厦门大学《微积分 I-1》课程期中试卷

________学院________系________年级________专业

试卷类型:（理工类 A 卷）　　　　考试时间:2018.11.24

一、计算下列极限：（每小题 5 分，共 25 分）

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} x(\sqrt{x^2+2}-x)$；

解：原式= $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+2}+x}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\dfrac{2}{x^2}}+1}=\frac{2}{\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1+\dfrac{2}{x^2}}+1}$$

$$=\frac{2}{1+1}=1$$

2. $\lim\limits_{x\to0}(1+x^3)^{\frac{1}{\tan x-x}}$；

解：原式= $\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{\ln(1+x^3)}{\tan x-x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x^3)}{\tan x-x}}$

$$=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{x^3}{\tan x-x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{3x^2}{\sec^2 x-1}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{3x^2}{\tan^2 x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{3x^2}{x^2}}=e^3$$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\arctan x}{x+\sin x}$；

解：方法一：当 $|x|>2$ 时，$\left|\dfrac{\arctan x}{x+\sin x}\right|\le\dfrac{\frac{\pi}{2}}{|x|-1}\le\dfrac{\pi}{x}$，又 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\pi}{x}=0$，因此由夹逼准则，

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\arctan x}{x+\sin x}=0$。

方法二：因为 $|\sin x|\le1$，$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$，所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0$，进而得

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x+\sin x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{\sin x}{x}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}}{1+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}}=0,$$

又 $|\arctan x|\le\dfrac{\pi}{2}$，因此 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\arctan x}{x+\sin x}=0$。

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-x^2+x^4)+\ln(1+x^2+x^4)}{(\sqrt{1+x^2}-1)\cdot\arcsin x^2}$；

解：原式=$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^4+x^8)}{\frac{1}{2}x^2\cdot x^2}=2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^4+x^8}{x^2\cdot x^2}=2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^4}{x^4}=2$

5. 求数列的极限$\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{1}{n^2+1}+\dfrac{2}{n^2+2}+\dfrac{3}{n^2+3}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n})$。

解：注意到

$$\frac{1}{2}=\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2+n}\le\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\frac{3}{n^2+3}+\cdots+\frac{n}{n^2+n}\le\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2}=\frac{n+1}{2n},$$

又因为$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2n})=\dfrac{1}{2}$，因此由夹逼准则，得

$\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{1}{n^2+1}+\dfrac{2}{n^2+2}+\dfrac{3}{n^2+3}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n})=\dfrac{1}{2}$。

二、（本题 6 分）求函数 $y=x\sqrt{1-x^2}+\arcsin x+(\sec x)^x$ 的一阶导数。

解：$y'=\sqrt{1-x^2}+\dfrac{-x^2}{\sqrt{1-x^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}+(e^{x\ln sex})'$

$=2\sqrt{1-x^2}+e^{x\ln sex}(\ln\sec x+x\cdot\dfrac{1}{\sec x}\cdot\sec x\cdot\tan x)$

$=2\sqrt{1-x^2}+(\sec x)^x(\ln\sec x+x\cdot\tan x)$

三、（本题 10 分）设数列$\{x_n\}$满足：$x_1=\sqrt{2}$，$x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}$，证明

$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在，并求其极限值。

解：先证$1\le x_n\le 2$，用归纳法。

当 n=1 时，$1\le x_1=\sqrt{2}\le 2$；

假设当 n=k 时，$1\le x_k\le 2$。则当 n=k+1 时，由$x_{k+1}=\sqrt{2+x_k}$，得$1\le x_{k+1}\le 2$，得证。

下证$\{x_n\}$为单调数列。令 $f(x)=\sqrt{2+x}$，$x\in[1,2]$，则 $f(x)$ 在$[1,2]$上为单调增加函数。又

$x_1=\sqrt{2}<\sqrt{2+\sqrt{2}}=x_2$，因此$\{x_n\}$为单调递增数列。

由有界单调准则，$\lim_{n\to\infty} x_n$ 存在。

最后求此极限值。令 $a=\lim_{n\to\infty} x_n$，则 $1\le a\le 2$。又由 $x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}$，令 $n\to\infty$，得 $a=\sqrt{2+a}$，解得 $a=2$。

四、（本题 10 分）设方程 $\ln(x^2+y^2)=2\arctan\dfrac{y}{x}$ 确定了隐函数 $y=y(x)$，求此隐函数在点 $(1,0)$ 处的一阶导数和二阶导数。

解：方程的两边对 x 求导，得

$$\frac{2x+2y\cdot y'}{x^2+y^2}=2\frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}\frac{xy'-y}{x^2}$$

整理得 $x+y\cdot y'=xy'-y$，解得 $y'=\dfrac{x+y}{x-y}$

在 $y'=\dfrac{x+y}{x-y}$ 两边对 x 求导，得

$$y''=\frac{(1+y')\cdot(x-y)-(x+y)\cdot(1-y')}{(x-y)^2}=\frac{-2y+2xy'}{(x-y)^2}=\frac{-2y+2x\cdot\dfrac{x+y}{x-y}}{(x-y)^2}=\frac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^3}。$$

代入得 $y'|_{(1,0)}=1$，$y''|_{(1,0)}=2$。

五、（本题 10 分）计算由摆线的参数方程 $\begin{cases} x=t-\sin t \\ y=1-\cos t \end{cases}$ $(0<t<2\pi)$ 所确定的函数 $y=y(x)$ 的一阶导数和二阶导数。

解：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{\sin t}{1-\cos t}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\frac{\sin t}{1-\cos t})\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{\cos t\cdot(1-\cos t)-\sin t\cdot\sin t}{(1-\cos t)^2}\cdot\frac{1}{1-\cos t}=-\frac{1}{(1-\cos t)^2}$$

六、（本题 10 分）设函数 $f(x)=\begin{cases} b(1+\sin x)+a+2 & x>0 \\ e^{ax}-1 & x\le 0 \end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上处处可导，求 a,b。

解： 只考虑 $x=0$ 就行。因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 上连续, 所以 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=f(0)$，即有

$\lim\limits_{x\to 0^+}[b(1+\sin x)+a+2]=\lim\limits_{x\to 0^-}(e^{ax}-1)=0$，得 $a+b+2=0$。

因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 上可导, 所以 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$，即有

$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{b\sin x-0}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{e^{ax}-1-0}{x-0}$，得 $a=b$, 联立解得 $a=b=-1$。

七、（本题 9 分）求函数 $f(x)=\dfrac{x\ln|x|}{|x^2-3x+2|}$ 的间断点，并判断其间断点类型（说明理由）。

解： 间断点为 $x=0$， $x=1$， $x=2$。注意到

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x\ln|x|}{|x^2-3x+2|}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{|x^2-3x+2|}\cdot\lim_{x\to 0}x\ln|x|=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\ln|x|}{\frac{1}{x}}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}x=0$$

所以 $x=0$ 为第一类间断点中的可去间断点。

因为

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{x\ln|x|}{|x^2-3x+2|}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x}{|x-2|}\cdot\lim_{x\to 1^+}\frac{\ln|x|}{|x-1|}=1\cdot\lim_{x\to 1^+}\frac{\ln x}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\ln(1+x-1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x-1}{x-1}=1$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{x\ln|x|}{|x^2-3x+2|}=\lim_{x\to 1^-}\frac{x}{|x-2|}\cdot\lim_{x\to 1^-}\frac{\ln|x|}{|x-1|}=1\cdot\lim_{x\to 1^-}\frac{\ln x}{1-x}=\lim_{x\to 1^-}\frac{\ln(1+x-1)}{1-x}=\lim_{x\to 1^-}\frac{x-1}{1-x}=-1$$

所以 $x=1$ 为第一类间断点中的跳跃间断点。

注意到 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{|x^2-3x+2|}{x\ln|x|}=\dfrac{0}{2\cdot\ln 2}=0$，所以 $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=\infty$，因此 $x=2$ 为第二类间断点中的无穷间断点。

八、（本题 10 分）设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某个邻域上单调、二阶可导，其反函数为 $g(x)$。已知 $f(0)$=1， $f'(0)$=2， $f''(0)$=3，求 $g(x)$ 在 $x=1$ 处的一阶导数和二阶导数。

解： 注意到 $f(g(x))=x$, 两边对 x 求导，得

$$f'(g(x))\cdot g'(x)=1 \qquad ①$$

上式两边再对 x 求导，可得

$$f''(g(x))\cdot(g'(x))^2+f'(g(x))\cdot g''(x)=0 \qquad ②$$

上式由① ②，求得$g'(x)=\dfrac{1}{f'(g(x))}$， $g''(x)=-\dfrac{f''(g(x))\cdot(g'(x))^2}{f'(g(x))}$(或$=\dfrac{f''(g(x))}{[f'(g(x))]^3}$)，

把$x=1$， $g(1)=0$代入，得

$$g'(1)=\frac{1}{f'(g(1))}=\frac{1}{f'(0)}=\frac{1}{2},$$

$$g''(1)=-\frac{f''(g(1))\cdot(g'(1))^2}{f'(g(1))}=-\frac{f''(0)\cdot(g'(1))^2}{f'(0)}=-\frac{3\cdot\frac{1}{4}}{2}=-\frac{3}{8}。$$

九、（本题共 10 分，第一小题 4 分，第二小题 6 分）

设函数$f(x)$在$[0,3]$上连续，在$(0,3)$内可导，且有$f(0)=0$， $f(1)+f(2)=2$， $f(3)=4$。证明:

(1) 至少存在一点$\xi\in[1,2]$，使得$f(\xi)=1$；

(2) 至少存在一点$\eta\in(0,3)$，使得$f'(\eta)=1$。

证明：(1) 因为函数$f(x)$在$[1,2]$上连续，所以在$[1,2]$可取到最大值M和最小值m。

又因为$m\le\dfrac{f(1)+f(2)}{2}=1\le M$，所以由介值定理，至少存在一点$\xi\in[1,2]$，使得$f(\xi)=1$。

(2) 作辅助函数$\varphi(x)=f(x)-x$， $x\in[0,3]$，根据题意，$\varphi(x)$在在$[0,3]$上连续，在$(0,3)$内可导，且$\varphi(0)=f(0)-0=0$， $\varphi(\xi)=f(\xi)-\xi\le 0$， $\varphi(3)=f(3)-3=1$。注意到$\varphi(\xi)\le 0<\varphi(3)$，所以由介值定理，存在$x_0\in[\xi,3)\subseteq[1,3)$，使得$\varphi(x_0)=0$。（或者注意到$\varphi(1)+\varphi(2)+\varphi(3)=0$，类似(1)的证明对函数$f(x)$在$[1,3]$上用介值定理，存在$x_0\in[1,3]$，使得$\varphi(x_0)=0$）

从而由罗尔定理，至少存在一点$\eta\in(0,x_0)\subset(0,3)$，使得$\varphi'(\eta)=0$，即有$f'(\eta)=1$。