大学物理学
电子教案

同济大学

第一章

质点运动学

机械运动

一个物体相对于另一个物体的空间位置随时间发生变化；　或一个物体的某一部分相对于其另一部分的位置随时间而发生变化的运动。

力学

研究物体机械运动及其规律的学科。

运动学：

研究物体在空间的位置随时间的变化规律以及运动的轨道问题，而并不涉及物体发生机械运动的变化原因。

动力学：

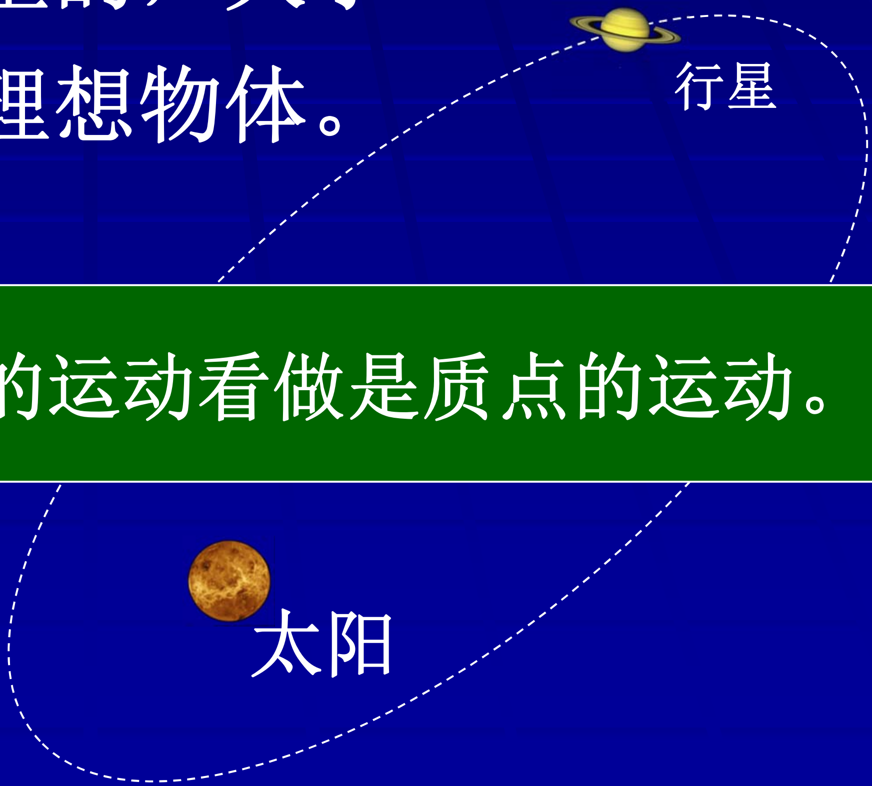
以牛顿运动定律为基础，研究物体运动状态发生变化时所遵循规律的学科。

§1-1 质点 参考系 坐标系

1-1-1 质点

质点：具有一定质量的，大小和形状可以忽略的理想物体。

可以把行星绕太阳的运动看做是质点的运动。



1-1-2　参考系和坐标系

- 物质的运动具有绝对性
- 描述物质运动具有相对性

参考系：

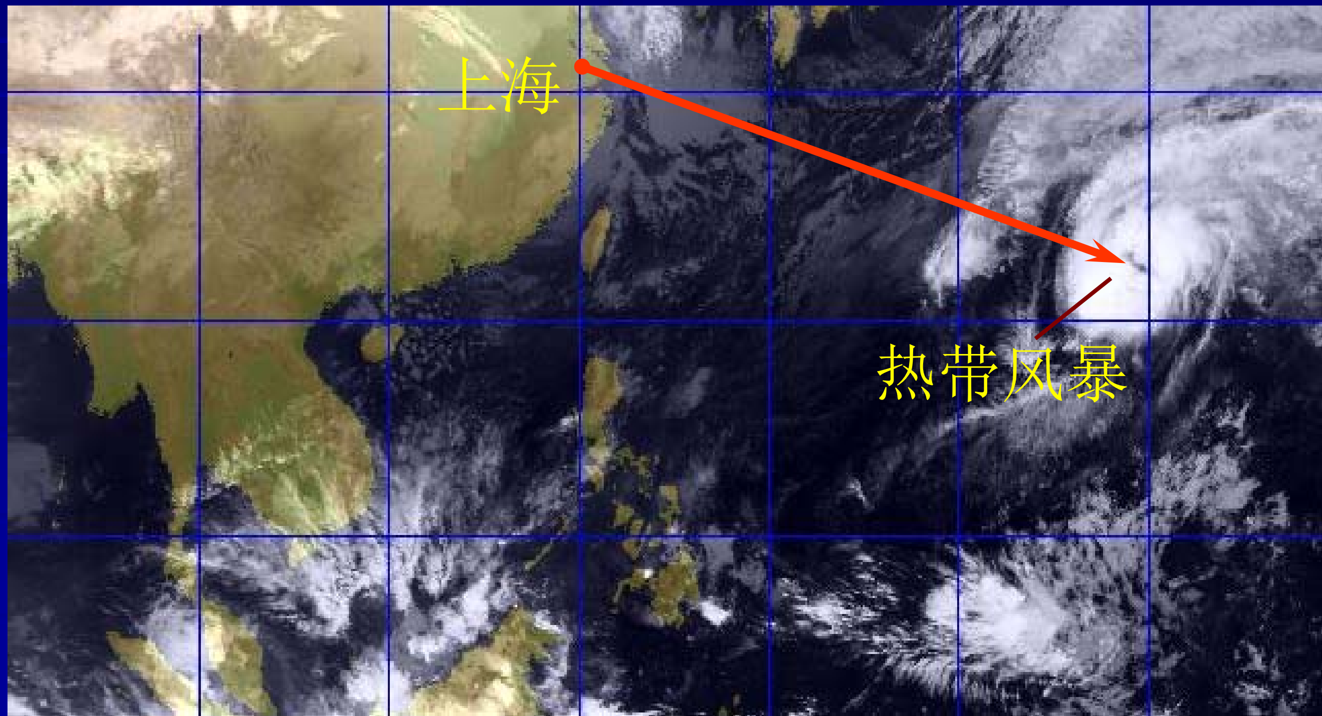
为描述物体的运动而选取的参考物体。

坐标系：

用以标定物体的空间位置而设置的坐标系统。

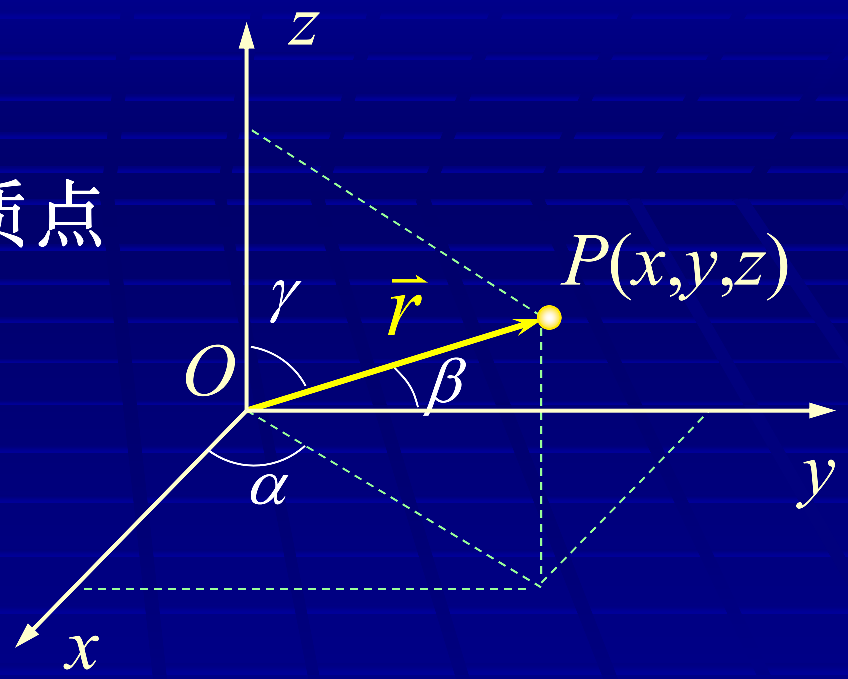
§1-2 描述质点运动的物理量

1-2-1 位置矢量与运动方程



位置矢量 （位矢）

从坐标原点O出发，指向质点所在位置P的一有向线段



位矢用坐标值表示为：

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

位矢的大小为：

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

位矢的方向：

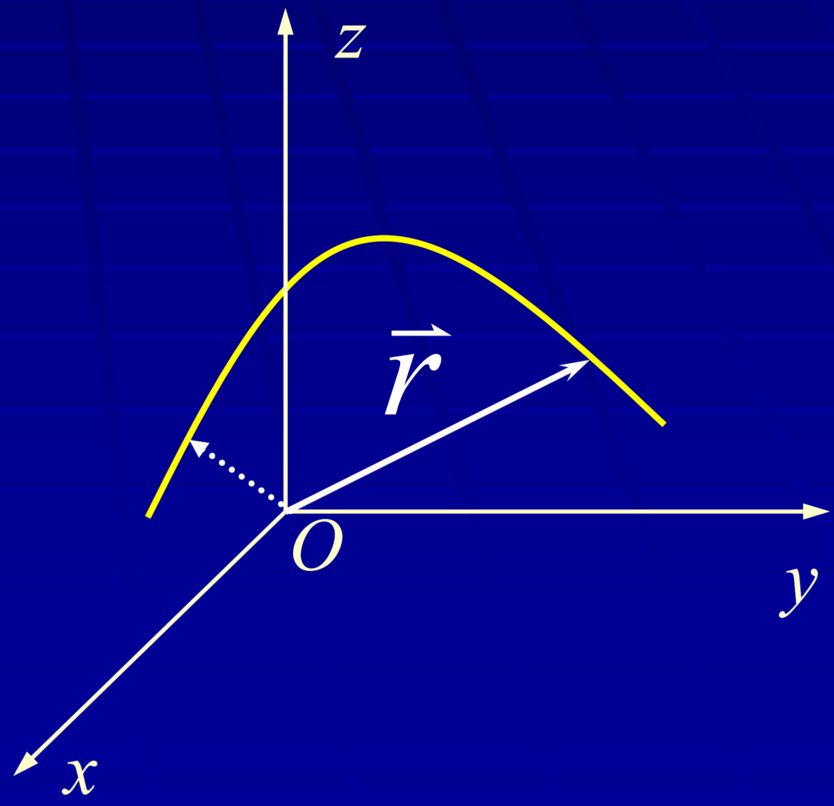
$$\cos\alpha = \frac{x}{r} \quad \cos\beta = \frac{y}{r} \quad \cos\gamma = \frac{z}{r}$$

运动方程： $\vec{r} = \vec{r}(t)$

矢量形式： $\vec{r} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$

参数形式：

$$x = x(t)$$
$$y = y(t)$$
$$z = z(t)$$



轨道方程：

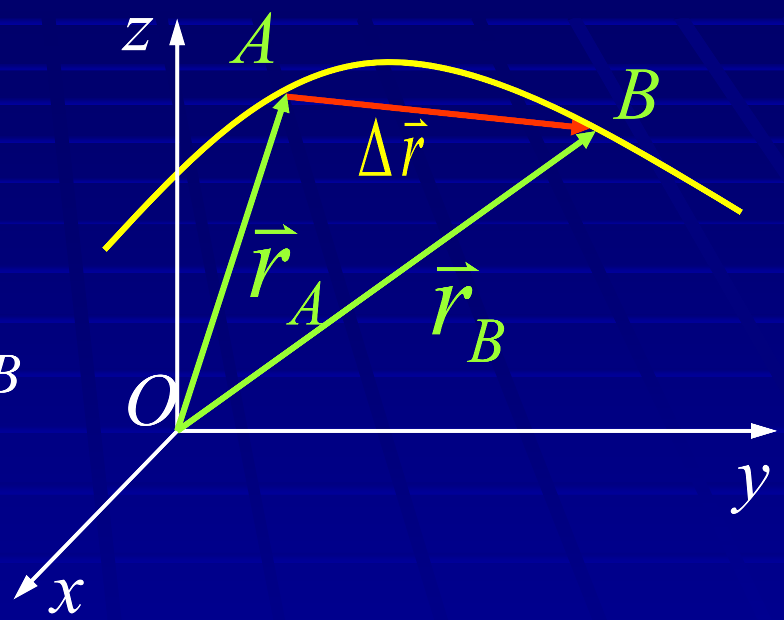
$$F(x, y, z) = 0$$

1-2-2　位移与路程

设质点做曲线运动

t时刻位于A点，位矢 $\vec{r}_A$

$t+\Delta t$时刻位于B点，位矢 $\vec{r}_B$



位移矢量：

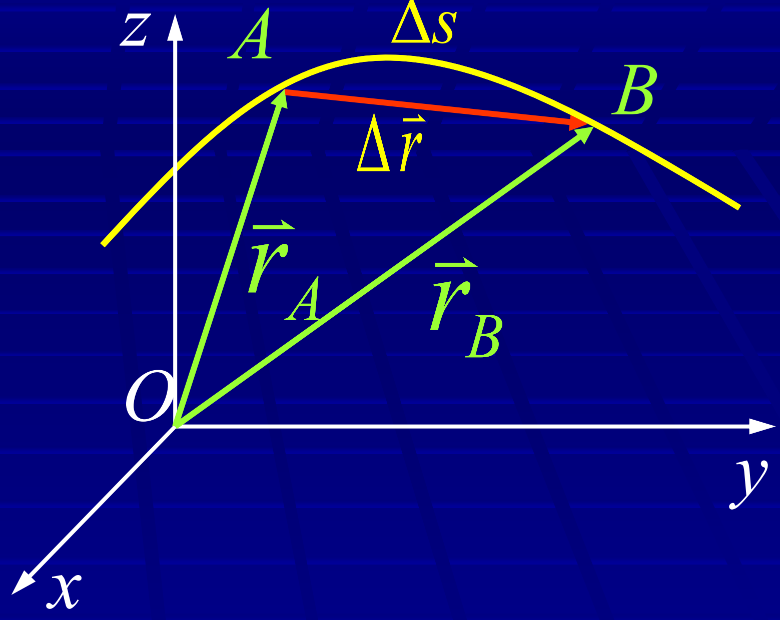
在Δt 时间内，位矢的变化量（即A到B的有向线段），简称位移。

在直角坐标系中

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = \overrightarrow{AB}$$

$$\Delta\vec{r} = \Delta x\vec{i} + \Delta y\vec{j} + \Delta z\vec{k}$$

$$|\Delta\vec{r}| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$$



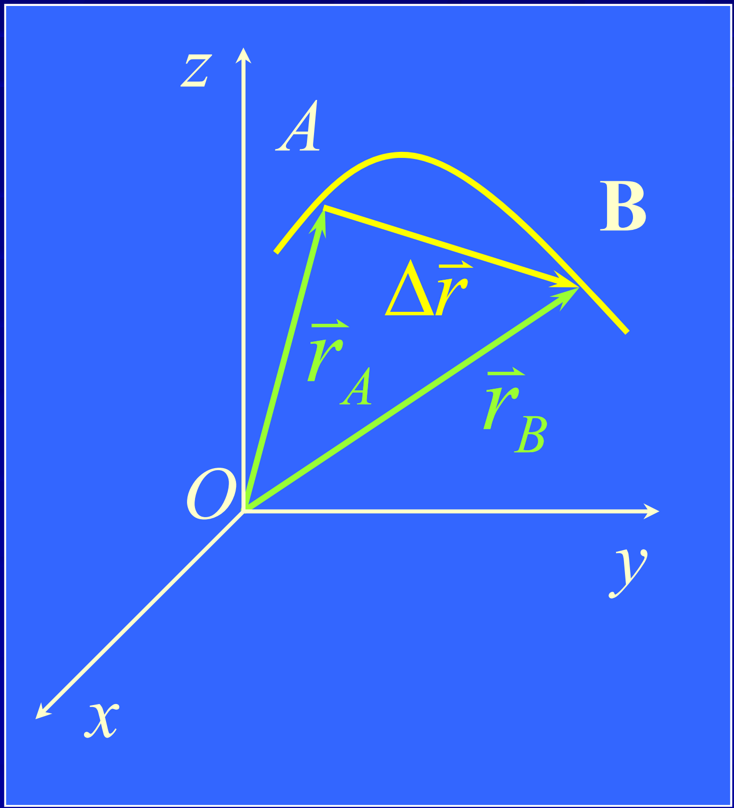
路程： 质点在轨道上所经过的曲线长度**Δs**

$$\Delta s \neq |\Delta\vec{r}| \qquad \lim_{\Delta t\to 0}\Delta s = \lim_{\Delta t\to 0}|\Delta\vec{r}| \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{d}s = |\mathrm{d}\vec{r}|$$

1-2-3 速度

速度是反映质点运动快慢和方向的物理量

速度： 单位时间内质点所发生的位移。



- **平均速度**

设质点做一般曲线运动

t_A时刻位于A点

t_B时刻位于B点

在 Δt 时间内发生位移：

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$$

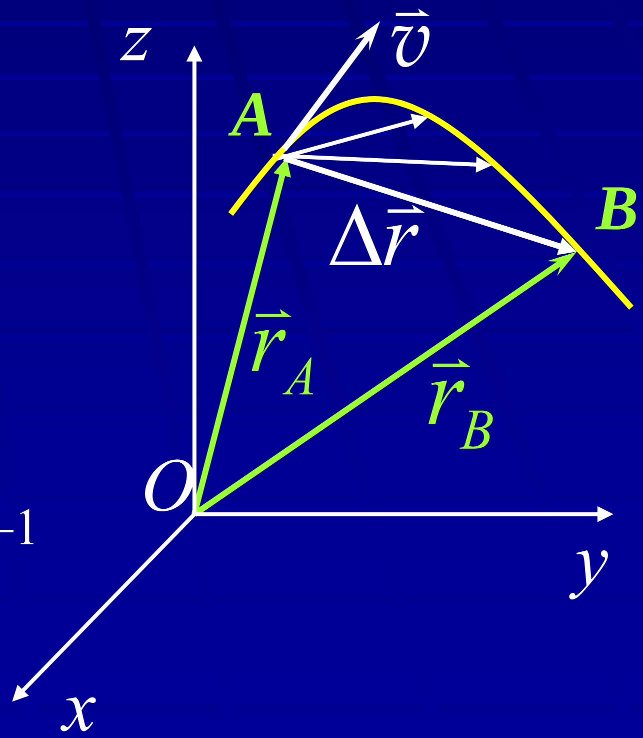
平均速度： $\boxed{\bar{\vec{v}} = \dfrac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}}$ 单位： $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$

平均速度的方向与 Δt 时间内位移的方向一致

- 瞬时速度

质点在某一时刻所具有的速度

$\boxed{\vec{v} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}}$ 单位： $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$



速度的方向为轨道上质点所在处的切线方向。

速度的矢量式：

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}$$

速度的三个坐标分量：

$$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, v_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}, v_z = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$$

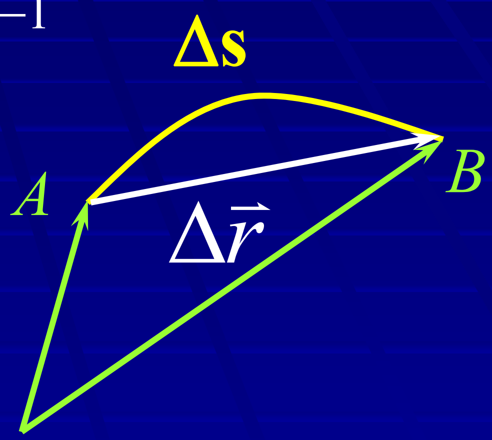
速度的大小：

$$v = \left|\vec{v}\right| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

- **速率**

在Δt时间内，质点所经过路程 Δs 对时间的变化率

平均速率： $\boxed{\bar{v} = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}}$ **单位：** $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$



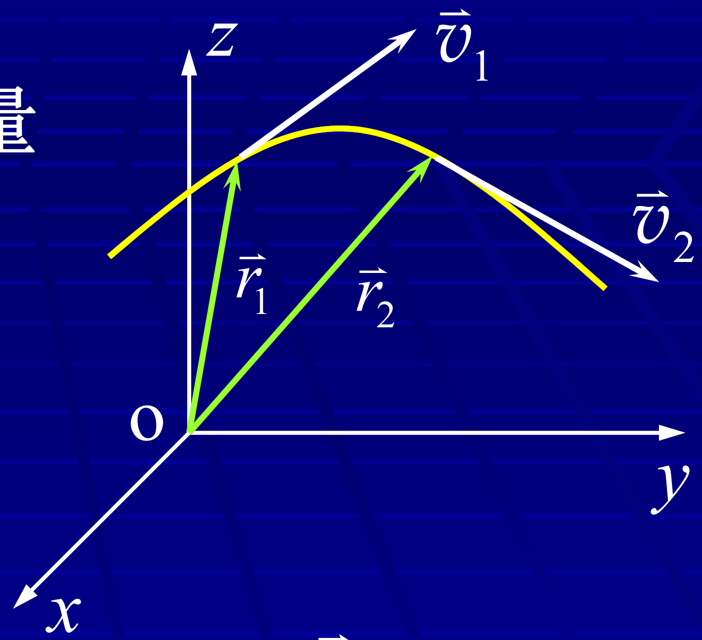
瞬时速率： $\boxed{v = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta s}{\Delta t} = \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}}$

一般情况： $|\Delta \vec{r}| \neq \Delta s$ 因此 $|\bar{\vec{v}}| \neq \bar{v}$

当$\Delta t \to 0$时： $|\Delta \vec{r}| \to |\mathrm{d}\vec{r}| = \mathrm{d}s$ 则 $|\vec{v}| = v$

1-2-4　加速度

加速度是反映速度变化的物理量

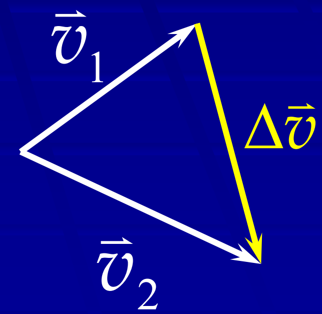


t_1时刻，质点速为 $\vec{v}_1$

t_2时刻，质点速度为 $\vec{v}_2$

Δt 时间内，速度增量为：

$$\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$$



平均加速度： $\boxed{\bar{\vec{a}} = \dfrac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}}$ **单位：** $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$

结论： 平均加速度的方向与速度增量的方向一致。

当$\Delta t \to 0$时，平均加速度的极限即为瞬时加速度。

瞬时加速度： $\vec{a} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = \dfrac{d^2 r}{dt^2}$ **单位：** $m \cdot s^{-1}$

加速度的矢量式： $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2} \qquad a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2 y}{dt^2} \qquad a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2 z}{dt^2}$$

加速度的大小： $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$

加速度的方向：

当Δt趋向零时，速度增量$\Delta \vec{v}$的极限方向。

运动学的两类问题

运动方程是运动学问题的核心

1. 已知运动方程，求质点任意时刻的位置、速度以及加速度

$$\vec{r}=\vec{r}(t) \qquad \vec{v}=\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} \qquad \vec{a}=\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2}$$

2. 已知运动质点的速度函数（或加速度函数）以及初始条件求质点的运动方程

$$\mathrm{d}\vec{v}=\vec{a}\mathrm{d}t \quad , \quad \int_{\vec{v}_0}^{\vec{v}}\mathrm{d}\vec{v}=\int_{t_0}^{t}\vec{a}\mathrm{d}t$$

$$\mathrm{d}\vec{r}=\vec{v}\mathrm{d}t \quad , \quad \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}}\mathrm{d}\vec{r}=\int_{t_0}^{t}\vec{v}\mathrm{d}t$$

例1 已知质点的运动方程为 $\vec{r}=2t\vec{i}+\left(19-2t^2\right)\vec{j}$

求：（1）轨道方程；（2）$t=2\mathrm{s}$ 时质点的位置、速度以及加速度；（3）什么时候位矢恰好与速度垂直？

解： (1) $x=2t$ ， $y=19-2t^2$

消去时间参数 $y=19-\dfrac{1}{2}x^2$

（2） $\vec{r}\big|_2=[2\times2\vec{i}+\left(19-2\times2^2\right)\vec{j}]\mathrm{m}=\left(4\vec{i}+11\vec{j}\right)\mathrm{m}$

$$\vec{v}=\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}=2\vec{i}-4t\vec{j} \qquad \vec{v}\big|_2=\left(2\vec{i}-8\vec{j}\right)\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

$$v_2=\sqrt{2^2+\left(-8\right)^2}\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}=8.25\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

$$\alpha = \arctan\frac{-8}{2} = -75°58'$$

（3） $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = 2\vec{i} - 4t\vec{j}$ $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = -4\vec{j}$

$a = 4\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$ 方向沿 *y* 轴的负方向

（4） $\vec{r} \cdot \vec{v} = \left[2t\vec{i} + \left(19 - 2t^2\right)\vec{j}\right] \cdot \left(2\vec{i} - 4t\vec{j}\right)$

$$= 4t - 4t(19 - 2t^2) = 4t(2t^2 - 18)$$

$$= 8t(t+3)(t-3) = 0$$

$t_1 = 0$ ， $t_2 = 3\ \mathrm{s}$ 两矢量垂直

例2 设某一质点以初速度 $\vec{v}_0 = 100\vec{i}\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ 做直线运动，其加速度为 $\vec{a} = -10v\vec{i}\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$。问：质点在停止前运动的路程有多长？

解： $a = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -10v \qquad \dfrac{\mathrm{d}v}{v} = -10\mathrm{d}t$

两边积分： $\displaystyle\int_{v_0}^{v} \frac{\mathrm{d}v}{v} = -10\int_0^t \mathrm{d}t \quad , \quad \ln\frac{v}{v_0} = -10t$

$$v = v_0 \mathrm{e}^{-10t}$$

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \quad , \quad \mathrm{d}x = v\mathrm{d}t = v_0\mathrm{e}^{-10t}\mathrm{d}t$$

两边积分：$$\int_0^x \mathrm{d}x = v_0 \int_0^t \mathrm{e}^{-10t} \mathrm{d}t$$

$$x = v_0 \left[-\frac{1}{10} \left(\mathrm{e}^{-10t} - 1 \right) \right]$$

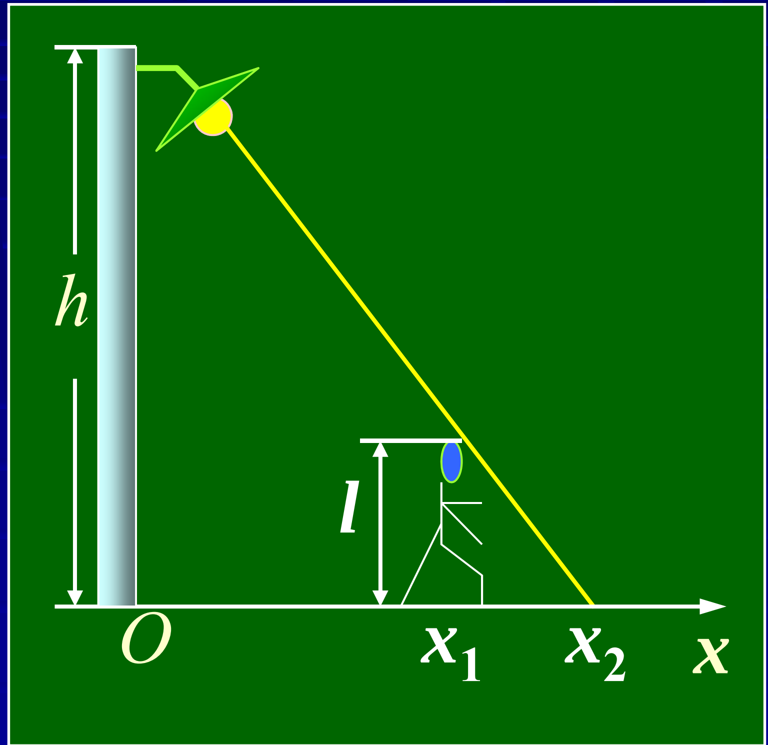
$$x = 10(1 - e^{-10t})$$

$$x_0 = 10(1 - \mathrm{e}^{-10\times 0}) = 10(1-1) = 0$$

$$x_\infty = 10(1 - \mathrm{e}^{-10\infty}) = 10(1-0)\,\mathrm{m} = 10\ \mathrm{m}$$

$$\Delta x = x_\infty - x_0 = 10\ \mathrm{m}$$

例3 路灯距地面高度为h，身高为l 的人以速度v_0在路上匀速行走。求：（1）人影头部的移动速度；（2）影长增长的速率。



解：（1）$$\frac{x_2 - x_1}{l} = \frac{x_2}{h}$$

$$(h-l)x_2 = hx_1$$

两边求导：

$$(h-l)\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} = h\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}$$

其中：$\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} = v$ ，$\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = v_0$ $$v = \frac{hv_0}{h-l}$$

（2）　令 $b = x_2 - x_1$ 为影长

$$b = \frac{l}{h} x_2 \qquad v' = \frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}t} = \frac{l}{h}\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}$$

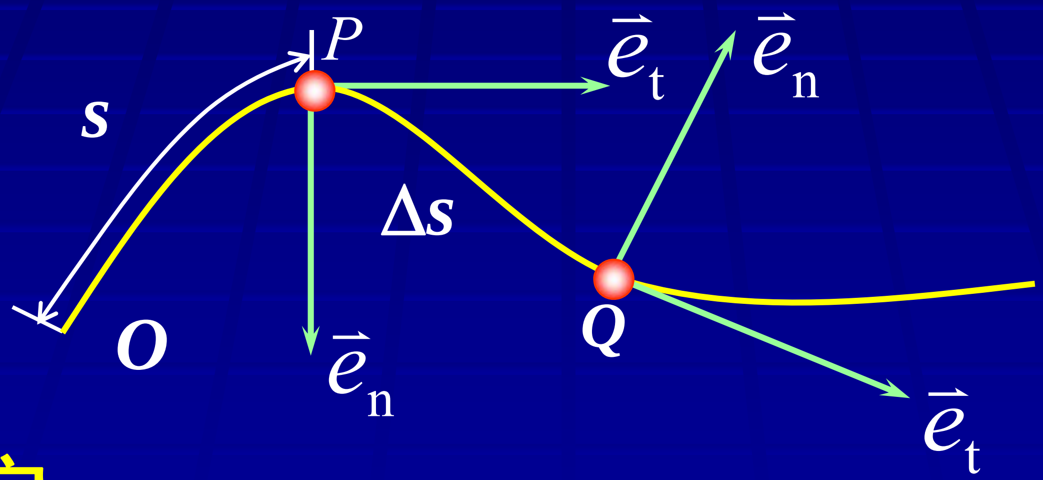
以 $\dfrac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} = \dfrac{hv_0}{h-l}$ 代入

得 $$v' = \frac{lv_0}{h-l}$$

1-2-5 自然坐标系下的速度和加速度

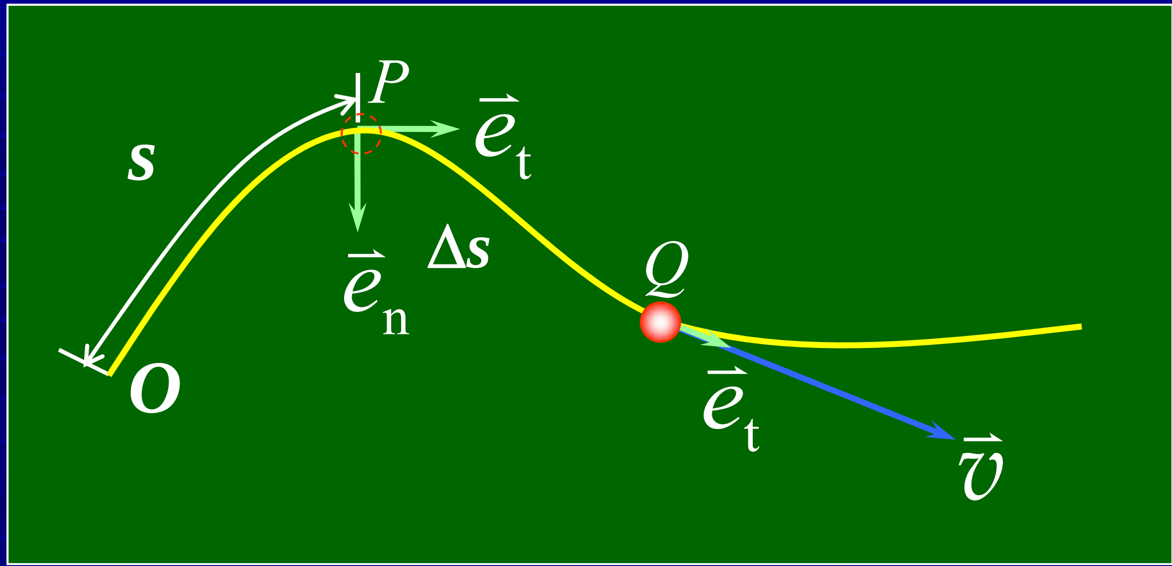
自然坐标系：

把坐标建立在运动轨迹上的坐标系统。



规定：

- 切向坐标轴沿质点前进方向的切向为正，单位矢量为 $\vec{e}_t$
- 法向坐标轴沿轨迹的法向凹侧为正，单位矢量为 $\vec{e}_n$



质点位置： $s = s(t)$

路程： $\Delta s = s_P - s_Q$

速度： $v = v\vec{e}_t = \dfrac{ds}{dt}\vec{e}_t$

质点的加速度：

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}(v\vec{\boldsymbol{e}}_{\mathrm{t}})}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{\boldsymbol{e}}_{\mathrm{t}}+v\frac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{e}}_{\mathrm{t}}}{\mathrm{d}t}$$

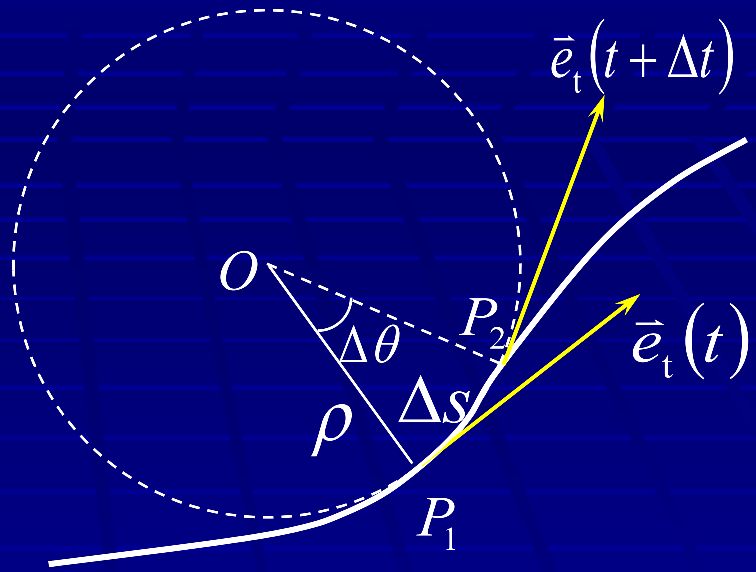
$\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{\boldsymbol{e}}_{\mathrm{t}}$ ：

速度大小的变化率，其方向指向曲线的切线方向

切向加速度：

$$\boxed{\vec{a}_{\mathrm{t}}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{e}_{\mathrm{t}}=\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}\vec{e}_{\mathrm{t}}}$$

讨论 $\dfrac{\mathrm{d}\vec{e}_\mathrm{t}}{\mathrm{d}t}$

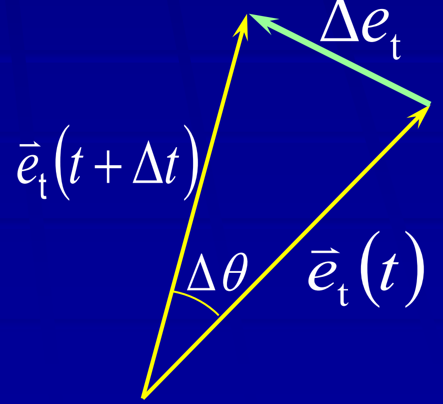


$$\Delta\vec{e}_\mathrm{t} = \vec{e}_\mathrm{t}(t+\Delta t) - \vec{e}_\mathrm{t}(t)$$

当： $\Delta t \to 0$ ， $\Delta\theta \to 0$

有 $\left|\Delta \boldsymbol{e}_\mathrm{t}\right| = \left|\boldsymbol{e}_\mathrm{t}\right| \cdot \Delta\theta = \Delta\theta$

方向 $\Delta\vec{e}_\mathrm{t} \perp \vec{e}_\mathrm{t}$

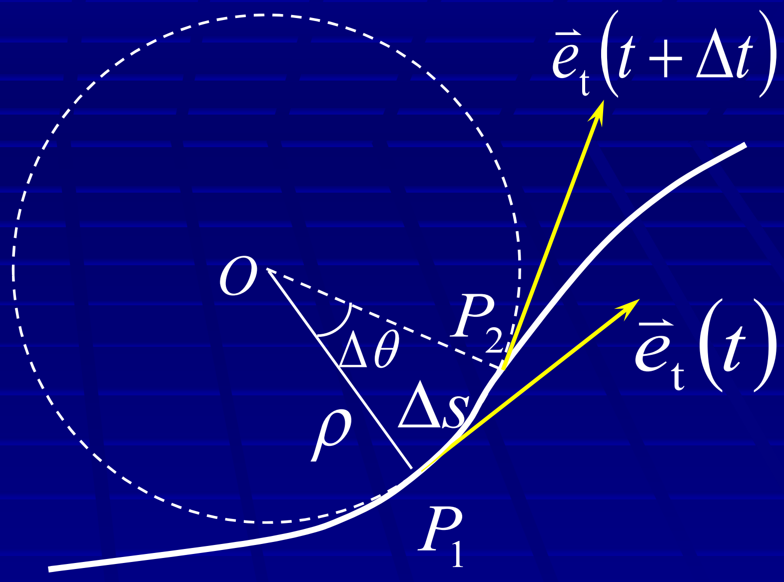


$$\frac{\mathrm{d}\vec{e}_\mathrm{t}}{\mathrm{d}t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{e}_\mathrm{t}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta t}\vec{e}_\mathrm{n}$$

$$\because \quad \Delta\theta = \frac{\Delta s}{\rho}$$

$$\therefore \quad \frac{\mathrm{d}\vec{e}_{\mathrm{t}}}{\mathrm{d}t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\rho \Delta t} \vec{e}_{\mathrm{n}}$$

$$= \frac{1}{\rho} \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \vec{e}_{\mathrm{n}} = \frac{v}{\rho} \vec{e}_{\mathrm{n}}$$



$$v \frac{\mathrm{d}\vec{e}_{\mathrm{t}}}{\mathrm{d}t} = \frac{v^2}{\rho} \vec{e}_{\mathrm{n}}$$

沿法线方向

法向加速度：

$$\boxed{\vec{a}_{\mathrm{n}} = v \frac{\mathrm{d}\vec{e}_{\mathrm{t}}}{\mathrm{d}t} = \frac{v^2}{\rho} \vec{e}_{\mathrm{n}}}$$

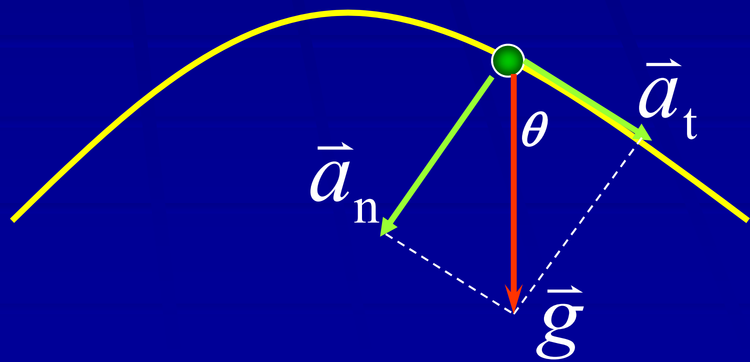
综上所述： $\vec{a}=\vec{a}_{\mathrm{t}}+\vec{a}_{\mathrm{n}}=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{e}_{\mathrm{t}}+\dfrac{v^2}{\rho}\vec{e}_{\mathrm{n}}$

速度的大小： $a=\sqrt{a_{\mathrm{n}}^2+a_{\mathrm{t}}^2}$

速度的方向（以与切线方向的夹角表示）：

$$\theta=\arctan\frac{a_{\mathrm{n}}}{a_{\mathrm{t}}}$$

例：抛体运动

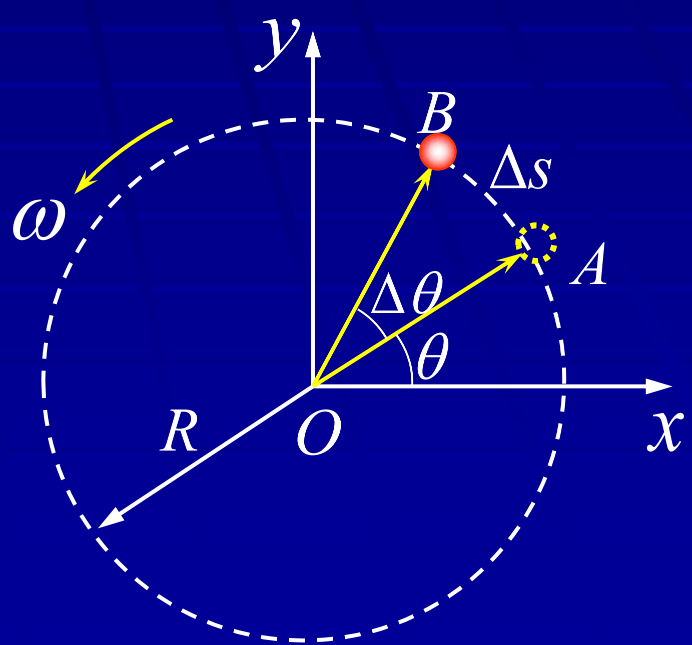


1-2-6 圆周运动及其角量描述

角位置θ： 质点所在的矢径与x轴的夹角。

角位移$\Delta\theta$： 质点从A到B矢径转过的角度。

规定： 逆时针转向$\Delta\theta$为正
顺时针转向$\Delta\theta$为负



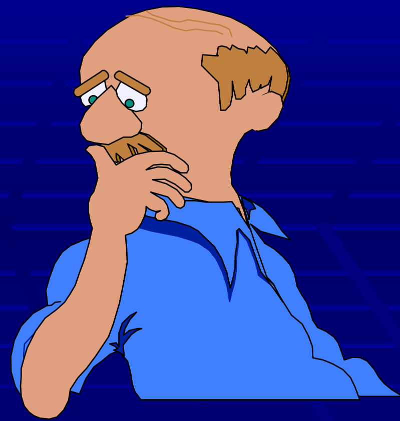
角速度ω：

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$

角加速度：

$$\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$$

角量表示匀加速圆周运动的基本公式：



$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)$$

$$s = R\theta$$

角量和线量的关系：

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = R\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$

$$v = R\omega$$

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = R\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$$

$$a_{\mathrm{t}} = R\alpha$$

$$a_{\mathrm{n}} = R\omega^2$$

$$a_{\mathrm{n}} = \frac{v^2}{R} = R\omega^2$$

可以把角速度看成是矢量！

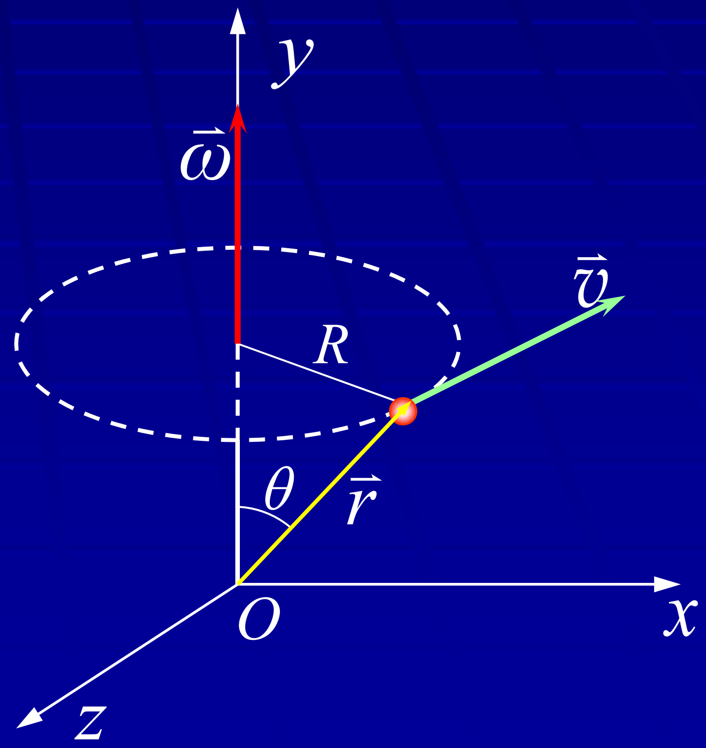
$\vec{\omega}$ 方向由右手螺旋法则确定 。

右手的四指循着质点的转动方向弯曲，拇指的指向即为角速度矢量的方向。

线速度与角速度的关系：

$$\boxed{\vec{v}=\vec{\omega}\times\vec{r}}$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}\times\vec{r}+\vec{\omega}\times\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$$



$$\vec{a} = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v}$$

$\because \quad \left| \vec{\alpha} \times \vec{r} \right| = \alpha R$ 方向沿着运动的切线方向。

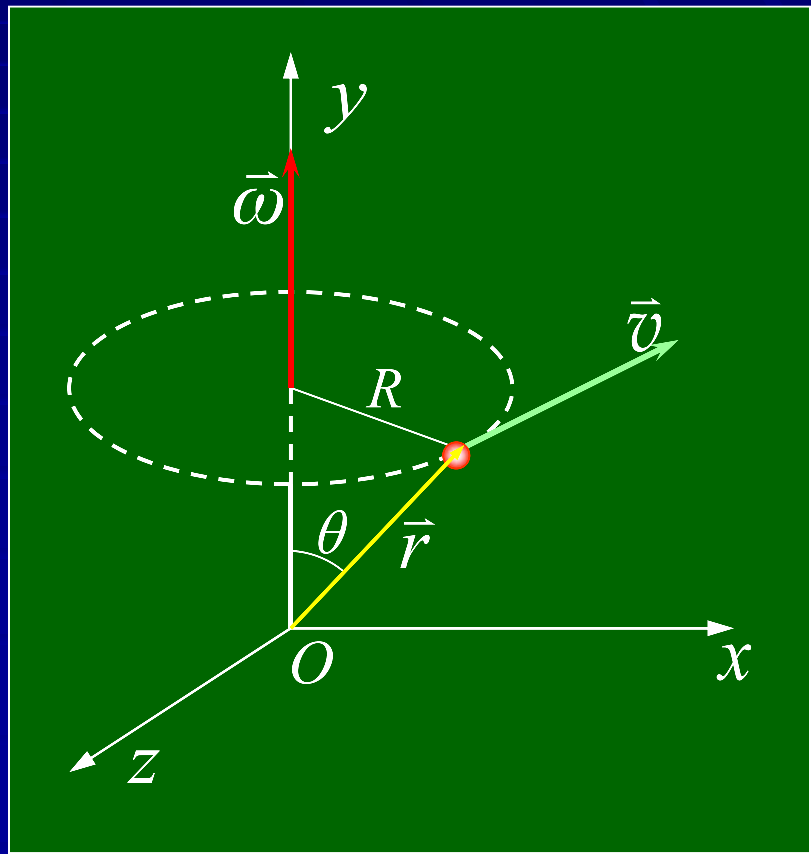
$\therefore \quad \vec{\alpha} \times \vec{r}$ 为切向加速度

$\because \quad \vec{\omega} \perp \vec{v}$

$\therefore \quad \left| \vec{\omega} \times \vec{v} \right| = \omega v = \omega^2 R$

$\vec{\omega} \times \vec{v}$ 方向指向圆心

$\vec{\omega} \times \vec{v}$ 为切向加速度



例4　半径为$r = 0.2$ m的飞轮，可绕 O 轴转动。已知轮缘上一点M的运动方程为$\varphi = -t^2+4t$，求在1秒时刻M点的速度和加速度。

解：

$$\omega = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = -2t + 4 \qquad \alpha = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = -2$$

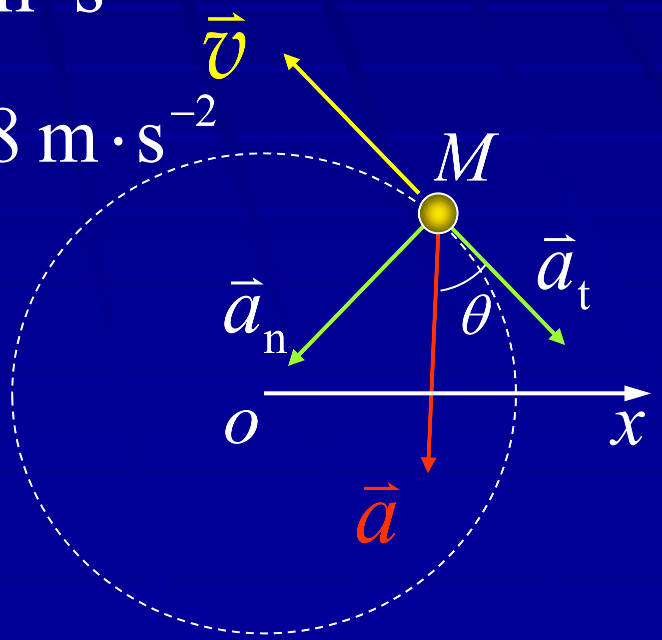
$$v = r\omega = r(-2t+4) = 0.2\times(-2\times1+4)\ \mathrm{m\cdot s^{-1}} = 0.4\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

$$a_{\mathrm{t}} = \alpha r = (-2)\times 0.2\ \mathrm{m\cdot s^{-2}} = -0.4\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$$

$$a_{\mathrm{n}} = r\omega^2 = 0.2(-2\times1+4)^2\ \mathrm{m\cdot s^{-2}} = 0.8\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$$

$$a = \sqrt{a_{\mathrm{t}}^2 + a_{\mathrm{n}}^2} = 0.89\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$$

$$\theta = \arctan\left|\frac{a_{\mathrm{n}}}{a_{\mathrm{t}}}\right| = \arctan\frac{0.8}{0.4} = 63.4^\circ$$



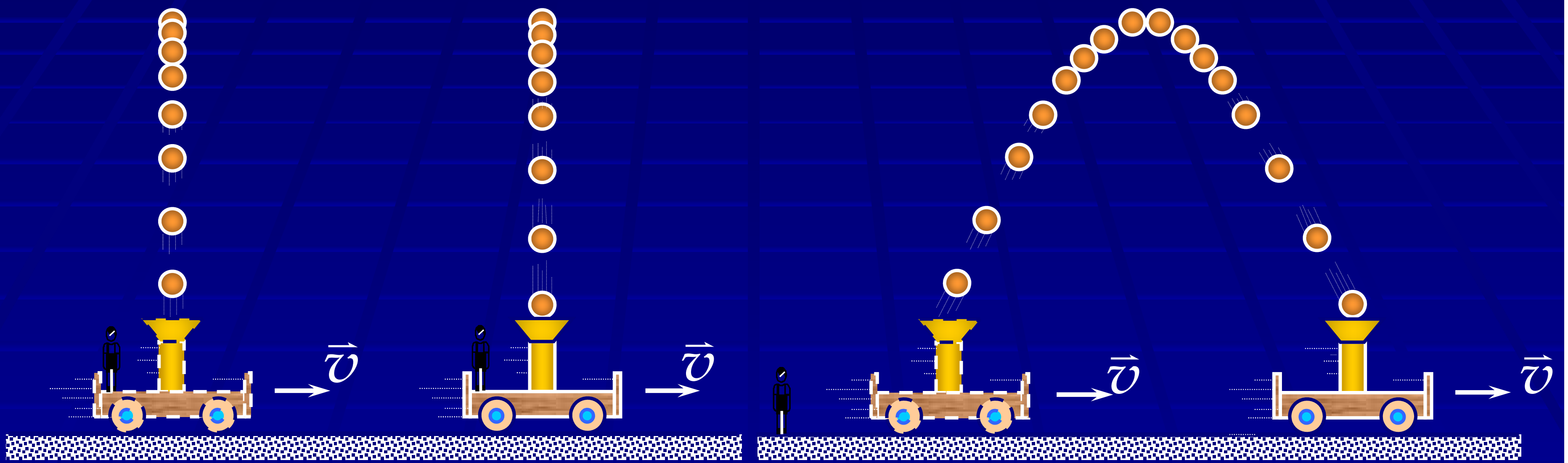
例5 一质点沿半径为**R**的圆周运动，其路程**s**随时间t的变化规律为$s=bt-1/2\cdot ct^2$，式中b，c为大于零的常数，且$b^2>Rc$。求（1）质点的切向加速度和法向加速度。（2）经过多长时间，切向加速度等于法向加速度。

解： （1） $$v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=b-ct$$

$$a_{\mathrm{t}}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-c \qquad a_{\mathrm{n}}=\frac{v^2}{R}=\frac{(b-ct)^2}{R}$$

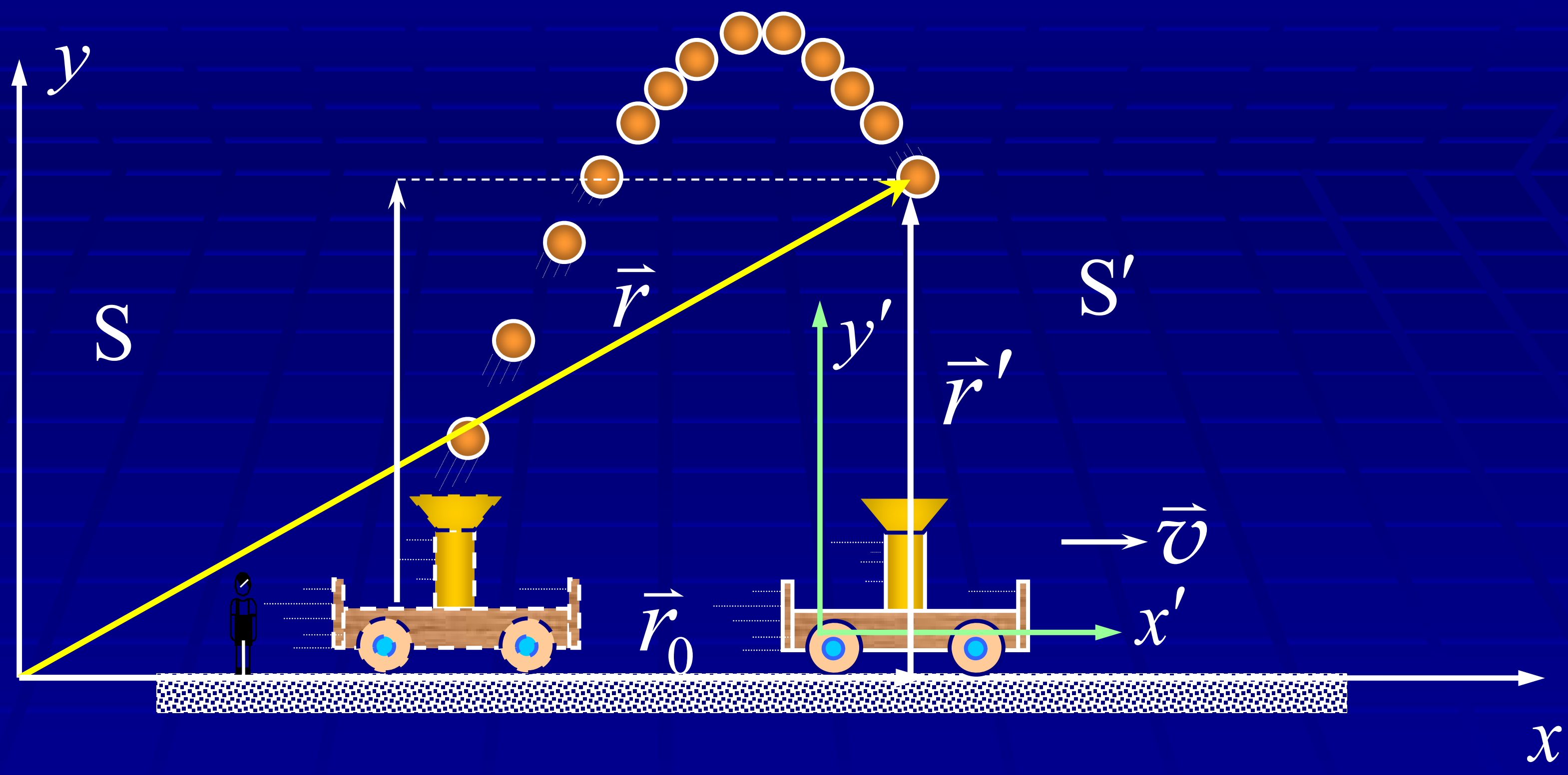
（2） $a_{\mathrm{t}}=a_{\mathrm{n}}$ 解得 $t=\dfrac{b}{c}\pm\sqrt{\dfrac{R}{c}}$

§ 1-3　相对运动



(a) 车做匀速运动时车上的人观察到石子做直线运动。

(b) 车做匀速直线运动时，地面上的人观察到石子做抛物线运动。



$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}\,'$$

两边求导 $$\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}_0}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\vec{r}\,'}{\mathrm{d}t}$$

绝对速度： $\vec{v} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$ 物体相对与 S 系的速度

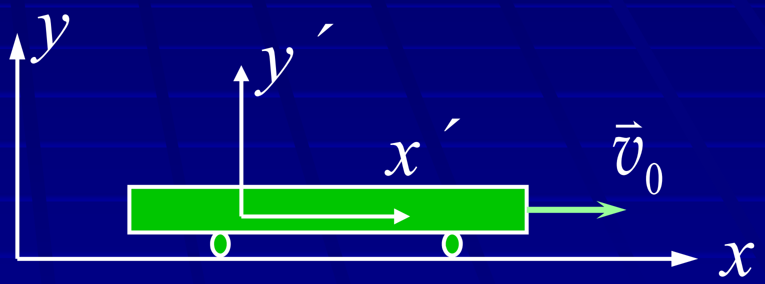
牵连速度： $\vec{v}_0 = \dfrac{\mathrm{d}\vec{r}_0}{\mathrm{d}t}$ S′系相对与 S 系的速度

相对速度： $\vec{v}' = \dfrac{\mathrm{d}\vec{r}'}{\mathrm{d}t}$ 物体相对与 S′系的速度

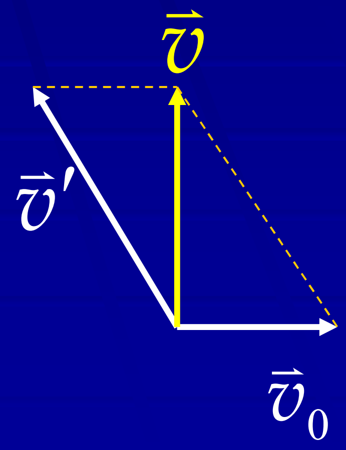
速度变换式： $\boxed{\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}'}$

例6 一观察者A坐在平板车上，车以10 m/s的速率沿水平轨道前进。他以与车前进的反方向呈 60° 角向上斜抛出一石块，此时站在地面上的观察者B看到石块沿铅垂线向上运动。求石块上升的高度。

解： 按题意作矢量图



$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}'$$



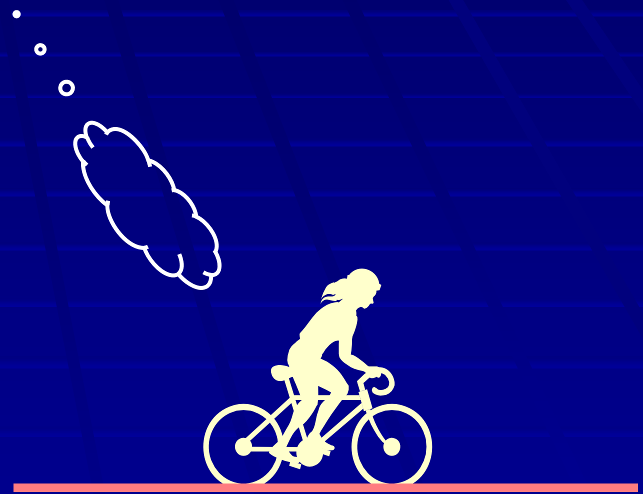
$$v = v_0 \tan 60° = 10 \tan 60° \mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

$$= 17.3 \mathrm{\ m \cdot s^{-1}}$$

$$H = \frac{v^2}{2g} = \frac{17.3^2}{2 \times 9.80} = 15.3 \mathrm{\ m}$$

例7 某人骑自行车以速率v_0向东行驶。今有风以同样的速率由北偏西30°方向吹来。问：人感到风是从那个方向吹来？

解： $$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{v}_0$$



北偏西30°