厦门大学《线性代数 I》期末试卷答案

一、(10) 求向量 $\beta=[-1,0,2]^T$ 在基 $\xi_1=[2,-2,1]^T, \xi_2=[2,1,-2]^T, \xi_3=[1,2,2]^T$ 下的坐标。

$(0,-2/3,1/3)$。过程 8 分，结果 2 分。

二、(10) 举个例子令下面等式成立，再举个例子令下面等式不成立，

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} |A| & |B| \\ |C| & |D| \end{vmatrix}$$

两个例子各 5 分

三、(10) 求解线性方程组: $\begin{cases} 2x_1 & -x_2 & -x_3 & +x_4 & =2 \\ x_1 & +x_2 & -2x_3 & +x_4 & =4 \\ 4x_1 & -6x_2 & +2x_3 & -2x_4 & =4 \\ 3x_1 & +6x_2 & -9x_3 & +7x_4 & =9 \end{cases}$

(必须使用初等变换，且通解写成向量形式!)

行最简形为 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ & 1 & -1 & 0 & 3 \\ & & & 1 & 3 \\ & & & & \end{bmatrix}$，通解为 $[4,3,0,-3]^T+c[1,1,1,0]^T$。过程 8 分，结果 2 分。

四、(10) 已知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是 R^3 的一组规范正交基，证明下面向量组也是规范正交基:

$$\beta_1=\frac{1}{3}(2\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3), \quad \beta_2=\frac{1}{3}(2\alpha_1-\alpha_2+2\alpha_3), \quad \beta_3=\frac{1}{3}(\alpha_1-2\alpha_2-2\alpha_3)$$

使用正交矩阵性质：写出过渡矩阵表达 4 分，验证过渡矩阵是正交矩阵 4 分，使用性质 2 分；直接验证：至少有一个验证正交的计算 4 分，至少一个验证单位的计算 4 分，得结论 2 分。

五、(10) 已知 $A=\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & a & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ 与 $B=\begin{bmatrix} -1 & & \\ & 2 & \\ & & b \end{bmatrix}$ 相似，求 a,b。

$a=0, b=-2$。过程 8 分，结果 2 分

六、(10) 设 $\alpha_1=[1,1,2]^T$, $\alpha_2=[0,2,1]^T$, $\alpha_3=[1,-1,a]^T$, $\beta=[2,0,b]^T$，则 a,b 为何值时 β 不能被 $\{\alpha_i\}$ 线性表示?

$a=1, b\neq 3$。

1、待定系数列出线性表示式 2 分；

2、初等变换 4 分，无解的充要条件 2 分，结论 2 分。或者

2、使用克莱默法则 3 分，得到 a 值 1 分，然后代入作初等变换 3 分，得 b 值 1 分。

七、(15) 设线性方程组 $\begin{cases} ax_1 & +x_2 & +x_3 & & =0 \\ x_1 & +ax_2 & +x_3 & & =0 \\ & & x_3 & +bx_4 & =0 \\ & & bx_3 & +x_4 & =0 \end{cases}$ 有两个线性无关的解，求 a,b 以及方程组的通解。

判断系数矩阵的秩不超过 2, 5 分; 初等变换 4 分; 分类讨论 a,b 各种取值 2 分; 结果 $a=1, b=\pm 1$, 2 分，通解 $c_1[-1,1,0,0]^T+c_2[1,0,-1,\pm 1]^T$，2 分。

八、(15) 三元二次型 $f=2x_1^2+2x_2^2+4x_3^2+4x_1x_3+4x_2x_3$，求一个正交变量替换 $x=Py$，把二次型化为标准形并判断是否正定。

写出对称矩阵 (1 分)，计算特征值 0,2,6 (3 分)，计算特征向量 $[-1,-1,1]^T,[-1,1,0]^T,[1,1,2]^T$ (6 分)，单位化 (3 分)，写出正交矩阵 $\begin{bmatrix} -1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \end{bmatrix}$ 得标准形 (1 分)，判断不是正定 (1 分)。

九、（10）设实对称矩阵 A, B 可交换，证明存在正交矩阵可将 A, B 同时相似于对角形矩阵。（提示：可以先尝试假定 A 只有两个特征值时的证明，再发现规律证明一般情形；可能会用到实对称矩阵的特殊性、分块矩阵或者方程组解的结构的相关知识）

将相同特征值写在一起，先将 A 正交相似于对角形，对角形 $P^T AP$ 由若干个数量矩阵构成（2 分）；利用可交换证明 $P^T BP$ 也是分块对角矩阵（2 分）；利用正交相似也是合同证明（或直接验证）$P^T BP$ 是对称矩阵（2 分）；利用每个小对称矩阵可正交相似于对角形，构造大正交矩阵 Q（2 分）；验证 PQ 为所要求的正交矩阵（2 分）。