厦门大学《大学物理》B1 课程
期中试题·答案

考试日期：2011.4　　信息学院自律督导部整理

自律督导部

1.　（15 分）

一质点在 xoy 平面内运动，运动方程为：$x=2t$；$y=4t^2-8$（国际单位制）。求：

（1）质点的轨道方程；

（2）$t_1=1s$ 和 $t_2=2s$ 时质点的位置、速度和加速度。

解：（1）质点的轨道方程：$y=x^2-8$；　（4 分）

（2）$\because \vec{v}=2\vec{i}+8t\vec{j}$；　$\vec{a}=8\vec{j}$ ，

$$\therefore \text{当} t=1s\text{时}，\begin{cases}\vec{r}_1=2\vec{i}-4\vec{j}\\ \vec{v}_1=2\vec{i}+8\vec{j}\\ \vec{a}_1=8\vec{j}\end{cases}；\text{当} t=2s\text{时}，\begin{cases}\vec{r}_2=4\vec{i}+8\vec{j}\\ \vec{v}_2=2\vec{i}+16\vec{j}\\ \vec{a}_2=8\vec{j}\end{cases}。$$

（2×5=10 分）

2.　（14 分）

以初速率 $v_{10}=15.0m/s$ 竖直向上扔出一块石头后，在 $t_1=1.0s$ 时又竖直向上扔出第二块石头，后者在 $h=11.0m$ 高处击中前者，求第二块石头扔出时的速率 v_{20}。

解：以抛出点为原点向上为正方向建立 y 坐标系，

第一块石头的运动方程：$y_1=v_{10}t-\frac{1}{2}gt^2$ ，

第二块石头的运动方程：$y_2=v_{20}(t-t_1)-\frac{1}{2}g(t-t_1)^2$ ，　（$t\ge t_1$）

（设第二块石头扔出时的速率为 v_{20}）

第二块石头在 h=11.0 m 高处击中第一块石头，由 $h=v_{10}t-\frac{1}{2}gt^2$ 得击中时间为

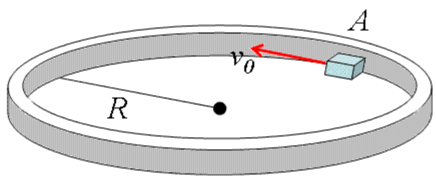
$$t=\frac{v_{10}\pm\sqrt{v_{10}^2-2gh}}{g}=1.22\text{ s} \text{ 或 } 1.84\text{ s}$$　（10 分）

若 $t=1.22$ s 击中，代入 $h=v_{20}(t-t_1)-\frac{1}{2}g(t-t_1)^2$，得 $v_{20}=51.1m/s$（2 分）

若$t=1.84$ s 击中，代入$h=v_{20}(t-t_1)-\frac{1}{2}g(t-t_1)^2$，得$v_{20}=17.2m/s$（2 分）

3.　　（15 分）

水平面上放置一固定的圆环，半径为 R。一物体贴着环的内侧运动，物体与环之间滑动摩擦系数为 μ。设物体在某时刻经 A 点时速率为 v_0，求：



（1）　此后 t 时刻物体的速率；

（2）　从 A 点开始到速率减少为$\frac{v_0}{2}$时，物体转了过了多少圈？

解：（1）环带支撑力 N：提供物体圆周运动的向心加速度，

摩擦力 f：产生**切向加速度，使物体减速**

$$\begin{cases} N=F_n=m\dfrac{v^2}{R} \\ -f=F_t=m\dfrac{dv}{dt} \end{cases}$$　　其中：　$f=\mu N$　　　　（2×2=4 分）

所以有：$m\frac{dv}{dt}=-\mu m\frac{v^2}{R}$　　$\rightarrow\frac{dv}{v^2}=-\frac{\mu}{R}dt$

两边积分：$\int_{v_0}^{v}\frac{dv}{v^2}=-\int_0^t\frac{\mu}{R}dt$

得：　$\frac{1}{v}-\frac{1}{v_0}=\frac{\mu}{R}t$　，即：$v=\frac{R}{R+\mu v_0 t}v_0$　　　　（5 分）

（2）又$\because -\mu mg\frac{v^2}{R}=m\frac{dv}{dt}\cdot\frac{ds}{ds}$　，　$\therefore\int_0^s ds=-\frac{R}{\mu}\int_{v_0}^{v_0/2}\frac{dv}{v}$　；

解得：$s=\frac{R}{\mu}\ln 2$　，物体转过的圈数$n=\frac{\Delta\theta}{2\pi}=\frac{s}{2\pi R}=\frac{\ln 2}{2\pi\mu}$　。（6 分）

另解？

4.　　（15 分）

一质量为 m 的质点在 XOY 平面内运动，其运动方程为$\vec{r}=a\cos\omega t\vec{i}+b\sin\omega t\vec{j}$，求：

（1）任意时刻质点的动量；

（2）从$t=0$到$t=\frac{\pi}{\omega}$这段时间内质点所受到的冲量；

（3）证明质点运动中对坐标原点的角动量守恒。

解：（1）　　$\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}=-\omega a\sin\omega t\vec{i}+\omega b\cos\omega t\vec{j}$　，

$\vec{P}=m\vec{v}=-\omega am\sin\omega t\vec{i}+\omega bm\cos\omega t\vec{j}$ ；

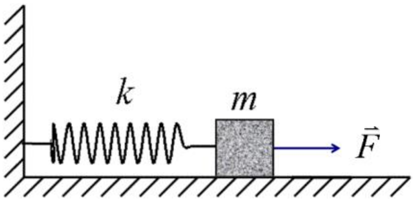
（2）$\because t_1=0\Rightarrow\vec{P}_1=\omega bm\vec{j}$ ， $t_2=\dfrac{\pi}{\omega}\Rightarrow\vec{P}_2=-\omega bm\vec{j}$

$\therefore\vec{I}=\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}dt=\Delta\vec{P}=-2\omega bm\vec{j}$ ；

（3）
$$\begin{aligned}&\vec{L}=\vec{r}\times\vec{P}\\&=(a\cos\omega t\vec{i}+b\sin\omega t\vec{j})\times(-\omega am\sin\omega t\vec{i}+\omega bm\cos\omega t\vec{j})\\&=\omega abm\cos^2\omega t\vec{k}+\omega abm\sin^2\omega t\vec{k}=\omega abm\vec{k}\end{aligned}$$

—— 守恒 （3×5=15 分）

5. （12 分）



劲度系数为 k 的轻弹簧，一端固定在墙上，另一端连在一个质量为 m 的物体上，如图所示。 物体与桌面间的摩擦系数为 μ，初始时刻弹簧处于原长状态，现用不变的力 F 拉物体，使物体向右移动，问物体将停在何处？

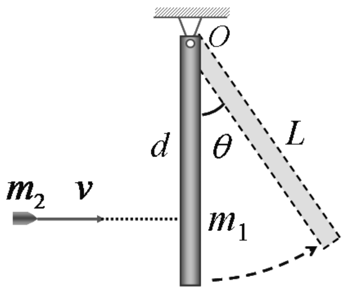
解：设初始时刻物体 m 的位置为坐标原点，则物体速度为零时物体所在

的位置坐标为 x ，物体运动过程有： $\int_0^x(F-\mu mg)dx=\dfrac{1}{2}kx^2$ （8 分）

解得： $x=\dfrac{2(F-\mu mg)}{k}$ （4 分）

另：若以**受力平衡状态**为答案者（x 有一取值范围），**视为正确。**

6. （14 分）



如图所示，一匀质细杆长为 L，质量 m_1，其上端由光滑的水平轴吊起且处于静止状态。今有一质量 m_2 的子弹以 v 速率水平射入杆中而不复出，射入点在转轴下方 $d=\dfrac{2}{3}L$ 处。求：

（1）子弹停在杆中时杆获得的的角速度的大小；

（2）杆摆动后的最大偏转角。

解：（1）子弹入射过程 m_1 、m_2 角动量守恒，

$$\because J' = \frac{1}{3}m_1L^2 + \frac{4}{9}m_2L^2 = \frac{L^2}{9}(3m_1 + 4m_2)$$

$$\frac{2}{3}L \times m_2 v = \frac{L^2}{9}(3m_1 + 4m_2)\omega \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{6m_2 v}{(3m_1 + 4m_2)L} \quad ;$$

（2）杆上摆过程机械能守恒：

$$\frac{1}{2}[\frac{L^2}{9}(3m_1 + 4m_2)]\omega^2 = m_1 g \cdot \frac{L}{2}(1-\cos\theta) + m_2 g \cdot \frac{2L}{3}(1-\cos\theta)$$

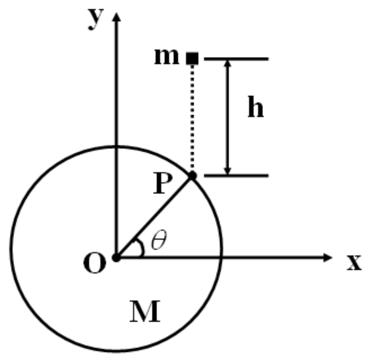
解得： $\cos\theta = 1 - \frac{\omega^2 L}{3g} \quad \Rightarrow \quad \theta = \arccos(1 - \frac{\omega^2 L}{3g})$

（2×7=14 分）

注释：子弹速率 v 应该有上限。

7. （15 分）

已知质量为 M，半径为 R 的均质圆盘可绕固定轴 O 在竖直平面内无摩擦地转动，初始时刻圆盘静止。在距离高为 h 的 P 点处（OP 与水平位置的夹角为 θ），一质量为 m 的粘土块从静止开始落下，落到圆盘上后粘在圆盘的边缘并与其一起转动。设 $M = 2m$，求：



（1）碰撞后圆盘获得的角速度的大小；

（2）当 P 点转到水平位置时，圆盘的角加速度的大小；

（3）当 P 点转到水平位置时，圆盘的角速度的大小。

解：（1）m 下落 h 后获得速度： $v_{10} = \sqrt{2gh}$ ，

m ，M 碰撞过程角动量守恒：

$$mRv_0 \sin(\frac{\pi}{2} + \theta) = (mR^2 + \frac{1}{2}MR^2)\omega_0 \quad ,$$

解得： $\omega_0 = \dfrac{mv_0 \cos\theta}{(m + \frac{M}{2})R} = \dfrac{\sqrt{2gh}}{2R}\cos\theta$ ；

（2）P 点转到水平位置时： $mgR = (mR^2 + \frac{1}{2}MR^2)\alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha = \dfrac{mg}{(m + \frac{M}{2})R} = \dfrac{g}{2R}$ ；

（3）圆盘转动过程中机械能守恒：

$$\frac{1}{2}(mR^2 + \frac{1}{2}MR^2)\omega_0^2 + mgR\sin\theta = \frac{1}{2}(mR^2 + \frac{1}{2}MR^2)\omega^2 \quad ,$$

解得：$\omega=\dfrac{\sqrt{2g(h\cos^2\theta+2R\sin\theta)}}{2R}$ 。（3×5=15 分）

一、