2017-2018 学年第一学期《微积分 I-1》期中试卷解答

一、计算下列各题（每小题 5 分，共 30 分）：

1．求 $\lim\limits_{x\to 0}(1+2\tan^2 x)^{\frac{1}{x\sin x}}$.

解一：$\lim\limits_{x\to 0}(1+2\tan^2 x)^{\frac{1}{x\sin x}}=\lim\limits_{x\to 0}[(1+2\tan^2 x)^{\frac{1}{2\tan^2 x}}]^{\frac{2\tan^2 x}{x\sin x}}$，

因为 $\lim\limits_{x\to 0}(1+2\tan^2 x)^{\frac{1}{2\tan^2 x}}=\mathrm{e}$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\tan^2 x}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^2}{x^2}=2$，故 $\lim\limits_{x\to 0}(1+2\tan^2 x)^{\frac{1}{x\sin x}}=\mathrm{e}^2$.

解二：$\lim\limits_{x\to 0}(1+2\tan^2 x)^{\frac{1}{x\sin x}}=\lim\limits_{x\to 0}\mathrm{e}^{\frac{\ln(1+2\tan^2 x)}{x\sin x}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+2\tan^2 x)}{x\sin x}}$，

因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2\tan^2 x)}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\tan^2 x}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^2}{x^2}=2$，则 $\lim\limits_{x\to 0}(1+2\tan^2 x)^{\frac{1}{x\sin x}}=\mathrm{e}^2$.

2．求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{2n^3+1}}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{2n^3+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt[3]{2n^3+n}}\right)$.

解：因为 $\dfrac{n}{\sqrt[3]{2n^3+n}}\le\dfrac{1}{\sqrt[3]{2n^3+1}}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{2n^3+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt[3]{2n^3+n}}\le\dfrac{n}{\sqrt[3]{2n^3+1}}$，且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[3]{2n^3+n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{2+\frac{1}{n^2}}}=\frac{1}{\sqrt[3]{2}},\quad \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[3]{2n^3+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{2+\frac{1}{n^3}}}=\frac{1}{\sqrt[3]{2}},$$

由夹逼极限准则，得 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{2n^3+1}}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{2n^3+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt[3]{2n^3+n}}\right)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

3．写出函数 $f(x)=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{x+\mathrm{e}^{tx}}{1+x\mathrm{e}^{tx}}$ 的表达式.

解：当 $x<0$ 时，$f(x)=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{x+\mathrm{e}^{tx}}{1+x\mathrm{e}^{tx}}=\dfrac{x+0}{1+0}=x$，当 $x=0$ 时，$f(x)=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{1}{1+0}=1$；

当 $x>0$ 时，$f(x)=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{x\mathrm{e}^{-tx}+1}{\mathrm{e}^{-tx}+x}=\dfrac{1}{0+x}=\dfrac{1}{x}$.

故 $f(x)=\begin{cases}x, & x<0\\ 1, & x=0\\ \dfrac{1}{x}, & x>0\end{cases}$.

4. 求函数 $y=\ln(\mathrm{e}^x+\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}})$ 的导数 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解：$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{\mathrm{e}^x+\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}}}(\mathrm{e}^x+\frac{2\mathrm{e}^{2x}}{2\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}}})=\frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}}}$.

5. 求函数 $y=\sqrt[3]{\frac{(x+1)(x+2)}{(1+x^2)(2+x^2)}}$ 在 $x=0$ 处的导数 $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}$.

解一：$\ln y=\frac{1}{3}[\ln(x+1)+\ln(x+2)-\ln(1+x^2)-\ln(2+x^2)]$，

两边求导，得 $\frac{1}{y}y'=\frac{1}{3}[\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}-\frac{2x}{1+x^2}-\frac{2x}{2+x^2}]$，故

$$y'=\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{(x+1)(x+2)}{(1+x^2)(2+x^2)}}[\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}-\frac{2x}{1+x^2}-\frac{2x}{2+x^2}].$$

故 $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=\frac{1}{3}\times1\times[1+\frac{1}{2}]=\frac{1}{2}$.

解二：$y^3=\frac{(x+1)(x+2)}{(1+x^2)(2+x^2)}$，$(2+3x^2+x^4)y^3=x^2+3x+2$.

两边求导，得

$$(2+3x^2+x^4)\cdot3y^2y'+(6x+4x^3)y^3=2x+3.$$

令 $x=0$，得 $y=1$，于是 $6y'(0)=3$.

故 $y'(0)=\frac{1}{2}$.

6. 求函数 $y=\arctan\frac{1-x^2}{1+x^2}$ 的微分 $\mathrm{d}y$ 和 $\left.\mathrm{d}y\right|_{x=1}$.

解：$\mathrm{d}y=\frac{1}{1+(\frac{1-x^2}{1+x^2})^2}\cdot\frac{-2x(1+x^2)-(1-x^2)\cdot2x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x=\frac{-4x}{(1+x^2)^2+(1-x^2)^2}\mathrm{d}x=-\frac{2x}{1+x^4}\mathrm{d}x$

故 $\left.\mathrm{d}y\right|_{x=1}=-\mathrm{d}x$.

二、计算下列各题（每小题 8 分, 共 48 分）：

1. 试求函数 $f(x)=\frac{x-x^2}{|x|(x^2-1)}$ 的间断点，并说明间断点的类型. 如果是第一类间断点，说明是可去间断点还是跳跃间断点.

解：间断点分别为 $x=0$，$x=1$，$x=-1$.

因为 $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x-x^2}{|x|(x^2-1)}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1-x}{x^2-1}=-1$，$\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{x-x^2}{|x|(x^2-1)}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{x-1}{x^2-1}=1$，

即 $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)\neq\lim\limits_{x\to0^-} f(x)$，故 $x=0$ 为 $f(x)$ 的第一类间断点，且为跳跃间断点.

由于 $\lim\limits_{x\to1} f(x)=-\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{x+1}=-\dfrac{1}{2}$，故 $x=1$ 为 $f(x)$ 的第一类间断点，且为可去间断点.

又 $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{1}{f(x)}=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{-x(x^2-1)}{x-x^2}=0$，即 $\lim\limits_{x\to-1} f(x)=\infty$，故 $x=-1$ 为 $f(x)$ 的第二类间断点.

2. 求曲线 $\begin{cases} x=\dfrac{t}{1+t^2} \\ y=\dfrac{t^2}{1+t^2} \end{cases}$ 在 $t=2$ 所对应点处的切线方程和法线方程.

解：$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{(\dfrac{t^2}{1+t^2})'}{(\dfrac{t}{1+t^2})'}=\dfrac{\dfrac{2t(1+t^2)-t^2\cdot2t}{(1+t^2)^2}}{\dfrac{1+t^2-2t^2}{(1+t^2)^2}}=\dfrac{2t}{1-t^2}$.　$t=2$ 时，$x=\dfrac{2}{5}$，$y=\dfrac{4}{5}$.

切线斜率为 $k=\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=2}=-\dfrac{4}{3}$. 故所求切线方程为 $y-\dfrac{4}{5}=-\dfrac{4}{3}(x-\dfrac{2}{5})$，即 $y=-\dfrac{4}{3}x+\dfrac{4}{3}$.

法线方程为 $y-\dfrac{4}{5}=\dfrac{3}{4}(x-\dfrac{2}{5})$，即 $y=\dfrac{3}{4}x+\dfrac{1}{2}$.

3. 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1+\dfrac{1}{3}x^2-\sqrt[3]{1+x^2}}{\mathrm{e}^{-x^2}-1+x\sin x}$.

解：$\sqrt[3]{1+x^2}=1+\dfrac{1}{3}x^2+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{3}\cdot(-\dfrac{2}{3})x^4+o(x^4)$，即 $1+\dfrac{1}{3}x^2-\sqrt[3]{1+x^2}=\dfrac{1}{9}x^4+o(x^4)$.

$$\mathrm{e}^{-x^2}-1+x\sin x=1-x^2+\frac{1}{2}x^4-1+x(x-\frac{x^3}{6})+o(x^4)=\frac{1}{3}x^4+o(x^4),$$

故 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1+\dfrac{1}{3}x^2-\sqrt[3]{1+x^2}}{\mathrm{e}^{-x^2}-1+x\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\dfrac{1}{9}x^4+o(x^4)}{\dfrac{1}{3}x^4+o(x^4)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\dfrac{1}{9}+\dfrac{o(x^4)}{x^4}}{\dfrac{1}{3}+\dfrac{o(x^4)}{x^4}}=\dfrac{1}{3}$.

4. 求由方程 $y=\tan(x+y)$ 所确定的隐函数 $y=y(x)$ 的导数 $y'(x)$ 和 $y''(x)$.

解：方程 $y=\tan(x+y)$ 两边对 x 求导，得 $y'=\sec^2(x+y)(1+y')$

解得 $y'=-\dfrac{1}{\sin^2(x+y)}$.

$$y''=\frac{2\cos(x+y)}{\sin^3(x+y)}(1+y')=\frac{2\cos(x+y)}{\sin^3(x+y)}[1-\frac{1}{\sin^2(x+y)}]=-\frac{2\cos^3(x+y)}{\sin^5(x+y)}.$$

5. 设 $f(x)=\begin{cases}\varphi(x)\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$，其中 $\varphi(0)=\varphi'(0)=0$，求 $f'(0)$.

解： $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\varphi(x)\cos\frac{1}{x}}{x}$.

因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\varphi(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x-0}=\varphi'(0)=0$，而 $\cos\dfrac{1}{x}$ 为有界函数，则 $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\varphi(x)\cos\frac{1}{x}}{x}=0$.

6. 已知 $y=x^2\cos^2 x+\dfrac{1}{1+x}$，求 $y^{(n)}(0)\ (n\geq 3)$.

解： $y=x^2\cos^2 x+\dfrac{1}{1+x}=\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^2}{2}\cos 2x+\dfrac{1}{1+x}$，故

$$y^{(n)}=\frac{x^2}{2}(\cos 2x)^{(n)}+nx(\cos 2x)^{(n-1)}+\frac{n(n-1)}{2}(\cos 2x)^{(n-2)}+\frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$$

$$=2^{n-1}x^2\cos(2x+\frac{n\pi}{2})+2^{n-1}nx\cos(2x+\frac{n-1}{2}\pi)+2^{n-2}\frac{n(n-1)}{2}\cos(2x+\frac{n-2}{2}\pi)+\frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}.$$

于是， $y^{(n)}(0)=-n(n-1)\cdot 2^{n-3}\cos\dfrac{n}{2}\pi+(-1)^n n!$.

三、设 $-1<x_1<0$， $x_{n+1}=x_n^2+2x_n$， $n=1,2,\cdots$. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求出 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.（本题 10 分）

得　分	
评阅人	

证明一：先证明： $-1<x_n<0$， $n=1,2,\cdots$.

事实上， $n=1$ 时 ，由已知条件，结论成立.

假设 $-1<x_n<0$，则 $x_{n+1}=x_n^2+2x_n=x_n(x_n+2)<0$，

$$x_{n+1}+1=x_n^2+2x_n+1=(x_n+1)^2>0,$$

即 $-1<x_{n+1}<0$，故 $-1<x_n<0$， $n=1,2,\cdots$.

于是， $x_{n+1}-x_n=x_n^2+x_n=x_n(x_n+1)\leq 0$，即数列 $\{x_n\}$ 单调减少且有界，故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，由 $x_{n+1}=x_n^2+2x_n$ 两边求极限，有 $a=a^2+2a$，得 $a=0$ 或 $a=-1$.

因为 $\{x_n\}$ 单调减少，且 $-1<x_1<0$，故 a 是不可能的.

故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=-1$.

证明二：令 $y_n = x_n + 1$，于是，$x_{n+1} + 1 = x_n^2 + 2x_n + 1 = (x_n + 1)^2$，即 $y_{n+1} = y_n^2$.

因此，$y_n = (y_{n-1})^2 = (y_{n-2})^4 = \cdots = (y_1)^{2^{n-1}}$.

因为 $0 < y_1 = x_1 + 1 < 1$，故 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} (y_1)^{2^{n-1}} = 0$.

所以，$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n - 1 = -1$.

四、证明下列各题（每小题 6 分，共 12 分）：

1. 设函数 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 上连续，在 $(1,2)$ 内可导，且 $f(2) = 2f(1)$. 证明：存在 $\xi \in (1,2)$，使得 $\xi f'(\xi) - f(\xi) = 0$.

证明：作辅助函数 $F(x) = \dfrac{f(x)}{x}$，则由 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 上连续，在 $(1,2)$ 内可导，可得 $F(x)$ 在 $[1,2]$ 上连续，在 $(1,2)$ 内可导，且 $F(2) = \dfrac{f(2)}{2} = f(1) = F(1)$，由罗尔定理，存在 $\xi \in (1,2)$，使得

$$F'(\xi) = \frac{\xi f'(\xi) - f(\xi)}{\xi^2} = 0,$$

即 $\xi f'(\xi) - f(\xi) = 0$.

2. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内具有连续的二阶导数. 证明：存在 $\xi \in (a,b)$，使得

$$f(b) - 2f(\frac{a+b}{2}) + f(a) = \frac{(b-a)^2}{4} f''(\xi).$$

证明：由泰勒公式，可得

$$f(b) = f(\frac{a+b}{2}) + f'(\frac{a+b}{2})(b - \frac{a+b}{2}) + \frac{1}{2} f''(\xi_1)(b - \frac{a+b}{2})^2,$$

$$f(a) = f(\frac{a+b}{2}) + f'(\frac{a+b}{2})(a - \frac{a+b}{2}) + \frac{1}{2} f''(\xi_2)(a - \frac{a+b}{2})^2.$$

两式相加，得

$$f(a) + f(b) = 2f(\frac{a+b}{2}) + \frac{1}{2} f''(\xi_1)(b - \frac{a+b}{2})^2 + \frac{1}{2} f''(\xi_2)(a - \frac{a+b}{2})^2$$

其中 $a < \xi_2 < \dfrac{a+b}{2} < \xi_1 < b$.

于是，$f(a) + f(b) - 2f(\dfrac{a+b}{2}) = \dfrac{(b-a)^2}{8}[f''(\xi_1) + f''(\xi_2)]$.

因为 $f''(x)$ 在 (a,b) 内连续，由介值定理，存在 $\xi \in [\xi_1, \xi_2] \subset (a,b)$，使得 $f''(\xi) = \dfrac{1}{2}[f''(\xi_1) + f''(\xi_2)]$.

故 $f(a) + f(b) - 2f(\dfrac{a+b}{2}) = \dfrac{(b-a)^2}{4} f''(\xi)$.

证明二：作辅助函数$F(x)=f(x+\frac{b-a}{2})-f(x)$，

$$f(a)+f(b)-2f(\frac{a+b}{2})=f(b)-f(\frac{a+b}{2})-[f(\frac{a+b}{2})-f(a)]$$

$$=F(\frac{a+b}{2})-F(a)$$

由拉格朗日中值定理，存在$\eta\in(a,\frac{a+b}{2})$，使得

$$F(\frac{a+b}{2})-F(a)=\frac{b-a}{2}F'(\eta)=\frac{b-a}{2}[f'(\eta+\frac{b-a}{2})-f'(\eta)]$$

因为$f(x)$的二阶导数存在，由拉格朗日中值定理，存在$\xi\in(\eta,\eta+\frac{b-a}{2})\subset(a,b)$，使得

$$f'(\eta+\frac{b-a}{2})-f'(\eta)=\frac{b-a}{2}f''(\xi)$$

于是，$f(a)+f(b)-2f(\frac{a+b}{2})=\frac{(b-a)^2}{4}f''(\xi).$

注：第一种证明也可以利用导数的介值定理，就不需要二阶导数连续的条件；第二种证明方法可以不要求二阶导数连续，只要存在即可.