大学物理B（上）
期中复习

矢量代数

(1) 常见的物理量有标量和矢量两种

(2) 矢量之和 $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$

矢量之差 $\vec{C} = \vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B})$

矢量的标积 $C = \vec{A} \cdot \vec{B}\ (C = AB\cos\theta)$

矢量的矢积 $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}\ (C = AB\sin\theta)$

（3）矢量在空间直角 0xyz 坐标系中的分量表示：

$$\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}$$

$$\vec{A} \pm \vec{B} = (A_x \pm B_x)\vec{i} + (A_y \pm B_y)\vec{j} + (A_z \pm B_z)\vec{k}$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = (A_y B_z - A_z B_y)\vec{i} + (A_z B_x - A_x B_z)\vec{j} + (A_x B_y - A_y B_x)\vec{k}$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{dA_x}{dt}\vec{i} + \frac{dA_y}{dt}\vec{j} + \frac{dA_z}{dt}\vec{k}$$

$$\int \vec{A} dt = (\int A_x dt)\vec{i} + (\int A_y dt)\vec{j} + (\int A_z dt)\vec{k}$$

第一章 质点运动学

1. 几个概念：质点，参考系，惯性系与非惯性系

2. 描述质点运动的物理量

(1) 位矢：从坐标原点引向质点所在位置的有向线段。

在直角坐标系中 $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

(2) 运动方程

在直角坐标系中 $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$

直角坐标系中分量表示 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$

消去时间参量 t:

$$y = f(x)$$

——轨道方程

在自然坐标中 $s = s(t)$

(3)位移：由质点的初始位置指向末位置的矢量。

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)$$

在直角坐标系中 $\Delta\vec{r} = \Delta x\vec{i} + \Delta y\vec{j} + \Delta z\vec{k}$

(4)路程：物体运动时沿轨迹实际通过的路径长度称为路程，用*s* 表示，是标量。

一般情况下 $|\Delta\vec{r}| \neq \Delta s$ 但 $|\mathrm{d}\vec{r}| = \mathrm{d}s$

(5)速度：质点位置对时间的一阶导数称为速度， $\vec{\upsilon} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$

在直角坐标系中 $\vec{\upsilon} = \upsilon_x\vec{i} + \upsilon_y\vec{j} + \upsilon_z\vec{k}$

$$= \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\vec{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\vec{j} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\vec{k}$$

在自然坐标中 $\vec{v}=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\vec{e}_{\mathrm{t}}$

速度的大小称为速率，速率是标量 $v=|\vec{v}|=\left|\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\right|=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$

(6) 加速度: 质点运动速度对时间的一阶导数或位移对时间的二阶导数

$$\vec{a}=\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2}$$

在直角坐标系中 $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$

$$=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\vec{i}+\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\vec{j}+\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\vec{k}$$

在自然坐标中 $\vec{a}=a_{\mathrm{t}}\vec{e}_{\mathrm{t}}+a_{\mathrm{n}}\vec{e}_{\mathrm{n}}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{e}_{\mathrm{t}}+\frac{v^2}{\rho}\vec{e}_{\mathrm{n}}$

(7) 圆周运动的角量描述：

线量与角量的关系

角位置： $\theta=\theta(t)$

角位移： $\Delta\theta=\theta(t+\Delta t)-\theta(t)$

角速度： $\omega=\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\upsilon}{R}$

角加速度： $\alpha=\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$

法向加速度： $a_\mathrm{n}=\dfrac{\upsilon^2}{R}=R\omega^2$ （指向圆心）

切向加速度： $a_\mathrm{t}=\dfrac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t}=R\alpha$ （沿切线方向）

$s=R\theta$

$v=R\omega$

$a_\tau=R\alpha$

$a_n=R\omega^2$

$\vec{v}=\vec{\omega}\times\vec{r}$

$\vec{a}=\vec{\alpha}\times\vec{r}+\vec{\omega}\times\vec{v}$

3. 相对运动和伽利略变换

伽利略速度变换式: $\boxed{\vec{r}=\vec{r}_0+\vec{r}\,'}$ $\boxed{\vec{v}=\vec{v}_0+\vec{v}\,'}$ $\boxed{\vec{a}=\vec{a}_0+\vec{a}\,'}$

运动学的两类问题：

1. 已知运动方程，求质点任意时刻的位置、速度以及加速度

$$\vec{r}=\vec{r}(t) \qquad \vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt} \qquad \vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

2. 已知运动质点的速度函数（或加速度函数）以及初始条件求质点的运动方程

$$\vec{a}=\vec{a}(t) \quad \vec{v}=\int\vec{a}dt+\vec{c}_1 \quad \vec{r}=\int\vec{v}dt+\vec{c}_2$$

其中 $\vec{c}_1$ 和 $\vec{c}_2$ 由初始条件确定：

$$\vec{v}\Big|_{t=0}=\vec{v}_0 \qquad \vec{r}\Big|_{t=0}=\vec{r}_0$$

3. 相遇问题，条件： $\Delta\vec{r}(t)=\vec{r}_1(t)-\vec{r}_2(t)=0$

1. 一质点在 xoy 平面内运动，运动方程为： $x=2t$；

$y=4t^2-8$（国际单位制）。求：

（1）质点的轨道方程；

（2）$t_1=1s$ 和 $t_2=2s$ 时质点的位置、速度和加速度。

解：（1）质点的轨道方程： $y=x^2-8$；

（2）$\because \vec{v}=2\vec{i}+8t\vec{j}$； $\vec{a}=8\vec{j}$ ，

$$\therefore 当t=1s时，\begin{cases}\vec{r}_1=2\vec{i}-4\vec{j}\\ \vec{v}_1=2\vec{i}+8\vec{j}\\ \vec{a}_1=8\vec{j}\end{cases}；\quad 当t=2s时，\begin{cases}\vec{r}_2=4\vec{i}+8\vec{j}\\ \vec{v}_2=2\vec{i}+16\vec{j}\\ \vec{a}_2=8\vec{j}\end{cases}$$

2. 质点在 xoy 平面内运动，其速度为：$\vec{v}=2\vec{i}-4t\vec{j}$，计时开始时质点的 $\vec{r}_0=19\vec{j}$，试求：

（1）质点的运动方程；

（2）当质点的位置矢量与速度矢量恰好垂直时，将发生在什么时刻？

（3）求 t 时刻质点的切向加速度和法向加速度的大小。

解：（1）$\because \vec{v}=2\vec{i}-4t\vec{j}=\dfrac{d\vec{r}}{dt} \quad \Rightarrow \quad \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{r}=\int_0^t (2\vec{i}-4t\vec{j})dt$ ，

运动方程：$\vec{r}(t)=2t\vec{i}+\left(19-2t^2\right)\vec{j}$

（2）令：$\vec{r}\cdot\vec{v}=[2t\vec{i}+\left(19-2t^2\right)\vec{j}]\cdot(2\vec{i}-4t\vec{j})=8t^3-72t=0$ ，

得： $t_1=0$，$t_2=3(s)$，$t_3=-3(s)$ (不合题意，舍去)；

（3）$\because \vec{a}=\dfrac{d\vec{v}}{dt}=-4\vec{j} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a=4 \\ v=2\sqrt{1+4t^2} \end{cases}$ ，

$$a_\tau=\frac{dv}{dt}=\frac{8t}{\sqrt{1+4t^2}} \quad , \quad a_n=\sqrt{a^2-a_\tau^2}=\frac{4}{\sqrt{1+4t^2}} \quad 。$$

3. 以初速率 $v_{10}=15.0m/s$ 竖直向上扔出一块石头后，在 $t_1=1.0s$ 时又竖直向上扔出第二块石头，后者在 $h=11.0m$ 高处击中前者，求第二块石头扔出时的速率 v_{20}。

解：以抛出点为原点向上为正方向建立 y 坐标系，

第一块石头的运动方程：$y_1=v_{10}t-\frac{1}{2}gt^2$ ，

第二块石头的运动方程：$y_2=v_{20}(t-t_1)-\frac{1}{2}g(t-t_1)^2$ ，（$t\geq t_1$）

第二块石头在 h=11.0 m 高处击中第一块石头，由 $h=v_{10}t-\frac{1}{2}gt^2$ 得击中时间为

$$t=\frac{v_{10}\pm\sqrt{v_{10}^2-2gh}}{g}=1.22\text{ s 或 }1.84\text{ s}$$

若 $t=1.22\,\text{s}$ 击中，代入 $h=v_{20}(t-t_1)-\frac{1}{2}g(t-t_1)^2$，得 $v_{20}=51.1m/s$

若 $t=1.84\,\text{s}$ 击中，代入 $h=v_{20}(t-t_1)-\frac{1}{2}g(t-t_1)^2$，得 $v_{20}=17.2m/s$

4. 一赛车沿半径为 R 的圆形轨道作圆周运动，其行驶路程与时间的关系为 $s=at+bt^2$，式中 a、b 均为常量。求该赛车：

（1）任意时刻的速度 $\vec{v}(t)$；

（2）任意时刻的加速度 $\vec{a}(t)$；

（3）任意时刻的角速度 $\omega(t)$ 和角加速度 $\alpha(t)$；

解：（1）$\vec{v}(t)=\dfrac{ds}{dt}\vec{\tau}=(a+2bt)\vec{\tau}$

（2）
$$\vec{a}(t)=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{dv}{dt}\vec{\tau}+\frac{v^2}{R}\vec{n}$$
$$=2b\vec{\tau}+\frac{(a+2bt)^2}{R}\vec{n}$$
；

（3）$\omega(t)=\dfrac{v}{R}=\dfrac{(a+2bt)}{R}$ ；

$$\alpha(t)=\frac{a_\tau}{R}=\frac{2b}{R}$$
；

5. 当物体在空气中高速度飞行时，由空气阻力产生的反向加速度大小与物体速度的平方成正比，即 $a=-kv^2$，其中 k 为常量。若物体仅受空气阻力作用沿 x 轴方向作直线运动，且通过原点时的速度为 v_0，求在此后：

（1）物体的速度为 v 时，物体所在的位置 $x(v)$；

（2）若物体经历时间 $2s$ 时，其速度变为 $\frac{v_0}{2}$，求常数 k。

解：（1）$\because a=-kv^2=\frac{dv}{dt}\cdot\frac{dx}{dx}=\frac{vdv}{dx}$ ，

$$\therefore \int_0^x -kdx=\int_{v_0}^{v}\frac{dv}{v}$$

解得：$x(v)=\frac{1}{k}\ln\frac{v_0}{v}$

（2）$\because a=-kv^2=\frac{dv}{dt}$ ， $\therefore \int_0^2 -kdt=\int_{v_0}^{v_0/2}\frac{dv}{v^2}$

解得：$k=\frac{1}{2v_0}$

第二章 质点动力学

1. 牛顿运动定律

(1) 牛顿运动三定律

牛顿第一定律：任何物体都保持静止或匀速直线运动的状态，直到其他物体作用的力迫使它改变这种状态为止。

牛顿第二定律：$\vec{F} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}$

当***m***不变时：$\vec{F} = m\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = m\dfrac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2} = m\vec{a}$

牛顿第三定律：$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$

力的矢量叠加原理：$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots$

(2) 力学中几种常见的力

万有引力： $\vec{F} = -G\dfrac{m_1 m_2}{r^2}\vec{e}_r$

重力： $\vec{F}_G = m\vec{g}$

弹簧的弹性力： $\vec{F} = -kx\vec{i}$

静摩擦力： $F_s \le F_{smax}$ $F_{smax} = \mu_s F_N$

滑动摩擦力： $F_k = \mu_k F_N$

(3) 应用牛顿运动定律解题的一般步骤

选取研究对象；分析受力情况，画出受力图；

选取坐标系；列方程求解；讨论。

(4) 牛顿运动定律的适用范围

宏观低速物体；惯性系。

2. 功和能

(1) 功 $$A_{ab}=\int_a^b \mathrm{d}A=\int_{r_a}^{r_b}\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$$

重力的功： $$A=mg(y_a-y_b)$$

万有引力的功： $$A=-Gm_1m_2(\frac{1}{r_a}-\frac{1}{r_b})$$

弹簧弹性力的功： $$A=\frac{1}{2}kx_a^2-\frac{1}{2}kx_b^2$$

摩擦力的功： $$A=-\mu_{\mathrm{k}}mgs$$

(2) 功率 $$P=\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}=\vec{F}\cdot\vec{\upsilon}$$

(3) 动能定理

质点的动能定理： $$\int_a^b \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=\frac{1}{2}m\upsilon_b^2-\frac{1}{2}m\upsilon_a^2$$

质点系的动能定理： $$A_{外}+A_{内}=E_{kb}-E_{ka}$$

(4) 保守力 $\oint_L \vec{F}\cdot d\vec{r}=0$（重力、万有引力、弹簧弹性力等都是保守力）

(5) 势能 $E_{pa}=-\int_{b(\text{势能零点})}^{a}\vec{F}_{保}\cdot d\vec{r}$

重力势能： $E_p=mgy$ （以 $y=0$ 的平面为势能零点）

万有引力势能： $E_p=-G\dfrac{m_1m_2}{r}$ （以无穷远处为势能零点）

弹簧弹性力势能： $E_p=\dfrac{1}{2}kx^2$ （以弹簧原长处为势能零点）

保守力作功与势能的关系： $A_{保}=-\Delta E_p=-(E_{pb}-E_{pa})$

(6) 保守力与势能的微分关系

$$\vec{F}=-\nabla E_p=-\left(\frac{\partial E_p}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial E_p}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial E_p}{\partial z}\vec{k}\right)$$

(7) 机械能守恒定律 当 $W_{外}+W_{非保内}=0$ 时， $E_k+E_p=$ 常量。

3. 动量和动量定理

(1) 冲量

元冲量：　$\mathrm{d}\vec{I} = \vec{F}\mathrm{d}t$

t_1 至 t_2 时间内的冲量：　$\vec{I} = \int \mathrm{d}\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\mathrm{d}t$

(2) 动量定理

质点的动量定理：　$\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\mathrm{d}t = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1$

质点系的动量定理：　$\int_{t_1}^{t_2} (\sum_i \vec{F}_i)\mathrm{d}t = (\sum_i m_i\vec{v}_{i2}) - (\sum_i m_i\vec{v}_{i1})$

(3) 动量守恒定律

当 $\sum_i \vec{F}_i = 0$ 时，$\vec{p} = \sum_i m_i\vec{v}_i =$ 常矢量

4. 质心

(1) 质心的位矢 $\vec{r}_C = \dfrac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{m}$ 或 $\vec{r}_C = \dfrac{\int \vec{r}\,\mathrm{d}m}{m}$

$dm = \rho dV$; $dm = \sigma dS$; 或 $dm = \lambda dL$

(2) 质心运动定理 $\vec{F} = m\vec{a}_C$

5. 角动量和角动量定理

(1) 力对固定点**O**的力矩 $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$

方向的判定

(2) 质点对固定点**O**的角动量 $\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$

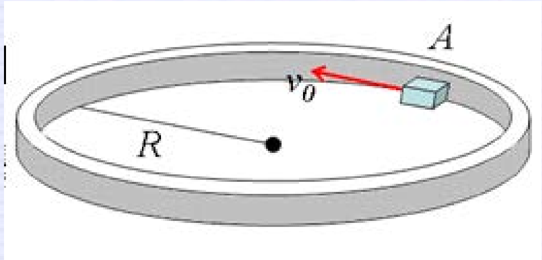
(3) 角动量定理 $\vec{M} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}$

(4) 角动量守恒定律 当 $\vec{M} = 0$ 时，$\vec{L} =$ 常矢量

4. 水平面上放置一固定的圆环，半径为 R。一物体贴着环的内侧运动，物体与环之间滑动摩擦系数为 μ。设物体在某时刻经 A 点时速率为 v_0，求：

(1) 此后 t 时刻物体的速率；

(2) 从 A 点开始到速率减少为 $\frac{v_0}{2}$ 时，物体转了过了多少圈？



（1）$\begin{cases} N = F_n = m\dfrac{v^2}{R} \\ -f = F_t = m\dfrac{dv}{dt} \end{cases}$ 其中：$f = \mu N$

所以有：$m\dfrac{dv}{dt} = -\mu m\dfrac{v^2}{R}$ $\rightarrow \dfrac{dv}{v^2} = -\dfrac{\mu}{R}dt$

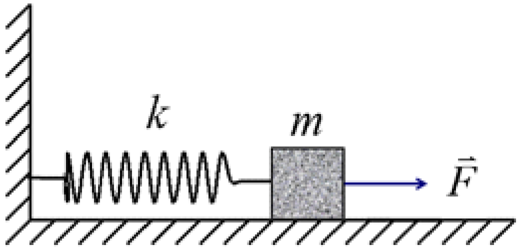
两边积分：$\displaystyle\int_{v_0}^{v}\frac{dv}{v^2} = -\int_0^t\frac{\mu}{R}dt$ 得：$\dfrac{1}{v} - \dfrac{1}{v_0} = \dfrac{\mu}{R}t$ ，即：$v = \dfrac{R}{R+\mu v_0 t}v_0$

（2）又 $\because -\mu m\dfrac{v^2}{R} = m\dfrac{dv}{dt}\cdot\dfrac{ds}{ds}$ ， $\displaystyle\therefore \int_0^s ds = -\frac{R}{\mu}\int_{v_0}^{v_0/2}\frac{dv}{v}$ ；

解得：$s = \dfrac{R}{\mu}\ln 2$ ，物体转过的圈数 $n = \dfrac{\Delta\theta}{2\pi} = \dfrac{s}{2\pi R} = \dfrac{\ln 2}{2\pi\mu}$

5. （12 分）

劲度系数为 k 的轻弹簧，一端固定在墙上，另一端连在一个质量为 m 的物体上，如图所示。 物体与桌面间的摩擦系数为 μ，初始时刻弹簧处于原长状态，现用不变的力 F 拉物体，使物体向右移动，问物体将停在何处？



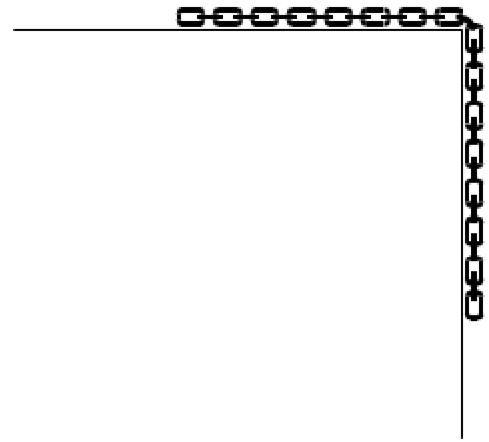
解：设初始时刻物体 m 的位置为坐标原点，则物体速度为零时物体所在的位置坐标为 x ，物体运动过程有：

$$\int_0^x (F-\mu mg)dx = \frac{1}{2}kx^2$$

解得：$x = \dfrac{2(F-\mu mg)}{k}$

另：若以受力平衡状态为答案者（x 有一取值范围），视为正确。

6.（14 分）



长为l的均质链条，部分置于水平面上，另一部分自然下垂，已知链条与水平面间静摩擦系数为μ_0，滑动摩擦系数为μ，问：

（1）满足什么条件时，链条将开始滑动；

（2）在满足问题（1）的条件下，链条自静止开始滑动，当链条末端刚刚滑离桌面时，其速度等于多少？

解：`（1）假设链条单位长度质量为λ，当垂直部分长度为b时链条开始下滑，b应满足：

$$\lambda b g-\mu_0\lambda(l-b)g=0 \rightarrow \underline{\therefore b=\frac{\mu_0}{1+\mu_0}l} \quad ;$$

（2）链条下滑过程中重力功：$W_G=\int_b^l \lambda y g\,\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\lambda g(l^2-b^2)$，

摩擦力的功：$W_f=-\int_b^l \mu\lambda(l-y)\mathrm{d}y=-\frac{1}{2}\mu\lambda g(l-b)^2$，

由动能定理：$W_G+W_f=\Delta E_k \Rightarrow \frac{1}{2}\lambda g(l^2-b^2)-\frac{1}{2}\mu\lambda g(l-b)^2=\frac{1}{2}\lambda l v^2-0$

解得：$v=\sqrt{\frac{g}{l}(l^2-b^2)-\frac{\mu g}{l}(l-b)^2}$。

7. 把一个物体从地球表面上沿铅垂方向以第二宇宙速度 $v_0=\sqrt{\dfrac{2GM_e}{R_e}}$，发射出去，忽略空气阻力。式中 M_e 和 R_e 分别为地球的质量和平均半径，G 为万有引力常量。求物体从地面飞行到与地心相距 nR_e 的高度处所经历的时间。

解：物体上升过程中机械能守恒，当上升高度为 x 时：

$$\frac{1}{2}mv_0^2-G\frac{M_e m}{R_e}=\frac{1}{2}mv^2-G\frac{M_e m}{x} \quad\rightarrow\quad v=\sqrt{\frac{2GM_e}{x}}$$

$$\because v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\sqrt{\frac{2GM_e}{x}} \quad\rightarrow\quad \mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}x}{v}=\frac{1}{\sqrt{2GM_e}}\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$$

$$\therefore \int_0^t \mathrm{d}t=\int_{R_e}^{nR_e}\frac{1}{\sqrt{2GM_e}}\sqrt{x}\,\mathrm{d}x \quad\rightarrow\quad t=\frac{2}{3\sqrt{2GM_e}}R_e^{3/2}\left(n^{3/2}-1\right)$$

8.（15 分）

一颗人造地球卫星在地面上空 800 Km 的圆轨道上，以 $V_1=7.5km/s$ 的速率绕地球运动，今在卫星外侧点燃一火箭，给卫星附加一个指向地心的分速率 $V_2=0.2km/s$。求此后卫星轨道的最低点和最高点位于地面上空多少公里。（将地球看作半径 $R=6400km$ 的球体）

解：卫星开始时作圆周运动： $G\frac{Mm}{r^2}=m\frac{V_1^2}{r}$

卫星角动量守恒： $\vec{r}\times m(\vec{V}_1+\vec{V}_2)=\vec{r}'\times m\vec{V}'$

因为 $\vec{r}//\vec{V}_2,\vec{r}\perp\vec{V}_1$，且近地点及远地点时 $\vec{r}'\perp\vec{V}'$

所以有 $mV_1r=mV'r'$

卫星运动过程中机械能守恒： $\frac{1}{2}m(V_1^2+V_2^2)-G\frac{Mm}{r}=\frac{1}{2}mV'^2-G\frac{Mm}{r'}$

解得： $r_1'=\frac{V_1r}{V_1-V_2}=7397Km$ $r_2'=\frac{V_1r}{V_1+V_2}=7013Km$

远地点高度： $h_1=r_1'-R=997Km$，近地点高度： $h_2=r_2'-R=613Km$

第三章 刚体力学基础

1. 刚体绕定轴转动运动学描述

(1) 角坐标θ $\theta=\theta(t)$

(2) 角速度ω $\omega=\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$

(3) 角加速度β $\beta=\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$

(4) 线量和角量的关系

$$s=r\Delta\theta \qquad \upsilon=r\omega \qquad a_{\mathrm{t}}=r\beta \qquad a_{\mathrm{n}}=r\omega^2$$

(5) 匀变速定轴转动

$$\omega=\omega_0+\beta t \qquad \theta=\theta_0+\omega_0 t+\frac{1}{2}\beta t^2 \qquad \omega^2=\omega_0^2+2\beta(\theta-\theta_0)$$

2. 刚体绕定轴转动的转动惯量------刚体转动惯性的量度

(1) 转动惯量 $J=\sum_i m_i r_i^2$ 或 $J=\int r^2 \mathrm{d}m$

(2) 平行轴定理 $J=J_{\mathrm{C}}+md^2$

3. 刚体绕定轴转动的转动定律

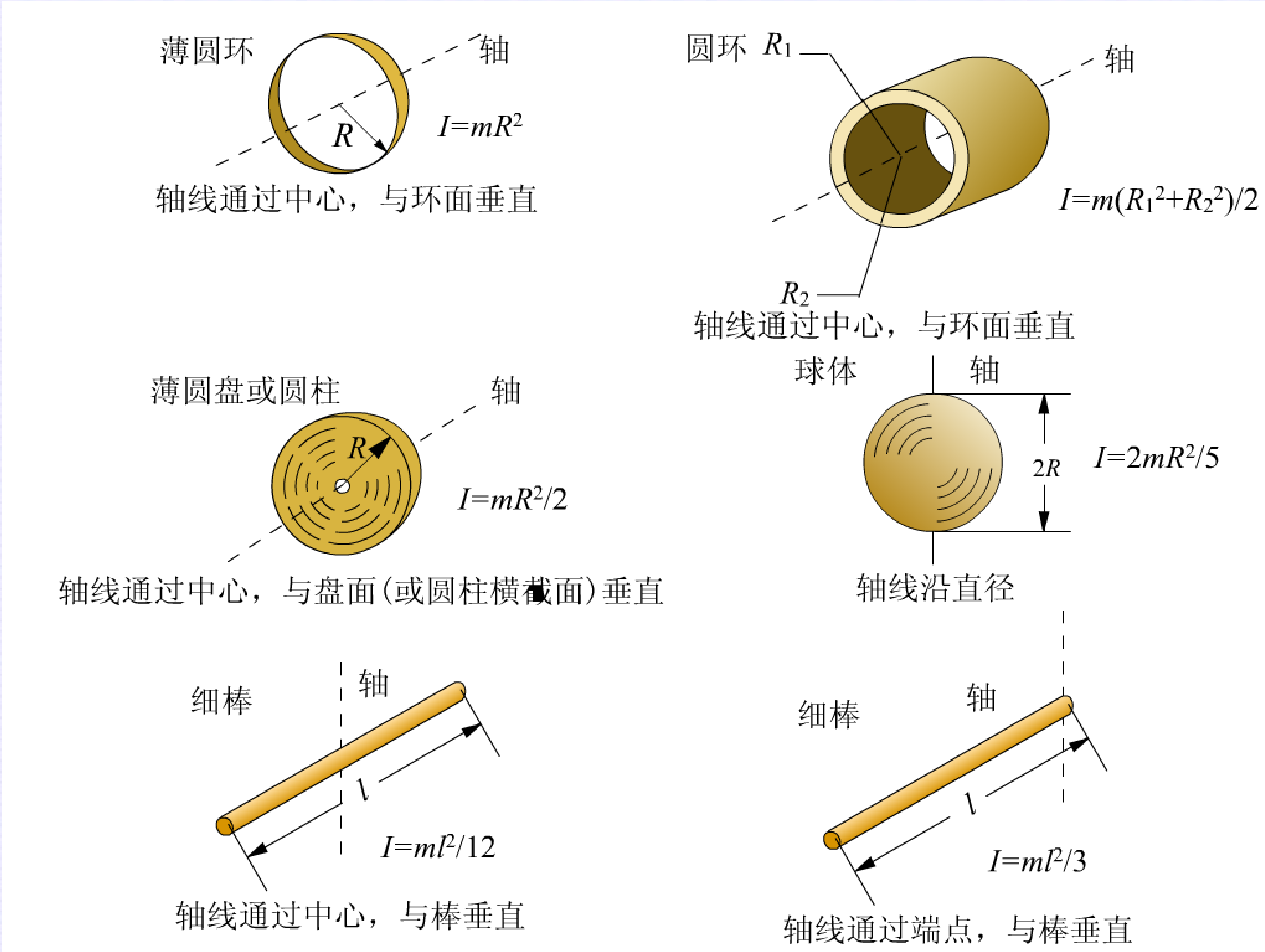
$$M=J\beta$$

4. 刚体绕定轴转动的功和能

(1) 刚体转动动能 $E_{\mathrm{k}}=\frac{1}{2}J\omega^2$

(2) 力矩的功 $A=\int_{\theta_1}^{\theta_2} M\mathrm{d}\theta$

(3) 刚体绕定轴转动的动能定理 $\int_{\theta_1}^{\theta_2} Md\theta=\frac{1}{2}J\omega_2^2-\frac{1}{2}J\omega_1^2$



薄圆环
轴
R
I=mR²
轴线通过中心，与环面垂直
圆环 R₁
轴
I=m(R₁²+R₂²)/2
R₂
轴线通过中心，与环面垂直
薄圆盘或圆柱
轴
R
I=mR²/2
轴线通过中心，与盘面(或圆柱横截面)垂直
球体
轴
2R
I=2mR²/5
轴线沿直径
细棒
轴
l
I=ml²/12
轴线通过中心，与棒垂直
细棒
轴
l
I=ml²/3
轴线通过端点，与棒垂直

(4) 刚体的重力势能 $E_p = mgh_C$

(5) 机械能守恒定律

当 $A_{外} + A_{非保内} = 0$ 时， $E = E_k + E_p =$ 常量

5. 刚体绕定轴转动的角动量

(1) 刚体的角动量 $L = J\omega$

(2) 刚体的角动量定理 $M = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(J\omega)$

(3) 角动量守恒定律

当 $M = 0$ 时， $J\omega =$ 常量

质点的运动		刚体的定轴转动	
速度	$\vec{v}=\dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$	角速度	$\omega=\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$
加速度	$\vec{a}=\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2}$	角加速度	$\alpha=\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$
质量	m	转动惯量	$J=\sum m_i r_i^2=\int r^2\mathrm{d}m$
力	$\vec{F}$	力矩	$M_z=F_{\perp}d$
运动规律	$\vec{F}=m\vec{a}$	转动定律	$M=J\alpha$

	质点的运动	刚体的定轴转动
	动量 $\vec{p}=m\vec{v}$	角动量 $L=J\omega$
时间累积	动量定理 $\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}\mathrm{d}t=\vec{p}_2-\vec{p}_1$	角动量定理 $\int_{t_1}^{t_2}M\mathrm{d}t=L_2-L_1$
	动量守恒定律 $\sum\vec{F}_{外}=0$ $\sum m_i\vec{v}_i=恒量$	角动量守恒定律 $\sum M=0$ $\sum L_i=恒量$

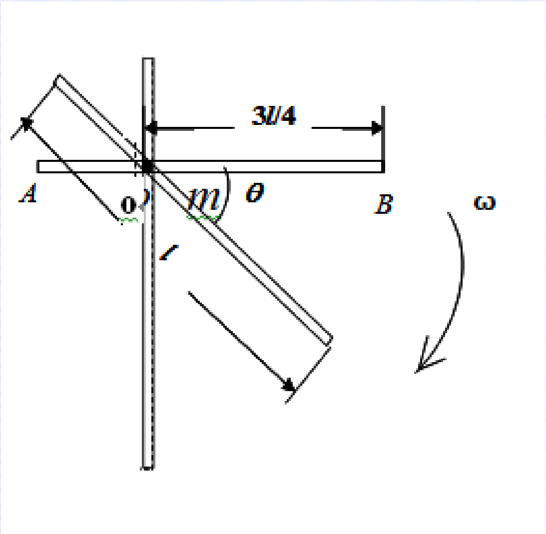
空间累积	质点的运动	刚体的定轴转动
	力的功 $W=\int \vec{F}\cdot d\vec{r}$	力矩的功 $W=\int M\cdot d\theta$
	力功率 $P=\vec{F}\cdot\vec{v}$	力矩功率 $P=M\omega$
	动能 $E_K=\frac{1}{2}mv^2$	转动动能 $E_k=\frac{1}{2}J\omega^2$
	动能定理 $W=\frac{1}{2}mv_2^2-\frac{1}{2}mv_1^2$	动能定理 $W=\frac{1}{2}J\omega_2^2-\frac{1}{2}J\omega_1^2$
	机械能守恒定律 $W_{外}+W_{非保内}=0$	$E_k+E_p=$ 恒量

7. 一根质量 m 为，长为l的均匀细棒 AB 可绕一水平的光滑转轴 O 在竖直平面内转动。O 轴离 A 端的距离为 $l/4$，如图所示。今使细棒从静止开始由水平位置绕 O 轴转动。试求：

（1）细棒对 O 轴的转动惯量 J_0；

（2）细棒转至θ角度时的角加速度 $\beta(\theta)$ 和角速度$\omega(\theta)$;

（3）细棒转至竖直位置时$(\theta=\dfrac{\pi}{2})$，B 端的速度 $\vec{v}$ 和加速度 $\vec{a}$



解：（1）细棒对 O 轴的转动惯量：

$$J_0=J_c+md^2=\frac{1}{12}ml^2+m(\frac{l}{4})^2=\frac{7}{48}ml^2\quad;$$

（2）由转动定律：$\dfrac{l}{4}mg\cos\theta=\dfrac{7}{48}ml^2\beta \quad\Rightarrow\quad \beta=\dfrac{12g}{7l}\cos\theta$ ；

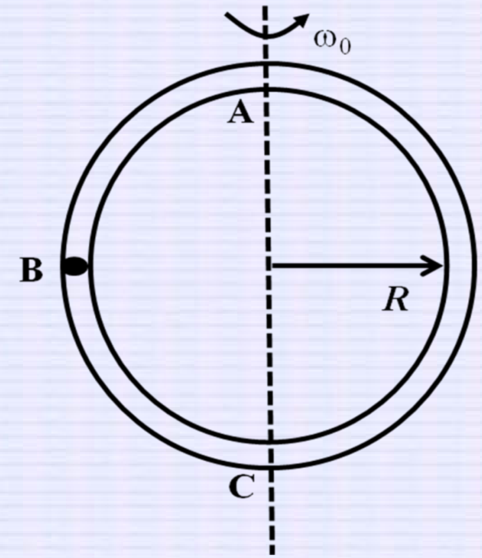
由机械能守恒定律：$mg\dfrac{l}{4}\sin\theta=\dfrac{1}{2}\times(\dfrac{7}{48}ml^2)\omega^2 \quad\Rightarrow\quad \omega=\sqrt{\dfrac{24g}{7l}\sin\theta}$ ；

（3）当$\theta=\dfrac{\pi}{2}$时，$\beta=0$ ，$\omega=\sqrt{\dfrac{24g}{7l}}$ ，

$$\therefore v=r\omega=\frac{3}{2}\sqrt{\frac{6}{7}gl}$$ ——方向向左，

$$\begin{cases}a_\tau=r\beta=0\\ a_n=\dfrac{v^2}{r}=\dfrac{18}{7}g\end{cases}\quad\Rightarrow\quad \vec{a}=\frac{18}{7}g\vec{n}$$ ——方向指向 O 点 。

8. 如图所示，空心圆环可绕竖直轴 AC 自由转动，转动惯量为J，环的半径为R。初始时，环的角速度为ω_0，质量为m的小球静止在环内最高处 A 点。由于微扰，小球沿环向下滑动。求：小球滑至与环心在同一高度的 B 点时，环的角速度ω_B及小球相对于环的速度$\vec{v}'$。（忽略一切摩擦，小球可视为质点，且环截面半径远小于R）



解：（1）当小球滑至 B 点,环和小球具有相同的角速度ω_B，

小球与圆环系统角动量守恒：$J\omega_0 = (J + mR^2)\omega_B$

可知 $\omega_B = \dfrac{J\omega_0}{J + mR^2}$ ；

（2）小球相对地面速度：$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}'$ ，且 $\vec{v}_0 \perp \vec{v}'$ ，

$$\therefore v^2 = v_0^2 + v'^2 = (R\omega_B)^2 + v'^2$$

下滑过程中系统机械能守恒：

$$\frac{1}{2}J\omega_0^2 + mgR = \frac{1}{2}(J + mR^2)\omega_B^2 + \frac{1}{2}mv'^2$$

解得：

$$v' = \sqrt{2gR + \frac{J\omega_0^2}{m} - \frac{J^2\omega_0^2}{m(J + mR^2)}} = \sqrt{2gR + \frac{J\omega_0^2R^2}{J + mR^2}}$$ ， 方向竖直向下。

9. 已知质量为 M，半径为 R 的均质圆盘可绕固定轴 O 在竖直平面内无摩擦地转动，初始时刻圆盘静止。在距离高为 h 的 P 点处（OP 与水平位置的夹角为 θ），一质量为 m 的粘土块从静止开始落下，落到圆盘上后粘在圆盘的边缘并与其一起转动。设 $M=2m$，求：

（1）碰撞后圆盘获得的角速度的大小；

（2）当 P 点转到水平位置时，圆盘的角加速度的大小；

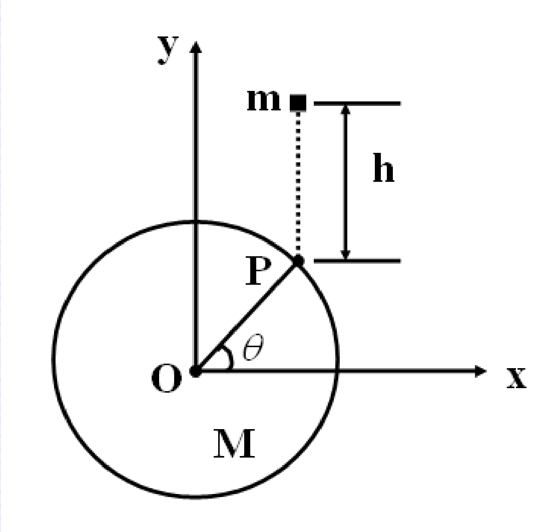
（3）当 P 点转到水平位置时，圆盘的角速度的大小。

解：（1）m 下落 h 后获得速度：$v_{10}=\sqrt{2gh}$，

m，M 碰撞过程角动量守恒：

$$mRv_0\sin(\frac{\pi}{2}+\theta)=(mR^2+\frac{1}{2}MR^2)\omega_0$$，

解得：$$\omega_0=\frac{mv_0\cos\theta}{(m+\frac{M}{2})R}=\frac{\sqrt{2gh}}{2R}\cos\theta$$；



（2）P 点转到水平位置时：$mgR=(mR^2+\frac{1}{2}MR^2)\alpha \Rightarrow \alpha=\frac{mg}{(m+\frac{M}{2})R}=\frac{g}{2R}$

（3）圆盘转动过程中机械能守恒：

$$\frac{1}{2}(mR^2+\frac{1}{2}MR^2)\omega_0^2+mgR\sin\theta=\frac{1}{2}(mR^2+\frac{1}{2}MR^2)\omega^2$$，

解得：$$\omega=\frac{\sqrt{2g(h\cos^2\theta+2R\sin\theta)}}{2R}$$。

10. 两个匀质圆盘，一大一小，同轴地粘在一起，构成一个组合轮，小圆盘的半径为 r，质量 m；大圆盘的半径 R=2r，质量 M=2m，组合轮可绕通过其中心且垂直于圆盘面的光滑水平固定轴 O 转动，对 O 轴的转动惯量 $J=9\ mr^2/2$. 两圆盘边缘上分别饶有轻质，细绳下端各悬挂质量为 m 的物体 A 和 B，如图所示. 这一系统从静止开始运动，绳与盘无相对滑动，绳的长度不变，已知 r=10cm. 求：

（1）组合轮的角加速度 β；

（2）当物体 B 上升 h=40cm 时，组合轮的角速度 ω.

解：（1）各物体的受力情况如图

$$T-mg=ma$$

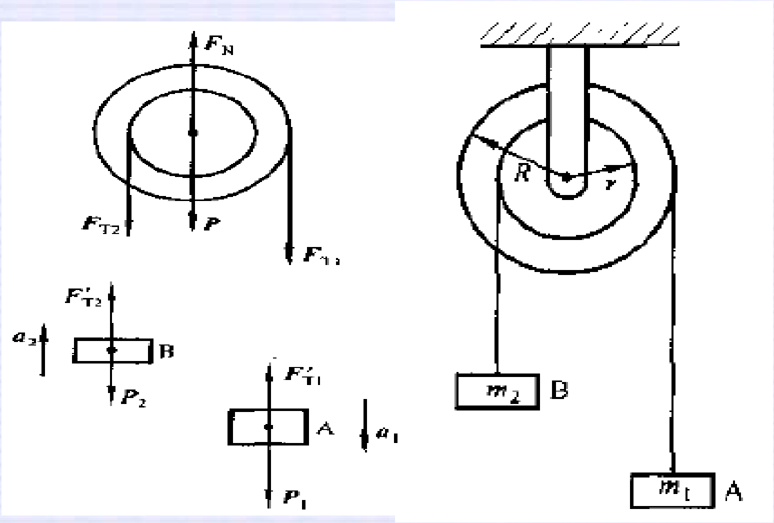
$$mg-T'=ma'$$

$$T'(2r)-Tr=9mr^2\beta/2$$

$$a=r\beta$$

$$a'=(2r)\beta$$

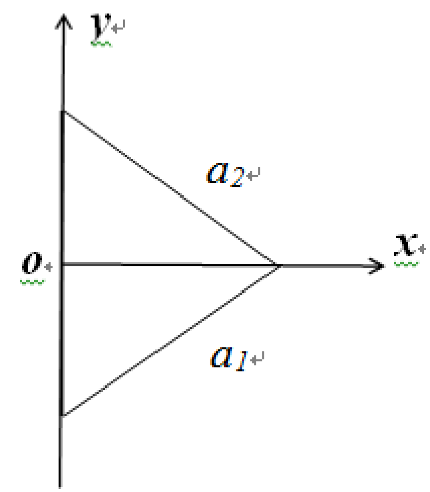
由上述方程组解得 $\beta=2g/(19r)=10.3rad\cdot s^{-2}$



（2）设θ为组合轮转过的角度，则 $\theta=h/r$，$\omega^2=2\beta\theta$

所以，$\omega=(2\beta h/r)^{1/2}=9.08rad\cdot s^{-1}$

11. 求一质量为 m，边长为 a 的等边三角形平面，绕通过其边长轴的转动惯量 J_y （已知质量为 m、长为 L 的均匀细棒，对通过棒的一端、且与棒长相垂直的轴的转动惯量为 $J=\frac{1}{3}mL^2$）。



解：设三角形质量面密度为 σ，$\sigma=\dfrac{m}{\frac{1}{2}\cdot a\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a}=\dfrac{4\sqrt{3}m}{3a^2}$ ，

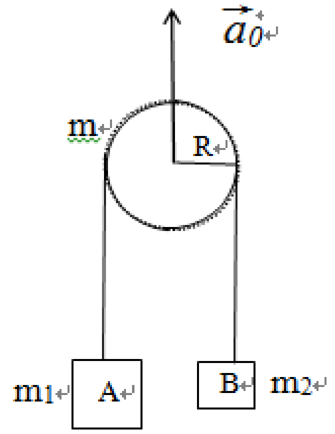
在 $x>0, y>0$ 处，三角形边长的直线方程：$y=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}x+\dfrac{a}{2}$，

$$\therefore dJ_y=\frac{1}{3}\cdot dm\cdot x^2=\frac{1}{3}\sigma x^3dy=-\frac{\sqrt{3}}{9}\sigma x^3dx \quad ,$$

$$\therefore J_y=\int dJ_y=2\times\int_{\frac{\sqrt{3}a}{2}}^{0}-\frac{\sqrt{3}}{9}\sigma x^3dx=\frac{\sqrt{3}}{18}\sigma(\frac{\sqrt{3}}{2}a)^4=\frac{1}{8}ma^2$$

12. 如图所示，一质量为 m 的均质滑轮上跨有不能伸长的轻绳，绳子的两端连接着质量分别为 m_1 和 m_2 的物体 A、B（$m_1 > m_2$）. 滑轮以恒定加速度 a_0 向上运动，求：A、B 两物体的加速度 a_1、a_2 的大小；

（设滑轮可视为均质圆盘，滑轮与绳子无相对滑动，且不计滑轮轴承及滑轮与绳子间的摩擦力）



解：$m_1 : m_1 g - T_1 = m_1(a' - a_0) \to (1)$

$m_2 : T_2 - m_2 g = m_2(a' + a_0) \to (2)$

$m : T_1 R - T_2 R = \frac{1}{2} m R^2 \cdot \beta \to (3)$

又 $a' = R\beta \to (4)$　解得：

物体的加速度：$a_1 = (a' - a_0) = \dfrac{(m_1 - m_2)g - (2m_2 + \frac{m}{2})a_0}{m_1 + m_2 + \frac{m}{2}}$ ，

$a_2 = (a' + a_0) = \dfrac{(m_2 - m_1)g + (2m_1 + \frac{m}{2})a_0}{m_1 + m_2 + \frac{m}{2}}$ ；