厦门大学《微积分 I-2》课程

期中试题

考试日期：2011.4　信息学院自律督导部整理

1. （10 分）求心形线 $r = a(1+\cos\theta)$ 的全长。

2. （10 分）设 $y_1(x)$，$y_2(x)$ 为 2 阶线性微分方程 $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ 的两个解，令

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x),$$

并称之为 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 的 Wronsky 行列式。 试证明：

（1）　$W(x)$ 满足方程 $W' + p(x)W = 0$；

（2）　$W(x) = W(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x} p(t)dt}$。

3. （10 分）设方程组 $\begin{cases} e^{\frac{u}{x}}\cos\dfrac{v}{y} = \dfrac{x}{\sqrt{2}} \\ e^{\frac{u}{x}}\sin\dfrac{v}{y} = \dfrac{y}{\sqrt{2}} \end{cases}$ 确定了函数 $u = u(x,y)$， $v = v(x,y)$。 求在点 $x=1$， $y=1$，$u=0$， $v=\dfrac{\pi}{4}$ 处的 du 和 dv。

4. （10 分）求曲线 Γ：$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=6 \\ (x-1)^2+y^2=2 \end{cases}$ 在点（2, 1，1）处的对称式切线方程。

5. （10 分）给定三维空间内一个平面 $\sum$ 以及平面外一点 P_0，再给定正实数 e。 求到 P_0 的距离和到 $\sum$ 的距离的比值为常数 e 的动点的轨迹。 选择适当的坐标系， 从而说明上述轨迹所对应的二次曲面的类型。

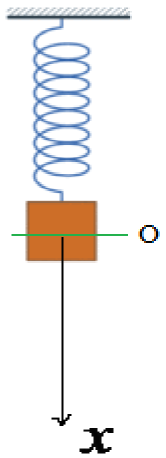
6. （10 分）设 u 为定义在平面上的二元函数， u 在直角坐标和极坐标下的函数表达式分别为：$u = f(x,y) = g(r,\theta)$。 设 u 关于 (r,θ) 有连续的二阶偏导数。 试将二元函数 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 表示成极坐标 (r,θ) 下所对应的形式。

7. （10 分）在第一卦限内做椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 的切平面使得该切平面与三个坐标平面所围成的四面体体积最小。 求此切平面与椭球的切点， 并求此最小体积。

8. （10 分）设 $f(x,y)$ 为平面上二元函数， $f(x,y)$ 在平面上任意一点 $P=(x,y)$ 处的梯度向量为 $\nabla f(x,y)=(2x,y)$。 给定 $P_0=(1,1)$， 试求 $f(x,y)$ 的过 P_0 点的等高线。

（注： 等高线即为 $f(x,y)$ 取值为给定数值的点的轨迹。）

9. （20 分）设有弹簧振子如右图。设弹簧的弹性系数为 $c=k^2$， k 为某正的常数，振子为单位质量。将重物向下拉至距离平衡位置 A 处然后无初速度地松开，假定整个运动过程中不考虑空气等产生的阻力。建立以平衡位置为原点，向下为正方向的坐标轴， 并设初始时刻为 $t=0$， 初始时刻振子恰好位于 A 处。试考察以下两种情形下振子的运动情况。



（1） 写出振子不受外力影响下做简谐振动的运动方程， 并求解之。

（2） 假设振子受到 $F=B\sin pt$ 的周期外力影响，写出此时振子的运动方程并求解之。

附加题：

10. （10 分）设二元函数 $z=f(x,y)$ 在开区域 D 内的偏导数 f_x' 和 f_y' 均有界， 试证明 $f(x,y)$ 在 D 连续。