厦门大学《微积分 I-2》课程
期中试题

考试日期：2015.4　　信息学院自律督导部整理

一、计算下列各题：（每小题 5 分，20 分）

1. 求曲线$\begin{cases}2x^2+y^2+z^2=16\\ x^2+z^2-y^2=0\end{cases}$在$zox$面上的投影曲线方程.

2. 将$I=\int_0^{\frac{R}{2}}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{3}x}f(x,y)\mathrm{d}y+\int_{\frac{R}{2}}^{R}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y$化为先对$x$后对$y$的二次积分.

3. 曲线$y=f(x)$通过原点，且在$[0,x]$上的弧长等于终点函数值$f(x)$的 2 倍，求$f(x)$.

4. 求圆盘$(x-2)^2+y^2\le 1$绕y轴旋转而成的旋转体体积.

二、（12 分）已知函数$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}, & (x,y)\ne(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$，（1）求$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)$，并说明函数$f(x,y)$在$(0,0)$处是否连续；（2）求在$(0,0)$处$f(x,y)$的偏导数；（3）问在$(0,0)$处$f(x,y)$是否可微？

三、计算下列各题（每小题 6 分，共 30 分）

1. 计算二重积分$\iint\limits_D (x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$D$是由$x=2, y=-1, y=1$，曲线$x^2+y^2=1\ (x\ge 0)$所围成的平面区域.

2. 已知$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=3$，$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为$\dfrac{\pi}{3}$，求$\vec{a}\cdot\vec{b}$和$|2\vec{a}-\vec{b}|$.

3. 设$y=y(x), z=z(x)$是由方程$\begin{cases}z=xf(x+y)\\ F(x,y,z)=0\end{cases}$所确定的函数，其中$f(x)$具有一阶连续导数，

$F(x,y,z)$具有连续的一阶偏导数，且$F_y + xf'(x+y)F_z \neq 0$，求$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$.

4. 求由方程$xyz+\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{2}$所确定的隐函数$z=z(x,y)$在点$(1,0,-1)$处的全微分.

5. 求过点$P(1,2,4)$且与两平面$x+2z=1$和$y-3z=2$都平行的直线方程.

四、计算下列各题（每小题 8 分，共 32 分）

1. 设直线$L:\begin{cases} x+3y+2z+1=0 \\ 2x-y-10z+3=0 \end{cases}$，平面$\Pi: 2x-y+z-2=0$，求直线$L$与平面$\Pi$的夹角.

2. 在曲面$z=xy$上求出一点，使曲面$z=xy$在该点的法向量与函数$u=x^2+y^2+z^2$在点$P(1,2,1)$处的梯度平行，并写出过该点的切平面方程.

3. 计算$\iint\limits_D \left|x^2+y^2-2y\right| \mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$D: x^2+y^2 \le 4$.

4. 求点$(1,1,\frac{1}{2})$到曲面$z=x^2+y^2$的最短距离.

五、证明题：（本题 6 分）

设$F(u,v)$可微，试证明曲面$F(\frac{x-a}{z-c},\frac{y-b}{z-c})=0$上任一点处的切平面都通过一定点.