离散数学

Discrete Mathematics

吴梅红

厦门大学计算机科学系

E-mail: wmh@xmu.edu.cn



- 现代科学技术(包括计算机科学与技术)的发展是与现代数学的发展密切相关、互相促进的。
- 计算机的高速发展与广泛应用，促进了信息数字化、符号化与离散化。
- 离散与连续是现实世界中物质运动的对立统一的两个方面。

离散数学与连续数学是描述、刻划和表达现实世界物质运动的两种重要工具。

- 离散数学的原理和方法已成为计算机科学与技术的重要理论基础之一。

第一篇　集合论

- 朴素(经典)集合论: 1874年德国数学家康托(Cantor)创立了朴素集合论, 没作完全形式化的刻划, 在定义上缺乏限制, 最终导致会悖论(paradox)。
- 公理化和抽象的集合论: 1908年另一个德国数学家Zermelo建立了集合论的抽象公理系统。
- 从集合论出发, 数学家们推出数学上许多重要的结果。一百多年来, 集合论已成为数学中不可缺少的基本描述工具, 作为一种基本的数学语言。现代连续数学和离散数学的“大厦”就是建立在集合论的基础之上的。

第三章　集 合 (Set)

- 在自然科学中, 除了研究处于孤立下的单个个体, 更经常是将一些相关的个体联合在一起进行研究。

3.1 集合的基本概念

- 集合是不能精确定义的基本概念。集合的直观含义:
- 一个集合是具有共同性质的、作为整体识别的、确定的、互相区别的一些事物的聚集(整体或总和等)。■
- 这只是集合一种描述, 因为 "聚集(整体或总和等)" 是集合一词的同义反复。

- 构成一个集合的每个事物, 称为这个集合中的元素(element) 或 成员(member)。 /*蛋和鸡

  集合由它的元素所决定。 ■

- 集合一般用大写英文字母表示, 集合中的元素用小写英文字母表示。但这不是绝对的,

  因为集合的元素可以是任何类型的事物,

  一个集合可以作为另一个集合的元素 /*元素的抽象性

- 元素与集合之间的关系是属于或者不属于,

  两者必成立其一且仅成立其一。 /*元素的确定性

- 如果x是集合S的一个元素，记作 $x \in S$，读为x属于S;

  y不是集合S的元素，记作 $y \notin S$，读为y不属于S。 ■

- 集合、元素和属于是集合论的三个最基本原始概念。
- 正像几何学中的点、线、面等概念一样, 集合、元素和属于也是一种未加形式定义而可直接引入的最基本原始概念, 仅如上作了直观的 描述。
- 集合论中的其它概念, 均可由集合、元素和属于这三个概念出发, 给予严格定义。
- 随着计算机时代的开始, 集合的元素已由数学的“数集”和“点集”拓展成包含文字、符号、图形、图象、声音和视频等多媒体的信息, 构成了各种数据类型的集合。

例 1 (0) 空集∅ 或 { }是“最小”的集合。 /*0元集

(1) 偶素数集合{2}。 /*单元集

(2) 二进制的基数集合{0, 1}。 /*2元集

(3) 英文字母(大写和小写)的集合。 /*有限集

(4) Java语言的基本字符构成一个字符集。

(5) 计算机主存的全部存储单元集合。

(6) 全体实数的集合。 /*无限集

(7) 宇宙中的全部星球是一个集合。

集合的特性

- 集合论依赖于三大基本原理,

  它们从根本上规定了集合概念的意义。

- 集合的元素一旦给定, 这一集合便完全确定,

  这一事实被形式地叙述为外延(extension)公理。

1) 外延公理 -- 两个集合A和B 相等 的充分必要条件是

   它们有相同的元素。

$$A = B \Leftrightarrow (x\in A \Leftrightarrow x\in B)$$

- 外延公理刻划了集合中元素的下列特性:

A. 互异性: 一个集合的各元素是可以互相区分开的,

即 每一元素只出现一次。 /*vs. 多重集合

$\{a, a, b, c, c, c\} = \{a, b, c\}$

B. 无序性: 集合中元素排列次序无关紧要,

即 集合表示形式的不唯一性。 /*vs. 计算机编码实现

比较: 序列元素可相同, 是有序的。

例 2 $\{a, b, c\} = \{a, c, b\} = \{b, a, c\}$

$= \{b, c, a\} = \{c, a, b\} = \{c, b, a\}$。

2) 概括 (comprehension) 公理 -- 构成一个集合应符合两个要求: /*曲线与方程

(1) 纯粹性: 凡该集合中的元素都具有某种性质。

(2) 完备性: 凡具有某种性质的元素都在该集合中。

- 概括公理的提出, 避免了Cantor提出的朴素集合论可能导致的悖论, 为集合的存在和发展提供了前提条件, 规定了集合描述法的理论依据和集合元素的确定性。

C. 确定性: 任一事物是否属于一个具体集合, 回答是确定的, Yes or No, 两者居其一且仅必居其一。 /*vs. Fuzzy

- 不确定的、界限不分明的事物构成的集合属于模糊集合的研究范畴。在经典集合论中绝对不容许存在。

例 3 “好书”的全体不构成集合, 因为难以对每一本书的好坏作出确定的判断。“好书”的全体不是已知的, 不能把它当作一个集合。 ■

- 所谓一个集合是已知的, 就是对任一元素, 利用某种方法, 可以判断它是否是这个集合的成员, 而不是说这个集合的每一个成员都要写出来。
- 这正如说已知一个数列, 并不是把这个数列的所有项都写出来一样, 而是给出了某规则(通项公式)。

- 英国哲学家罗素把集合分成两类:

  一类是 集合A本身是A的一个元素, 即 $A \in A$;

  另一类是 集合A本身不属于A, 即 $A \notin A$。

- 罗素悖论的构造:

  令 $A = \{x \mid x \notin x\}$, 则 $A \in A \Leftrightarrow A \notin A$。

  若 $A \in A$, 则集合A中元素都有 $A \notin A$;

  若 $A \notin A$, 满足$A \notin A$的对象应属于集合A, 则有$A \in A$。

  这是著名的罗素悖论paradox。 /*happy trouble

- “我说的都是假的。” 假或真?

3. 正则 (regularity) 公理 -- 不存在集合A, B, C, …, 使得

$$\ldots \in C \in B \in A \qquad \blacksquare$$

推论 对任何集合S, $\{S\} \neq S$ (否则有$\ldots \in S \in S \in S$)。 $\blacksquare$

- 正则公理规定了集合不能是自己的成员, 从而规定了集合 {S} 与 S 的 不同层次性。
- 罗素悖论源自康托对集合概念的定义, 康托的集合定义 允许集合本身是自己的一个元素, 这个定义蕴含着矛盾, 蕴含着循环定义。
- 集合与其元素是两个截然不同的概念。

- 集合的元素可以是任何具体或抽象事物，

  包括别的集合，但不能是本集合自身。

- 因为一个集合是由它的元素构成的，

  是先有元素后，才形成集合的，

  所以一个正在形成中的集合便不能作为一个实体充当自己的元素。

  否则在概念上将产生循环，从而导致悖论。

- 正则公理消除了悖论。悖论不在本书讨论范围。

集合的表示方法：

1) 列举法 (外延法)：概念的对象范围

- 把元素较少的有限集合所有元素写在一个花括号内，中间用逗号相隔;

例 5 **Suits = {Spade, Heart, Club, Diamond}**。

- 当集合里的成员都已知时, 该集合也就完全清楚了。这种显式表示法, 优点在于其直观透明性。
- 对元素很多的有限集, 或某些有规律的无限集, 如果其元素与自然数可建立一一对应关系：　/* 次序
  列出足够多的元素以反映集合中元素的特征, 在表示式中使用省略号。

例 6 $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$,

$N = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$。

- 用列举法表示集合并不总是可能的。

例 7 开区间(0, 1)中的所有实数的集合就不能用列举法给出。 /*实数的连续性和稠密性

- 从计算机的观点看, 列举法是一种“静态”表示法, 若把全部列举的数据都存储在计算机中, 那将占用大量的存储空间。

2) 描述法 (概括法):

- 将集合中元素具有的特定性质用一个谓词公式来描述, $S = \{x \mid P(x)\}$, 其意义为:

  集合S 由且仅由 满足谓词公式P(x)的对象所组成,

  即 $a \in S$ 当且仅当 P(a)为真。

- 描述法较方便, 尤其适用于元素很多或无穷的集合,

  优点是不必列出集合的全部元素,

  侧重刻画集合中元素的共同特征。

例 8 正奇数集合 $Odd = \{n \mid 2n + 1, n \in N\}$。

例 9 [0, 1]上的所有连续函数所形成的集合可记成：

$C[0, 1] = \{f(x) \mid f(x)$在$[0, 1]$上连续$\}$。

3) 文氏(Venn)图:

- 用图形形象和直观地描述集合之间的相互关系和有关的运算。

4) Backus Naur Form (BNF) :

- ::= 常用于定义高级程序设计语言的语法集合。

例 10 <factor> ::= <operand> | <factor> * <operand>

5) 递归定义法:

- 给定基础元素, 通过计算规则定义集合的其它元素。

例 11 Fibonacci数列: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, …

$$\begin{cases} F(0) = F(1) = 1 \\ F(n+2) = F(n) + F(n+1) \qquad n \geq 0 \end{cases}$$

6) 专用字母法:

N: 自然数 (Natural), N = {0, 1, 2, 3, …}

I 或 Z: 整数 (Integer) Zheng shu

P: 素数或质数 (Prime)

Q: 有理数 (整数商Quotient : i/j, $j \neq 0$)

R: 实数 (Real)

C: 复数 (Complex)

$N_m = \{1, 2, \ldots, m\}$ $(m \geq 1)$

$Z_m = \{0, 1, 2, \ldots, m-1\}$ $(m \geq 1)$

7) 区间法

(a, b), [a, b], [0, +∞)。

集合间的关系

- 集合的包含和相等是同一层上集合间的两个基本关系。

但两个集合之间可以没有任何关系,

一、包含关系和相等关系

定义3.1 设A, B为集合, 若B中的每个元素都是A的元素, 则称B是A的子集 (subset), 也称A包含B 或 B含于A, 记作 $B \subseteq A$ (或$A \supseteq B$), A称为B的超集(superset)。

包含的符号化表式为 $B \subseteq A \Leftrightarrow \forall x\,(x \in B \rightarrow x \in A)$ 。

若B不是A的子集, 则记作$B \nsubseteq A$

符号化形式为 $B \nsubseteq A \Leftrightarrow \exists x\,(x \in B \wedge x \notin A)$。 $\blacksquare$

定义 3.2 设A, B为集合，若A $\subseteq$ B 且 B $\subseteq$ A，则称A与B**相等**，记作 A = B。 ■

- 由外延公理, 集合A与集合B的元素完全相同时,

$$A = B \Leftrightarrow B \subseteq A \land A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x(x \in A \Leftrightarrow x \in B) 。$$

- 注意两集合相等是通过集合中的元素来定义的,

即如果要证明A、B两集合相等, 必须首先知道集合A和B中含有哪些元素, 而这往往是难以满足的。

- 在通常情况下, 是通过证明两集合相互包含来证明它们相等。

区别:

- 符号“$\in$”表示元素与集合的隶属关系;
- “$\subseteq$”是集合之间的包含关系, “$\subseteq$”的两边均是集合, 地位平等。$\in$是集合论中最基本的概念, $\subseteq$ 是在$\in$ 的基础上定义的表示集合之间关系的概念。
- 严格区分这两个符号所表示的概念, 否则会引出悖论。
- 设A、B、C为3个集合, 由定义可知集合的包含关系有如下性质:

(1) $A \subseteq A$。 (自反性)

(2) 若$A \subseteq B$且$B \subseteq A$, 则 $A = B$。 (反对称性)

(3) 若$A \subseteq B$且$B \subseteq C$, 则 $A \subseteq C$。 (传递性)

- 集合的相等关系有如下性质：

(1) A = A。 (自反性)

(2) 若A = B, 则B = A。 (对称性)

(3) 若A = B且B = C, 则A = C。 (传递性)

- 在第二章我们将给出上述关系性质的严格定义。
- 两个相等的集合并不意味着它们用同样的方式定义。

例 12 设A是方程 $x^2 - x = 0$ 的解集,

- $A = \{x \mid x^2 - x = 0\}$;
- $B = \{0, 1\}$;

` 则 A = B。

定义1.3 若A为B的子集, 且$A \neq B$, 则称A为B的**真子集**(proper subset), 或称 B真包含A, 记作$A \subset B$,

若A不是B的真子集, 则记作$A \not\subset B$。符号化形式为

$$A \not\subset B \Leftrightarrow \exists x\,(x \in A \wedge x \notin B) \vee (A = B)。 \quad \blacksquare$$

例 13 $N \subset I \subset Q \subset R \subset C$ 。

例 14 台湾人都是中国人, 台湾人真包含于中国人,

即 {台湾人}$\subset${中国人}。

- 设A、B、C为3个集合, 由定义可知如下性质为真:

(1) $A \not\subset A$。 (反自反性)

(2) 若$A \subset B$, 则 $B \not\subset A$。 (反对称性)

(3) 若$A \subset B$且$B \subset C$, 则 $A \subset C$。 (传递性)

二、特殊的集合

- 空集和全集是两个特殊集合, 在集合论中的地位很重要

定义 3.4 不含任何元素的集合称为空集(empty set),

记作$\varnothing$ 或 { }。谓词表示:

$\varnothing = \{x \mid P(x) \wedge \sim P(x)\}$, 其中 P(x)为任意谓词。 ∎

例 15 H = {x | x是跳高跳过8米的人} = $\varnothing$,

方程 $x^2 + 1 = 0$ 的实根集合是空集。 ∎

- 这说明空集是客观存在的。
- 空集的引入, 可以使许多问题的叙述得到简化。

定理 3.1 空集是一切集合的子集。

Proof 1 $\forall$集合A, 由子集定义 (令B = $\varnothing$) 有

$\varnothing \subseteq A \Leftrightarrow \forall x\,(x\in \varnothing \rightarrow x\in A)$ 右边的蕴涵式因前件假而为真命题，所以左边 $\varnothing \subseteq A$ 也为真。

proof 2 假设存在集合A，使 $\varnothing \nsubseteq A$，则存在x，使 $x\in\varnothing$ 且 $x\notin A$。这与空集定义矛盾。 ∎

- 可以形象地说：$\varnothing$是"最小"的集合，0元集。

推论 空集是唯一的。

proof 若存在空集合 $\varnothing_1$ 和$\varnothing_2$，由定理 1.1知

$$\varnothing_1 \subseteq \varnothing_2 \text{ 和 } \varnothing_2 \subseteq \varnothing_1,$$

根据集合相等的定义 $\varnothing_1 = \varnothing_2$。 ∎

- 由子集的定义，$\forall$非空集合S，至少有两个不同的子集，即 $\varnothing \subseteq S$ 和 $S \subseteq S$。称 $\varnothing$和S自身是S的平凡子集。

例 16 判断下列命题的真假:

(1) $\varnothing \in \varnothing$　　(2) $\varnothing \in \{\varnothing\}$　　(3) $\{\varnothing\} \in \{\varnothing\}$

(4) $\varnothing \in \{\{\varnothing\}\}$　　(5) $\{\varnothing\} \in \{\{\varnothing\}\}$　　(6) $\varnothing \subseteq \varnothing$

(7) $\varnothing \subseteq \{\varnothing\}$　　(8) $\{\varnothing\} \subseteq \{\varnothing\}$　　(9) $\{\varnothing\} \subseteq \{\{\varnothing\}\}$

Solution (2), (5), (6), (7), (8)为真; 其余均为假。 $\blacksquare$

例 17 列出 B = $\{\varnothing\}$和 C = $\varnothing$的全部(真)子集。

Sol $\varnothing \subseteq \{\varnothing\}$ 且 $\{\varnothing\} \subseteq \{\varnothing\}$;

B有两个子集: $\varnothing$ 和 $\{\varnothing\}$; B只有一个真子集: $\varnothing$。

$\varnothing \subseteq C$, 所以C只有一个子集$\varnothing$, 没有真子集。 $\blacksquare$

例 18 是否存在集合A和B, 使得 $A \in B$ 且 $A \subseteq B$。

Sol 存在。设 $A = \{a\}$, $B = \{a, \{a\}\}$。 $\blacksquare$ How many?

定义3.6 在一个具体问题中, 如果所涉及的集合都是某个集合的子集, 则称这个集合为**全集**(Universal set), 记作E。谓词表示:

$$E = \{x \mid P(x) \lor \sim P(x)\}$$, 其中P(x)为任意谓词。

- 全集(也称论域)的概念具有相对性, 全集只包含与讨论有关的所有对象, 并不一定包含一切事物。
- 不同的问题有不同的全集, 即使是同一个问题也可以有不同的全集。全集并非绝对唯一的, 而是相对唯一的。
- 一般地, 全集取得小一些, 问题的描述和处理会简单些. 全集E在问题讨论之初便应选定。
- 任意集合A, 有 $\varnothing \subseteq A \subseteq E$。

例 19 讨论(a, b)区间的实数性质时, 可取 (a, b), [a, b], [a, b), (a, +∞) 等其中之一为全集。

- 当讨论的集合都是S = {a, b, c}的子集时, 可以取包含S的一切集合为全集。而S是所要求的 “最小” 的全集, 但找不到所要求的 “最大” 的全集。
- 全集取得小一些, 问题的描述和处理会简单些。

三、集合的基数

- 当抽象地研究集合时, 集合中元素的属性是不研究的。只需假定集合中的元素彼此互不相同以及彼此可区别就可以了, 因此元素是一些抽象的符号。

- 于是, 一个集合所含元素的“个数”就成为该集合的重要属性，通常个数是指一个有限数。
- 如果一个集合中仅含有有限个元素，谈论该集合的个数, 自然是有意义的。 但当集合中有无穷多个元素, 那么便不能谈论它的元素的个数了。

定义 集合中元素的个数称为基数 (cardinality) 或 势 (potential), 用 $|A|$ 或#A表示。基数是有限数的集合称为有限集(finite), 否则称为无限集(infinite)。 ∎

例 20 $|\varnothing| = 0$; $|\{\varnothing\}| = 1$; $|\{0, 1\}| = 2$;

$|\{A, B, C, \ldots, X, Y, Z\}| = 26$。

- 含n个元素的集合简称 n元集,

其含有 k(≤n)个元素的子集称为它的 k元子集。

定义 3.5 由集合A的全体子集构成的集合, 叫做A的幂集 (power set), 记作 P(A) 或 2^A。符号化表示为:

$$P(A) = \{x \mid x \subseteq A\}。 \qquad ∎$$

- $$\forall x \in P(A) \Leftrightarrow x \subseteq A$$
- 集合A的幂集一定包含空集和A。

求集合A的幂集相当于写出A的全体子集。

例 21 $P(\varnothing) = \{\varnothing\}$。

- 区别: $\varnothing \neq \{\varnothing\}$, 但 $\varnothing \in \{\varnothing\}$, $\varnothing \subseteq \{\varnothing\}$。

$\varnothing$ 表示空集, 其中没有任何元素; $|\varnothing| = 0$

$\{\varnothing\}$表示集合族, 它有唯一的一个集合元素$\varnothing$, $|\{\varnothing\}| = 1$

- 给定一个有限集, 要保证不重复和不遗漏地写出它的全部子集, 简单而有效的办法就是将子集按基数由小到大地分类, 相同基数类的子集再按字母数字顺序逐个地写出。

例 22 求出集合S = {a, b, c}的所有子集。

Sol |S| = 3。 0元子集, 即空集, 只有一个C_3^0个: $\varnothing$;

1元子集, 即单元集, 有C_3^1个: {a}, {b}, {c};

2元子集, 有C_3^2个: {a, b}, {a, c}, {b, c};

3元子集, 有C_3^3个: {a, b, c} 。

共有子集数: $C_3^0 + C_3^1 + C_3^2 + C_3^3 = (1 + 1)^3 = 2^3 = 8$

定理 设集合A的元素个数为n, 则 $|P(A)| = 2^n = 2^{|A|}$。

proof 设 $|A| = n$, 从n个元素中选取k个不同元素的方法共有 C_n^k 种, $k = 0, 1, 2, \ldots, n$。

所以A的不同子集的数目为

$$|P(A)| = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n$$

$$= (1 + 1)^n = 2^n = 2^{|A|}。 \qquad \blacksquare$$

例 23 求 $A = \{ \varnothing, \{\varnothing\} \}$ 的幂集:

Sol $P(A) = \{ \varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\} \}$。

- 更一般地，

定义 以集合为元素的集合称为**集(合)族**(collections)。

例 24 求其和为8的不同正整数的集合的集族。

解 所求集族为:

$$\{\ \{8\},\{1, 7\},\{2, 6\},\{3, 5\}, \{1, 2, 5\}, \{1, 3, 4\}\ \}。$$

3.2 集合的基本运算

- 集合的运算是一些规则，利用这些规则对给定的几个集合的元素进行重新组合，产生新的集合。

一、集合的基本运算

定义 3.7 设A、B为二集合，称由A和B的所有元素组成的集合为A与B的并集(union)，记作A∪B。描述法

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \lor x \in B\}。\quad ∎$$

- 可以将集合的并运算推广到有限个或 可数个集合。设$A_1, A_2, \ldots, A_n$为n个集合，

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \{x \mid \exists i(1 \le i \le n \land x \in A_i)\} = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

- 可数个集合$A_1, A_2, \ldots$，记$A_1 \cup A_2 \cup \ldots = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$为其并集

- 设$A_n=\{x \mid x\in R \land n-1\le x\le n\}$, $n = 1, 2, \ldots, 10$, 则

$$\bigcup_{i=1}^{10} A_n = \{x \mid x\in R \land 0\le x\le 10\} = [0, 10],$$

- 设$A_n=\{x \mid x\in R \land 0\le x\le \frac{1}{n}\}$, $n = 1, 2, \ldots$ 则

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_n = \{x \mid x\in R \land 0\le x\le 1\} = [0, 1],$$

定义 3.7 设A、B为二集合, 称由A和B的**公共元素**组成的集合为A与B的**交集**(intersection), 记作$A\cap B$。

即 $A\cap B = \{x \mid x\in A \land x\in B\}$。 ■

- 可以将集合的交运算推广到**有限个**或**可数个**集合。

$$A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n = \{x \mid \forall i(1\le i\le n \rightarrow x\in A_i)\} = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$$

- 类似地, $A_1, A_2, \ldots,$ 记$A_1\cap A_2\cap\ldots = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$为其交集。 ■

- 设 $A_n = \{x \mid x \in R \wedge 0 \le x \le n\}$, $n = 1, 2, \ldots$, 则

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_n = \{x \mid x \in R \wedge 0 \le x \le 1\} = [0, 1]。$$

定义 A, B为二集合, 若$A \cap B = \varnothing$, 则称A与B**不交的**(disjoin)。

设$A_1, A_2, \ldots$ 是**可数个**集合, 若对于$\forall i \ne j$, 均有 $A_i \cap A_j = \varnothing$, 则称$A_1, A_2, \ldots$ 是**互不相交的**。 $\blacksquare$

- 设 $A_n = \{x \mid x \in R \wedge n-1 < x < n\}$, $n = 1, 2, \ldots$,

则 $A_1, A_2, \ldots$ 是**互不相交的**。

定义 3.7 设有集合A和B，称属于A但不属于B的全体元素组成的集合为B对A相对补集(relative complement)或差集(difference set)，记作$A - B$，

即 $A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$。 $\blacksquare$

定义 3.9 设E为全集，$A \subseteq E$，A对E的相对补集称为A的绝对(absolute)补集，$E - A$简记为$\sim A$。

$$\sim A = E - A = \{x \mid x \in E \wedge x \notin A\} = \{x \mid x \notin A\}。 \quad \blacksquare$$

性质：$\sim E = \varnothing$； $\sim \varnothing = E$；

$A - A = \varnothing$； $A - \varnothing = A$； $A - E = \varnothing$；

若$A \subseteq B$，则 $\sim B \subseteq \sim A$，$A - B = \varnothing$ 。

例 25 设$B = \{2, 3, \{2, 3\}, \varnothing\}$, 求下列集合:

(1) $B - \{2, 3\}$

Sol $B - \{2, 3\} = \{ \{2, 3\}, \varnothing \}$

(2) $\{\{2, 3\}\} - B$

Sol $\{\{2, 3\}\} - B = \varnothing$

(3) $B - \varnothing$

Sol $B - \varnothing = B$

(4) $B - \{\varnothing\}$

Sol $B - \{\varnothing\} = \{ 2, 3, \{2, 3\} \}$

例 26 证明补交转换律 $A - B = A \cap \sim B$

Proof 对于任意的x

$$x \in A - B$$

$$\Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B,$$

$$\Leftrightarrow x \in A \wedge x \in \sim B$$

$$\Leftrightarrow x \in A \cap \sim B,$$

- 注：差运算 通常转化为∩和~ 绝对补集。

定义 3.8 设集合A和B，由属于A但不属于B，或由属于B但不属于A的元素组成的集合，称为A 与B的**对称差**(symmetry difference)或 **环和**, 记作$A \oplus B$。

$$A \oplus B = \{x \mid (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A)\}$$

$$= (A - B) \cup (B - A) = (A \cap \sim B) \cup (B \cap \sim A)$$

$$= (A \cup B) - (A \cap B) \qquad \blacksquare$$

例 27 设$A = \{2, 3\}$, $B = \{1, 5, 8\}$, $C = \{3, 6\}$,

则 $B \oplus C = \{1, 3, 5, 6, 8\}$,

$A \cup (B \oplus C) = \{1, 2, 3, 5, 6, 8\}$。

但 $A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 8\}$, $A \cup C = \{2, 3, 6\}$,

$(A \cup B) \oplus (A \cup C) = \{1, 5, 6, 8\}$

所以 $A \cup (B \oplus C) \neq (A \cup B) \oplus (A \cup C)$。

- 为了正确进行集合之间的运算, 我们需要规定集合运算的优先级, 为此将集合运算分成高、低二级:
- 高优先级: 绝对补、求幂集;

  同级运算按从右向左的顺序进行。
- 低优先级: 初级并、初级交、相对补和对称差;

  同级运算按从左向右的顺序进行。
- 为保证运算次序的清晰性, 可适当地添加括号。

三、文氏图(Venn Diagrams)

- 文氏图可以用来描述集合间的关系及其运算。

  全集E用矩形表示, 子集用圆或其他任何封闭曲线围成的区域表示, 阴影区域表示运算结果的集合。

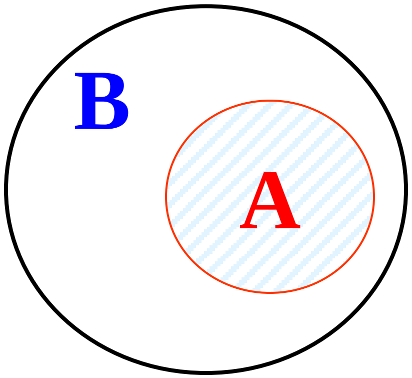
- 文氏图表示法的优点是直观和形象, 富有启发性, 帮助我们理解各种概念和定理, 所以文氏图可作为思考的出发点。

- 但文氏图绝不能用作推理的依据, 因为直观是不可靠的, 只有逻辑推理才是可靠的。

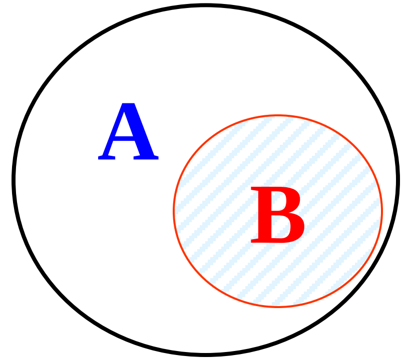
  另外, 当集合的数目较多时, 文氏图将变得很复杂。

- 下面给出常见的集合运算的文氏图。

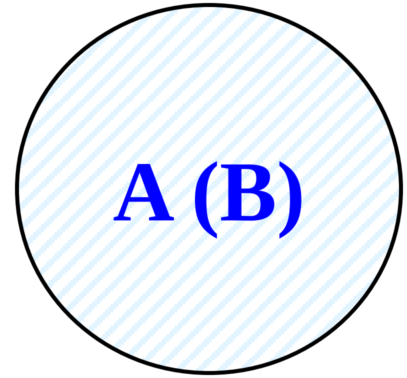
$A\cap B$ 可用下图阴影部分表示



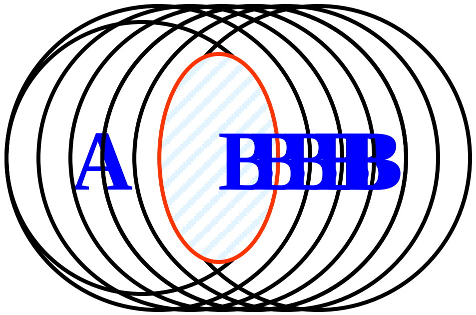
(1)若$A\subset B$则
$A\cap B = A$



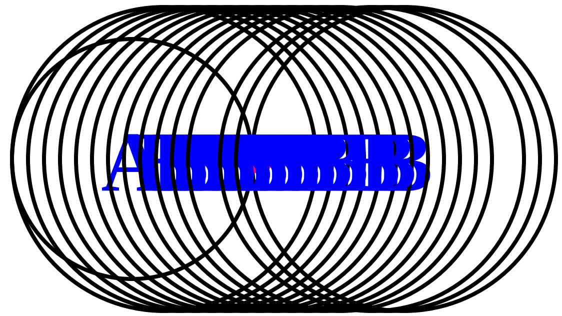
(2) 若$B\subset A$则
$A\cap B = B$



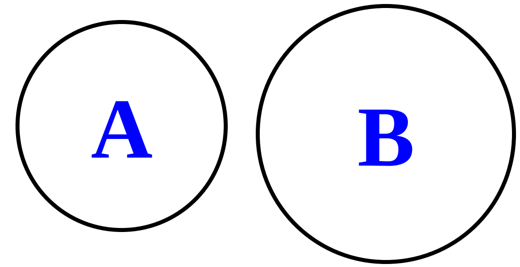
(3) 若$A = B$
则$A\cap B = A = B$



(4)A与B相交
$A\cap B\subset A$
$A\cap B\subset B$

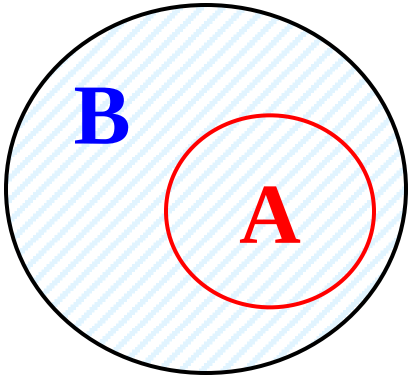


A与B相切
相交的特例

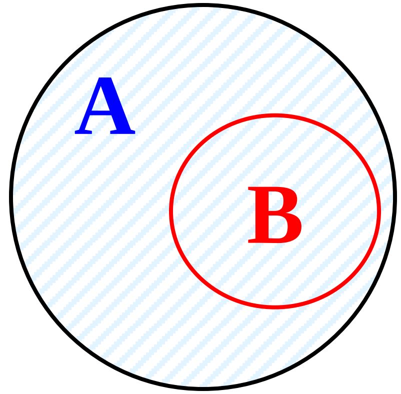


(5)A与B分离
$A\cap B = \varnothing$

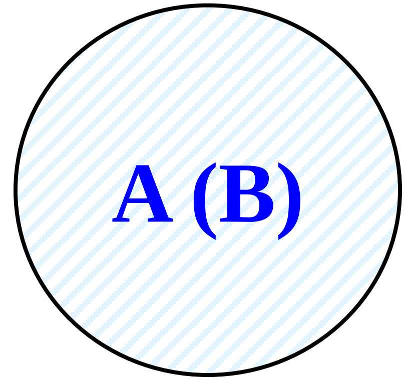
A∪B 可用下图阴影部分表示



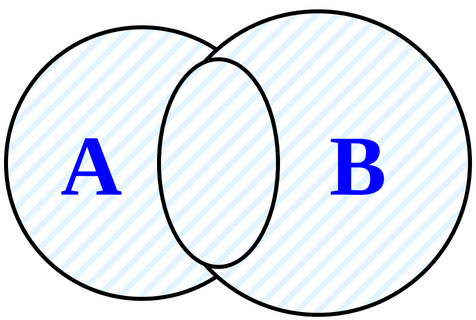
(1)若A⊂B
则A∪B = B



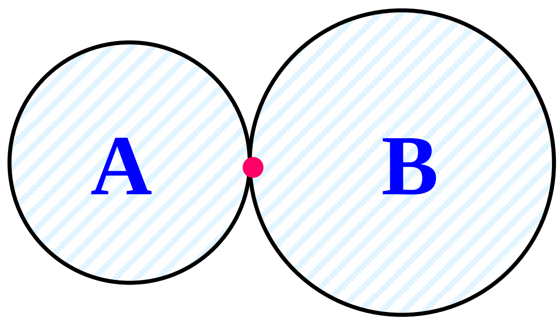
(2) 若B ⊂ A
则A∪B = A



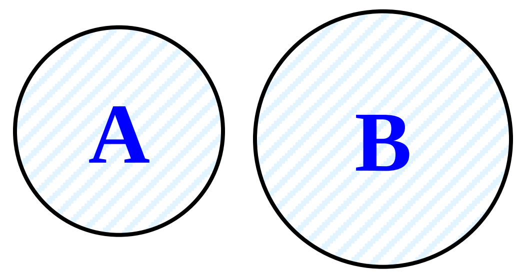
(3) 若A = B则
A∪B = A = B



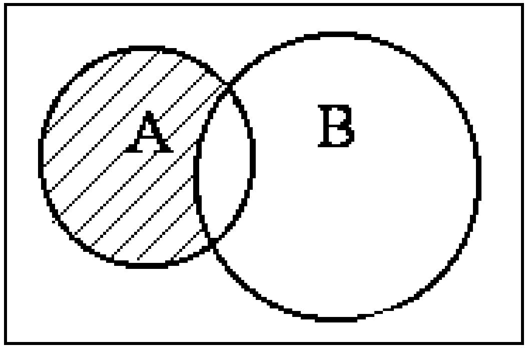
(4)A与B相交
A∪B



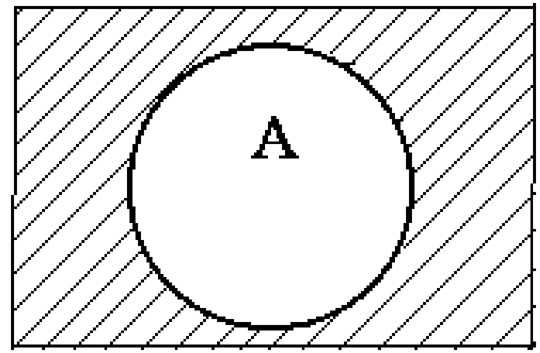
A与B相切
相交的特例



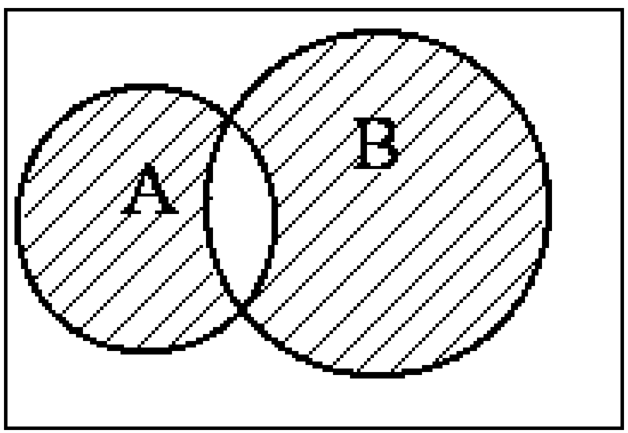
(5)A与B分离
A∪B



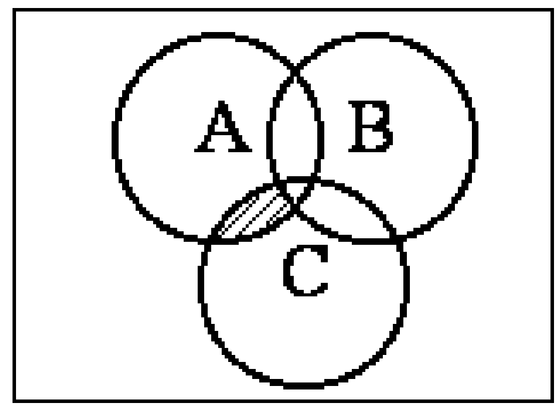
$A - B$



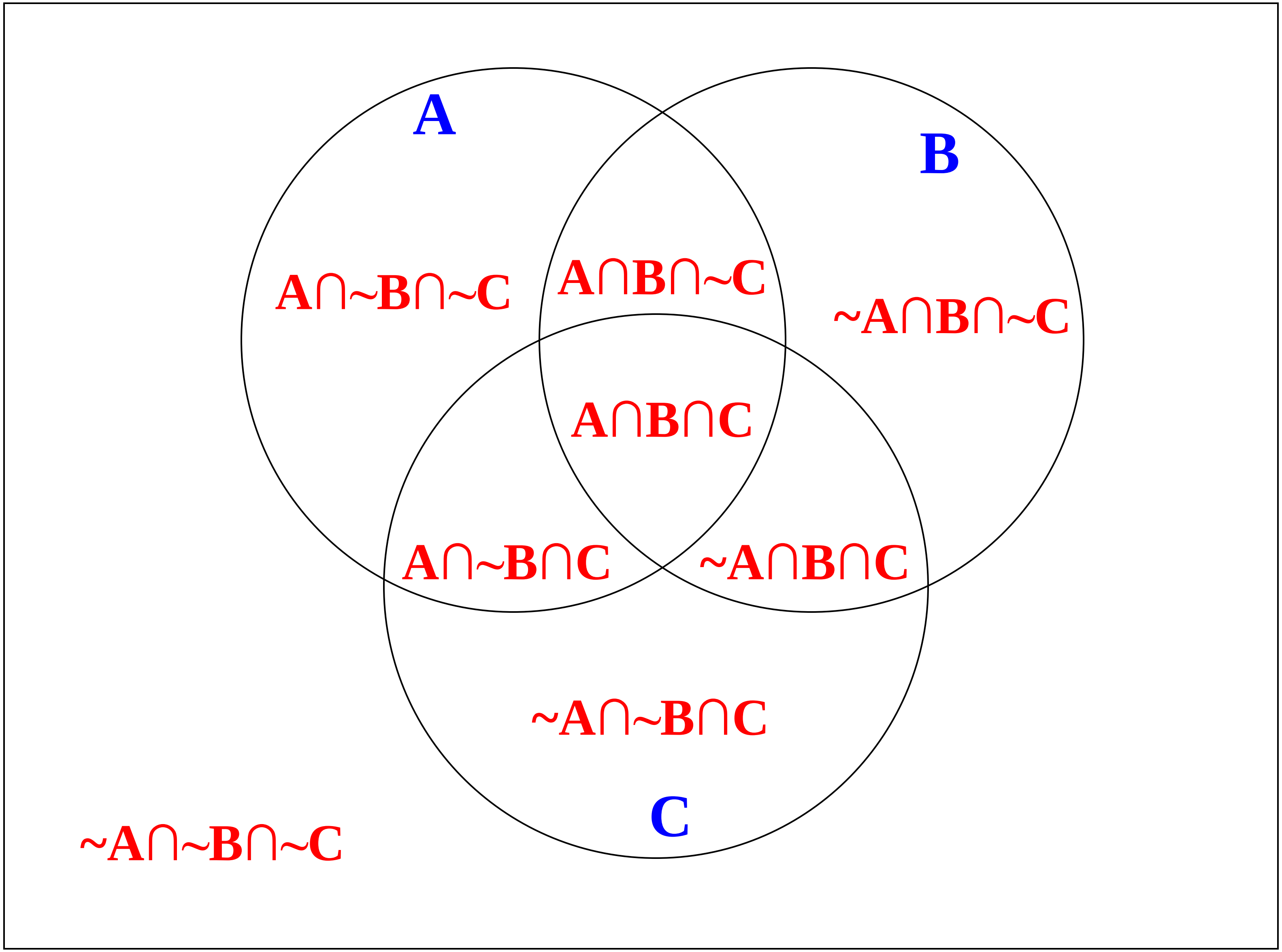
$\sim A$



$A \oplus B$



$(A \cap C) - B$


A
B
A∩~B∩~C
A∩B∩~C
~A∩B∩~C
A∩B∩C
A∩~B∩C
~A∩B∩C
~A∩~B∩C
C
~A∩~B∩~C

3.3 集合恒等式

- 大多数代数运算都遵从一定的定律, 集合运算也不例外
- 下面给出集合运算的主要算律, 用它们可推导出许多新的集合等式。对全集合E的任意子集A、B、C, 有:

(1) 等幂律 $A \cup A = A$ (3.1)

$A \cap A = A$ (3.2)

(2) 结合律 $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (3.3)

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (3.4)

$A \oplus (B \oplus C) = (A \oplus B) \oplus C$

(3) 交换律 $A \cup B = B \cup A$ (3.5)

$A \cap B = B \cap A$ (3.6)

$A \oplus B = B \oplus A$

(4) 分配律 $A\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup(A\cap C)$ (3.7)

$A\cup(B\cap C) = (A\cup B)\cap(A\cup C)$ (3.8)

$A\cap(B-C) = (A\cap B)-(A\cap C)$

$A\cup(B-C) \supseteq (A\cup B)-(A\cup C)$

(5) 同一律 $A\cup\varnothing = A$ (3.9)

$A\cap E = A$ (3.10)

$A-\varnothing = A$ $A\oplus\varnothing = A$

(6) 零律 $A\cup E = E$ (3.11)

$A\cap\varnothing = \varnothing$ (3.12)

$A-A = \varnothing$ $A\oplus A = \varnothing$

(7) 排中律 $A\cup{\sim}A = E$ (3.13)

(8) 矛盾律 $A\cap{\sim}A = \varnothing$ (3.14)

(9) 吸收律 $A \cup (A \cap B) = A$ (3.15)

$A \cap (A \cup B) = A$ /*包含, 2:1 (3.16)

(10) 德.摩根律 $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$ (3.17)

$A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$ (3.18)

$\sim(B \cup C) = \sim B \cap \sim C$ (3.19)

$\sim(B \cap C) = \sim B \cup \sim C$ (3.20)

(11) 余补律 $\sim \varnothing = E$ (3.21)

$\sim E = \varnothing$ (3.22)

(12) 双重否定律 $\sim(\sim A) = A$ (3.23)

(13) 补交转换律 $A - B = A \cap \sim B$

(14) 对称差 $A \oplus B = (A \cup B) - (A \cap B)$

$= (A - B) \cup (B - A) = (A \cap \sim B) \cup (B \cap \sim A)$

集合证明方法

- 集合恒等式证明的常用方法有基本定义法、公式法和集合成员表(真值表)法:

一、基本定义法

- 根据集合相等的充要条件是等式两边互为子集或由定义进行等价推理。
- 在求证过程中, 前提以及各集合运算的定义给出了各个步骤的依据。
- 但这种证明方法较为繁琐。

例 3.2 证明德.摩根律 (3.18)

$$A - (B\cap C) = (A - B)\cup(A - C)$$

proof $\forall x \in A - (B\cap C)$

$\Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B\cap C$

$\Leftrightarrow x \in A \wedge \sim(x \in B\cap C)$

$\Leftrightarrow x \in A \wedge \sim(x\in B \wedge x\in C)$

$\Leftrightarrow x \in A \wedge (x\notin B \vee x\notin C)$

$\Leftrightarrow (x \in A\wedge x\notin B) \vee (x\in A \wedge x\notin C)$

$\Leftrightarrow (x \in A-B)\vee(x \in A-C)$

$\Leftrightarrow x \in(A - B)\cup(A - C)$

二、公式法: 利用已证明过的集合恒等式可方便去证明另外的恒等式。若表达式中出现形为A – B的差集时，先将运算“–”转化为运算“∩”和“~”。 /* skill

例 证明 $(A - B) - C = A - (B \cup C) = (A - C) - B$
$= (A - C) - (B - C)$ /* Ex. 24

proof $(A - B) - C = (A \cap \sim B) - C = A \cap \sim B \cap \sim C$

- $A - (B \cup C) = A \cap \sim(B \cup C) = A \cap \sim B \cap \sim C$
- $(A - C) - B = (A \cap \sim C) \cap \sim B = A \cap \sim B \cap \sim C$
- $(A - C) - (B - C) = (A \cap \sim C) \cap \sim (B \cap \sim C)$

$= (A \cap \sim C) \cap (\sim B \cup C)$

$= (A \cap \sim C \cap \sim B) \cup (A \cap \sim C \cap C) = A \cap \sim B \cap \sim C$

例 设A和B为集合，证明以下七个命题等价：

(1) $A \cup B = B$;

(2) $A \subseteq B$; (5) $A \cap \sim B = \varnothing$; /*= (4)

(3) $A \cap B = A$; (6) $\sim B \subseteq \sim A$; /*= (2)

(4) $A - B = \varnothing$; (7) $\sim B \cup B = E = \sim A \cup B$。

proof 我们用循环法证明前四个命题等价：

(1) $A \cup B = B \Rightarrow$ (2) $A \subseteq B$

$\forall x \in A$

$\Rightarrow x \in A \vee x \in B$

$\Leftrightarrow x \in A \cup B$

$\Leftrightarrow x \in B$ /* $A \cup B = B$

所以 $A \subseteq B$。

(2) $A \subseteq B$ $\Rightarrow$ (3) $A \cap B = A$

$\forall x \in A \cap B$

$\Rightarrow x \in A$

即 $A \cap B \subseteq A$;

- 反之, $\forall x \in A$

$\Rightarrow x \in B$ /* $A \subseteq B$

$\Rightarrow x \in A \wedge x \in B$

$\Rightarrow x \in A \cap B$

即 $A \subseteq A \cap B$;

所以 $A \cap B = A$。

$(3)\ A \cap B = A \ \Rightarrow\ (4)\ A - B = \varnothing$

$$
\begin{aligned}
& A - B \\
&= A \cap \sim B \\
&= A \cap B \cap \sim B \\
&= \varnothing
\end{aligned}
$$

$(4)\ A - B = \varnothing \ \Rightarrow\ (1)\ A \cup B = B$

$$
\begin{aligned}
& A \cup B \\
&= B \cup A \\
&= B \cup (A - B) \qquad \text{/*并集定义} \\
&= B \cup \varnothing \\
&= B \qquad \blacksquare
\end{aligned}
$$

例 3.2 $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$

Proof 2 $A - (B \cup C)$

$= A \cap \sim(B \cup C)$

$= A \cap (\sim B \cap \sim C)$

$= (A \cap \sim B) \cap (A \cap \sim C)$

$= (A - B) \cap (A - C)$

(2) $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$

Proof 2 $A - (B \cap C)$

$= A \cap \sim(B \cap C)$

$= A \cap (\sim B \cup \sim C)$

$= (A \cap \sim B) \cup (A \cap \sim C)$

$= (A - B) \cup (A - C)$

例 28 证明 $A\cap(B-C)=(A\cap B)-(A\cap C)$

Proof $A\cap(B-C)$

$= A\cap(B\cap\sim C)$

$= A\cap B\cap\sim C$

- 又 $(A\cap B)-(A\cap C)$

$= (A\cap B)\cap\sim(A\cap C)$

$= (A\cap B)\cap(\sim A\cup\sim C)$

$= (A\cap B\cap\sim A)\cup(A\cap B\cap\sim C)$

$= A\cap B\cap\sim C$

$\therefore A\cap(B-C)=(A\cap B)-(A\cap C)$

- **对称差性质:**

(1) $A \oplus B = B \oplus A$

(2) $A \oplus \varnothing = A$; $A \oplus A = \varnothing$

$A \oplus E = \sim A$; $A \oplus \sim A = E$

(3) $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$

(4) $A \cap (B \oplus C) = (A \cap B) \oplus (A \cap C)$

- (5) $A \cup (B \oplus C) \neq (A \cup B) \oplus (A \cup C)$

(6) $(A \oplus B) \times C = (A \times C) \oplus (B \times C)$ 。

例 29 $A \cap (B \oplus C) = (A \cap B) \oplus (A \cap C)$

Proof $(A \cap B) \oplus (A \cap C)$

$= ((A \cap B) - (A \cap C)) \cup ((A \cap C) - (A \cap B))$

$= (A \cap (B - C)) \cup (A \cap (C - B))$

$= A \cap ((B - C) \cup (C - B))$

$= A \cap (B \oplus C)$

- 但 $A \cup (B \oplus C) \neq (A \cup B) \oplus (A \cup C)$

令 $A = \{1\}, B = \{2\}, C = \{2\}$

则 $(A \cup B) \oplus (A \cup C) = \varnothing$

$A \cup (B \oplus C) = A \neq \varnothing$

例 30 设A, B, C是任意集合, 用集合运算定律证明

$$(A\cup B)\cap(B\cup C)\cap(C\cup A)$$

$$=(A\cap B)\cup(B\cap C)\cup(C\cap A)$$

Proof $(A\cup B)\cap(B\cup C)\cap(C\cup A)$

$=(A\cup B)\cap[(B\cap A)\cup C]$ /* 分配律

$=[(A\cup B)\cap(B\cap A)]\cup[(A\cup B)\cap C]$ /* 分配律

$=(B\cap A)\cup[(A\cap C)\cup(B\cap C)]$ /*$(B\cap A)\subseteq(A\cup B)$

$=(A\cap B)\cup(B\cap C)\cup(C\cap A)$

- 集合的交、并、相对补、绝对补和对称差

  这五种运算在其幂集中是封闭的,

  即运算结果的新集合仍是幂集中的元素。

- 幂集运算性质:

例 31 (1) $A \subseteq B$ 当且仅当 $P(A) \subseteq P(B)$

(2) $P(A) \cap P(B) = P(A \cap B)$

(3) $P(A) \cup P(B) \subseteq P(A \cup B)$

(4) $P(\sim A) \neq \sim(P(A))$

(5) $P(A - B) \subseteq (P(A) - P(B)) \cup \{\varnothing\}$

(1) $A \subseteq B$ 当且仅当 $P(A) \subseteq P(B)$

Proof 必要性 $\forall x \in P(A)$

$\Leftrightarrow x \subseteq A$

$\Rightarrow x \subseteq B$

$\Leftrightarrow x \in P(B)$

所以$P(A) \subseteq P(B)$;

- 充分性 $\forall x \in A$

$\Leftrightarrow \{x\} \in P(A)$

$\Rightarrow \{x\} \in P(B)$

$\Leftrightarrow x \in B$

所以 $A \subseteq B$。

(2) $P(A\cap B) = P(A)\cap P(B)$

Proof $\forall x \in P(A\cap B)$

$\Leftrightarrow x \subseteq A\cap B$

$\Leftrightarrow x \subseteq A \wedge x \subseteq B$

$\Leftrightarrow x\in P(A) \wedge x\in P(B)$

$\Leftrightarrow x \in P(A)\cap P(B)$

所以 $P(A\cap B) = P(A)\cap P(B)$。

(4) $P(\sim A) \neq \sim(P(A))$

Proof $\varnothing \in P(\sim A)$, 但 $\varnothing \notin \sim(P(A))$

所以 $P(\sim A) \neq \sim(P(A))$。

(3) $P(A) \cup P(B) \subseteq P(A \cup B)$

Proof $\forall x \in P(A) \cup P(B)$

$\Leftrightarrow x \in P(A) \lor x \in P(B)$

$\Leftrightarrow x \subseteq A \lor x \subseteq B$ /* $A = \{1, 3\}, B = \{2, 4\}$

$\Rightarrow x \subseteq A \cup B$ /* $x = \{1, 2\}$

$\Leftrightarrow x \in P(A \cup B)$

所以$P(A) \cup P(B) \subseteq P(A \cup B)$;

- 当$A \cup B = B$, $P(A) \cup P(B) = P(A \cup B)$。

三、集合成员表 (真值表Truth Table) 法

- 为进一步了解集合之间的逻辑关系，可用表格的方式描述集合的交、并、补运算的定义。
- 在表的列中, 0表示元素$x \notin S$, 1表示$x \in S$, 这种表格称为集合成员表(真值表)。

定义 1.5.1 集合S的补集~S定义如下：

若 $x \in \sim S$, 则$x \notin S$;

若 $x \in S$, 则$x \notin \sim S$。

表1.5.1称为集合~S的真值表。

表 1.5.1

S	~S
0	1
1	0

- 表1.5.2给出集合$A\cap B$、集合$A\cup B$的真值表。

表 1.5.2

A	B	$A\cap B$	$A\cup B$
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	1

- 成员数目不大时, 可以用集合真值表证明集合。

定义 1.5.2 任意有限集合S在其所有集合的可能赋值下的表称为集合S的真值表。 ■

- 对集合的恒等式, 构造真值表的步骤如下:

例 32 用集合真值表证明 德.摩根律

$\sim(A\cap B) = \sim A\cup\sim B$ 表 1.5.3

A	B	~A	~B	$A\cap B$	$\sim(A\cap B)$	$\sim A\cup\sim B$
0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	1	1
1	1	0	0	1	0	0

- 因为真值表中集合$\sim(A\cap B)$和$\sim A\cup\sim B$所标记的列完全相同, 所以 $\sim(A\cap B) = \sim A\cup\sim B$。

(1) 列出有限集合S中所有集合$S_1, S_2, \ldots, S_n$所有可能的赋值, 不同的赋值共有2^n个。

(2) 按照从内到外的顺序写出集合S的各层次。

(3) 对应每个赋值, 计算集合S的各层次值, 直到最后计算出整个集合S的值。 ∎

- 利用集合真值表, 可判断集合的性质及集合间的关系。

1. 若集合是全集, 则其真值表列值必全为1, 即所有集合都是它的成员。
2. 若集合是空集, 则其真值表列值必全为0, 即没有集合是它的成员。
3. 若集合A和B相等, 则它们的真值表对应行的值必相同
4. 若集合A是B的子集, 则当A的值为1时, B的对应行的值必为1。 ∎

3.4 有穷集合的计数

- 设A和B是有限集合, 由集合运算的定义, 下列各式成立

1. $|A \cup B| \le |A| + |B|$
2. $|A \cap B| \le \min(|A|, |B|)$
3. $|A - B| \ge |A| - |B|$
4. $|A \oplus B| = |A| + |B| - 2|A \cap B|$

- 在有限集合的元素计数问题中, 容斥(也称加法)原理有着更广泛的应用。所谓容斥(inclusion-exclusion)是指我们计算某类事物的数目时,
- 要排斥那些不应包含在这个计数中的数目；但同时要包容那些被错误排斥了的数目，以此补偿。

容斥定理 1.3.1 $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

proof (1) 当 $A \cap B = \varnothing$ 时, 显然

$$|A \cup B| = |A| + |B| = |A| + |B| - |A \cap B|。$$

(2) 当 $A \cap B \neq \varnothing$ 时, 则 $(A \cap B) \cap (A \cap \sim B) = \varnothing$,

$|A| = |A \cap (B \cup \sim B)| = |(A \cap B) \cup (A \cap \sim B)|$ /*分配律

$= |A \cap B| + |A \cap \sim B|$, /*由(1)

同理, $|B| = |(A \cup \sim A) \cap B| = |A \cap B| + |\sim A \cap B|$,

$|A| + |B| = |A \cap \sim B| + |\sim A \cap B| + |A \cap B| + |A \cap B|$

$A \cup B = (A \cap \sim B) \cup (\sim A \cap B) \cup (A \cap B)$ /*互不相交

因为 $|A \cup B| = |A \cap \sim B| + |\sim A \cap B| + |A \cap B|$ /*由(1)

所以 $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$。 ∎

定理 1.3.2 $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C|$

$- |A \cap B| - |B \cap C| - |C \cap A| + |A \cap B \cap C|$ 。

proof $|A \cup B \cup C| = |A \cup B| + |C| - |(A \cup B) \cap C|$

$= |A| + |B| - |A \cap B| + |C| - |(A \cap C) \cup (B \cap C)|$ /*分配律

$= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - (|A \cap C| + |B \cap C|$

$- |(A \cap C) \cap (B \cap C)|)$ /*定理 1.3.1

$= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |C \cap A| + |A \cap B \cap C|$

- 用数学归纳法可证定理 1.3:

$$|\bigcup_{i=1}^{n} A_i| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \ldots$$

$$+ |(-1)^{n-1}| A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n| 。$$

例 33 对100名大学生进行调查的结果是:

34人爱好围棋，24人爱好美术，48人爱好音乐;

13人既爱好围棋又爱好音乐,

14人既爱好围棋又爱好美术,

15人既爱好美术又爱好音乐;

有25人这三种爱好都没有,

问这三种爱好都有的大学生人数是多少?

解 设A为爱好围棋的大学生集合,

B为爱好美术的大学生集合,

C为爱好音乐的大学生集合。 由题意知:

$|A| = 34, |B| = 24, |C| = 48$;

$|A \cap B| = 14, |B \cap C| = 13, |C \cap A| = 15$;

$100 - |A \cup B \cup C| = |\sim A \cap \sim B \cap \sim C| = 25$,

$|A \cup B \cup C| = 75$;

由容斥定理知: $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C|$

$- |A \cap B| - |B \cap C| - |C \cap A|$

$+ |A \cap B \cap C|$

$75 = 34 + 24 + 48 - 14 - 13 - 15 + |A \cap B \cap C|$

$\therefore |A \cap B \cap C| = 11$

即这三种爱好都有的大学生人数是11人。

Ex 31 求1到250之间能被2, 3, 5和7之一整除的整数个数.

Sol 设S_2表示1到250之间能被2整除的整数集合,

S_3表示1到250之间能被3整除的整数集合,

S_5表示1到250之间能被5整除的整数集合,

S_7表示1到250之间能被7整除的整数集合。

$\lfloor x \rfloor$表示小于或等于x的最大整数。

$|S_2| = \lfloor 250/2 \rfloor = 125,\quad |S_3| = \lfloor 250/3 \rfloor = 83,$

$|S_5| = \lfloor 250/5 \rfloor = 50,\quad |S_7| = \lfloor 250/7 \rfloor = 35,$

$|S_2 \cap S_3| = \lfloor 250/(2\times 3) \rfloor = 41,\ |S_2 \cap S_5| = \lfloor 250/(2\times 5) \rfloor = 25,$

$|S_2 \cap S_7| = \lfloor 250/(2\times 7) \rfloor = 17,\ |S_3 \cap S_5| = \lfloor 250/(3\times 5) \rfloor = 16,$

$|S_3 \cap S_7| = \lfloor 250/(3\times 7) \rfloor = 11,\ |S_5 \cap S_7| = \lfloor 250/(5\times 7) \rfloor = 7,$

$$|S_2 \cap S_3 \cap S_5| = \lfloor 250/(2\times 3\times 5) \rfloor = 8,$$

$$|S_2 \cap S_3 \cap S_7| = \lfloor 250/(2\times 3\times 7) \rfloor = 5,$$

$$|S_2 \cap S_5 \cap S_7| = \lfloor 250/(2\times 5\times 7) \rfloor = 3,$$

$$|S_3 \cap S_5 \cap S_7| = \lfloor 250/(3\times 5\times 7) \rfloor = 2,$$

$$|S_2 \cap S_3 \cap S_5 \cap S_7| = \lfloor 250/(2\times 3\times 5\times 7) \rfloor = 1,$$

所以 $|S_2 \cup S_3 \cup S_5 \cup S_7| = |S_2| + |S_3| + |S_5| + |S_7|$

$- |S_2 \cap S_3| - |S_2 \cap S_5| - |S_2 \cap S_7| - |S_3 \cap S_5|$

$- |S_3 \cap S_7| - |S_5 \cap S_7|$

$+ |S_2 \cap S_3 \cap S_5| + |S_2 \cap S_3 \cap S_7| + |S_2 \cap S_5 \cap S_7|$

$+ |S_3 \cap S_5 \cap S_7| \quad - |S_2 \cap S_3 \cap S_5 \cap S_7|$

$= 125 + 83 + 50 + 35 - 41 - 25 - 17 - 16 - 11 - 7$

$+ 8 + 5 + 3 + 2 - 1 = 193$

- 当已知条件不能直接应用容斥定理时，

  使用文氏图可以方便地解决有穷集的计数问题。
- 首先根据已知条件把对应的文氏图画出来。
- 一般地说，每一条性质决定一个集合。

  有多少条性质，就有多少个集合。
- 如果没有特殊说明，任何两个集合都画成相交的，

  然后将已知集合的元素数填入表示该集合的区域内。
- 通常从几个集合的交集填起，根据计算的结果将数字逐步填入所有的空白区域。
- 如果区域的数字是未知的，可以设为变量。根据题目的条件，列出一次方程组，就可以求解得所需要的结果。

例 3.8 对24名会外语的科技人员进行掌握外语情况的调查。其统计结果如下: 会英、日、德和法语的人分别为13, 5, 10和9人。其中同时会英语和日语的有2人,

会英、德和法语中任何两种语言的人都是4人。已知会日语的人既不懂法语也不懂德语, 分别求只会一种语言(英、德、法、日)的人数, 和会三种语言的人数。

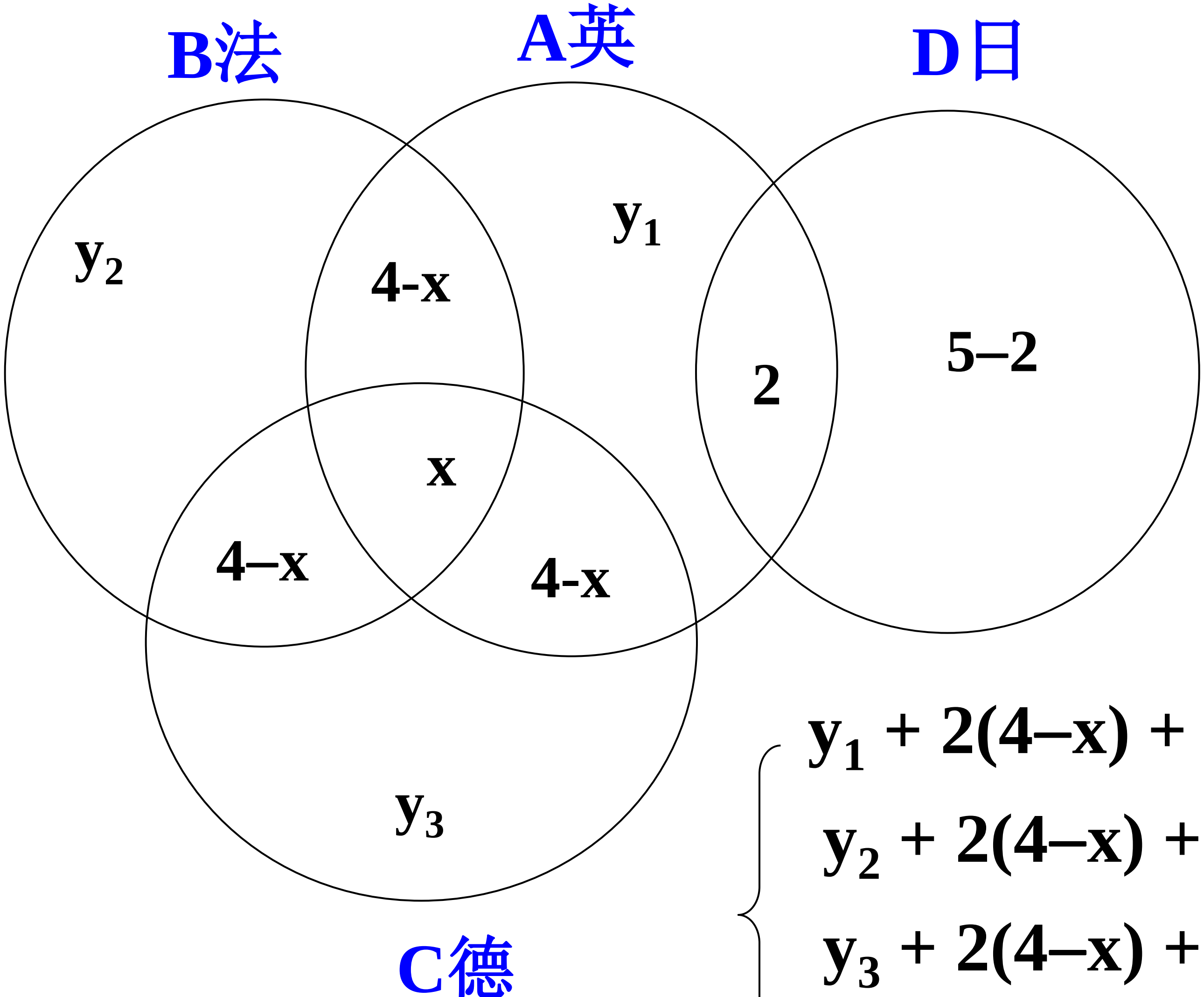
解 令A, B, C, D分别表示会英、法、德、日的人集合。

根据题意画出文氏图如下。设同时会三种语言的有x人

,

只会英、法或德语一种语言的分别为y_1, y_2和y_3人。

将x和y_1, y_2, y_3填入图中相应的区域, 然后依次填入其他区域的人数，根据题中的已知条件列出方程组如下



$$\begin{cases} y_1 + 2(4-x) + x + 2 = 13 \\ y_2 + 2(4-x) + x = 9 \\ y_3 + 2(4-x) + x = 10 \\ y_1 + y_2 + y_3 + 3(4-x) + x = 19 \end{cases}$$

解得 $x = 1, y_1 = 4, y_2 = 2, y_3 = 3.$

例 3.9 某班有25个学生, 其中14人会打篮球, 12人会打排球, 6人会打篮球和排球, 5人会打篮球和网球, 有2人会打这三种球。6个会打网球的人都会打篮球或排球, 求不会打球的人 。

解 设会打排球、网球、篮球的学生集合分别为A, B, C,

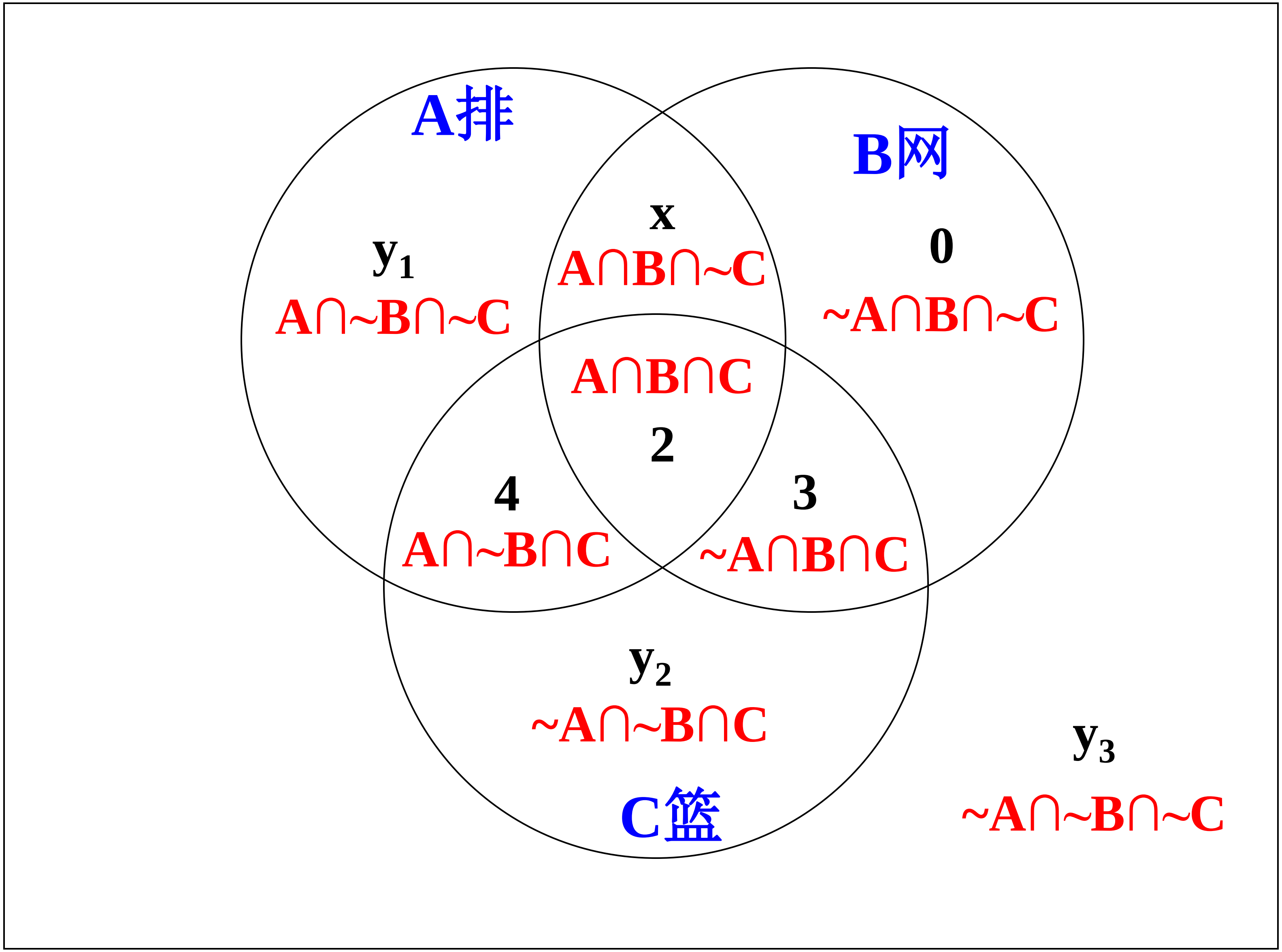
- 根据题意画出文氏图如下。
- 设x是会打网球和排球, 但不会打篮球的人数，则有

  $x + 2 + 3 + 0 = 6$, 解得 $x = 1$。
- 再设y_1, y_2分别表示只会打排球和只会打篮球的人数,

  又有 $y_1 + x + 2 + 4 = 12$ 和 $y_2 + 4 + 2 + 3 = 14$

  解得 $y_1 = 5$, $y_2 = 5$ 最后设y_3为不会打球的人, 由

  $y_1 + y_2 + y_3 + x + 2 + 3 + 4 + 0 = 25$ 解得 $y_3 = 5$ 。■


A排
B网
C篮
x
A∩B∩~C
y1
A∩~B∩~C
0
~A∩B∩~C
A∩B∩C
2
4
A∩~B∩C
3
~A∩B∩C
y2
~A∩~B∩C
y3
~A∩~B∩~C

- 究竟是先有鸡还是先有蛋?这一经典问题困扰了人类数百年。近日，英国科学家宣称已经破解了这个谜团，答案就是先有鸡后有蛋，理由是他们发现一种能够催化蛋壳形成的蛋白质只存在于鸡的卵巢内。
- 据英国《每日邮报》7月14日报道，谢菲尔德大学和华威大学的研究人员日前撰写了一篇题为《蛋壳蛋白质晶核的结构控制》的论文，文中详细阐述了科学家用一台超级电脑“放大”鸡蛋形成过程所得出的结论：一种名为ovocledidin-17(简称OC-17)的蛋白是加速蛋壳生长的催化剂，没有OC- 17蛋白，鸡蛋的外表就无法结晶形成蛋壳。
- 这种蛋白将碳酸钙转换为构成蛋壳的方解石晶体。方解石晶体存在于许多骨骼和蛋壳内，但母鸡形成方解石晶体的速度比任何物种都快——每24小时生成6 克蛋壳。
- 谢菲尔德大学工程材料系博士科林·弗里曼介绍说:“科学家以前就发现了OC-17蛋白,并猜测它与鸡蛋形成有关。在展开细致研究后,我们终于了解到它是如何控制鸡蛋形成过程的。有趣的是,各种禽类似乎都有类似OC-17这样可催化蛋壳形成的蛋白。”
- 弗里曼下结论说，“有了蛋壳，蛋黄和保护小鸡的液体才有地方住，要是没有卵巢里的OC-17蛋白就不可能有鸡蛋。
- 因此，一定是先有鸡再有蛋。”