



厦门大学《微积分 I-1》课程期末试卷

试卷类型：(理工类 A 卷) 考试日期 2017.01.11

一、求下列的定积分 (每小题 6 分, 共 18 分) :

1. $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$

解: 令 $t = \sqrt{x}$, 则 $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}} = \int_0^2 \frac{dt^2}{1+t} = \int_0^2 \frac{2t}{1+t} dt = \int_0^2 2dt - \int_0^2 \frac{2}{1+t} dt$
 $= 4 - 2\ln|t+1| \Big|_0^2 = 4 - 2\ln 3$

2. $\int_{-3}^3 \sqrt{9-x^2} + x\ln(1+x^2) dx$

解法一: 注意到 $x\ln(1+x^2)$ 在 $[-3, 3]$ 为奇函数, 所以 $\int_{-3}^3 x\ln(1+x^2) dx = 0$,

利用定积分的几何意义, 知 $\int_{-3}^3 \sqrt{9-x^2} dx = \frac{1}{2} \pi \cdot 3^2 = \frac{9}{2} \pi$, 因此

$$\int_{-3}^3 \sqrt{9-x^2} + \ln(x + \sqrt{x^2+1}) dx = \frac{9}{2} \pi + 0 = \frac{9}{2} \pi$$

解法二: $\int_{-3}^3 \sqrt{9-x^2} dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 3 \cos t d(3 \sin t) = 9 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \frac{9}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1 + \cos 2t dt$

$$= \frac{9}{2} \pi + \frac{9}{4} \sin 2t \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{9}{2} \pi$$

$$\int_{-3}^3 x\ln(1+x^2) dx = \frac{1}{2} \int_{-3}^3 \ln(1+x^2) d(1+x^2) = \frac{1}{2} (1+x^2) \ln(1+x^2) \Big|_{-3}^3 - \int_{-3}^3 (1+x^2) d\ln(1+x^2)$$

$$= 0 - \int_{-3}^3 2x dx = -x^2 \Big|_{-3}^3 = 0$$

$$\therefore \int_{-3}^3 \sqrt{9-x^2} + \ln(x + \sqrt{x^2+1}) dx = \frac{9}{2} \pi + 0 = \frac{9}{2} \pi$$

$$3. \int_0^{\pi} x \sqrt{\cos^2 x - \cos^4 x} dx$$

$$\text{解法一: } \int_0^{\pi} x \sqrt{\cos^2 x - \cos^4 x} dx = \int_0^{\pi} x \sin x \cdot |\cos x| dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x \cdot \cos x dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x \sin x \cdot \cos x dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin 2x dx - \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x \sin 2x dx$$

$$= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} x \cos 2x + \frac{1}{4} \sin 2x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} x \cos 2x + \frac{1}{4} \sin 2x \right) \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$$= \frac{\pi}{8} + \frac{3\pi}{8} = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{解法二: } \int_0^{\pi} x \sqrt{\cos^2 x - \cos^4 x} dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \sqrt{\cos^2 x - \cos^4 x} dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \sin x \cdot |\cos x| dx$$

$$= \frac{\pi}{2} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \cos x dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x \cdot \cos x dx \right)$$

$$= \frac{\pi}{4} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin 2x dx \right)$$

$$= \frac{\pi}{8} \left(-\cos 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \cos 2x \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \right)$$

$$= \frac{\pi}{8} \cdot (2 + 2) = \frac{\pi}{2}$$

二、求下列的不定积分（每小题 6 分，共 12 分）：

$$1. \int \sec^4 x dx$$

$$\text{解: } \int \sec^4 x dx = \int (1 + \tan^2 x) d \tan x = \tan x + \frac{1}{3} \tan^3 x + C$$

$$2. \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{1+x^2}}$$

解：令 $x = \tan t$ ， $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ，则 $\sqrt{1+x^2} = \sec t$ ，

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{1+x^2}} &= \int \frac{d(\tan t)}{\tan^2 t \cdot \sec t} = \int \frac{\sec t}{\tan^2 t} dt = \int \frac{\cos t}{\sin^2 t} dt = \int \frac{1}{\sin^2 t} d(\sin t) \\ &= -\frac{1}{\sin t} + C = -\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + C \end{aligned}$$

三、（8分）求反常积分 $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x}(x+1)} dx$ 。

解法一： $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x}(x+1)} dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{t(t^3+1)} dt^3 = \int_0^{+\infty} \frac{3t}{t^3+1} dt$

$$\because \int_0^{+\infty} \frac{t}{t^3+1} dt \stackrel{u=\frac{1}{t}}{=} \int_{+\infty}^0 \frac{\frac{1}{u} \cdot u^2}{u^3+1} \cdot \left(\frac{-1}{u^2}\right) du = \int_0^{+\infty} \frac{1}{u^3+1} du = \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^3+1} dt$$

$$\begin{aligned} \therefore \int_0^{+\infty} \frac{t}{t^3+1} dt &= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{t}{t^3+1} + \frac{1}{t^3+1} dt = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{t+1}{t^3+1} dt = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2-t+1} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{1}{(t-\frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2} d(t-\frac{1}{2}) = \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2t-1}{\sqrt{3}} \Big|_0^{+\infty} = \frac{2\sqrt{3}}{9} \pi \end{aligned}$$

因此， $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x}(x+1)} dx = 3 \int_0^{+\infty} \frac{t}{t^3+1} dt = \frac{2\sqrt{3}}{3} \pi$ 。

解法二： $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x}(x+1)} dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{t(t^3+1)} dt^3 = \int_0^{+\infty} \frac{3t}{t^3+1} dt$

$$\begin{aligned} &= \int_0^{+\infty} \frac{3t}{t^3+1} dt = \int_0^{+\infty} -\frac{1}{t+1} + \frac{t+1}{t^2-t+1} dt = \int_0^{+\infty} -\frac{1}{t+1} + \frac{1}{2} \frac{2t-1}{t^2-t+1} + \frac{3}{2} \frac{1}{t^2-t+1} dt \\ &= \left(\ln \frac{t^2-t+1}{(t+1)^2} + \sqrt{3} \arctan \frac{2t-1}{\sqrt{3}} \right) \Big|_0^{+\infty} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \pi \end{aligned}$$

四、(8分) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0, \pi]$ 上连续, 且满足:

$$f(x) = e^x + \int_0^\pi f(x) \sin x dx, \text{ 试求 } f(x)。$$

解: 令 $a = \int_0^\pi f(x) \sin x dx$, 则 $f(x) = e^x + a$, 因此

$$\begin{aligned} a &= \int_0^\pi f(x) \sin x dx = \int_0^\pi e^x \sin x dx + \int_0^\pi a \sin x dx \\ &= \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) \Big|_0^\pi - a \cos x \Big|_0^\pi = \frac{1}{2} (e^\pi + 1) + 2a \end{aligned}$$

解得 $a = -\frac{1}{2}(e^\pi + 1)$, 因此, $f(x) = e^x - \frac{1}{2}(e^\pi + 1)$ 。

五、计算下列极限: (每小题 6 分, 共 12 分)

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln(1 + \frac{k}{n})$

解: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln(1 + \frac{k}{n}) = \int_0^1 \ln(1+x) dx = x \ln(1+x) \Big|_0^1 - \int_0^1 x dx \ln(1+x)$

$$= \ln 2 - \int_0^1 \frac{x}{1+x} dx = \ln 2 - \int_0^1 1 - \frac{1}{1+x} dx = \ln 2 - 1 + \ln(1+x) \Big|_0^1 = 2 \ln 2 - 1。$$

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\int_0^x e^{t^2} dt)^2}{\int_0^x (x-t) \cos t^2 dt}$

解:
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\int_0^x e^{t^2} dt)^2}{\int_0^x (x-t) \cos t^2 dt} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \int_0^x e^{t^2} dt \cdot e^{x^2}}{\int_0^x \cos t^2 dt + x \cos x^2 - x \cos x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \int_0^x e^{t^2} dt \cdot e^{x^2}}{\int_0^x \cos t^2 dt} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \int_0^x e^{t^2} dt}{\int_0^x \cos t^2 dt} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^{x^2}}{\cos x^2} = 2 \end{aligned}$$

六、(9分) 求微分方程 $x \ln x dy + (y - \ln x) dx = 0$ 的通解。

解: 原微分方程整理为 $y' + \frac{1}{x \ln x} y = \frac{1}{x}$, 因此其通解为

$$y = e^{-\int \frac{1}{x \ln x} dx} (C + \int \frac{1}{x} e^{-\int \frac{1}{x \ln x} dx} dx) = \frac{1}{\ln x} (C + \int \frac{\ln x}{x} dx) = \frac{1}{\ln x} [C + \frac{1}{2} (\ln x)^2] = \frac{1}{2} \ln x + \frac{C}{\ln x}$$

七、(10分)求微分方程 $y'' - y = 2(e^x + \cos x)$ 满足初始条件 $y(0) = 0, y'(0) = 2$ 的特解。

解：原微分方程的特征方程为 $r^2 - 1 = 0$ ，解得特征根 $r_1 = -1, r_2 = 1$ ，因此可令微分方程的一个特解为 $y^* = axe^x + b \cos x + c \sin x$ ，代入原微分方程求得 $a = 1, b = -1, c = 0$ 。故微分方程的特解为 $y = xe^x - \cos x + C_1 e^{-x} + C_2 e^x$ 。又 $y(0) = 0, y'(0) = 2$ ，从而 $y(0) = -1 + C_1 + C_2 = 0, y'(0) = 1 - C_1 + C_2 = 2$ ，解得 $C_1 = 0, C_2 = 1$ ，因此满足初始条件微分方程的特解为 $y = xe^x - \cos x + e^x$ 。

八、(10分)有一向上凹的光滑曲线在原点与 x 轴相切，且该曲线在任一点 (x, y) 处的曲率为 e^{-y} ，求该曲线的方程 $(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2})$ 。

解：令该曲线方程为 $y = y(x), -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ ，则由题意得 $y'' > 0, y(0) = 0, y'(0) = 0$ 且

$\frac{|y''|}{(\sqrt{1+(y')^2})^3} = e^{-y}$ ，因此问题转化为求解微分方程 $\frac{y''}{(\sqrt{1+(y')^2})^3} = e^{-y}, y(0) = 0, y'(0) = 0$ 。

令 $P(y) = y'$ ，则 $\frac{P}{(\sqrt{1+P^2})^3} \frac{dP}{dy} = e^{-y}$ ，整理得 $\frac{P}{(\sqrt{1+P^2})^3} dP = e^{-y} dy$ ，两边不定积分，

$\int \frac{P}{(\sqrt{1+P^2})^3} dP = \int e^{-y} dy$ ，从而 $\frac{1}{\sqrt{1+P^2}} = e^{-y} + C_1$ ，又 $P(0) = 0$ ，得 $C_1 = 0$ ，故有

$\frac{1}{\sqrt{1+P^2}} = e^{-y}$ ，求得 $y' = \pm \sqrt{e^{2y} - 1}$ ，整理得 $\frac{1}{\sqrt{e^{2y} - 1}} dy = \pm dx$ ，两边不定积分得，

$-\int \frac{de^{-y}}{\sqrt{1-(e^{-y})^2}} = \pm \int dx$ ，从而 $-\arcsin e^{-y} = \pm x + C_2$ ，又 $y(0) = 0$ ，得 $C_2 = -\frac{\pi}{2}$ ，故有

$\frac{\pi}{2} - \arcsin e^{-y} = \pm x$ ，因此，该曲线方程为 $y = \ln \sec x, -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ 。

九、（8分）设函数 $f(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上连续且单调增加，试证：对于任何的 $b > a > 0$ ，

$$\text{有 } b \int_0^b f(x) dx - a \int_0^a f(x) dx < 2 \int_a^b xf(x) dx \quad .$$

证明：令 $F(x) = 2 \int_a^x tf(t) dt - x \int_0^x f(t) dt + a \int_0^a f(t) dt, x \in [a, b]$ ，则 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上可导，

且对于任意的 $x \in (a, b]$ ，有 $F'(x) = 2xf(x) - \int_0^x f(t) dt - xf(x) = xf(x) - \int_0^x f(t) dt$

积分中值定理

$$= xf(x) - xf(\xi) \quad (0 < \xi < x) = x[f(x) - f(\xi)] > 0$$

从而 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调增加，因此 $F(b) > F(a) = 0$ ，得证。

十、（5分）设非负函数 $f(x)$ 在区间 $[0, a]$ ($a > 0$) 上连续，且对任意给定的 $x \in [0, a]$ ，均

有 $f(x) \leq \int_0^x f(t) dt$ ，试证： $f(x) \equiv 0, \forall x \in [0, a]$ 。

证法一：令 $F(x) = e^{-x} \int_0^x f(t) dt, x \in [0, a]$ ，则 $F(x)$ 在 $[0, a]$ 上可导， $F(x) \geq 0$ ，且对于任

意的 $x \in [0, a]$ ，有 $F'(x) = e^{-x}[f(x) - \int_0^x f(t) dt] \leq 0$ ，从而 $F(x)$ 在 $[0, a]$ 上不增，因此

$F(x) \leq F(0) = 0$ ，故 $F(x) \equiv 0, x \in [0, a]$ ，即有 $\int_0^x f(t) dt \equiv 0, x \in [0, a]$ ，求导得 $f(x) \equiv 0$ ，

$x \in [0, a]$ 。

证法二：因为非负函数 $f(x)$ 在区间 $[0, a]$ ($a > 0$) 上连续，所以 $f(x)$ 在区间 $[0, a]$ 上取到最

大值（令其为 M ），即有 $0 \leq f(x) \leq M$ 。又因为对任意给定的 $x \in [0, a]$ ，均有 $f(x) \leq \int_0^x f(t) dt$ ，

故 $f(x) \leq \int_0^x f(t) dt \leq Mx$ ，进一步又有 $f(x) \leq \int_0^x f(t) dt \leq \int_0^x Mtdt = \frac{M}{2}x^2$ ，利用不等式

$f(x) \leq \int_0^x f(t) dt$ 一直递推下去，可以得到对于任意的自然数 n ，都成立 $f(x) \leq \frac{M}{n!}x^n$ ，从而

$0 \leq f(x) \leq \frac{Ma^n}{n!}$ ，令 $n \rightarrow \infty$ ，注意到 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0$ ，因此 $f(x) \equiv 0, \forall x \in [0, a]$ 。