厦门大学《概率论与数理统计》课程期末试卷

信息学院信息与通信工程系 19 级计算机类专业

学年学期：2019-2020 学年春季学期

主考教师：王 琳　试卷类型：B 卷(√)C 卷( )

一、 选择题（在各小题的四个备选答案中选出一个正确答案，填在题后的括号中，本大题共 5 个小题，每小题 3 分，总计 15 分）

1. 设 A,B 为随机事件，则 $P(A)=P(B)$ 的充分必要条件是（）。

A. $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$　　B. $P(AB)=P(A)P(B)$

C. $P(A\bar{B})=P(B\bar{A})$　　D. $P(AB)=P(\bar{A}\bar{B})$

2. 设随机变量序列 $X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$ 独立同分布，如果（　　），则其不服从辛钦大数定理。

A. X_1 服从参数为 1 的泊松分布.　　B. X_2 在区间 $(0,1)$ 上均匀分布.

C. X_3 服从参数 $(3,0.1)$ 的二项分布.　　D. X_n 都服从同一连续型分布.

3. 设随机变量 $X\sim t(n)(n>1)$，$Y=\dfrac{1}{X^2}$，则（　　）。

A. $Y\sim\chi^2(n)$　　B. $Y\sim\chi^2(n-1)$　　C. $Y\sim F(n,1)$　　D. $Y\sim F(1,n)$

4. 设二维随机变量 (X,Y) 服从二维正态分布，则随机变量 $\xi=X+Y$ 与 $\eta=X-Y$ 不相关的充分必要条件是（　　）。

A. $E(X)=E(Y)$　　B. $E(X^2)-[E(X)]^2=E(Y^2)-[E(Y)]^2$

C. $E(X^2)=E(Y^2)$　　D. $E(X^2)+[E(X)]^2=E(Y^2)+[E(Y)]^2$

5. 下列各函数是随机变量分布函数的为（　　）。

A. $F(x)=\dfrac{1}{1+x^2},-\infty<x<\infty$　　B. $F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ \dfrac{x}{1+x} & x\geq 0\end{cases}$

C. $F(x)=e^{-x},-\infty<x<\infty$　　D. $F(x)=\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{2\pi}\arctan x,-\infty<x<\infty$

二、 计算题（本大题共 5 小题，每小题 15 分，共计 75 分）

1.（1）甲、乙、丙三人独立地向一敌机射击，设甲、乙、丙命中率分别为 0.4、0.5 和 0.7，又设敌机被击中 1 次、2 次、3 次而坠毁的概率分别为 0.2、0.6 和 1.现三人向敌机各射击一次，求敌机坠毁的概率。

（2）按以往某学科考试结果分析，努力学习的学生有90% 的可能考试及格，不努力学习的学生有90% 的可能考试不及格。据调查，学生中有80% 的人是努力学习的，问：考试及格的学生有多大可能是不努力学习的人？

2.（1）某种商品一周的需求量是一个随机变量，其概率密度为

$$f(t)=\begin{cases} te^{-t}, t>0 \\ 0,\ 其他 \end{cases}$$

设各周的需求量是相互独立的。求两周的需求量的概率密度。

（2）计算器在进行加法时，将每个加数舍入最靠近它的整数，设所有舍入误差相互独立且在（-0.5，0.5）上服从均匀分布。运用中心极限定理求：最多可有几个数相加使得误差总和的绝对值小于 10 的概率不小于 0.90？

（$\Phi(1.285)=0.90, \Phi(1.645)=0.95$）

3.（1）设总体 X 的概率分布为

X	1	2	3
P	$1-\theta$	$\theta-\theta^2$	θ^2

，其中 $\theta\in(0,1)$ 未知. 以 N_i 表示来自总体 X 的简单随机样本（样本容量为 n ）中等于 i 的个数 $(i=1,2,3)$. 试求常数 a_1,a_2,a_3，使 $T=\sum_{i=1}^{3}a_iN_i$ 为 θ 的无偏估计量，并求 T 的方差.

（2）设总体 X 的概率密度为

$$f(x;\theta)=\begin{cases} \dfrac{1}{1-\theta}, \theta\le x\le 1 \\ 0, 其他 \end{cases}$$

其中 θ 为未知参数，$X_1,X_2,\dots,X_n$ 是来自总体的简单样本. 求参数 θ 的最大似然估计量.

4. 从一批钉子中随机抽取 16 枚，测得其长度（单位：cm）为

2.14， 2.10， 2.13， 2.15， 2.13， 2.12， 2.13， 2.10

2.15， 2.12， 2.14， 2.10， 2.13， 2.11， 2.14， 2.11

假设钉子的长度 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，在下列两种情况下分别求总体均值 μ 的置信度为 90%的置信区间.（$\Phi(1.645) = 0.95$，$t_{0.05}(15) = 1.7531$，$t_{0.05}(16) = 1.7456$）

（1）已知 $\sigma = 0.01$；（2）σ 未知.

5. （1）设某次考试的学生成绩服从正态分布，从中随机抽取 36 位考生的成绩，算得样本均值 $\overline{X} = 66.5$ 分，样本标准差 $S = 15$ 分，问在显著性水平 0.05 下，是否可以认为这次考试全体考生的平均成绩为 70 分？并给出检验过程。

（2）设某地区成年人的每日睡眠时间服从正态分布。随机抽取 25 个成年人，随机样本显示平均每日睡眠时间为 8h，样本标准差为 1.8h。试问：在显著性水平 0.05 下，是否可以认为成年人的每日睡眠时间的方差超过 $2h^2$？

（$t_{0.025}(35) = 2.03$，$t_{0.05}(35) = 1.69$，$t_{0.025}(36) = 2.028$；

$\chi^2_{0.05}(25) = 37.652$，$\chi^2_{0.05}(24) = 36.415$，$\chi^2_{0.025}(25) = 40.646$，$\chi^2_{0.025}(24) = 39.364$）

三、 证明题（本大题共 1 小题，每小题 10 分，共计 10 分）

设 $X_1, X_2, \cdots X_n$ 是独立同分布的随机变量，且 X_1 的密度函数为 $f(x) = \begin{cases} xe^{-x}, x > 0 \\ 0, x \le 0 \end{cases}$。

利用切比雪夫不等式证明：$P\left(0 < \sum_{i=1}^{n} X_i < 4n\right) \ge \frac{2n-1}{2n}$