离散数学

Discrete Mathematics

吴梅红

厦门大学计算机科学系

E-mail: wmh@xmu.edu.cn

- 现代科学技术(包括计算机科学与技术)的发展是与现代数学的发展密切相关、互相促进的。
- 计算机的高速发展与广泛应用，促进了信息数字化、符号化与离散化。
- 离散与连续是现实世界中物质运动的对立统一的两个方面。

离散数学与连续数学是描述、刻划和表达现实世界物质运动的两种重要工具。

- 离散数学的原理和方法已成为计算机科学与技术的重要理论基础之一。

第一部分　数 理 逻 辑

- 数理逻辑 (又称符号逻辑) 是采用数学的方法,
  研究思维结构、推理形式及其规律的一门边缘学科。
- 所谓数学方法是：用一套数学的符号(形式语言)系统
  来描述和处理思维形式的逻辑结构及其规律,
  从而把对思维的研究转变为对符号的研究。
- 形式语言不但避免了自然语言的歧义性，同时将推理理论公式化。
- 课程的内容, 基本上限于经典数理逻辑的范畴, 涉及数学、哲学、逻辑与语言学的范畴 (逻辑 + 语言(语法和语义) + 哲学)。

- 数理逻辑的哲学方面是形式逻辑,

而形式逻辑的数学化则构成了数理逻辑的研究内容。

- 数理逻辑既是数学又是逻辑学:

它研究数学中的逻辑问题,

用数学的方法研究形式逻辑。

- 计算机硬件、软件、算法和语言都具有数理逻辑性质
- 本课程只介绍数理逻辑的基础部分

——逻辑演算部分。包括:

- 命题演算 **Propositional Calculus ;**
- 一阶谓词演算 **First-Order Predicate Calculus;**

所讨论的都是纯逻辑的内容。

第一章　命 题 逻 辑

- 数理逻辑研究的中心问题是推理,

  即研究推理中前提和结论之间的形式关系,

  而不涉及前提和结论的具体内容。

  推理的基本单位是命题。

1.1 命题与联结词

一、命题与真值

定义 能判定真假但不能既真又假的陈述句 (包括符号化的等式和不等式) 称作命题。

- 命题的定义中包含二层含义:

(1) 在语法上, 命题必须是陈述句。疑问句、祈使句和感叹句等, 它们无所谓真假, 所以不是命题.

(2) 命题具有唯一的真值, 真或假,

这与我们是否知道它的真假(待定)是两回事。

- 陈述句为真⊕为假的这种性质, 称为命题的真值(truth)。但陈述句未必是命题。
- 凡与事实相符的命题为真命题, 其真值为真;
  否则称为假命题, 其真值为假。
- 我们将真值也符号化:
  用1 (或T) 表示“真”; 用0 (或F) 表示“假”。

例 1.1 判断下列语句是否为命题:

1) 海洋的面积比陆地的面积大。

解 是真命题。

2) $6 + 2 > 9$

解 是假命题。

3) 火星上有生命。

解 是命题, 在人类历史发展的长河中能够判断它的真假性。由于人们当前的认识水平, 尚未知其真假 (待定)。

4) $11 + 1 = 100$

解 是命题, 其真假取决于采用哪一种进制。

若是二进制, 则是真的, 否则就是假的。

5) 三角形的三内角和等于180。

解 是命题, 在欧几里得几何学, 它是真的;

在非欧几何学, 它是假的。

6) 实验是检验真理的唯一标准。

解 是命题, 辨证唯物主义者认为它是一个真命题, 形而上学者认为它是一个假命题。

7) $x + y > 10$。

解 本陈述句不是命题, 是命题变元。 由于x与y的不确定性, 使得该陈述句的真值不惟一。

当$x = 5, y = 8, 5 + 8 > 10$正确。

而当$x = 5, y = 4, 5 + 4 > 10$不正确。

8) 本命题是假的。

解 本陈述句是悖论paradox。

9) 你喜欢数学吗?

解 是疑问句, 不是命题。

10) 让我们努力学习吧。

解 是祈使句, 不是命题。

11) 啊, 我的天哪!

解 是感叹句, 不是命题。

- 为了对命题进行逻辑演算, 我们采用数学方法将命题符号化。

- 命题一般用(大、小写)字母p, q, r, ... 或带有下标的字母p_i, q_i, r_i, ...来表示, 称为命题标识符。
- 一个抽象的真命题也可以用1表示,
  一个抽象的假命题也可以用0表示。
- 前面所列举的一些命题在语言学中, 它们都是简单(的陈述)句。
- 在数理逻辑中, 将它们称为简单命题或原子(atomic)命题, 即不能再分解为更简单的命题。

二、命题联结词

定义 若干简单命题通过命题联结词(connectives)联结而成的新命题称作是复合(compound)命题。

- 命题联结词 是自然语言中有关联结词的逻辑抽象, 它们作用于命题时, 和数学运算符号相当, 所以又称逻辑运算符。
- 它反映了复合命题和部分命题之间的真假关系, 这种关系是命题联结词的逻辑内容。

- 自然语言中, 人们常常使用“或”、“并”、“与”、“且”、“但是”等一些联结词, 对它们的使用, 一般没有很严格的定义, 因而有时显得很不确切。
- 逻辑语言是人工语言, 它们已用真值表严格定义并符号化, 其含义清晰准确, 避免了自然语言中常见的歧义。
- 因此, 命题联结词 与 自然语言中 有关联结词, 既有共同点又有不同点。
- 下面我们定义并符号化逻辑上常用的命题联结词, 并用对应的真值表(**truth table**)来表示。

定义 1.1 设p为任一命题, 复合命题“非p”(或p的否定)称为p的否定式, 记作“$\neg p$”。$\neg$称为否定(negation)联结词。

- $\neg p$的逻辑关系为p不成立, 于是

$\neg p$取值为真 当且仅当 p取值为假。

¬p的真值表

p	$\neg p$
0	1
1	0

例 p：10是素数。 0　　q: 5是素数。 1

$\neg p$： 10不是素数。1　　$\neg q$: 5不是素数。0

例 逻辑电路的“非门”设计。

命题p: 代表输入端的电位;

$\neg p$: 代表通过反相器在输出端得到相反的电位。

- 逻辑否定词“$\neg$”是一个一元运算, 它的意义是“否定”被否定命题的全部, 而不是一部分。
- 日常用语中, 诸如“并非”, “永不”, “绝不”等联结词, 尽管它们的含义并不完全相同, 但除否定外, 没有其他的逻辑内容, 因而都可用否定联结词“$\neg$”表示。

定义 1.2 设p, q为二命题, 复合命题 “p并且q”(或p与q)称作p和q的合取式, 记作 “$p \wedge q$” 。“$\wedge$” 称为合取(conjunction)连结词。

- $p \wedge q$的逻辑关系为p和q同时成立, 因而 $p \wedge q$为真当且仅当p和q同时为真。

$p \wedge q$的真值表

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

- “∧”是日常语言中“并且”、 “与”、 “…和…都”、 “以及”，“既…又…”、“不但…而且…”, “虽然…但是…”等联结词的逻辑抽象, 但不完全等同。

例 p: 张路聪明, q: 张路用功, 则命题“张路既聪明又用功”便可由“p∧q”来描述。

例 逻辑电路的与门(串联)设计, 1代表高电位, 0低电位。

p: 代表输入端p的电位, q: 代表另一输入端q的电位;

p∧q: 代表在输出端得到的电位。

当且仅当 p, q都是高电位, 输出端才是高电位。

例 **A: 1 + 11 = 100, B: 熊猫是稀有动物。**

“$A \wedge B$” 表示 “**1 + 11 = 100**且熊猫是稀有动物”

- 在自然语言中, 上述命题是没有意义的, 因为A和B毫无内在联系。
- 但在数理逻辑中, 我们关心的是复合命题与构成复合命题的各原子命题之间的真值关系, 即抽象的逻辑关系, 并不关心各语句的具体语义。
- 因此, 内容上毫无联系的两个命题也能组成具有确定真值的命题。

定义1.3 设p, q为任意二命题。复合命题“p或q”称作p和q的析取式, 记作“p∨q”, “∨”称为析取(disjunction)连结词。

- p∨q的逻辑关系为p和q中至少一个成立, 因而 p∨q为真当且仅当p和q中至少一个为真。
- 析取词“∨”表示的是一种“可兼或”, 允许所有部分命题同时为真。

p∨q的真值表

p	q	p∨q
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

例 p: 2是素数; q: 4是素数; 则$p \vee q$表示2或4是素数.

由于p真值为1, 所以$p \vee q$的真值为1。

例 逻辑电路的“或门”(并联) 设计, 1代表高电位, 0代表低电位。

p: 代表输入端p的电位, q: 另一输入端q的电位;

$p \vee q$: 代表在输出端得到的电位。

- 当且仅当输入端p, q至少有一个是高电位, 输出端才是高电位。

定义 1.4 设p, q为二命题。复合命题“如果p, 则q”称作p和q的蕴涵式, 记作“$p \to q$”。称p是蕴涵式的前件, q是蕴涵式的后件, $\to$ 称作蕴涵(implication)连结词。

- $p\to q$的逻辑关系是, q是p的必要条件, p是q的充分条件。$p \to q$为假当且仅当前件p为真, 后件q为假。

$p \to q$ 的真值表

p	q	$p\to q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

- 在自然语言里, 特别是在数学中, q是p的必要条件有不同的叙述方式, “只要p就q”、“p仅当q”、“只有q才p”等都可以符号化为“$p \rightarrow q$”的形式
- 在自然语言里, “如果p, 则q”中的p和q往往有某种内在联系, 而数理逻辑里p和q不一定有什么内在联系。
- 在自然科学中, “如果p, 则q”往往表示的是前件为真, 后件为真的推理关系。但前件假, 而整个陈述句$p \rightarrow q$为真, 在自然语言中的虚拟句中也是常见的:
- “假如给我一根合适的杠杆, 我可以把地球翘起来。”
- 蕴涵式的真假值首先由公元前三世纪希腊斯多葛学派以真值表给出。实践证明, 建筑在这个简便的标准之上的数理逻辑, 是复杂精细的数学推理的合适基础。

例 有一位父亲对儿子说：“如果我去书店，就一定给你买电脑报”。试问：在什么情况下，这位父亲算失信？

解 这位父亲的可能情况有四种：

(1) 父亲去了书店，给儿子买了电脑报。

(2) 父亲去了书店，却没有给儿子买电脑报。

(3) 父亲没去书店，却给儿子买了电脑报。

(4) 父亲没去书店，也没给儿子买电脑报。

- 显然(1), (4)两种情况父亲都没失信。1
- (3)的情况与这位父亲原来的话没有抵触，当然也不算失信。1
- 只有情况(2)，答应的事却没有做到，应该算失信了。0

情况(2)正好对应定义中“当前件p为真，后件q为假时，命题$p \rightarrow q$取值为假”的规定。

定义 1.5 设p, q为二命题。复合命题“p当且仅当q”称作p和q的等价式, 记作“$p \leftrightarrow q$”。$\leftrightarrow$称作等价(equivalence)连结词。

- $p \leftrightarrow q$的逻辑关系是, p和q互为充分必要条件。

  $p \leftrightarrow q$为真当且仅当p和q的真值相同。

$p \leftrightarrow q$ 的真值表

p	q	$p \leftrightarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

- 汉语和英语的日常语言中没有**等价词**, 当且仅当 **iff (if and only if)**是现代逻辑中创造的联结词。

例 **odd**是奇数当且仅当**odd**^{2}是奇数。

解 令**p: odd**是奇数, **q: odd**^{2}是奇数,

上述语句可表示为$p \leftrightarrow q$。

三、语句形式化

- 通常对一些推理问题的描述是用自然语言来表示的, 所以我们

  首先需要把自然语句形式化为逻辑语言,

  即以符号表示逻辑公式,

  然后根据逻辑演算规律进行推理运算。

- 自然语句形式化的过程主要包括两个步骤:

1. 分析出各简单命题, 将它们符号化;
2. 根据自然语句中的逻辑关系, 使用恰当的命题联结词, 把简单命题逐个联结起来, 构成复合命题的符号化表示

- 在命题形式化时, 若命题包含有多个联结词时,

必须注意逻辑联结词(运算符)优先次序的规定。

1. 逻辑联结词(或运算符)的优先级由强到弱依次是:

$\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$。

2. 按优先级书写, 命题中可以省略一些不必要的括号。

为了确保命题的清晰性, 提高可读性, 应适当加上括号以避免混淆, 括号中的运算为最优先级。

3. 同级的联结词, 按从左往右的次序运算。

- 如何将语句形式化, 以及如何理解形式化了的语句。语句形式(符号)化要注意:

1. 要善于确定简单命题, 不要把一个概念硬拆成几个概念。

例 "我和他是同学(或朋友或兄弟)" 是一个简单命题。

比较: 我和他都是学生。 /*单数

2. 要善于识别自然语言中的联结词(有时它们被省略)。

例 狗急跳墙。

解 应理解为: p: 狗急了, q: 狗才跳墙

上述语句形式化成 $p \rightarrow q$。

3. 否定词的位置要放准确。

例 如果你和他不都是傻子, 那么你们俩都不会去自讨没趣。

解 设 **A**: 你是傻子, **B**: 他是傻子,

C: 你会去自讨没趣, **D**: 他会去自讨没趣。

上述语句形式化为: $\neg(\mathbf{A}\wedge\mathbf{B}) \rightarrow (\neg\mathbf{C}\wedge\neg\mathbf{D})$。

- 再次强调, 命题联结词是从自然语句中逻辑抽象出来的, 它仅保留了逻辑内容, 而把自然语句所表达的主观因素、心理因素及文学修辞等方面的因素全部撇开, 所以命题联结词只表达了自然语句中的一种客观性质
- 另外, 由于自然语言常常带有歧义, 因此, 人们可能对同一自然语句有不同的理解, 导致对同一自然语句的不等价描述。

例 如果你走路时看书, 那么你一定会成为近视眼。

解 设 p: 你走路, q; 你看书, r: 你是近视眼。

上述语句形式化为: $(p \wedge q) \rightarrow r$。

例 他虽有理论知识但无实践经验

解 设 p: 他有理论知识, q: 他有实践经验。

上述语句形式化为: $p \wedge \neg q$。

例 选小陈或小周一人为代表。

解 这里的或是排斥或。设 p: 选小陈为代表,

q: 选小周为代表。

上述语句形式化为: $p \oplus q$。

例 如果明天天气好, 我们去郊游, 否则就不去郊游。

解 设 **p**: 明天天气好, **q**: 我们去郊游。

上述语句形式化为: $(p \rightarrow q) \wedge (\neg p \rightarrow \neg q)$

或者 $p \leftrightarrow q$。

1.2 命题公式和真值表

例 p: “雪是黑的”。 q: “厦门是个美丽的海滨城市”。

r: “$x + 2 > 8$”。

- 这里p和q称为命题常元, 表示具体确定内容的命题, 有确定的真值。
- r称为命题变元(变项), 表示任意的、没有赋予具体内容的抽象命题, 所以命题变元不能确定真值, 不是命题。
- 用数学来类比的话, 命题变元就是自变量, 真值函数就是函数。不过命题变元和真值函数的取值都只有真假, 而自变量和函数的取值分别是定义域和值域。
- 命题变元在未赋值(或真值指派)之前并不知道真假, 就好像你不知道$y = f(x)$里的x到底等于多少一样。

- 真值函数中往往不止一个命题变元, 就好像多元函数。
- 在逻辑演算中, 对命题常元和命题变元的处理原则是相同。符号p表示的是命题常元或是命题变元, 一般可由上下文确定, 不会发生混淆。
- 在数理逻辑里, 我们所关心的仅仅是命题可以被赋予真或假的可能性, 以及规定了真值后, 怎样与其他命题发生联系的问题。
- 命题公式是由命题常元、命题变元、命题联结词和圆括号等所组成的字符串。
- 反之, 是否任何的符号串都是命题公式呢? 回答是**No.**
- 为了明确什么样的符号串才是命题公式, 下面给出

定义 1.6 命题公式或合式公式(简称公式)的递归定义:

(1) 单个的命题变元 (或常元0或1) 是合式公式:

(2) 若A是任意的合式公式, 则 $(\neg A)$也是合式公式;

(3) 若A, B是任意合式公式, 则 $(A\wedge B)$, $(A\vee B)$, $(A\rightarrow B)$, $(A\leftrightarrow B)$也是合式公式;

(4) 只有有限次地利用上述(1)-(3)形成的符号串才是合式公式。

- (1)是递归定义的基础;
  (2), (3)是递归定义的归纳(构造形式);
  (4) 是递归定义的极小性(界限)。

例 符号串 (1) $(p\wedge q)\rightarrow(\neg(q\vee r))$;
(2) $((r\vee q)\wedge p)\leftrightarrow(q\wedge p)$ 都是命题公式。

例 符号串 (1) $p\wedge q\wedge r)\rightarrow q$;

(2) $(r\rightarrow p)\vee$;

(3) $p\wedge qr\rightarrow s$ 都不是命题公式。

- 为了讨论公式的真值变化情况, 先给出公式层次的定义

定义1.7(1)若A是单个的命题变元或常元,则称A为0层合式

(2) 称A是n+1(n≥0)层公式是指下列诸情况之一:

① $A=\neg B$, B是n层公式;

② $A=B\wedge C$, 其中B, C分别为i层和j层公式, $n=\max(i, j)$;

③ $A=B\vee C$, 其中B, C的层次同②;

④ $A=B\rightarrow C$, 其中B, C的层次同②;

⑤ $A=B\leftrightarrow C$, 其中B, C的层次同②。

- $((\neg p\rightarrow q)\wedge r)\vee s$为4层公式;
- $((p\wedge\neg q\wedge r)\vee s)\rightarrow(p\vee q\vee r)$为5层公式。

- 命题公式是没有真假值的, 仅当在一个公式中命题变元用确定的命题代入时, 才得到一个命题。这个命题的真值, 取决于代换变元的那些命题的真值。

定义 1.8 设$p_1, p_2, \ldots, p_n$是出现在公式A中的全部命题变元, 给$p_1, p_2, \ldots, p_n$各指定一个真值, 称为对公式A的一个赋值或解释。若指定的一组值

使A的值为1, 则称这组值为A的成真赋值。

若使A的值为0, 则称这组值为A的成假赋值。

- 赋值形式规定: 设A中含的命题变元为p, q, r…, 赋值$\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots$是指$p = \alpha_1$, $q = \alpha_2$, $r = \alpha_3\ldots$, 按字典顺序赋值

例 在公式$(p\vee\neg q)\rightarrow r$ 中, 011($p=0, q=1, r=1$)为成真赋值; 100($p = 1, q = 0, r = 0$)为成假赋值。

定义 含$n(n\geq 1)$个命题变元的公式共有2^n个赋值。将公式A在所有赋值之下取值情况列成表, 称为A的真值表。

- 命题公式真值表的构造步骤如下:

(1) 找出公式中所含命题变项，列出所有可能的赋值（2^n个）。

(2)按从低到高的顺序写出公式A的各层次列, A在最后一列。

(3) 对应各赋值，计算公式各层次的值，直到最后计算出公式的值。

例 构造命题公式 $A = (P \to Q) \leftrightarrow (\neg P \lor Q)$的真值表。

P	Q	$\neg P$	$P \to Q$	$\neg P \lor Q$	$(P \to Q) \leftrightarrow (\neg P \lor Q)$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1
1	1	0	1	1	1

- Page 7 表1.1中100是成假赋值, 其余的都是成真赋值; 表1.2无成假赋值(重言式); 表1.3无成真赋值(矛盾式)。
- 根据公式在各种赋值下的取值情况, 可将命题公式分为3类, 定义如下。

定义 1.9 设A为一命题公式,

(1) 若A在它的各种赋值下取值均为真，则称A为重言式(tautology)，或永真式，常用“1”表示;

(2) 若A在它的各种赋值下取值均为假，则称A为矛盾式(contradiction)，或永假式，常用“0”表示;

(3) 若A不是矛盾式, 则称A为可满足(satisfiable)式。

- 重言式是可满足式, 但反之不真。
- 在逻辑研究和推理以及决策判断时, 对于所研究的命题, 我们最关心的莫过于“真”，“假”问题, 所以重言式在数理逻辑的研究中占有特殊且重要的地位。
- 命题逻辑形式系统的公理、定理都是重言式,

§1.3 等值演算

- 由递归定义知命题公式的数量是无穷多。但在命题变元数目确定之后, 真值不同的命题公式却是有限的。

例 $P \leftrightarrow Q$和$(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$虽然“形式”不同,

但它们是真值相同的命题公式。

- 一般地, 含有n个命题变元的公式有2^n组不同的的赋值, 对于每一组赋值, 公式都有一个确定的真值。
- 由于每个赋值有真、假两种可能, 即共有2^{2^n}个真值不同的公式。这就存在着

  如何判断哪些公式具有相同真值的问题。
- 设公式A, B均含命题变元$p_1, p_2, \ldots, p_n$, 若A, B具有相同的真值, 则$A \leftrightarrow B$的真值总为1, 即$A \leftrightarrow B$为重言式。

定义1.10 设A, B为二命题公式, 若等价式$A \leftrightarrow B$为重言式, 则称公式A和B是等值的, 记为$A \Leftrightarrow B$。

- 用真值表法总可以判定A, B是否等值。

A和B是等值的公式当且仅当A和B真值表完全相同时。

区别: 1.符号"$\Leftrightarrow$"不是命题联结词而是公式间的关系符号。$P \Leftrightarrow Q$ 不表示公式, 即不代表命题,

而是表示公式P和公式Q有逻辑等价关系。

$P \Leftrightarrow Q$的结果是 非命题公式。

$P \leftrightarrow Q$是一个公式, 表示某个命题。

这两者之间有密切的联系, 即

$P \Leftrightarrow Q$ 的 充要条件 是 $P \leftrightarrow Q$为重言式。

2. 如要求用计算机来判断命题公式P和Q是否逻辑等价，即P $\Leftrightarrow$ Q那是办不到的，然而

计算机却可“计算”公式P $\leftrightarrow$ Q是否为重言式。

- 命题逻辑所研究的思维规律，很多是以等价式给出的。
- 下面给出一些最基本和最重要的等值式，它们的正确性均可由真值表验证。
- 这些等值式也就是通常所说的布尔代数或逻辑代数的主要组成部分。
- 等值式与集合运算的基本定律相似，可对照记忆。

将$\wedge$, $\vee$改为$\cap$, $\cup$。

等价Equivalent 表

(E_1) 双重否定律 $P \Leftrightarrow \neg\neg P$

(E_2) 等幂律 $P \Leftrightarrow P \vee P$ $\quad P \Leftrightarrow P \wedge P$

(E_3) 交换律 $P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$ $\quad P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P$

(E_4) 结合律 $P \vee (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \vee R$

$P \wedge (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \wedge R$

(E_5) 分配律 $P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$

$P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$

(E_6) 德摩根律 $\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$

$\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$

(E_7) 吸收律 $P \vee (P \wedge Q) \Leftrightarrow P$ $\quad P \wedge (P \vee Q) \Leftrightarrow P$

(E_8) 零律 $P \vee 1 \Leftrightarrow 1$ $\quad P \wedge 0 \Leftrightarrow 0$

(E_9) 同一律 $P \vee 0 \Leftrightarrow P$ $P \wedge 1 \Leftrightarrow P$

(E_{10}) 排中律 $P \vee \neg P \Leftrightarrow 1$

(E_{11}) 矛盾律 $P \vee \neg P \Leftrightarrow 1$

(E_{12}) 蕴涵等值式 $P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$

(E_{13}) 等价等值式 $P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$

(E_{14}) 假言易位 $P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg Q \rightarrow \neg P$

(E_{15}) 等价否定等值式 $P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow \neg P \rightarrow \neg Q$

(E_{16}) 归谬论 $(P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow \neg Q) \Leftrightarrow \neg P$

例 证明等价式 $P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee P)$

证1 $P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$

$\Leftrightarrow (\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee P)$

证2 真值表所列值完全相同。

置换规则: 设Φ(A)是含公式A的命题公式, $B \Leftrightarrow A$,

若用B置换Φ(A)中的A, 得Φ(B), 则 $\Phi(B) \Leftrightarrow \Phi(A)$。

- 引入置换规则, 我们可将公式变形, 扩大重言式和逻辑等值公式的作用。

例 在演算中出现 $p \to (q \to r)$, 则可用 $\neg q \vee r$ 置换 $q \to r$, 保证 $p \to (q \to r) \Leftrightarrow p \to (\neg q \vee r)$ 。

- 下面通过例题说明等值演算的步骤及等值演算的用途。

- 每一个命题公式的表达式是不唯一的，这种不唯一性使得人们在进行逻辑推理时可以有千变万化的方式。
- 即对于任何一个公式**A**，可根据基本等价公式及置换规则，在等值的意义下，对其进行推演，从而得到**A**的各种等值形式。
- 熟悉这些规律可以使人们的思维正确而敏锐。
- 此外，正是表达式的不唯一，才使得命题演算在简化电子线路和程序设计中成为必不可少的武器。

例 化简程序: If P then if Q then X else Y else if Q then X else Y。

解 按程序设计的良好风格惯例, 将例子重写成

If P then if Q then X else Y　　/*else就近原则

　　else if Q then X else Y

稍分析后可看出, 执行X的条件为

$$(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge Q) \Leftrightarrow (P \vee \neg P) \wedge Q \Leftrightarrow Q$$

执行Y的条件为:

$$(P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q) \Leftrightarrow (P \vee \neg P) \wedge \neg Q \Leftrightarrow \neg Q$$

- 经等值转换后化简为: If Q then X else Y。

例 证明 $P\vee(\neg P\wedge Q)\Leftrightarrow P\vee Q$ (第二吸收律)

证明 $P\vee(\neg P\wedge Q)$

$\Leftrightarrow (P\vee\neg P)\wedge(P\vee Q)$

$\Leftrightarrow 1\wedge(P\vee Q)\Leftrightarrow P\vee Q$

例 证明 $(P\wedge Q)\vee(\neg P\wedge R)\vee(Q\wedge R)$

$\Leftrightarrow (P\wedge Q)\vee(\neg P\wedge R)$ (第三吸收律)

证明 $(P\wedge Q)\vee(\neg P\wedge R)\vee(Q\wedge R)$

$\Leftrightarrow (P\wedge Q)\vee(\neg P\wedge R)\vee((P\vee\neg P)\wedge(Q\wedge R))$

$\Leftrightarrow(P\wedge Q)\vee(\neg P\wedge R)\vee(P\wedge Q\wedge R)\vee(\neg P\wedge R\wedge Q)$

$\Leftrightarrow (P\wedge Q)\vee(P\wedge Q\wedge R)\vee(\neg P\wedge R)\vee(\neg P\wedge R\wedge Q)$

$\Leftrightarrow (P\wedge Q)\vee(\neg P\wedge R)$ (吸收律)

全功能联结词集合

- 由§1.3知n个变元有2^{2^n}个不同的真值函数(逻辑联结词)因此我们可以定义$2^{2^1}= 4$个一元联结词和$2^{2^2}= 16$个二元联结词。
- 变元P的4个一元联结词分别为常联结词永假F、常联结词永真T、单位联结词P和否定联结词$\neg$P，其真值表定义:

F	P	$\neg$P	T
0	0	1	1
0	1	0	1

表 1.7

p	q	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1

p	q	8	9	10	11	12	13	14	15
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	0	0	1	1
0	0	0	1	0	1	0	1	0	1

表 1.7 给出16个二元联结词:

- 0表示矛盾式F, 15表示重言式T, 它们是常联结词。
- 1表示$P \wedge Q$, 是与联结词。
- 7表示$P \vee Q$, 是或联结词。
- 6表示$P \oplus Q$, 是异或联结词。
- 9表示$P \leftrightarrow Q$, 是等价联结词。
- 3表示P, 5表示Q, 它们是投影联结词。
- 12表示$\neg P$, 10表示$\neg Q$, 它们是二元否定词。
- 11表示$Q \rightarrow P$, 13表示$P \rightarrow Q$, 它们是蕴涵联结词。
- 8表示$P \downarrow Q = \neg(P \vee Q)$, 是或非联结词。**Sheffer**
- 14表示$P \uparrow Q = \neg(P \wedge Q)$, 是与非联结词。**Pierce**
- 2表示$\neg(P \rightarrow Q)$, 是p蕴涵否定q联结词。
- 4表示$\neg(Q \rightarrow P)$, 是q蕴涵否定p联结词。

- 我们现在只使用了一个一元(否定)联结词和四个二元联结词{¬, ∨, ∧, →, ↔}。我们可以将现有的联结词扩充得更多, 但如果不增加变元个数, 所有可能的扩充都不会带来实质性的进展, 因为它们都可以用现有的五个联结词来表示。
- 命题公式可以通过命题变元与五种联结词构成的公式表示出来, 同一个命题公式可用各种联结词构成多种不同形式的表达式。
- 要充分表达日常生活中的语言是否必须要用这五个联结词, 或者仅仅用其中一部分, 或者需要更多呢?

定义 在联结词集合中, 如果一个联结词可以由集合中其它的联结词来定义, 则该联结词称为冗余的联结词, 否则称为独立的联结词。

定义 设S是联结词集合, 若满足:

1. 任何命题公式都可以仅用S中的联结词表示;
2. S中不含任何冗余联结词, 则称S是一个极小的功能完备集。

- 在理论上与应用上通过选用不同的全功能联结词集合, 可以更方便地对命题演算系统进行研究下面给出一些重要的极小的功能完备集。

- 用等值演算法可消去连结词集中冗余联结词, 从而产生新的联结词集。

例 在第一节中, 给出的联结词集为{$\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$},

由于 $A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$,

从而$\leftrightarrow$是冗余联结词, 得新的联结词集为{$\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$},

又由于 $A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg A \vee B$,

于是$\rightarrow$是冗余联结词, 得不同的联结词集为{$\neg$, $\wedge$, $\vee$},

又有 $A \wedge B \Leftrightarrow \neg\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg(\neg A \vee \neg B)$

故$\wedge$是{$\neg$, $\wedge$, $\vee$}冗余联结词, 又得联结词集为{$\neg$, $\vee$},

而 $A \vee B \Leftrightarrow \neg\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg(\neg A \wedge \neg B)$

故$\vee$是{$\neg$, $\wedge$, $\vee$}冗余联结词, 又得联结词集为{$\neg$, $\wedge$}。

可以证明 {$\neg$, $\vee$}, {$\neg$, $\wedge$}中不含冗余联结词了。

例 由于 $P \to Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$

$$P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee P)$$

$$P \wedge Q \Leftrightarrow \neg(\neg P \vee \neg Q)$$

所以, $\{\neg, \vee\}$ 可构成极小的功能完备集。

同理, $\{\neg, \wedge\}$也可构成极小的功能完备集。

例 由于 $P \vee Q \Leftrightarrow \neg P \to Q$

$$P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \to Q) \wedge (Q \to P)$$

$$P \wedge Q \Leftrightarrow \neg(\neg P \vee \neg Q) \Leftrightarrow \neg(P \to \neg Q)$$

- 所以$\{\neg, \to\}$可构成极小的功能完备集。

  $\{\neg, \to\}$在研究逻辑系统的演绎推理和在程序系统的研究中经常遇到。

§1.4 范 式 normal form

- 命题真假的判定问题总是可解的, 我们已有两种判定方法: 真值表技术和等价演算法。
- 但当命题变元n的数目较大时, 上述两种方法需要的工作量都相当大, 因而显得不方便。
- 从§1.3 知道, 含有n个命题变元的公式有2^n组不同的真值指派, 对于每个指派有真、假两种可能, 即共有2^{2^n}个不同的真值函数。
- 每种真值函数都可以用无穷多种命题公式表示。

很多从形式上看不尽相同的命题公式, 实质上是等价的。

- 为了解决上述问题, 我们引入主范式的概念, 把命题公式规范(标准)化。

- 根据标准化, 同一真值函数对应的所有命题公式具有相同的标准形式。
- 这样, 根据命题的形式结构就能判断两命题公式是否等价以及判断公式的类型。
- 主范式的思想和平面上的二次曲线标准方程的思想是类似的。一般形式的二次方程难以知道方程所代表的曲线形状, 如果将它化为标准方程, 便可知道二次方程所代表的是圆、椭圆、双曲线或是抛物线了。
- 范式在线路设计方面、自动机器理论和人工智能方面也有极其重要的作用。

一、析取范式和合取范式

定义 1.11 将命题变元及其否定统称为文字(literal)。

仅由有限个文字构成的析取式称作简单析取式。

仅由有限个文字构成的合取式称作简单合取式。

例 P、¬P、P∧Q、¬P∧Q∧P等都是简单合取式。

P、¬P、P∨Q、¬P∨Q∨P等都是简单析取式。

1个文字的P、¬P既是简单合取式, 又是简单析取式。

- 为方便起见, 有时用A_1, A_2, …, A_s表示s个简单析取式或s个简单合取式。

定理 (1) 一个简单合取式为矛盾式 当且仅当 它同时包含某个命题变元P及其否定¬P。例 $\neg p \wedge q \wedge p \wedge \neg r$

(2) 一个简单析取式为重言式 当且仅当 它同时包含某个命题变元P及其否定¬P。 $\neg p \vee q \vee p \vee \neg r$

*证明 我们只证明(2), (1)的证明方法同(2)。

充分性: ∀命题变元P, $P \vee \neg P$是重言式。因此, 若有 $P \vee \neg P$在简单析取式中出现, 则该质析取式必为重言式。

必要性: 假设一个简单析取式为重言式, 但式中不同时包含任一命题变元及其否定, 那么,

我们对该析取式中出现在¬后面的命题变元指派值1, 而对不出现在¬后面的命题变元指派值0, 则整个析取式取值必为0, 这与假设矛盾。▌

定义 1.12 (1) 由有限个简单合取式构成的析取式称为析取范式。具有形式$A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n$ $(n \geq 1)$,

其中A_i $(1 \leq i \leq n)$都是简单合取式。

(2) 有限个简单析取式构成的合取式称为合取范式。

具有形式$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n$, $(n \geq 1)$,

其中A_i $(1 \leq i \leq n)$都是简单析取式。

例 $\neg P$, $Q \wedge R$, $\neg P \vee Q$, $(P \wedge Q) \vee (Q \wedge R)$ 都是析取范式;

$\neg P$, $Q \wedge R$, $\neg P \vee Q$, $(P \vee Q) \wedge (Q \vee R)$ 都是合取范式。

- 理解范式概念后, 更重要的是能将给定的公式化成与之等值的析取范式和合取范式。

- 单个的文字、简单合取式和简单析取式既是析取范式; 又是合取范式。
- 任何析取范式的对偶式为合取范式, 任何合取范式的对偶式为析取范式。

(1) 一个析取范式为矛盾式 当且仅当它的每个简单合取式都是矛盾式。

$$A = (p \wedge \neg p) \vee (p \wedge q \wedge \neg q)$$

(2) 一个合取范式为重言式 当且仅当它的每个简单析取式都是重言式。

$$A = (\neg p \vee p) \wedge (p \vee q \vee \neg q)$$

定理 1.2 (范式存在定理) 任一命题公式都存在与之等值的析取范式和合取范式。

证明 下面给出求范式的构造性算法:

1. 消除公式中对{¬,∧,∨}来说冗余的联结词"→"和"↔"。

可用等值式将 $P \rightarrow Q$置换为$\neg P \vee Q$,

$P \leftrightarrow Q$置换为$(P\rightarrow Q)\wedge(Q\rightarrow P)$,

或 $(P\wedge Q)\vee(\neg P\wedge\neg Q)$ (析取范式)

或 $(\neg P\vee Q)\wedge(P\vee\neg Q)$ (合取范式)

- 析取范式和合取范式仅含联结词¬, ∧和∨。{¬, ∧,∨}是功能完备集, 因而能消去公式所含的联结词→, ↔ 。

2. 将“¬”向内深入到变元前面,

并用双重否定律将¬¬P置换成P, 用德.摩根定律将

$\neg(P \wedge Q)$ 置换为 $\neg P \vee \neg Q$

$\neg(P \vee Q)$ 置换为 $\neg P \wedge \neg Q$

范式里不存在如下形式的公式¬ ¬P, ¬(P∧Q), ¬(P∨Q)

3. 使用分配律将公式变为所需的范式。

$P \wedge (Q \vee R) = (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$ 左合取范式, 右析取范式

$P \vee (Q \wedge R) = (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$ 左析取范式, 右合取范式

- 利用以上3个步骤, 一定能求出公式的析取范式或合取范式, 但形式可能是多样的, 即

公式的析取范式或合取范式是不惟一的。

例 求公式$((P\vee Q)\to R)\to P$的合取范式和析取范式。

解 $((P\vee Q)\to R)\to P$

$\Leftrightarrow \neg(\neg(P\vee Q)\vee R)\vee P$

$\Leftrightarrow ((P\vee Q)\wedge\neg R)\vee P$

$\Leftrightarrow (P\vee Q\vee P)\wedge(\neg R\vee P)$ (合取范式)

$\Leftrightarrow (P\vee Q)\wedge(P\vee\neg R)$ (合取范式)

$\Leftrightarrow P\vee(Q\wedge\neg R)$ (析取范式)

$\Leftrightarrow (P\wedge\neg R)\vee(Q\wedge\neg R)\vee P$ (析取范式)

- 一个公式的合取范式或析取范式都不是唯一的，但它们相互等价的。
- 利用合取范式和析取范式可以识别重言式和矛盾式。

- 范式的不足之处是:

(1) 对哪一种指派满足公式, 哪一种指派不满足公式,

还难以判定。

(2) 一个公式可能既是析取范式; 又是合取范式。

(3) 析取范式和合取范式都不唯一。

- 我们最终目的是寻找相互等值的命题公式的标准形式。
- 范式的不唯一不能帮助我们达到目的，为此进一步介绍主范式的概念。首先将 简单合取式 和 简单析取式 标准化, 即 极小项 和 极大项, 最后求公式的
- 以极小项为简单合取式 的析取范式(主析取范式) 或
- 以极大项为简单析取式 的合取范式(主合取范式)。

定义 1.13(1.16)在含有n个文字的简单合(析)取式中,

若每个命题变元和其否定式, 二者必有且仅有一个出现,

且第i个文字 (按字典序 或 下标序) 出现在从左算起的第i位上, 这样的简单合(析)取式称为极小(大)项。

- 极小/大项性质: $0 \leqslant i, j \leqslant 2^n - 1$

1. n个命题变元可构成2^n个极小项, 分别记作m_i。

   n个命题变元可构成2^n个极大项, 分别记作M_i。

2. 每个极小项仅当其成真赋值与下标的二进制编码相同, 其真值为1, 其余$2^n - 1$种赋值情况下均0。

   每个极大项仅当其成假赋值与下标的二进制编码相同, 其真值为0, 其余$2^n - 1$种赋值情况下均1。

p	q	r	极小项m_i	极大项M_i
0	0	0	$m_0 = \neg p \wedge \neg q \wedge \neg r$	$M_{000} = p \vee q \vee r$
0	0	1	$m_1 = \neg p \wedge \neg q \wedge r$	$M_1 = p \vee q \vee \neg r$
0	1	0	$m_2 = \neg p \wedge q \wedge \neg r$	$M_2 = p \vee \neg q \vee r$
0	1	1	$m_3 = \neg p \wedge q \wedge r$	$M_3 = p \vee \neg q \vee \neg r$
1	0	0	$m_4 = p \wedge \neg q \wedge \neg r$	$M_4 = \neg p \vee q \vee r$
1	0	1	$m_5 = p \wedge \neg q \wedge r$	$M_5 = \neg p \vee q \vee \neg r$
1	1	0	$m_6 = p \wedge q \wedge \neg r$	$M_6 = \neg p \vee \neg q \vee r$
1	1	1	$m_{111} = p \wedge q \wedge r$	$M_7 = \neg p \vee \neg q \vee \neg r$

$m_i \Leftrightarrow \neg M_i$, $M_i \Leftrightarrow \neg m_i$ $(0 \leq i, j \leq 2^n - 1)$

- 在极小项简单合取式，将变元原形对应1，否定形对应0。
- 在极大项简单析取式，将变元原形对应0，否定形对应1。

3. 不同的极小项取值为1的行各不相同。

不同的极大项取值为0的行各不相同。

4. 任意两个极小项的合取式永为0;

即$i \neq j$时, $m_i \wedge m_j = 0$

任意两个极大项的析取式永为1;

即$i \neq j$时, $M_i \vee M_j = 1$

5. 全体极小项的析取式永为1。

全体极大项的合取式永为0。

定义1.14 设命题公式A中含有n个命题变元,

若A的析取范式中的简单合取式全是极小项,

则称该析取范式为 A的主析取范式。

或定义 由不同极小项组成的析取范式称为主析取范式。

定义1.16 设命题公式A中含有n个命题变元,

若A的合取范式中的简单析取式全是极大项,

则称该合取范式为 A的主合取范式。

或定义 由不同极大项组成的合取范式称为主合取范式。

- 由范式存在定理, 只要将析取范式中不是极小项的简单合取式化成极小项就可以得到主析取范式。

定理 1.3 任何命题公式A的主析取范式都是存在的，并且是惟一的。

证明 存在性：由定理1.2存在与A等值的析取范式A'，再继续下面的构造性证明：

(1) 展开：若A'的某个简单合取式C中既不含命题变元P_i也不含$\neg P_i$，则将C展开如下：

$$B \Leftrightarrow B \wedge 1 \Leftrightarrow B \wedge (P_i \vee \neg P_i) \Leftrightarrow (B \wedge P_i) \vee (B \wedge \neg P_i)$$

(2) 消去：将重复出现的命题变元、矛盾式及重复出现的最小项都“消去”。

(3) 排序：将最小项按下标由小到大的顺序排列得主析取范式A”。 于是 $A \Leftrightarrow A''$。

再证 惟一性: 若命题公式A存在两个不同的主析取范式B和C, 则 $B \Leftrightarrow A$, $C \Leftrightarrow A$。由传递性, $B \Leftrightarrow C$。

- 由于B和C是A的不同的主析取范式,

  必存在某一极小项m_i只出现在B中异或只出现在C中。

- 不妨设它只出现在C中, 而不出现在B中。
- 于是i的二进制表示为C的成真赋值, 但是B的成假赋值, 这与$B \Leftrightarrow C$矛盾。
- 因此, A的主析取范式是惟一的。

定理 1.3' 任何命题公式A的主合取范式都是存在的,

并且是惟一的。

证明 由定理1.3和 对偶定理 即得。 ▌

主析取范式和主合取范式的性质:

1. 若公式是重言式 $\Leftrightarrow$ 它的主析取范式包含全部(2^n项)的极小项 $\Leftrightarrow$ 此时主合取范式为“空” $\Leftrightarrow$ 定义它为1。

2. 若公式是矛盾式 $\Leftrightarrow$ 它的主合取范式包含全部(2^n项)的极大项 $\Leftrightarrow$ 此时主析取范式为“空” $\Leftrightarrow$ 定义它为0。

3. 若主析取范式至少含一个极小项, 是可满足式。

4. 两个命题公式是等值的 $\Leftrightarrow$ 它们的主合取范式和主析取范式相同。

5.含有n个命题变元的公式G的主析取范式中最小项项数与G的主合取范式中最大项项数之和为2^n项。

6. 若G的主析取范式中有最小项m_i，则G的主合取范式中一定不含有最大项M_i, 反之亦然。

- 由$m_i \Leftrightarrow \neg M_i$, $M_i \Leftrightarrow \neg m_i$ $(0 \le i, j \le 2^n - 1)$和性质5、6, 当你求出了命题公式A的主析取范式, 也就求出了命题公式A的主合取范式, 反之亦然。
- 设命题公式A含有n个命题变元, A的主析取范式中含有k个最小项$m_{i1}, m_{i2}, \ldots m_{ik}$, 则A的主合取范式中含有$2^n - k$个最大项,下标为i1, i2,…ik关于$0 \sim 2^n-1$的补集。

例 1.17' 求公式$((P\vee Q)\rightarrow R)\rightarrow P$

的主合取范式 和 主析取范式。

解 在前面例1.17 中我们已求得合取范式:

$$((P\vee Q)\rightarrow R)\rightarrow P \Leftrightarrow (P\vee Q)\wedge(P\vee\neg R)$$

$$\Leftrightarrow ((P\vee Q)\vee(R\wedge\neg R))\wedge((P\vee\neg R)\vee(Q\wedge\neg Q))$$

$$\Leftrightarrow (P\vee Q\vee R)\wedge(P\vee Q\vee\neg R)$$

$$\wedge(P\vee\neg R\vee Q)\wedge(P\vee\neg R\vee\neg Q)$$

$$\Leftrightarrow (P\vee Q\vee R)\wedge(P\vee Q\vee\neg R)\wedge(P\vee\neg Q\vee\neg R)$$

$$\Leftrightarrow M_{000}\wedge M_{001}\wedge M_{011}\Leftrightarrow \prod(0, 1, 3)$$ (主合取范式)

$$\Leftrightarrow m_{010}\vee m_{100}\vee m_{101}\vee m_{110}\vee m_{111}$$

$$\Leftrightarrow \Sigma(2, 4, 5, 6, 7)$$ (主析取范式)

- 严格按照构造性算法, 可快速求出主范式。

性质7: 以上介绍了用等值演算法求公式A的主合取范式和主析取范式后, 就能立即写出A的真值表。

- 主析取范式中极小项的二进制下标,为A的成真赋值。
- 主合取范式中极大项的二进制下标,为A的成假赋值。
- 反之, 若知道了A的真值表, 由真值表
- 求出全部成真赋值及其对应的二进制数和十进制数, 以它们为下标的极小项的全体就是A的主析取范式中全部极小项, 从而可立即写出A的主析取范式。
- 求出全部成假赋值及其对应的二进制数和十进制数, 以它们为下标的极大项的全体就是A的主合取范式中全部极大项, 从而可立即写出A的主合取范式。

例1.18 由$(p\vee q)\wedge r$的真值表求它的主析取范式。

表1.8

p	q	r	$p\vee q$	$(p\vee q)\wedge r$	成真极小项
0	0	0	0	0	
0	0	1	0	0	
0	1	0	1	0	
0	1	1	1	1	$m_{011} = m_3$
1	0	0	1	0	
1	0	1	1	1	$m_{101} = m_5$
1	1	0	1	0	
1	1	1	1	1	$m_{111} = m_7$

- $(p\vee q)\wedge r \Leftrightarrow m_{011}\vee m_{101}\vee m_{111} \Leftrightarrow \Sigma(3, 5, 7)$ (主析取范式)

例1.17求公式$((P\vee Q)\to R)\to P$的主合取范式和主析取范式。

解 在前面例 中我们已求得合取范式:

$$((P\vee Q)\to R)\to P \Leftrightarrow (P\vee Q)\wedge(P\vee\neg R)$$

$$\Leftrightarrow ((P\vee Q)\vee(R\wedge\neg R))\wedge((P\vee\neg R)\vee(Q\wedge\neg Q))$$

$$\Leftrightarrow (P\vee Q\vee R)\wedge(P\vee Q\vee\neg R)$$

$$\wedge(P\vee\neg R\vee Q)\wedge(P\vee\neg R\vee\neg Q)$$

$$\Leftrightarrow (P\vee Q\vee R)\wedge(P\vee Q\vee\neg R)\wedge(P\vee\neg Q\vee\neg R)$$

$$\Leftrightarrow M_{000}\wedge M_{001}\wedge M_{011} \quad \text{(主合取范式)}$$

$$\Leftrightarrow m_{010}\vee m_{100}\vee m_{101}\vee m_{110}\vee m_{111} \quad \text{(主析取范式)}$$

- 严格按照构造性算法, 可快速求出主范式。

例1.19 判断下列两组公式是否等值。

(1) a. $(p \rightarrow q) \rightarrow r$;　　b. $(p \wedge q) \rightarrow r$

(2) c. $p \rightarrow (q \rightarrow r)$;　　b. $(p \wedge q) \rightarrow r$

解 先求a, b的主析取范式(过程略):

a. $(p \rightarrow q) \rightarrow r \Leftrightarrow m_1 \vee m_3 \vee m_4 \vee m_5 \vee m_7 \Leftrightarrow \sum(1, 3, 4, 5, 7)$

b. $(p \wedge q) \rightarrow r \Leftrightarrow m_0 \vee m_1 \vee m_2 \vee m_3 \vee m_4 \vee m_5 \vee m_7$

$\Leftrightarrow \sum(0, 1, 2, 3, 4, 5, 7)$

由于a, b的主析取范式不同, $a \not\Leftrightarrow b$

c. $p \rightarrow (q \rightarrow r) \Leftrightarrow m_0 \vee m_1 \vee m_2 \vee m_3 \vee m_4 \vee m_5 \vee m_7$

$\Leftrightarrow \sum(0, 1, 2, 3, 4, 5, 7)$

由于c, b的主析取范式相同, $c \Leftrightarrow b$。$a \not\Leftrightarrow c$, →不可结合

例1.20 求下列各命题公式的主析取范式, 并判断其类型。

(1) $\neg(q \to p) \wedge p \wedge r$;

Sol: $\neg(q \to p) \wedge p \wedge r$

$\Leftrightarrow \neg(\neg q \vee p) \wedge p \wedge r$

$\Leftrightarrow q \wedge \neg p \wedge p \wedge r$

$\Leftrightarrow 0$ 。

$\therefore$ (1) 为矛盾式

(2) $\neg(\neg p \to q) \leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$

Sol: $\Leftrightarrow \neg(p \vee q) \leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$

$\Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q \leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$

$\Leftrightarrow 1$

$\therefore$ (2) 为重言式

(3) $(p \to q) \wedge q \to p$

Sol: $\Leftrightarrow (\neg p \vee q) \wedge q \to p$

$\Leftrightarrow \neg((\neg p \vee q) \wedge q) \vee p$

$\Leftrightarrow \neg(\neg p \vee q) \vee \neg q \vee p$

$\Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \vee (p \vee \neg p) \wedge \neg q \vee p \wedge (q \vee \neg q)$

$\Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$

$\Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q)$

$\Leftrightarrow m_{10} \vee m_{00} \vee m_{11}$

$\Leftrightarrow m_0 \vee m_2 \vee m_3 \Leftrightarrow \Sigma(0, 2, 3)$

$\therefore$ (3) 为可满足式

例 1.21 某科研所有3名青年高级工程师A, B, C。所里要选派它他们中的1到2人出国进修, 由于所里工作的需要选派时必须满足以下条件:

(1) 若A去, 则C 也可以去。 (2) 若B去, 则C不能去。

(3) 若C不去, 则A或B可以去。问所里应如何选派他们?

Sol: 令p: 派A去, q: 派B去, r: 派C去。根据所要满足的条件, 得命题公式S为$(p\rightarrow r)\wedge(q\rightarrow\neg r)\wedge(\neg r\rightarrow (p\vee q))$。求此公式的主析取范式。

$$S \Leftrightarrow (\neg p\vee r)\wedge(\neg q\vee\neg r)\wedge(r\vee p\vee q)$$

$$\Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow m_{001}\vee m_{010}\vee m_{101} \Leftrightarrow \sum(1, 2, 5)$$

有3种选派方案: 001: C去, 而A, B都不去;

010: B去, A, C都不去; 101: A, C都去, 而B不去;

§ 1.5 命题演算的推理理论

- 数理逻辑的主要任务是借助数学方法来研究逻辑推理。
- 推理是由已知的命题公式(前提)推出新命题公式(结论)的思维过程。
- 任何一个推理都由前提和结论组成。
- 前提就是推理所根据的已知的命题公式，
  结论则是从前提通过推理而得到的新命题公式。
- 推理一般分为演绎推理和归纳推理两类。凡前提和结论之间的联系是必然的，此类推理称为演绎推理；否则称为归纳推理。数理逻辑研究的主要是演绎推理。
- 推理理论对于计算机科学中的程序验证、定理的机械证明和人工智能等都是十分重要的。

- 从语言角度, 推理分为语义和语法两种。
- 语义semantics推理注重内涵的正确性,

  也就是从真的前提出发要推出真的结论来,

  推理过程考虑得少, 关心的是结论的正确性。
- 语法推理则注重形式上的有效,

  注重推理过程是否符合某些事先规定的逻辑规则,

  若结论是严格遵循规则得到的, 那便是有效的。
- 数理逻辑主要采用语法推理, 它关心的是结论的有效性, 而不关心前提的实际真值, 当然语法推理作为一种推理方法, 它必须能反映客观事物中真实存在的逻辑关系。
- 换句话说, 语法推理必须保证语义上的正确性。

- 在任何推理中, 如果所用到的前提都是真命题,

  而且从前提出发推出结论的推理过程是严格遵守推理规则进行的, 则推出的结论也是真的,

  称这样的结论为合法的结论。

  数学中所证定理的结论都是合法的结论。

- 但在数理逻辑中, 主要着重于推理规则的研究,

  不要求前提和结论一定是真命题,

  称这样的结论为有效的结论。

- 在数理逻辑中, 从前提$H_1, H_2, \ldots, H_n$推出 结论C

  的严格定义如下:

一．推理形式

定义 1.17 称蕴涵式 $(H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n) \rightarrow C$为推理的形式结构, $H_1, H_2, \ldots, H_n$为推理的前提, C为推理的结论。

若 $(H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n) \rightarrow C$为重言式, 则称从前提$H_1, H_2, \ldots, H_n$推出结论C的推理正确, C是$H_1, H_2, \ldots, H_n$的逻辑结论或有效的结论。否则称推理不正确。

- 同用 “$A \Leftrightarrow B$”表示 “$A \leftrightarrow B$”是重言式类似,

  用 “$A \Rightarrow B$”表示 “$A \rightarrow B$”是重言式。 “$\Rightarrow$”也不是连结词符, 只是用来表示重言蕴涵式的一种方法.
- 因而, 若从前提$H_1, H_2, \ldots, H_n$推出结论C的推理正确,

  也记为$(H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n) \Rightarrow C$。

- 判断 $H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n \rightarrow C$ 是否为重言式,

  可利用已知的等值式推导出等值式

$$(H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n \rightarrow C) \Leftrightarrow 1,$$

  从而证明C是前提$H_1, H_2, \ldots, H_n$的结论。

- 由定义可知, 在数理逻辑中, 判断推理是否正确的方法就是重言蕴涵式的方法。

- 由以上各节可知, 判断推理是否正确的方法有以下3种:

(1) 真值表示法; 若推理的形式结构为重言式, 推理正确

(2) 等值演算法;

(3) 主范式法。

例 已知A是B的充分条件, B是C的必要条件,

C是D的必要条件, D是B的必要条件, 问:

(1) A是D的什么条件?

(2) B是D的什么条件?

解 已知条件符号化 $A \Rightarrow B$, $C \Rightarrow B$, $D \Rightarrow C$, $B \Rightarrow D$, 有

(1) $A \Rightarrow B$, $B \Rightarrow D$, 所以 $A \Rightarrow D$,

即 A是D的充分条件。

(2) $D \Rightarrow C$, $C \Rightarrow B$, 所以 $D \Rightarrow B$,

又因为$B \Rightarrow D$, 所以 $B \Leftrightarrow D$,

即 B是D的充要条件。

例 判断下列各推理是否正确？用等值演算法

(1) 前提: $(P\wedge\neg P)\rightarrow\neg R$, $(P\wedge\neg P)$; 结论: $\neg R$。

解 推理对应的蕴涵式为:

$$(((P\wedge\neg P)\rightarrow\neg R)\wedge(P\wedge\neg P))\rightarrow\neg R$$

$$\Leftrightarrow(1\wedge 0)\rightarrow\neg R$$

$$\Leftrightarrow 0\rightarrow\neg R$$

$\Leftrightarrow 1$ 所以推理正确。

(2) 前提: $(P\vee R)\vee Q$, $\neg Q$; 结论: $(P\vee R)$。

解 推理对应的蕴涵式为:

$$((P\vee R)\vee Q)\wedge\neg Q\rightarrow(P\vee R)$$

$$\Leftrightarrow((P\vee R)\wedge\neg Q)\vee(Q\wedge\neg Q)\rightarrow(P\vee R)$$

$\Leftrightarrow(P\vee R)\wedge\neg Q\rightarrow(P\vee R)$ /*化简 I_2

$\Leftrightarrow 1$ 所以推理正确。

二. 构造证明

- 当前提和结论都是比较复杂的命题公式或者所包含的命题变元很多时, 直接按定义进行推导的真值表法、等值演算法、主范式法将是很困难的, 需要寻求更有效的推理方法。

定义 一个描述推理过程的命题公式序列, 其中每个命题或者是已知的命题, 或者是由某些前提应用推理规则得到的结论, 序列中最后一个命题就是所要求的结论, 这样的命题序列称为形式证明。

- 有些推理规则是建立在某些推理定律基础上的, 所谓推理定律就是重言蕴涵式。

重言蕴涵Implication(推理规律)式表

$(I_1)\ A \Rightarrow A \vee B,\ \ B \Rightarrow A \vee B$ 附加

$(I_2)\ A \wedge B \Rightarrow A,\ \ A \wedge B \Rightarrow B$ 化简

$(I_3)\ (A \rightarrow B) \wedge A \Rightarrow B$ 假言推理

$(I_4)\ (A \rightarrow B) \wedge \neg B \Rightarrow \neg A$ 拒取式

$(I_5)\ (A \vee B) \wedge \neg B \Rightarrow A$ 析取三段论

$(I_6)\ (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) \Rightarrow A \rightarrow C$ 假言三段论

$(I_7)\ (A \leftrightarrow B) \wedge (B \leftrightarrow C) \Rightarrow A \leftrightarrow C$ 等价三段论

$(I_8)\ (A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow D) \wedge (A \vee C) \Rightarrow (B \vee D)$ 构造性二难

- 可按定义真值表直接证明这8条。

- 16条等值式的每个均产生两个推理定律,

  左 $\Rightarrow$ 右 和 右 $\Rightarrow$ 左

- 证明中常用的推理规则:

0. 16条等价关系式E_i和8条推理规律I_i。

1. 前提引入规则: 在证明的任何步骤上都可以引用前提。

2. 结论引用规则: 在证明的任何步骤上所得到的结论都可以在后续的证明中引用。

3. 置换规则: 在证明的任何步骤上, 命题公式的子公式都可以用与之等价的其它命题公式置换。

- 重言式中的任一命题变元都可以用命题公式代入, 得到的仍是重言式。

- 由8条推理规律和推理规则2, 可导出以下推理规则:

4. 假言推理规则: 若证明的公式序列中已出现过$A \to B$和A, 由假言推理定律可知, B是$A \to B$和A的逻辑结论, 由推理规则2, 可引入B。

5. 附加规则: 若证明的公式序列中已出现过A, 由附加律可知, $A \vee B$是A的逻辑结论, 由推理规则2, 可引入$A \vee B$

6. 化简规则: 若证明的公式序列中已出现过$A \wedge B$, 由化简律可知, A, B都是$A \wedge B$的逻辑结论, 可引入A或 B。

7. 拒取式规则: 若证明的公式序列中已出现过$A \to B$ 和 $\neg B$, 则可引入$\neg A$。

8. **假言三段论规则**: 若证明的公式序列中已出现过$A \to B$和$B \to C$, 则可引入$A \to C$。

9. **析取三段论规则**: 若证明的公式序列中已出现过$A \lor B$和$\neg B$, 则可引入A。

10. **构造性二难规则**: 若证明的公式序列中已出现过$A \to B$, $C \to D$, $A \lor C$, 则可引入$B \lor D$ 。

11. **合取引入规则**: 若证明的公式序列中已出现过A和B, 则可引入$A \land B$。

- **推理的形式结构中$H_1, H_2, \ldots, H_n$为前提, 结论为C。若能用以上推理规则, 构造出证明序列, 序列的最后公式为C, 则说明此推理正确, C是$H_1, H_2, \ldots, H_n$的逻辑结论。**

- 如果证明过程中的每一步所得到的结论都是根据推理规则得到的，则这样的证明是有效的。
- 通过有效证明得到的结论，称作是有效的结论。
- 一个证明是否有效与前提的真假没有关系，

  一个结论是否有效与它自身的真假也没有关系。
- 在数理逻辑中，主要关心的是如何构造一个有效的证明和得到有效的结论。

- 如果所有的前提都是真的，那么通过有效的证明所得到的结论也是真的，这样的证明称作是合理的。
- 通过合理的证明而得到的结论称作是合理结论。

例1.24 构造性二难的证明。

前提: $p \rightarrow r, q \rightarrow s, p \vee q$； 结论C : $r \vee s$。 I_8

(1)	$p \rightarrow r$	Premise	
(4)	$\neg r \rightarrow \neg p$	(1), E_{14}	/*omit(2)(3)
(5)	$p \vee q$	P	/*omit(6)
(7)	$\neg p \rightarrow q$	(5), E_{12}	
(8)	$\neg r \rightarrow q$	(4), (7), I_6	
(9)	$q \rightarrow s$	P	
(10)	$\neg r \rightarrow s$	(8), (9), I_6	
(11)	$r \vee s$		

- 结论$r \vee s$是有效结论。

例 前提: 如果马会飞或羊吃草, 则母鸡就会是飞鸟;

如果母鸡是飞鸟, 那么烤熟的鸭子还会跑; 烤熟的鸭子不会跑。

结论: 羊不吃草。

解 符号化上述语句,

P: 马会飞, Q: 羊吃草, R: 母鸡是飞鸟, S: 烤熟的鸭子还会跑, ¬S: 烤熟的鸭子不会跑, ¬Q: 羊不吃草。

则 前提集合$\{P \vee Q \rightarrow R, R \rightarrow S, \neg S\}$, 结论$C : \neg Q$。

- 前提集合$\{P \vee Q \rightarrow R, R \rightarrow S, \neg S\}$，结论$C: \neg Q$。

(1)	$\neg S$	Premise
(2)	$R \rightarrow S$	P
(3)	$\neg R$	(1), (2), I_4
(4)	$P \vee Q \rightarrow R$	P
(5)	$\neg(P \vee Q)$	(3), (4), I_4
(6)	$\neg P \wedge \neg Q$	(5), E_6
(7)	$\neg Q$	(6), I_2

- 结论是有效结论。

例 如果我的考试通过, 那么我很快乐。如果我快乐, 那么阳光很好。现在是凌晨一点, 天很暖和。试给出结论。

解 设 **P**: 我的考试通过, **Q**: 我很快乐, **R**: 阳光很好, **S**: 天很暖和。把 “凌晨一点” 理解为阳光不好。

前提为: $P\rightarrow Q$, $Q\rightarrow R$, $\neg R\wedge S$。

编号	公式	依据
(1)	$P\rightarrow Q$	Premise
(2)	$Q\rightarrow R$	P
(3)	$P\rightarrow R$	(1), (2); I
(4)	$\neg R\wedge S$	P
(5)	$\neg R$	(4); I_1
(6)	$\neg P$	(3), (5); I

- 结论: $\neg P$, 我的考试没通过。

二、附加前提(CP)证明法：

附加前提(CP)规则: 设$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n$是一组前提的合取, 即前提集合, 结论为$A \rightarrow B$。如果能够从原结论中的前件Q包括到前提中去作为附加前提, 推导出R来, 则就能够从$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n$ 推导出 $A \rightarrow B$。

$$(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n) \rightarrow (A \rightarrow B)$$

$$\Leftrightarrow (A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \wedge A) \rightarrow B$$

证明 $(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n) \rightarrow (A \rightarrow B)$

$$\Leftrightarrow \neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n) \vee (\neg A \vee B)$$

$$\Leftrightarrow (\neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n) \vee \neg A) \vee B$$

$$\Leftrightarrow \neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \wedge A) \vee B$$

$$\Leftrightarrow (A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \wedge A) \rightarrow B$$

- 使用CP规则进行推理时, 好象多一个条件, 推断起来可能方便些。若结论为蕴涵式或析取式, 用CP规则。

例 前提: $\neg P \vee \neg Q$, $\neg P \rightarrow R$, $R \rightarrow \neg S$;

结论: $S \rightarrow \neg Q$。

证明

(1)	S	CP
(2)	$R \rightarrow \neg S$	Premise
(3)	$S \rightarrow \neg R$	(2), E
(4)	$\neg R$	(1), (3), I
(5)	$\neg P \rightarrow R$	P
(6)	$\neg R \rightarrow P$	(5), E
(7)	P	(4), (6), I
(8)	$\neg P \vee \neg Q$	P

(8)	$\neg P \vee \neg Q$	P
(9)	$P \rightarrow \neg Q$	(8), E
(10)	$\neg Q$	(7), (9), I
(11)	$S \rightarrow \neg Q$	(1), (10), CP

三、归谬法：

定义 设$H_1, H_2, \ldots, H_k$是k个命题公式, 若它们的合取式 $H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_k$ 是可满足式, 则称 $H_1, H_2, \ldots, H_k$ 是相容的或一致的。否则, 若$H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_k$是矛盾式, 则称$H_1, H_2, \ldots, H_k$是不相容的。

例 判断下列各推理是否正确？前提是否相容？

(1) 前提: $(P \wedge \neg P) \rightarrow \neg R, (P \wedge \neg P)$; 结论: $\neg R$。

解 推理对应的蕴涵式为:

$$(((P \wedge \neg P) \rightarrow \neg R) \wedge (P \wedge \neg P)) \rightarrow \neg R$$

$\Leftrightarrow 0 \rightarrow \neg R \quad \Leftrightarrow 1$ 所以推理正确。

前提的合取式: $((P \wedge \neg P) \rightarrow \neg R) \wedge (P \wedge \neg P)$

$\Leftrightarrow (0 \rightarrow \neg R) \wedge 0 \ \Leftrightarrow 0$ 所以前提不相容。

(2) 前提: $(P\vee R)\vee Q, \neg Q$; 结论: $(P\vee R)$。

解 推理对应的蕴涵式为:

$$((P\vee R)\vee Q)\wedge\neg Q \rightarrow (P\vee R)$$

$$\Leftrightarrow ((P\vee R)\wedge\neg Q)\vee(Q\wedge\neg Q) \rightarrow (P\vee R)$$

$$\Leftrightarrow (P\vee R)\wedge\neg Q \rightarrow (P\vee R)$$ /*化简I_2

$$\Leftrightarrow 1$$ 所以推理正确。

前提的合取式: $((P\vee R)\vee Q)\wedge\neg Q$

$$\Leftrightarrow (P\vee R)\wedge\neg Q)\vee(Q\wedge\neg Q)$$

$$\Leftrightarrow (P\vee R)\wedge\neg Q$$

令 $Q = 0$时, $P = 1$ 或 $R =1$, $(P\vee R)\wedge\neg Q$值为1,

前提是可满足式, 所以前提相容。

例 证明下列前提是不相容的。

1. 若A因病缺了许多课, 那么他中学考试失败。

2. 若A中学考试失败, 则他没有知识。

3. 若A读了许多书, 则他有知识。

4. A因病缺了许多课, 而且读了许多书。

证明 符号化题目:

P: 因病缺了许多课,

Q: 中学考试失败,

R: 有知识,

S: 读了许多书。

问题要证明前提

$P \to Q, Q \to \neg R, S \to R, P \wedge S$是不相容的。

$P \to Q, Q \to \neg R, S \to R, P \land S$是不相容的。

编号	公式	依据
(1)	$P \land S$	Premise
(2)	P	(1), I_2
(3)	S	(1), I_2
(4)	$P \to Q$	P
(5)	Q	(2),(4), I_3
(6)	$S \to R$	P
(7)	R	(3),(6), I_3
(8)	$Q \to \neg R$	P
(9)	$\neg R$	(5),(8), I_3
(10)	$R \land \neg R$	(7),(9)

- 由上例看出，前提是否相容与推理是否正确是不同的问题，判断的方法也不相同，不可混淆。
- 在归谬法中，使用了不相容的概念。
- 为了证明结论C可从前提$H_1, H_2, \ldots, H_k$推出，把结论的否定式$\neg C$作为附加前提引入推出矛盾式来的证明方法称为归谬法。
- $\neg C$添加到给定前提集合中，构成一组新的前提。
- 如果 $H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_k \wedge \neg C$ 是矛盾式，则这组新的前提是不相容的。
- 因此，当$H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_k$为真时，$\neg C$必为假，即C必为真。于是，C可以由前提$H_1, H_2, \ldots, H_k$推出。

- $(H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_k) \rightarrow C$

$\Leftrightarrow \neg(H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_k) \vee C$

$\Leftrightarrow \neg(H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_k \wedge \neg C)$

- 若 $H_1, H_2, \ldots, H_k$, C 不相容,

即 $H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_k \wedge \neg C$ 为矛盾式

说明 $\neg(H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_k \wedge \neg C)$ 为重言式

即 $(H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_k) \rightarrow C$ 为重言式

- 归谬法有时在证明时十分方便。
- 然而, 总可以不使用它而用CP规则证明法代替它。
- 实际上归谬法本身就是CP的一种变型。

$$H_1, H_2, \ldots, H_n, \neg C \Rightarrow R \wedge \neg R$$

$$\Leftrightarrow H_1, H_2, \ldots, H_n \Rightarrow \neg C \rightarrow (R \wedge \neg R)$$

$$\Leftrightarrow H_1, H_2, \ldots, H_n \Rightarrow C \vee (R \wedge \neg R)$$

$$\Leftrightarrow H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n \Rightarrow C$$

$\Leftrightarrow (H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n) \rightarrow C$为重言式

- 从逻辑学角度来讲, 间接证明法和直接证明法同样有效, 只是其方便程度因问题的不同而异。
- 任意一个命题, 若存在间接证明法, 必存在直接证明法, 反之也成立。

例 1.27 用归谬法构造下面推理的证明。

前提 $(p\wedge\neg(r\wedge s))\rightarrow\neg q$, p, $\neg s$。结论: $\neg q$。

编号	公式	依据
(1)	$(p\wedge\neg(r\wedge s))\rightarrow\neg q$	Premise
(2)	q	否定结论引入
(3)	$\neg(p\wedge\neg(r\wedge s))$	(1), (2), I_4
(4)	$\neg p\vee(r\wedge s)$	E
(5)	p	P
(6)	$r\wedge s$	(4), (5), I_5
(7)	s	(6), I_2
(8)	$\neg s$	P
(9)	$s\wedge\neg s$	(7),(8), 合取引入

四、推理方法小结

- 要证明 $H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n \rightarrow C$ 是重言式,
  判断推理正确的方法有:

1. 真值表技术:

这是基本的, 也是机械的方法。

(1) 对所有$H_1, H_2, \ldots, H_n$都具有真值1的行(表示前提为真的行), 如果在每一个这样的行中, C也具有真值1,

则C是$H_1, H_2, \ldots, H_n$的逻辑结论。

(2) 对所有C具有真值为0的行(表示结论为假的行),

如果在每一个这样的行中, $H_1, H_2, \ldots, H_n$中至少有一个公式的真值为0 (前提也为假),

则C是$H_1, H_2, \ldots, H_n$的逻辑结论。

- 利用真值表技术，可以验证基本的等值关系式和重言蕴涵式。
- 但当前提与结论中包含的命题变元数量很大时，

这种判定方法只是理论上可行，而实际上是办不到的，

把真值表输入计算机时，要占有相当大的存储空间，

搜索与访问真值表的穷举法的运算步骤

会导致运算次数的“组合爆炸”。

2. 等值演算法：

用逻辑等值式和重言蕴涵式，但每一步引用哪一条，

得靠熟记和灵活应用公式，需要技巧和经验，

而且每步都要写出所有各项，也不经济。

3. 取主合(析)取范式法:

当命题变元太多时, 这种方法也还是很繁琐的。

4. 构造证明法 (直接, CP, 归谬):

这方法很简练, 但每步引用哪一种规则或逻辑关系式, 得靠熟记和灵活应用公式, 需要技巧和经验, 有时还要构造尚未介绍过的规则。

- 当所给的公式并非重言式时, 用2、4方法不但白做无效劳动, 还不易发现问题所在。

例 如果a是奇数, 则a不能被2整除。如果a是偶数, 则a能被2整除。因此, 如果a是偶数, 则a不是奇数。

解 设 P: a是奇数, Q: a是偶数, R: a能被2整除,

推理的形式结构为

$$((P \rightarrow \neg R) \wedge (Q \rightarrow R)) \rightarrow (Q \rightarrow \neg P)$$

(1) 真值表技术 (略)

(2) 等值演算法

$((P \rightarrow \neg R) \wedge (Q \rightarrow R)) \rightarrow (Q \rightarrow \neg P)$

$\Leftrightarrow \neg((\neg P \vee \neg R) \wedge (\neg Q \vee R)) \vee (\neg Q \vee \neg P)$

$\Leftrightarrow (P \wedge R) \vee (Q \wedge \neg R) \vee \neg Q \vee \neg P$

$\Leftrightarrow (P \wedge R) \vee \neg P \vee (Q \wedge \neg R) \vee \neg Q$

$\Leftrightarrow (\neg P \vee R) \vee (\neg Q \vee \neg R)$ /*第二吸收律

$\Leftrightarrow 1$

(3) 主析取范式

$$((P \rightarrow \neg R) \wedge (Q \rightarrow R)) \rightarrow (Q \rightarrow \neg P)$$

$$\Leftrightarrow \ldots\ldots$$

$$\Leftrightarrow m_0 \vee m_1 \vee m_2 \vee m_3 \vee m_4 \vee m_5 \vee m_6 \vee m_7$$

- 所以原公式为**重言式**。

(4) 构造证明

前提: $P \rightarrow \neg R, Q \rightarrow R$; 结论: $Q \rightarrow \neg P$

编号	公式	依据
(1)	$P \rightarrow \neg R$	P
(2)	$R \rightarrow \neg P$	E_{14}
(3)	$Q \rightarrow R$	P
(4)	$Q \rightarrow \neg P$	(3), (2), I

例 "如果春暖花开, 燕子就会飞回北方。如果燕子飞回北方, 则冰雪融化。所以, 如果冰雪没有融化, 则没有春暖花开。" 证明这些语句构成一个正确的推理。

Sol: 令 P: 春暖花开。Q: 燕子飞回北方。R:冰雪融化。则上述问题转化成证明:

$$P \rightarrow Q, Q \rightarrow R \Rightarrow \neg R \rightarrow \neg P$$

利用蕴含证明规则, 将$\neg$R作为附加前提, 推导$\neg$P, 从而推导出$\neg R \rightarrow \neg P$。

编号	公式	依据
(1)	$Q \rightarrow R$	前提
(2)	$\neg R$	附加前提
(3)	$\neg Q$	(1),(2); I_4
(4)	$P \rightarrow Q$	前提
(5)	$\neg P$	(3), (4); I_4

例 张三说李四在说谎, 李四说王五在说谎, 王五说张三、李四都在说谎。问谁说真话, 谁说假话?

解 设A:张三说真话; B:李四说真话; C:王五说真话

依题意有 $A \Leftrightarrow \neg B$, $B \Leftrightarrow \neg C$, $C \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$。

$$(A \leftrightarrow \neg B) \wedge (B \leftrightarrow \neg C) \wedge (C \leftrightarrow \neg A \wedge \neg B)$$

$$\Leftrightarrow (A \to \neg B) \wedge (\neg B \to A) \wedge (B \to \neg C) \wedge (\neg C \to B)$$

$$\wedge (C \to (\neg A \wedge \neg B)) \wedge ((\neg A \wedge \neg B) \to C)$$

$$\Leftrightarrow \ldots\ldots$$

$$\Leftrightarrow \neg A \wedge B \wedge \neg C$$

即: 李四说真话, 张三和王五说假话。

例 有一逻辑学家误入某部落, 被拘于劳狱, 酋长意欲放行.

- 他对逻辑学家说:“今有两门, 一为自由, 一为死亡, 你可任意开启一门。
- 现你从两战士中选择一人负责解答你所提的任何一个问题(Y/N), 其中一人天性诚实, 一人说谎成性, 今后生死由你自己选择”。
- 逻辑学家沉思片刻, 即向一战士发问, 然后开门从容离去。该逻辑学家应如何发问?

Sol: 逻辑学家手指一门问其中一战士说:“这扇门是死亡门, 他(指另一名战士)将回答‘是’, 对吗?” 当被问战士回答“对”, 则逻辑学家开启所指的门从容离去。分析:

(4)若被问者是诚实战士, 他答“对”。则另一战士是说谎战士 , 他答“是”, 那么, 这扇门不是死亡门。 回答同

(3) 若被问者是诚实战士, 他回答“否”。则另一战士是说谎战士 , 他回答“不”, 那么这扇门是死亡门。回答同

(1) 若被问者是说谎战士, 他回答“否”。则另一战士是诚实战士, 他回答“是”, 那么这扇门是死亡门。 回答 异

设 P: 被问战士是诚实人。

Q: 被问战士的回答是‘是’。

R: 另一名战士的回答是‘是’。

S: 这扇门是死亡门。

真值表如下:

	P	Q	R	S
(1)	0	0	1	1
(2)	0	1	0	0
(3)	1	0	0	1
(4)	1	1	1	0

答异

答同

$$Q \rightarrow \neg S$$

本 章 小 结

- 能判定真假的陈述句称作命题。要善于将自然语言表达的问题符号化为命题, 使推理过程简捷、正确。
- 命题联结词作用于命题时和数学运算符相当, 所以又称逻辑运算符。联结词反映了复合命题和部分命题之间的真假关系, 这种关系是命题联结词的逻辑内容。
- 如果一个联结词可以由集合中其它的联结词来定义, 则该联结词称为冗余联结词, 否则, 称为独立联结词。
- 命题公式是 由命题常元、命题变元、命题联结词 和圆括号等所组成的满足定义1.6的字符串。
- 了解三种特殊公式之间的关系:

  重言式的否定是矛盾式; 矛盾式的否定是重言式

  重言式一定是可满足式。

- 真值表法是最基本和机械的命题演算方法，当公式很复杂所含命题变元很多时，真值表法的工作量太大。
- 利用等值式进行题演算和推理是切实可行的，但技巧性较高。
- 主范式把命题公式标准化，同一真值函数对应的所有命题公式具有相同主范式，从而易判断两个命题公式是否等价以及判断公式的类型。
- 用对偶原理可成对地记忆公式并推导新公式。
- 基本蕴涵式与等值式是掌握命题演算、推理过程、求主合取范式和主析取范式的基础。
- 引入置换规则，可将公式变形，扩大重言式和逻辑等价公式的作用。
- 正确灵活地使用推理规则，特别注意 归谬法可以从前提集演绎出结论。