2015-2016 学年第一学期《微积分 I-1》期中试卷参考解答

一、求下列函数极限（每题 6 分，共 12 分）：

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\ln(1+x)}-\sqrt{1+\sin x}}{x(\mathrm{e}^x-1)}$

解一：
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\ln(1+x)}-\sqrt{1+\sin x}}{x(\mathrm{e}^x-1)}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-\sin x}{x^2(\sqrt{1+\ln(1+x)}+\sqrt{1+\sin x})}$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-\sin x}{x^2}$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-\cos x}{2x}=\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{(1+x)^2}+\sin x}{1}=-\frac{1}{4}.$$

解二：
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\ln(1+x)}-\sqrt{1+\sin x}}{x(\mathrm{e}^x-1)}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-\sin x}{x^2(\sqrt{1+\ln(1+x)}+\sqrt{1+\sin x})}$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-\sin x}{x^2}$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)-(x+o(x^2))}{x^2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{x^2}=-\frac{1}{4}$$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+\sqrt{2}}+\cdots+\dfrac{1}{n+\sqrt{n}})$

解：因为 $\dfrac{n}{n+\sqrt{n}}\le\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+\sqrt{2}}+\cdots+\dfrac{1}{n+\sqrt{n}}\le\dfrac{n}{n+1}$，又 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+\sqrt{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}=1$，故

$\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+\sqrt{2}}+\cdots+\dfrac{1}{n+\sqrt{n}})=1.$

二、求下列函数的导数：（每小题 8 分, 共 16 分）.

1. 设 $y=y(x)$ 是由方程 $\mathrm{e}^y+6xy+x^2-1=0$ 所确定的隐函数，求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}$ 和 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0}$.

解：令 $x=0$，由方程 $\mathrm{e}^y+6xy+x^2-1=0$，可得 $y(0)=0$.

方程 $\mathrm{e}^y+6xy+x^2-1=0$ 两边对 x 求导，则

$$\mathrm{e}^y y'+6y+6xy'+2x=0\,, \qquad (*)$$

即 $y'=-\dfrac{2x+6y}{6x+\mathrm{e}^y}$，故 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=0$.

由方程（*）两边求导，得 $\mathrm{e}^y y''+\mathrm{e}^y(y')^2+6y'+6y'+6xy''+2=0$.

令 $x=0$，并将 $y=0$ 和 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=0$ 代入，得 $y''+2=0$，即 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0}=-2.$

2. 设 $\begin{cases}x=t-\ln(1+t)\\ y=t^3+t^2\end{cases}$，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\ \dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

解：$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=1-\dfrac{1}{1+t}=\dfrac{t}{1+t}$，$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=3t^2+2t$，故

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{3t^2+2t}{\dfrac{t}{1+t}}=(1+t)(3t+2),$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(1+t)(3t+2)}{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{5+6t}{\dfrac{t}{1+t}}=\frac{(5+6t)(1+t)}{t}.$$

三、（8 分）证明数列 $\sqrt{6},\sqrt{6+\sqrt{6}},\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6}}},\cdots$ 的极限存在，并求出该极限.

证明：记数列的第 n 项为 x_n，那么 $x_n=\sqrt{6+x_{n-1}}$.

显然 $x_2>x_1$，若 $x_n>x_{n-1}$，则

$$x_{n+1}-x_n=\sqrt{6+x_n}-\sqrt{6+x_{n-1}}=\frac{x_n-x_{n-1}}{\sqrt{6+x_n}+\sqrt{6+x_{n-1}}}>0,$$

即 $x_{n+1}>x_n$. 故数列 $\{x_n\}$ 单调增加.

容易得到 $0<x_n<3$，事实上，$n=1$ 时，$x_1=\sqrt{6}<3$，假设 $x_n<3$，则

$$x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}<\sqrt{6+3}=3.$$

因此，数列 $\{x_n\}$ 有界.

由“单调有界数列必有极限”的结论，知极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，设为 a.

对 $x_n=\sqrt{6+x_{n-1}}$ 两边取极限，得 $a=\sqrt{6+a}$，解得

$a=-2$（舍去），$a=3$.

故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=3.$

四、（8 分）设 $f(x)=x^2e^{2x}+\dfrac{2x}{1-x^2}$，求 $f^{(n)}(x)$.

解：由莱布尼茨公式，得

$$(x^2e^{2x})^{(n)}=(e^{2x})^{(n)}\cdot x^2+n(e^{2x})^{(n-1)}\cdot 2x+\frac{n(n-1)}{2}\cdot(e^{2x})^{(n-2)}\cdot 2$$

$$=2^{n-2}[4x^2+4nx+n(n-1)]e^{2x}$$

$$(\frac{2x}{1-x^2})^{(n)}=(\frac{1}{1-x})^{(n)}-(\frac{1}{1+x})^{(n)}=\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}+\frac{(-1)^{n-1}n!}{(1+x)^{n+1}},$$

故 $$f^{(n)}(x)=2^{n-2}[4x^2+4nx+n(n-1)]e^{2x}+\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}+\frac{(-1)^{n-1}n!}{(1+x)^{n+1}}.$$

五、（8 分）证明恒等式：$2\arctan x+\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}=\pi$（$x\geq 1$）。

解：记 $f(x)=2\arctan x+\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}$，则当 $x>1$ 时，

$$f'(x)=\frac{2}{1+x^2}+\frac{1}{\sqrt{1-\frac{4x^2}{(1+x^2)^2}}}\cdot\frac{2(1+x^2)-4x^2}{(1+x^2)^2}=0,$$

故当 $x>1$ 时，$2\arctan x+\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}=C$，其中 C 为常数.

取 $x=\sqrt{3}$，则 $C=2\arctan\sqrt{3}+\arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{2}{3}\pi+\dfrac{\pi}{3}=\pi.$

注意到，$f(1)=2\arctan 1+\arcsin 1=\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{2}=\pi.$ 因此，

$$2\arctan x+\arcsin\frac{2x}{1+x^2}=\pi\ (x\geq 1).$$

六、（8 分）设 $f(x)=x^x$（$x>0$），求该函数的单调区间和凹凸区间.

解：$f(x)=x^x=e^{x\ln x}$，$f'(x)=e^{x\ln x}(\ln x+1)=x^x(\ln x+1)$，

$$f''(x)=e^{x\ln x}(\ln x+1)^2+e^{x\ln x}\cdot\frac{1}{x}=x^{x-1}[x(\ln x+1)^2+1]>0.$$

故函数 $f(x)=x^x$ 在 $(0,\dfrac{1}{e})$ 上单调减少，而在 $(\dfrac{1}{e},+\infty)$ 上单调增加. 曲线 $y=f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 为凹的.

七、（8 分）求函数 $y=e^x\cos x\ (0\leq x\leq 2\pi)$ 的极值.

解：$y' = e^x(\cos x - \sin x)$，令 $y'=0$ 得 $x=\dfrac{\pi}{4}$ 或 $x=\dfrac{5\pi}{4}$.

因为 $y''|_{x=\frac{\pi}{4}} = -\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}} < 0$，故 $y = e^x\cos x$ 在 $x=\dfrac{\pi}{4}$ 处取得极大值，极大值为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\pi}{4}}$.

因为 $y''|_{x=\frac{5\pi}{4}} = \sqrt{2}e^{\frac{5\pi}{4}} > 0$，故 $y = e^x\cos x$ 在 $x=\dfrac{5\pi}{4}$ 处取得极小值，极小值为 $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{5\pi}{4}}$.

八、（8 分）试确定常数 a、b 的值，使得曲线 $y=x^2+ax+b$ 和 $2y=-1+xy^3$ 在点 $(1,-1)$ 处有相同的切线，并求该切线方程.

解：因为曲线经过点 $(1,-1)$ 处，则 $-1=1+a+b$，即 $a+b=-2$.

对方程 $2y=-1+xy^3$ 两边对 x 求导，则 $2y'=y^3+3xy^2y'$，于是，$y'=\dfrac{y^3}{2-3xy^2}$，于是，曲线 $2y=-1+xy^3$ 在点 $(1,-1)$ 处的切线斜率为 $k=y'|_{(1,-1)}=\dfrac{-1}{2-3}=1$.

又因为曲线 $y=x^2+ax+b$ 和 $2y=-1+xy^3$ 在点 $(1,-1)$ 处有相同的切线，则 $2\times1+a=1$，得 $a=-1$.

所求的切线方程为 $y+1=x-1$，即 $y=x-2$.

九、（8 分）讨论 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{n+2}}{\sqrt[3]{2^{3n}+x^{3n}}}\quad (x\ge 0)$ 的连续性，并指出间断点的类型.

解：$x=0$ 时，$f(x)=0$.

当 $0<x<2$ 时，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{n+2}}{2^n\sqrt[3]{1+(\frac{x}{2})^{3n}}}=x^2\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{x}{2})^n\dfrac{1}{\sqrt[3]{1+(\frac{x}{2})^{3n}}}=0$；

当 $x=2$ 时，$f(2)=\dfrac{4}{\sqrt[3]{2}}$.

当 $x>2$ 时，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^2}{\sqrt[3]{(\frac{2}{x})^{3n}+1}}=x^2$.

故 $$f(x)=\begin{cases}0, & 0<x<2\\ \dfrac{4}{\sqrt[3]{2}}, & x=2\\ x^2, & x>2\end{cases}.$$

因为 $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=0$， $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=4$，故 $x=2$ 为 $f(x)$ 的第一类间断点，为跳跃间断点.

十、（8 分）设 $\varphi'(x)$ 连续，且 $\varphi(0)=-1$， $f(x)=(\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^x)^2\varphi(x)$，求 $f'(x), f'(0)$ 和 $f''(0)$

解： $f'(x)=2(\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^x)(2\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^x)\varphi(x)+(\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^x)^2\varphi'(x)$， $f'(0)=0$.

$$f''(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{2(\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^x)(2\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^x)\varphi(x)+\mathrm{e}^{2x}(\mathrm{e}^x-1)^2\varphi'(x)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2(\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^x)(2\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^x)\varphi(x)}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{2x}(\mathrm{e}^x-1)^2\varphi'(x)}{x}$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{(\mathrm{e}^x-1)\varphi(x)}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{2x}\,x^2\varphi'(x)}{x}$$

$$=2\varphi(0).$$

十一、（8 分）若函数 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，在 $(0,2)$ 内可导，且 $f(1)+f(2)=2f(0)$，证明：在 $(0,2)$ 内至少存在一个 ξ，使得 $f'(\xi)=0$.

证明：因为函数 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 上取得最大值 M 和最小值 m .

又 $m\le\dfrac{f(1)+f(2)}{2}\le M$，由介值定理，存在 $\eta\in[1,2]$，使得 $f(\eta)=\dfrac{f(1)+f(2)}{2}=f(0)$.

因为 $f(x)$ 在 $[0,\eta]$ 上连续，在 $(0,\eta)$ 内可导，且 $f(\eta)=f(0)$. 由罗尔定理知，存在 $\xi\in(0,\eta)\subset(0,2)$，使得 $f'(\xi)=0$.