厦门大学《概率统计I》课程
半期考试卷

________学院______系______年级______专业

主考教师：______　　试卷类型：（A卷）

1.

分数	阅卷人

(10分)设三个事件A,B,C满足两两独立，以及$ABC=\Phi$。已知$P(A)=P(B)=P(C)$，以及三个事件A,B,C中至少有两个发生的概率为0.12。

(i) 求$P(A)$；

(ii) 试用A,B,C表示以下事件，并求它们的概率：事件A,B,C中至少有一个发生；至多有一个发生；至多有两个发生。

解：(i) "至少有两个发生" $= AB\cup AC\cup BC$，$P(AB\cup AC\cup BC)=0.12$

由$ABC=\varnothing$，有AB，AC，BC满足两两互不相容.

则 $P(AB\cup AC\cup BC)=P(AB)+P(AC)+P(BC)$

(两两独立) $=P(A)P(B)+P(A)P(C)+P(B)P(C)$

再由 $P(A)=P(B)=P(C) \Rightarrow P(A)^2=0.04 \Rightarrow P(A)=0.2$

(ii) "至少有一个发生" $= A\cup B\cup C$，

$P(A\cup B\cup C)=3P(A)-3P(AB)=3\times0.2-3\times0.04=0.48$

"至多有一个发生" $=\overline{AB\cup AC\cup BC}$，$P(\overline{AB\cup AC\cup BC})=1-0.12=0.88$

"至多有两个发生" $=\overline{ABC}$，$P(\overline{ABC})=1-0=1$

2.

分数	阅卷人

(8分)一年有四个季节：春、夏、秋、冬。假设某地区每个人每个季节出生都是等可能的，现有一团体有n名成员，成员之间没有联系，符合古典概型假设。试针对$n=5$，求以下概率：

(i) 试求至少有两名成员出生季节相同的概率；

(ii) 已知成员甲出生季节为春季，问其它成员至少有一名出生季节也是春季的概率。

解：

当 $n=5$ 时

(i) P(至少有两名成员出生季节相同) $=1$

(ii) P(其它成员至少有一名出生季节也是春季) $=1-\frac{3^4}{4^4}=1-\frac{81}{256}=\frac{175}{256}$

3.

分数	阅卷人

(16分)在一箱子中装有10只球, 有3个红球，4个绿球，3个蓝球。其中每种颜色的球均有一个为坏球，其余均为好球。每次从中随机取出一个球，检测其质量，若为好球，则放回原箱中；若为坏球，则放回一个同颜色的好球。

(i) 求第一次取到坏球（记为事件A_1）的概率；第一次取到坏球条件下取到的为蓝球（记为条件事件$B_1|A_1$）的条件概率；

(ii) 求第二次取到坏球（记为事件A_2）的概率；第二次取到坏球条件下取到的为蓝球（记为条件事件$B_2|A_2$）的条件概率；

(iii) 求第一次取到蓝球（记为事件B_1）的概率；第一次取到蓝球条件下取到的为坏球（记为条件事件$A_1|B_1$）的条件概率；

(iv) 求第二次取到蓝球（记为事件B_2）的概率；第二次取到蓝球条件下取到的为坏球（记为条件事件$A_2|B_2$）的条件概率；

(v) 问事件A_1,A_2,B_1,B_2中存在哪几对事件满足独立关系？

解：(i) $P(A_1)=\frac{3}{10}$，　$P(B_1|A_1)=\frac{1}{3}$

(ii) $P(A_2)=P(A_2|A_1)P(A_1)+P(A_2|\bar{A_1})P(\bar{A_1})$

$=\frac{2}{10}\cdot\frac{3}{10}+\frac{3}{10}\cdot\frac{7}{10}=\frac{27}{100}$

$P(B_2A_2)=P(B_2A_2|B_1A_1)P(B_1A_1)+P(B_2A_2|\overline{B_1A_1})P(\overline{B_1A_1})$

$=0\cdot\frac{1}{10}+\frac{1}{10}\cdot\frac{9}{10}=\frac{9}{100}$

$P(B_2|A_2)=\frac{P(B_2A_2)}{P(A_2)}=\frac{1}{3}$

(iii) $P(B_1)=\frac{3}{10}$　　$P(A_1|B_1)=\frac{1}{3}$

(iv) $P(B_2)=\frac{3}{10}$　　$P(A_2|B_2)=\frac{P(A_2B_2)}{P(B_2)}=\frac{3}{10}$

(v) 仅有一对事件 B_1，B_2 满足独立

4.

分数	阅卷人

(12分) (i) 已知随机变量X服从二项分布$b(3,0.9)$，求其分布律以及分布函数；

(ii) 已知离散型随机变量Y的分布函数为

$$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<0;\\ 0.001, & 0\le y<1;\\ 0.027, & 1\le y<2;\\ 0.243, & 2\le y<3;\\ 0.729, & 3\le y<4;\\ 1, & y\ge 4.\end{cases}$$

试求其分布律。

解：(i) $P\{X=k\}=C_3^k\left(\frac{9}{10}\right)^k\left(\frac{1}{10}\right)^{3-k}=\frac{1}{10^3}C_3^k 9^k,\quad k=0,1,2,3$

$$X\sim\begin{pmatrix}0 & 1 & 2 & 3\\ 0.001 & 0.027 & 0.243 & 0.729\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow F_X(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 0.001, & 0\le x<1\\ 0.028, & 1\le x<2\\ 0.271 & 2\le x<3\\ 1 & x\ge 3\end{cases}$$

(ii) $$Y\sim\begin{pmatrix}0 & 1 & 2 & 3 & 4\\ 0.001 & 0.026 & 0.216 & 0.486 & 0.271\end{pmatrix}$$

5.

分数	阅卷人

(12分) 已知随机变量$X \sim N(\mu, \sigma^2)$，随机变量$Y \sim N(0,1)$，并且$P\{Y \le 1\} = 0.8413$，$P\{Y \le 2\} = 0.9772$，$P\{Y \le 3\} = 0.9987$。

(i) 已知$\mu = 1$，$\sigma^2 = 4$，试求$P\{X \le 1\}$，$P\{|X| \le 3\}$；

(ii) 已知$\mu = 1$，$P\{X \le 2\} = 0.9772$，试求σ。

解: (i) $P\{X \le 1\} = 0.5$

$P\{|X| \le 3\} = P\{-3 \le X \le 3\} = P\{-2 \le \frac{X-1}{2} \le 1\}$

$= \Phi(1) - \Phi(-2) = \Phi(1) - [1 - \Phi(2)] = 0.8413 + 0.9772 - 1 = 0.8185$

(ii) $P\{X \le 2\} = P\{\frac{X-1}{\sigma} \le \frac{1}{\sigma}\} = 0.9772 = \Phi(2)$

$\Rightarrow \frac{1}{\sigma} = 2 \Rightarrow \sigma = 0.5$

6.

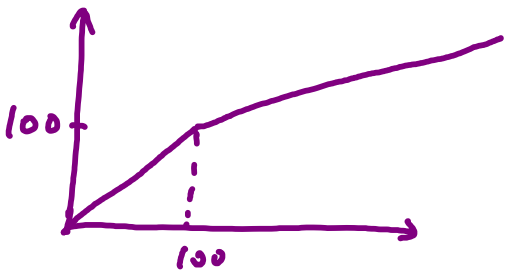
分数	阅卷人

(10分) 已知某保险售卖的一份保单，保险标的物损失额X的密度函数如下：

$$f_X(x)=\begin{cases} e^{-x}, & 0<x\le 100; \\ 0.5e^{-0.5x-50}, & x>100; \\ 0, & \text{其他。} \end{cases}$$

而实际支付的赔偿金额Y如下：当损失额X不超过100时，支付X；当损失额X超过100时，支付$100+0.5(X-100)$。试求Y的密度函数。

解: $Y=\begin{cases} X, & 0<X\le 100 \\ 100+0.5(X-100), & X>100 \end{cases}$



$y=g(x)=\begin{cases} x, & 0<x\le 100 \\ 100+0.5(x-100), & x>100 \end{cases}$

$\Rightarrow x=h(y)=\begin{cases} y, & 0<y\le 100 \\ 100+2(y-100), & y>100 \end{cases}$

$\Rightarrow f_Y(y)=f_X(h(y))\cdot|h'(y)|$

$=\begin{cases} e^{-y}, & 0<y\le 100 \\ 0.5e^{-50-(y-100)-50}\cdot 2, & y>100 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$

$=\begin{cases} e^{-y}, & y>0 \\ 0, & y\le 0 \end{cases}$

7.

分数	阅卷人

(12分)已知(X,Y)的联合密度如下：

$$f(x,y)=\begin{cases} cx, & 0\le x\le 1, x^3\le y\le x; \\ 0, & 其他. \end{cases}$$

试求常数c，以及$P\{Y\ge X^2\}$。

解：由 $1=\int_0^1 dx\int_{x^3}^{x} cx\,dy = \int_0^1 cx\cdot[x-x^3]\,dx$

$= c\cdot[\frac{1}{3}-\frac{1}{5}] = \frac{2}{15}c \Rightarrow c=7.5$

$P\{Y\ge X^2\} = \int_0^1 dx\int_{x^2}^{x} 7.5x\,dy = \int_0^1 7.5x\,[x-x^2]\,dx$

$= 7.5\cdot[\frac{1}{3}-\frac{1}{4}] = 0.625$

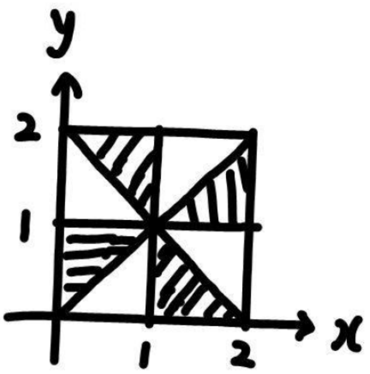
8.

分数	阅卷人

(8分)已知(X,Y)的联合密度如下：

$$f(x,y)=\begin{cases} 0.5, & (x,y)\in 图示阴影部分; \\ 0, & 其他. \end{cases}$$

试求X的边际密度函数。



解：$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy$

$$=\begin{cases} \int_x^1 \frac{1}{2}dy+\int_{2-x}^{2}\frac{1}{2}dy, & 0<x\le 1 \\ \int_0^{2-x}\frac{1}{2}dy+\int_1^{x}\frac{1}{2}dy, & 1<x<2 \\ 0, & 其它 \end{cases}$$

$$=\begin{cases} \frac{1}{2}, & 0<x<2 \\ 0, & 其它 \end{cases}$$

9.

分数	阅卷人

(12分)已知(X,Y)的联合密度如下：

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{6}{7}(x+y)^2, & 0<x<1,0<y<1;\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

(i) 试求条件密度函数$f_{Y|X}(y|x)$；

(ii) 已知$Z=Y/X$，试求Z的密度函数$f_{Y/X}(z)$.

解：(i) $$f_X(x)=\begin{cases}\int_0^1 \frac{6}{7}(x+y)^2 dy, & 0<x<1\\ 0, & 其它\end{cases}$$

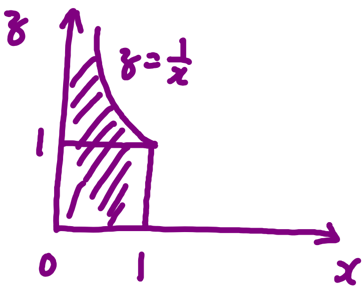
$$=\begin{cases}\frac{2}{7}(3x^2+3x+1), & 0<x<1\\ 0, & 其它\end{cases}$$

当 $0<x<1$ 时，

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases}\frac{3(x+y)^2}{3x^2+3x+1}, & 0<y<1\\ 0, & 其它\end{cases}$$

(ii) 由 $z=\frac{y}{x} \Rightarrow y=xz$

$$\begin{cases}0<x<1\\ 0<xz<1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}0<x<1\\ 0<z<\frac{1}{x}\end{cases}$$



$$\Rightarrow \begin{cases}0<z<1\\ 0<x<1\end{cases} 或 \begin{cases}1<z<+\infty\\ 0<x<\frac{1}{z}\end{cases}$$

$$\Rightarrow f_{\frac{Y}{X}}(z)=\begin{cases}\int_0^1 \frac{6}{7}(x+xz)^2\cdot x\, dx, & 0<z<1\\ \int_0^{\frac{1}{z}} \frac{6}{7}(x+xz)^2\cdot x\, dx, & 1<z<+\infty\\ 0, & 其它\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\frac{3}{14}(1+z)^2, & 0<z<1\\ \frac{3}{14}\frac{(1+z)^2}{z^4}, & 1<z<+\infty\\ 0, & 其它\end{cases}$$