厦门大学《大学物理》B1 课程
期中试题·答案

考试日期：2012.4　　信息学院自律督导部整理

1.　　（15 分）

一质点以初速度 v_0 沿水平方向做一维运动，其受到的阻力与速度成正比。求：

（1） 任一时刻质点的速度；

（2） 若计时开始时质点位于坐标原点，求质点的运动方程；

（3） 当质点经过距离 x 时，其速度多大？

解：（1）$\because f=-kv=m\dfrac{dv}{dt}$ $\Rightarrow$ $\displaystyle\int_{v_0}^{v}\frac{dv}{v}=-\int_0^t\frac{k}{m}dt$ ，

$\therefore v=v_0e^{-\frac{k}{m}t}$ ；

（2）$\because v=v_0e^{-\frac{k}{m}t}=\dfrac{dx}{dt}$ $\Rightarrow$ ，$\displaystyle\int_{x_0=0}^{x(t)}dx=\int_0^t v_0e^{-\frac{k}{m}t}dt$

$\therefore x=\dfrac{mv_0}{k}(1-e^{-\frac{k}{m}t})$ ；

（3）$\because -kv=m\dfrac{dv}{dt}\cdot\dfrac{dx}{dx}=\dfrac{mvdv}{dx}$ $\Rightarrow$ $\displaystyle\int_{v_0}^{v}dv=-\int_0^t\frac{k}{m}dx$ ，

$\therefore v=v_0-\dfrac{k}{m}x$　　　　(3*5=15 分)

2.　　（15 分）

质点在 xoy 平面内运动，其速度为为：$\vec{v}=2\vec{i}-4t\vec{j}$，计时开始时质点的 $\vec{r}_0=19\vec{j}$，试求：

（1）质点的运动方程；

（2）当质点的位置矢量与速度矢量恰好垂直时，将发生在什么时刻？

（3）求 t 时刻质点的切向加速度和法向加速度的大小。

解：（1）$\because \vec{v}=2\vec{i}-4t\vec{j}=\dfrac{d\vec{r}}{dt}$ $\Rightarrow$ $\displaystyle\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}}d\vec{r}=\int_0^t(2\vec{i}-4t\vec{j})dt$ ，

运动方程：$\vec{r}(t)=2t\vec{i}+\left(19-2t^2\right)\vec{j}$

（2）令：$\vec{r}\cdot\vec{v}=[2t\vec{i}+\left(19-2t^2\right)\vec{j}]\cdot(2\vec{i}-4t\vec{j})=8t^3-72t=0$ ，

得：　$t_1=0$，$t_2=3(s)$，$t_3=-3(s)$（不合题意，舍去）;

（3）　$\because \vec{a}=\dfrac{d\vec{v}}{dt}=-4\vec{j} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a=4 \\ v=2\sqrt{1+4t^2} \end{cases}$，

$a_\tau=\dfrac{dv}{dt}=\dfrac{8t}{\sqrt{1+4t^2}}$，　$a_n=\sqrt{a^2-a_\tau^2}=\dfrac{4}{\sqrt{1+4t^2}}$。　(3*5=15 分)

3.　　　（16 分）

一质量为 $m=2kg$ 的质点在 xoy 平面内运动，运动方程为：$\vec{r}(t)=\left[\left(2-t^3\right)\vec{i}+\left(2t^2-1\right)\vec{j}\right](m)$.

试求：　（1）$t=1(s)$ 时质点所受的合力 $\vec{F}_{(t=1)}$；

（2）$t=1(s)$ 时合力 $\vec{F}$ 对坐标原点的力矩 $\vec{M}_{(t=1)}$；

（3）$t=0(s)$ 至 $t=1(s)$ 时间内合力对质点冲量 $\vec{I}$；

（4）$t=0(s)$ 至 $t=1(s)$ 时间内合力对质点所作的功。

解：　$\because \vec{v}=\dfrac{d\vec{r}}{dt}=-3t^2\vec{i}+4t\vec{j}$，　$\vec{a}=\dfrac{d\vec{v}}{dt}=-6t\vec{i}+4\vec{j}$；

（1）$\vec{F}_{(t=1)}=m\vec{a}=-12\vec{i}+8\vec{j}(N)$；

（2）$\vec{M}_{(t=1)}=\vec{r}_{(t=1)}\times\vec{F}_{(t=1)}=(\vec{i}+\vec{j})\times(-12\vec{i}+8\vec{j})=20\vec{k}(N\cdot m)$；

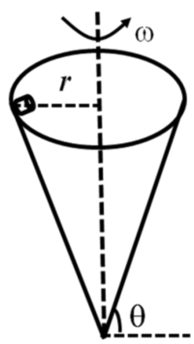
（3）$\vec{I}=\int_0^1\vec{F}(t)dt=\int_0^1(-12\vec{i}+8\vec{j})dt=-6\vec{i}+8\vec{j}(N\cdot s)$　；小错误!

（4）　$W=\int_0^1\vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_0^1(-12t\vec{i}+8t\vec{j})\cdot(-3t^2\vec{i}+4t\vec{j})dt=\int_0^1(36t^3+32t)dt=25(J)$，

另：$W=\Delta E_K=\dfrac{1}{2}mv_{t=1}^2-\dfrac{1}{2}mv_{t=0}^2=\dfrac{1}{2}\times2\times5^2-0=25(J)$

(4*4=16 分)

4.　　　（12 分）



如图所示，将一质量为 m 的物体放在一个以每秒 ν 转的恒定速率绕竖直轴转动的漏斗中，漏斗壁与水平面成 θ 角。设物体与漏斗壁间的最大静摩擦系数为 μ_0，物体到转轴的距离为 r。当物体与漏斗保持相对静止时，求 ω 应满足的条件。

解：当v较大时，物体有向上滑动的趋势，摩擦力方向向下，假设支持力为N，

则临界点满足：

$$N\sin\theta+\mu_0 N\cos\theta=mr\omega^2=mr4\pi^2 v_{\max}{}^2$$

$$N\cos\theta-\mu_0 N\sin\theta-mg=0$$

解得：$v_{\max}=\dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{g(\sin\theta+\mu_0\cos\theta)}{r(\cos\theta-\mu_0\sin\theta)}}$

（$v_{\max}=\dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{g(\sin\theta+\mu_0\cos\theta)}{r(\cos\theta-\mu_0\sin\theta)}} \Rightarrow \omega_{\max}=\sqrt{\dfrac{g(\sin\theta+\mu_0\cos\theta)}{r(\cos\theta-\mu_0\sin\theta)}}$）　（5 分）

当v较小时，物体有向下滑动的趋势，摩擦力方向向上，临界点满足：

$$N\sin\theta-\mu_0 N\cos\theta=mr\omega^2=mr4\pi^2 v_{\min}{}^2$$

$$N\cos\theta+\mu_0 N\sin\theta-mg=0$$

解得：$v_{\min}=\dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{g(\sin\theta-\mu_0\cos\theta)}{r(\cos\theta+\mu_0\sin\theta)}}$

（$v_{\min}=\dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{g(\sin\theta-\mu_0\cos\theta)}{r(\cos\theta+\mu_0\sin\theta)}} \Rightarrow \omega_{\min}=\sqrt{\dfrac{g(\sin\theta-\mu_0\cos\theta)}{r(\cos\theta+\mu_0\sin\theta)}}$）　（5 分）

（所以，ω的范围应为：$\omega_{\min}<\omega<\omega_{\max}$。）　（2 分）

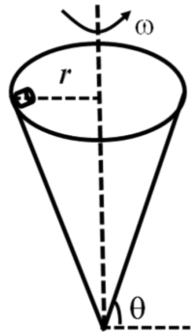
11122 期中 “漏斗题”庄某注释

4.　12 分）

如图所示，将一质量为m的物体放在一个以每秒v转的恒定速率绕竖直轴转动的漏斗中，漏斗壁与水平面成θ角。设物体与漏斗壁间的最大静摩擦系数为μ_0，物体到转轴的距离为r。当物体与漏斗保持相对静止时，求ω应满足的条件。

解：当v较大时，物体有向上滑动的趋势，摩擦力方向向下，假设支持力为N，

则临界点满足：



$$N\sin\theta+\mu_0 N\cos\theta=mr\omega^2=mr4\pi^2{v_{\max}}^2$$

$$N\cos\theta-\mu_0 N\sin\theta-mg=0$$

解得：$v_{\max}=\dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{g(\sin\theta+\mu_0\cos\theta)}{r(\cos\theta-\mu_0\sin\theta)}}$

（$v_{\max}=\dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{g(\sin\theta+\mu_0\cos\theta)}{r(\cos\theta-\mu_0\sin\theta)}}\quad\Rightarrow\quad\omega_{\max}=\sqrt{\dfrac{g(\sin\theta+\mu_0\cos\theta)}{r(\cos\theta-\mu_0\sin\theta)}}$）　　（5 分）

当v较小时，物体有向下滑动的趋势，摩擦力方向向上，临界点满足：

$$N\sin\theta-\mu_0 N\cos\theta=mr\omega^2=mr4\pi^2{v_{\min}}^2$$

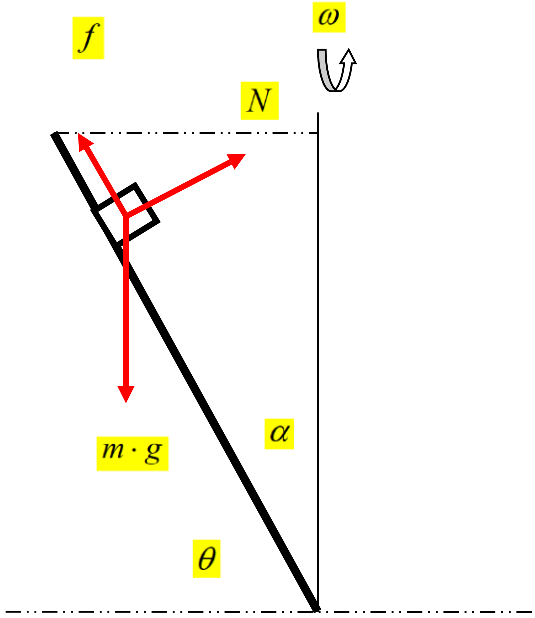
$$N\cos\theta+\mu_0 N\sin\theta-mg=0$$

解得：$v_{\min}=\dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{g(\sin\theta-\mu_0\cos\theta)}{r(\cos\theta+\mu_0\sin\theta)}}$

（$v_{\min}=\dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{g(\sin\theta-\mu_0\cos\theta)}{r(\cos\theta+\mu_0\sin\theta)}}\quad\Rightarrow\quad\omega_{\min}=\sqrt{\dfrac{g(\sin\theta-\mu_0\cos\theta)}{r(\cos\theta+\mu_0\sin\theta)}}$）　　（5 分）

（所以，ω的范围应为：$\omega_{\min}<\omega<\omega_{\max}$。）　　（2 分）

庄某注释 1：



注意到题意**“物体与漏斗保持相对静止”**；正交分解，依牛顿定律，有

$$N\cdot\cos\alpha-f\cdot\sin\alpha=m\cdot\omega^2\cdot r\quad;\quad N\cdot\sin\alpha+f\cdot\cos\alpha=m\cdot g$$

兹注意到 $\alpha=\dfrac{\pi}{2}-\theta$，于是有 $\begin{matrix} N\cdot\sin\theta-f\cdot\cos\theta=m\cdot\omega^2\cdot r \\ N\cdot\cos\theta+f\cdot\sin\theta=m\cdot g \end{matrix}$

两式相除，容易得到：$\omega=\sqrt{\dfrac{g}{r}\cdot\dfrac{\sin\theta-\dfrac{f}{N}\cdot\cos\theta}{\cos\theta+\dfrac{f}{N}\cdot\sin\theta}}$

兹注意到**静摩擦力**满足 $-f_{\max}\le f\le f_{\max}\quad,\quad f_{\max}=\mu_0\cdot N\quad\Rightarrow\quad-\mu_0\le\dfrac{f}{N}\le\mu_0$ 或表达为 $f=k\cdot\mu_0\cdot N\quad,\quad-1\le k\le1\quad\Rightarrow\quad-\mu_0\le\dfrac{f}{N}\le\mu_0$，于是容易得到：当

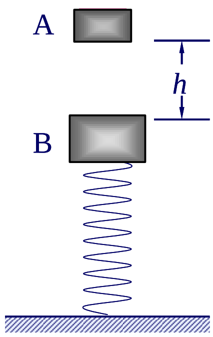
$\omega_{\min}=\sqrt{\dfrac{g}{r}\cdot\dfrac{\sin\theta-\mu_0\cdot\cos\theta}{\cos\theta+\mu_0\cdot\sin\theta}}\le\omega\le\omega_{\max}=\sqrt{\dfrac{g}{r}\cdot\dfrac{\sin\theta+\mu_0\cdot\cos\theta}{\cos\theta-\mu_0\cdot\sin\theta}}$ 时，物体与漏斗保持相对静止！

庄某注释 2：**该题有意义的前提条件为** $\mu_0<\tan\theta\quad.\quad\mu_0<\cot\theta$ 等价地表达为

$$\mu_0<\tan\theta<\frac{1}{\mu_0}\quad\Rightarrow\quad\arctan\mu_0<\theta<\arctan\frac{1}{\mu_0}\quad;\quad0<\mu_0<1$$

OK？该题可算“中学奥赛题”！

5.　　　（12 分）



如图所示，劲度系数为 k 的弹簧沿竖直方向安放在地面上，其顶端连着一质量为 M 的物体 B，系统处于平衡状态并保持静止。今有一质量为 m 的物体 A 自离物体 B 高 h 处自由落下，与 B 发生完全非弹性碰撞。试求：碰撞后弹簧对地面的最大压力。

解：（1）m 自由落下至碰撞前：

m 获碰前初速度 $v_0=\sqrt{2gh}$ ，

M 碰前压缩弹簧： $Mg=k\Delta x_0$ $\Rightarrow$ $\Delta x_0=\dfrac{Mg}{k}$ ；

（2）m 、M 发生完全非弹性碰撞过程：

$$mv_0=(m+M)v \quad\Rightarrow\quad v=\frac{mv_0}{(m+M)}=\frac{m\sqrt{2gh}}{(m+M)} \;;$$

（3）m 、M 运动到最低点，弹簧被压缩最大形变 Δx_m ：

$$\frac{1}{2}(m+M)v^2+\frac{1}{2}k\Delta x_0^2=\frac{1}{2}k\Delta x_m^2-(m+M)g(\Delta x_m-\Delta x_0)$$

$$\Delta x_m=\frac{(m+M)g}{k}+\frac{mg}{k}\sqrt{1+\frac{2kh}{(m+M)g}}$$

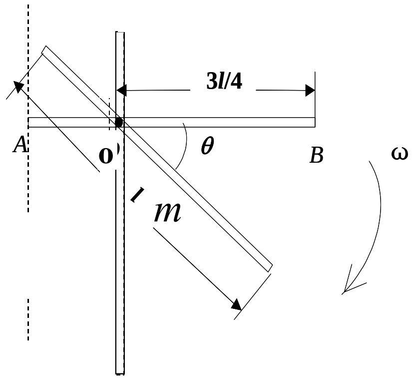
（4）　碰撞后弹簧对地面的最大压力：

$$f_m=k\Delta x_m=(m+M)g+mg\sqrt{1+\frac{2kh}{(m+M)g}}$$

（每个阶段的动力学方程各得 3 分）

6.　　（15 分）

一根质量 m 为，长为 l 的均匀细棒 AB 可绕一水平的光滑转轴 O 在竖直平面内转动。O 轴离 A 端的距离为 $l/4$，如图所示。今使细棒从静止开始由水平位置绕 O 轴转动。试求：



（1）细棒对 O 轴的转动惯量 J_0；

（2）细棒转至 θ 角度时的角加速度 $\beta(\theta)$ 和角速度 $\omega(\theta)$；

（3）细棒转至竖直位置时 $(\theta=\dfrac{\pi}{2})$，B 端的速度 $\vec{v}$ 和加速度 $\vec{a}$。

解：（1）细棒对 O 轴的转动惯量：

$$J_0 = J_c + md^2 = \frac{1}{12}ml^2 + m(\frac{l}{4})^2 = \frac{7}{48}ml^2 \quad ;$$

（2）由转动定律：$\dfrac{l}{4}mg\cos\theta = \dfrac{7}{48}ml^2\beta \quad \Rightarrow \quad \beta = \dfrac{12g}{7l}\cos\theta$ ；

由机械能守恒定律：$mg\dfrac{l}{4}\sin\theta = \dfrac{1}{2}\times(\dfrac{7}{48}ml^2)\omega^2 \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\dfrac{24g}{7l}\sin\theta}$ ；

（3）当 $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ 时，$\beta = 0$ ，$\omega = \sqrt{\dfrac{24g}{7l}}$ ，

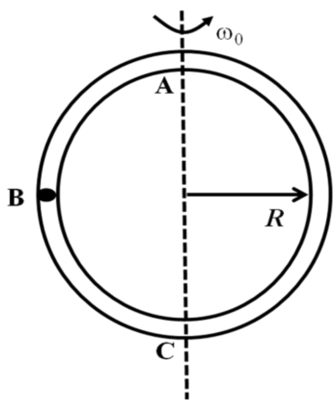
$$\therefore v = r\omega = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{6}{7}gl}$$ ——方向向左，

$$\begin{cases} a_\tau = r\beta = 0 \\ a_n = \dfrac{v^2}{r} = \dfrac{18}{7}g \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \vec{a} = \frac{18}{7}g\vec{n}$$ ——方向指向 O 点 。

（3*5=15 分）

7.　（15 分）

如图所示，空心圆环可绕竖直轴 AC 自由转动，转动惯量为 J，环的半径为 R。初始时，环的角速度为 ω_0，质量为 m 的小球静止在环内最高处 A 点。由于微扰，小球沿环向下滑动。求：小球滑至与环心在同一高度的 B 点时，环的角速度 ω_B 及小球相对于环的速度 $\vec{v}'$。



（忽略一切摩擦，小球可视为质点，且环截面半径远小于 R）

解：（1）当小球滑至 B 点,环和小球具有相同的角速度 ω_B，

小球与圆环系统角动量守恒：$J\omega_0 = (J + mR^2)\omega_B$

可知 $\omega_B = \dfrac{J\omega_0}{J + mR^2}$ ；（4 分）

（2）小球相对地面速度：$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}'$ ，且 $\vec{v}_0 \perp \vec{v}'$ ，

$\therefore v^2 = v_0^2 + v'^2 = (R\omega_B)^2 + v'^2$ （2 分）

下滑过程中系统**机械能守恒**：

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}J\omega_0^2 + mgR &= \frac{1}{2}J\omega_B^2 + \frac{1}{2}mv^2 \\ &= \frac{1}{2}J\omega_B^2 + \frac{1}{2}m(R\omega_B)^2 + \frac{1}{2}mv'^2\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}J\omega_0^2 + mgR = \frac{1}{2}(J + mR^2)\omega_B^2 + \frac{1}{2}mv'^2$$ （4 分）

解得：

$$v' = \sqrt{2gR + \frac{J\omega_0^2}{m} - \frac{J^2\omega_0^2}{m(J + mR^2)}} = \sqrt{2gR + \frac{J\omega_0^2 R^2}{J + mR^2}}$$ ，（4 分）

方向竖直向下。（1 分）

1.