离散数学

Discrete Mathematics

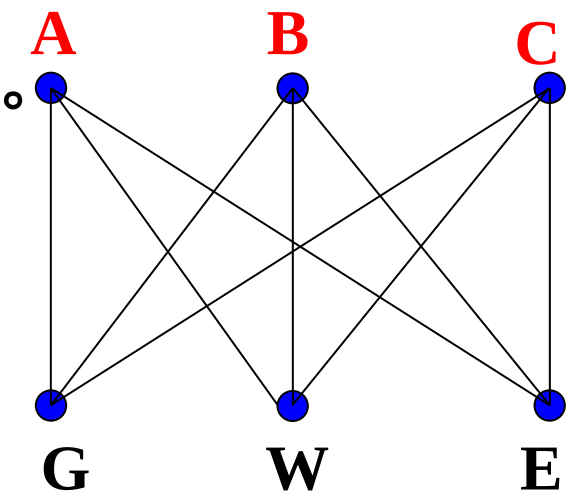
吴梅红

厦门大学计算机科学系

E-mail: wmh@xmu.edu.cn

第十章 平面图及图的着色

- 图的平面性问题有着许多实际的应用。
- 电路设计经常要考虑 布线是否可以
  避免交叉以减少元件间的互感影响。
  建筑物中的地下水管、煤气管和电缆
  线等为安全起见, 要求它们不交叉。



Three Houses and Three Utilities Problem

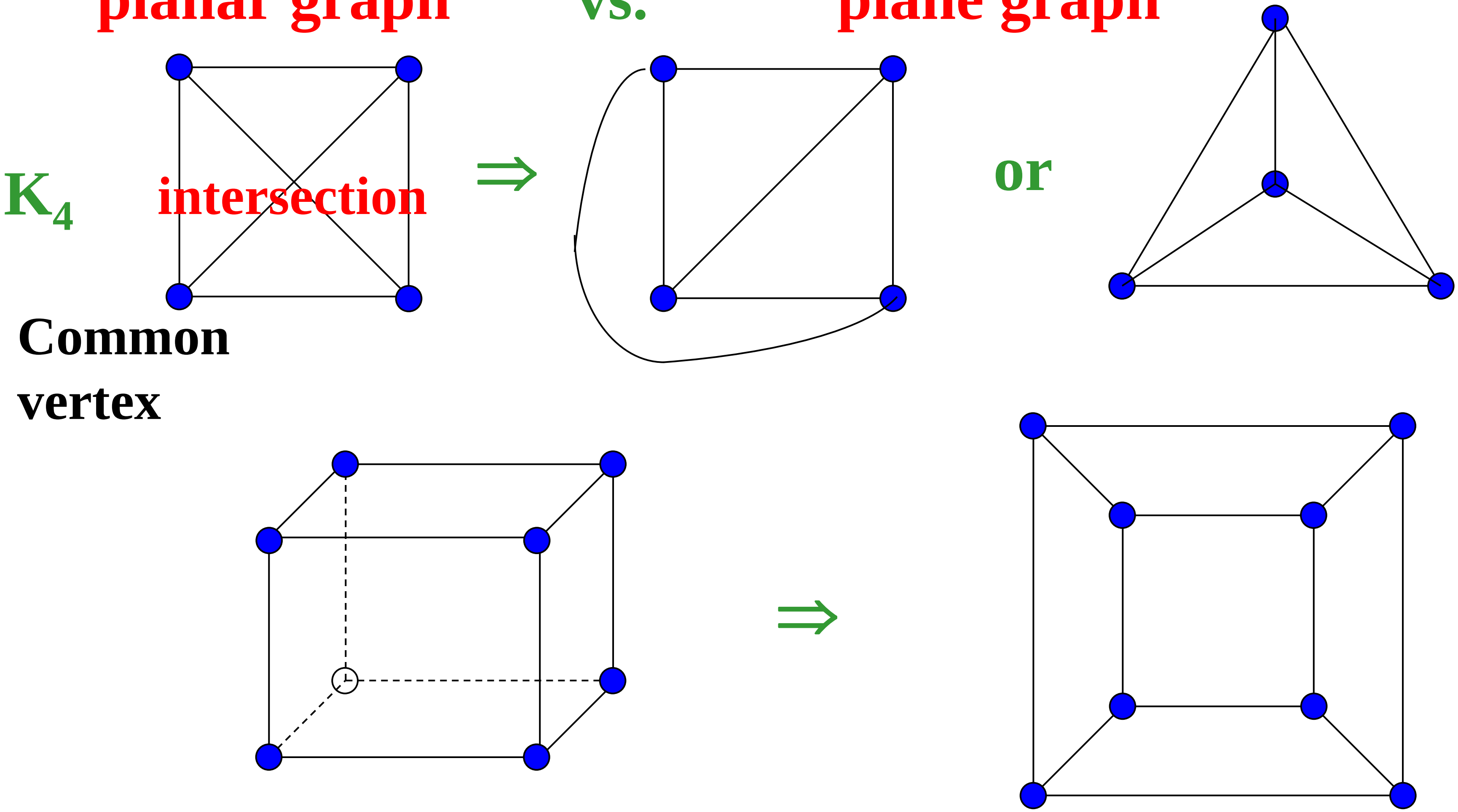
- 如果必然交叉, 那么怎样才能使交叉处尽可能的少。
- 这些问题实际上与图的平面表示representation有关。
- 平面图中所讨论的是无向简单连通图, 本章简称为图。

10.1 平面图planar graph

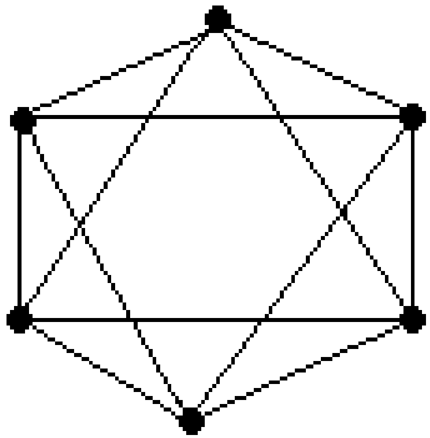
定义 10.1 如果图G能以这样的方式画在平面S上, 除顶点处外没有边相交, 则称G是平面图。画出的没有边相交的图称为G的一个平面表示或平面嵌入或平图 **plane graph**。无平面嵌入的图称为非平面图。 ∎

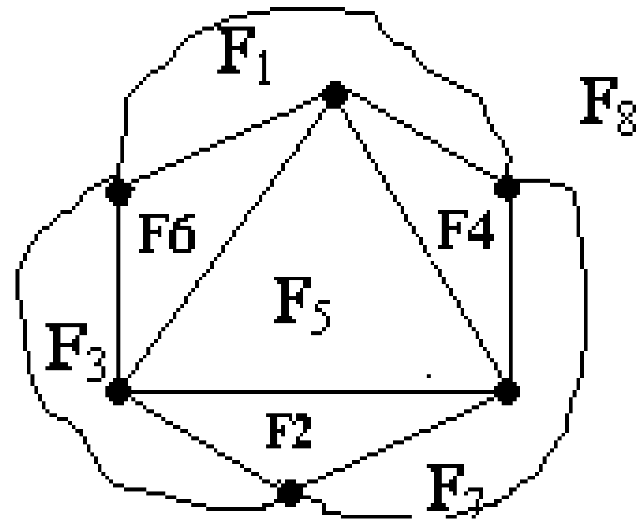
- 图G是平面图 $\Leftrightarrow$ G的每个分图都是平面图。
  因此, 研究平面图的性质时, 只要研究连通的平面图。
- $K_1, K_2, K_3, K_4, K_5 - e$, 圈, 路径, 星, 树都是平面图。
- 一个图即使是平面图, 也有可能不是平图。下文中所谈平面图, 有时指平图, 有时则不是, 根据情况具体区分。

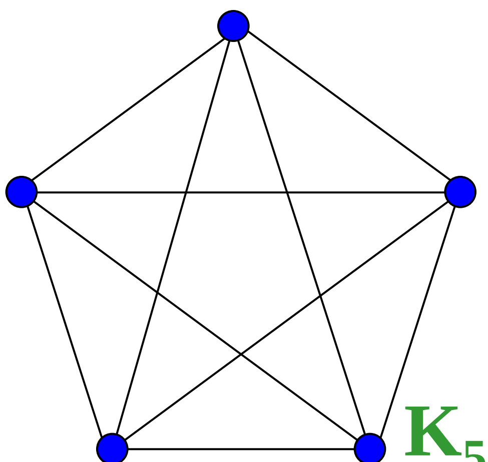
planar graph vs. plane graph



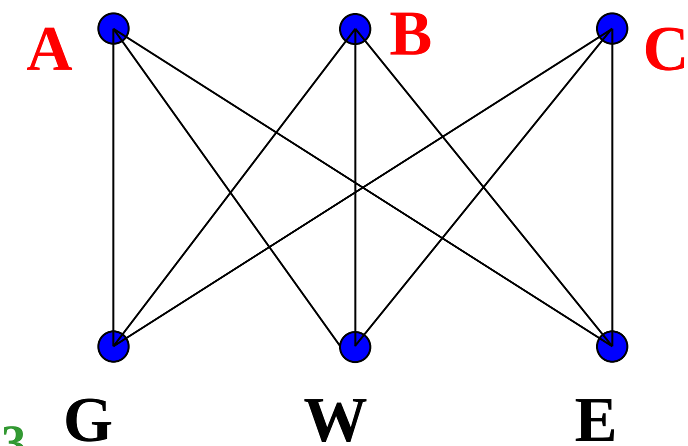
- We can show that a graph is planar by displaying a planar representation (i.e. plane graph).
- It is harder to show that a graph is nonplanar.







K_5

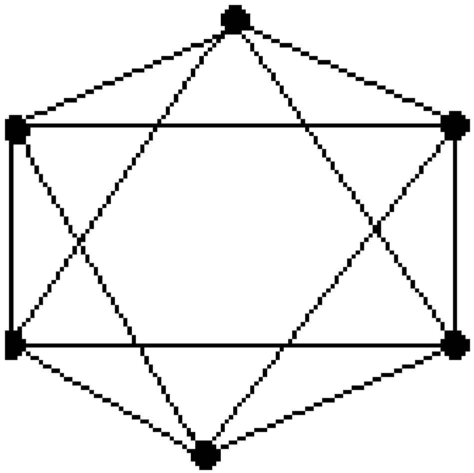


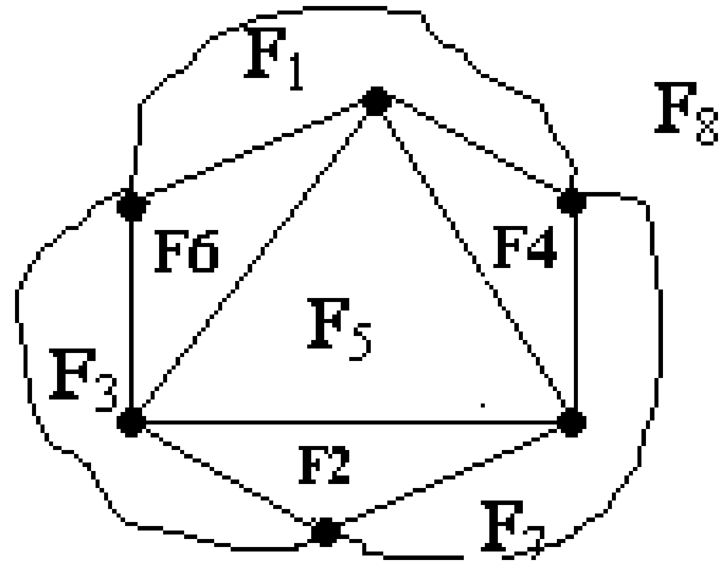
$K_{3,3}$

例 K_5和$K_{3,3}$是代表性的非平面图，有交叉形式。

定义 10.2 设G是平图, 由平图G的边将G所在的平面划分成若干区域Region, 每个区域都称为G的一个面 (其内部既不包含图的顶点, 也不包含图的边)。其中

- 面积无限的面称为无限面或外部面, 常记成R_0。面积有限的面称为有限面或内部面, 常记成R_1, R_2, …, R_k。
- 包围每个面的所有边组成的回路组称为该面的边界, 边界的长度称为面的次数, R的次数记为deg(R)。 ■
- 回路组中元素可能是圈, 可能是简单回路, 还可能是复杂回路, 或它们的并。
- 在每个平图中, 总有一个区域是无限面。



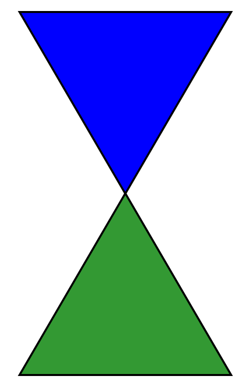


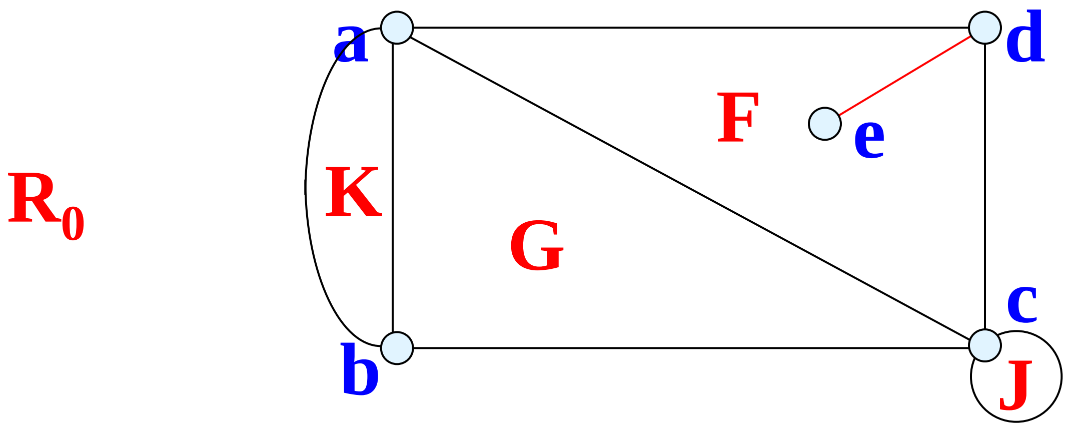
例 图 (a) 有8个面, 它们的次数都为3。

除F_8为无限面外, 7个其余都是有限面。

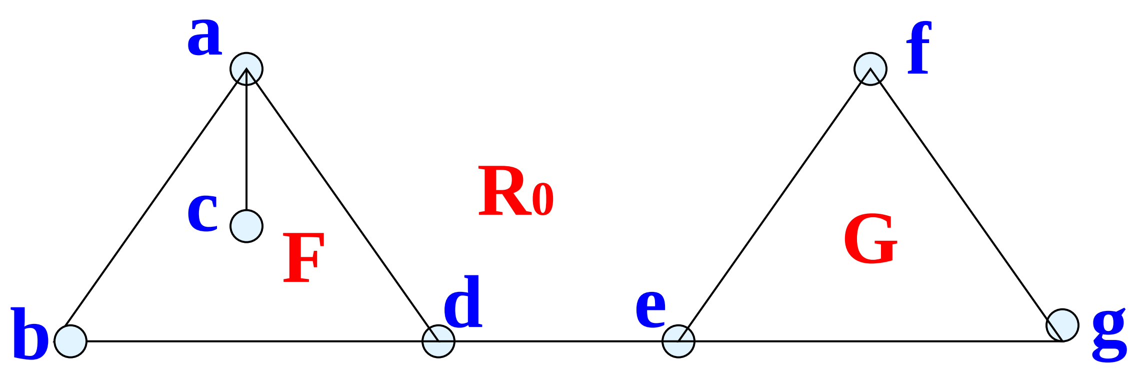
- 如果两个面的边界至少有一条公共边,

则称着两个面是相邻的, 否则是不相邻的。





- 围绕G的边界构成的回路为(a, b, c, a), 长度是3。
- 围绕F的边界构成的回路为(a, c, d, e, d, a), 长度是5。割边de 在计算度时算了2次。
- 围绕J的边界构成的回路为(a, a), 长度是1。
- 围绕K的边界构成的回路为(a, b, a), 长度是1。
- R_0 是外部无限面, 围绕R_0 的边界构成的回路为 (a, b, c, c, d, a), 长度是5。



- 围绕G的边界构成的回路组为(f, g, e, f), 长度是3。

  围绕F的边界构成的闭路为(d, a, c, a, b, d), 长度是5。

  割边ac在计算度时算了2次。

  R_0是外部无限面, 围绕R_0的边界构成的闭路为

  (a, d, e ,f, g, e, d, b, a), 长度是8。

- 注意 割边只能是一个面的边界boundary,

  若一条边不是割边, 它必是两个面的公共边界。

定理 10.1 平面图G中所有面(或点)的次数之和等于边数m的2倍。

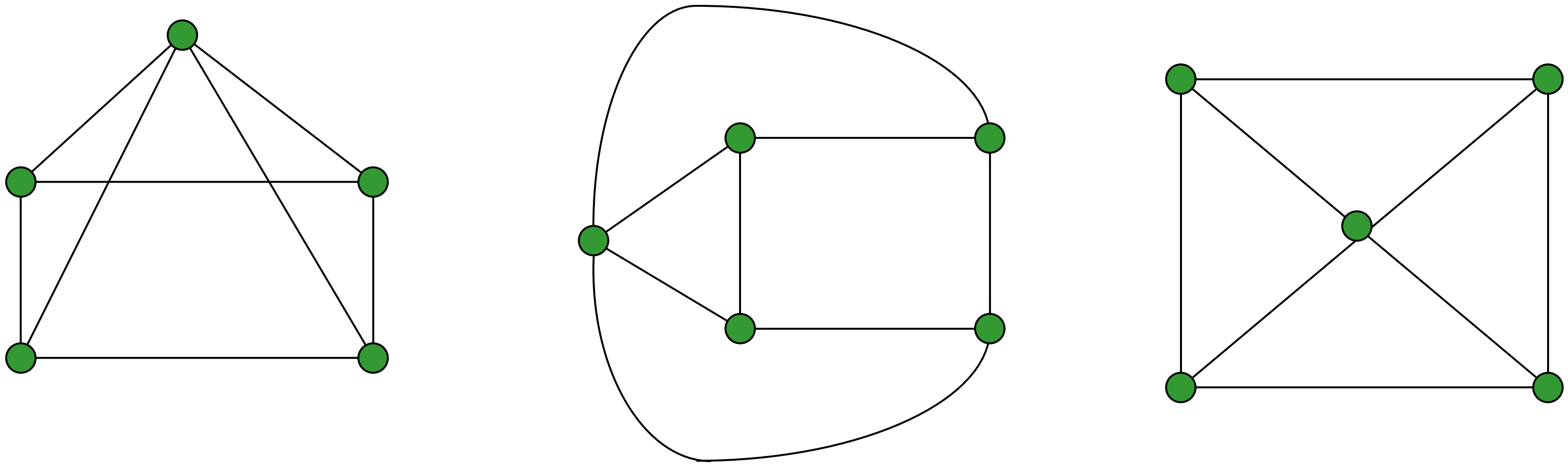
$$\sum_{i=1}^{r} \deg(R_i) = 2m\ , \qquad R_i\text{为G的面数。}$$

证 $\forall e \in E(G)$, 当e为面R_i和R_j $(i \neq j)$的公共边界上的边时，在计算R_i和R_j的次数时各提供次数1,

- 而当e只在某一个面R的边界上出现时, 它必出现两次, 所以在计算R的次数时, e 提供的次数为2,
- 于是每条边在 $\sum_{i=1}^{r}\deg(R_i)$中,各提供次数2。

因而 $\sum_{i=1}^{r} \deg(R_i) = 2m$。 ∎

- 同一个平面图G, 可以有不同形式的平面嵌入, 但它们都是与G同构的。
- 一个平面图的有限面和无限面没有什么本质区别。
- 若把平面图画在球面上, 它的无限面就变成有限面。
- 而对于画在球面上的任何一个有限面f, 都能以f 中的任意一点为球的北极, 向与球的南极相切的平面做这个图的投影, 使有限面在平面上成为平面图的无限面。
- 即 有限面(内部面)和无限面(内部面)可以相互转化。
- 原理: 球面与平面相互转化, 无穷集合的等势



(1) (2) (3)

图 10.3

- (2), (3)都是(1)的平面嵌入, 它们形状不同, 但都与(1)同构。由同构传递性, (2)与 (3)同构。
- (2)中的有限面R'_2, 在(3)中变成无限面R_0。
- 无限面R'_0, 在(3)中变成有限面R_2。

定义 10.3 设G为简单平面图，若在G的任意不相邻的顶点u, v之间加边 (u, v)，所得图为非平面图，则称G为**极大平面图maximal planar graph**。 ■

等价定义平面图G不是其他任何平面图的一个生成子图，则称G为极大平面图。

0. K_1, K_2, K_3 , K_4 , $K_5 - e$, $K_{3,3} - e$, 均为极大平面图。

1. 极大平面图必是连通的。

反证 否则可加边连接两个连通分支, 与极大平面图矛盾.

极大平面图的最大特点由下面定理所提供:

2. G为n (n≥3) 阶简单的连通平面图,

G为极大平面图 ⇔ G的每个面的次数均为3 。

- 此充分必要定理给判别极大平面图带来方便。
- P 206图10.4

3. 当|V|≥3时, 有割点或桥的平面图不可能是极大平面图.

定义 11.4 若在非平面图G中任意删除一条边, 所得图为平面图, 则称G为极小非平面图。 ■

- K_5 和$K_{3,3}$ 都是极小非平面图。

- 欧拉发现在研究多面体时发现, 多面体的顶点数V，棱数E和面数F 之间满足 $V - E + F = 2$。
- 从多面体得到启发, 便得出平面图的欧拉公式。

定理10.2(平面图欧拉恒等式) 对于任意的连通平面图G, 有

$$n - m + r = 2$$

其中,

n, m, r 分别是G的阶数、边数和面数 (包括无限面)。

证 对边数m进行强归纳。

- 若 $m = 0$, 由于G是连通图, 故必有 $n = 1$, 这时只有一个无限面, 即 $r = 1$。所以

$$n - m + r = 1 - 0 + 1 = 2;$$

定理成立。

- 若$m = 1$, 分两种情况讨论:

(1) 该边不是自环, 则有 $n = 2, r = 1$,

这时$n - m + r = 2 - 1 + 1 = 2$

(2) 该边是自环, 则有 $n = 1, r = 2$, 这时

$n - m + r = 1 - 1 + 2 = 2$

所以 $m = 1$时, 定理也成立。

- 设当$m = k$ 时结论成立, 当$m = k + 1$时, 讨论G:

(1) 若G是树, 那么 $m = n - 1$, 这时$r = 1$,

所以 $n - m + r = n - (n - 1) + 1 = 2$。

(2)若G不是树,则G中必含圈, 设e为G的某圈上的一条边,

令$G' = G - e$, 则G仍然是连通的, 且

$m' = m - 1 = k$, 由归纳假设知 $n' - m' + r' = 2$,

而$n' = n$, $r' = r - 1$个面, 于是

$$n - m + r = n' - (m' + 1) + (r' + 1)$$

$$= n' - m' + r' = 2;$$

所以对m条边时, 偶拉公式也成立。

定理 10.3 设G是连通的平面图G, 且G的各面的次数至少为l (≥ 3), 则G的边数m与顶点数n有关系

$$m \leqslant \frac{l}{l-2}(n-2)\text{。}$$

证 由定理10.1可知

$$2m = \sum_{i=1}^{r} \deg(R_i) \geq l \cdot r,$$

由欧拉公式知: $r = 2 + m - n$,

$$2m \geq l\,(2 + m - n)$$

$$\Rightarrow m \leqslant \frac{l}{l-2}(n-2)$$

$$= \left(1 + \frac{2}{l-2}\right)(n-2) \qquad /{*}\,l = \min, \leqslant\text{的右边m最大}$$

推论 若连通平面图G的各面的次数均为l，则

$$\mathbf{m} = \frac{l}{l-2}(\mathbf{n}-2)$$

/* l = min, m = max

例10.1 利用定理10.3证明K_5 和$K_{3,3}$ 都不是平面图。

证 (1) K_5是(5, 10)图, 若K_5是平面图, K_5的围长$g(K_5) = 3$,

所以K_5 的平面嵌入的每个面的次数至少为3,

即 $l \geq 3$。由定理10.3知,

$$10 \leq \frac{3}{3-2}(5-2) = 9,$$

这是个矛盾, 故K_5 是非平面图。 $\blacksquare$

(2) $K_{3,3}$ 是(6, 9)图, $g(K_{3,3}) = 4$, 若$K_{3,3}$ 是平面图,

则它的平面嵌入的每个面的次数至少为4,

即$l \geq 4$。于是

$$9 \leq \frac{4}{4-2}(6-2) = 8,$$ 矛盾, 故$K_{3,3}$ 是非平面图。

§ 平面图的判断

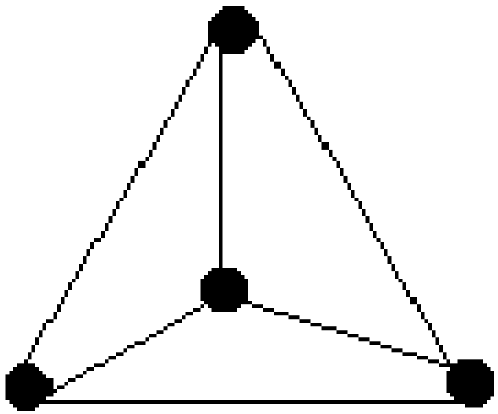
- 上面欧拉公式及等定理是判断一个图为平面图的必要条件, 其逆否定理为判断某图为非平面图的充分条件。
- G含K_5或$K_{3,3}$为子图是G为非平面图的充分非必要条件
- 当顶点数和边数较多时， 应用欧拉公式等进行判别就会相当困难。
- 一个图是否有平面的图形表示(即平图)是判别平面图的最具说服力的方法, 但因其工作量太大而不实用。
- 研究平面图的 充要条件 直到1930年才由 波兰数学家库拉图斯基(Kuratowski)给出。
- 与定理有关的概念是同胚与收缩的概念。

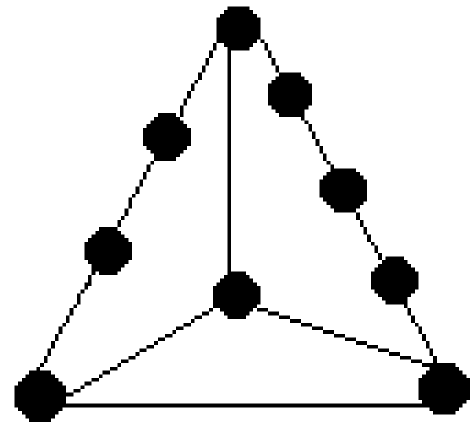
定义 10.6 设$e = (u, v)$为图G中一条边，在G中删除e，增加新的顶点w，使u与v均与w相邻，即

$G' = (G-e) \cup \{(u, w), (w, v)\}$，称为在$G$中插入2度顶点。

- 设w为G中一个2度顶点，w与u, v相邻，删除w，增加新边(u, v)，即$G' = (G - w) \cup \{(u, v)\}$，称为在$G$中消去2度顶点$w$。 ∎

定义 10.5 若两个图G_1和G_2是同构的，或通过反复插入或消去2度顶点后是同构的，则称G_1和G_2是同胚的。





例 上图画出K_4的同胚图。

定理10.5 图G是平面图 当且仅当 G不含与K_5同胚子图, 也不含与$K_{3,3}$同胚子图。

定理 10.6 图G是平面图 当且仅当 G中没有可以收缩到K_5的子图, 也没有可以收缩到$K_{3,3}$的子图。

- 这两个定理称库拉图斯基定理, 证明见参考书目[12]
- 库拉托夫斯基定理定性地说明了平面图的本质。

- 判定连通图G是否为平面图的步骤如下：

1. 多重图先移去重边或环化为简单图。

2. 若$m<9$ or $n<5$ or 至多4个度≥4的顶点or至多5个度≥3的顶点，则G必是平面图。 /*极小非平面图K_5和$k_{3,3}$逆

3. 如果G中存在割点v，可把图G从割点处分离，构成若干个不含割点的连通子图。

   显然G是可平面的 ⇔ 每个连通子图是可平面的。

4. 若$m > 3n - 6$ 或 $\sum_{i=1}^{r} deg(R_i) \neq 2m$ 或 $n - m + r \neq 2$，或 $m > \frac{l}{l-2}(n-2)$，则G是非平面图。 /*必要条件

5. 尝试能否画一个相应的边不相交的平图(平面表示)。

6. 否则利用Kuratowski定理检测。

10.2 图的着色 Graph Coloring

- 本节介绍图中顶点、边和平面地图面的着色问题。
- 图的着色问题起源于19世纪的四色猜想。

  所谓**Four Color Conjecture**是要求证明这样的问题:

  至多用4种颜色给平面或球面上的地图着色, 使得相邻的国家着不同颜色。 这个问题的提法简单易懂, 但时至今日还没有得到很好的解决。

- 许多的实际问题都可以转化为图的着色问题, 在应用中“颜色”几乎可以是任何意义。若图表示各城市航线网, 顶点是城市, 颜色是航线名字。

- 本节讨论的是无自环的无向图。

定义 10.8 对无环无向图G的每个顶点涂上一种颜色,使相邻的顶点涂不同颜色, 称为对G的一种点着色。

- 若能用k种颜色给G的顶点着色，就称对G进行k着色,也称G是 (点)k-可着色的k-colorable。 /*weak

- 若G是k-可着色的，但不是 (k–1)-可着色的，就称G是k-色图，称k为G的色数，记作$\chi(G) = k$。 /*strong ∎

- 即图G的点着色所需颜色的最小数称作G的色数(chromatic number)。

- 从点着色定义不难证明下面定理。

1. $\chi(G) = 1$ 当且仅当 G为零图。

2. $\chi(G) = n$ 当且仅当 $G \cong K_n$ 。

3. 偶圈都是2-色图; 奇圈都是3-色图。

4. G为非零图, $\chi(G) = 2$ 当且仅当 G为二部图。

5. 奇数阶轮图都是3-色图; 偶数阶轮图为4-色图。

   Hint: 轮心独占一色。

推论 图G是2-可着色的 当且仅当 G中不含奇圈。

- 计数问题也能产生着色问题。

例 电冰箱的分隔间里放有15种不同的食品, 某些能放在一起保存, 但另一些必须分开保存。

如香肉和干酪应该同一般的肉和蔬菜分开。

苹果、蛋和洋葱应该分开存放, 否则串味。

- 化学实验室所需的最小试剂瓶数。
- 养鱼: 避免有些鱼吃另一种鱼, 计算所需最小容器数。
- 可以构造图G着色模型如下:

每种事物构造一个顶点, 如果两种事物(有冲突)需分开保存, 则用一条边连接它们。那么$\chi(G)$是适当保存事物所需隔离容器的最小数。 ■

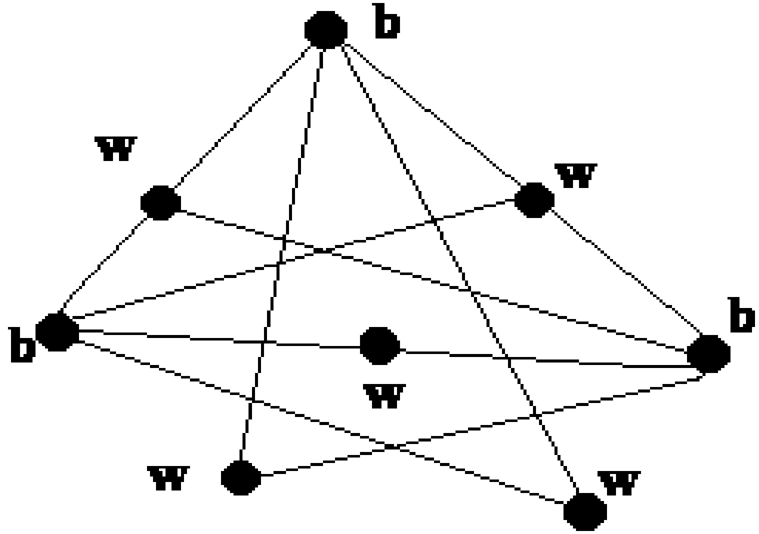
观察 若H为图G的一个子图，则G的任意一个着色都能诱导H的一个着色，H的点和边更少，所以$\chi(H)\le\chi(G)$。

定理 设图G是可2-点着色的。

- 若G是哈密顿图，则两种颜色的顶点数相等；
- 若G有哈密顿通路，则着两种颜色的顶点数至多相差1。

证 由于哈密顿回路、通路均经过图的所有顶点一次且仅一次，而它又是交替地通过两种颜色的顶点，所以定理的结论是明显的。 ∎

- 本定理为哈密顿图或路的必要非充分条件。



例 图可2-点着色，b, w分别表示黑、白两色，由于图中白色顶点比黑色顶点多2个，

所以该图不是哈密顿图，也没有哈密顿通路。 $\blacksquare$

- 一般地，我们没有图的色数的公式。实际上，甚至确定一个相对小的图的色数都是一件很具挑战的事情。
- 研究色数的上、下界。

定理 10.8 对于任意的图G，均有

$$\chi(G) \le \Delta(G) + 1。$$

证 对G的阶数n作归纳法。n = 1时, 结论显然成立。

- 设n = k时结论成立。设G的阶数n = k + 1, v为G中任一顶点, 设$G_1 = G - v$, 则G_1的阶数为k。

  由归纳假设应有 $\chi(G_1) \le \Delta(G_1) + 1 \le \Delta(G) + 1$。

- 当将G_1还原成G时, 由于v至多与G_1中$\Delta(G)$个顶点相邻, 而在G_1的点着色中, $\Delta(G)$个顶点至多用了$\Delta(G)$种颜色, 于是$\Delta(G) + 1$种颜色中至少存在一种颜色给v着色, 使v与相邻的顶点均着不同的颜色。 ■

- 对有些图来说, 定理10.8中给出的色数的上界是比较大. 例如, 若G是二部图, $\Delta(G)$可以很大, 但 $\chi(G) = 2$。于是有必要缩小定理中 $\chi(G)$的上界。
- 布鲁克斯(Brooks)改进了定理 12.5中$\chi(G)$的上界, 不过要求G不是完全图, 也不是奇圈, 因为奇圈和完全图是达到定理 10.8上界的仅有连通图。若G为n阶完全图或n阶奇圈, 则 $\chi(G) = \Delta(G) +1$。

定理10.9 (Brooks定理) 设连通图不是完全图K_n $(n\geq3)$ 也不是奇圈, 则

$$\chi(G) \leq \Delta(G)。$$ /*减少1

证 略。

例10.3 证明彼得森图的色数$\chi = 3$。

证 方法一,

由布鲁克斯定理可知$\chi \le \Delta = 3$。

又因为图中有奇圈, 由定理可知, $\chi \ge 3$,

所以$\chi = 3$.

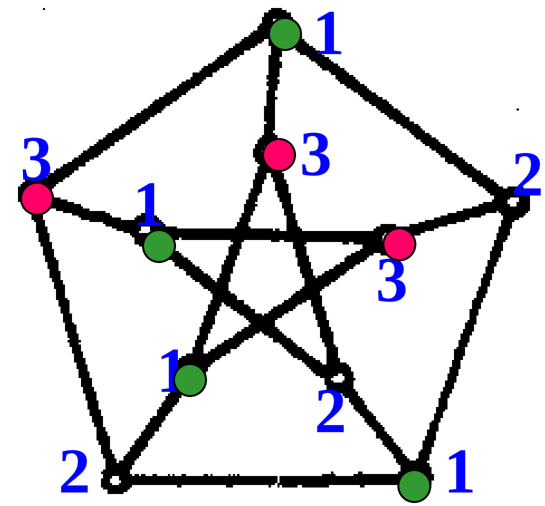


图10.9

方法二 因为图中有奇圈, 由定理12.3可知, $\chi \ge 3$。

- 又因为图中存在3种颜色的着色, 即图是3-可着色的, 见图10.9所示, 图中顶点处所标的数字i表示该顶点所涂第 i 种颜色, i = 1, 2, 3, 所以 $\chi \le 3$, 故 $\chi = 3$。 ∎

- 证明图G的色数是k必须:

  1. 证明(常用构造法) 图G可以k着色, 即$\chi(G) \le k$;

  2. 证明 图G无法用少于k的颜色着色, 即$\chi(G) \ge k$。

定理 对图G进行$\chi(G)$-着色, 设

$V_i = \{v \mid v \in V(G)$且$v$涂颜色$i\}$, $i = 1, 2, \ldots, \chi(G)$,

则 $\Pi = \{V_1, V_2, \ldots, V_{\chi(G)}\}$是V(G)的一个划分。/*独立集

等价定理 对图G进行$\chi(G)$-着色, 设

$R = \{\langle u, v\rangle \mid u, v \in V(G)$且$u, v$涂一样颜色$\}$,

则R是V(G)上的等价关系。 $\blacksquare$

- 根据划分和等价定义证明两个定理。

定义10.9 连通的无桥平面图的平面嵌入及其所有的面称为平面地图或地图, 平面地图的面称为“国家”。

若两个国家的边界至少有一条公共边, 则称这两个国家是相邻的。 ∎

定义10.10 平面地图G的一种着色, 是指对它的每个国家涂上一种颜色, 使得相邻的国家涂不同颜色。

若能用k种颜色给G着色, 就称对G的面进行了k着色, 或称G是k-面可着色的。

若G是k-面可着色的, 但不是(k–1)-面可着色的, 就称G是k-色地图, 或称G的面色数为k, 记作$\chi^*(G) = k$。 ∎

- 对于地图的面着色可以通过平面图的点着色来研究，这是因为平面图都有对偶图。

定理10.10 地图G是k-面可着色的当且仅当它的对偶图G*是k-点可着色的。

证 必要性 给G的一种k着色。由定理11.15可以知道，

$n^* = r$，即G的每个面中含且只含G*的一个顶点，

设v_i*位于G的面R_i内，将v_i*涂R_i的颜色。

- 易知，若v_i*与v_j*相邻，则由于R_i与R_j的颜色不同，所以v_i*与v_j*颜色不同，即G*是k-可着色的。
- 类似可证充分性。 ∎

定理10.11(Heawood)任何简单平面图都是 5-可着色的。

- 本定理在证明中最本质的区别是要给顶点换颜色。

证明过程可设5种颜色分别用1, 2, 3, 4, 5代表,

v_i表示涂颜色i, 然后对简单连通平面图的顶点个数n进行归纳。

四色定理 每个可平面图是4-着色的。 ■

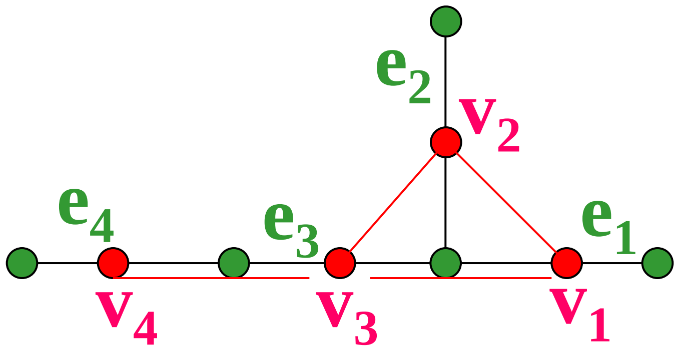
- 四色定理是机器证明的重大成就, 四色定理如不用计算机仍难以证明, 但作为一个数学定理的证明并不理想。四色猜想没有得到彻底的解决。
- 若四色猜想得到证明, 关于平面图的着色理论就得到了最好的解决, 因为对任何的偶数阶轮图W_n $(n\geq 4)$, 有$\chi(W_n) = 4$。 /*自对偶; 4阶轮图转化K_4

12.4 边 着 色

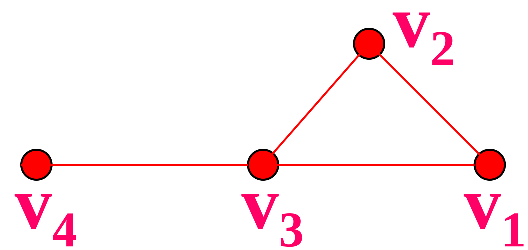
定义 10.11 对图G边的一种的着色, 是指对它的每条边涂上一种颜色, 使得相邻的边涂不同的颜色。

- 若能用k种颜色给G的边着色, 就称对G的边进行了k着色, 或称G是k-边可着色的。
- 若G是k-边可着色的, 但不是(k–1)-边可着色的, 就称k为G的边色数, 记作$\chi'(G)$。 ∎

*定义 若图L(G)中的顶点与G的边一一对应, L(G)中的两个顶点是邻接的当且仅当对应的边在G中是邻接的, 则称L(G)是图G的线图(line graph)。 ∎



G



L(G)

例 上图是线图的例子。

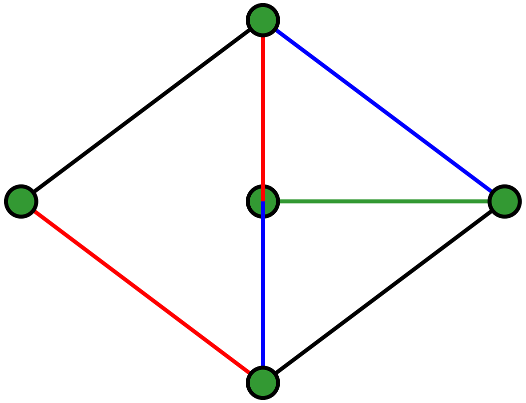
(1) 图G中每一条边 (设为e_i) 对应一顶点 (设为v_i):

(2) 当图的两条边e_i和e_j有一共同顶点时, 则过v_i和v_j两点引一条边, 结果得到线图L(G)。 ∎

- 一般说来, 图G的边着色问题可以转化为G的线图L(G)的点着色问题加以讨论。

- 但是边着色仍有其自身的特殊性。
- 与点色数不同，边色数有着与图的最大点度Δ相关的简明结论。
- 设图G的最大顶点度数是Δ(G)，在任何正常的边着色中, 任一顶点邻接的边必须着以不同颜色, 因而 $\Delta(G) \le \chi'(G)$。

例 右图Δ(G) = 3, 但没有正常的3边着色,



它是4边着色, $\chi'(G) = 4$,

$\Delta(G) \le \chi'(G)$。

定理 10.12 (维津Vizing) 设G是简单图, 则

$$\Delta(G) \le \chi'(G) \le \Delta(G) + 1。$$

若G是多重图, s是最大的重边数, 则

$$\Delta(G) \le \chi'(G) \le \Delta(G) + s。$$

证 请参阅参考书目[6]。 ∎

- 维津定理说明, 对于简单图,

$$\chi'(G) = \Delta(G) \quad 或 \quad \chi'(G) = \Delta(G) + 1,$$

- 但究竟哪些图的χ'是 $\Delta(G)$, 哪些是$\Delta(G) + 1$,

  至今还是一个没有解决的问题。

- 对于二部图和完全图已经得到解决。

- 令$R = \{(e_i, e_j) \mid e_i, e_j \in E \wedge e_i$与$e_j$涂同色$\}$, 则R是E上的等价关系, 其商集$E/R = \{E_1, E_2, \ldots, E_k\}$是E的一个划分, 划分块(等价类)中元素涂同色。

- 边着色的问题可用来解决排课程表的问题。

例12.7 某中学, 星期一由m位教师给n个班上课。

每位教师在上课时只能给一个班上课。

(1) 这一天至少要排多少节课?

(2) 在节数不增加的条件下至少需要几个教室?

(3) 若设教师数 $m = 4$, 为 t_1, t_2, t_3, t_4 ,

班级数 $n = 5$, 为 c_1, c_2, c_3, c_4, c_5。

已知 t_1 要为 c_1, c_2, c_3 分别上2节、1节、1节课;

t_2 要为 c_2, c_3 各上1节课; t_3 要为 c_2, c_3, c_4 各上1节课;

t_4 要为 c_4 上1节课; 为 c_5 上2节课。

试给出一个最节省教室的课表。

解 $V_1 = \{t_1, t_2, t_3, t_4\}$, $V_2 = \{c_1, c_2, c_3, c_4, c_5\}$,

$E = \{(t_i, c_j) \mid t_i$ 给 c_j 上一节课$\}$, 得二部图 $G = (V_1, V_2, E)$

对G的边进行一种 $k(k \geq \chi'(G))$ 着色, 就得到一种节数为 k 的安排方案。

(1) $k = \chi'(G) = \Delta$时安排的节数最少。 4种颜色

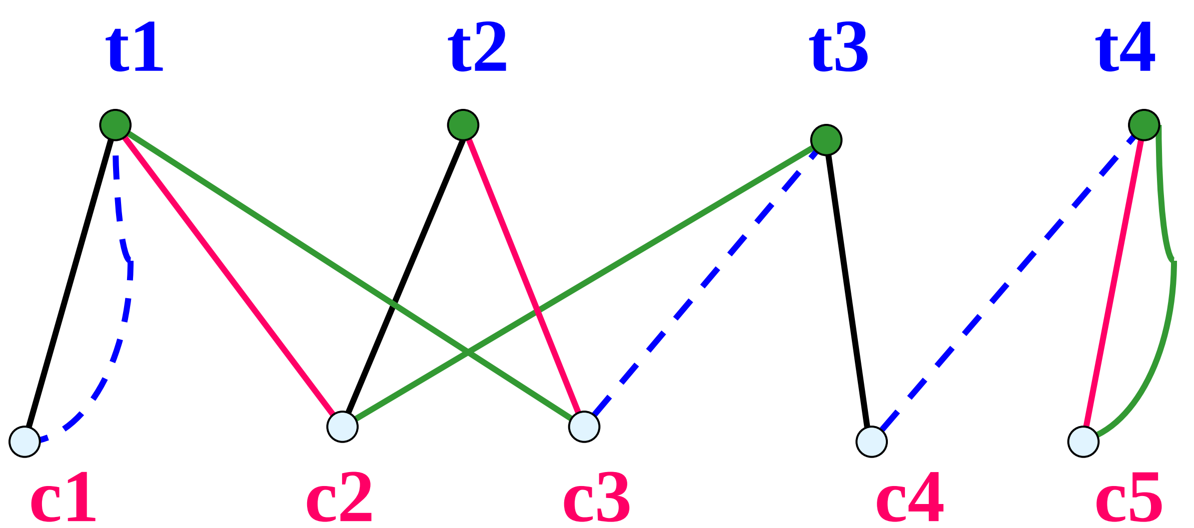
(2)设$l_1, l_2, \ldots, l_\Delta$分别为同色边数, 在节数为$\Delta$ 条件下,

使$\min \max\{l_1, l_2, \ldots, l_\Delta\}$达到最小。 3教室

(3) 已知条件下二部图如下, $\chi'(G) = \Delta(G) = 4$, /*例12.5

用4种颜色给G的边涂色, 同色边的课同时上,

最省教室的方案是4种同色边各3条。



- 问题归结为把G划分成匹配, G的边用尽可能少的颜色正常着色。
- 因此, 若无教师上多于l 节课, 也无学生上多于l 节课, 则可用一张有l 节课时的课程表安排出来。
- 按图所示同色边安排的课为下表, 所用教室3个。

节	1	2	3	4
t1	c1	c1	c2	c3
t2	c2	--	c3	--
t3	c4	c3	--	c2
t4	--	c4	c5	c5

10.3习题解析

例10.9 设 G为6阶12条边的连通的简单的平面图

(1) 求G的面数r.

(2) 求G中各面的次数.

解：(1)由欧拉公式有 $n-m+r=2$

可得 $r=2+12-6=8$

(2)因为 G为简单图，所以各面次数均 ≥ 3 ,于是

$$2m=24=\sum_{i=0}^{7}\deg(R_i)\geq 8\times 3=24$$

这就迫使每个面的次数为3.

10.3习题解析

例10.7 **设G是边数少于30的简单平面图，**

试证明G中存在结点v，该结点的度d(v) ≤ 4。

证明：

由于G是简单平面图，所以 m ≤ 3n-6。

用反证法，假设所有的结点的度均大于等于5，由握手定理可知

$$2m = \sum_{i=1}^{n} d(v_i) \geq 5*n \Rightarrow n \leq \frac{2}{5}m$$

所以 m ≤ 3*n – 6 ≤ 6/5 *m – 6 ⇒ m≥ 30,

这与条件矛盾，所以假设不成立，因此结论成立。

图 论 知 识 点 小 结

- 图的逻辑结构关系主要表现为邻接关系。
- 邻接点、邻接边、顶点的度数、环、简单图
- 图论的基本定理、度数列、同构、补图、子图
- 通路、回路、简单通路、初级通路、圈、复杂通路
- 连通图：

  无向图: 点割集, 割点, 点连通度

  边割集, 割边(桥) , 边连通度

  有向图: 弱连通图, 单向连通, 强连通图
- 非连通图：连通分支$p(G) > 1$

- 特殊图: 零图、完全图、正则图、二部图、欧拉图、哈密顿图、树、根树、平面图
- 图的矩阵表示: 关联矩阵、邻接矩阵、相邻矩阵、可达矩阵、连通矩阵
- 树的等价定义、生成树、余(补)树、树枝、弦

  基本回路、基本回路系统、圈秩、环路空间、$C_{基}$

  基本割集、基本割集回路、割集秩、断集空间、$S_{基}$
- 平面图: 边界、面、极大平面图、定理11.2, 11.6(欧拉公式), 11.8和11.10、对偶图、外平面图

  非平面图: K_5、$K_{3,3}$、同胚、定理11.13和11.14