厦门大学《概率统计 I》试卷

________学院________系________年级________专业

主考教师：________试卷类型：（A 卷）

以下解题过程可能需要用到以下数据：

$F(1.38)=0.9162$，$F(1.65)=0.9500$，$F(1.96)=0.9750$，$F(2.326)=0.99$，

$c^2_{0.05}(2)=5.992$，$c^2_{0.05}(3)=7.815$，$c^2_{0.025}(2)=7.378$，$c^2_{0.025}(3)=9.348$，$c^2_{0.025}(8)=17.534$，

$c^2_{0.025}(9)=19.022$，$c^2_{0.05}(8)=15.507$，$c^2_{0.05}(9)=16.919$，$t_{0.025}(10)=2.2281$，$t_{0.05}(10)=1.8125$，

$t_{0.025}(11)=2.2010$，$t_{0.05}(11)=1.7959$，$t_{0.025}(12)=2.1788$，$t_{0.05}(12)=1.7823$，$F_{0.05}(2,9)=4.26$，

$F_{0.025}(2,9)=5.71$，$F_{0.05}(3,9)=3.86$，$F_{0.025}(3,9)=5.08$

分数	阅卷人

1、（11分）设随机变量 $X \sim p(2)$，随机变量 $Y \sim U(0,6)$，而且它们的相关系数 $r_{XY}=\frac{1}{\sqrt{6}}$，记 $Z=3X-2Y$，试求 $E(Z)$ 和 $D(Z)$.

解：

$E(X)=2$，$D(X)=2$

$E(Y)=3$，$D(Y)=3$

$cov(X,Y)=\rho_{XY}\cdot\sqrt{D(X)\cdot D(Y)}=1$

$D(Z)=D(3X)+D(-2Y)+2cov(3X,-2Y)$

$=9D(X)+4D(Y)-12cov(X,Y)$

$=18$

$E(Z)=3E(X)-2E(Y)=0$

分数	阅卷人

2、 (12 分) 检验员逐个检查某种产品,每次花 10 秒检查一个，但也可能有的产品需要重复检查一次再用去 10 秒。假设每个产品需要重复检查的概率为 0.5,求在 8 小时内检查员检查的产品多于 1900 个的概率.

解：第 k 件产品的检查时间为：

$$X_k = \begin{cases} 10, & 无重复检查 \\ 20, & 重复检查. \end{cases}, \quad k=1,2,\cdots$$

故 $P\{X_k=10\}=0.5$, $P\{X_k=20\}=0.5$.

$E(X_k)=15$, $D(X_k)=25$.

$X_1, X_2, \cdots X_n \cdots$ 之间独立同分布. 由中心极限定理：

$$\frac{\sum_{k=1}^{1900} X_k - 1900\times 15}{\sqrt{1900\times 25}} \sim N(0,1).$$

于是所求概率为：

$$P\left\{\sum_{k=1}^{1900} X_k \le 8\times 3600\right\}$$

$$\approx P\left\{\frac{\sum_{k=1}^{1900} X_k - 1900\times 15}{\sqrt{1900\times 25}} \le 1.38\right\}$$

$$= \Phi(1.38) = 0.9162.$$

分数	阅卷人

3、（12 分） 设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，而 $(X_1, X_2, \ldots, X_9)$ 是来自总体 X 的简单随机样本。令

$$Y_1 = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_6}{6}, \qquad Y_2 = \frac{X_7 + X_8 + X_9}{3}$$

$$S^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=7}^{9}(X_i - Y_2)^2 \;, \qquad Z = \frac{Y_1 - Y_2}{S}$$

能否选取常数 c 使得 cZ 服从 t 分布？自由度如何？为什么？

解：$Y_1 \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{6})$

$Y_2 \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{3})$

Y_1，Y_2，S^2 之间相互独立，于是

$Y_1 - Y_2 \sim N(0, \frac{\sigma^2}{2})$，

且 $Y_1 - Y_2$ 与 S^2 相互独立。

$\frac{2S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(2)$

于是 $\sqrt{2}\,\frac{Y_1 - Y_2}{\sigma} \sim N(0,1)$

$$\frac{\sqrt{2}\,\frac{Y_1 - Y_2}{\sigma}}{\sqrt{\frac{2S^2}{\sigma^2} / 2}} \sim t(2).$$

即 $\sqrt{2}Z \sim t(2)$ 故 $c = \sqrt{2}$，自由度为2.

分数	阅卷人

4、 (12 分) 已知总体 X 的概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x}{\theta^{2}}, & 0<x<\theta\\ 0, & 其它\end{cases},$$

其中 $\theta(\theta>0)$ 为未知参数。设 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本。

（1）求 θ 最大似然估计量；　　（2）求 θ 矩估计量。

解：(1) 设 $x_1, x_2, \ldots x_n$ 为样本观测值。

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i)=\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{2x_i}{\theta^2}\right)=\frac{2^n\prod_{i=1}^{n}(x_i)}{\theta^{2n}}.$$

其中 $0<x_i<\theta$，$\forall i=1,2,\ldots n$.

由于 $L(\theta)$ 为 θ 的单调递减函数，于是

θ 的最大似然估计值为：

$$\hat{\theta}=\max_{1\le i\le n}\{x_i\}$$

θ 的最大似然估计量为：

$$\hat{\theta}=\max_{1\le i\le n}(X_i).$$

(2) $E(X)=\int_0^{\theta} x\cdot\frac{2x}{\theta^2}dx=\frac{2}{3}\theta$，$\theta=\frac{3}{2}E(X)$.

所以 θ 的矩估计量为：

$$\hat{\theta}=\frac{3}{2}\bar{X}，其中\ \bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i.$$

分数	阅卷人

5、（10 分）为比较 A、B 两种型号灯泡的寿命，随机抽取 A 型灯泡 5 只,测得平均寿命 $\overline{x}=1000$（小时），标准差 $s_A=28$（小时）；随机抽取 B 型灯泡 7 只，测得平均寿命 $\overline{y}=980$（小时），标准差 $s_B=32$（小时）。设总体都是正态的，并且由生产过程知它们的方差相等，求两总体均值差 $\mu_A-\mu_B$ 的 95%置信区间，

解：$S_w^2=\dfrac{4S_A^2+6S_B^2}{10}=928$

$\mu_A-\mu_B$ 的95%置信区间为：

$\left(\bar{x}-\bar{y}\pm t_{0.025}(10)\cdot S_w\cdot\sqrt{\frac{1}{5}+\frac{1}{7}}\right)$

$=(20\pm 39.74)$

$=(-19.74,\ 59.74)$

分数	阅卷人

6、(10 分) 某种导线，要求其电阻的标准差不得超过 0.005W. 在生产的一批导线中随机抽 9 根，测得样本标准差 $s = 0.007$W. 设总体服从正态分布，能认为这批导线的标准差显著偏大吗(a = 0.05)？

解：设总体标准差为 σ，

检验：$H_0: \sigma \le 0.005$，$H_1: \sigma > 0.005$.

拒绝域为：

$$\frac{8S^2}{0.005^2} > \chi^2_{0.05}(8).$$

计算：

$$\frac{8S^2}{0.005^2} = \frac{8 \times 0.007^2}{0.005^2} = 15.68$$

$$> 15.507 = \chi^2_{0.05}(8)$$

故认为这批导线标准差显著偏大。

分数	阅卷人

7、(12 分) 在钢线碳含量对于电阻的效应的研究中，得到如下表所示一批数据：

碳含量 x，（单位：%）	0.1	0.3	0.40	0.55	0.70	0.80	0.95
$20^{o}C$ 时电阻 y，（单位：μΩ）	15	18	19	21	22.6	23.6	26

求 y 对 x 的线性回归方程。

解：$\bar{x}=0.5429$，$\bar{y}=20.7429$

$$S_{xx}=\sum_{i=1}^{7}x_i^2-7\bar{x}^2=0.5318$$

$$S_{xy}=\sum_{i=1}^{7}x_iy_i-7\bar{x}\bar{y}=6.6208$$

$$\hat{b}=\frac{S_{xy}}{S_{xx}}=12.4497$$

$$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}=13.9840$$

y 对 x 的线性回归方程为：

$$\hat{y}=13.9840+12.4497x$$

分数	阅卷人

8、(11分) 一批由同样原料织成的布，用三种不同的染整工艺处理，然后进行缩水试验，设每种工艺处理四块布样，测得缩水率的结果如下表：

布样号	缩水率		
	A1	A2	A3
1	4.3	6.1	6.5
2	7.8	7.3	8.3
3	3.2	4.2	8.6
4	6.5	4.1	8.2

问：不同的工艺对布的缩水率是否有显著的影响？(a =0.05)

解：$\bar{x}_{\cdot 1} = 5.45$，$\bar{x}_{\cdot 2} = 5.425$

$\bar{x}_{\cdot 3} = 7.9$，$\bar{x} = 6.2583$

方差分析表

方差来源	平方和	自由度	均方和	F比
效应平方和 S_A	16.1767	2	8.0884	3.1737
误差平方和 S_E	22.9375	9	2.5486	
总变差 S_T	39.1142			

$F = 3.1737 < 4.26 = F_{0.05}(2,9)$

没有显著影响.

分数	阅卷人

9、(10分) 按孟德尔的遗传定律，让开粉红花的豌豆随机交配，子代可区分为红花、粉红花和白花三类，其比例为1：2：1.为检验这个理论，特别安排了一个实验：100株豌豆中开红花30株，开粉红花48株，开白花22株，问这些数据与孟德尔遗传定律是否一致？（显著性水平a ＝0.05）

解：设 A_1, A_2, A_3 分别为开红花、粉红花和白花的事件.

检验：H_0：$p(A_1)=\frac{1}{4}$，$p(A_2)=\frac{1}{2}$，$p(A_3)=\frac{1}{4}$.

检验统计量

$$\chi^2=\frac{(30-100\times\frac{1}{4})^2}{100\times\frac{1}{4}}+\frac{(48-100\times\frac{1}{2})^2}{100\times\frac{1}{2}}+\frac{(22-100\times\frac{1}{4})^2}{100\times\frac{1}{4}}$$

$$=1.44.$$

而 $\cancel{\chi_{0.05}}$ $\chi^2_{0.05}(2)=5.992>\chi^2$

故不能拒绝 H_0，即认为数据与孟德尔遗传定律一致。