公式描述：考虑集合 $A_1,\ldots,A_n$，用 $|S|$ 表示集合 S 元素个数，S 的概率表示为 $\Pr(S)$，则有

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right|=\sum_{i=1}^{n}|A_i|-\sum_{1\le i\le j\le n}^{n}\left|A_i\bigcap A_j\right|+\sum_{1\le i<j<k\le n}^{n}\left|A_i\bigcap A_j\bigcap A_k\right|$$
$$-\cdots+(-1)^{n-2}\sum_{1\le l_1<l_2<\cdots<l_{n-1}\le n}^{n}\left|A_{l_1}\bigcap A_{l2}\bigcap\cdots\bigcap A_{l_{n-1}}\right|+(-1)^{n-1}\left|A_1\bigcap A_2\bigcap\cdots\bigcap A_n\right|$$

例子：

掷出两颗骰子 (每颗骰子的点数都是 1、 2、3、 4、 5 和 6), 我们想知道掷出点数 1 的结果有多少种. 让 A_1 表示第一颗骰子的点数是 1, 让 A_2 表示第二颗骰子的点数是 1. 我们想求 $\left|A_1\bigcup A_2\right|$。下面来找出不同的量. 首先, 因为 $A_1=\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6)\}$，所以 $|A_1|=6$。同样地，$A_2=\{(1,1),(2,1),(3,1),(4,1),(5,1),(6,1)\}$，$|A_2|=6$，并且由 $A_1\bigcap A_2=\{(1,1)\}$ 可知 $\left|A_1\bigcap A_2\right|=1$ 把上述结果综合起来, 我们有

$$\left|A_1\bigcup A_2\right|=|A_1|+|A_2|-\left|A_1\bigcap A_2\right|=6+6-1=11$$

等可能集合的容斥原理： 在涉及容斥原理的很多问题中, 所有集合 A_i 都具有相同的大小, 所有集合 $A_i\bigcap A_j=A_{ij}$ 也具有相同的大小, 而且所有集合 $A_i\bigcap A_j\bigcap A_k=A_{ijk}$ 同样具有相同的大小, 等等. 这使得计数更加简单, 于是公式被简化成了

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right|=n|A_1|-\binom{n}{2}|A_{12}|+\binom{n}{3}|A_{123}|-\cdots+(-1)^{n-1}|A_{12\cdots n}|$$

证明：用到的公式，二项式公式

$$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}$$

$$2^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$$

$$0=(-1+1)^n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}$$

情形 0：元素 x 不属于任何集合 A_i，所以 x 不属于左边的并，也不属于右边的任何一个交集，对两边都无贡献.

情形 1：元素 x 恰好属于集合 A_i，所以 x 属于左边的并，贡献了 1. 由于 x 只属于集合 A_i，因此，不属于任何交集，对右边的和也是贡献了 1.

情形 2：元素 x 恰好属于 2 个集合 A_i，所以 x 属于左边的并，贡献了 1. 比如 x 属于 A_1 和 A_3. 右边：属于 A_1 和 A_3，分别计算了 1 次，交集 $A_1\bigcap A_3$ 计算 1 次，其它交集中都不含 x，所以：1+1-1，对右边贡献也是 1.

情形 3：元素 x 恰好属于 3 个集合 A_i，所以 x 属于左边的并，贡献了 1. 比如 x 属于 A_1、A_3、A_7. 右边：属于 A_1、A_3、A_7，分别计算了 1 次，交集 $A_1\bigcap A_3$、$A_1\bigcap A_7$、$A_3\bigcap A_7$，$A_1\bigcap A_3\bigcap A_7$ 分别计算 1 次，其它交集中都不含 x，所以：1+1+1-3+1=3-3+1=1，对右边贡献也是 1.

3-3+1 可写为 $(-1)^{1-1}\binom{3}{1}+(-1)^{2-1}\binom{3}{2}+(-1)^{3-1}\binom{3}{3}$

情形 k：元素 x 恰好属于 k 个集合 A_i，所以 x 属于左边的并，贡献了 1. 比如 x 属于 A_1、A_2、…A_k. 右边：x 仅属于一个集合的情况有

$\binom{k}{1}$，共计算了$(-1)^{1-1}\binom{k}{1}$次，x 仅属于 2 个集合的情况有$\binom{k}{2}$，2 个集合交集计算$(-1)^{2-1}\binom{k}{2}$次，以此类推，k 个集合的交集计算了$(-1)^{k-1}\binom{k}{k}$次，所以右边共计算：

$$
\begin{aligned}
&(-1)^{1-1}\binom{k}{1}+(-1)^{2-1}\binom{k}{2}+\ldots+(-1)^{k-1}\binom{k}{k}\\
&=-1+(-1)^{1-1}\binom{k}{1}+(-1)^{2-1}\binom{k}{2}+\ldots+(-1)^{k-1}\binom{k}{k}+1\\
&=-\left[(-1)^{0}\binom{k}{0}+(-1)^{1}\binom{k}{1}+(-1)^{2}\binom{k}{2}+\ldots+(-1)^{k}\binom{k}{k}\right]+1\\
&=-\sum_{j=0}^{k}(-1)^{j}\binom{k}{j}+1\\
&=-(-1+1)^{n}+1=1
\end{aligned}
$$

容斥原理应用：同花色牌型

问题：为 4 个人中的每一个分配 13 张牌，并且要使得至少有一个人拿到了一手相同花色的牌。

第一步是选择事件. 让A_1表示第一个人拿到了一手相同花色的牌，并且不考虑另外 3 个人都拿到了什么. 我们按照同样的方法来定义A_2,A_3,A_4。那么事件$A_1\bigcap A_2=A_{12}$表示第一个人和第二个人都拿到了一手相同花色的牌，却没有任何关于第三个人和第四个人的信息。$A_1\bigcap A_2\bigcap A_3=A_{123}$表示第一、第二和第三个人拿到一手同花色牌，那么肯定，第四个人也拿同一花色。

根据对称性，有$|A_1|=|A_2|=|A_3|=|A_4|$，$|A_{12}|=|A_{13}|=\cdots=|A_{34}|$

第二步，应用容斥原理计算

1. 计算$|A_1|$，先选第一个人拿到的花色，再选剩下三人拿牌的情况，

   有$|A_1|=\binom{4}{1}\binom{13}{13}\binom{39}{13}\binom{26}{13}\binom{13}{13}$

2. 计算$|A_{ij}|$，对于特定的 2 个人，先选花色在选顺序有$\binom{4}{2}2!$，剩下的 2 人有$\binom{26}{13}\binom{13}{13}$种选法，所以$|A_{ij}|=\binom{4}{2}2!\binom{26}{13}\binom{13}{13}$

3. 计算$|A_{ijk}|$， 3 个人拿到同花色，表明 4 人拿到同花色，有

   $|A_{123}|=|A_{124}|=|A_{234}|=|A_{134}|=|A_{1234}|=4!$

4. 最后有

$$
\begin{aligned}
\left|\bigcup_{i=1}^{4}A_i\right| &= 4|A_1|-\binom{4}{2}|A_{12}|+\binom{4}{3}|A_{123}|-\binom{4}{4}|A_{1234}| \\
&= 4|A_1|-6|A_{12}|+4|A_{123}|-|A_{1234}|
\end{aligned}
$$