*Residual deviance*) ist -2 mal die logarithmierte Likelihood. Die Null-devianz (*Null deviance*) ist die Devianz eines Nullmodells, d. h., alle β außer der Konstanten sind 0.

⁴Hosmer/Lemeshow, Applied Logistic Regression, 3rd Ed. (2013), S. 164

Likelihood Quotienten Test

Der Likelihood Quotienten Test (*Likelihood Ratio Test*, *LR-Test*) vergleicht die Likelihood L_0 des Nullmodels mit der Likelihood L_β des geschätzten Modells. Die Prüfgröße des LR-Tests ergibt sich aus:

$$T = -2 \cdot \ln \left(\frac{L_0}{L_\beta} \right)$$

T ist näherungsweise χ^2 -verteilt mit k Freiheitsgraden.

In R können Sie den Test mit `lrtest()` aufrufen. Sie benötigen dazu das Paket `lmtest`.

```
library(lmtest)
```

```
## Loading required package: zoo

##
## Attaching package: 'zoo'

## The following objects are masked from 'package:base':
##
##      as.Date, as.Date.numeric
```

```
lrtest(glm2)
```

```
## Likelihood ratio test
##
## Model 1: Aktienkauf ~ Risikobereitschaft + Einkommen + Interesse
## Model 2: Aktienkauf ~ 1
##      #Df  LogLik Df  Chisq Pr(>Chisq)
## 1      4 -339.50
## 2      1 -402.18 -3  125.36 < 2.2e-16 ***
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

Das Modell `glm2` ist als Ganzes signifikant, der p-Wert ist sehr klein.

Den Likelihood Quotienten Test können Sie auch verwenden, um zwei Modelle miteinander zu vergleichen, z. B., wenn Sie eine weitere Variable hinzugenommen haben und wissen wollen, ob die Verbesserung auch signifikant war.

```
lrtest(glm1, glm2)
```

```
## Likelihood ratio test
##
## Model 1: Aktienkauf ~ Risikobereitschaft
## Model 2: Aktienkauf ~ Risikobereitschaft + Einkommen + Interesse
##      #Df  LogLik Df  Chisq Pr(>Chisq)
## 1      2 -382.93
```

```
## 2      4 -339.50    2 86.856    < 2.2e-16 ***
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

Ja, die Modelle glm1 (mit einer erklärenden Variable) und glm2 unterscheiden sich signifikant voneinander.

Pseudo-R²

Verschiedene Statistiker haben versucht, aus der Likelihood eine Größe abzuleiten, die dem R² der linearen Regression entspricht. Exemplarisch sei hier McFaddens R² gezeigt:

$$R^2 = 1 - \frac{\ln(L_\beta)}{\ln(L_0)}$$

Wie bei bei dem R² der linearen Regression liegt der Wertebereich zwischen 0 und 1. Ab einem Wert von 0,4 kann die Modellanpassung als gut eingestuft werden. Wo liegen R² der beiden Modelle glm1 und glm2? Sie können es direkt berechnen oder das Paket `BaylorEdPsych` verwenden.

```
# direkte Berechnung
1 - glm1$deviance/glm1$null.deviance

## [1] 0.04786616

1 - glm2$deviance/glm2$null.deviance

## [1] 0.1558465

# ggf. install.packages("BaylorEdPsych")
library(BaylorEdPsych)
PseudoR2(glm1)
```

```
##           McFadden      Adj.McFadden      Cox.Snell      Nagelkerke
##           0.04786616      0.04040685      0.05351732      0.07834758
## McKelvey.Zavoina      Effron      Count      Adj.Count
##           0.08260722      0.05840899      0.75571429      0.06557377
##           AIC      Corrected.AIC
##           769.86238269      769.87959934
```

```
PseudoR2(glm2)

##           McFadden      Adj.McFadden      Cox.Snell      Nagelkerke
##           0.15584653      0.14341435      0.16396262      0.24003587
## McKelvey.Zavoina      Effron      Count      Adj.Count
##           0.28278782      0.18453835      0.76142857      0.08743169
##           AIC      Corrected.AIC
##           687.00683459      687.06438855
```

Insgesamt ist die Modellanpassung, auch mit allen Variablen, als schlecht zu bezeichnen. **Hinweis:** Die Funktion `PseudoR2(model)` zeigt verschiedene Pseudo- R^2 Statistiken, die jeweils unter bestimmten Bedingungen vorteilhaft einzusetzen sind. Für weitere Erläuterungen sei auf die Literatur verwiesen.

Übung: Rot- oder Weißwein?

Der Datensatz untersucht den Zusammenhang zwischen der Qualität und physiochemischen Eigenschaften von portugiesischen Rot- und Weißweinen.

P. Cortez, A. Cerdeira, F. Almeida, T. Matos and J. Reis. Modeling wine preferences by data mining from physicochemical properties. In Decision Support Systems, Elsevier, 47(4):547-553, 2009.

Sie können ihn hier herunterladen. Die Originaldaten finden Sie im UCI Machine Learning Repository.

Versuchen Sie anhand geeigneter Variablen, Rot- und Weißweine zu klassifizieren.⁵

Zusatzaufgabe: Die Originaldaten bestehen aus einem Datensatz für Weißweine und einem für Rotweine. Laden Sie diese, beachten Sie die Fehlermeldung und beheben die damit verbundenen Fehler und fassen beide Datensätze zu einem gemeinsamen Datensatz zusammen, in dem eine zusätzliche Variable `color` aufgenommen wird (Rot = 0, Weiß = 1).

Literatur

- David M. Diez, Christopher D. Barr, Mine Çetinkaya-Rundel (2014): *Introductory Statistics with Randomization and Simulation*, https://www.openintro.org/stat/textbook.php?stat_book=isrs, Kapitel 6.4
- Nicholas J. Horton, Randall Pruim, Daniel T. Kaplan (2015): Project MOSAIC Little Books *A Student's Guide to R*, <https://github.com/ProjectMOSAIC/LittleBooks/raw/master/StudentGuide/MOSAIC-StudentGuide.pdf>, Kapitel 8
- Gareth James, Daniela Witten, Trevor Hastie, Robert Tibshirani (2013): *An Introduction to Statistical Learning – with Applications in R*, <http://www-bcf.usc.edu/~gareth/ISL/>, Kapitel 4.1-4.3
- Maïke Luhmann (2015): *R für Einsteiger*, Kapitel 17.5
- Daniel Wollschläger (2014): *Grundlagen der Datenanalyse mit R*, Kapitel 8.1

Lizenz

Diese Übung wurde von Matthias Gehrke entwickelt und steht unter der Lizenz Creative Commons Attribution-ShareAlike 3.0 Unported.

Versionshinweise:

- Datum erstellt: 2017-09-16

⁵Anregungen zu dieser Übung stammen von INTW Statistics

- R Version: 3.4.1
- `mosaic` Version: 1.1.0

Kapitel 7: Dimensionsreduktion mit PCA und EFA

Dimensionsreduktion

Datensätze in den Sozialwissenschaften, und damit auch in der Wirtschaftspsychologie, haben oft viele Variablen - oder auch Dimensionen - und es ist vorteilhaft, diese auf eine kleinere Anzahl von Variablen (oder Dimensionen) zu reduzieren. Zusammenhänge zwischen verschiedenen Dimensionen oder Unterschiede zwischen verschiedenen Gruppen bezüglich einer oder mehrerer Dimensionen (z. B. bei Experimenten) können so klarer und einfacher identifiziert werden. Dimensionen mit konkreten Sachverhalten werden in der Sprache der Wissenschaft häufig als **Konstrukte** bezeichnet.

Konstrukte

Konstrukte stellen in den Sozialwissenschaften gedankliche bzw. theoretische Sachverhalte dar, die nicht direkt beobachtbar und damit nicht direkt messbar sind. Nehmen wir beispielsweise an, es soll das Konstrukt Anerkennung im Rahmen einer sozialwissenschaftlichen Studie gemessen werden. Dabei gibt es zunächst zwei Fragestellungen:

1. Was bedeutet Anerkennung?
2. Wie wird Anerkennung gemessen?

Was bedeutet Anerkennung?

Liest man bei Wikipedia diesen Begriff nach, kommt folgende Antwort: "Anerkennung bedeutet die Erlaubnis einer Person oder einer Gruppe gegenüber einer anderen Person, Gruppe oder Institution, sich mit ihren derzeitigen spezifischen Eigenschaften an der Kommunikation, an Entscheidungsprozessen oder anderen gesellschaftlichen Prozessen zu beteiligen. Der Begriff Anerkennung wird auch als Synonym für Akzeptanz, Lob oder Respekt verwendet."

Messung von Anerkennung

Gut, wir kennen nun die Bedeutung von Anerkennung, aber wir wissen immer noch nicht, wie wir Anerkennung messen können. Da die Suche nach Anerkennung in der Psychologie kein neues Konstrukt darstellt, sondern schon vielfach gemessen wurde, müssen wir nur in bisherigen Forschungsergebnissen nachlesen. Dies führt unweigerlich dazu, dass wir auf bisherige Forschungen stoßen, die das Konstrukt Anerkennung als ein multidimensionales Konstrukt definieren und mit mehr als einem **Item (Indikator)** messen. Mehr zur Messung von Anerkennung weiter unten im Datenbeispiel. D. h., der Sachverhalt Anerkennung wird aus anderen, messbaren Sachverhalten (Indikatoren) messbar gemacht. Der Prozess des **Messbarmachens** heißt Operationalisierung. Mehr zur Operationalisierung von Anerkennung und anderen Konstrukten betrachten wir weiter unten im Datenbeispiel.

Zwei Methoden der Dimensionsreduktion

In diesem Kapitel betrachten wir zwei gängige Methoden, um die Komplexität von multivariaten, metrischen Daten zu reduzieren, indem wir die Anzahl der Dimensionen in den Daten reduzieren.

- Die *Hauptkomponentenanalyse (PCA)* versucht, unkorrelierte Linearkombinationen zu finden, die die maximale Varianz in den Daten erfassen. Die PCA beinhaltet also das Extrahieren von linearen Zusammenhängen der beobachteten Variablen.
- Die *Exploratorische Faktorenanalyse (EFA)* versucht, die Varianz auf Basis einer kleinen Anzahl von Dimensionen zu modellieren, während sie gleichzeitig versucht, die Dimensionen in Bezug auf die ursprünglichen Variablen interpretierbar zu machen. Es wird davon ausgegangen, dass die Daten einem Faktoren Modell entsprechen, bei der die beobachteten Korrelationen auf latente Faktoren zurückführen. Mit der EFA wird nicht die gesamte Varianz erklärt.

Welches ist die bessere Methode?

In der Psychologie werden diese beiden Methoden oft in der Konstruktion von mehrstufigen Tests angewendet, um festzustellen, welche Items auf welche Konstrukte laden. Sie ergeben in der Regel ähnliche inhaltliche Schlussfolgerungen. Dies erklärt, warum einige Statistik-Software-Programme beide Methoden zusammenpacken. So wird die PCA als Standard-Extraktionsmethode in den SPSS-Faktoranalyse-Routinen verwendet. Dies führt zweifellos zu einer gewissen Verwirrung über die Unterscheidung zwischen den beiden Methoden. Die EFA wird oft als Common Factor Analysis oder principal axis factoring (Hauptachsenanalyse) bezeichnet. EFA verwendet eine Vielzahl von Optimierungsroutinen und das Ergebnis, im Gegensatz zu PCA, hängt von der verwendeten Optimierungsroutine und Ausgangspunkten für diese Routinen ab. Es gibt also keine einzigartige Lösung bei der EFA.

Faustregeln

Eine einfache Faustregel für die Entscheidung zwischen diesen beiden Methoden:

- Führe die PCA durch, wenn die korrelierten beobachteten Variablen einfach auf einen kleineren Satz von wichtigen unabhängigen zusammengesetzten Variablen reduziert werden soll.
- Führe die EFA durch, wenn ein theoretisches Modell von latenten Faktoren zugrunde liegt, dass die beobachtete Variablen verursacht.

Gründe für die Notwendigkeit der Datenreduktion

- Im technischen Sinne der Dimensionsreduktion können wir statt Variablen-Sets die Faktor-/ Komponentenwerte verwenden (z. B. für Mittelwertvergleiche zwischen Experimental- und Kontrollgruppe, Regressionsanalyse und Clusteranalyse).
- Wir können Unsicherheit verringern. Wenn wir glauben, dass ein Konstrukt nicht eindeutig messbar ist, dann kann mit einem Variablen-Set die Unsicherheit reduziert werden.

- Wir können den Aufwand bei der Datenerfassung vereinfachen, indem wir uns auf Variablen konzentrieren, von denen bekannt ist, dass sie einen hohen Beitrag zum interessierenden Faktor/Komponente leisten. Wenn wir feststellen, dass einige Variablen für einen Faktor nicht wichtig sind, können wir sie aus dem Datensatz eliminieren.

Benötigte Pakete

Pakete, die für diese Datenanalyse benötigt werden, müssen vorher einmalig in R installiert werden.

```
# install.packages("corrplot")
# install.packages("gplots")
# install.packages("nFactors")
```

Daten

Wir untersuchen die Dimensionalität mittels einer auf 1000 Fälle reduzierten Zufallsauswahl von 15 Variablen zur Messung der grundlegenden Wertorientierungen von Menschen. Die Daten wurden im Sommersemester 2017 von FOM Studierenden im ersten Semester an der FOM bundesweit erhoben. Die Variablen zu Wertorientierungen wurden ursprünglich aus dem 40-Item-Set des «Portraits Value Questionnaire» (PVQ) von Schwartz adaptiert und durch die Studien an der FOM seit 2014 stufenweise bis auf 15 relevante Variablen reduziert. Alle Variablen wurden auf einer Skala von 1 bis 7 (wobei 1 am wenigsten und 7 am meisten zutrifft) abgefragt.

Einlesen

Download und Einlesen der Daten mit dem Befehl `read.csv2`.

```
download.file("https://osf.io/teymq/download", destfile = "Werte.csv")
Werte <- read.csv2("Werte.csv", encoding="UTF-8")
```

Wir überprüfen zuerst die Struktur des Datensatzes, die ersten 6 Zeilen und die Zusammenfassung.

```
str(Werte)
```

```
## 'data.frame':    1000 obs. of  15 variables:
## $ Spaß          : int  6 3 2 7 3 5 7 5 4 5 ...
## $ Freude         : int  6 7 7 7 4 5 5 5 4 5 ...
## $ Aufregung      : int  7 3 3 7 3 5 5 5 3 3 ...
## $ Führung        : int  6 1 6 4 4 4 3 3 2 2 ...
## $ Entscheidung  : int  6 1 6 3 4 3 4 3 1 2 ...
## $ Religiosität   : int  2 7 4 1 5 1 3 3 3 1 ...
## $ Respekt        : int  5 7 7 7 2 5 6 3 4 5 ...
## $ Demut          : int  4 3 6 3 4 3 4 2 2 5 ...
```



```
## $ Gefahrenvermeidung: int 6 7 7 2 7 3 4 5 6 5 ...
## $ Sicherheit         : int 6 7 7 6 7 4 6 6 7 4 ...
## $ Ordentlichkeit     : int 6 7 3 3 6 5 6 7 3 7 ...
## $ Unabhängigkeit     : int 6 7 7 5 3 7 5 6 2 5 ...
## $ Zuhören            : int 5 6 1 3 3 5 5 4 5 6 ...
## $ Umweltbewusstsein  : int 4 7 1 7 6 5 7 6 6 5 ...
## $ Interesse          : int 7 6 7 5 2 7 7 6 7 7 ...
```

```
head(Werte)
```

```
## Spaß Freude Aufregung Führung Entscheidung Religiösität Respekt Demut
## 1      6      6      7      6      6      2      5      4
## 2      3      7      3      1      1      7      7      3
## 3      2      7      3      6      6      4      7      6
## 4      7      7      7      4      3      1      7      3
## 5      3      4      3      4      4      5      2      4
## 6      5      5      5      4      3      1      5      3
## Gefahrenvermeidung Sicherheit Ordentlichkeit Unabhängigkeit Zuhören
## 1      6      6      6      6      5
## 2      7      7      7      7      6
## 3      7      7      3      7      1
## 4      2      6      3      5      3
## 5      7      7      6      3      3
## 6      3      4      5      7      5
## Umweltbewusstsein Interesse
## 1      4      7
## 2      7      6
## 3      1      7
## 4      7      5
## 5      6      2
## 6      5      7
```

```
summary(Werte)
```

```
##      Spaß      Freude      Aufregung      Führung
## Min.   :1.000  Min.   :1.000  Min.   :1.000  Min.   :1.000
## 1st Qu.:4.000  1st Qu.:4.000  1st Qu.:3.000  1st Qu.:2.000
## Median :5.000  Median :5.000  Median :4.000  Median :4.000
## Mean   :5.233  Mean   :5.123  Mean   :4.179  Mean   :3.612
## 3rd Qu.:7.000  3rd Qu.:6.000  3rd Qu.:5.000  3rd Qu.:5.000
## Max.   :7.000  Max.   :7.000  Max.   :7.000  Max.   :7.000
## Entscheidung Religiösität Respekt Demut
## Min.   :1.000  Min.   :1.000  Min.   :1.000  Min.   :1.000
```

```
## 1st Qu.:2.000 1st Qu.:1.000 1st Qu.:4.000 1st Qu.:2.000
## Median :4.000 Median :2.000 Median :5.000 Median :4.000
## Mean :3.714 Mean :2.955 Mean :4.783 Mean :3.684
## 3rd Qu.:5.000 3rd Qu.:4.000 3rd Qu.:6.000 3rd Qu.:5.000
## Max. :7.000 Max. :7.000 Max. :7.000 Max. :7.000
## Gefahrenvermeidung Sicherheit Ordentlichkeit Unabhängigkeit
## Min. :1.000 Min. :1.000 Min. :1.000 Min. :1.000
## 1st Qu.:4.000 1st Qu.:5.000 1st Qu.:4.000 1st Qu.:5.000
## Median :5.000 Median :6.000 Median :6.000 Median :6.000
## Mean :4.996 Mean :5.651 Mean :5.198 Mean :5.556
## 3rd Qu.:6.000 3rd Qu.:7.000 3rd Qu.:6.000 3rd Qu.:7.000
## Max. :7.000 Max. :7.000 Max. :7.000 Max. :7.000
## Zuhören Umweltbewusstsein Interesse
## Min. :1.000 Min. :1.000 Min. :1.000
## 1st Qu.:4.000 1st Qu.:4.000 1st Qu.:4.000
## Median :5.000 Median :5.000 Median :6.000
## Mean :5.031 Mean :4.894 Mean :5.244
## 3rd Qu.:6.000 3rd Qu.:6.000 3rd Qu.:6.000
## Max. :7.000 Max. :7.000 Max. :7.000
```

Wir sehen in der `summary()`, dass die Bereiche der Bewertungen für jede Variable 1-7 sind. In `str()` sehen wir, dass die Bewertungen als numerisch (Integer, also ganzzahlig) eingelesen wurden. Die Daten sind somit richtig formatiert.

Neuskalierung der Daten

In vielen Fällen ist es sinnvoll, Rohdaten neu zu skalieren. Dies wird üblicherweise als **Standardisierung**, **Normierung**, oder **Z Scoring/Transformation** bezeichnet. Als Ergebnis ist der Mittelwert aller Variablen über alle Beobachtungen dann 0. Da wir hier gleiche Skalenstufen haben, ist ein Skalieren nicht unbedingt notwendig, wir führen es aber trotzdem durch.

Ein einfacher Weg, alle Variablen im Datensatz auf einmal zu skalieren ist der Befehl `scale()`. Da wir die Rohdaten nie ändern wollen, weisen wir die Rohwerte zuerst einem neuen Dataframe `Werte.sc` zu und skalieren anschließend die Daten. Wir skalieren in unserem Datensatz alle Variablen.

```
Werte.sc<- scale(Werte)
summary(Werte.sc)
```

```
## Spaß Freude Aufregung Führung
## Min. :-2.8417 Min. :-2.80273 Min. :-1.8739 Min. :-1.4505
## 1st Qu.: -0.8277 1st Qu.: -0.76339 1st Qu.: -0.6950 1st Qu.: -0.8952
## Median : -0.1564 Median : -0.08361 Median : -0.1055 Median : 0.2155
## Mean : 0.0000 Mean : 0.00000 Mean : 0.0000 Mean : 0.0000
```

```
## 3rd Qu.: 1.1862 3rd Qu.: 0.59617 3rd Qu.: 0.4840 3rd Qu.: 0.7708
## Max. : 1.1862 Max. : 1.27595 Max. : 1.6629 Max. : 1.8814
## Entscheidung Religiösität Respekt Demut
## Min. : -1.5357 Min. : -0.9976 Min. : -2.2525 Min. : -1.6078
## 1st Qu.: -0.9698 1st Qu.: -0.9976 1st Qu.: -0.4662 1st Qu.: -1.0087
## Median : 0.1618 Median : -0.4873 Median : 0.1292 Median : 0.1893
## Mean : 0.0000 Mean : 0.0000 Mean : 0.0000 Mean : 0.0000
## 3rd Qu.: 0.7277 3rd Qu.: 0.5332 3rd Qu.: 0.7246 3rd Qu.: 0.7883
## Max. : 1.8593 Max. : 2.0640 Max. : 1.3200 Max. : 1.9863
## Gefahrenvermeidung Sicherheit Ordentlichkeit Unabhängigkeit
## Min. : -2.528060 Min. : -3.2993 Min. : -2.6748 Min. : -3.4336
## 1st Qu.: -0.630117 1st Qu.: -0.4618 1st Qu.: -0.7633 1st Qu.: -0.4190
## Median : 0.002531 Median : 0.2476 Median : 0.5110 Median : 0.3346
## Mean : 0.000000 Mean : 0.0000 Mean : 0.0000 Mean : 0.0000
## 3rd Qu.: 0.635178 3rd Qu.: 0.9570 3rd Qu.: 0.5110 3rd Qu.: 1.0883
## Max. : 1.267826 Max. : 0.9570 Max. : 1.1482 Max. : 1.0883
## Zuhören Umweltbewusstsein Interesse
## Min. : -2.68836 Min. : -2.6047 Min. : -2.9437
## 1st Qu.: -0.68760 1st Qu.: -0.5980 1st Qu.: -0.8629
## Median : -0.02067 Median : 0.0709 Median : 0.5244
## Mean : 0.00000 Mean : 0.0000 Mean : 0.0000
## 3rd Qu.: 0.64625 3rd Qu.: 0.7398 3rd Qu.: 0.5244
## Max. : 1.31317 Max. : 1.4087 Max. : 1.2180
```

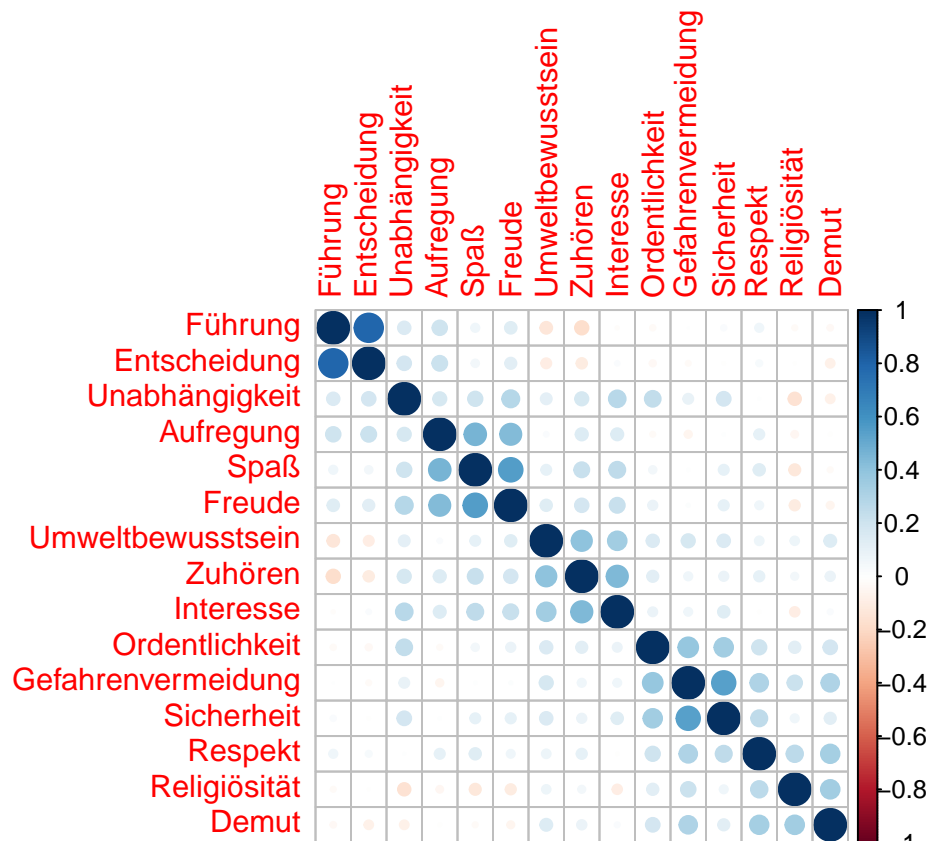
Die Daten wurden richtig skaliert, da der Mittelwert aller Variablen über alle Beobachtungen 0 ist.

Zusammenhänge in den Daten

Wir verwenden den Befehl `corrplot()` für die Erstinspektion von bivariaten Beziehungen zwischen den Variablen. Das Argument `order = 'hclust'` ordnet die Zeilen und Spalten entsprechend der Ähnlichkeit der Variablen in einer hierarchischen Cluster-Lösung der Variablen (mehr dazu im Teil *Clusteranalyse*) neu an.

```
library(corrplot)

corrplot(cor(Werte.sc), order="hclust")
```



Die Visualisierung der Korrelation der Variablen scheint fünf Cluster zu zeigen:

- (“Führung”, “Entscheidung”)
- (“Aufregung”, “Spaß”, “Freude”)
- (“Umweltbewusstsein”, “Zuhören”, “Interesse”)
- (“Ordentlichkeit”, “Gefahrenvermeidung”, “Sicherheit”)
- (“Respekt”, “Religiösität”, “Demut”)

Daten mit fehlende Werten

Wenn in den Daten leere Zellen, also fehlende Werte, vorhanden sind, dann kann es bei bestimmten Rechenoperationen zu Fehlermeldungen kommen. Dies betrifft zum Beispiel Korrelationen, PCA und EFA. Der Ansatz besteht deshalb darin, NA-Werte explizit zu entfernen. Dies kann am einfachsten mit dem Befehl `na.omit()` geschehen:

Beispiel:

```
corrplot(cor(na.omit(Werte.sc), order="hclust"))
```

Da wir in unserem Datensatz vollständige Daten verwenden, gibt es auch keine Leerzellen.

Hinweis: In vielen Funktionen gibt es auch die Option `na.rm = TRUE`, die fehlende Werte entfernt, z. B.:

```
var(Werte.sc, na.rm = TRUE)
```

Hauptkomponentenanalyse (PCA)

Die PCA berechnet ein Variablenset (Komponenten) in Form von linearen Gleichungen, die die linearen Beziehungen in den Daten erfassen. Die erste Komponente erfasst so viel Streuung (Varianz) wie möglich von allen Variablen als eine einzige lineare Funktion. Die zweite Komponente erfasst unkorreliert zur ersten Komponente so viel Streuung wie möglich, die nach der ersten Komponente verbleibt. Das geht so lange weiter, bis es so viele Komponenten gibt wie Variablen.

Bestimmung der Anzahl der Hauptkomponenten

Betrachten wir in einem ersten Schritt die wichtigsten Komponenten für die Werte. Wir finden die Komponenten mit `prcomp()`.

```
Werte.pc <- prcomp(Werte.sc)
summary(Werte.pc)
```

```
## Importance of components%s:
##
##          PC1      PC2      PC3      PC4      PC5      PC6      PC7
## Standard deviation  1.6907 1.5422 1.3841 1.14283 1.07975 0.88552 0.8298
## Proportion of Variance 0.1906 0.1585 0.1277 0.08707 0.07772 0.05228 0.0459
## Cumulative Proportion 0.1906 0.3491 0.4768 0.56391 0.64163 0.69391 0.7398
##
##          PC8      PC9      PC10      PC11      PC12      PC13
## Standard deviation  0.80784 0.78821 0.7599 0.74135 0.68836 0.64775
## Proportion of Variance 0.04351 0.04142 0.0385 0.03664 0.03159 0.02797
## Cumulative Proportion 0.78332 0.82474 0.8632 0.89988 0.93147 0.95944
##
##          PC14      PC15
## Standard deviation  0.64487 0.43884
## Proportion of Variance 0.02772 0.01284
## Cumulative Proportion 0.98716 1.00000
```

```
# Berechnung der Gesamtvarianz
```

```
Gesamtvarianz <- sum(Werte.pc$sdev^2)
Gesamtvarianz
```

```
## [1] 15
```

```
# Bei sum(Werte.pc$sdev^2) wird die Summe aller 15 Standardabweichungen berechnet.
```

```
# Varianzanteil der ersten Hauptkomponente
```

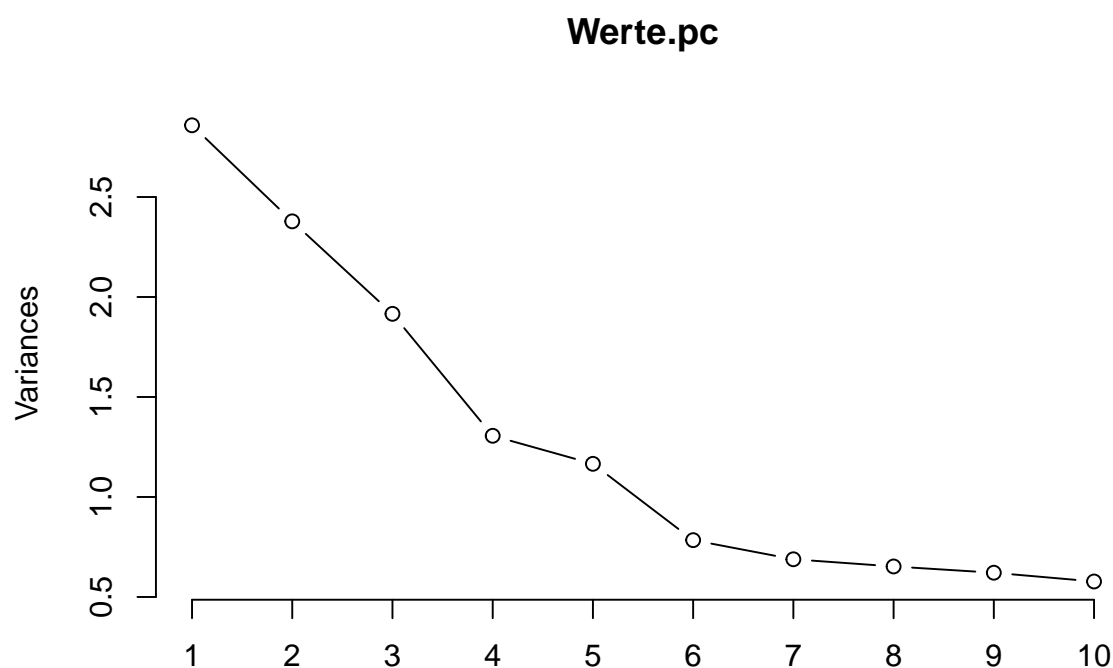
```
Werte.pc$sdev[1]^2/Gesamtvarianz
```

```
## [1] 0.1905689
```

Scree-Plot

Der Standard-Plot `plot()` für die PCA ist ein **Scree-Plot**, dieser zeigt uns in Reihenfolge der Hauptkomponenten jeweils die durch diese Hauptkomponente erfasste Streuung (Varianz). Wir plotten ein Liniendiagramm mit dem Argument `type = 'l'` (l für Linie):

```
plot(Werte.pc, type="l")
```



Wir sehen anhand des Scree-Plots, dass bei den Werte-Daten der Anteil der Streuung nach der fünften Komponente nicht mehr wesentlich abnimmt. Es soll die Stelle gefunden werden, ab der die Varianzen der Hauptkomponenten deutlich kleiner sind. Je kleiner die Varianzen, desto weniger Streuung erklärt diese Hauptkomponente.

Elbow-Kriterium

Nach diesem Kriterium werden alle Hauptkomponenten berücksichtigt, die links von der Knickstelle im Scree-Plot liegen. Gibt es mehrere Knicks, dann werden jene Hauptkomponenten ausgewählt, die links vom rechtesten Knick liegen. Gibt es keinen Knick, dann hilft der Scree-Plot nicht weiter. Bei den Werte-Daten tritt der Ellbogen, je nach Betrachtungsweise, entweder bei vier oder sechs Komponenten auf. Dies deutet darauf hin, dass die ersten fünf Komponenten die meiste Streuung in den Werte-Daten erklären.

Eigenwert-Kriterium

Der Eigenwert ist eine Metrik für den Anteil der erklärten Varianz. Die Anzahl Eigenwerte können wir über den Befehl `eigen()` ausgeben. An dieser Stelle können wir die original Daten nehmen, da wir keine unterschiedlichen Skalennstufen haben.

```
eigen(cor(Werte))
```

```
## eigen() decomposition
## $values
## [1] 2.8585328 2.3782591 1.9157861 1.3060498 1.1658554 0.7841482 0.6885614
## [8] 0.6525990 0.6212712 0.5774799 0.5495986 0.4738398 0.4195816 0.4158557
## [15] 0.1925814
##
## $vectors
##           [,1]      [,2]      [,3]      [,4]      [,5]
## [1,] -0.33604416 -0.25622090  0.128161949 -0.25708630 -0.31686659
## [2,] -0.33938849 -0.28521782  0.081849344 -0.15917643 -0.27168790
## [3,] -0.26388043 -0.31660619 -0.020871466 -0.35409613 -0.16300892
## [4,] -0.08232717 -0.33393447 -0.511129387  0.06869099  0.27375878
## [5,] -0.08708864 -0.34714315 -0.474128588  0.07565331  0.34831269
## [6,] -0.05342944  0.30307543 -0.218554329 -0.38300203  0.21851873
## [7,] -0.23623640  0.21437522 -0.256385690 -0.31711196 -0.08949205
## [8,] -0.15397729  0.32691967 -0.171467677 -0.34482751  0.14055059
## [9,] -0.27464246  0.33825802 -0.234044155  0.19355770 -0.14567446
## [10,] -0.30435792  0.21717193 -0.166429441  0.32257765 -0.24460149
## [11,] -0.27346924  0.23434490 -0.116388405  0.27914986 -0.16754023
## [12,] -0.29540078 -0.17177961  0.006053197  0.40251719 -0.00239680
## [13,] -0.31100983  0.05553932  0.338064762 -0.08652082  0.35043217
## [14,] -0.27757710  0.14689404  0.248735075  0.03424423  0.39595561
## [15,] -0.31880702 -0.07337078  0.274358131  0.12830750  0.37245140
##           [,6]      [,7]      [,8]      [,9]      [,10]
## [1,] -0.08891916  0.01202132 -0.041248709 -0.01408612  0.130206897
## [2,]  0.07516516  0.26627419 -0.135852146 -0.08580310 -0.157042163
## [3,]  0.01525403  0.10078342 -0.003367682  0.15291415  0.074930194
## [4,] -0.08815771  0.01520430 -0.055026932 -0.07919406  0.108873884
## [5,] -0.04338889  0.05838507  0.038565529 -0.06111274  0.096609791
## [6,]  0.29935020  0.46059789  0.328175909  0.38723990 -0.195176261
## [7,] -0.11693492 -0.53964197  0.422986131 -0.37907293 -0.148699391
## [8,]  0.14106740 -0.28547974 -0.709911656  0.08261177 -0.024519209
## [9,] -0.26810114  0.13054104 -0.123139927  0.16569043 -0.004325198
## [10,] -0.43448121  0.11076199  0.115161722  0.20479717 -0.084083249
```

```
## [11,]  0.54633532  0.10897837  0.020664210 -0.24850940  0.584651315
## [12,]  0.49131083 -0.25152458  0.024186081  0.11560439 -0.599990338
## [13,]  0.02771788 -0.11763325  0.352104105  0.05618006  0.237563841
## [14,] -0.16611769  0.39099628 -0.156832775 -0.58303462 -0.256953030
## [15,] -0.15648663 -0.24316239 -0.081935458  0.41348810  0.198545304
##           [,11]      [,12]      [,13]      [,14]      [,15]
## [1,]  0.31009355 -0.02696768  0.676083103  0.239639453 -0.014012424
## [2,]  0.38217601 -0.24114988 -0.556270220 -0.237090974 -0.026889620
## [3,] -0.73005040  0.30268343 -0.103662222 -0.052357923  0.016105582
## [4,]  0.07015185 -0.07370359  0.007483174  0.050894991  0.706143396
## [5,]  0.02274680 -0.09446330  0.050783912  0.009339351 -0.698648864
## [6,]  0.19617221  0.12114616  0.074648018  0.069167377  0.045368717
## [7,]  0.10393977  0.19427884 -0.107839123 -0.117816660 -0.016220508
## [8,] -0.04440720 -0.17554504 -0.064457279  0.220164114 -0.056024044
## [9,] -0.11465862 -0.16313432  0.283295448 -0.667112771  0.008995238
## [10,] -0.06376440 -0.03363296 -0.240797718  0.583661212 -0.038214621
## [11,]  0.01333556  0.17246152 -0.061627837  0.051558150 -0.004438732
## [12,] -0.11045917 -0.02350423  0.167934268  0.027612969  0.029341249
## [13,] -0.20176120 -0.64134659 -0.026203185  0.030445815  0.061558203
## [14,] -0.10337042  0.21220308  0.101912203  0.063464930  0.019925600
## [15,]  0.29517385  0.48735507 -0.132005347 -0.140461650 -0.002008972
```

Der Eigenwert einer Komponente/ eines Faktors sagt aus, wie viel Varianz dieser Faktor an der Gesamtvarianz aufklärt. Laut dem Eigenwert-Kriterium sollen nur Faktoren mit einem Eigenwert größer 1 extrahiert werden. Dies sind bei den Werte-Daten fünf Komponenten/ Faktoren, da fünf Eigenwerte größer 1 sind. Der Grund ist, dass Komponenten/ Faktoren mit einem Eigenwert kleiner als 1 weniger Erklärungswert haben als die ursprünglichen Variablen.

Dies kann auch grafisch mit dem `VSS.Scree` geplottet werden.

```
library(nFactors)
```

```
## Loading required package: MASS
##
## Attaching package: 'MASS'
##
## The following object is masked from 'package:dplyr':
##
##     select
##
## Loading required package: psych
##
## Attaching package: 'psych'
```



```
## The following objects are masked from 'package:mosaic':
##
##   logit, read.file, rescale

## The following objects are masked from 'package:ggplot2':
##
##   %+%, alpha

## Loading required package: boot

##
## Attaching package: 'boot'

## The following object is masked from 'package:psych':
##
##   logit

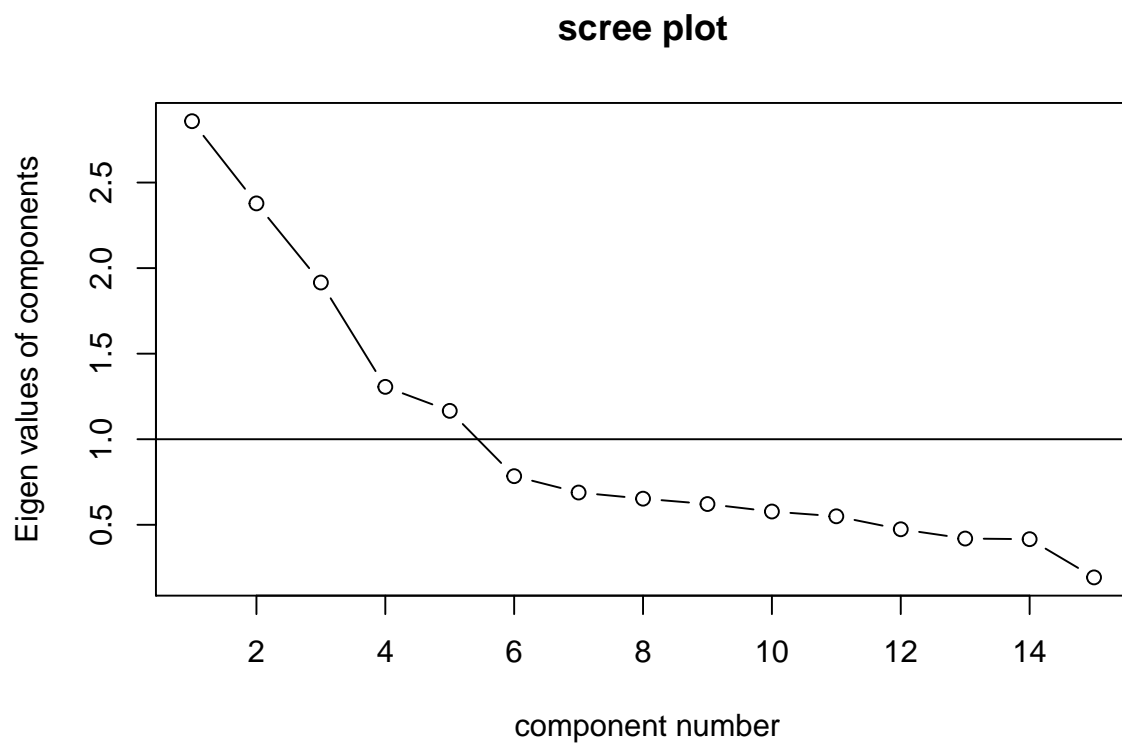
## The following object is masked from 'package:mosaic':
##
##   logit

## The following object is masked from 'package:lattice':
##
##   melanoma

##
## Attaching package: 'nFactors'

## The following object is masked from 'package:lattice':
##
##   parallel
```

VSS.scree (Werte)

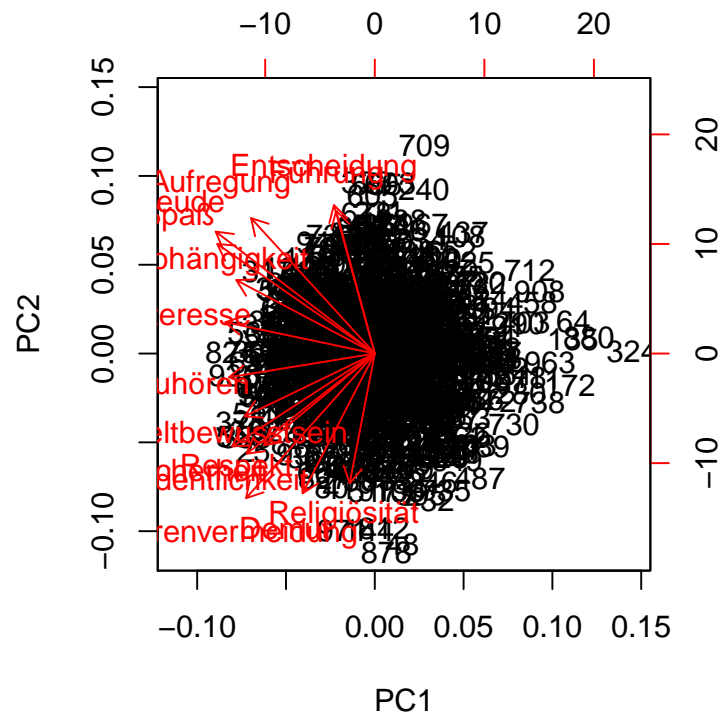


Biplot

Eine gute Möglichkeit die Ergebnisse der PCA zu analysieren, besteht darin, die ersten Komponenten zuzuordnen, die es uns ermöglichen, die Daten in einem niedrigdimensionalen Raum zu visualisieren. Eine gemeinsame Visualisierung ist ein Biplot. Dies ist ein zweidimensionales Diagramm von Datenpunkten in Bezug auf die ersten beiden Hauptkomponenten, die mit einer Projektion der Variablen auf die Komponenten überlagert wird.

Dazu verwenden wir `biplot()`:

```
biplot(Werte.pc)
```



Die Variablen-Gruppierungen sind als rote Ladungspfeile sichtbar. Zusätzlich erhalten wir einen Einblick in die Bewertungscluster (als dichte Bereiche von Beobachtungspunkten). Der Biplot ist hier durch die große Anzahl an Beobachtung recht unübersichtlich.

Extraktion der Komponenten

Am einfachsten lassen sich die Komponenten extrahieren mit dem `principal`-Befehl aus dem `psych`-Paket (ist durch das Paket `nFactors` bereits geladen)

```
Werte.pca<-principal(Werte, nfactors=5)
print(Werte.pca, cut=0.5, sort = TRUE, digits=2)
```

```
## Principal Components Analysis
## Call: principal(r = Werte, nfactors = 5)
## Standardized loadings (pattern matrix) based upon correlation matrix
##
```

	item	RC1	RC2	RC3	RC5	RC4	h2	u2	com
## Spaß	1	0.83					0.71	0.29	1.1
## Freude	2	0.78					0.65	0.35	1.2
## Aufregung	3	0.76					0.63	0.37	1.2
## Sicherheit	10		0.79				0.64	0.36	1.0
## Gefahrenvermeidung	9		0.75				0.67	0.33	1.3
## Ordentlichkeit	11		0.70				0.50	0.50	1.1
## Unabhängigkeit	12						0.53	0.47	4.2

```

## Entscheidung          5          0.94          0.89 0.11 1.0
## Führung              4          0.92          0.88 0.12 1.1
## Zuhören             13          0.77          0.66 0.34 1.2
## Interesse           15          0.76          0.63 0.37 1.2
## Umweltbewusstsein   14          0.73          0.57 0.43 1.2
## Religiosität        6          0.74 0.57 0.43 1.1
## Demut               8          0.72 0.56 0.44 1.2
## Respekt             7          0.62 0.54 0.46 1.8
##
##
##          RC1  RC2  RC3  RC5  RC4
## SS loadings      2.08 2.02 1.89 1.87 1.76
## Proportion Var    0.14 0.13 0.13 0.12 0.12
## Cumulative Var     0.14 0.27 0.40 0.52 0.64
## Proportion Explained 0.22 0.21 0.20 0.19 0.18
## Cumulative Proportion 0.22 0.43 0.62 0.82 1.00
##
## Mean item complexity = 1.4
## Test of the hypothesis that 5 components are sufficient.
##
## The root mean square of the residuals (RMSR) is 0.07
## with the empirical chi square 1037.66 with prob < 1.6e-191
##
## Fit based upon off diagonal values = 0.88

```

Interpretation der Ergebnisse der PCA I:

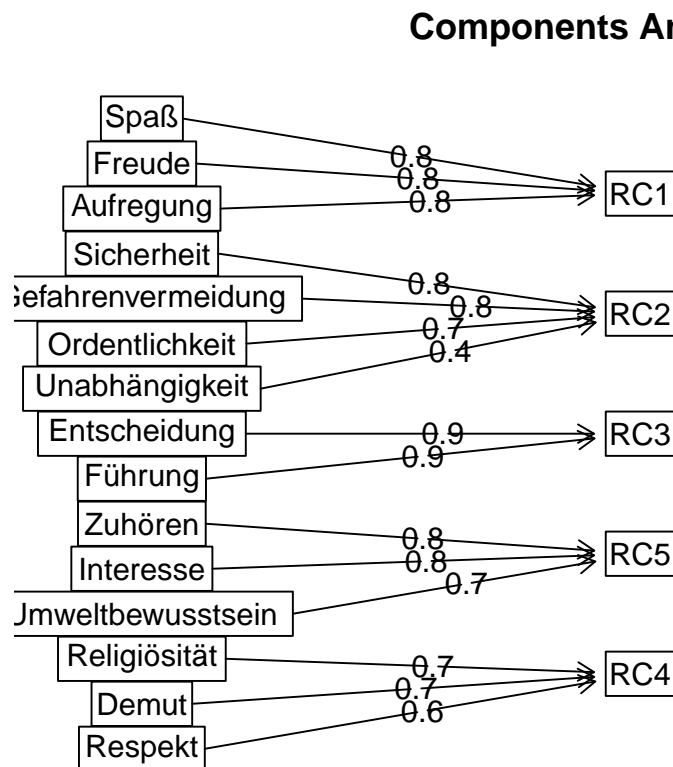
- Das Ergebnis sieht sehr gut aus. Es laden immer mehrere Items (mindestens 2) hoch ($> 0,5$) auf einer Komponente (die mit RC1 bis RC5 bezeichnet werden, RC steht für Rotated Component). Innerhalb einer PCA kann die Interpretierbarkeit über eine **Rotation** erhöht werden. Wenn die Rotation nicht ausgeschlossen wird (mit dem Argument `rotate='none'`), dann ist die Voreinstellung eine Varimax-Rotation.
- Es gibt keine Items die auf mehr als einer Komponente hoch laden. Die Ladungen sind Korrelationskoeffizienten zwischen den Items und den Hauptkomponenten.
- In der Zeile SS loadings finden wir die Eigenwerte der fünf Hauptkomponenten. Den Anteil an der Gesamtvarianz, den sie erklären, findet man in der Zeile Proportion Var. Aufsummiert sind die Anteile in der Zeile Cumulative Var. Insgesamt werden durch die fünf Hauptkomponenten 64% der Gesamtvarianz erklärt.
- Einzig das Item Unabhängigkeit lädt auf keine der Hauptkomponenten hoch.
- Die Erste Komponenten (RC1) könnte mit **Genuss**, die zweite (RC2) mit **Sicherheit**, die dritte

(RC3) mit **Annerkennung**, die vierte (RC4) mit **Konformismus** und die fünfte mit **Bewusstsein** bezeichnet werden.

Grafische Darstellung

Mit der Funktion `fa.diagram` kann das Ergebnis auch grafisch dargestellt werden.

```
fa.diagram(Werte.pca)
```



Exploratorische Faktorenanalyse (EFA)

EFA ist eine Methode, um die Beziehung von Konstrukten (Konzepten), d. h. Faktoren zu Variablen zu beurteilen. Dabei werden die Faktoren als **latente Variablen** betrachtet, die nicht direkt beobachtet werden können. Stattdessen werden sie empirisch durch mehrere Variablen beobachtet, von denen jede ein Indikator der zugrundeliegenden Faktoren ist. Diese beobachteten Werte werden als **manifeste Variablen** bezeichnet und umfassen Indikatoren. Die EFA versucht den Grad zu bestimmen, in dem Faktoren die beobachtete Streuung der manifesten Variablen berücksichtigen.

Vergleich zur PCA

Das Ergebnis der EFA ist ähnlich zur PCA: eine Matrix von Faktoren (ähnlich zu den PCA-Komponenten) und ihre Beziehung zu den ursprünglichen Variablen (Ladung der Faktoren auf die Variablen). Im

Gegensatz zur PCA versucht die EFA, Lösungen zu finden, die in den **manifesten Variablen maximal interpretierbar** sind. Im Allgemeinen versucht sie, Lösungen zu finden, bei denen eine kleine Anzahl von Ladungen für jeden Faktor sehr hoch ist, während andere Ladungen für diesen Faktor gering sind. Wenn dies möglich ist, kann dieser Faktor mit diesem Variablen-Set interpretiert werden.

Finden einer EFA Lösung

Als erstes muss die Anzahl der zu schätzenden Faktoren bestimmt werden. Hierzu verwenden wir wieder das Ellbow-Kriterium und das Eigenwert-Kriterium. Beide Kriterien haben wir schon bei der PCA verwendet, dabei kommen wir auf 5 Faktoren.

Durch das Paket `nFactors` bekommen wir eine formalisierte Berechnung der Scree-Plot Lösung mit dem Befehl `nScree()`

```
library(nFactors)
nScree(Werte)
```

```
##   noc naf nparallel nkaiser
## 1   5   3           5       5
```

`nScree` gibt vier methodische Schätzungen für die Anzahl an Faktoren durch den Scree-Plot aus. Wir sehen, dass drei von vier Methoden fünf Faktoren vorschlagen.

Schätzung der EFA

Eine EFA wird geschätzt mit dem Befehl `factanal(x, factors=k)`, wobei `k` die Anzahl Faktoren angibt.

```
Werte.fa<-factanal(Werte, factors=5)
Werte.fa
```

```
##
## Call:
## factanal(x = Werte, factors = 5)
##
## Uniquenesses:
```

	Spaß	Freude	Aufregung
	0.401	0.486	0.584
	Führung	Entscheidung	Religiösität
	0.243	0.139	0.660
	Respekt	Demut	Gefahrenvermeidung
	0.662	0.626	0.395
	Sicherheit	Ordentlichkeit	Unabhängigkeit
	0.481	0.729	0.713

```
##           Zuhören  Umweltbewusstsein           Interesse
##           0.463           0.666           0.561
##
## Loadings:
##           Factor1 Factor2 Factor3 Factor4 Factor5
## Spaß           0.756           0.147
## Freude           0.686           0.149
## Aufregung       0.172  0.611
## Führung         0.849  0.131           -0.133
## Entscheidung   0.921
## Religiösität    -0.123           0.568
## Respekt         0.154  0.266           0.492
## Demut           0.168           0.580
## Gefahrenvermeidung 0.715           0.298
## Sicherheit      0.710
## Ordentlichkeit   0.483  0.132  0.137
## Unabhängigkeit  0.188  0.230  0.268  0.265 -0.240
## Zuhören        -0.114  0.158           0.698  0.106
## Umweltbewusstsein 0.149  0.539  0.111
## Interesse       0.181           0.618 -0.109
##
##           Factor1 Factor2 Factor3 Factor4 Factor5
## SS loadings  1.668  1.600  1.473  1.332  1.116
## Proportion Var 0.111  0.107  0.098  0.089  0.074
## Cumulative Var 0.111  0.218  0.316  0.405  0.479
##
## Test of the hypothesis that 5 factors are sufficient.
## The chi square statistic is 93.28 on 40 degrees of freedom.
## The p-value is 3.83e-06
```

Eine übersichtlichere Ausgabe bekommen wir mit dem `print` Befehl, in dem wir zusätzlich noch die Dezimalstellen kürzen mit `digits=2`, alle Ladungen kleiner als 0,5 ausblenden mit `cutoff=.4` und die Ladungen mit `sort=TRUE` so sortieren, dass die Ladungen, die auf einen Faktor laden, untereinander stehen.

```
print(Werte.fa, digits=2, cutoff=.4, sort=TRUE)
```

```
##
## Call:
## factanal(x = Werte, factors = 5)
##
## Uniquenesses:
```

```

##           Spaß           Freude           Aufregung
##           0.40           0.49           0.58
##           Führung       Entscheidung       Religiösität
##           0.24           0.14           0.66
##           Respekt           Demut Gefahrenvermeidung
##           0.66           0.63           0.39
##           Sicherheit     Ordentlichkeit     Unabhängigkeit
##           0.48           0.73           0.71
##           Zuhören Umweltbewusstsein           Interesse
##           0.46           0.67           0.56
##
## Loadings:
##           Factor1 Factor2 Factor3 Factor4 Factor5
## Führung           0.85
## Entscheidung       0.92
## Spaß              0.76
## Freude              0.69
## Aufregung           0.61
## Gefahrenvermeidung           0.72
## Sicherheit           0.71
## Zuhören              0.70
## Umweltbewusstsein           0.54
## Interesse            0.62
## Religiösität              0.57
## Demut              0.58
## Respekt              0.49
## Ordentlichkeit           0.48
## Unabhängigkeit
##
##           Factor1 Factor2 Factor3 Factor4 Factor5
## SS loadings      1.67    1.60    1.47    1.33    1.12
## Proportion Var    0.11    0.11    0.10    0.09    0.07
## Cumulative Var    0.11    0.22    0.32    0.40    0.48
##
## Test of the hypothesis that 5 factors are sufficient.
## The chi square statistic is 93.28 on 40 degrees of freedom.
## The p-value is 3.83e-06

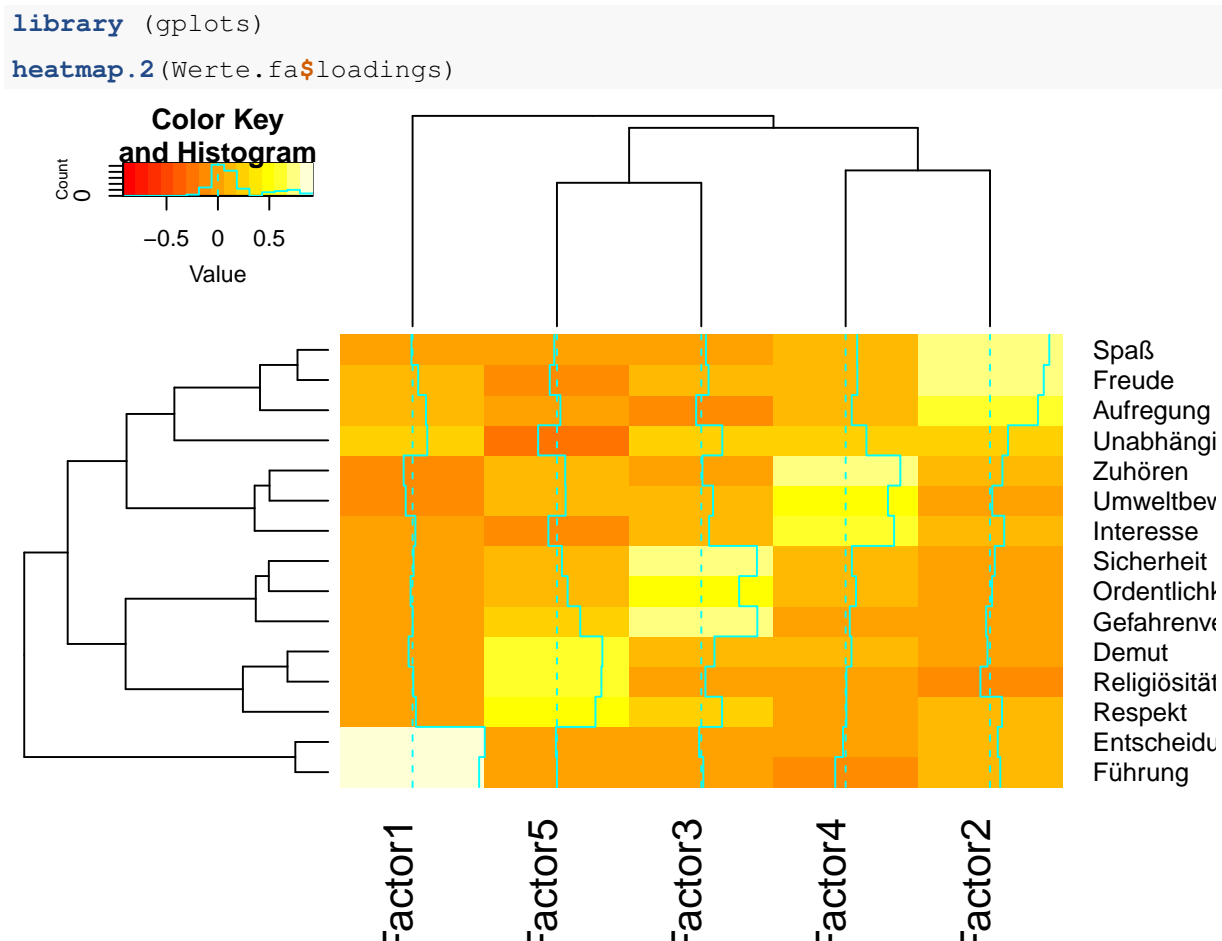
```

Standardmäßig wird bei `factanal()` eine Varimax-Rotation durchgeführt (das Koordinatensystem der Faktoren wird so rotiert, das eine optimale Zuordnung zu den Variablen erfolgt). Bei Varimax gibt es keine Korrelationen zwischen den Faktoren. Sollen Korrelationen zwischen den Faktoren zugelassen

werden, empfiehlt sich die Oblimin-Rotation mit dem Argument `rotation='oblimin'` aus dem Paket `GPArotation`.

Heatmap mit Ladungen

In der obigen Ausgabe werden die Item-to-Faktor-Ladungen angezeigt. Im zurückgegebenen Objekt `Werte.fa` sind diese als `$loadings` vorhanden. Wir können die Item-Faktor-Beziehungen mit einer Heatmap von `$loadings` visualisieren:



Das Ergebnis aus der Heatmap zeigt eine deutliche Trennung der Items in 5 Faktoren, die interpretierbar sind als **Anerkennung**, **Genuss**, **Sicherheit**, **Bewusstsein** und **Konformismus**.

Berechnung der Faktor-Scores

Zusätzlich zur Schätzung der Faktorstruktur kann die EFA auch die latenten Faktorwerte für jede Beobachtung schätzen. Die gängige Extraktionsmethode ist die Bartlett-Methode.

```
Werte.ob <- factanal(Werte, factors=5, scores="Bartlett")
Werte.scores <- data.frame(Werte.ob$scores)
names(Werte.scores) <- c("Anerkennung", "Genuss", "Sicherheit", "Bewusstsein", "Konformismus")
head(Werte.scores)
```

##	Anerkennung	Genuss	Sicherheit	Bewusstsein	Konformismus
## 1	1.3800613	0.9847458	0.5632629	0.1731918	-0.1062450
## 2	-1.4035495	-0.7210411	1.5965857	1.1664029	0.6950300
## 3	1.5320158	-0.6574901	1.6721041	-2.0027410	0.2390436
## 4	-0.5790217	2.3443732	-1.0564093	-1.1195018	-0.1176405
## 5	0.2344081	-1.6524010	1.1888042	-1.7013443	0.4374048
## 6	-0.1303264	0.1110535	-1.0532476	0.7911486	-1.0034994

Wir haben nun anstatt der 15 Variablen 5 Faktoren mit Scores. Die Dimensionen wurden um ein Drittel reduziert.

Bildung der Konstrukte durch Mittelwertbildung

Eine andere Möglichkeit ist die Bildung der Konstrukte über die Mittelwerte der Items. Dies ist jedoch nur sinnvoll, wenn einheitliche Skalen über alle Items hinweg vorliegen. Wir verwenden hierfür den Befehl `rowMeans`.

```
Werte$Anerkennung<-rowMeans(Werte[,c("Führung", "Entscheidung")], na.rm = TRUE)
Werte$Genuss<-rowMeans(Werte[,c("Spaß", "Freude", "Aufregung")], na.rm = TRUE)
Werte$Sicherheit<-rowMeans(Werte[,c("Gefahrenvermeidung", "Sicherheit",
                                     "Ordentlichkeit")], na.rm = TRUE)
Werte$Bewusstsein<-rowMeans(Werte[,c("Zuhören", "Umweltbewusstsein",
                                     "Interesse")], na.rm = TRUE)
Werte$Konformismus<-rowMeans(Werte[,c("Religiösität", "Respekt", "Demut")],
                              na.rm = TRUE)
```

Interne Konsistenz der Skalen

Das einfachste Maß für die **interne Konsistenz** ist die **Split-Half-Reliabilität**. Die Items werden in zwei Hälften unterteilt und die resultierenden Scores sollten in ihren Kenngrößen ähnlich sein. Hohe Korrelationen zwischen den Hälften deuten auf eine hohe interne Konsistenz hin. Das Problem ist, dass die Ergebnisse davon abhängen, wie die Items aufgeteilt werden. Ein üblicher Ansatz zur Lösung dieses Problems besteht darin, den Koeffizienten **Alpha (Cronbachs Alpha)** zu verwenden.

Cronbachs Alpha

Der Koeffizient **Alpha** ist der Mittelwert aller möglichen Split-Half-Koeffizienten, die sich aus verschiedenen Arten der Aufteilung der Items ergeben. Dieser Koeffizient variiert von 0 bis 1. Formal ist es ein korrigierter durchschnittlicher Korrelationskoeffizient.

Zufriedenstellende Reliabilität wird bei einem Alpha-Wert von 0.7 erreicht. Werte unter 0.5 gelten als nicht akzeptabel, Werte ab 0.8 als gut.

Bewertung von Sicherheit

Wir bewerten nun die interne Konsistenz der Items beispielhaft für das Konstrukt Sicherheit und nehmen zur Demonstration das Item Unabhängigkeit mit in die Analyse auf.

```
alpha(Werte[, c("Unabhängigkeit", "Zuhören", "Umweltbewusstsein", "Interesse")],
      check.keys=TRUE)
```

```
##
## Reliability analysis
## Call: alpha(x = Werte[, c("Unabhängigkeit", "Zuhören", "Umweltbewusstsein",
##      "Interesse")], check.keys = TRUE)
##
##      raw_alpha std.alpha G6(smc) average_r S/N   ase mean   sd
##      0.63      0.62      0.58      0.29 1.7 0.019  5.2 0.99
##
## lower alpha upper      95% confidence boundaries
## 0.59 0.63 0.67
##
## Reliability if an item is dropped:
##
##      raw_alpha std.alpha G6(smc) average_r S/N alpha se
## Unabhängigkeit      0.67      0.67      0.57      0.40 1.99      0.018
## Zuhören              0.50      0.49      0.41      0.25 0.98      0.027
## Umweltbewusstsein    0.57      0.56      0.48      0.30 1.28      0.024
## Interesse            0.48      0.48      0.40      0.23 0.91      0.028
##
## Item statistics
##
##      n raw.r std.r r.cor r.drop mean sd
## Unabhängigkeit 1000 0.54 0.57 0.31 0.24 5.6 1.3
## Zuhören         1000 0.75 0.74 0.62 0.49 5.0 1.5
## Umweltbewusstsein 1000 0.69 0.68 0.51 0.40 4.9 1.5
## Interesse       1000 0.75 0.75 0.64 0.51 5.2 1.4
##
## Non missing response frequency for each item
##
##      1 2 3 4 5 6 7 miss
## Unabhängigkeit 0.01 0.02 0.06 0.11 0.22 0.31 0.28 0
## Zuhören        0.02 0.05 0.09 0.17 0.25 0.25 0.18 0
## Umweltbewusstsein 0.02 0.04 0.12 0.20 0.24 0.23 0.16 0
## Interesse      0.01 0.04 0.08 0.14 0.22 0.30 0.21 0
```

Bei dem Konstrukt Sicherheit können wir durch Elimination von Unabhängigkeit das Cronbachs Alpha von 0,63 auf einen fast akzeptablen Wert von 0,69 erhöhen.

Das Argument `check.keys=TRUE` gibt uns eine Warnung aus, sollte die Ladung eines oder mehrerer Items negativ sein. Dies ist hier nicht der Fall, somit müssen auch keine Items recodiert werden.

Literatur

- Chris Chapman, Elea McDonnell Feit (2015): *R for Marketing Research and Analytics*, Kapitel 8.1-8.3
- Gareth James, Daniela Witten, Trevor Hastie, Robert Tibshirani (2013): *An Introduction to Statistical Learning – with Applications in R*, <http://www-bcf.usc.edu/~gareth/ISL/>, Kapitel 10.2, 10.4
- Reinhold Hatzinger, Kurt Hornik, Herbert Nagel (2011): *R – Einführung durch angewandte Statistik*. Kapitel 11
- Maike Luhmann (2015): *R für Einsteiger*, Kapitel 19

Versionshinweise:

- Datum erstellt: 2017-09-16
- R Version: 3.4.1

Kapitel 8: Einführung Clusteranalyse

Clusteranalyse

Wir werden einen *simulierten* Datensatz aus *Chapman & Feit (2015): R for Marketing Research and Analytics. Springer* analysieren (<http://r-marketing.r-forge.r-project.org>). Näheres dazu siehe Kapitel 5 dort.

Sie können ihn von hier als csv-Datei herunterladen:

```
download.file("https://goo.gl/eUm8PI", destfile = "segment.csv")
```

Das Einlesen erfolgt, sofern die Daten im Arbeitsverzeichnis liegen, wieder über:

```
segment <- read.csv2("segment.csv")
```

Ein Überblick über die Daten:

```
str(segment)
```

```
## 'data.frame':    300 obs. of  7 variables:
##  $ Alter          : num  50.2 40.7 43 40.3 41.1 ...
##  $ Geschlecht     : Factor w/ 2 levels "Frau","Mann": 2 2 1 2 1 2 1 2 1 1 ...
##  $ Einkommen      : num  51356 64411 71615 42728 71641 ...
##  $ Kinder         : int   0 3 2 1 4 2 5 1 1 0 ...
##  $ Eigenheim      : Factor w/ 2 levels "Ja","Nein": 2 2 1 2 2 1 2 2 2 2 ...
##  $ Mitgliedschaft: Factor w/ 2 levels "Ja","Nein": 2 2 2 2 2 2 1 1 2 2 ...
##  $ Segment        : Factor w/ 4 levels "Aufsteiger","Gemischte Vorstadt",...: 2 2 2 2 2 2
```

```
head(segment)
```

```
##      Alter Geschlecht Einkommen Kinder Eigenheim Mitgliedschaft
## 1 50.16825      Mann  51355.75      0      Nein      Nein
## 2 40.67330      Mann  64411.10      3      Nein      Nein
## 3 42.98939      Frau  71614.94      2       Ja      Nein
## 4 40.31963      Mann  42727.96      1      Nein      Nein
## 5 41.08368      Frau  71640.62      4      Nein      Nein
## 6 40.17045      Mann  60325.41      2       Ja      Nein
##
##      Segment
## 1 Gemischte Vorstadt
## 2 Gemischte Vorstadt
## 3 Gemischte Vorstadt
## 4 Gemischte Vorstadt
## 5 Gemischte Vorstadt
## 6 Gemischte Vorstadt
```

Zur Unterstützung der Analyse wird (wieder) `mosaic` verwendet:

```
library(mosaic)
```

Das Ziel einer Clusteranalyse ist es, Gruppen von Beobachtungen (d. h. *Cluster*) zu finden, die innerhalb der Cluster möglichst homogen, zwischen den Clustern möglichst heterogen sind. Um die Ähnlichkeit von Beobachtungen zu bestimmen, können verschiedene Distanzmaße herangezogen werden. Für metrische Merkmale wird z. B. häufig die euklidische Metrik verwendet, d. h., Ähnlichkeit und Distanz werden auf Basis des euklidischen Abstands bestimmt. Aber auch andere Abstände wie Manhattan oder Gower sind möglich. Letztere haben den Vorteil, dass sie nicht nur für metrische Daten sondern auch für gemischte Variablentypen verwendet werden können.

Auf Basis der drei metrischen Merkmale (d. h. Alter, Einkommen und Kinder) ergeben sich für die ersten sechs Beobachtungen folgende Abstände:

```
dist(head(segment))
```

```
## Warning in dist(head(segment)): NAs durch Umwandlung erzeugt

##           1           2           3           4           5
## 2 19942.38233
## 3 30946.42599 11004.04804
## 4 13179.17559 33121.54360 44125.59103
## 5 30985.65446 11043.27434   39.45317 44164.81792
## 6 13701.39082 6240.99480 17245.04247 26880.54893 17284.26910
```

Sie können erkennen, dass die Beobachtungen 5 und 3 den kleinsten Abstand haben, während 5 und 4 den größten haben. Allerdings zeigen die Rohdaten auch, dass die euklidischen Abstände von der Skalierung der Variablen abhängen (Einkommen streut stärker als Kinder). Daher kann es evt. sinnvoll sein, die Variablen vor der Analyse zu standardisieren (z. B. über `scale()`). Die Funktion `daisy()` aus dem Paket `cluster` bietet hier nützliche Möglichkeiten.

```
library(cluster)
```

```
daisy(head(segment))
```

```
## Dissimilarities :
##           1           2           3           4           5
## 2 0.3073211
## 3 0.5598210 0.3901170
## 4 0.2190697 0.1836184 0.5023068
## 5 0.5157498 0.2201562 0.2416431 0.4037746
## 6 0.4014618 0.2059440 0.2389181 0.2676518 0.4261002
##
## Metric : mixed ; Types = I, N, I, I, N, N, N
## Number of objects : 6
```

Hierarchische Clusteranalyse

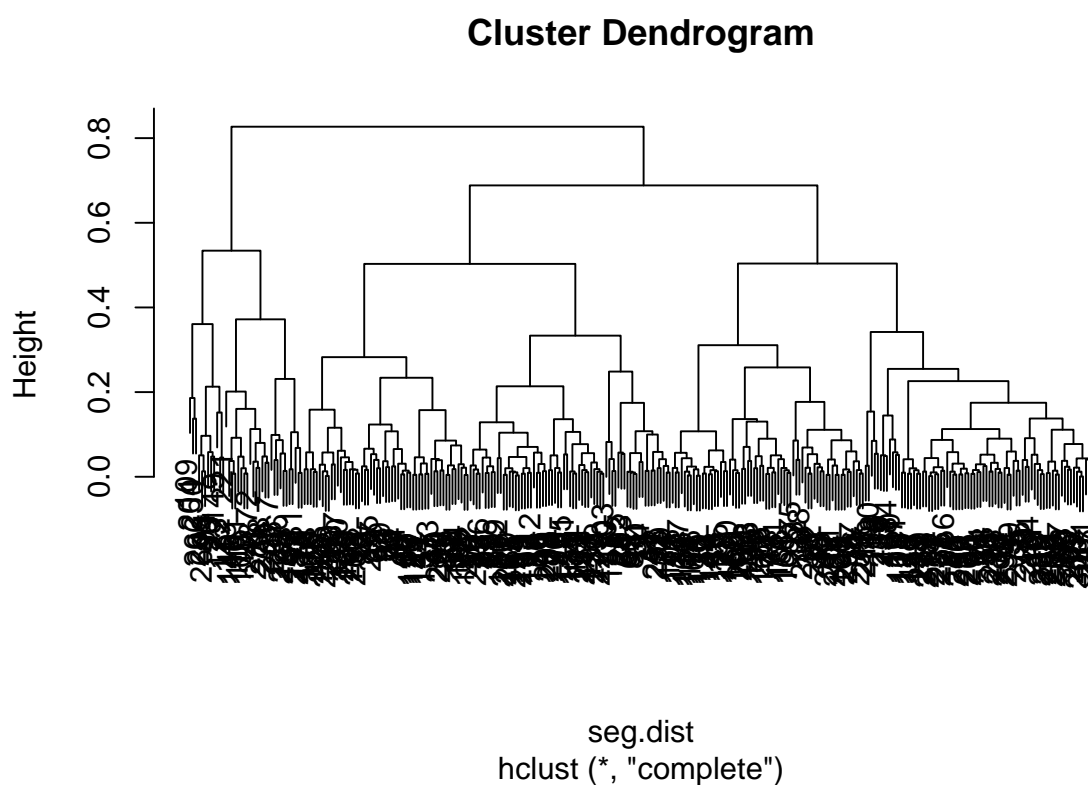
Bei hierarchischen Clusterverfahren werden Beobachtungen sukzessiv zusammengefasst (agglomerativ). Zunächst ist jede Beobachtung ein eigener Cluster, die dann je nach Ähnlichkeitsmaß zusammengefasst werden.

Fassen wir die Beobachtungen *ohne* die Segmentvariable Segment, Variable 7, zusammen:

```
seg.dist <- daisy(segment[, -7]) # Abstände
seg.hc <- hclust(seg.dist) # Hierarchische Clusterung
```

Das Ergebnis lässt sich schön im Dendrogramm darstellen:

```
plot(seg.hc)
```

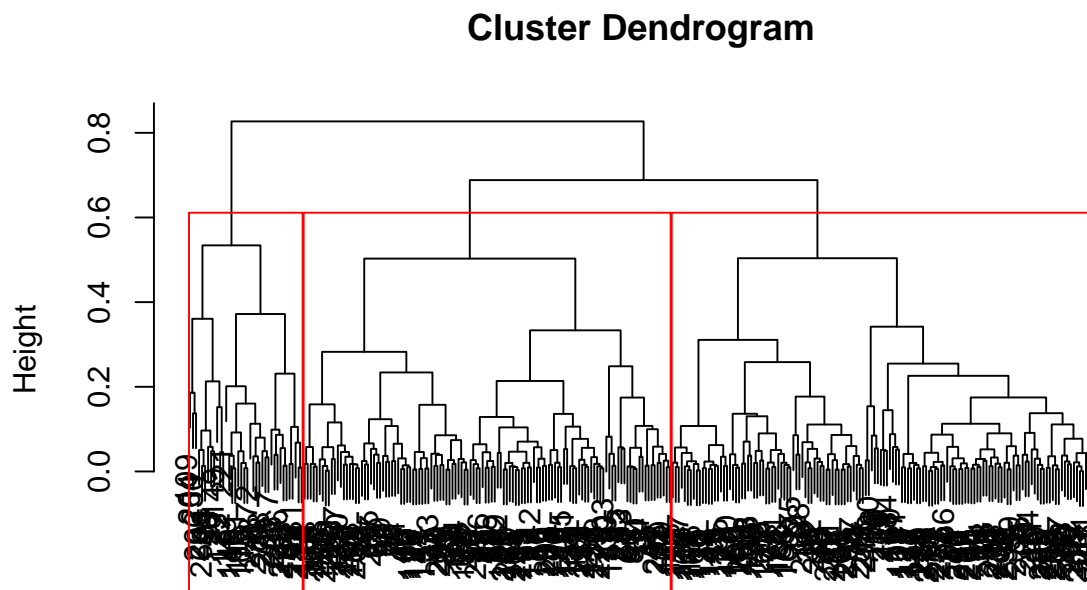


Je höher (Height) die Stelle ist, an der zwei Beobachtungen oder Cluster zusammengefasst werden, desto größer ist die Distanz. D. h., Beobachtungen bzw. Cluster, die unten zusammengefasst werden, sind sich ähnlich, die, die oben zusammengefasst werden unähnlich.

Hier wurde übrigens die Standardeinstellung für die Berechnung des Abstands von Clustern verwendet: Complete Linkage bedeutet, dass die Distanz zwischen zwei Clustern auf Basis des maximalen Abstands der Beobachtungen innerhalb des Clusters gebildet wird.

Es ist nicht immer einfach zu entscheiden, wie viele Cluster es gibt. In der Praxis und Literatur finden sich häufig Zahlen zwischen 3 und 10. Evt. gibt es im Dendrogramm eine Stelle, an der der Baum gut geteilt werden kann. In unserem Fall vielleicht bei einer Höhe von 0.6, da sich dann 3 Cluster ergeben:

```
plot(seg.hc)
rect.hclust(seg.hc, h=0.6, border="red")
```



```
seg.dist
hclust(*, "complete")
```

Das Ergebnis, d. h. die Clusterzuordnung, kann durch den Befehl `cutree()` den Beobachtungen zugeordnet werden.

```
segment$hc.clust <- cutree(seg.hc, k=3)
```

Z. B. haben wir folgende Anzahlen für Beobachtungen je Cluster:

```
tally(~hc.clust, data=segment)
```

```
## hc.clust
##    1    2    3
## 140 122  38
```

Cluster 3 ist also mit Abstand der kleinste Cluster (mit 38 Beobachtungen).

Für den Mittelwert des Alters je Cluster gilt:

```
mean(Alter~hc.clust, data=segment)
```

```
##           1           2           3
## 38.53910 46.42365 34.48440
```

D. h., das Durchschnittsalter ist in Cluster 3 ca. 4 Jahre jünger als in 1 – und 12 Jahre jünger als in 2.

Das spiegelt sich auch im Einkommen wieder:


```
mean(Einkommen~hc.clust, data=segment)
```

```
##           1           2           3
## 49452.33 54355.46 44113.01
```

Allerdings sind die Unterschiede in der Geschlechtsverteilung eher gering:

```
tally(Geschlecht~hc.clust, data=segment, format="proportion")
```

```
##           hc.clust
## Geschlecht           1           2           3
##      Frau 0.5428571 0.5491803 0.5263158
##      Mann 0.4571429 0.4508197 0.4736842
```

k-Means Clusteranalyse

Beim k-Means Clusterverfahren handelt es sich im Gegensatz zur hierarchischen Clusteranalyse um ein partitionierendes Verfahren. Die Daten werden in k Cluster aufgeteilt – dabei muss die Anzahl der Cluster im vorhinein feststehen. Ziel ist es, dass die Quadratsumme der Abweichungen der Beobachtungen im Cluster zum Clusterzentrum minimiert wird.

Der Ablauf des Verfahrens ist wie folgt:

1. Zufällige Beobachtungen als Clusterzentrum
2. Zuordnung der Beobachtungen zum nächsten Clusterzentrum (Ähnlichkeit, z. B. über die euklidische Distanz)
3. Neuberechnung der Clusterzentren als Mittelwert der dem Cluster zugeordneten Beobachtungen

Dabei werden die Schritte 2. und 3. solange wiederholt, bis sich keine Änderung der Zuordnung mehr ergibt – oder eine maximale Anzahl an Iterationen erreicht wurde.

Hinweis: Die (robuste) Funktion `pam()` aus dem Paket `cluster` kann auch mit allgemeinen Distanzen umgehen. Außerdem für gemischte Variablentypen gut geeignet: Das Paket `clustMixType`.

Zur Vorbereitung überführen wir die nominalen Merkmale in logische, d. h. binäre Merkmale, und löschen die Segmente sowie das Ergebnis der hierarchischen Clusteranalyse:

```
segment.num <- segment %>%
  mutate(Frau = Geschlecht=="Frau") %>%
  mutate(Eigenheim = Eigenheim=="Ja") %>%
  mutate(Mitgliedschaft = Mitgliedschaft=="Ja") %>%
  select(-Geschlecht, -Segment, -hc.clust)
```

Über die Funktion `mutate()` werden Variablen im Datensatz erzeugt oder verändert. Über `select()` werden einzelne Variablen ausgewählt. Die "Pfeife" `%>%` übergeben das Ergebnis der vorherigen Funktion an die folgende.

Aufgrund von (1.) hängt das Ergebnis einer k-Means Clusteranalyse vom Zufall ab. Aus Gründen der Reproduzierbarkeit sollte daher der Zufallszahlengenerator gesetzt werden. Außerdem bietet es sich an verschiedene Startkonfigurationen zu versuchen. In der Funktion `kmeans()` erfolgt dies durch die Option `nstart=`. Hier mit `k=4` Clustern:

```
set.seed(1896)

seg.k <- kmeans(segment.num, centers = 4, nstart = 10)
seg.k

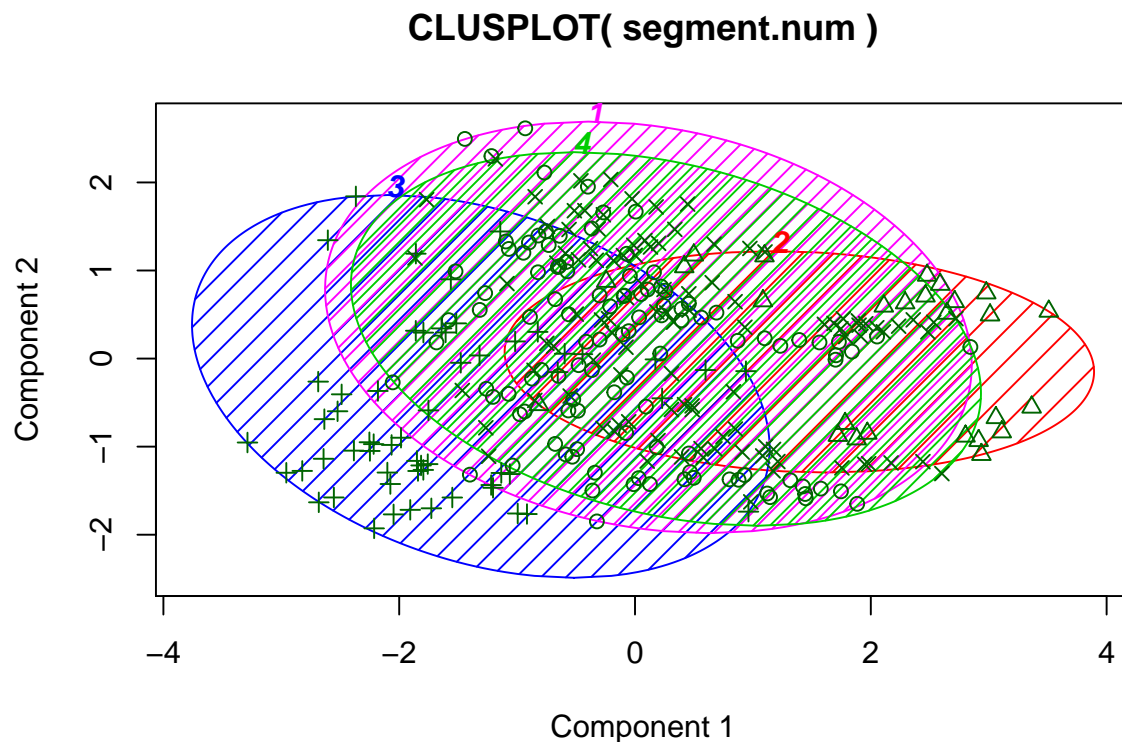
## K-means clustering with 4 clusters of sizes 111, 26, 58, 105
##
## Cluster means:
##      Alter Einkommen      Kinder Eigenheim Mitgliedschaft      Frau
## 1  42.91293  46049.08 1.6486486 0.5045045      0.10810811 0.5675676
## 2  56.35833  85972.56 0.3846154 0.5384615      0.03846154 0.5384615
## 3  27.01882  22607.81 1.2241379 0.2758621      0.20689655 0.4137931
## 4  43.56022  62599.99 1.5047619 0.4571429      0.12380952 0.5904762
##
## Clustering vector:
##  [1] 1 4 4 1 4 4 4 1 2 4 1 1 4 4 1 1 1 1 1 4 4 4 1 4 1 1 1 1 4 1 4 4 1 1 2
## [36] 1 4 1 1 4 4 4 1 4 4 4 4 1 1 1 1 1 2 1 1 4 4 4 4 1 4 1 4 1 1 1 1 4 4 4
## [71] 4 1 1 4 1 1 4 4 4 4 1 4 1 3 1 4 1 1 1 1 4 4 4 1 1 4 1 4 4 4 3 3 3 3 3
## [106] 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3
## [141] 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 1 2 4 2 2 4 1 1 2 2 4 4 1 1 4 2 4 4 1 2 2 3 4 1 2
## [176] 2 4 2 3 4 4 4 1 1 1 1 1 1 4 3 1 4 4 4 4 1 1 1 2 4 4 1 2 4 4 1 4 2 1 2
## [211] 4 3 4 2 2 4 2 1 4 3 1 2 2 4 2 4 4 1 4 4 1 1 1 1 1 3 1 1 4 1 4 3 1 4 1
## [246] 4 1 4 1 4 4 4 4 1 1 1 4 4 1 1 1 1 1 1 4 1 1 1 1 1 2 4 4 1 4 1 1 1 1 2
## [281] 4 4 4 4 1 4 1 4 4 4 1 4 1 4 1 4 1 1 4 1
##
## Within cluster sum of squares by cluster:
## [1] 3178960729 2217438154 1689348448 2811630349
## (between_SS / total_SS =  90.6 %)
##
## Available components:
##
## [1] "cluster"      "centers"      "totss"        "withinss"
## [5] "tot.withinss" "betweenss"    "size"         "iter"
## [9] "ifault"
```

Neben der Anzahl Beobachtungen im Cluster (z. B. 26 in Cluster 2) werden auch die Clusterzentren ausgegeben. Diese können dann direkt verglichen werden. Sie sehen z. B., dass das Durchschnittsalter

in Cluster 3 mit 27 am geringsten ist. Der Anteil der Eigenheimbesitzer ist mit 54 % in Cluster 2 am höchsten.

Einen Plot der Scores auf den beiden ersten Hauptkomponenten können Sie über die Funktion `clusplot()` aus dem Paket `cluster` erhalten.

```
clusplot(segment.num, seg.k$cluster,
          color = TRUE, shade = TRUE, labels = 4)
```



These two components explain 50.83 % of the point variability.

Wie schon im deskriptiven Ergebnis: Die Cluster 1 und 4 unterscheiden sich (in den ersten beiden Hauptkomponenten) nicht wirklich. Vielleicht sollten dies noch zusammengefasst werden, d. h., mit `centers=3` die Analyse wiederholt werden?⁶

Übung: B3 Datensatz

Der B3 Datensatz *Heilemann, U. and Münch, H.J. (1996): West German Business Cycles 1963-1994: A Multivariate Discriminant Analysis. CIRET-Conference in Singapore, CIRET-Studien 50.* enthält Quartalsweise Konjunkturdaten aus (West-)Deutschland.

Er kann von <https://goo.gl/0YCEHf> heruntergeladen werden.

⁶Das Paket `NbClust`, siehe Malika Charrad, Nadia Ghazzali, Veronique Boiteau, Azam Niknafs (2014) *NbClust: An R Package for Determining the Relevant Number of Clusters in a Data Set*, Journal of Statistical Software, 61(6), 1-36. <http://dx.doi.org/10.18637/jss.v061.i06>, bietet viele Möglichkeiten die Anzahl der Cluster optimal zu bestimmen.

1. Wenn die Konjunkturphase PHASEN nicht berücksichtigt wird, wie viele Cluster könnte es geben? Ändert sich das Ergebnis, wenn die Variablen standardisiert werden?
2. Führen Sie eine k-Means Clusteranalyse mit 4 Clustern durch. Worin unterscheiden sich die gefundenen Segmente?

Literatur

- Chris Chapman, Elea McDonnell Feit (2015): *R for Marketing Research and Analytics*, Kapitel 11.3
- Reinhold Hatzinger, Kurt Hornik, Herbert Nagel (2011): *R – Einführung durch angewandte Statistik*. Kapitel 12
- Gareth James, Daniela Witten, Trevor Hastie, Robert Tibshirani (2013): *An Introduction to Statistical Learning – with Applications in R*, <http://www-bcf.usc.edu/~gareth/ISL/>, Kapitel 10.3, 10.5

Lizenz

Diese Übung wurde von Karsten Lübke entwickelt und orientiert sich am Beispiel aus Kapitel 11.3 aus Chapman und Feit (2015) und steht unter der Lizenz Creative Commons Attribution-ShareAlike 3.0 Unported. Der Code steht unter der Apache Lizenz 2.0

Versionshinweise:

- Datum erstellt: 2017-09-16
- R Version: 3.4.1
- mosaic Version: 1.1.0
- cluster Version: 2.0.6

Anhang 1: R Kurzreferenz

Vorbemerkungen

Eine Übersicht von nützlichen R Funktionen innerhalb der Datenanalyse.

Diese Kurzreferenz beschreibt ein kleinen Teil der R Funktionen, wobei größtenteils auf das Zusatzpaket `mosaic` zurückgegriffen wird. Sie basiert weitgehend auf der Vignette `Minimal R` von Randall Pruim.

Weitere Hilfe und Beispiele finden Sie, wenn Sie

```
> ?plot
```

eingeben.

- R unterscheidet zwischen Groß- und Kleinbuchstaben.
- R verwendet den Punkt `.` als Dezimaltrennzeichen.
- Fehlende Werte werden in R durch `NA` kodiert.
- Kommentare werden mit dem Rautezeichen `#` eingeleitet; der Rest der Zeile von `R` dann ignoriert.
- R wendet Befehle direkt an.
- R ist objektorientiert, d. h., dieselbe Funktion hat evtl. je nach Funktionsargument unterschiedliche Rückgabewerte.
- Zusätzliche Funktionalität kann über Zusatzpakete hinzugeladen werden. Diese müssen ggf. zunächst installiert werden.
- Mit der Pfeiltaste nach oben können Sie einen vorherigen Befehl in der Konsole wieder aufrufen.
- Eine Ergebniszuzuweisung erfolgt über `<-`

Innerhalb von `mosaic`:

```
analysiere(y ~ x | z , data=Daten)
```

d. h., modelliere `y` in Abhängigkeit von `x` getrennt bzw. bedingt für `z` aus dem Datensatz `Daten`. Dabei können Teile (z. B. `y` und/ oder `z`) fehlen.⁷

Zusatzpakete müssen vor der ersten Benutzung einmalig installiert und nach jedem Neustart von R geladen werden:

```
install.packages("Paket") # Einmalig installieren
library(Paket) # Laden, einmalig in jeder Sitzung
```

Daten

Daten einlesen und Datenvorverarbeitung sind häufig der (zeitlich) aufwendigste Teil einer Datenanalyse. Da die Daten die Grundlage sind, sollte auch hier sorgfältig gearbeitet und überprüft werden.

⁷Beim Mac ist `~` die Tastenkombination `alt+n`, `|` die Tastenkombination `alt+7`

Daten einlesen

```
read.table() # Allgemeinen Datensatz einlesen. Achtung: Optionen anpassen
read.csv2() # csv Datensatz einlesen (aus deutschsprachigem Excel)
file.choose() # Datei auswählen
meineDaten <- read.csv2(file.choose())
```

U. a. mit Hilfe des Zusatzpaketes `readxl` können Excel Dateien eingelesen werden:

```
meineDaten <- read_excel(file.choose())
```

Daten verarbeiten

```
str() # Datenstruktur
head() # Obere Zeilen
tail() # Untere Zeilen
nrow(); ncol() # Anzahl Zeilen; Spalten
rownames(); colnames() # Zeilennamen, Spaltennamen
```

Daten transformieren

Einzelne Variablen eines Datensatzes können über `$` ausgewählt werden: `Daten$Variable`. Allgemein kann über `Daten[i, j]` die *i*-te Zeile und *j*-te Spalte ausgewählt werden, wobei auch mehrere oder keine Zeile(n) bzw. Spalte(n) ausgewählt werden können. Über `c()` wird ein Vektor erzeugt. Mit `-` vor der Auswahl werden der Rest ohne die Auswahl ausgewählt.

```
as.factor() # Daten als Faktoren definieren
relevel() # Faktorstufen umordnen
droplevels() # Ungenutzte Faktorstufen entfernen
recode() # Umkodierung von Werten, Paket car
as.numeric() # Faktorstufen als numerische Daten verwenden
cut() # Aufteilung numerischer Werte in Intervalle

subset() # Teilmenge der Daten auswählen
na.omit() # Zeilen mit fehlenden Werten entfernen

log() # Logarithmusfunktion
exp() # Exponentialfunktion
sqrt() # Quadratwurzelfunktion
abs() # Betragsfunktion

rowSums() # Zeilensumme
```

```
rowMeans() # Zeilenmittelwert
```

Innerhalb des Paketes `dplyr` (wird mit `mosaic` geladen) gibt es u. a. folgende Funktionen:

```
filter() # Filtert Beobachtungen eines Datensatzes  
select() # Wählt Variablen eines Datensatzes aus  
mutate() # Erzeugt neue Variable bzw. verändert bestehende  
rename() # Benennt Variablen um  
arrange() # Sortiert Beobachtungen eines Datensatzes  
%>% # Übergebe das Ergebnis der vorhergehenden Funktion an die folgende
```

Grafische Verfahren

Vor jeder mathematisch-statistischen Analyse sollte eine explorative, grafische Analyse erfolgen. Die folgenden Befehle sind aus dem Paket `mosaic`.

```
bargraph() # Balkendiagramm  
histogram() # Histogramm  
bwplot() # Boxplot  
xyplot() # Streudiagramm
```

Nicht aus dem Paket `mosaic` sind:

```
mosaicplot() # Mosaicplot  
corrplot() # Korrelationsplot, Paket corrplot  
ggpairs() # Matrixplot, Paket GGally  
heatmap() # Heatmap
```

Deskriptive Statistik

Eine gute Zusammenfassung liefert der `mosaic` Befehl:

```
favstats()
```

Ansonsten (`mosaic` angepasst):

```
tally() # Tabellierung, Häufigkeiten  
prop() # Anteile  
mean() # Arithmetischer Mittelwert  
median() # Median  
quantile() # Quantile  
sd() # Standardabweichung  
var() # Varianz  
IQR() # Interquartilsabstand  
cov() # Kovarianz  
cor() # Korrelationskoeffizient
```

Inferenzstatistik

Randomisierung, Simulationen

Größtenteils `mosaic`:

```
set.seed() # Zufallszahlengenerator setzen  
rflip() # Münzwurf  
do() # Wiederholung (Schleife)  
sample() # Stichprobe ohne Zurücklegen  
resample() # Stichprobe mit Zurücklegen  
shuffle() # Permutation  
rnorm() # Normalverteilte Zufallszahlen
```

Verteilungen

Innerhalb der Funktionen müssen ggf. die Parameter, d. h. `mean=`, `sd=` bzw. `df=` angepasst werden.
(Das vorgestellte `x` steht für in `mosaic` angepasste Versionen.)

```
xpchisq() # Verteilungsfunktion  $\chi^2$  Verteilung  
xqchisq() # Quantilsfunktion  $\chi^2$  Verteilung  
xpnorm() # Verteilungsfunktion Normalverteilung  
xqnorm() # Quantilsfunktion Normalverteilung  
xpt() # Verteilungsfunktion t-Verteilung  
xqt() # Quantilsfunktion t-Verteilung
```


Analoger Aufbau für weitere Verteilungen, z. B. `_binom()` (Binomialverteilung), `_f()` (F-Verteilung).

Testverfahren

Einige der Testverfahren wurden von `mosaic` angepasst.

```
t.test() # t-Test
prop.test() # Binomialtest (approximativ)
xchisq.test() # Chi2-Test
aov() # Varianzanalyse
```

Der nicht-parametrische Wilcoxon-Test `wilcox.test()` ist nicht im Paket `mosaic` enthalten, hat daher einen leicht anderen Funktionsaufruf. Einen Test auf Normalverteilung führt der Shapiro-Wilk Test durch: `shapiro.test()`.

Multivariate Verfahren

```
lm() # Lineare Regression
glm(), family="binomial" # Logistische Regression
plotModel() # Modell zeichnen
coef() # Koeffizienten extrahieren
residuals() # Residuen einer Regression
fitted() # Angepasste Werte einer Regression
predict() # Vorhersagen
```

In `mosaic` kann das Ergebnis einer solchen Regression über `makeFun()` in eine einfache mathematische Funktion überführt werden. `plotFun()` zeichnet das Ergebnis. `step()` führt eine Variablenselektion durch.

Weitere Verfahren – nicht `mosaic`:

```
prcomp() # Hauptkomponentenanalyse (PCA)
alpha() # Reliabilitätsanalys, Paket psych
dist() # Distanzen
hclust() # Hierarchische Clusteranalyse
kmeans() # k-Means Clusterverfahren
rpart() # Klassifikations- und Regressionsbäume, Paket rpart
```

Versionshinweise:

Erstellt von Karsten Lübke unter der Lizenz Creative Commons Attribution-ShareAlike 3.0 Unported.

- Datum erstellt: 2017-09-16
- R Version: 3.4.1

- `mosaic` Version: 1.1.0

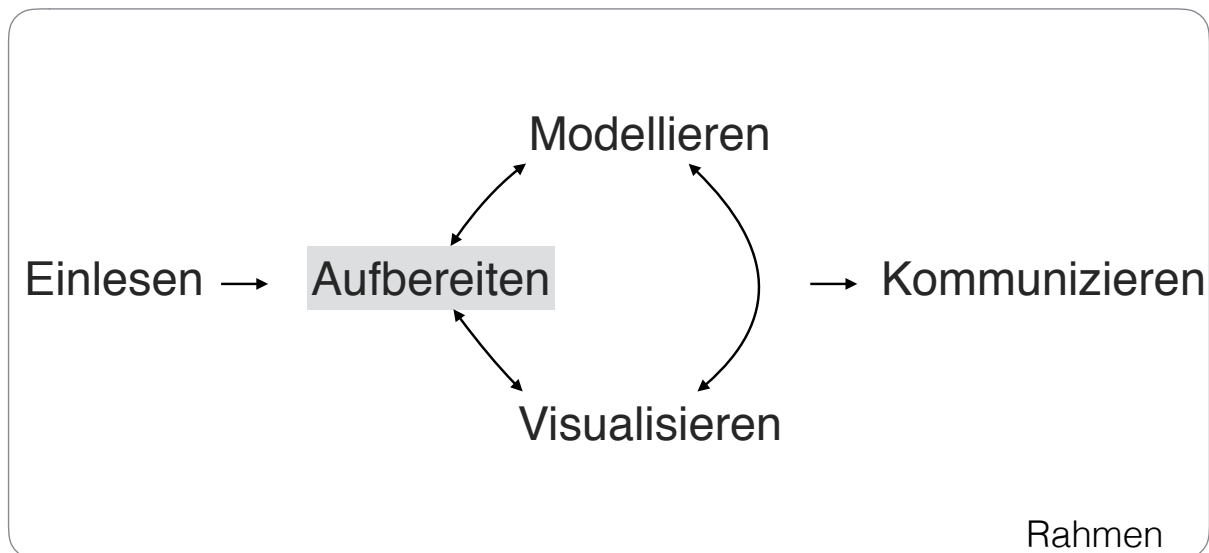


Abbildung 1: Daten aufbereiten

Anhang 2: Datenjudo

In diesem Kapitel benötigte Pakete:

```
library(tidyverse)  # Datenjudo
```

```
## Loading tidyverse: tibble
## Loading tidyverse: tidyr
## Loading tidyverse: readr
## Loading tidyverse: purrr
```

```
## Conflicts with tidy packages -----
```

```
## %>%():      ggplot2, psych
## alpha():    ggplot2, psych
## count():    dplyr, mosaic
## cross():    purrr, mosaic
## do():       dplyr, mosaic
## expand():   tidyr, Matrix
## filter():   dplyr, stats
## lag():      dplyr, stats
## select():   dplyr, MASS
## tally():    dplyr, mosaic
```

```
library(stringr)  # Texte bearbeiten
```

```
library(car)  # für 'recode'
```

```
##
```

```
## Attaching package: 'car'
```

```
## The following object is masked from 'package:purrr':  
##  
##      some  
  
## The following object is masked from 'package:boot':  
##  
##      logit  
  
## The following object is masked from 'package:psych':  
##  
##      logit  
  
## The following objects are masked from 'package:carData':  
##  
##      Guyer, UN, Vocab  
  
## The following objects are masked from 'package:mosaic':  
##  
##      deltaMethod, logit  
  
## The following object is masked from 'package:dplyr':  
##  
##      recode
```

Mit *Datenjudo* ist gemeint, die Daten für die eigentliche Analyse “aufzubereiten”. Unter *Aufbereiten* ist hier das Umformen, Prüfen, Bereinigen, Gruppieren und Zusammenfassen von Daten gemeint. Die deskriptive Statistik fällt unter die Rubrik Aufbereiten. Kurz gesagt: Alles, was man tut, nachdem die Daten “da” sind und bevor man mit anspruchsvoller(er) Modellierung beginnt.

Ist das Aufbereiten von Daten auch nicht statistisch anspruchsvoll, so ist es trotzdem von großer Bedeutung und häufig recht zeitintensiv. Eine Anekdote zur Relevanz der Datenaufbereitung, die (so will es die Geschichte) mir an einer Bar nach einer einschlägigen Konferenz erzählt wurde (daher keine Quellenangabe, Sie verstehen...). Eine Computerwissenschaftlerin aus den USA (deutschen Ursprungs) hatte einen beeindruckenden “Track Record” an Siegen in Wettkämpfen der Datenanalyse. Tatsächlich hatte sie keine besonderen, raffinierten Modellierungstechniken eingesetzt; klassische Regression war ihre Methode der Wahl. Bei einem Wettkampf, bei dem es darum ging, Krebsfälle aus Krankendaten vorherzusagen (z. B. von Röntgenbildern) fand sie nach langem Datenjudo heraus, dass in die “ID-Variablen” Information gesickert war, die dort nicht hingehörte und die sie nutzen konnte für überraschend (aus Sicht der Mitstreiter) gute Vorhersagen zu Krebsfällen. Wie war das möglich? Die Daten stammten aus mehreren Kliniken, jede Klinik verwendete ein anderes System, um IDs für Patienten zu erstellen. Überall waren die IDs stark genug, um die Anonymität der Patienten sicherzustellen, aber gleich wohl konnte man (nach einigem Judo) unterscheiden, welche ID von welcher Klinik stammte. Was das bringt? Einige Kliniken waren reine Screening-Zentren, die die Normalbevölkerung versorgte. Dort sind wenig Krebsfälle zu erwarten. Andere Kliniken jedoch waren Onkologie-Zentren für bereits bekannte Patienten oder für Patienten mit besonderer Risikolage. Wenig überraschend, dass man dann höhere Krebsraten

vorhersagen kann. Eigentlich ganz einfach; besondere Mathe steht hier (zumindest in dieser Geschichte) nicht dahinter. Und, wenn man den Trick kennt, ganz einfach. Aber wie so oft ist es nicht leicht, den Trick zu finden. Sorgfältiges Datenjudo hat hier den Schlüssel zum Erfolg gebracht.

Typische Probleme

Bevor man seine Statistik-Trickkiste so richtig schön aufmachen kann, muss man die Daten häufig erst noch in Form bringen. Das ist nicht schwierig in dem Sinne, dass es um komplizierte Mathe ginge. Allerdings braucht es mitunter recht viel Zeit und ein paar (oder viele) handwerkliche Tricks sind hilfreich. Hier soll das folgende Kapitel helfen.

Typische Probleme, die immer wieder auftreten, sind:

- *Fehlende Werte*: Irgend jemand hat auf eine meiner schönen Fragen in der Umfrage nicht geantwortet!
- *Unerwartete Daten*: Auf die Frage, wie viele Facebook-Freunde er oder sie habe, schrieb die Person “I like you a lot”. Was tun???
- *Daten müssen umgeformt werden*: Für jede der beiden Gruppen seiner Studie hat Joachim einen Google-Forms-Fragebogen aufgesetzt. Jetzt hat er zwei Tabellen, die er “verheiraten” möchte. Geht das?
- *Neue Variablen (Spalten) berechnen*: Ein Student fragt nach der Anzahl der richtigen Aufgaben in der Statistik-Probeklausur. Wir wollen helfen und im entsprechenden Datensatz eine Spalte erzeugen, in der pro Person die Anzahl der richtig beantworteten Fragen steht.

Daten aufbereiten mit **dplyr**

Es gibt viele Möglichkeiten, Daten mit R aufzubereiten; `dplyr` ist ein populäres Paket dafür. Eine zentrale Idee von `dplyr` ist, dass es nur ein paar wenige Grundbausteine geben sollte, die sich gut kombinieren lassen. Sprich: Wenige grundlegende Funktionen mit eng umgrenzter Funktionalität. Der Autor, Hadley Wickham, sprach einmal in einem Forum (citation needed), dass diese Befehle wenig können, das Wenige aber gut. Ein Nachteil dieser Konzeption kann sein, dass man recht viele dieser Bausteine kombinieren muss, um zum gewünschten Ergebnis zu kommen. Außerdem muss man die Logik des Baukastens gut verstanden haben – die Lernkurve ist also erstmal steiler. Dafür ist man dann nicht darauf angewiesen, dass es irgendwo “Mrs Right” gibt, die genau das kann, was ich will. Außerdem braucht man sich auch nicht viele Funktionen merken. Es reicht, einen kleinen Satz an Funktionen zu kennen (die praktischerweise konsistent in Syntax und Methodik sind).

Willkommen in der Welt von `dplyr`! `dplyr` hat seinen Namen, weil es sich ausschließlich um *Dataframes* bemüht; es erwartet einen Dataframe als Eingabe und gibt einen Dataframe zurück (zumindest bei den meisten Befehlen).

Diese Bausteine sind typische Tätigkeiten im Umgang mit Daten; nichts Überraschendes. Schauen wir uns diese Bausteine näher an.

ID	Name	Note1
1	Anna	1
2	Anna	1
3	Berta	2
4	Carla	2
5	Carla	2

ID	Name	Note1
1	Anna	1
2	Anna	1

Abbildung 2: Zeilen filtern

Zeilen filtern mit **filter**

Häufig will man bestimmte Zeilen aus einer Tabelle filtern. Zum Beispiel man arbeitet für die Zigarettenindustrie und ist nur an den Rauchern interessiert (die im Übrigen unser Gesundheitssystem retten [kramer2011wir]), nicht an Nicht-Rauchern; es sollen die nur Umsatzzahlen des letzten Quartals untersucht werden, nicht die vorherigen Quartale; es sollen nur die Daten aus Labor X (nicht Labor Y) ausgewertet werden etc.

Ein Sinnbild:

Merke:

Die Funktion `filter` filtert Zeilen aus einem Dataframe.

Schauen wir uns einige Beispiel an; zuerst die Daten laden nicht vergessen. Achtung: "Wohnen" die Daten in einem Paket, muss dieses Paket installiert sein, damit man auf die Daten zugreifen kann.

```
data(profiles, package = "okcupiddata") # Das Paket muss installiert sein

df_frauen <- filter(profiles, sex == "f") # nur die Frauen
df_alt <- filter(profiles, age > 70) # nur die alten
# nur die alten Frauen, d. h. UND-Verknüpfung
df_alte_frauen <- filter(profiles, age > 70, sex == "f")
df_nosmoke_nodrinks <- filter(profiles, smokes == "no" | drinks == "not at all")
# liefert alle Personen, die Nicht-Raucher *oder* Nicht-Trinker sind
```

Gar nicht so schwer, oder? Allgemeiner gesprochen werden diejenigen Zeilen gefiltert (also behalten bzw. zurückgeliefert), für die das Filterkriterium TRUE ist.

Manche Befehle wie `filter` haben einen Allerweltsnamen; gut möglich, dass ein Befehl mit gleichem Namen in einem anderen (geladenen) Paket existiert. Das kann dann zu Verwirrungen führen - und kryptischen Fehlern. Im Zweifel den Namen des richtigen Pakets ergänzen, und zwar zum Beispiel so: `dplyr::filter(...)`.

Aufgaben

Richtig oder Falsch!?⁸

1. `filter` filtert Spalten.
2. `filter` ist eine Funktion aus dem Paket `dplyr`.
3. `filter` erwartet als ersten Parameter das Filterkriterium.
4. `filter` lässt nur ein Filterkriterium zu.
5. Möchte man aus dem Datensatz `profiles` (`okcupiddata`) die Frauen filtern, so ist folgende Syntax korrekt: `filter(profiles, sex == "f")`.

Vertiefung: Fortgeschrittene Beispiele für **filter**

Einige fortgeschrittene Beispiele für `filter`:

Man kann alle Elemente (Zeilen) filtern, die zu einer Menge gehören und zwar mit diesem Operator: `%in%`:

```
filter(profiles, body_type %in% c("a little extra", "average"))
```

Besonders Textdaten laden zu einigen Extra-Überlegungen ein; sagen wir, wir wollen alle Personen filtern, die Katzen bei den Haustieren erwähnen. Es soll reichen, wenn `cat` ein Teil des Textes ist; also `likes dogs and likes cats` wäre OK (soll gefiltert werden). Dazu nutzen wir ein Paket zur Bearbeitung von Strings (Textdaten):

```
filter(profiles, str_detect(pets, "cats"))
```

Ein häufiger Fall ist, Zeilen *ohne* fehlende Werte (NAs) zu filtern. Das geht einfach:

```
profiles_keine_nas <- na.omit(profiles)
```

Aber was ist, wenn wir nur bei bestimmten Spalten wegen fehlender Werte besorgt sind? Sagen wir bei `income` und bei `sex`:

```
filter(profiles, !is.na(income) | !is.na(sex))
```

Spalten wählen mit **select**

Das Gegenstück zu `filter` ist `select`; dieser Befehl liefert die gewählten Spalten zurück. Das ist häufig praktisch, wenn der Datensatz sehr "breit" ist, also viele Spalten enthält. Dann kann es übersichtlicher sein, sich nur die relevanten auszuwählen. Das Sinnbild für diesen Befehl:

Merke:

Die Funktion `select` wählt Spalten aus einem Dataframe aus.

Laden wir als ersten einen Datensatz.

⁸F, R, F, F, R

vorher					nachher		
ID	Name	N1	N2	N3			
1	Anna	1	2	3	1	Anna	1
2	Berta	1	1	1	2	Berta	1
3	Carla	2	3	4	3	Carla	2
...

Abbildung 3: Spalten auswählen

```
stats_test <- read.csv("../data/test_inf_short.csv")
```

Dieser Datensatz beinhaltet Daten zu einer Statistiklausur.

Beachten Sie, dass diese Syntax davon ausgeht, dass sich die Daten in einem Unterordner mit dem Namen `data` befinden, welcher sich im Arbeitsverzeichnis befindet⁹.

```
select(stats_test, score) # Spalte `score` auswählen
# Spalten `score` und `study_time` auswählen
select(stats_test, score, study_time)
select(stats_test, score:study_time) # dito
select(stats_test, 5:6) Spalten 5 bis 6 auswählen
```

Tatsächlich ist der Befehl `select` sehr flexibel; es gibt viele Möglichkeiten, Spalten auszuwählen. Im `dplyr`-Cheatsheet findet sich ein guter Überblick dazu.

Aufgaben

Richtig oder Falsch!?¹⁰

1. `select` wählt *Zeilen* aus.
2. `select` ist eine Funktion aus dem Paket `knitr`.
3. Möchte man zwei Spalten auswählen, so ist folgende Syntax prinzipiell korrekt: `select(df, spalte1, spalte2)`.
4. Möchte man Spalten 1 bis 10 auswählen, so ist folgende Syntax prinzipiell korrekt: `select(df, spalte1:spalte10)`
5. Mit `select` können Spalten nur bei ihrem Namen, aber nicht bei ihrer Nummer aufgerufen werden.

⁹Der angegebene Pfad ist also *relativ* zum aktuellen Verzeichnis.

¹⁰F, F, R, R, F

Zeilen sortieren mit **arrange**

Man kann zwei Arten des Umgangs mit R unterscheiden: Zum einen der “interaktive Gebrauch” und zum anderen “richtiges Programmieren”. Im interaktiven Gebrauch geht es uns darum, die Fragen zum aktuell vorliegenden Datensatz (schnell) zu beantworten. Es geht nicht darum, eine allgemeine Lösung zu entwickeln, die wir in die Welt verschicken können und die dort ein bestimmtes Problem löst, ohne dass der Entwickler (wir) dabei Hilfestellung geben muss. “Richtige” Software, wie ein R-Paket oder Microsoft Powerpoint, muss diese Erwartung erfüllen; “richtiges Programmieren” ist dazu vonnöten. Natürlich sind in diesem Fall die Ansprüche an die Syntax (der “Code”, hört sich cooler an) viel höher. In dem Fall muss man alle Eventualitäten voraussehen und sicherstellen, dass das Programm auch beim merkwürdigsten Nutzer brav seinen Dienst tut. Wir haben hier, beim interaktiven Gebrauch, niedrigere Ansprüche bzw. andere Ziele.

Beim interaktiven Gebrauch von R (oder beliebigen Analyseprogrammen) ist das Sortieren von Zeilen eine recht häufige Tätigkeit. Typisches Beispiel wäre der Lehrer, der eine Tabelle mit Noten hat und wissen will, welche Schüler die schlechtesten oder die besten sind in einem bestimmten Fach. Oder bei der Prüfung der Umsätze nach Filialen möchten wir die umsatzstärksten sowie -schwächsten Niederlassungen kennen.

Ein R-Befehl hierzu ist `arrange`; einige Beispiele zeigen die Funktionsweise am besten:

```
arrange(stats_test, score) # liefert die *schlechtesten* Noten zuerst zurück
arrange(stats_test, -score) # liefert die *besten* Noten zuerst zurück
arrange(stats_test, interest, score)
```

```
##      X                V_1 study_time self_eval interest score
## 1 234 23.01.2017 18:13:15          3          1          1    17
## 2   4 06.01.2017 09:58:05          2          3          2    18
## 3 131 19.01.2017 18:03:45          2          3          4    18
## 4 142 19.01.2017 19:02:12          3          4          1    18
## 5  35 12.01.2017 19:04:43          1          2          3    19
## 6  71 15.01.2017 15:03:29          3          3          3    20
```

```
##      X                V_1 study_time self_eval interest score
## 1   3 05.01.2017 23:33:47          5         10          6    40
## 2   7 06.01.2017 14:25:49        NA         NA         NA    40
## 3  29 12.01.2017 09:48:16          4         10          3    40
## 4  41 13.01.2017 12:07:29          4         10          3    40
## 5  58 14.01.2017 15:43:01          3          8          2    40
## 6  83 16.01.2017 10:16:52        NA         NA         NA    40
```

```
##      X                V_1 study_time self_eval interest score
## 1 234 23.01.2017 18:13:15          3          1          1    17
## 2 142 19.01.2017 19:02:12          3          4          1    18
## 3 221 23.01.2017 11:40:30          1          1          1    23
```

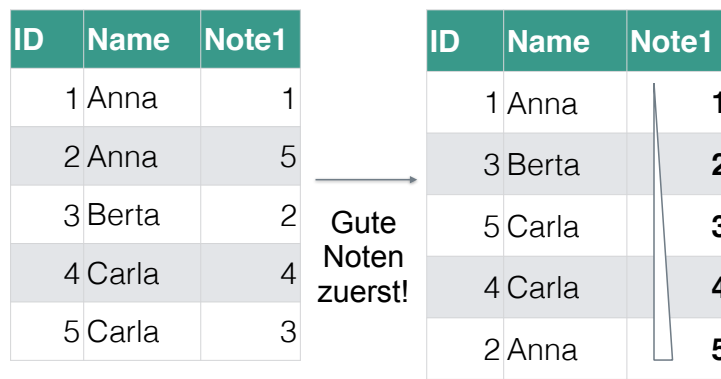


Abbildung 4: Spalten sortieren

```
## 4 230 23.01.2017 16:27:49      1      1      1      23
## 5  92 17.01.2017 17:18:55      1      1      1      24
## 6 107 18.01.2017 16:01:36      3      2      1      24
```

Einige Anmerkungen: Die generelle Syntax lautet `arrange(df, Spalte1, ...)`, wobei `df` den Dataframe bezeichnet und `Spalte1` die erste zu sortierende Spalte; die Punkte `...` geben an, dass man weitere Parameter übergeben kann. Man kann sowohl numerische Spalten als auch Textspalten sortieren. Am wichtigsten ist hier, dass man weitere Spalten übergeben kann. Dazu gleich mehr.

Standardmäßig sortiert `arrange` *aufsteigend* (weil kleine Zahlen im Zahlenstrahl vor den großen Zahlen kommen). Möchte man diese Reihenfolge umdrehen (große Werte zuerst, d. h. *absteigend*), so kann man ein Minuszeichen vor den Namen der Spalte setzen.

Gibt man *zwei oder mehr* Spalten an, so werden pro Wert von `Spalte1` die Werte von `Spalte2` sortiert etc; man betrachte den Output des Beispiels oben dazu.

Merke:

Die Funktion `arrange` sortiert die Zeilen eines Dataframes.

Ein Sinnbild zur Verdeutlichung:

Ein ähnliches Ergebnis erhält man mit `top_n()`, welches die *n größten Ränge* wiedergibt:

```
top_n(stats_test, 3)
```

```
## Selecting by score
```

```
##      X          V_1 study_time self_eval interest score
## 1    3 05.01.2017 23:33:47      5      10      6     40
## 2    7 06.01.2017 14:25:49     NA     NA     NA     40
## 3   29 12.01.2017 09:48:16      4      10      3     40
## 4   41 13.01.2017 12:07:29      4      10      3     40
## 5   58 14.01.2017 15:43:01      3       8      2     40
## 6   83 16.01.2017 10:16:52     NA     NA     NA     40
## 7  116 18.01.2017 23:07:32      4       8      5     40
```

```
## 8 119 19.01.2017 09:05:01 NA NA NA 40
## 9 132 19.01.2017 18:22:32 NA NA NA 40
## 10 175 20.01.2017 23:03:36 5 10 5 40
## 11 179 21.01.2017 07:40:05 5 9 1 40
## 12 185 21.01.2017 15:01:26 4 10 5 40
## 13 196 22.01.2017 13:38:56 4 10 5 40
## 14 197 22.01.2017 14:55:17 4 10 5 40
## 15 248 24.01.2017 16:29:45 2 10 2 40
## 16 249 24.01.2017 17:19:54 NA NA NA 40
## 17 257 25.01.2017 10:44:34 2 9 3 40
## 18 306 27.01.2017 11:29:48 4 9 3 40
```

```
top_n(stats_test, 3, interest)
```

```
##      X              V_1 study_time self_eval interest score
## 1  3 05.01.2017 23:33:47      5      10      6      40
## 2  5 06.01.2017 14:13:08      4       8      6      34
## 3 43 13.01.2017 14:14:16      4       8      6      36
## 4 65 15.01.2017 12:41:27      3       6      6      22
## 5 110 18.01.2017 18:53:02      5       8      6      37
## 6 136 19.01.2017 18:22:57      3       1      6      39
## 7 172 20.01.2017 20:42:46      5      10      6      34
## 8 214 22.01.2017 21:57:36      2       6      6      31
## 9 301 27.01.2017 08:17:59      4       8      6      33
```

Gibt man *keine* Spalte an, so bezieht sich `top_n` auf die letzte Spalte im Datensatz.

Da sich hier mehrere Personen den größten Rang (Wert 40) teilen, bekommen wir *nicht* 3 Zeilen zurückgeliefert, sondern entsprechend mehr.

Aufgaben

Richtig oder Falsch!?¹¹

1. `arrange` arrangiert Spalten.
2. `arrange` sortiert im Standard absteigend.
3. `arrange` lässt nur ein Sortierkriterium zu.
4. `arrange` kann numerische Werte, aber nicht Zeichenketten sortieren.
5. `top_n(5)` liefert die fünf kleinsten Ränge.

¹¹F, F, F, F, R

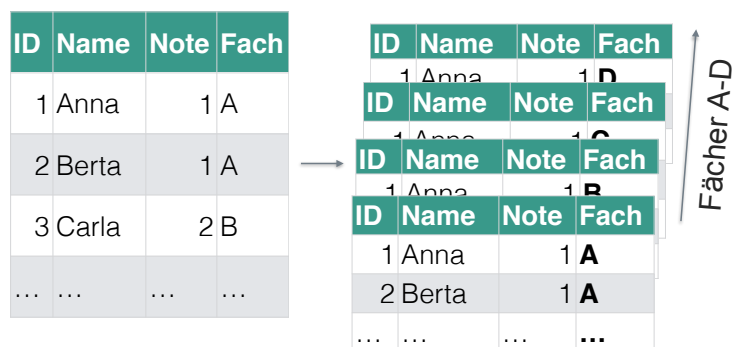


Abbildung 5: Datensätze nach Subgruppen aufteilen

Datensatz gruppieren mit `group_by`

Einen Datensatz zu gruppieren ist ebenfalls eine häufige Angelegenheit: Was ist der mittlere Umsatz in Region X im Vergleich zu Region Y? Ist die Reaktionszeit in der Experimentalgruppe kleiner als in der Kontrollgruppe? Können Männer schneller ausparken als Frauen? Man sieht, dass das Gruppieren u. a. in Verbindung mit Mittelwerten oder anderen Zusammenfassungen sinnvoll ist; dazu im nächsten Abschnitt mehr.

In der Abbildung wurde der Datensatz anhand der Spalte `Fach` in mehrere Gruppen geteilt. Wir könnten uns als nächstes z. B. Mittelwerte pro `Fach` – d. h. pro Gruppe (pro Ausprägung von `Fach`) – ausgeben lassen; in diesem Fall vier Gruppen (`Fach A` bis `D`).

```
test_gruppiert <- group_by(stats_test, interest)
test_gruppiert
```

```
## # A tibble: 306 x 6
## # Groups:   interest [7]
##       X                V_1 study_time self_eval interest score
##   <int>          <fctr>    <int>      <int>    <int> <int>
## 1     1    05.01.2017 13:57:01         5         8         5    29
## 2     2    05.01.2017 21:07:56         3         7         3    29
## 3     3    05.01.2017 23:33:47         5        10         6    40
## 4     4    06.01.2017 09:58:05         2         3         2    18
## 5     5    06.01.2017 14:13:08         4         8         6    34
## 6     6    06.01.2017 14:21:18        NA        NA        NA    39
## 7     7    06.01.2017 14:25:49        NA        NA        NA    40
## 8     8    06.01.2017 17:24:53         2         5         3    24
## 9     9    07.01.2017 10:11:17         2         3         5    25
## 10    10    07.01.2017 18:10:05         4         5         5    33
## # ... with 296 more rows
```

Schaut man sich nun den Datensatz an, sieht man erstmal wenig Effekt der Gruppierung. R teilt uns lediglich mit `Groups: interest [7]` mit, dass es die Gruppen gibt, aber es gibt keine extra Spalte

oder sonstige Anzeichen der Gruppierung. Aber keine Sorge, wenn wir gleich einen Mittelwert ausrechnen, bekommen wir den Mittelwert pro Gruppe!

Ein paar Hinweise: `Source: local data frame [306 x 6]` will sagen, dass die Ausgabe sich auf einen `tibble` bezieht¹², also eine bestimmte Art von Dataframe. `Groups: interest [7]` zeigt, dass der `Tibble` in 7 Gruppen - entsprechend der Werte von `interest` aufgeteilt ist.

`group_by` an sich ist nicht wirklich nützlich. Nützlich wird es erst, wenn man weitere Funktionen auf den gruppierten Datensatz anwendet - z.B. Mittelwerte ausrechnet (z.B. mit `summarise`, s. unten). Die nachfolgenden Funktionen (wenn sie aus `dplyr` kommen), berücksichtigen nämlich die Gruppierung. So kann man einfach Mittelwerte pro Gruppe ausrechnen.

Merke:

Mit `group_by` teilt man einen Datensatz in Gruppen ein, entsprechend der Werte einer oder mehrerer Spalten.

Aufgaben

Richtig oder Falsch!?¹³

1. Mit `group_by` gruppiert man einen Datensatz.
2. `group_by` lässt nur ein Gruppierungskriterium zu.
3. Die Gruppierung durch `group_by` wird nur von Funktionen aus `dplyr` erkannt.
4. `group_by` ist sinnvoll mit `summarise` zu kombinieren.

Eine Spalte zusammenfassen mit **summarise**

Vielleicht die wichtigste oder häufigste Tätigkeit in der Analyse von Daten ist es, eine Spalte zu *einem* Wert zusammenzufassen. Anders gesagt: Einen Mittelwert berechnen, den größten (kleinsten) Wert herausuchen, die Korrelation berechnen oder eine beliebige andere Statistik ausgeben lassen. Die Gemeinsamkeit dieser Operationen ist, dass sie eine Spalte zu einem Wert zusammenfassen, "aus Spalte mach Zahl", sozusagen. Daher ist der Name des Befehls `summarise` ganz passend. Genauer gesagt fasst dieser Befehl eine Spalte zu einer Zahl zusammen *anhand* einer Funktion wie `mean` oder `max`. Hierbei ist jede Funktion erlaubt, die eine Spalte als Input verlangt und eine Zahl zurückgibt; andere Funktionen sind bei `summarise` nicht erlaubt.

```
summarise(stats_test, mean(score))
```

```
## mean(score)
## 1 31.12092
```

Man könnte diesen Befehl so ins Deutsche übersetzen: *Fasse aus Tabelle stats_test die Spalte score anhand des Mittelwerts zusammen.* Nicht vergessen, wenn die Spalte `score` fehlende Werte hat, wird der

¹²<http://stackoverflow.com/questions/29084380/what-is-the-meaning-of-the-local-data-frame-message-from-dplyrprint-tbl-df>

¹³R, F, R, R

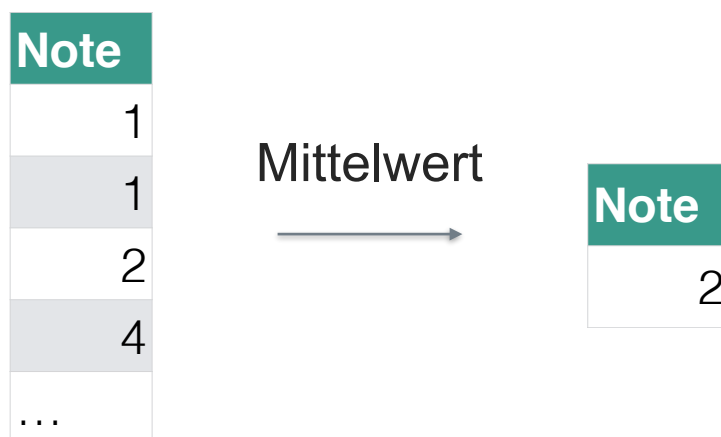


Abbildung 6: Spalten zu einer Zahl zusammenfassen

Befehl `mean` standardmäßig dies mit NA quittieren.

Jetzt können wir auch die Gruppierung nutzen:

```
test_gruppiert <- group_by(stats_test, interest)
summarise(test_gruppiert, mean(score))
```

```
## # A tibble: 7 x 2
##   interest `mean(score)`
##   <int>      <dbl>
## 1       1      28.26667
## 2       2      29.70213
## 3       3      30.80303
## 4       4      29.92683
## 5       5      32.51111
## 6       6      34.00000
## 7      NA      33.08824
```

Der Befehl `summarise` erkennt also, wenn eine (mit `group_by`) gruppierte Tabelle vorliegt. Jegliche Zusammenfassung, die wir anfordern, wird anhand der Gruppierungsinformation aufgeteilt werden. In dem Beispiel bekommen wir einen Mittelwert für jeden Wert von `interest`. Interessanterweise sehen wir, dass der Mittelwert tendenziell größer wird, je größer `interest` wird.

Alle diese `dplyr`-Befehle geben einen Dataframe zurück, was praktisch ist für weitere Verarbeitung. In diesem Fall heißen die Spalten `interest` und `mean(score)`. Der zweite Name ist nicht so schön, daher ändern wir den wie folgt:

Jetzt können wir auch die Gruppierung nutzen:

```
test_gruppiert <- group_by(stats_test, interest)
summarise(test_gruppiert, mw_pro_gruppe = mean(score, na.rm = TRUE))
```

```
## # A tibble: 7 x 2
```

```
##   interest mw_pro_gruppe
##   <int>      <dbl>
## 1      1      28.26667
## 2      2      29.70213
## 3      3      30.80303
## 4      4      29.92683
## 5      5      32.51111
## 6      6      34.00000
## 7     NA      33.08824
```

Nun heißt die zweite Spalte `mw_pro_Gruppe`. `na.rm = TRUE` veranlasst, bei fehlenden Werten trotzdem einen Mittelwert zurückzuliefern (die Zeilen mit fehlenden Werten werden in dem Fall ignoriert).

Grundsätzlich ist die Philosophie der `dplyr`-Befehle: “Mach nur eine Sache, aber die dafür gut”. Entsprechend kann `summarise` nur *Spalten* zusammenfassen, aber keine *Zeilen*.

Merke:

Mit `summarise` kann man eine Spalte eines Dataframes zu einem Wert zusammenfassen.

Aufgaben

Richtig oder Falsch!?¹⁴

1. Möchte man aus der Tabelle `stats_test` den Mittelwert für die Spalte `score` berechnen, so ist folgende Syntax korrekt: `summarise(stats_test, mean(score))`.
2. `summarise` liefert eine Tabelle, genauer: einen Tibble, zurück.
3. Die Tabelle, die diese Funktion zurückliefert: `summarise(stats_test, mean(score))`, hat eine Spalte mit dem Namen `mean(score)`.
4. `summarise` lässt zu, dass die zu berechnende Spalte einen Namen vom Nutzer zugewiesen bekommt.
5. `summarise` darf nur verwendet werden, wenn eine Spalte zu einem Wert zusammengefasst werden soll.

Zeilen zählen mit *n* und *count*

Ebenfalls nützlich ist es, Zeilen zu zählen. Im Gegensatz zum Standardbefehl¹⁵ `nrow` versteht der `dplyr`-Befehl `n` auch Gruppierungen. `n` darf nur innerhalb von `summarise` oder ähnlichen `dplyr`-Befehlen verwendet werden.

```
summarise(stats_test, n())
```

```
##   n()
## 1 306
```

¹⁴R, R, R, R, R

¹⁵Standardbefehl meint, dass die Funktion zum Standardrepertoire von R gehört, also nicht über ein Paket extra geladen werden muss.

```
summarise(test_gruppiert, n())
```

```
## # A tibble: 7 x 2
##   interest `n()`
##   <int> <int>
## 1      1    30
## 2      2    47
## 3      3    66
## 4      4    41
## 5      5    45
## 6      6     9
## 7     NA    68
```

```
nrow(stats_test)
```

```
## [1] 306
```

Außerhalb von gruppierten Datensätzen ist `nrow` meist praktischer.

Praktischer ist der Befehl `count`, der nichts anderes ist als die Hintereinanderschaltung von `group_by` und `n`. Mit `count` zählen wir die Häufigkeiten nach Gruppen; Gruppen sind hier zumeist die Werte einer auszuzählenden Variablen (oder mehrerer auszuzählender Variablen). Das macht `count` zu einem wichtigen Helfer bei der Analyse von Häufigkeitsdaten.

```
dplyr::count(stats_test, interest)
```

```
## # A tibble: 7 x 2
##   interest      n
##   <int> <int>
## 1      1    30
## 2      2    47
## 3      3    66
## 4      4    41
## 5      5    45
## 6      6     9
## 7     NA    68
```

```
dplyr::count(stats_test, study_time)
```

```
## # A tibble: 6 x 2
##   study_time      n
##   <int> <int>
## 1      1    31
## 2      2    49
## 3      3    85
## 4      4    56
```



```
## 5      5      17
## 6      NA      68
```

```
dplyr::count(stats_test, interest, study_time)
```

```
## # A tibble: 29 x 3
##   interest study_time     n
##   <int>      <int> <int>
## 1       1         1     12
## 2       1         2      7
## 3       1         3      8
## 4       1         4      2
## 5       1         5      1
## 6       2         1      9
## 7       2         2     15
## 8       2         3     16
## 9       2         4      6
## 10      2         5      1
## # ... with 19 more rows
```

Allgemeiner formuliert lautet die Syntax: `count(df, Spalte1, ...)`, wobei `df` der Dataframe ist und `Spalte1` die erste (es können mehrere sein) auszuzählende Spalte. Gibt man z. B. zwei Spalten an, so wird pro Wert der 1. Spalte die Häufigkeiten der 2. Spalte ausgegeben.

Merke:

`n` und `count` zählen die Anzahl der Zeilen, d. h. die Anzahl der Fälle.

Aufgaben

Richtig oder Falsch!?¹⁶

1. Mit `count` kann man Zeilen zählen.
2. `count` ist ähnlich (oder identisch) zu einer Kombination von `group_by` und `n()`.
3. Mit `count` kann man nur eine Gruppe beim Zählen berücksichtigen.
4. `count` darf nicht bei nominalskalierten Variablen verwendet werden.

Vertiefung

Die Pfeife

Die zweite Idee kann man salopp als “Durchpfeifen” bezeichnen; ikonographisch mit diesem Symbol dargestellt `%>%`. Der Begriff “Durchpfeifen” ist frei vom Englischen “to pipe” übernommen. Das berühmte Bild von René Magritte stand dabei Pate.

¹⁶R, R, F, F



Abbildung 7: La trahison des images [Ceci n'est pas une pipe], René Magritte, 1929, © C. Herscovici, Brussels / Artists Rights Society (ARS), New York, <http://collections.lacma.org/node/239578>

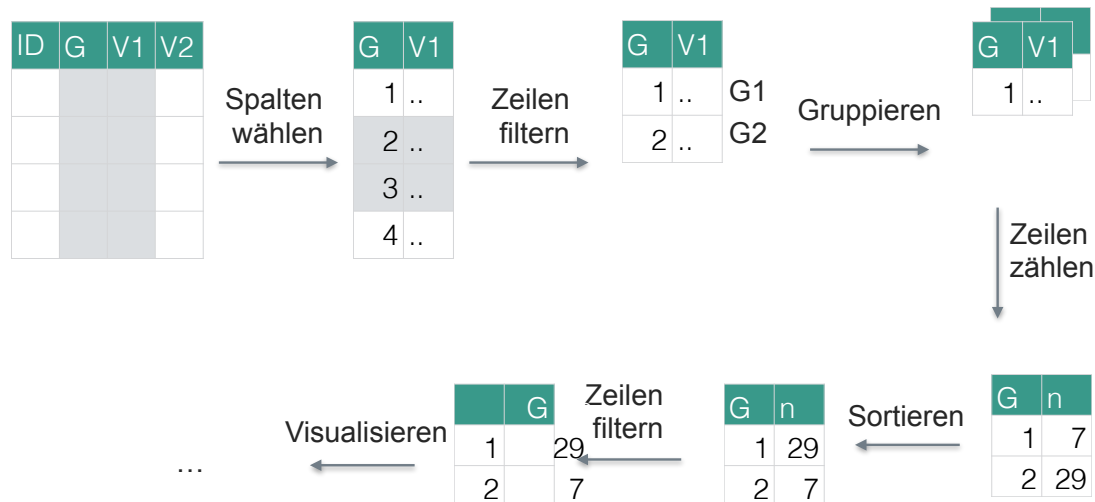


Abbildung 8: Das 'Durchpeifen'

Hierbei ist gemeint, einen Datensatz sozusagen auf ein Fließband zu legen und an jedem Arbeitsplatz einen Arbeitsschritt auszuführen. Der springende Punkt ist, dass ein Dataframe als "Rohstoff" eingegeben wird und jeder Arbeitsschritt seinerseits wieder einen Dataframe ausgibt. Damit kann man sehr schön einen "Flow" an Verarbeitung erreichen, außerdem spart man sich Tipparbeit und die Syntax wird lesbarer. Damit das Durchpeifen funktioniert, benötigt man Befehle, die als Eingabe einen Dataframe erwarten und wieder einen Dataframe zurückliefern. Das Schaubild verdeutlicht beispielhaft eine Abfolge des Durchpeifens.

Die sog. "Pfeife" (pipe: `%>%`) in Anspielung an das berühmte Bild von René Magritte verkettet Befehle hintereinander. Das ist praktisch, da es die Syntax vereinfacht. Vergleichen Sie mal diese Syntax

```
filter(summarise(group_by(filter(stats_test, !is.na(score)), interest), mw = mean(score))
```

mit dieser

```
stats_test %>%
  filter(!is.na(score)) %>%
  group_by(interest) %>%
  summarise(mw = mean(score)) %>%
  filter(mw > 30)
```

```
## # A tibble: 4 x 2
```

```
##      interest      mw
##      <int>      <dbl>
## 1          3 30.80303
## 2          5 32.51111
## 3          6 34.00000
## 4         NA 33.08824
```

Es ist hilfreich, diese “Pfeifen-Syntax” in deutschen Pseudo-Code zu übersetzen.

```
Nimm die Tabelle "stats_test" UND DANN
filtere alle nicht-fehlenden Werte UND DANN
gruppiere die verbleibenden Werte nach "interest" UND DANN
bilde den Mittelwert (pro Gruppe) für "score" UND DANN
liefere nur die Werte größer als 30 zurück.
```

Die Pfeife zerlegt die “russische Puppe”, also ineinander verschachtelten Code, in sequenzielle Schritte und zwar in der richtigen Reihenfolge (entsprechend der Abarbeitung). Wir müssen den Code nicht mehr von innen nach außen lesen (wie das bei einer mathematischen Formel der Fall ist), sondern können wie bei einem Kochrezept “erstens ..., zweitens ..., drittens ...” lesen. Die Pfeife macht die Syntax einfacher. Natürlich hätten wir die verschachtelte Syntax in viele einzelne Befehle zerlegen und jeweils ein Zwischenergebnis mit dem Zuweisungspfeil `<-` speichern und das Zwischenergebnis dann explizit an den nächsten Befehl weitergeben können. Eigentlich macht die Pfeife genau das – nur mit weniger Tipparbeit. Und auch einfacher zu lesen. Flow!

Werte umkodieren mit `car::recode`

Manchmal möchte man z. B. negativ gepolte Items umdrehen oder bei kategoriellen Variablen kryptische Bezeichnungen in sprechendere umwandeln (ein Klassiker ist 1 in männlich bzw. 2 in weiblich oder umgekehrt, kann sich niemand merken). Hier gibt es eine Reihe praktischer Befehle, z.B. `recode` aus dem Paket `car`. Übrigens: Wenn man explizit angeben möchte, aus welchem Paket ein Befehl stammt (z. B. um Verwechslungen zu vermeiden), gibt man `Paketnamen::Befehlennamen` an. Schauen wir uns ein paar Beispiele zum Umkodieren an.

```
stats_test$score_fac <- car::recode(stats_test$study_time,
  "5 = 'sehr viel'; 2:4 = 'mittel'; 1 = 'wenig'",
  as.factor.result = TRUE)
stats_test$score_fac <- car::recode(stats_test$study_time,
  "5 = 'sehr viel'; 2:4 = 'mittel'; 1 = 'wenig'",
  as.factor.result = FALSE)

stats_test$study_time <- car::recode(stats_test$study_time,
  "5 = 'sehr viel'; 4 = 'wenig'; else = 'Hilfe'",
  as.factor.result = TRUE)
```

```
head(stats_test$study_time)
```

```
## [1] sehr viel Hilfe      sehr viel Hilfe      wenig      Hilfe
## Levels: Hilfe sehr viel wenig
```

Der Befehl `recode` ist wirklich sehr praktisch; mit `:` kann man “von bis” ansprechen (das ginge mit `c()` übrigens auch); `else` für “ansonsten” ist möglich und mit `as.factor.result` kann man entweder einen Faktor oder eine Text-Variable zurückgeliefert bekommen. Der ganze “Wechselterm” steht in Anführungsstrichen (`'`). Einzelne Teile des Wechselterms sind mit einem Strichpunkt (`;`) voneinander getrennt.

Das klassische Umkodieren von Items aus Fragebögen kann man so anstellen; sagen wir `interest` soll umkodiert werden:

```
stats_test$no_interest <- car::recode(stats_test$interest,
  "1 = 6; 2 = 5; 3 = 4; 4 = 3; 5 = 2; 6 = 1; else = NA")
glimpse(stats_test$no_interest)
```

```
##   num [1:306]  2  4  1  5  1 NA NA  4  2  2 ...
```

Bei dem Wechselterm muss man aufpassen, nichts zu verwechseln; die Zahlen sehen alle ähnlich aus ...

Testen kann man den Erfolg des Umpolens mit

```
dplyr::count(stats_test, interest)
```

```
## # A tibble: 7 x 2
##   interest      n
##   <int> <int>
## 1         1    30
## 2         2    47
## 3         3    66
## 4         4    41
## 5         5    45
## 6         6     9
## 7        NA    68
```

```
dplyr::count(stats_test, no_interest)
```

```
## # A tibble: 7 x 2
##   no_interest      n
##   <dbl> <int>
## 1         1     9
## 2         2    45
## 3         3    41
## 4         4    66
```

```
## 5          5      47
## 6          6      30
## 7         NA      68
```

Scheint zu passen.

“Binnen” mit `car::recode`

Noch praktischer ist, dass man so auch numerische Variablen in Bereiche aufteilen kann (“to bin”, denglisch: “binnen”):

```
stats_test$Ergebnis <- car::recode(stats_test$score,
  "1:38 = 'durchgefallen'; else = 'bestanden'")
```

Natürlich gibt es auch eine Pfeifen kompatible Version, um Variablen umzukodieren bzw. zu binnen: `dplyr::recode`¹⁷. Die Syntax ist allerdings etwas weniger komfortabel (da strenger), so dass wir an dieser Stelle bei `car::recode` bleiben.

Numerische Werte in Klassen gruppieren mit `cut`

Numerische Werte in Klassen zu gruppieren (“to bin”, denglisch: “binnen”) kann mit dem Befehl `cut` (and friends) besorgt werden.

Es lassen sich drei typische Anwendungsformen unterscheiden:

Eine numerische Variable ...

1. in k gleich große Klassen gruppieren (gleichgroße Intervalle);
2. so in Klassen gruppieren, dass in jeder Klasse n Beobachtungen sind (gleiche Gruppengrößen);
3. in beliebige Klassen gruppieren.

Gleichgroße Intervalle

Nehmen wir an, wir möchten die numerische Variable “Körpergröße” in drei Gruppen einteilen: “klein”, “mittel” und “groß”. Der Range von Körpergröße soll gleichmäßig auf die drei Gruppen aufgeteilt werden, d. h., der Range (Interval) der drei Gruppen soll gleich groß sein. Dazu kann man `cut_interval` aus `ggplot2` nehmen¹⁸.

```
wo_men <- read_csv("../data/wo_men.csv")
```

```
## Warning: Missing column names filled in: 'X1' [1]
## Parsed with column specification:
## cols(
##   X1 = col_integer(),
```

¹⁷<https://blog.rstudio.org/2016/06/27/dplyr-0-5-0/>

¹⁸D. h., `ggplot2` muss geladen sein; wenn man `tidyverse` lädt, wird `ggplot2` automatisch auch geladen

```
##   time = col_character(),
##   sex = col_character(),
##   height = col_double(),
##   shoe_size = col_double()
## )

wo_men2 <- wo_men %>% filter(height > 150, height < 220)

temp <- cut_interval(x = wo_men2$height, n = 3)

levels(temp)
```

```
## [1] "[155,172]" "(172,189]" "(189,206]"
```

cut_interval liefert eine Variable vom Typ factor zurück.

Gleiche Gruppengrößen

```
temp <- cut_number(wo_men2$height, n = 2)
str(temp)
```

```
## Factor w/ 2 levels "[155,169]", "(169,206]": 1 2 2 2 2 1 1 2 1 2 ...
```

Mit cut_number (aus ggplot2) kann man einen Vektor in n Gruppen mit (etwa) gleich viel Observationen einteilen.

Teilt man einen Vektor in zwei gleich große Gruppen, so entspricht das einer Aufteilung am Median (Median-Split).

In beliebige Klassen gruppieren

```
wo_men$groesse_gruppe <- cut(wo_men$height, breaks = c(-Inf,
  100, 150, 170, 200, 230, Inf))

count(wo_men, groesse_gruppe)
```

```
## # A tibble: 6 x 2
##   groesse_gruppe      n
##           <fctr> <int>
## 1      (-Inf,100]     4
## 2      (150,170]    55
## 3      (170,200]    38
## 4      (200,230]     2
## 5      (230, Inf]     1
## 6           <NA>     1
```

`cut` ist im Standard-R (Paket “base”) enthalten. Mit `breaks` gibt man die Intervallgrenzen an. Zu beachten ist, dass man eine Unter- bzw. Obergrenze angeben muss. D. h., der kleinste Wert wird nicht automatisch als unterste Intervallgrenze herangezogen.

Verweise

- Eine schöne Demonstration der Mächtigkeit von `dplyr` findet sich hier: [<http://bit.ly/2kX9lvC>](http://bit.ly/2kX9lvC).

Hinweis

Der Anhang *Datenjudo* wurde von Sebastian Sauer erstellt.

Versionshinweise:

- Datum erstellt: 2017-09-16
- R Version: 3.4.1
- `tidyverse` Version: 1.1.1
- `dplyr` Version: 0.7.3

Anhang 3: Daten visualisieren mit ggplot

In diesem Kapitel werden folgende Pakete benötigt::

```
library(tidyverse)  # Zum Plotten
```

```
## Loading tidyverse: ggplot2
## Loading tidyverse: tibble
## Loading tidyverse: tidyr
## Loading tidyverse: readr
## Loading tidyverse: purrr
## Loading tidyverse: dplyr
```

```
## Conflicts with tidy packages -----
```

```
## filter(): dplyr, stats
## lag():    dplyr, stats
```

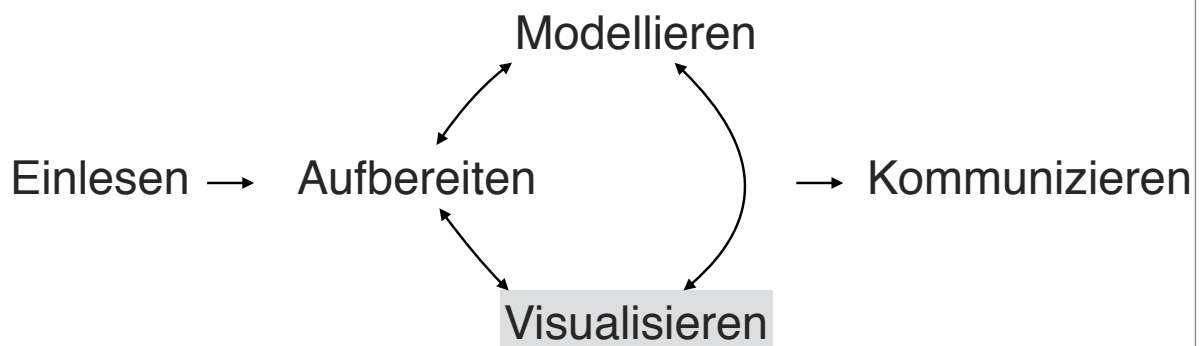
```
library(car)  # Umkodieren
```

```
##
## Attaching package: 'car'

## The following object is masked from 'package:dplyr':
##
##      recode

## The following object is masked from 'package:purrr':
##
##      some
```

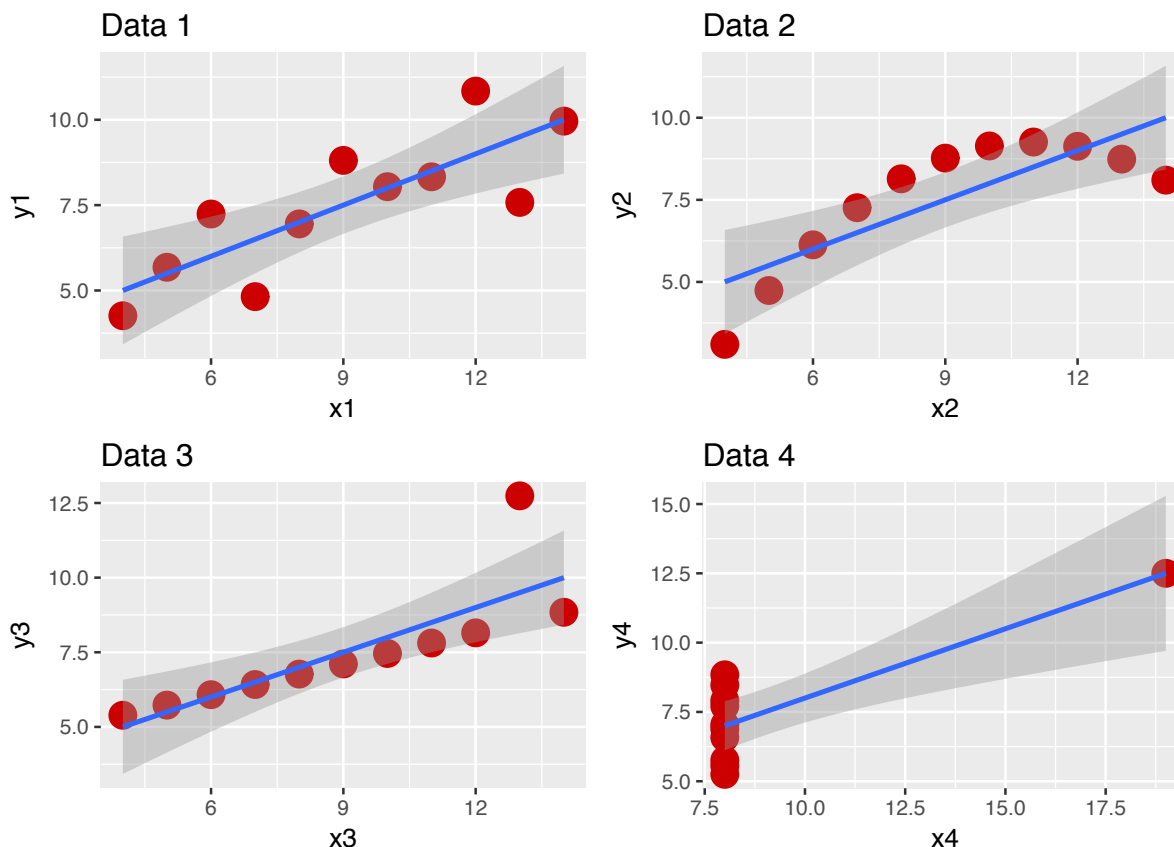
```
library(knitr)  # HTML-Tabellen
```



Rahmen

Ein Bild sagt mehr als 1000 Worte

Ein Bild sagt bekanntlich mehr als 1000 Worte. Schauen wir uns zur Verdeutlichung das berühmte Beispiel von Anscombe¹⁹ an. Es geht hier um vier Datensätze mit zwei Variablen (Spalten; X und Y). Offenbar sind die Datensätze praktisch identisch: Alle X haben den gleichen Mittelwert und die gleiche Varianz; dasselbe gilt für die Y. Die Korrelation zwischen X und Y ist in allen vier Datensätzen gleich. Allerdings erzählt eine Visualisierung der vier Datensätze eine ganz andere Geschichte.



Offenbar “passieren” in den vier Datensätzen gänzlich unterschiedliche Dinge. Dies haben die Statistiken nicht aufgedeckt; erst die Visualisierung erhellte uns ... Kurz: Die Visualisierung ist ein unverzichtbares Werkzeug, um zu verstehen, was in einem Datensatz (und damit in der zugrunde liegenden “Natur”) passiert.

Es gibt viele Möglichkeiten, Daten zu visualisieren (in R). Wir werden uns hier auf einen Weg (bzw. ein Paket) konzentrieren, der komfortabel, aber mächtig ist und gut zum Prinzip des Durchpfeifens passt: ggplot2²⁰.

Laden wir dazu den Datensatz `nycflights::flights`.

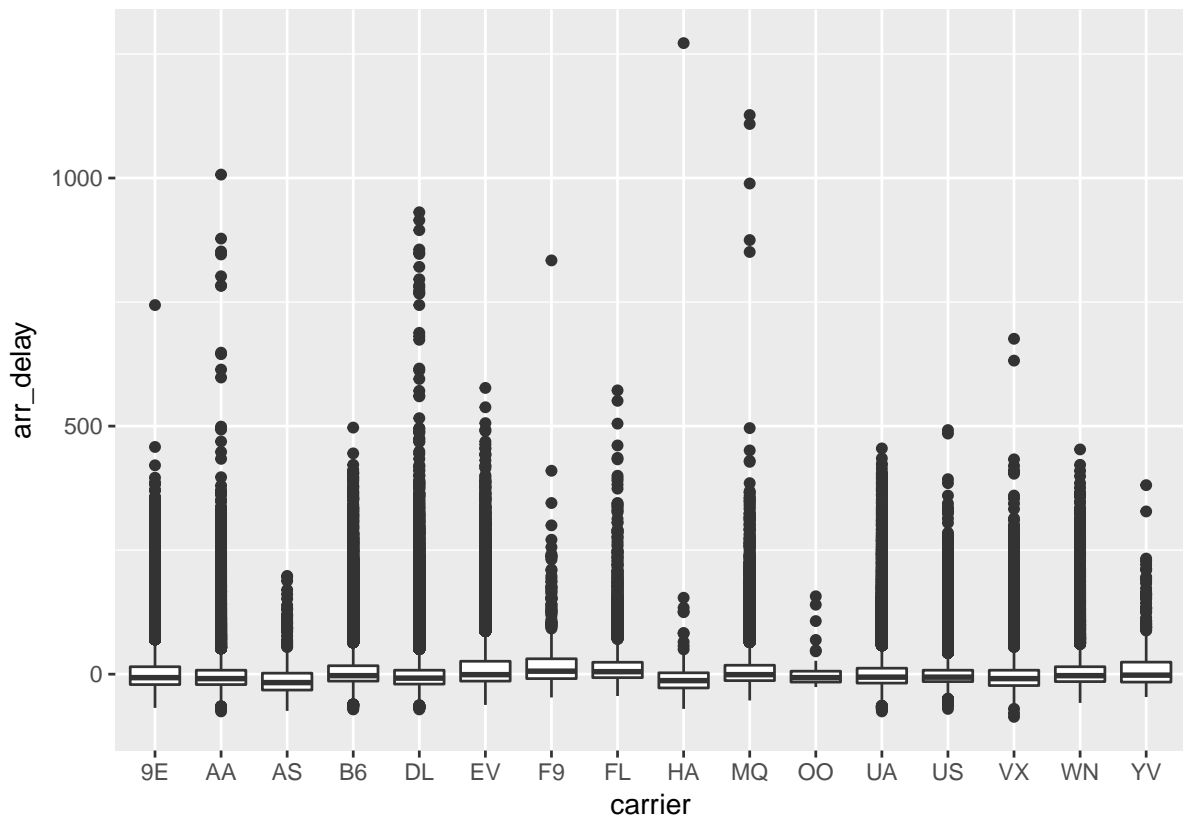
```
data(flights, package = "nycflights13")
```

¹⁹<https://de.wikipedia.org/wiki/Anscombe-Quartett>

²⁰“gg” steht für “grammar of graphics” nach einem Buch von Wilkinson (The Grammar of Graphics, Springer 2005); “plot” steht für “to plot”, also ein Diagramm erstellen (“plotten”); vgl. <https://en.wikipedia.org/wiki/ggplot2>

```
qplot(x = carrier, y = arr_delay, geom = "boxplot", data = flights)
```

```
## Warning: Removed 9430 rows containing non-finite values (stat_boxplot).
```



Schauen wir uns den Befehl `qplot` etwas näher an. Wie ist er aufgebaut?

`qplot`: Erstelle schnell (q wie quick in `qplot`) mal einen Plot (engl. “plot”: Diagramm).

`x`: Der X-Achse soll die Variable “carrier” zugeordnet werden.

`y`: Der Y-Achse soll die Variable “arr_dely” zugeordnet werden.

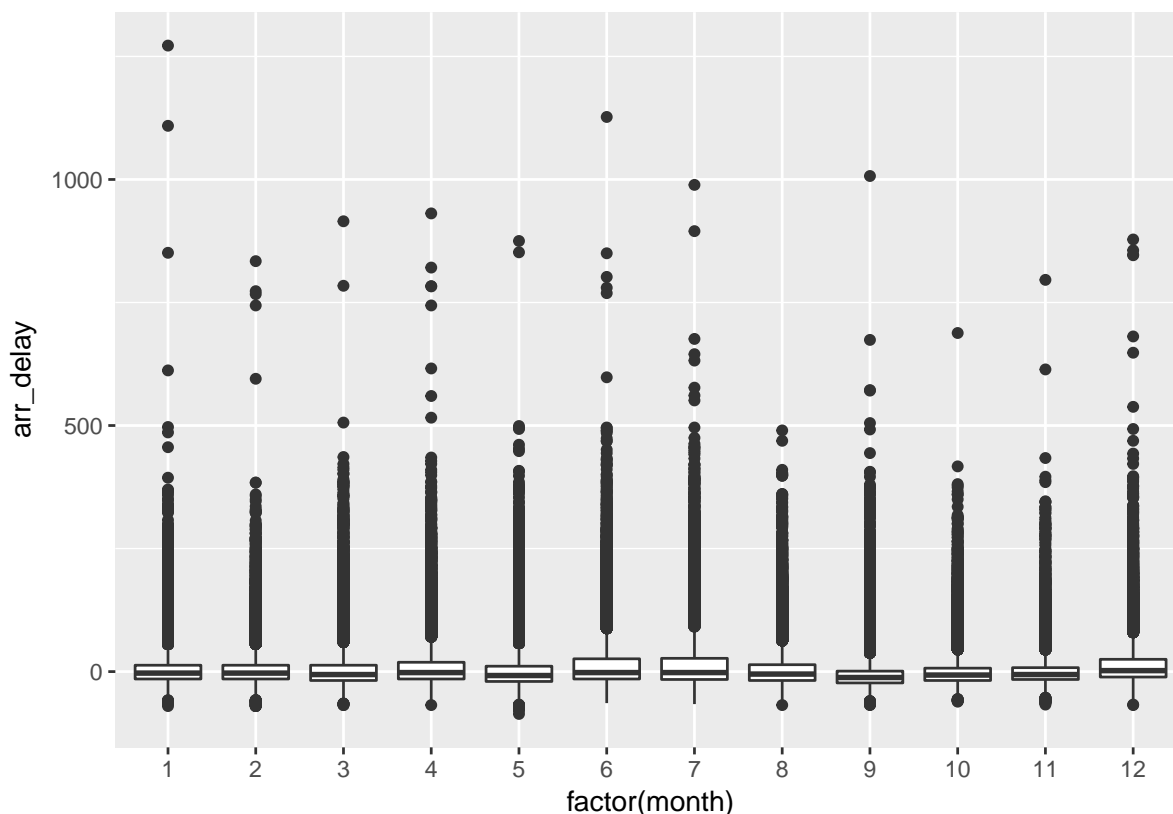
`geom`: (“geometrisches Objekt”) Gemalt werden soll ein Boxplot, nicht etwa Punkte, Linien oder sonstiges.

`data`: Als Datensatz bitte `flights` verwenden.

Offenbar gibt es viele Extremwerte, was die Verspätung betrifft. Das erscheint mir nicht unplausibel (Schneesturm im Winter, Flugzeug verschwunden...). Vor dem Hintergrund der Extremwerte erscheinen die mittleren Verspätungen (Mediane) in den Boxplots als ähnlich. Vielleicht ist der Unterschied zwischen den Monaten ausgeprägter?

```
qplot(x = factor(month), y = arr_delay, geom = "boxplot", data = flights)
```

```
## Warning: Removed 9430 rows containing non-finite values (stat_boxplot).
```



Kaum Unterschied; das spricht gegen die Schneesturm-Idee als Grund für Verspätung. Aber schauen wir uns zuerst die Syntax von `qplot` näher an. “q” in `qplot` steht für “quick”. Tatsächlich hat `qplot` einen großen Bruder, `ggplot`²¹, der deutlich mehr Funktionen aufweist – und daher auch die umfangreichere (= komplexere) Syntax. Fangen wir mit `qplot` an.

Diese Syntax des letzten Beispiels ist recht einfach, nämlich:

```
qplot(x = X_Achse, y = Y_Achse, data = mein_dataframe, geom = "ein_geom")
```

Wir definieren mit `x`, welche Variable der X-Achse des Diagramms zugewiesen werden soll, z. B. `month`; analog mit Y-Achse. Mit `data` sagen wir, in welchem Dataframe die Spalten “wohnen” und als “geom” ist die Art des statistischen “*geometrischen Objects*” gemeint, also Punkte, Linien, Boxplots, Balken...

Häufige Arten von Diagrammen

Unter den vielen Arten von Diagrammen und vielen Arten, diese zu klassifizieren, greifen wir uns ein paar häufige Diagramme heraus und schauen uns diese der Reihe nach an.

Eine kontinuierliche Variable

Schauen wir uns die Verteilung der Schuhgrößen von Studierenden an.

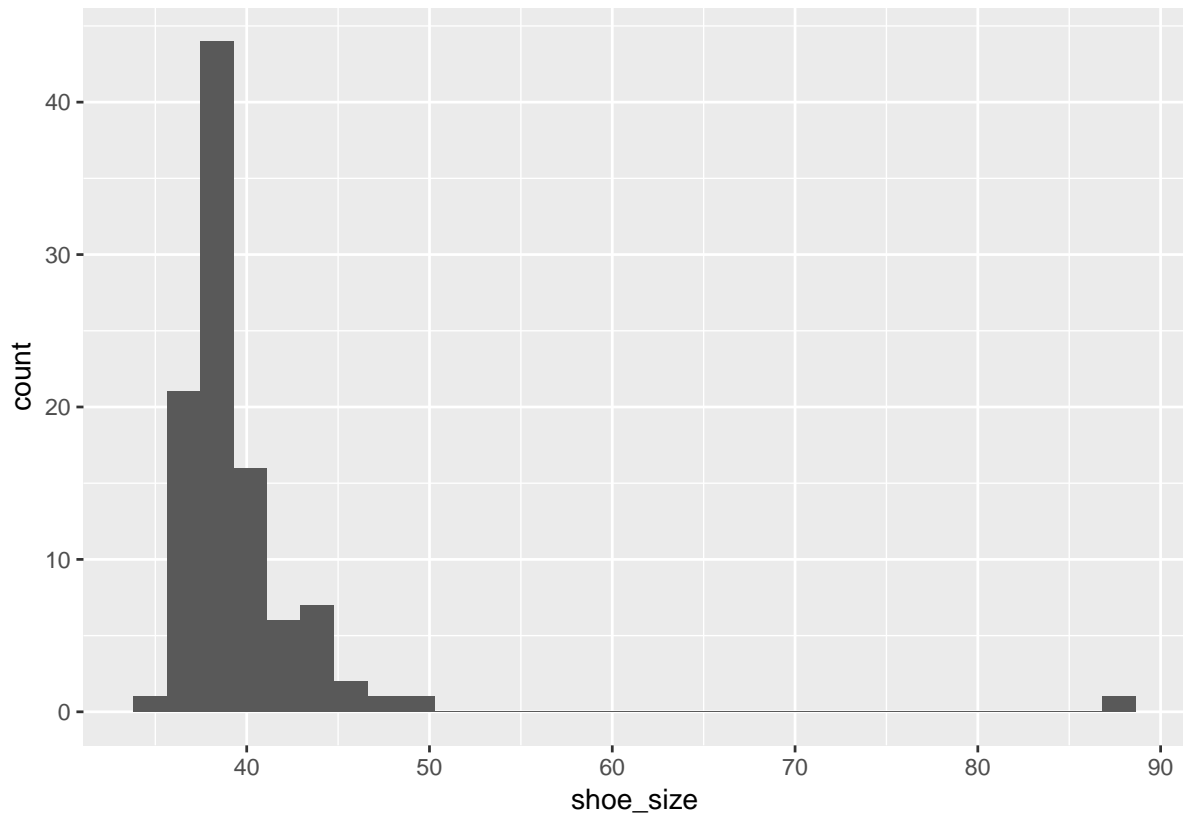
²¹Achtung: Nicht `qqplot`, nicht `ggplot2`, nicht `gplot`...

```
wo_men <- read.csv("../data/wo_men.csv")
```

```
ggplot(x = shoe_size, data = wo_men)
```

```
## `stat_bin()` using `bins = 30`. Pick better value with `binwidth`.
```

```
## Warning: Removed 1 rows containing non-finite values (stat_bin).
```

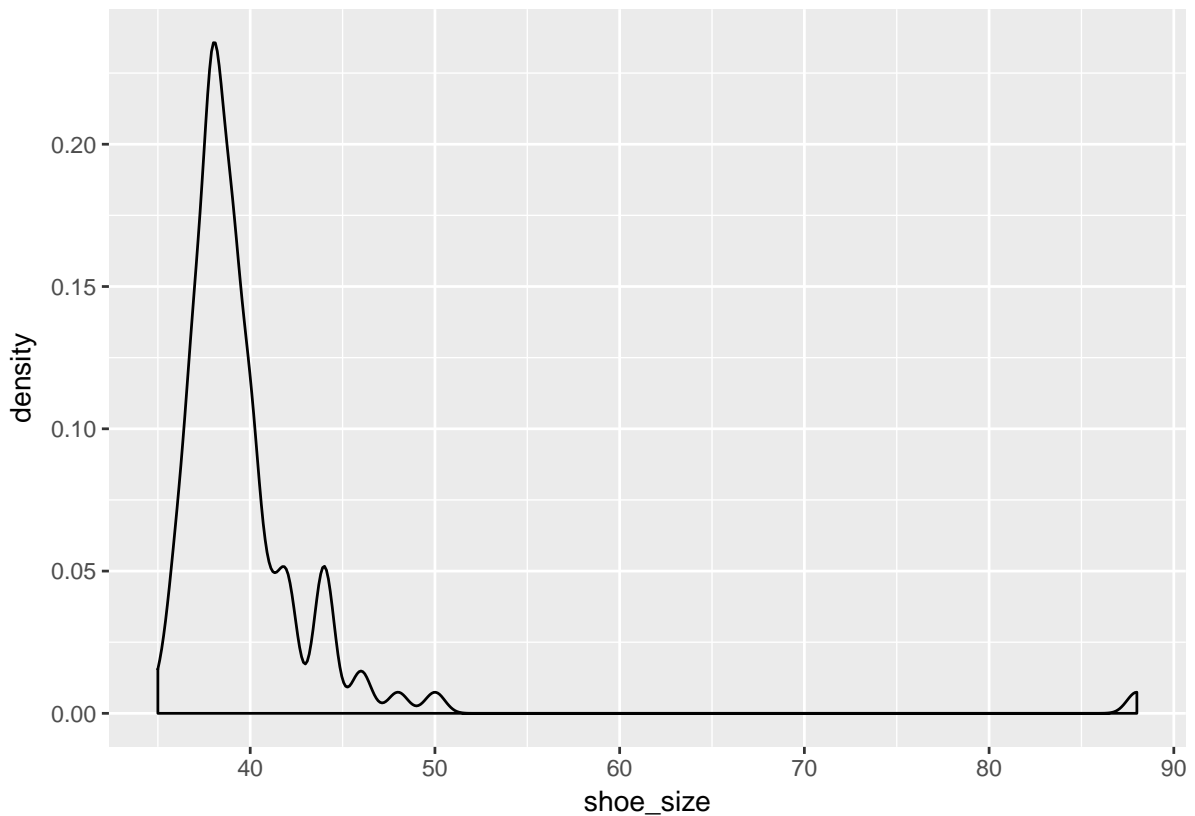


Weisen wir nur der X-Achse (aber nicht der Y-Achse) eine kontinuierliche Variable zu, so wählt ggplot2 automatisch als Geom automatisch ein Histogramm; wir müssen daher nicht explizieren, dass wir ein Histogramm als Geom wünschen (aber wir könnten es hinzufügen). Alternativ wäre ein Dichtediagramm hier von Interesse:

```
# ggplot(x = shoe_size, data = wo_men) wie oben
```

```
ggplot(x = shoe_size, data = wo_men, geom = "density")
```

```
## Warning: Removed 1 rows containing non-finite values (stat_density).
```



Was man sich merken muss, ist, dass hier nur das Geom mit Anführungsstrichen zu benennen ist, die übrigen Parameter *ohne*.

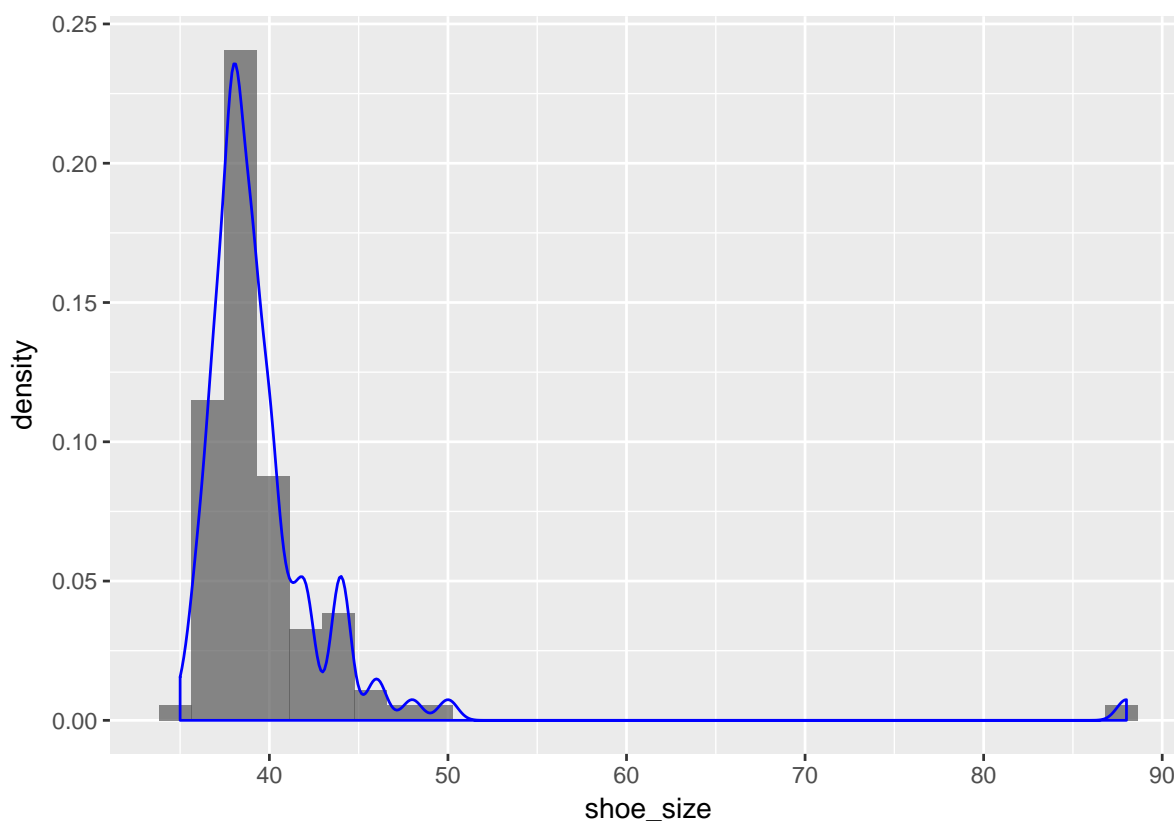
Vielleicht wäre es noch schön, beide Geome in einem Diagramm zu kombinieren. Das ist etwas komplizierter; wir müssen zum großen Bruder ggplot umsteigen, da qplot diese Funktionen nicht anbietet.

```
ggplot(data = wo_men) + aes(x = shoe_size) +  
  geom_histogram(aes(y = ..density..),  
    alpha = 0.7) + geom_density(color = "blue")
```

```
## `stat_bin()` using `bins = 30`. Pick better value with `binwidth`.
```

```
## Warning: Removed 1 rows containing non-finite values (stat_bin).
```

```
## Warning: Removed 1 rows containing non-finite values (stat_density).
```

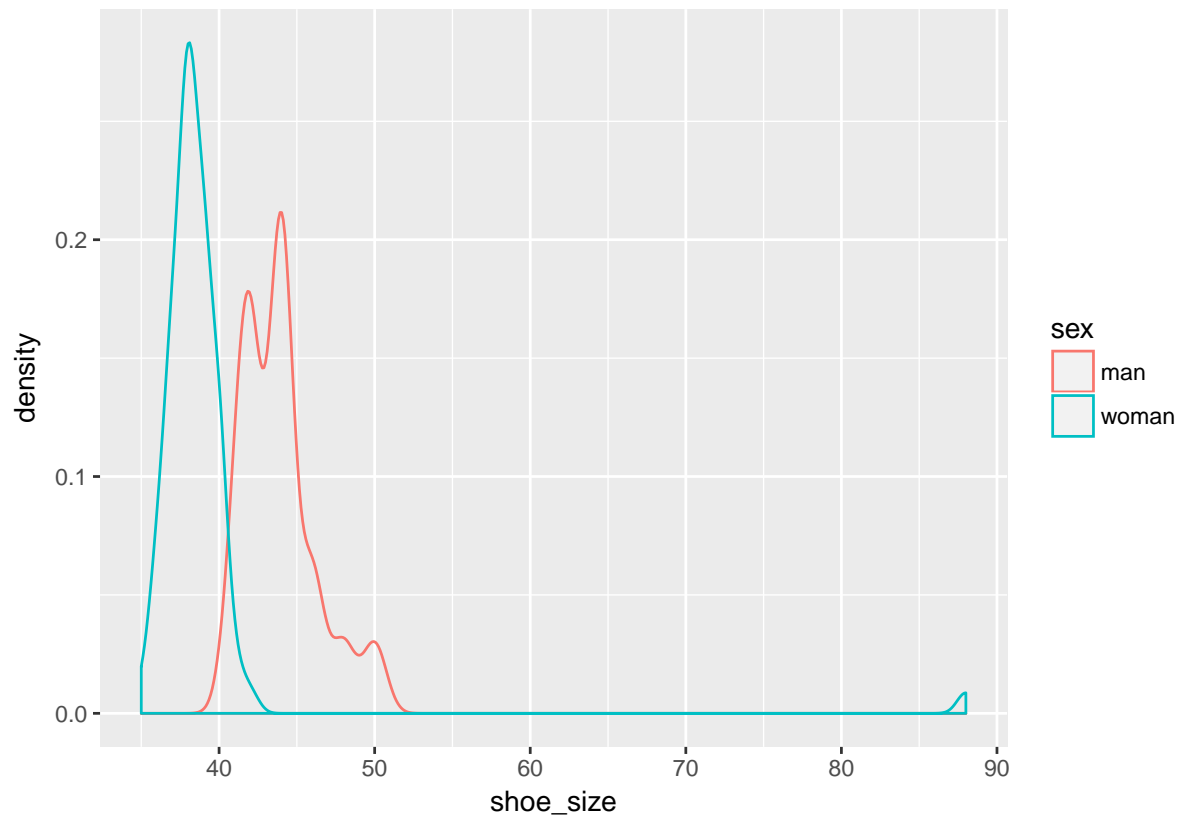


Zuerst haben wir mit dem Parameter `data` den Dataframe benannt. `aes` definiert, welche Variablen welchen Achsen (oder auch z. B. Füllfarben) zugewiesen werden. Hier sagen wir, dass die Schuhgröße auf der X-Achse stehen soll. Das `+`-Zeichen trennt die einzelnen Bestandteile des `ggplot`-Aufrufs voneinander. Als nächstes sagen wir, dass wir gerne ein Histogramm hätten: `geom_histogram`. Dabei soll aber nicht wie gewöhnlich auf der X-Achse die Häufigkeit stehen, sondern die Dichte. `ggplot` berechnet selbständig die Dichte und nennt diese Variable `..density..`; die vielen Punkte sollen wohl klar machen, dass es sich nicht um eine “normale” Variable aus dem eigenen Dataframe handelt, sondern um eine “interne” Variable von `ggplot` – die wir aber nichtsdestotrotz verwenden können. `alpha` bestimmt die “Durchsichtigkeit” eines Geoms; spielen Sie mal etwas damit herum. Schließlich malen wir noch ein blaues Dichtediagramm über das Histogramm.

Wünsche sind ein Fass ohne Boden ... Wäre es nicht schön, ein Diagramm für Männer und eines für Frauen zu haben, um die Verteilungen vergleichen zu können?

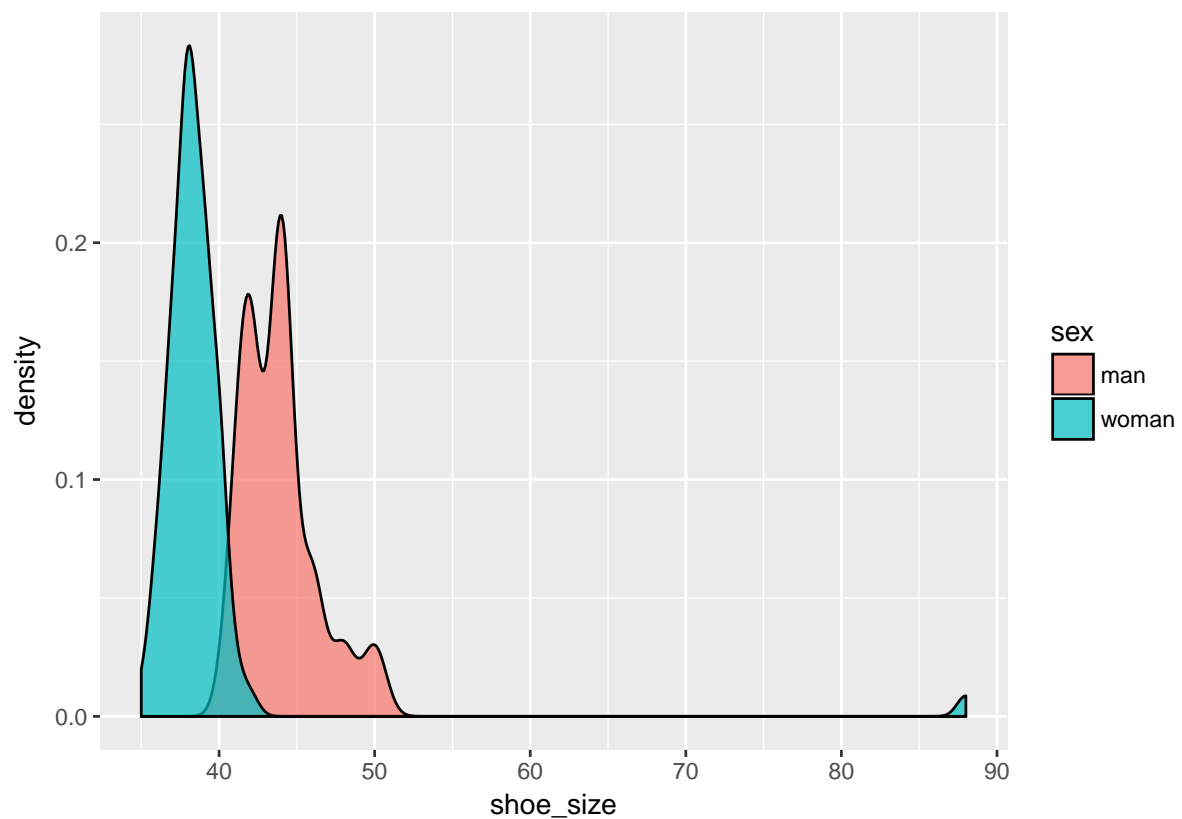
```
ggplot(x = shoe_size, data = wo_men, geom = "density", color = sex)
```

```
## Warning: Removed 1 rows containing non-finite values (stat_density).
```



```
ggplot(x = shoe_size, data = wo_men, geom = "density", fill = sex,  
       alpha = I(0.7))
```

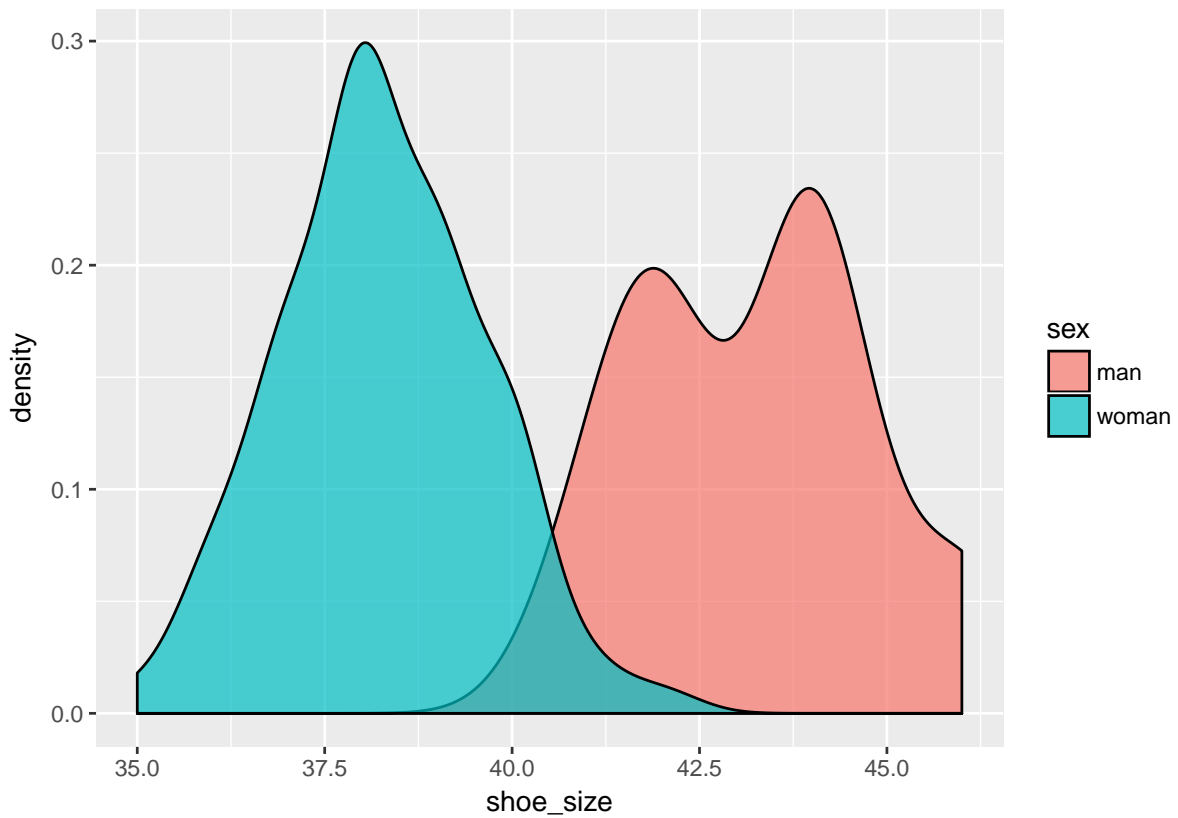
```
## Warning: Removed 1 rows containing non-finite values (stat_density).
```



Hier sollten vielleicht noch die Extremwerte entfernt werden, um den Blick auf das Gros der Werte nicht zu verstellen:

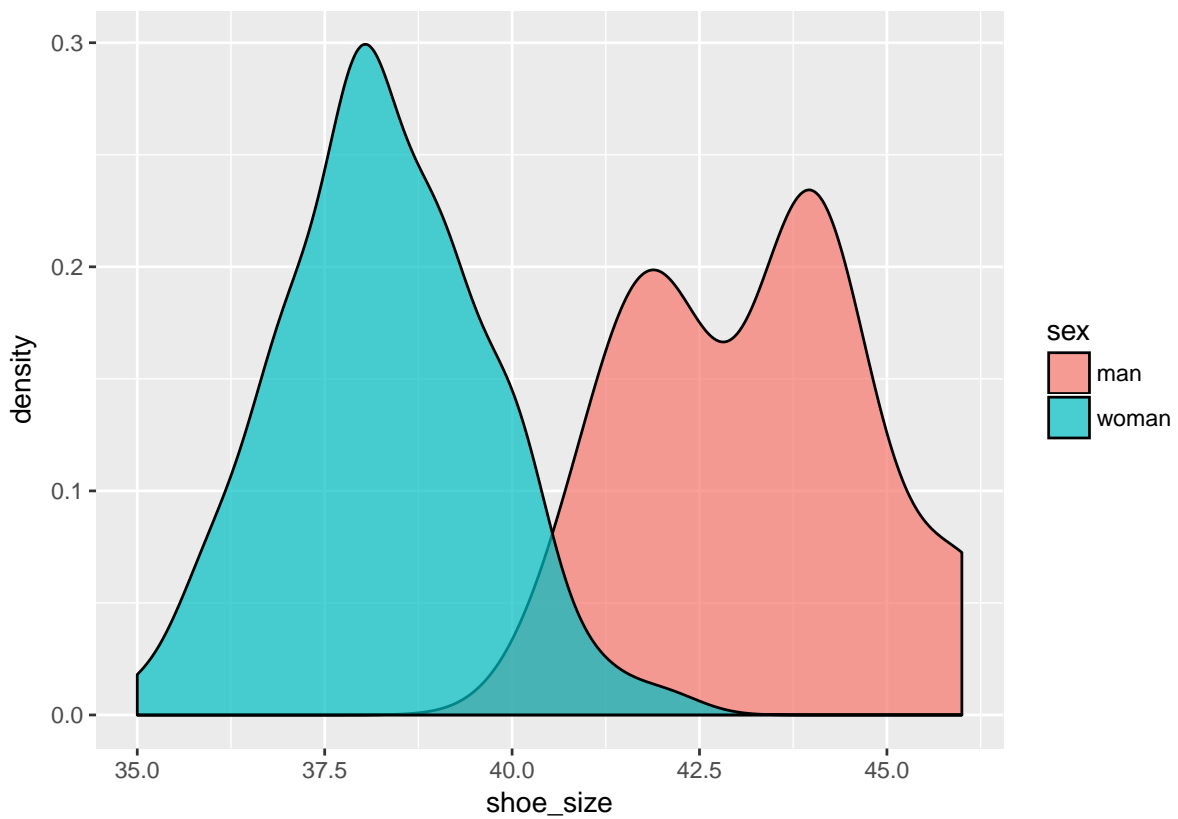
```
wo_men2 <- wo_men %>% filter(shoe_size <= 47)
```

```
ggplot(x = shoe_size, data = wo_men2, geom = "density", fill = sex,  
       alpha = I(0.7))
```

Besser. Man kann das Durchpfeifen auch bis zu `ggplot` weiterführen:

```
wo_men %>% filter(shoe_size <= 47) %>% ggplot(x = shoe_size, data = .,  
  geom = "density", fill = sex, alpha = I(0.7))
```



Die Pfeife versucht im Standard, das Endprodukt des letzten Arbeitsschritts an den *ersten* Parameter des nächsten Befehls weiterzugeben. Ein kurzer Blick in die Hilfe von `qplot` zeigt, dass der erste Parameter nicht `data` ist, sondern `x`. Daher müssen wir explizit sagen, an welchen Parameter wir das Endprodukt des letzten Arbeitsschritts geben wollen. Netterweise müssen wir dafür nicht viel tippen: Mit einem schlichten Punkt `.` können wir sagen “nimm den Dataframe, so wie er vom letzten Arbeitsschritt ausgegeben wurde”.

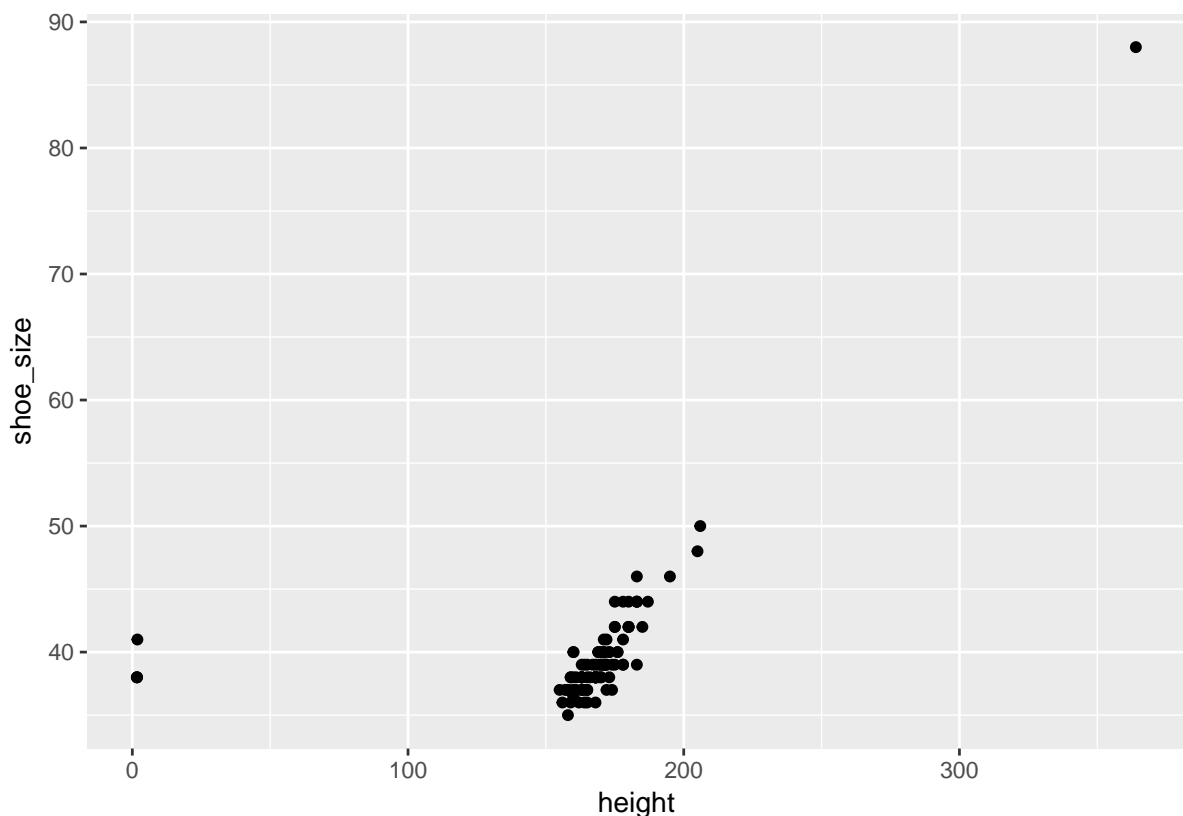
Mit `fill = sex` sagen wir `qplot`, dass er für Männer und Frauen jeweils ein Dichtediagramm erzeugen soll; jedem Dichtediagramm wird dabei eine Farbe zugewiesen (die uns `ggplot2` im Standard voraussucht). Mit anderen Worten: Die Werte von `sex` werden der Füllfarbe der Histogramme zugeordnet. Anstelle der Füllfarbe hätten wir auch die Linienfarbe verwenden können; die Syntax wäre dann: `color = sex`.

Zwei kontinuierliche Variablen

Ein Streudiagramm ist die klassische Art, zwei metrische Variablen darzustellen. Das ist mit `qplot` einfach:

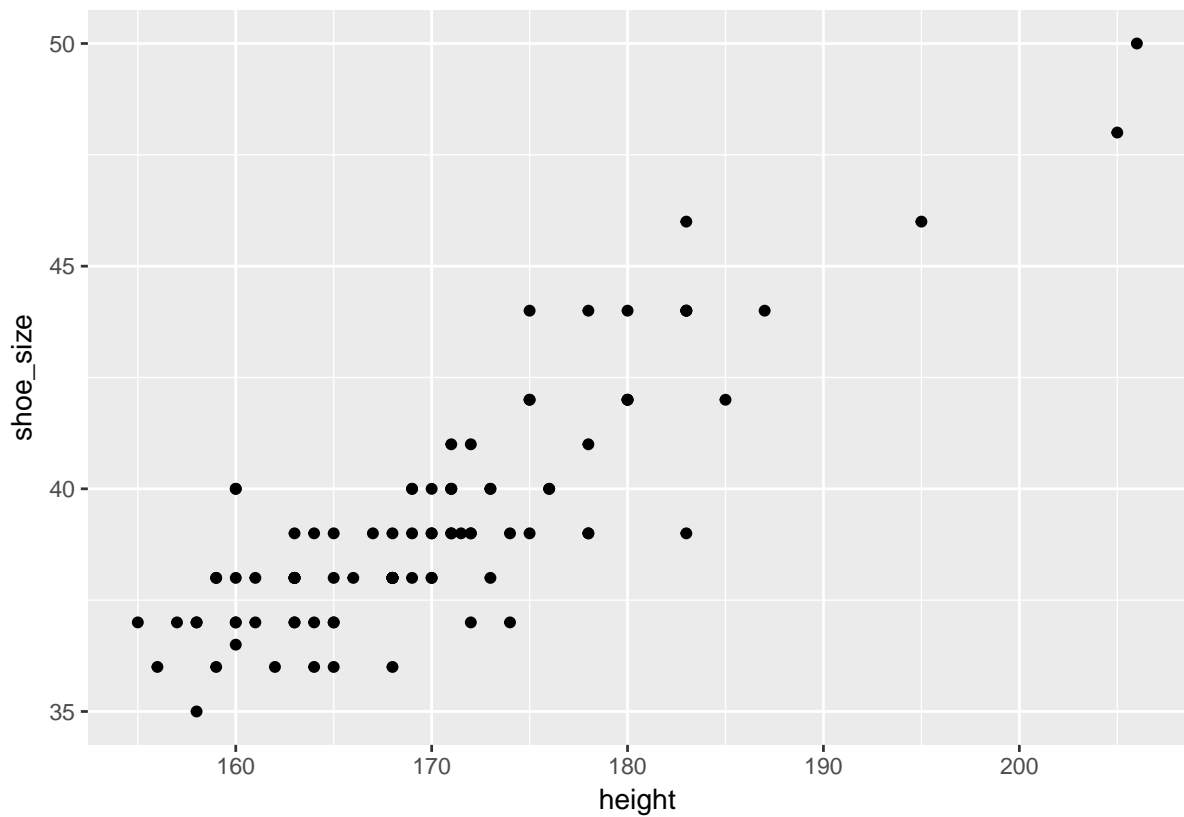
```
qplot(x = height, y = shoe_size, data = wo_men)
```

```
## Warning: Removed 1 rows containing missing values (geom_point).
```



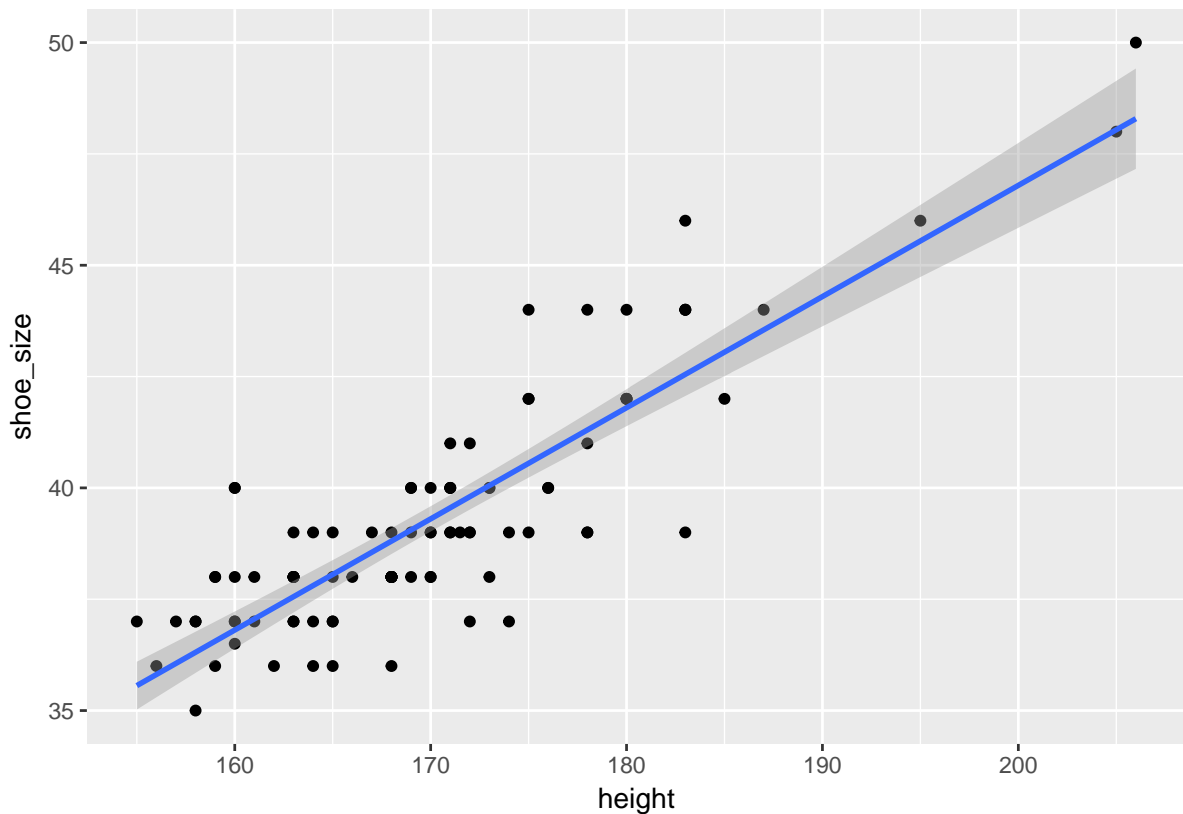
Wir weisen wieder der X-Achse und der Y-Achse eine Variable zu; handelt es sich in beiden Fällen um Zahlen, so wählt `ggplot2` automatisch ein Streudiagramm – d. h. Punkte als Geom (`geom = 'point'`). Wir sollten aber noch die Extremwerte herausnehmen:

```
wo_men %>% filter(height > 150, height < 210, shoe_size < 55) %>%
  qplot(x = height, y = shoe_size, data = .)
```



Der Trend ist deutlich erkennbar: Je größer die Person, desto länger die Füß'. Zeichnen wir noch eine Trendgerade ein.

```
wo_men %>% filter(height > 150, height < 210, shoe_size < 55) %>%
  qplot(x = height, y = shoe_size, data = .) + geom_smooth(method = "lm")
```



Synonym könnten wir auch schreiben:

```
wo_women %>% filter(height > 150, height < 210, shoe_size < 55) %>%
  ggplot() + aes(x = height, y = shoe_size) + geom_point() +
  geom_smooth(method = "lm")
```

Da ggplot als *ersten* Parameter die Daten erwartet, kann die Pfeife hier problemlos durchgereicht werden. *Innerhalb* eines ggplot-Aufrufs werden die einzelne Teile durch ein Pluszeichen + voneinander getrennt. Nachdem wir den Dataframe benannt haben, definieren wir die Zuweisung der Variablen zu den Achsen mit aes (“aes” wie “aesthetics”, also das “Sichtbare” eines Diagramms, die Achsen etc. werden definiert). Ein “Smooth-Geom” ist eine Linie, die sich schön an die Punkte anschmiegt, in diesem Falle als Gerade (lineares Modell, lm).

Bei sehr großen Datensätzen, sind Punkte unpraktisch, da sie sich überdecken (“overplotting”). Ein Abhilfe ist es, die Punkte nur “schwach” zu färben. Dazu stellt man die “Füllstärke” der Punkte über alpha ein: `geom_point(alpha = 1/100)`. Um einen passablen Alpha-Wert zu finden, bedarf es häufig etwas Probierens. Zu beachten ist, dass es mitunter recht lange dauert, wenn ggplot viele (>100.000) Punkte malen soll.

Bei noch größeren Datenmengen bietet sich an, den Scatterplot als “Schachbrett” aufzufassen, und das Raster einzufärben, je nach Anzahl der Punkte pro Schachfeld; zwei Geome dafür sind `geom_hex()` und `geom_bin2d()`.

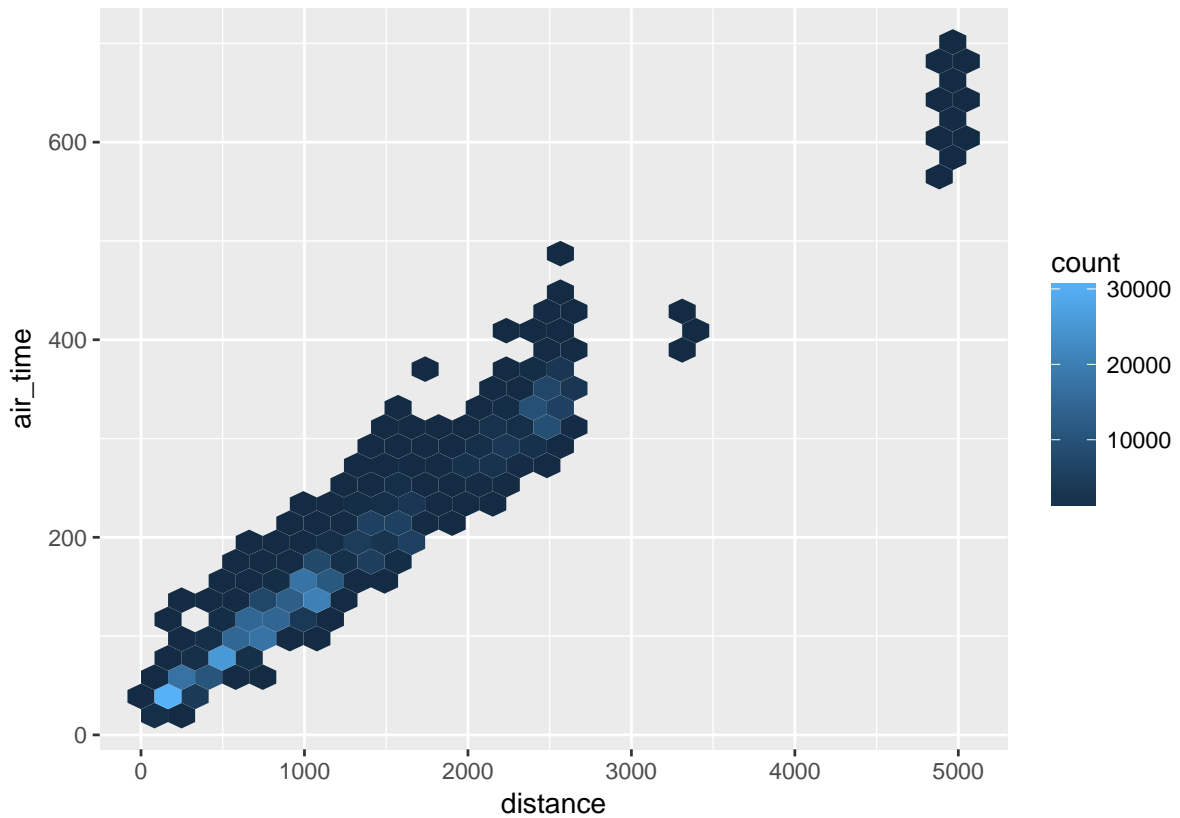
```
data(flights, package = "nycflights13")
```

```
nrow(flights) # groß!
```

```
## [1] 336776
```

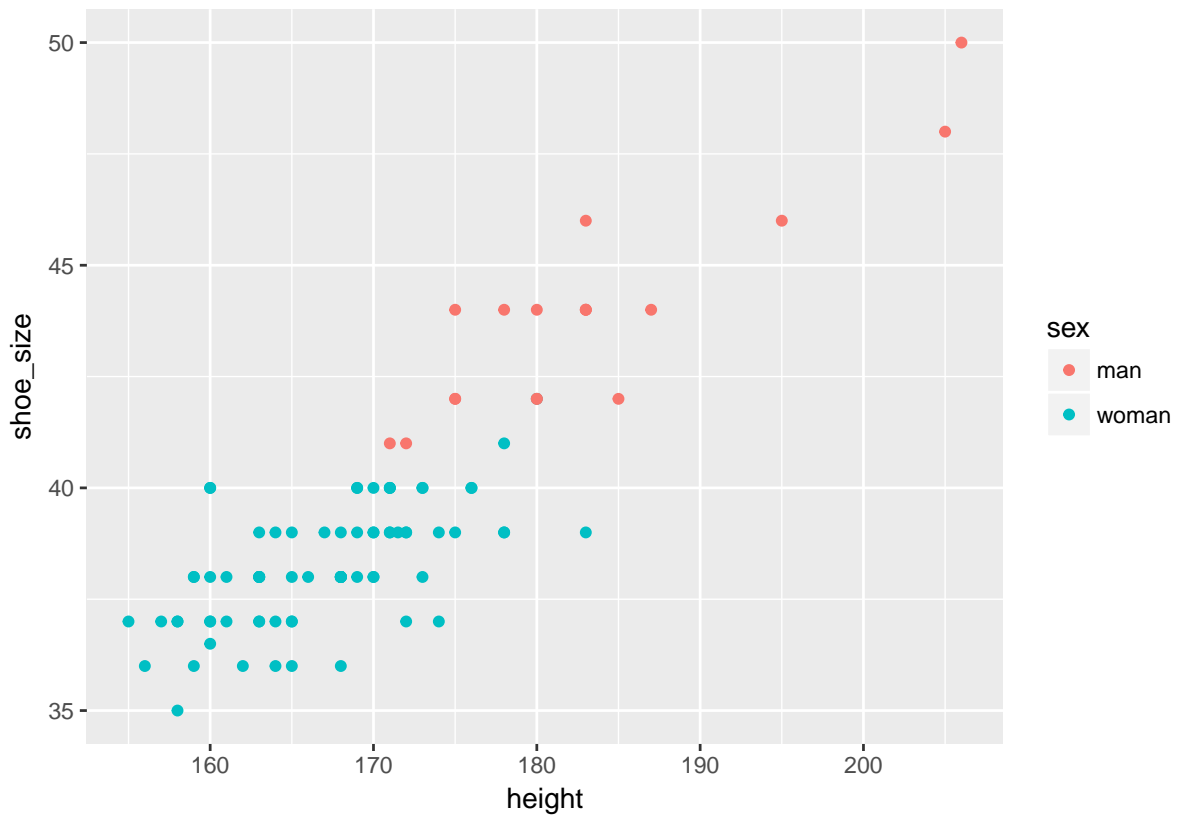
```
ggplot(flights) + aes(x = distance, y = air_time) + geom_hex()
```

```
## Warning: Removed 9430 rows containing non-finite values (stat_binhex).
```



Wenn man dies verdaut hat, wächst der Hunger nach einer Aufteilung in Gruppen.

```
wo_women %>% filter(height > 150, height < 210, shoe_size < 55) %>%
  qplot(x = height, y = shoe_size, color = sex, data = .)
```

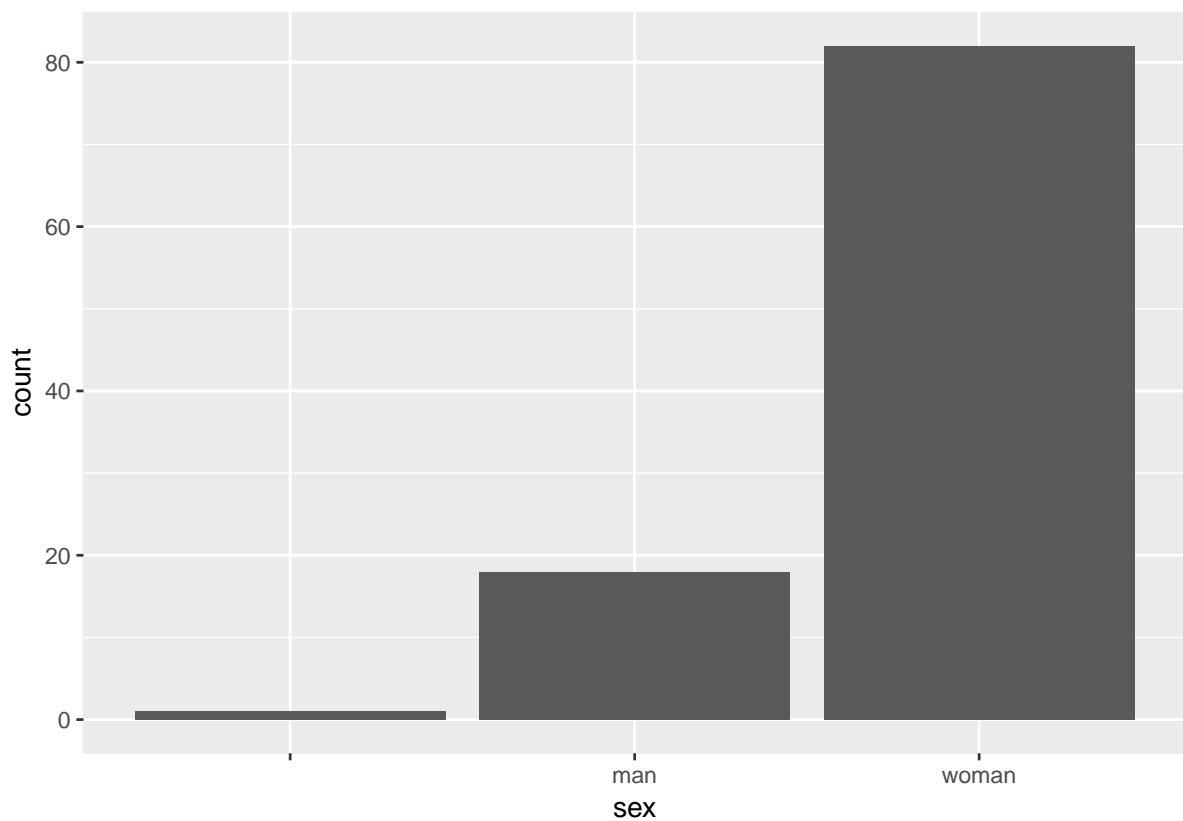


Mit `color = sex` sagen wir, dass die Linienfarbe (der Punkte) entsprechend der Stufen von `sex` eingefärbt werden sollen. Die genaue Farbwahl übernimmt `ggplot2` für uns.

Eine diskrete Variable

Bei diskreten Variablen, vor allem nominalen Variablen, geht es in der Regel darum, Häufigkeiten auszuzählen. Wie viele Männer und Frauen sind in dem Datensatz?

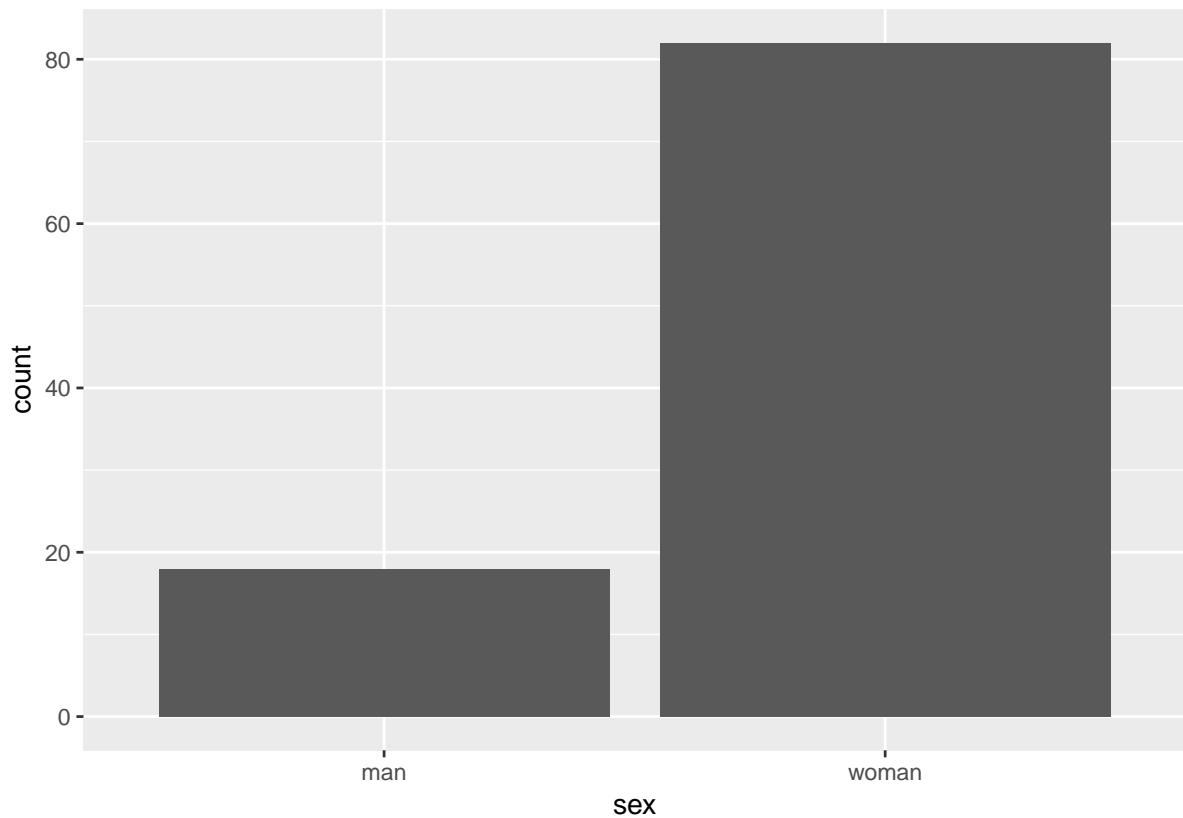
```
ggplot(x = sex, data = wo_men)
```



Falls nur die X-Achse definiert ist und dort eine Faktorvariable oder eine Text-Variable steht, dann nimmt `qplot` automatisch ein Balkendiagramm als Geom.

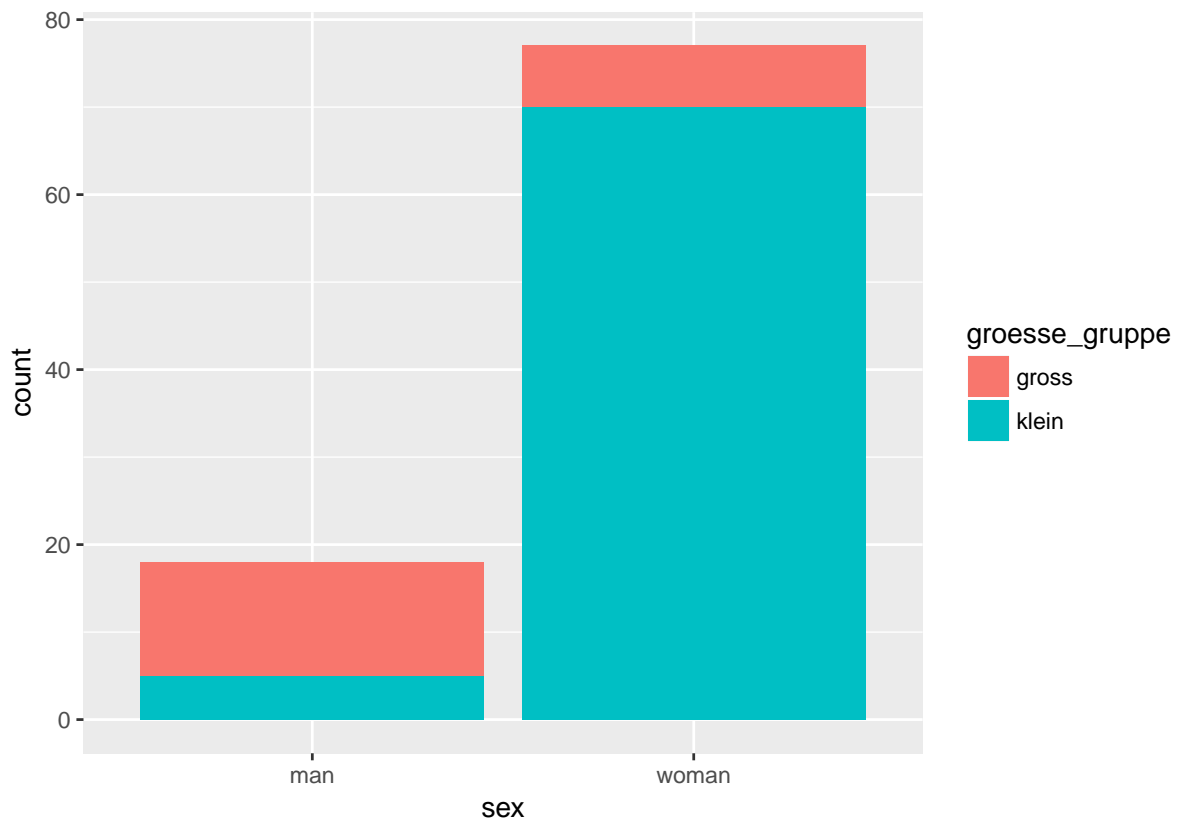
Entfernen wir vorher noch die fehlenden Werte:

```
wo_men %>% na.omit() %>% qplot(x = sex, data = .)
```



Wir könnten uns jetzt die Frage stellen, wie viele kleine und viele große Menschen es bei Frauen und bei den Männern gibt. Dazu müssen wir zuerst eine Variable wie “Größe gruppiert” erstellen mit zwei Werten: “klein” und “groß”. Nennen wir sie `groesse_gruppe`

```
wo_men$groesse_gruppe <- car::recode(wo_men$height,  
  "lo:175 = 'klein'; else = 'gross'")  
  
wo_men2 <- wo_men %>% filter(height > 150, height <  
  210, shoe_size < 55) %>% na.omit  
  
qplot(x = sex, fill = groesse_gruppe, data = wo_men2)
```

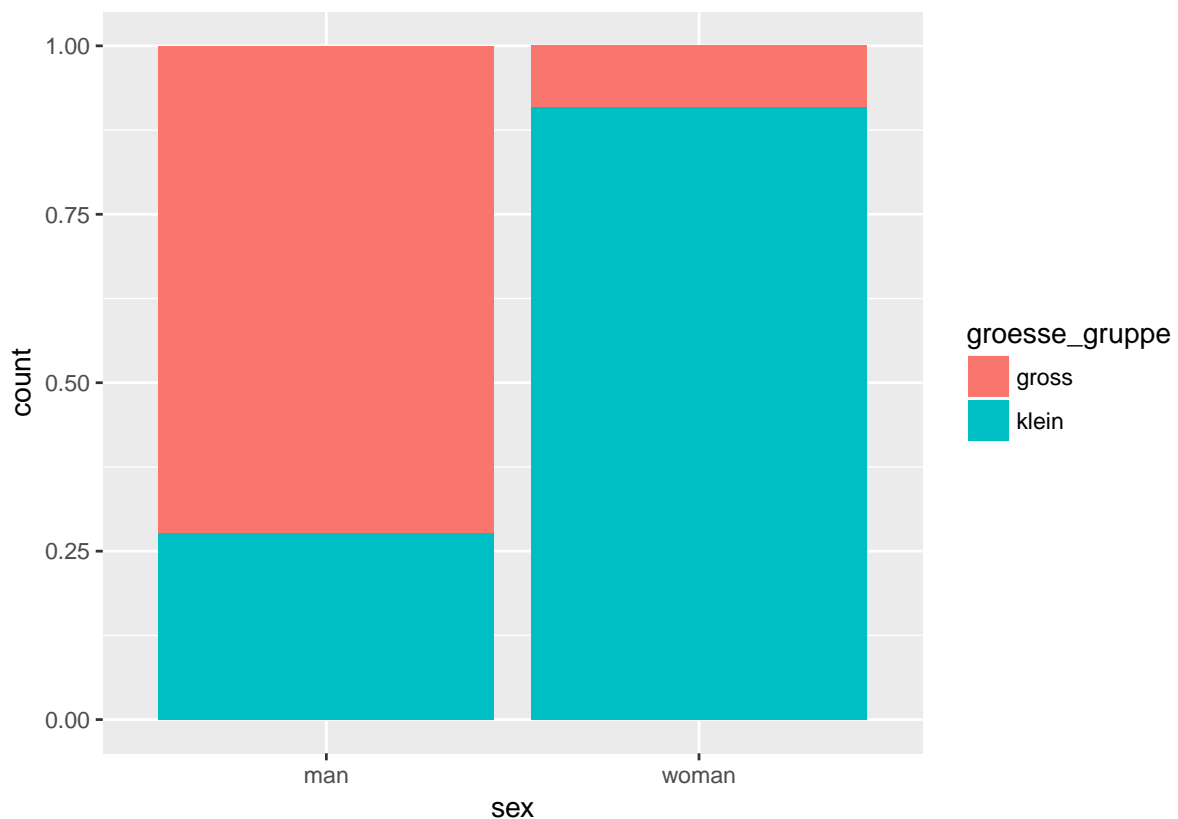
In Worten sagt der `recode`-Befehl hier in etwa: “Kodierte `wo_men$height` um, die Werte vom kleinsten (10) Wert bis 170 sollen den Wert `klein` bekommen, ansonsten den Wert `gross`”.

Hier haben wir `qplot` gesagt, dass die Balken entsprechend der Häufigkeit von `groesse_gruppe` gefüllt werden sollen. Und bei den Frauen sind bei dieser Variablen die Werte `klein` häufig; bei den Männern hingegen die Werte `gross`.

Schön wäre noch, wenn die Balken Prozentwerte angeben würden. Das geht mit `qplot` (so) nicht; wir schwenken auf `ggplot` um²².

```
wo_men2 %>% ggplot() + aes(x = sex, fill = groesse_gruppe) +  
  geom_bar(position = "fill")
```

²²Cleveland fände diese Idee nicht so gut.



Schauen wir uns die Struktur des Befehls `ggplot` näher an.

- `wo_men2`: Hey R, nimm den Datensatz `wo_men2`
- `ggplot()`: Hey R, male ein Diagramm von Typ `ggplot` (mit dem Datensatz aus dem vorherigen Pfeifen-Schritt, d. h. aus der vorherigen Zeile, also `wo_men2`)!
- `+`: Das Pluszeichen grenzt die Teile eines `ggplot`-Befehls voneinander ab.
- `aes`: von “aesthetics”, also welche Variablen des Datensatzes den sichtbaren Aspekten (v. a. Achsen, Farben) zugeordnet werden.
- `x`: Der X-Achse (Achtung, `x` wird klein geschrieben hier) wird die Variable `sex` zugeordnet.
- `y`: gibt es nicht??? Wenn in einem `ggplot`-Diagramm *keine* Y-Achse definiert wird, wird `ggplot` automatisch ein Histogramm bzw. ein Balkendiagramm erstellen. Bei diesen Arten von Diagrammen steht auf der Y-Achse keine eigene Variable, sondern meist die Häufigkeit des entsprechenden X-Werts (oder eine Funktion der Häufigkeit, wie relative Häufigkeit).
- `fill`: Das Diagramm (die Balken) soll(en) so gefüllt werden, dass sich die Häufigkeit der Werte von `groesse_gruppe` darin widerspiegelt.
- `geom_XYZ`: Als “Geom” soll ein Balken (“bar”) gezeichnet werden.
Ein Geom ist in `ggplot2` das zu zeichnende Objekt, also ein Boxplot, ein Balken, Punkte, Linien etc. Entsprechend wird das gewünschte Geom mit `geom_bar`, `geom_boxplot`, `geom_point` etc. gewählt.

- `position = fill`: Dieser Parameter will sagen, dass die Balken alle eine Höhe von 100% (1) haben. Die Balken zeigen also nur die Anteile der Werte der `fill`-Variablen.

Die einzige Änderung in den Parametern ist `position = 'fill'`. Dieser Parameter weist ggplot an, die Positionierung der Balken auf die Darstellung von Anteilen auszulegen. Damit haben alle Balken die gleiche Höhe, nämlich 100% (1). Aber die “Füllung” der Balken schwankt je nach der Häufigkeit der Werte von `groesse_gruppe` pro Balken (d. h. pro Wert von `sex`).

Wir sehen, dass die Anteile von großen bzw. kleinen Menschen bei den beiden Gruppen (Frauen vs. Männer) *unterschiedlich hoch* sind. Dies spricht für einen *Zusammenhang* der beiden Variablen; man sagt, die Variablen sind *abhängig* (im statistischen Sinne).

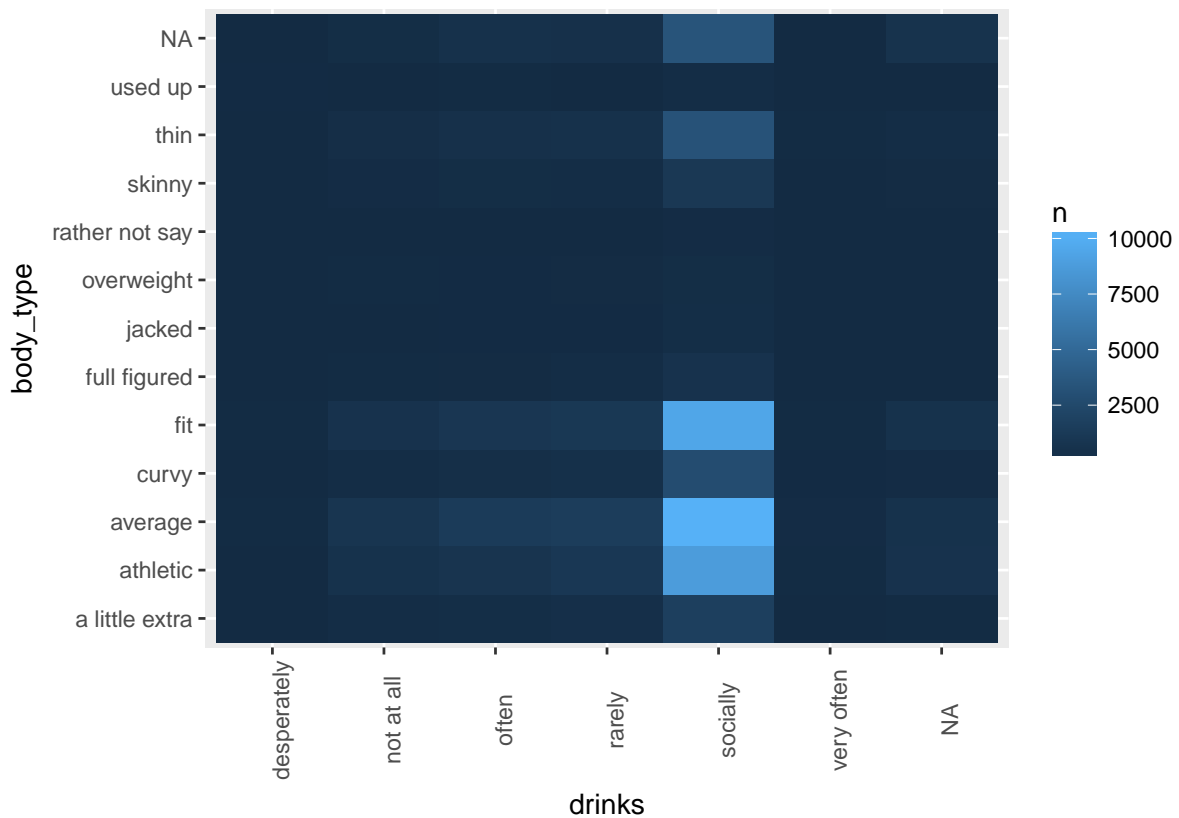
Je unterschiedlicher die “Füllhöhe”, desto stärker sind die Variablen (X-Achse vs. Füllfarbe) voneinander abhängig (bzw. desto stärker der Zusammenhang).

Zwei diskrete Variablen

Arbeitet man mit nominalen Variablen, so sind Kontingenztabellen täglich Brot. Z. B.: Welche Produkte wurden wie häufig an welchem Standort verkauft? Wie ist die Verteilung von Alkoholkonsum und Körperform bei Menschen einer Single-Börse. Bleiben wir bei letztem Beispiel.

```
data(profiles, package = "okcupiddata")

profiles %>% count(drinks, body_type) %>%
  ggplot + aes(x = drinks, y = body_type,
    fill = n) + geom_tile() + theme(axis.text.x = element_text(angle = 90))
```



Was haben wir gemacht? Also:

Nehme den Datensatz "profiles" UND DANN

Zähle die Kombinationen von "drinks" und "body_type" UND DANN

Erstelle ein ggplot-Plot UND DANN

Weise der X-Achse "drinks" zu,

der Y-Achse "body_type" und der Füllfarbe "n" UND DANN

Male Fliesen UND DANN

Passe das Thema so an, dass der Winkel für Text der X-Achse auf 90 Grad steht.

Was sofort ins Auge sticht, ist, dass "soziales Trinken", nennen wir es mal so, am häufigsten ist, unabhängig von der Körperform. Ansonsten scheinen die Zusammenhäng nicht sehr stark zu sein.

Zusammenfassungen zeigen

Manchmal möchten wir *nicht* die Rohwerte einer Variablen darstellen, sondern z. B. die Mittelwerte pro Gruppe. Mittelwerte sind eine bestimmte *Zusammenfassung* einer Spalte; also fassen wir zuerst die Körpergröße zum Mittelwert zusammen – gruppiert nach Geschlecht.

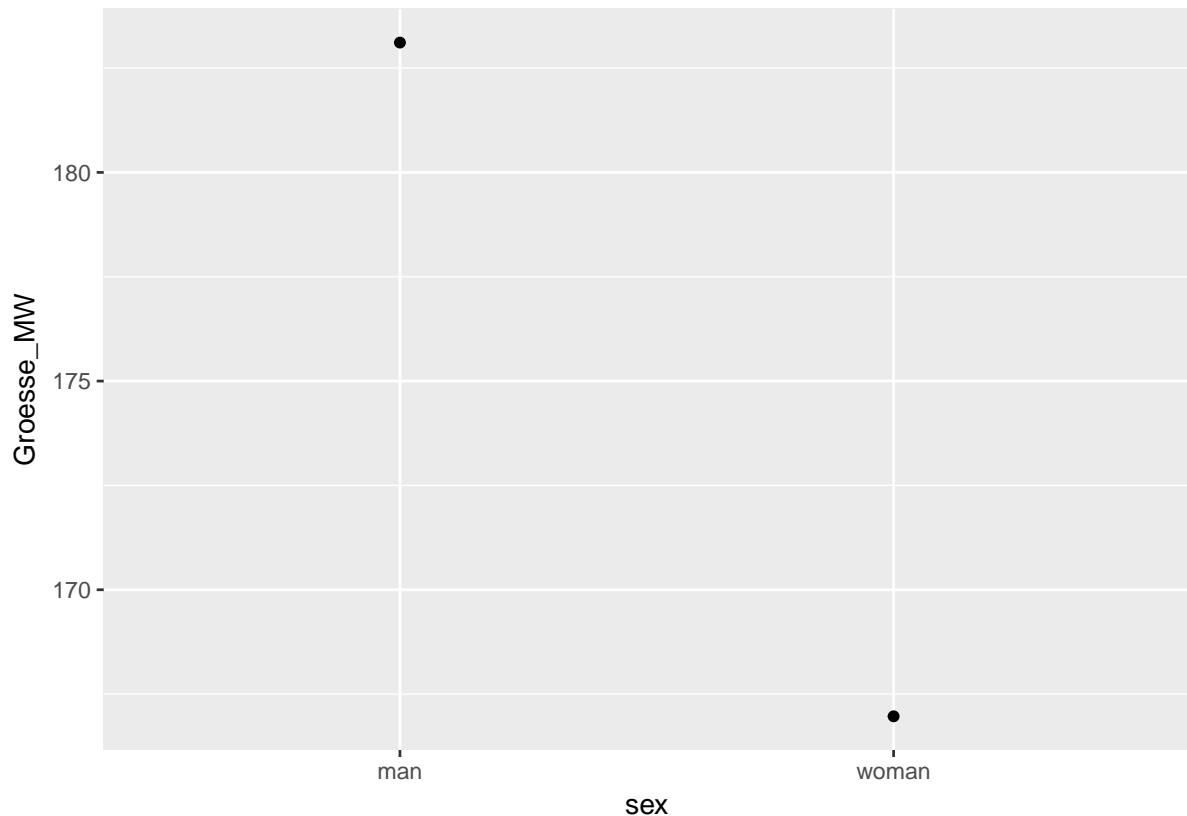
```
wo_men3 <- wo_men2 %>% group_by(sex) %>%
  summarise(Groesse_MW = mean(height))

wo_men3
```

```
## # A tibble: 2 x 2
##   sex Groesse_MW
##   <fctr>      <dbl>
## 1   man    183.1111
## 2  woman    166.9675
```

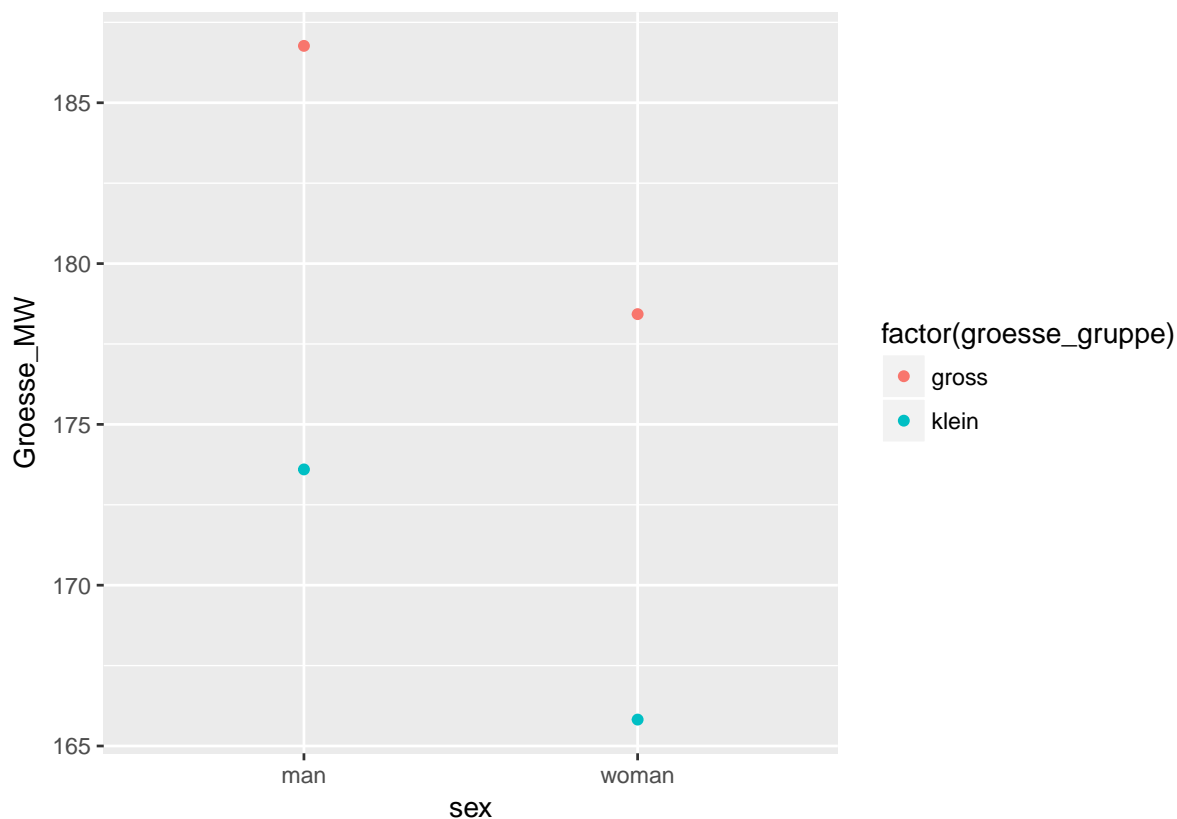
Diese Tabelle schieben wir jetzt in ggplot2; natürlich hätten wir das gleich in einem Rutsch durchpfeifen können.

```
wo_men3 %>% ggplot(x = sex, y = Groesse_MW, data = .)
```



Das Diagramm besticht nicht durch die Tiefe und Detaillierung. Wenn wir noch zusätzlich die Mittelwerte nach Groesse_Gruppe ausweisen, wird das noch überschaubar bleiben.

```
wo_men2 %>% group_by(sex, groesse_gruppe) %>% summarise(Groesse_MW = mean(height)) %>%
  ggplot(x = sex, color = factor(groesse_gruppe), y = Groesse_MW,
    data = .)
```



Verweise

- Edward Tufte gilt als Grand Seigneur der Datenvisualisierung; er hat mehrere lesenswerte Bücher zu dem Thema geschrieben [@1930824130; @1930824165; @1930824149].
- William Cleveland, ein amerikanischer Statistiker ist bekannt für seine grundlegenden, und weithin akzeptierten Ansätze für Diagramme, die die wesentliche Aussage schnörkellos transportieren [@Cleveland].
- Die Auswertung von Umfragedaten basiert häufig auf Likert-Skalen. Ob diese metrisches Niveau aufweisen, darf bezweifelt werden. Hier findet sich einige vertiefenden Überlegungen dazu und zur Frage, wie Likert-Daten ausgewertet werden könnten: <https://bookdown.org/Rmadillo/likert/>.

Hinweis

Der Anhang *Daten visualisieren* mit ggplot wurde von Sebastian Sauer erstellt.

Versionshinweise:

- Datum erstellt: 2017-09-16
- R Version: 3.4.1
- ggplot2 Version: 2.2.1