离散数学

Discrete Mathematics

吴梅红

厦门大学计算机科学系



§4.4 关 系 的 闭 包 (closure)

- 非空集合A上的关系R不一定具有定义§4.3的5种性质中的某些性质, 本节讨论构造最小的包含R的关系R^c, 使之具有所要求的性质, 这就是关系的闭包。

定义 4.15 设R是非空集合A上的关系, 则R的

自反(对称, 传递)闭包是一个满足下列条件的关系R^c:

(1) R^c是自反 (对称或传递)的;

(2) $R \subseteq R^c$;

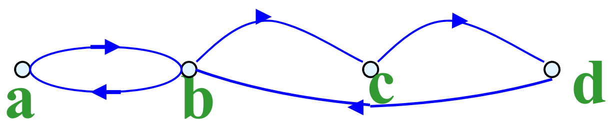
(3) 若R^p是自反 (对称或传递)的, 且$R \subseteq R^p$;

则有$R^c \subseteq R^p$。 /*包含R的最小性

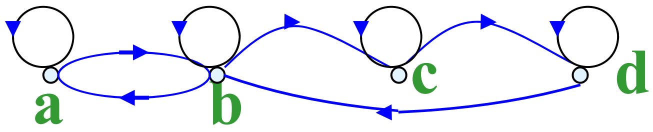
- R的自反 (对称或传递) 闭包分别记作r(R), s(R)和t(R)。

例 4.15 设 $A = \{a, b, c, d\}$,

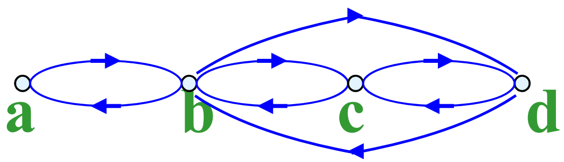
$$R = \{\langle a, b\rangle, \langle b, a\rangle, \langle b, c\rangle, \langle c, d\rangle, \langle d, b\rangle\}$$



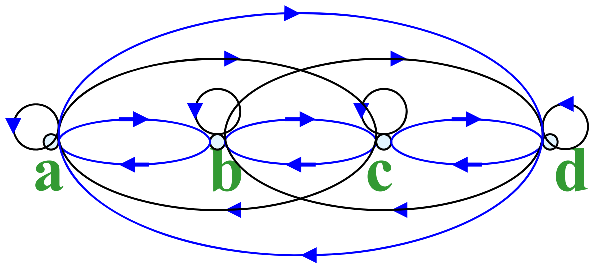
R



r(R)



s(R)



t(R)

图 4.5

定理 2.19 设 $R \subseteq A \times A$ 且 $A \neq \varnothing$, R是自反(对称, 传递)的充分必要条件是 $R = r(R)$ $(s(R), t(R))$。

证 必要性 R是自反(对称, 传递)的 且 包含R自身,

- 由定义4.15(3)最小性 $r(R)$ $(s(R), t(R)) \subseteq R$。
- 又由定义4.15(2) $R \subseteq r(R)$ $(s(R), t(R))$,
- 所以 $R = r(R)$ $(s(R), t(R))$
- 充分性 若 $R = r(R)$ $(s(R), t(R))$,

  由定义4.15(1) $r(R)$$(s(R), t(R))$是自反(对称, 传递)的,

  所以 R是自反(对称, 传递)的。 ∎

定理 4.5 设 $R \subseteq A \times A$ 且 $A \neq \varnothing$, 则有 $r(R) = R \cup I_A$。

证 (1) $I_A \subseteq R \cup I_A$, 所以 $R \cup I_A$ 自反;

(2) $R \subseteq R \cup I_A$;

(3) 设 R^p 是A上任意包含R的自反关系, $\forall \langle a, b\rangle \in R \cup I_A$

- 若 $\langle a, b\rangle \in R$, 由 $R \subseteq R^p$, 可得 $\langle a, b\rangle \in R^p$;
- 若 $\langle a, b\rangle \in I_A$, 因为 R^p 是自反的, 可得 $\langle a, b\rangle \in R^p$。

从而 $R \cup I_A \subseteq R^p$。

- 由定义4.15知, $r(R) = R \cup I_A$ ∎
- 本定理给出了构造r(R)的方法: 依次 检查A中各元素a, 若 $\langle a, a\rangle \notin R$, 就把它加入到R中去, 由此即得r(R)。

定理 4.5 设$R \subseteq A \times A$, 则有 $s(R) = R \cup R^{-1}$。

证 (1) $\forall \langle a, b \rangle \in R \cup R^{-1}$, 则有$\langle a, b \rangle \in R$ 或 $\langle a, b \rangle \in R^{-1}$。

由逆关系定义可得 $\langle b, a \rangle \in R^{-1}$ 或 $\langle b, a \rangle \in R$,

即 $\langle b, a \rangle \in R \cup R^{-1}$, 所以 $R \cup R^{-1}$是对称的。

(2) $R \subseteq R \cup R^{-1}$。

(3)设 R^p是A上任意包含R的对称关系, $\forall \langle a, b \rangle \in R \cup R^{-1}$,

- 若$\langle a, b \rangle \in R$, 由$R \subseteq R^p$, 可得 $\langle a, b \rangle \in R^p$;
- 若$\langle a, b \rangle \in R^{-1}$, 则 $\langle b, a \rangle \in R \subseteq R^p$,

  因为 R^p是对称的, 可得 $\langle a, b \rangle \in R^p$,
- 从而 $R \cup R^{-1} \subseteq R^p$, 由定义4.15知 $s(R) = R \cup R^{-1}$。 $\blacksquare$

- 本定理给出了构造s(R)的方法：

  依次 检查R中各元素<a, b>, 若 $a \neq b$ 且 $\langle b, a\rangle \notin R$,

  就把<b, a>加入到R中去, 由此即得 s(R)。

定理 4.5 设$R \subseteq A \times A$, 则有 $t(R) = R^+ = \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$

$= R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots$。　　/*$R^2$

证 令 $R^c = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots$。

(1) 若$\langle a, b\rangle \in R^c$, $\langle b, c\rangle \in R^c$, 由$R^c$的定义,

存在正整数h, k, 使得 $\langle a, b\rangle \in R^h$, $\langle b, c\rangle \in R^k$。

可得 $\langle a, c\rangle \in R^h R^k = R^{h+k}$,　　/*关系复合

即 $\langle a, c\rangle \in R^c$, 由此得证$R^c$是传递的。

(2) $R \subseteq R^c$。　　n^2

(3) 设R^p是A上任意包含R的传递关系, $\forall$<a, b>∈ R^c,

则必存在正整数k, 使得 <a, b> ∈ R^k, /*R^c定义

即存在k – 1个元素$c_1, c_2, \ldots, c_{k-1}$, 使得$\langle a, c_1\rangle \in R$,

$\langle c_1, c_2\rangle \in R, \ldots, \langle c_{k-2}, c_{k-1}\rangle \in R, \langle c_{k-1}, b\rangle \in R$。由$R \subseteq R^p$

有$\langle a, c_1\rangle \in R^p, \langle c_1, c_2\rangle \in R^p, \ldots, \langle c_{k-2}, c_{k-1}\rangle \in R^p, \langle c_{k-1}, b\rangle \in R^p$,

再由R^p的传递性 得 $\langle a, b\rangle \in R^p$,

由此得证 $R^c \subseteq R^p$。

由定义4.15, $t(R) = \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i = R^+ = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots$ ∎

- 当$|A| = n$时, $P(A \times A)$的基数是$2^{|A|\times|A|}$,

这表示A上仅有 有限的 2^{n^2}个不同的关系, 而并非∞。

推论 $t(R) = \bigcup_{i=1}^{l} R^i$ $(l = t - 1)$。

证 由定理4.3可知, 存在自然数s, t, s < t, 使得$R^s = R^t$;

$R^n \in \{R^0, R^1, \ldots, R^l\}, l = t - 1, \forall\, n \in N$。

由定理4.5可知 $t(R) = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots \cup R^l$ 。

- 构造有限集上的关系R的传递闭包, 其过程是有限的。
- 我们由R逐步构造出 R^2, R^3, R^4, … , 这样继续下去, 一定存在某个正整数t, 使得 $R^t = R^s\ (t > s)$。
- 设t是使得这个等式成立的最小正整数, 则 $t(R) = \bigcup_{i=1}^{t-1} R^i$。

- 根据定理4.5, 我们可以通过A上R的关系矩阵M求r(R), s(R)和t(R)的关系矩阵M_r, M_s和M_t, 即:
- $$M_r = M + E\ ,$$
- $$M_s = M + M'\ ,$$
- 其中 $E\ (= M^0)$是和M同阶的单位矩阵,
  M' 是M的转置矩阵,
- 用关系矩阵的幂求M_t 。
- $$\begin{aligned} M_t &= M(R + R^2 + \ldots + R^l) \\ &= M(R) + M(R^2) + \ldots + M(R^l) \\ &= M + M^2 + \ldots + M^l \end{aligned}$$
- 在矩阵对应的元素相加和相乘使用逻辑加和逻辑乘。

- 同样, 我们也可以通过A上R的关系图G求r(R), s(R)和t(R)的关系图G_r , G_s 和G_t , 见 图4.5。
- 考查G的每个结点, 如果没有自环就加上一个自环, 最终得到的是G_r 。
- 考查G的每一条边, 如果有一条x_i到x_j的单向边, 则在G中加一条x_j 到x_i 的反方向边, 最终得到的是G_s 。
- 从G的每个结点x_i 出发, 找出从x_i 出发的所有2步, 3步, …, n步长的路径 (n为G的结点数)。设路径的终点为 x_{j1} , x_{j2} , …, x_{jk} , 从x_i 依次连边到x_{j1} , x_{j2} , …, x_{jk} 。当检查完所有的结点时就得到最终得到的是G_t 。

例 设 $A = \{a, b, c, d\}$,

$R = \{<a, b>, <b, a>, <b, c>, <c, d>\}$, 求 $r(R), s(R), t(R)$。

解 $r(R) = R \cup I_A = \{<a, b>, <b, a>, <b, c>, <c, d>, <a, a>, <b, b>, <c, c>, <d, d>\}$;

$s(R) = R \cup R^{-1} = \{<a, b>, <b, a>, <b, c>, <c, d>, <c, b>, <d, c>\}$;

$R^{2k} = R^2 = \{<a, a>, <b, b>, <a, c>, <b, d>\}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots$

$R^{2k+1} = R^3 = \{<a, b>, <b, a>, <b, c>, <a, d>\}$,

$t(R) = R \cup R^2 \cup R^3 = \{<a, b>, <b, a>, <b, c>, <c, d>, <a, a>, <b, b>, <a, c>, <a, d>, <b, d>\}$

- 自反传递闭包 $R^* = t(R) \cup I_A$ 是包含R的最小可传递且自反的关系。

定理 2.20 设$R_1, R_2 \subseteq A\times A$且$A\neq\varnothing$，且 $R_1\subseteq R_2$，则

(1) $r(R_1)\subseteq r(R_2)$; /*单调性

(2) $s(R_1)\subseteq s(R_2)$;

(3) $t(R_1)\subseteq t(R_2)$。

证 (1) $\because R_1\subseteq R_2$, $r(R_1) = R_1\cup I_A \subseteq R_2\cup I_A = r(R_2)$

所以 $r(R_1)\subseteq r(R_2)$。

- (2) 因为$R_1\subseteq R_2$, 且 $R_2\subseteq s(R_2)$, 因此 $R_1\subseteq s(R_2)$。

由$s(R_1)$是包含R_1的最小对称关系, 所以 $s(R_1)\subseteq s(R_2)$。

- (3) 因为$R_1\subseteq R_2$, 且 $R_2\subseteq t(R_2)$, 因此 $R_1\subseteq t(R_2)$。

由 $t(R_1)$是包含R_1的最小传递关系, 所以 $t(R_1)\subseteq t(R_2)$。

定理 2.21 设R_1，$R_2 \subseteq A \times A$, 则

(1) $r(R_1 \cup R_2) = r(R_1) \cup r(R_2)$；

(2) $s(R_1 \cup R_2) = s(R_1) \cup s(R_2)$ ；

证 (2) $R_1 \subseteq s(R_1) \wedge R_2 \subseteq s(R_2)$

$\Rightarrow R_1 \cup R_2 \subseteq s(R_1) \cup s(R_2)$ /*$s(R_1) \cup s(R_2)$对称

$\Rightarrow s(R_1 \cup R_2) \subseteq s(R_1) \cup s(R_2)$ /*最小性

- $R_1 \subseteq R_1 \cup R_2 \wedge R_2 \subseteq R_1 \cup R_2$

$\Rightarrow s(R_1) \subseteq s(R_1 \cup R_2) \wedge s(R_2) \subseteq s(R_1 \cup R_2)$ /*单调性

$\Rightarrow s(R_1) \cup s(R_2) \subseteq s(R_1 \cup R_2)$

- $\therefore s(R_1 \cup R_2) = s(R_1) \cup s(R_2)$

定理 2.21 设R_1，$R_2 \subseteq A \times A$, 则

(3) $t(R_1) \cup t(R_2) \subseteq t(R_1 \cup R_2)$。

证 (3) $R_1 \subseteq R_1 \cup R_2 \wedge R_2 \subseteq R_1 \cup R_2$

$\Rightarrow t(R_1) \subseteq t(R_1 \cup R_2) \wedge t(R_2) \subseteq t(R_1 \cup R_2)$ / *单调性

$\Rightarrow t(R_1) \cup t(R_2) \subseteq t(R_1 \cup R_2)$

- 反之不然。反例 $A = \{a, b, c\}$,
- $R_1 = \{<a, b>, <b, c>\}$，$R_2 = \{<c, a>\}$

  则 $t(R_1) \cup t(R_2) = \{<a, b>, <b, c>, <a, c>, <c, a>\}$
- 而 $t(R_1 \cup R_2) = E_A$ (即A上全关系)
- $E_A \not\subseteq t(R_1) \cup t(R_2)$

命题 若R对称, 则R^n对称 ($\forall n\geq 1$)。 /*归纳证明

定理 4.25 设$R\subseteq A\times A$且$A\neq\varnothing$, 则

(1) 若R是自反的, 则s(R)和t(R)也是自反的;

(2) 若R是对称的, 则r(R)和t(R)也是对称的;

(3) 若R是传递的, 则r(R)也是传递的。/*s(R)不传递,P_{46}

证 (1) $s(R) = R\cup R^{-1}\supseteq I_A$, $t(R) = R\cup R^2\cup R^3\cup\ldots\supseteq I_A$

(2) $r(R) = R\cup I_A$, /*对称∪对称

- $\forall x, y \in A$, $<x, y> \in t(R)$

$\Leftrightarrow$ $<x, y> \in R\cup R^2\cup R^3\cup\ldots$

$\Rightarrow$ $\exists n(<x, y>\in R^n) \Rightarrow \exists n(<y, x>\in R^n)$ /*命题R^n对称

$\Rightarrow$ $<y, x> \in R\cup R^2\cup\ldots\cup R^n\cup\ldots$

$\Leftrightarrow$ $<y, x> \in t(R)$ /*t(R)是对称的

定理 2.26 设 $R \subseteq A \times A$ 且 $A \neq \varnothing$，则

1) $rs(R) = sr(R)$;

2) $rt(R) = tr(R)$; /*有r就可相等

3) $st(R) \subseteq ts(R)$ /*students≤teachers

证 1) $sr(R) = s(R \cup I_A)$

$= (R \cup I_A) \cup (R \cup I_A)^{-1}$

$= R \cup I_A \cup R^{-1} \cup I_A^{-1}$

$= R \cup R^{-1} \cup I_A$

$= s(R) \cup I_A$

$= r(s(R)) = rs(R)$

命题 $(R\cup I_A)^2 = I_A\cup R\cup R^2\cup\ldots\cup R^n\ \ (n\geq 1)$

定理 2.26 2) $rt(R) = tr(R)$; 3) $st(R)\subseteq ts(R)$

证 2) $tr(R) = t(R\cup I_A)$

$= (R\cup I_A)\cup(R\cup I_A)^2\cup\ldots$ /*Th4.5

$= I_A\cup R\cup R^2\cup R^3\cup R^4\cup\ldots$ /*命题

$= I_A\cup t(R)$ /*Th4.5

$= r(t(R)) = rt(R)$

3) $R\subseteq s(R)$ /*反之, P46 *l* 4

$\Rightarrow t(R)\subseteq ts(R)$ /*Th2.20单调性

$\Rightarrow st(R)\subseteq sts(R)$ /* Th2.20单调性

$\Rightarrow st(R)\subseteq ts(R)$ /*Th2.19, $sts(R) = ts(R)$

/* Th2.25(2), s(R)对称$\Rightarrow$ ts(R)对称

§ 4.5 等价(equivalent)关系和 划分 (partition)

- "物以类聚，人以群分"。分类是计算机的重要处理之一, 分类的依据是什么呢? 正是事物之间的关系。
- 引进等价关系就是为了对集合中的元素进行分类。

定义 4.19 设 $A \neq \varnothing$, 若存在A的一个子集族 $\mathcal{P}$ 满足:

(1) $\varnothing \notin \mathcal{P}$;

(2) $\forall x, y \in \mathcal{P}$ 且 $x \neq y$, 则 $x \cap y = \varnothing$;　　　/*disjoint

(3) $\mathcal{P}$ 中所有子集的并就是 A。

则称 $\mathcal{P}$ 为A的一个划分, $\mathcal{P}$ 中元素称为划分块。 ∎

例a 高级程序设计语言**Java**的字符**Character**表

$\sum = \{A,\ B,\ C,\ \ldots,\ X,\ Y,\ Z,\ 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ 8,\ 9,$

$+,\ -,\ *,\ /,\ =,\ !,\ ?,\ \ldots,\ \#,\ \$\}$。

字母**letter**集合$A = \{A,\ B,\ C,\ \ldots,\ X,\ Y,\ Z\}$,

数字**digit** 集合$D = \{0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ 8,\ 9\}$,

特殊符号**special symbol**集合

$S = \{+,\ -,\ *,\ /,\ =,\ !,\ ?,\ \ldots,\ \#,\ \$\}$,

则子集族 $\mathcal{P} = \{A,\ D,\ S\}$是$\sum$的一个划分。 $\blacksquare$

例b 设A = {a, b, c},

- 则 $\mathcal{P}_1 = \{\{a, b, c\}\}$,

  $\mathcal{P}_2 = \{\{a\}, \{b, c\}\}$,

  $\mathcal{P}_3 = \{\{b\}, \{a, c\}\}$,

  $\mathcal{P}_4 = \{\{c\}, \{a, b\}\}$,

  $\mathcal{P}_5 = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}$ 都是A的划分。

- 但 $\mathcal{P}_6 = \{\{a\}, \{b\}\}$,

  $\mathcal{P}_7 = \{\{a, c\}, \{b, c\}\}$都不是A的划分。 $\blacksquare$

定义 4.16 设$R \subseteq A \times A$ 且 $A \neq \varnothing$, 若R是自反、对称和可传递的, 则称 R是A上的等价关系。 此时,

若 $<x, y> \in R$ (即 xRy), 称 x等价于y, 记作$x \sim y$ 。 ∎

例2.9 设 A为某班学生的集合,

$R_1 = \{<x, y> | x, y \in A \wedge$ x与y同年生$\}$;

$R_2 = \{<x, y> | x, y \in A \wedge$ x与y同姓$\}$;

$R_3 = \{<x, y> | x, y \in A \wedge$ x的年龄不比y小$\}$; /*无对称

$R_4 = \{<x, y> | x, y \in A \wedge$ x与y选修同门课程$\}$; /*无传递

$R_5 = \{<x, y> | x, y \in A \wedge$ x的体重比y重$\}$ /*无自反, 对称

- 直线间的平行关系、三角形的相似关系都是等价关系.

定义 4.17 R为非空集合A上的等价关系, $\forall x \in A$, 令

$[x]_R = \{y \mid y \in A 且 xRy\}$, 称$[x]_R$为x关于R的等价类, 简称x的等价类, 简记作$[x]$。x为$[x]_R$的代表元或生成元。 ∎

- 等价类$[x]_R$是A中与x等价的全体元素所组成的集合。

例 设$A \subseteq N \wedge A \neq \varnothing$, 令

$$R_n = \{\langle x, y\rangle \mid x, y \in A \wedge x \equiv y \pmod n\}, \quad n \geq 2$$

(1) 证明R_n是集合A上的等价关系:

$x \equiv x \pmod n$, 自反;

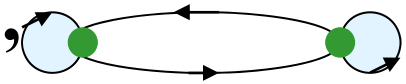
$x \equiv y \pmod n$, $y \equiv x \pmod n$, 对称;

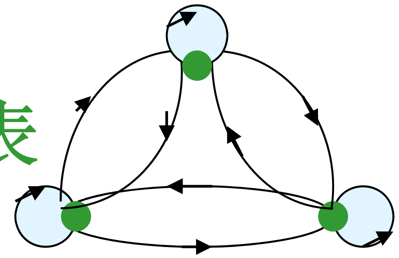
$x \equiv y \pmod n$, $y \equiv z \pmod n$, $x \equiv z \pmod n$, 传递。

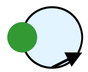
所以R_n是集合A上的等价关系。

例 4.16 设 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$,

求 $R_3 = \{ \langle x, y\rangle \mid x, y \in A \wedge x \equiv y \pmod{3} \}$的等价类。

解 $[1] = [4] = [7] = \{1, 4, 7\}$, 

$[2] = [5] = [8] = \{2, 5, 8\}$,   /*∀元可当代表 

$[3] = [6] = \{3, 6\}$。 

- 可以看出, 相关的元素其等价类是相同的。

所以不同的等价类仅有3个, 它们是[1], [2]和[3]。 ■

- 等价类有下列性质:

定理 4.6 设R是非空集合A上的等价关系, 则

(1) $\forall x \in A$, 则有 $[x]_R \neq \varnothing$ 且 $[x]_R \subseteq A$;

证 由R的自反性得 xRx, 所以$x \in [x]_R$, 即$[x]_R \neq \varnothing$,

再由等价类定义, 显然有 $[x]_R \subseteq A$。 ∎

- 这说明: A中每个元素所生成的等价类是非空的。

(2) $\forall x, y \in A$, $\langle x, y\rangle \in R$ (即 xRy) $\Leftrightarrow [x]_R = [y]_R$。

证 充分性 若$[x]_R = [y]_R$, 由$x\in [x]_R$得$x\in [y]_R$, 于是xRy。

必要性 已知 xRy, $\forall z\in [x]_R$, $z\in [x]_R \wedge xRy \Rightarrow$

$zRx \wedge xRy \Rightarrow zRy \Rightarrow z \in [y]_R$, 因此 $[x]_R \subseteq [y]_R$。

- 类似地可证 $[y]_R \subseteq [x]_R$。所以 $[x]_R = [y]_R$。 ∎
- 这说明: 彼此等价的元素属于同一个等价类。

(3) 若 $\langle x, y\rangle \notin R$, 则 $[x]_R \cap [y]_R = \varnothing$。

证 反证法　如果有元素 $z \in [x]_R \cap [y]_R$,

则 xRz 且 yRz, 由R的对称性和传递性 $\Rightarrow$ xRy,

与题设 $\langle x, y\rangle \notin R$矛盾。故 $[x]_R \cap [y]_R = \varnothing$。 ∎

- 这说明: 彼此不等价的元素是属于不同的等价类, 且这些等价类之间无公共元素。

(4) $A = \cup\{[x]_R \mid x \in A\}$。　所有等价类的并集就是A。

证 $\forall y \in \cup\{[x]_R \mid x \in A\} \Rightarrow \exists z\,(z \in A \wedge y \in [z]_R)$

由(1) $[z]_R \subseteq A \Rightarrow y \in A$,　即 $\cup\{[x]_R \mid x \in A\} \subseteq A$。

$\forall y,\ y \in A \Rightarrow y \in [y]_R \subseteq \cup\{[x]_R \mid x \in A\}$,

即 $A \subseteq \cup\{[x]_R \mid x \in A\}$。所以 $A = \cup\{[x]_R \mid x \in A\}$。 ∎

定义 4.18 设R是非空集合A上的等价关系，以R的所有不同的等价类为元素的集合 称为A关于R的**商集**，记作 $A/R = \{[a]_R \mid a \in A\}$。

A/R的基数 (不同等价类的个数) 称为R的秩。 ■

- 由定理4.6知，A/R的任何元素非空，任何二元素都是不交的，且 $\cup A/R = A$。
- 可知，集合A关于R的的 商集(A/R) 就是A上所导出的等价划分$\mathcal{P}$，[a] 即 划分块。
- 在例4.16中商集 $A/R_3 = \{[1], [2], [3]\}$

$$= \{\{1, 4, 7\}, \{2, 5, 8\}, \{3, 6\}\} = \mathcal{P}$$，秩为3。

例 4.18　设$A = \{1, 2, 3\}$, 试求A上的 全体等价关系 及其对应的商集。　　/*共有$2^{3\times3}$二元关系

解 按1)中 $n = 3$ 的情况, $A = \{1, 2, 3\}$上有$5\ (= 1 + 1 + C^2_3)$种不同的等价关系。

E_A, 其商集为$A/E_A = \{\{1, 2, 3\}\}$;

I_A, 其商集为$A/I_A = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$;

$R_{12} = I_A \cup \{<1, 2>, <2, 1>\}$, 商集$A/R_{12} = \{\{1, 2\}, \{3\}\}$;

$R_{13} = I_A \cup \{<1, 3>, <3, 1>\}$, 商集$A/R_{13} = \{\{1, 3\}, \{2\}\}$;

$R_{23} = I_A \cup \{<2, 3>, <3, 2>\}$, 商集$A/R_{23} = \{\{2, 3\}, \{1\}\}$。

- A上还有其余的等价关系吗? 不能用逐个验证的方法去找等价关系, 可用对A的划分来寻找A上的等价关系。

- 集合A上的划分集与等价关系集构成一一对应, 这表明“划分” 和 “等价关系”的概念, 在本质上是相同的。

定理 g 设A为一个非空集合。(1) 设R是非空集合A上的任意一个等价关系, 则对应R的全体不同的等价类为元素的集合商集 $A/R = \{[x]_R \mid x \in A\}$ 为 A的关于R的划分;

证 1. 因为 $x \in [x]_R$, 任一等价类 $[x]_R$ 一定不是空集。

2. $\forall [x]_R, [y]_R$, 当 xRy, 由定理2.27(2) $[x]_R = [y]_R$。

当 $x\cancel{R}y$, 若 $a \in [x]_R \cap [y]_R$, 即xRa且aRy, 则xRy, 矛盾。

所以, $[x]_R \cap [y]_R \neq \varnothing$。

3. $\bigcup_{a \in A} [x]_R = A$。 故商集A/R满足划分定义。

(2) 设$\mathcal{P}=\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$为A的一个划分,

$R_{\mathcal{P}}=\{<x, y> \mid x, y \in A \wedge x, y$属于$\mathcal{P}$的同一划分块$\}=R$,

则$R_{\mathcal{P}}$为A上的一个等价关系; 且由$R_{\mathcal{P}}$确定的商集$A/R_{\mathcal{P}}$为原来的划分$\mathcal{P}$ (证$\forall a \in A_i$, 有$[a]_R = A_i$)。

证 $\forall x \in A$, 显然x是在它自身的块中, $<x, x>$, 自反。

- 若$<x, y>$, 那么x和y在同一划分块中, $<y, x>$, 对称。
- 若$<x, y>$且$<y, z>$, 那么x, y和z都在同一划分块中, $<x, z>$, 传递。即$R_{\mathcal{P}}$为A上的一个等价关系。
- $\forall x \in A_i$, 由R定义得aRx, 即$x \in [a]_R$, 于是$A_i \subseteq [a]_R$。

反之, $\forall y \in [a]_R$, 则aRy, 由R定义得$y \in A_i$, 于是$[a]_R \subseteq A_i$ ▮

- 集合A上的划分与等价关系一一对应, A上有多少不同的等价关系, 就产生同样个数的不同划分。

例 设A = {1, 2, 3, 4}, 考虑A的划分 $\mathcal{P}$ = {{1, 2, 3}, {4}}, 求由$\mathcal{P}$决定的A上的等价关系R。

解 显然, 一个块中每一个元素与且只与相同块的元素有关系。$R = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 1, 3\rangle, \langle 2, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 3, 1\rangle, \langle 3, 2\rangle, \langle 3, 3\rangle, \langle 4, 4\rangle\}$。反之, 有等价关系的元素在同一划分块中。■

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc}1 & 2 & 3 & 4\end{array} \\ \begin{array}{c}1\\2\\3\\4\end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \\ 1 & 1 & 1 & \\ 1 & 1 & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}\end{array}$$

- A上等价关系对应A上元素某排列的划分块全关系1矩阵。

- 事物之间的次序经常是事物群体之间的重要特征，决定事物之间的次序也是通过事物间的关系来确定的。

定义 4.20 设$R \subseteq A \times A$，如果R是自反、反对称和可传递的，则称R为A上的偏序(Partial Order)关系，记作“$\leq$”。如果$\langle x, y\rangle \in \leq$，则记作$x \leq y$，读作x“小于等于”y。。

定义 4.23 集合A和A上的偏序关系$\leq$一起叫做偏(半)序集，POSET，记作$\langle A, \leq\rangle$。 ■

例 (1) A是实数集的非空子集，

$$\leq = \{\langle x, y\rangle \mid x, y \in A \wedge x \leq y\}$$

偏序$\leq$的逆也是一个偏序，记作“$\geq$”，

$$\geq = \{\langle x, y\rangle \mid x, y \in A \wedge x \geq y\}。$$

(2) 设A为正整数集Z_+的非空子集, 整除关系

$| = \{<x, y> \mid x \mid y\}$ 是A上的一个偏序关系。

(3) 设A为一集合, $\mathcal{A}$为A的子集族, $\mathcal{A}$上的包含关系

$\subseteq = \{<x, y> \mid x, y \in \mathcal{A} \wedge x \subseteq y\}$是偏序关系。

设$A = \{a, b\}$, 考虑A的下面3个子集族:

$\mathcal{A}_1 = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}\}$, $\mathcal{A}_2 = \{\{a\}, \{a, b\}\}$, $\mathcal{A}_3 = P(A)$,

它们对应的包含关系分别为偏序关系:

$\subseteq_1 = I_{\mathcal{A}1} \cup \{<\varnothing, \{a\}>, <\varnothing, \{b\}>\}$; /*not <{a}, {b}>

$\subseteq_2 = I_{\mathcal{A}2} \cup \{<\{a\}, \{a, b\}>\}$;

$\subseteq_3 = I_{\mathcal{A}3} \cup \{<\varnothing, \{a\}>, <\varnothing, \{b\}>, <\varnothing, \{a, b\}>,$

$<\{a\}, \{a, b\}>, <\{b\}, \{a, b\}>\}$。

- 例中<A, ≤>, <A, |>, <A, ⊆> 是**POSET**。

定义 2.21 设R为非空集合A上的偏序关系, 定义

(1) $x, y \in A$, $x < y \Leftrightarrow x \leq y \wedge x \neq y$,

(2) $x, y \in A$, x与y可比 $\Leftrightarrow x \leq y \vee y \leq x$ 。 ■

- "偏"字意味着某些元素可能不是可比(**comparable**)的。

- $\forall\, x, y \in A$, 则有下述几种情况可能发生:

  $x < y$ (或$y < x$), $x = y$, x与y不是可比的。

例 若≤是A = {1, 2, 3}上的整除关系, 则有

≤ = {<1, 1>, <1, 2>, <1, 3>, <2, 2>, <3, 3>}, 2和3不可比。

定义 4.24 <A, ≤>为偏序集, $\forall\, x, y \in A$, 如果$x < y$且

不存在$z \in A$, 使得$x < z < y$, 则称 y覆盖x

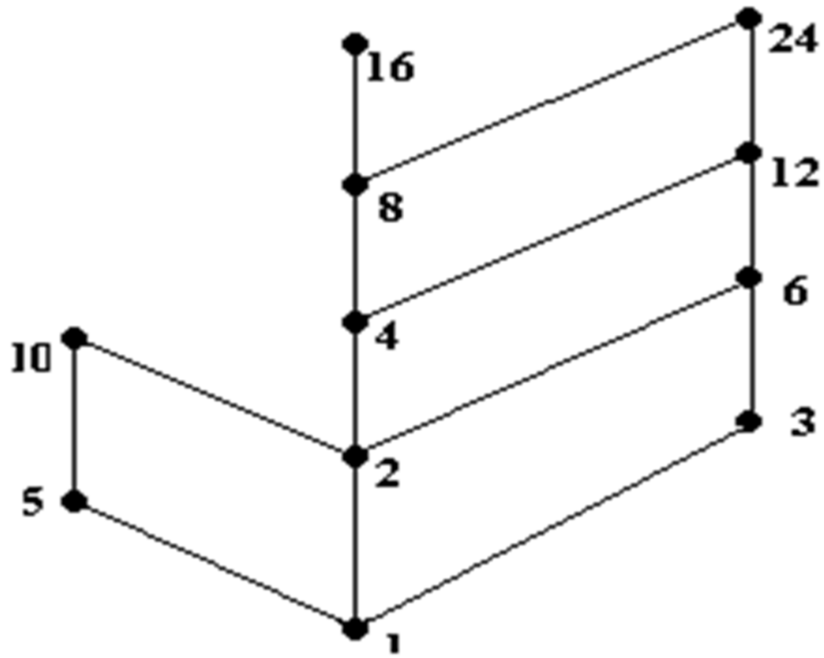
- 覆盖关系cov(A) = {<x, y> | x, y ∈A 且 y覆盖x }。
- 覆盖关系的关系图称哈斯(Hasse)图, 它实际上是偏序关系经过如下简化的关系图, 更清楚、更有效地描述元素间的层次关系。

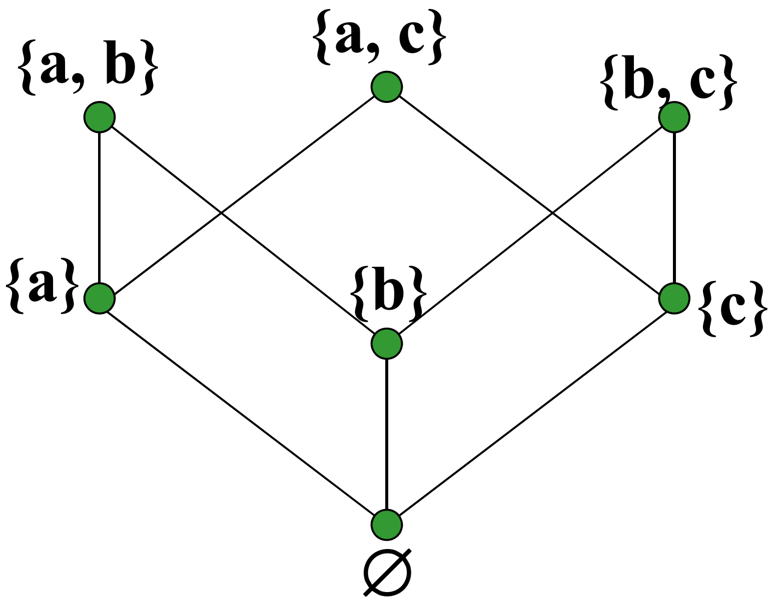
1. 省略关系图中的每个结点处的自环。
2. 若 $x < y$ 且 y覆盖x, 将代表y的顶点放在代表x的顶点之上, 并在x与y之间连线, 省去有向边的箭头, 使其成为无向边。

若 $x < y$, 但y不覆盖x, 则省去x与y之间的连线。 ▮

- 偏序的有向图中没有长度比1大的环。

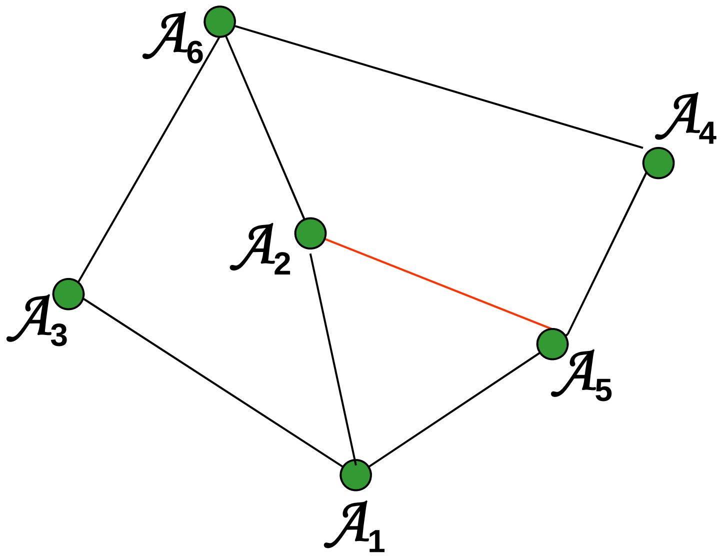
例 **A = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 16, 24}, 偏序关系是A上的整除关系 “ | ”， 偏序集(A, |)的哈斯图如下:**





例 (b)

- $<\mathcal{A}, \subseteq>$, 其中$\mathcal{A} = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}\}$ 为$A = \{a, b, c\}$的子集族, 哈斯图如上。



例 (c) 哈斯图

- $<\pi, \leqslant>$, $\pi = \{ \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3, \mathcal{A}_4, \mathcal{A}_5, \mathcal{A}_6 \}$, $\mathcal{A}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, 6)$ 都是 $A = \{a, b, c, d\}$的划分，其中，

$\mathcal{A}_1 = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}\}$, $\mathcal{A}_2 = \{\{a, b\}, \{c, d\}\}$,

$\mathcal{A}_3 = \{\{a, c\}, \{b, d\}\}$, $\mathcal{A}_4 = \{\{a\}, \{b, c, d\}\}$,

$\mathcal{A}_5 = \{\{a\}, \{b\}, \{c, d\}\}$, $\mathcal{A}_6 = \{\{a, b, c, d\}\}$。

- 偏序的两个重要特殊情形是全序关系和良序关系。

定义 4.22 设<A, ≤>为偏序集, 若∀x, y ∈ A, x与y均可比 (a≤b∨b≤a), 则称≤为A上的一个全序关系或线序关系, 此时称(A, ≤)为全序total ordering集。 $\blacksquare$

- 全序集的充要条件是其哈斯图是一条直线段。

例 设A为实数集的非空子集, 则≤和≥是全序关系。

例 给定P = {∅, {1}, {1, 2}, {1, 2, 3}}上的包含关系⊆,

(P, ⊆)构成全序集。 因为 ∅ ⊆ {1} ⊆ {1, 2} ⊆ {1, 2, 3},

即 P上任意两个元素都有包含关系。

- 某些Hasse图有惟一处于各点之上(或下)的点, 有的却不是如此。为了区别它们, 引入下述术语。

定义 4.25 $<A, \leq>$是偏序集, $B \subseteq A$, $y \in B$。

1) 若$\forall x (x \in B \to y \leq x\}$成立, 则称y为B的最小元least (or smallest or minimum) element。

/*y比谁都小, H图中惟一最低点

2) 若$\forall x (x \in B \to x \leq y\}$为真, 则称y为B的最大元 greatest (or largest or maximum) element。

/*y比谁都大, H图中惟一最高点

3) 若$\forall x (x \in B \wedge x \leq y \to x = y\}$为真, 则称y为B的极小元 minimal。 /*没有谁比y小, $\exists u$与y不可比

4) 若$\forall x (x \in B \wedge y \leq x \to x = y\}$为真, 则称y为B的极大元 maximal。 /*没有谁比y大, $\exists u$与y不可比 ■

- 最大(小)元与极大(小)元都是就**POSET**的某子集而言。
- 最小(大)元是**B**中最小(大)的元素，它与**B**中其他元素都可比；　而极小(大)元不一定与**B**中元素都可比，
  只要没有比它小(大)的元素, 它就是极小(大)元。
- 不同的极小(大)元是不可比的。
- **B**的最大(小)元一定是**B**的极大(小)元。/*global→local
- 有穷偏序集，一定存在极大元和极小元，且不是唯一的
  存在有穷链：$a < a_1 < a_2 < \ldots < a_k$ 。
- 在(A, ≤)中, 不一定存在着最小(大)元。
- 但若存在最小(大)元, 一定是惟一的。
- 若**B**中只有一个极小(大)元, 则它一定是**B**的最小(大)元.

定理 设 $<A, \preceq>$是偏序集, $B \subseteq A$,

若B有最大 (最小) 元, 则必是唯一的。

证 假定a和b都是B的最大元, 则 $a \preceq b$ 和 $b \preceq a$,

由偏序的反对称性, 得 $a = b$。

同理可证 B的最小元必唯一。 ∎

例 若$A = \{2, 3, 4, 6, 8\}$, 偏序关系是整除关系, (图中极高的) 6和8是A的极大元, (极低的) 2和3是A的极小元。

- 因为对整除关系来说, A中所有元素的(最小)公倍数和(最大)公约数均不属于A, 故无最大元和最小元。

定义 4.26 设<A, $\leq$>为POSET, B $\subseteq$ A, y $\in$ A。

1) 若$\forall$x (x $\in$ B $\rightarrow$ x$\leq$y}成立, 则称y为B的上界。

2) 若$\forall$x (x $\in$ B $\rightarrow$ y$\leq$x}成立, 则称y为B的下界。

3) 令C = {y| y是B的上界}, 则称C的最小元为B的最小上界或上确界(least upper bound, lub or supremum)。

4) 令C = {y| y是B的下界}, 则称C的最大元为B的最大下界或下确界(great lower bound, glb or infimum)。 ■

- 上(下)界、上(下)确界都是A中的元素, but may $\notin$ B。
- B的上界和下界不一定存在,

  存在时, 上确界和下确界也不一定存在。

- 上(下)确界未必存在。

  若存在, 上(下)确界是惟一的。

- 对于同一集合B而言, 最小(大)元一定是下(上)界、下(上)确界,

  但下(上)界却未必是最小(大)元, may $\notin$ **B**。