厦门大学《概率统计 A》期中试卷

________学院________系________年级________专业

主考教师：__________ 试卷类型：(A 卷)

一、(10 分) 设$\mathbf{P(\bar{A}) = 0.3}$，$\mathbf{P(B) = 0.4}$，$\mathbf{P(A\bar{B}) = 0.5}$，计算 $\mathbf{P(B|A \cup \bar{B})}$。

解：$\mathbf{P(B|A \cup \bar{B}) = \frac{P(B\cap(A\cup\bar{B}))}{P(A\cup\bar{B})} = \frac{P(B\cap A)}{P(A\cup\bar{B})} = \frac{P(B\cap A)}{P(A\cup\bar{B})} = \frac{P(A)-P(A\bar{B})}{P(A)+P(\bar{B})-P(A\bar{B})} = \frac{0.2}{0.8} = \frac{1}{4}}$

二、(10 分) 某保险公司把被保险人分为三类："谨慎的"，"一般的"，"冒失的"。统计资料表明，上述三种人在一年内发生事故的概率依次为 0.05、0.15 和 0.30；如果"谨慎的"被保险人占 20%，"一般的"占 50%，"冒失的"占 30%，现知某被保险人在一年内出了事故，则他是"谨慎的"的概率是多少？

解：设 A={该客户是"谨慎的"}，B={该客户是"一般的"}，
C={该客户是"冒失的"}，D={该客户在一年内出了事故}
则由贝叶斯公式得

$$P(A|D) = \frac{P(AD)}{P(D)} = \frac{P(A)P(D|A)}{P(A)P(D|A)+P(B)P(D|B)+P(C)P(D|C)}$$

$$= \frac{0.2\times0.05}{0.2\times0.05+0.5\times0.15+0.3\times0.3} = 0.057$$

三、(10 分) 已知离散型随机变量 **X** 的概率分布为

$$\mathbf{P\{X = k\} = \frac{1}{2^k}，\quad k = 1，2，\ldots}$$

试求随机变量函数 $\mathbf{Y = \sin\left(\frac{\pi}{2}X\right)}$ 的分布律。

解：Y 的可能取值为 0，1，-1，分别其概率

$$\mathbf{P\{Y = 0\} = P\{X\text{为偶数}\} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^6} + \cdots = \frac{1}{3}}$$

$$\mathbf{P\{Y = -1\} = P\{X = 3\} + P\{X = 7\} + P\{X = 11\} + \cdots = \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^7} + \frac{1}{2^{11}} + \cdots = \frac{2}{15}}$$

$$\mathbf{P\{Y = 1\} = 1 - P\{Y = 0\} + P\{Y = -1\} = 1 - \frac{1}{3} - \frac{2}{15} = \frac{8}{15}}$$

四、(10 分)对圆片直径进行测量，测量值 X 服从 $(5,6)$ 上的均匀分布，求圆面积 Y 的概率密度函数。

解： 圆面积 $Y=\frac{1}{4}\pi X^2$，由于 **X** 均匀取 $(5,6)$ 中的值，所以 **X** 的密度函数

$$f_X(x)=\begin{cases}1, & 5<x<6;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

且 $y=\frac{1}{4}\pi x^2$ 为单调增加函数 $(x\in(5,6))$，其反函数

$$h(y)=\sqrt{\frac{4y}{\pi}}=\frac{2\sqrt{y}}{\sqrt{\pi}},h'(y)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{y}}=\frac{1}{\sqrt{\pi y}},$$

Y 的密度函数为

$$f_Y(y)=f_X(h(y))|h'(y)|=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{\pi y}}, & 5<\frac{2\sqrt{y}}{\sqrt{\pi}}<6;\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{\pi y}}, & \frac{25}{4}\pi<y<9\pi;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

五、(15 分)设随机变量 **X** 的密度函数为

$$f(x) = Ae^{-|x|}, -\infty < x < +\infty,$$

求：(1) 系数 A **；(2)** $P(0 < X < 1)$ **；(3) X 的分布函数。**

解：(1) 系数 A 必须满足 $\int_{-\infty}^{+\infty} Ae^{-|x|}dx = 1$，由于 $e^{-|x|}$ 为偶函数，所以

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Ae^{-|x|}dx = 2\int_{0}^{+\infty} Ae^{-|x|}dx = 2\int_{0}^{+\infty} Ae^{-x}dx = 1$$

解得 $A = \dfrac{1}{2}$；

(2) $P(0 < X < 1) = \int_0^1 \frac{1}{2}e^{-|x|}dx = \int_0^1 \frac{1}{2}e^{-x}dx = \frac{1}{2}\left(1 - e^{-1}\right)$；

(3) $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$

$$= \begin{cases} \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{2}e^{-|x|}dx & x < 0 \\ \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{2}e^{-|x|}dx + \int_{0}^{x} \frac{1}{2}e^{-|x|}dx & x \ge 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{2}e^{x}dx & x < 0 \\ \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{2}e^{x}dx + \int_{0}^{x} \frac{1}{2}e^{-x}dx & x \ge 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2}e^{x} & x < 0 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(1 - e^{-x}\right) & x \ge 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2}e^{x} & x < 0 \\ 1 - \frac{1}{2}e^{-x} & x \ge 0 \end{cases}$$

六、(10 分)国际市场每年对某种出口商品的需求量 X 是一个随机变量，它在[2000，4000]（单位：吨）上服从均匀分布。若每售出一吨，可获利 3 万美元，若销售不出而积压，则每吨需保养费 1 万美元。问应组织多少货源，才能使平均收益最大？

解： 设随机变量 **Y** 表示平均收益（单位：万元），进货量为 a 吨

$$\mathbf{Y}=\begin{cases}3X-(a-X) & x<a\\ 3a & x\ge a\end{cases}$$

则

$$E(Y)=\int_{2000}^{a}(4x-a)\frac{1}{2000}dx+\int_{a}^{4000}3a\frac{1}{2000}dx$$

$$=\frac{1}{2000}\left(-2a^2+14000a-8000000\right)$$

要使得平均收益 $E(Y)$ 最大，所以

$$\left(-2a^2+14000a-8000000\right)'=0$$

得 $a=3500$（吨）

七、(10 分) 设$(\mathbf{X},\mathbf{Y})$的概率密度函数为$\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{y})$，

$$\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{y})=\begin{cases}\mathbf{x}^2+\frac{\mathbf{xy}}{3}, & \mathbf{0}\le\mathbf{x}\le\mathbf{1},\mathbf{0}\le\mathbf{y}\le\mathbf{2}\\ \mathbf{0}, & \text{其他}\end{cases}$$

求（1）Y 的边缘密度；（2）概率 $\mathbf{P}(\mathbf{X}+\mathbf{Y}>\mathbf{1})$。

解：(1)假设 Y 的边缘密度为$\mathbf{f_Y}(\mathbf{y})$，

$$\mathbf{f_Y}(\mathbf{y})=\begin{cases}\int_0^1\left(\mathbf{x}^2+\frac{\mathbf{xy}}{3}\right)\mathbf{dx}, & \mathbf{0}\le\mathbf{y}\le\mathbf{2}\\ \mathbf{0}, & \mathbf{o.w.}\end{cases}=\begin{cases}\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}}\mathbf{y}, & \mathbf{0}\le\mathbf{y}\le\mathbf{2}\\ \mathbf{0}, & \mathbf{o.w.}\end{cases}$$

(2)

$$\mathbf{P}(\mathbf{X}+\mathbf{Y}>\mathbf{1})=\iint_{\mathbf{x+y>1}}\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{y})\mathbf{dxdy}=\int_0^1\int_{1-y}^{1}\left(\mathbf{x}^2+\frac{\mathbf{xy}}{3}\right)\mathbf{dxdy}+\int_1^2\int_0^1\left(\mathbf{x}^2+\frac{\mathbf{xy}}{3}\right)\mathbf{dxdy}$$

$$=\int_0^1\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}(\mathbf{1}-(\mathbf{1}-\mathbf{y})^3)+\frac{\mathbf{y}}{\mathbf{6}}(\mathbf{1}-(\mathbf{1}-\mathbf{y})^2)\right)\mathbf{dy}+\int_1^2\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}+\frac{\mathbf{y}}{\mathbf{6}}\right)\mathbf{dy}=\frac{\mathbf{65}}{\mathbf{72}}$$

八、(10 分) 设随机变量 X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{\sigma^2}\exp\left\{-\dfrac{x^2}{2\sigma^2}\right\}, & x>0\\ 0, & 其他\end{cases},$$

求 EX，DX。

解：

$$EX=\int_0^\infty \frac{x^2}{\sigma^2}\exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right\}dx=-x\exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right\}\Bigg|_0^\infty+\int_0^\infty \exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right\}dx=\sigma\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

$$EX^2=\int_0^\infty \frac{x^3}{\sigma^2}\exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right\}dx=-x^2\exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right\}\Bigg|_0^\infty+\int_0^\infty 2x\exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right\}dx$$

$$=-2\sigma^2\exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right\}\Bigg|_0^\infty=2\sigma^2$$

$$DX=EX^2-(EX)^2=2\sigma^2-\frac{\pi}{2}\sigma^2$$

九、(10 分) 设随机变量 X、Y 的密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & 0<x<1,|y|<x\\ 0, & 其他\end{cases},$$

验证 X、Y 不相关，并且 X、Y 不独立。

解：由于

$$EX=\int_0^1\int_{-x}^{x} x\,dy\,dx=\frac{2}{3}，EY=\int_0^1\int_{-x}^{x} y\,dy\,dx=0，EXY=\int_0^1\int_{-x}^{x} xy\,dy\,dx=0$$

所以，

$$Cov(X,Y)=EXY-EX\,EY=0$$

验证了 X、Y 不相关。

又因为

$$f_X(x)=\int f(x,y)dy=\begin{cases}\int_{-x}^{x}dy=2x, & 0<x<1\\ 0, & 其他\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int f(x,y)dx=\begin{cases}\int_{-y}^{1}dx=1+y, & -1<y<0\\ \int_{y}^{1}dx=1-y, & 0<y<1\\ 0, & 其他\end{cases}$$

显然，$f(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y)$，所以 X、Y 不独立。

十、(10 分) 设随机变量 (X,Y) 的联合分布律为

X \ Y	0	1
0	0.3	0.2
1	0.4	0.1

求相关系数$\rho_{X,Y}$

解： 关于 X 与 Y 的边缘分布律分别为：

X	0	1
Pr	0.5	0.5

Y	0	1
Pr	0.7	0.3

$$E(X)=0\times 0.5+1\times 0.5=0.5$$

$$E\left(X^2\right)=0^2\times 0.5+1^2\times 0.5=0.5$$

$$D\left(X\right)=0.5-\left(0.5\right)^2=0.25$$

$$E\left(Y\right)=0\times 0.7+1\times 0.3=0.3$$

$$E\left(Y^2\right)=0^2\times 0.7+1^2\times 0.3=0.3$$

$$D\left(Y\right)=0.3-\left(0.3\right)^2=0.21$$

$$\operatorname{cov}\left(X,Y\right)=E\left(XY\right)-E\left(X\right)\cdot E\left(Y\right)=0.1-0.5\times 0.3=-0.05$$

$$\rho_{X,Y}=\frac{\operatorname{cov}\left(X,Y\right)}{\sqrt{D\left(X\right)}\sqrt{D\left(Y\right)}}=\frac{-0.05}{\sqrt{0.25}\sqrt{0.21}}=-\frac{\sqrt{21}}{21}$$