厦门大学《概率统计 A》期中试卷

__________学院__________系__________年级__________专业

主考教师：____________试卷类型：(A 卷)

一、(10 分）学生甲在毕业时向两个相互无关的用人单位递交了求职信。根据经验，他被第一个单位录用的概率为 0.4，被第二个单位录用的概率为 0.5。现知道他至少被某个单位录用了，计算他也被另一个单位录用的概率。

解：用 A_1，A_2 分别表示该学生被第一、二个单位录用，由题意，A_1，A_2独立，且$P(A_1)=0.4$，$P(A_2)=0.5$。用 B 表示该学生至少被一个单位录用，则 $B=A_1\cup A_2$；用C 表示该学生同时被两个单位录用，则$C=A_1\cap A_2$ 。故题目所求概率为

$$P(C|B)=\frac{P(A_1A_2)}{P(A_1\cup A_2)}=\frac{P(A_1)P(A_2)}{P(A_1)+P(A_2)-P(A_1)P(A_2)}=\frac{0.4*0.5}{0.4+0.5-0.4*0.5}=\frac{2}{7}。$$

二、(10 分)甲乙丙三人独立破译密码，已知各人能破译出密码的概率为$\frac{1}{5}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{4}$，问三人中至少有一人能将密码破译的概率。

解：用 A、B、C 分别表示三人能格子破译出密码，由题意知，A、B、C 相互独立，且

$$P(A)=\frac{1}{5},\ P(B)=\frac{1}{3},\ P(C)=\frac{1}{4}$$

所求概率为$P(A\cup B\cup C)$

(解 1)$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$

$$=P(A)+P(B)+P(C)-P(A)P(B)-P(A)P(C)-P(B)P(C)+P(A)P(B)P(C)$$
$$=\frac{1}{5}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}*\frac{1}{3}-\frac{1}{5}*\frac{1}{4}-\frac{1}{4}*\frac{1}{3}+\frac{1}{5}*\frac{1}{4}*\frac{1}{3}=0.6$$

(解 2) $P(A\cup B\cup C)=1-P(\bar{A}\,\bar{B}\,\bar{C})=1-P(\bar{A})P(\bar{B})P(\bar{C})=1-\frac{4}{5}*\frac{3}{4}*\frac{2}{3}=0.6$

三、(10 分)在一张打上方格的纸上投一枚直径为 1 的硬币，方格要多小时才能使得硬币与线不相交的概率小于 1%？

解：考虑硬币圆心，当它落入与方格边线距离小于 0.5 的范围内，硬币就会与线相交。假设方格边长为L，则

$$\mathrm{P}\{硬币与线不相交\} = \frac{(1-\mathrm{L})^2}{\mathrm{L}^2} \le 0.01$$

所以，$\mathrm{L} \le \frac{10}{9}$。

四、(10 分) 假设每条蚕的产卵数目服从柏松分布，参数为$\boldsymbol{\lambda}$，而每个卵变成虫的概率为$\mathbf{p}$，各个卵是否成虫彼此独立，求每条蚕能够生产出$\mathbf{k}$条小蚕的概率。

解：用随机变量X 表示每条蚕的产卵数目，用随机变量Y 表示每条蚕最终能够生产出小蚕的数目。

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\mathrm{Y}=\mathrm{k}) &= \sum_{\mathrm{s}=\mathrm{k}}^{\infty} \mathrm{P}(\,\mathrm{Y}=\mathrm{k} \mid \mathrm{X}=\mathrm{s})\,\mathrm{P}(\,\mathrm{X}=\mathrm{s}\,) = \sum_{\mathrm{s}=\mathrm{k}}^{\infty} \mathrm{C}_{\mathrm{s}}^{\mathrm{k}} \mathrm{p}^{\mathrm{k}}(1-\mathrm{p})^{\mathrm{s}-\mathrm{k}} \frac{\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{s}}}{\mathrm{s}!} \mathrm{e}^{-\boldsymbol{\lambda}} \\ &= \sum_{\mathrm{s}=\mathrm{k}}^{\infty} \frac{\mathrm{s}!}{\mathrm{k}!\,(\mathrm{s}-\mathrm{k})!} \mathrm{p}^{\mathrm{k}}(1-\mathrm{p})^{\mathrm{s}-\mathrm{k}} \frac{\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{s}}}{\mathrm{s}!} \mathrm{e}^{-\boldsymbol{\lambda}} = \sum_{\mathrm{s}=\mathrm{k}}^{\infty} \frac{\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{s}}}{\mathrm{k}!\,(\mathrm{s}-\mathrm{k})!} \mathrm{p}^{\mathrm{k}}(1-\mathrm{p})^{\mathrm{s}-\mathrm{k}} \mathrm{e}^{-\boldsymbol{\lambda}}\end{aligned}$$

令$\mathrm{t}=\mathrm{s}-\mathrm{k}$, 则

$$\mathrm{P}(\mathrm{Y}=\mathrm{k}) = \sum_{\mathrm{t}=0}^{\infty} \frac{\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{t}}(1-\mathrm{p})^{\mathrm{t}}}{\mathrm{t}!} \frac{(\boldsymbol{\lambda}\mathrm{p})^{\mathrm{k}} \mathrm{e}^{-\boldsymbol{\lambda}}}{\mathrm{k}!} = \frac{(\boldsymbol{\lambda}\mathrm{p})^{\mathrm{k}} \mathrm{e}^{-\boldsymbol{\lambda}}}{\mathrm{k}!} \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{1}-\boldsymbol{p})} = \frac{(\boldsymbol{\lambda}\mathrm{p})^{\mathrm{k}}}{\mathrm{k}!} \boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{\lambda p}}$$

五、(15 分) 已知连续型随机变量$\boldsymbol{X}$的密度函数为

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \boldsymbol{c\,x}, & 0 \le x \le 1 \\ \mathbf{0}, & \text{其他} \end{cases}$$

(1) 求常数$\boldsymbol{c}$；(2) 求常数 $\boldsymbol{a}$，使得$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{X} > a) = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{X} < a)$；(3) 计算$\boldsymbol{X}$ 的分布函数$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$。

解：(1) 由密度函数的性质，$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{f}(\mathrm{x})\mathrm{dx} = 1$，得

$$\int_0^1 \mathrm{c\,x\,dx} = \frac{\mathrm{c}}{2} = 1$$

故$\mathrm{c} = 2$。

(2) 由于$\mathrm{P}\{\mathrm{X} > a\} + \mathrm{P}\{\mathrm{X} = a\} + \mathrm{P}\{\mathrm{X} < a\} = 1$，$\mathrm{P}\{\mathrm{X} = a\} = 0$，所以 $\mathrm{P}\{\mathrm{X} > a\} = \mathrm{P}\{\mathrm{X} < a\} = 1/2$，即

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} 2x\,dx = a^2 = \frac{1}{2},$$

故$a = 1/\sqrt{2}$。

(3)根据分布函数的定义$F(x) = P\{X \le x\}$，得

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x^2 & 0 \le x < 1 \\ 1 & x \ge 1 \end{cases}$$

六、(10 分）设顾客到某银行窗口等待服务的时间 X 服从指数分布，其密度函数为

$$\boldsymbol{f(x)} = \begin{cases} \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}}\,\mathbf{e}^{-\mathbf{x}/\mathbf{5}}, & x > 0 \\ \mathbf{0}, & x \le 0 \end{cases}$$

某顾客在窗口等待服务，如超过 10 分钟则离开。假设他一个月到银行 5 次，以 Y 表示一个月内他未等到服务而离开窗口的次数，写出 Y 的概率分布，并计算 Y 的数学期望。

解：$\boldsymbol{Y}$的可能取值为 0, 1, 2, 3, 4, 5，服从参数为$(5, p)$的二项分布，而

$$p = P(X > 10) = \int_{10}^{\infty} \frac{1}{5}\,e^{-x/5}dx = e^{-2}$$

所以，Y 的概率分布为

$$P(Y = k) = C_5^k p^k (1-p)^{5-k} = C_5^k e^{-2k}(1-e^{-2})^{5-k},\quad k = 0，1，2 \dots 5$$

Y的数学期望为$EY = 5p = 5e^{-2}$。

七、(10 分)设随机变量 X 的概率密度为 $\mathbf{p(x)} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\mathbf{e}^{-|\mathbf{x}|}$，求 $\mathbf{E\{min(|X|, 1)\}}$。

解：根据数学期望的定义，

$$E\{\min(|X|, 1)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \min(|X|, 1)\ p(x)dx = \int_{|x|<1} |x|p(x)dx + \int_{|x|\ge 1} p(x)dx$$

$$= \int_{-1}^{1} |x|\frac{1}{2}e^{-|x|}dx + \int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{2}e^{-|x|}dx + \int_{1}^{+\infty} \frac{1}{2}e^{-|x|}dx$$

$$= \int_{0}^{1} xe^{-x}dx + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{-1} e^{x}dx + \frac{1}{2}\int_{1}^{+\infty} e^{-x}dx = 1 - e^{-1}$$

八、(10 分)假设随机变量 X 服从参数为 $(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\sigma^2})$ 的正态分布，计算 $\mathbf{Y}=\mathbf{X^{-1}}$ 的密度函数。

解： 记 X 的分布函数为 $F_X(x)$，Y 的分布函数为 $F_Y(y)$。

当 $y<0$ 时，

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(X^{-1}\le y)=P(X^{-1}\le y, X>0)+P(X^{-1}\le y, X<0)$$

$$=0+P\left(\frac{1}{y}<X<0\right)=F_X(0)-F_X\left(\frac{1}{y}\right)$$

当 $y=0$ 时，

$$F_Y(0)=P(Y\le 0)=P(X^{-1}\le 0)=P(X<0)=F_X(0)$$

当 $y>0$ 时，

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(X^{-1}\le y)=P(X^{-1}<0)+P(0\le X^{-1}\le y)$$

$$=P(X<0)+P\left(X>\frac{1}{y}\right)=F_X(0)+1-F_X\left(\frac{1}{y}\right)$$

所以

$$F_Y(y)=\begin{cases} F_X(0)-F_X\left(\frac{1}{y}\right), & y<0 \\ F_X(0), & y=0 \\ F_X(0)+1-F_X\left(\frac{1}{y}\right), & y>0 \end{cases}$$

Y 的密度函数为

$$f_Y(y)=F_Y'(y)=\frac{1}{y^2}\, f_X\left(\frac{1}{y}\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma y^2} * \exp\left\{-\frac{(1-\mu y)^2}{2\sigma^2 y^2}\right\}$$

九、(15 分)假设 $(\mathbf{X},\mathbf{Y})$ 的联合分布是由曲线 $\mathbf{y}=\mathbf{x^2/2}$ 和 $\mathbf{y}=\mathbf{x}$ 所围的有限区域内的均匀分布。(1) 求 $(\mathbf{X},\mathbf{Y})$ 的联合密度，(2) 分别计算 $\mathbf{X}$ 和 $\mathbf{Y}$ 的边缘密度。

解：(1) 曲线 $y=x^2/2$ 和 $y=x$ 交点为（0,0)，（2,2)，所围成的区域记为

$$D=\left\{(x,y):\ \frac{x^2}{2}<y<x,\quad 0<x<2\right\}$$

则区域 D 的面积为

$$S(D)=\int_0^2\int_{\frac{x^2}{2}}^{x}dy\ dx=\int_0^2\left(x-\frac{x^2}{2}\right)dx=\frac{2}{3}$$

所以，(X,Y)的联合密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}1.5, & \frac{x^2}{2}<y<x,\quad 0<x<2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

(2) 根据边缘分布的计算公式，可以得到 X 的边缘密度为

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_{\frac{x^2}{2}}^{x}\frac{3}{2}\ dy, & 0<x<2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\frac{3}{2}\left(x-\frac{x^2}{2}\right), & 0<x<2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

同理，Y 的边缘密度为

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_{y}^{\sqrt{2y}}\frac{3}{2}\ dx, & 0<y<2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\frac{3}{2}\left(\sqrt{2y}-y\right), & 0<y<2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$