厦门大学《大学物理》B1 课程 期中试题·答案

考试日期：2014.4　　信息学院自律督导部整理

自律督导部

一、（12 分）

一半径为$R=0.50m$的飞轮，在启动过程中其角速度与时间的平方成正比$\omega = kt^2$。在启动过程的$t=2.0s$时，测得轮缘一点的速度大小为$v=4.0m/s$．求：

（1）该飞轮在$t=0.5s$时的角速度；

（2）在$t=1.0s$时，轮缘一点的切向加速度和法向加速度；

（3）该飞轮在最初$2s$内所转过的角度。

解：（1）$\because t=2.0\text{s}$时，$v=R\omega=0.5\times k\times 2^2=4$ $\Rightarrow$ $\therefore k=2$，

在$t=0.5s$时飞轮的角速度：$\omega=kt^2=2t^2=2\times0.5^2=0.5s^{-1}$；

（2）$\because \beta=\dfrac{d\omega}{dt}=2kt=4t$，在$t=1.0s$时轮缘一点：

$\therefore a_\tau=R\beta=4Rt=4\times0.5\times1.0=2.0(m/s^2)$；

$a_n=R\omega^2=4Rt^2=4\times0.5\times1.0^2=2.0(m/s^2)$；

（3）飞轮启动过程：$\because \omega=\dfrac{d\theta}{dt}=kt^2$ $\Rightarrow$ $\int_0^\theta d\theta=\int_0^2\omega dt=\int_0^2 2t^2dt$，

解得飞轮在最初$2s$内所转过的角度：$\theta=\dfrac{2}{3}t^3=\dfrac{2}{3}\times2^3=\dfrac{16}{3}rad$。

（$3\times4=12$分）

二、（16 分）

一物体沿一**直线轨道**运动，测得该物体与轨道的摩擦力与其速度成正比$f=-kv$（k为常数）。已知质点的质量为m，质点的初速度为v_0。若计时开始时质点位于坐标原点，求：

（1）　t 时刻物体的速度$v(t)$；

（2）　t 时刻物体所在的位置$x(t)$；

（3） 当物体的速度为v时，质点所在的位置$x(v)$；

（4） 若**物体停止时经过距离**s, 问k为多大？

解：（1）质点动力学方程：$-kv = m\frac{dv}{dt}$ ，

$$\int_{v_0}^{v}\frac{dv}{v} = -\frac{k}{m}\int_0^t dt \quad \Rightarrow \quad v = v_0 e^{-\frac{k}{m}t}$$ ；

（2）$\because v = v_0 e^{-\frac{k}{m}t} = \frac{dx}{dt} \quad \Rightarrow \quad \int_0^x dx = \int_0^t v dt = \int_0^t v_0 e^{-\frac{k}{m}t} dt$ ，

$$\therefore x = \frac{m}{k}v_0(1 - e^{-\frac{k}{m}t})$$ ；

（3）$\because -kv = m\frac{dv}{dt}\cdot\frac{dx}{dx} = m\frac{vdv}{dx} \quad \Rightarrow \quad \int_0^x dx = \int_{v_0}^{v} -\frac{m}{k}dv$ ，

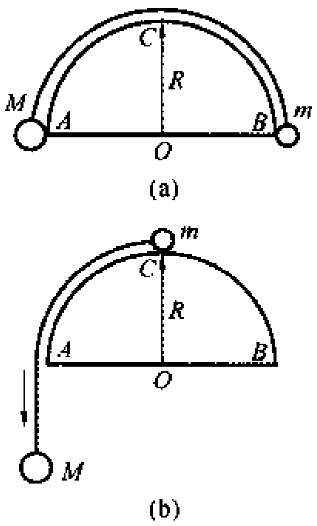
$\therefore x = \frac{m}{k}(v_0 - v)$ ；

或：$x = \frac{m}{k}v_0(1 - e^{-\frac{k}{m}t}) = \frac{m}{k}(v_0 - v)$

（4）停止运动时物体经过的距离：

$s = \frac{m}{k}(v_0 - v) = \frac{m}{k}(v_0 - 0) = \frac{m}{k}v_0 \quad \Rightarrow \quad k = \frac{mv_0}{s}$ 。（ $4\times4=16$分）

三、（15 分）



一条不可伸长的轻绳两端各系着一小球，质量分别为m和M，跨放在光滑固定的半圆柱面上，圆柱半径为R，两球正好贴在圆柱截面的水平直径AB两端(如图 a 所示)。今让小球由静止开始运动，求：

（1）M下落距离y时的加速度大小$a(y)$；

（2）m达到最高点C时，M的速度；

（3）若当m刚好到达圆柱最高点C时脱离圆柱体(如图 b 所示)，求M与m的比值；

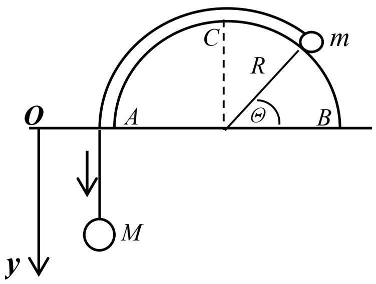
解：（1）设开始时M所在的位置为坐标原点，M下落的方向为坐标轴正方向，

当M下落距离y时：

$$m:\begin{cases} n: mg\sin\theta - N = ma_n \\ \tau: T - mg\cos\theta = ma_\tau \end{cases}\quad,\qquad M: Mg - T = Ma = Ma_\tau\quad,$$

$$\Rightarrow\quad Mg - mg\cos\theta = (M+m)a\quad,\ \text{又}\ \cos\theta = \cos(\frac{y}{R})\quad,$$

$$\therefore a = \frac{M - m\cos(\frac{y}{R})}{M+m}g\quad;$$



（2）m、M与地球组成的系统机械能守恒：

$$0 = mgR - MgR + \frac{1}{2}(m+M)v_c^2$$ ？？？错！

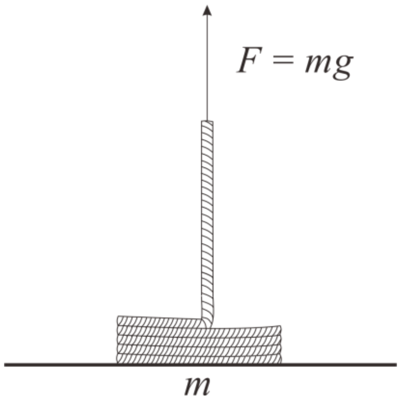
$$\Rightarrow\quad v_c = \sqrt{\frac{2(M-m)Rg}{M+m}}\quad;$$

（3）若当m到达圆柱最高点C时脱离圆柱体，有：

$$mg = m\frac{v_c^2}{R} = \frac{m}{R}\cdot\frac{2(M-m)Rg}{M+m}$$ ？？？跟着错！ $\Rightarrow$ 得：$\frac{M}{m} = 3$ 。

（ $3\times5 = 15$分 ）

四、（12 分）



一条长为L，质量为m的均质细绳盘放在桌面上。若用一竖直向上的恒力$F=mg$将其提起，求当绳末端刚刚离开桌面时，绳的速度。

解：当绳子向上提起长度 y 时：

$$\begin{cases}(F-\lambda yg)dt=\lambda(L-y)gdt \\ dP=d(\lambda yv)\end{cases}$$，（6 分）

由动量定理有：$\lambda(L-y)gdt=d(\lambda yv)$ ，方程两边乘上ydy，再积分：

$$\int_0^L \lambda g(L-y)ydy=\int_{0,0}^{y,v}\lambda yv\cdot d(yv) \quad \Rightarrow \quad \therefore v=\sqrt{\frac{gL}{3}}$$ 。（6 分）

注释 1：本题**只能用“动量定理”来作解**。本题**不能用如下“功能原理”来作解**。

$$F\cdot L=\frac{1}{2}\cdot m\cdot v^2+m\cdot g\cdot\frac{L}{2} \quad ; \quad F=m\cdot g$$
$$\Rightarrow$$
$$v=\sqrt{g\cdot L}$$

错误！Why?

注释 2：依动量定理，有

$$(F-\frac{m}{L}\cdot y\cdot g)\cdot \mathrm{d}t=\mathrm{d}P \quad ; \quad \mathrm{d}P=\mathrm{d}(\frac{m}{L}\cdot y\cdot v)$$
$$\Rightarrow$$
$$(F-\frac{m}{L}\cdot y\cdot g)\cdot \mathrm{d}t=\frac{m}{L}\cdot \mathrm{d}(y\cdot v) \quad \Rightarrow$$

$$\frac{L}{m}\cdot(F-\frac{m}{L}\cdot y\cdot g)=\frac{\mathrm{d}(y\cdot v)}{\mathrm{d}y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=v\cdot\frac{\mathrm{d}(y\cdot v)}{\mathrm{d}y}$$
$$\Rightarrow$$
$$(\frac{L}{m}\cdot F-g\cdot y)\cdot \mathrm{d}y=v\cdot \mathrm{d}(y\cdot v) \quad \Rightarrow$$

依不展开微分$\mathrm{d}(y\cdot v)$的思想，有

$$(\frac{L}{m}\cdot F-g\cdot y)\cdot y\cdot \mathrm{d}y=y\cdot v\cdot \mathrm{d}(y\cdot v)$$
$$\Rightarrow$$
$$\frac{L}{m}\cdot F\cdot y\cdot \mathrm{d}y-g\cdot y^2\cdot \mathrm{d}y=\mathrm{d}[\frac{1}{2}\cdot (y\cdot v)^2]$$
$$\Rightarrow$$
$$\mathrm{d}(\frac{1}{2}\cdot\frac{L}{m}\cdot F\cdot y^2-\frac{1}{3}\cdot g\cdot y^3)=\mathrm{d}[\frac{1}{2}\cdot (y\cdot v)^2]$$
$$\Rightarrow$$
$$\mathrm{d}[\frac{1}{2}\cdot (y\cdot v)^2+\frac{1}{3}\cdot g\cdot y^3-\frac{1}{2}\cdot\frac{L}{m}\cdot F\cdot y^2]=0$$
$$\Rightarrow$$
$$\frac{1}{2}\cdot (y\cdot v)^2+\frac{1}{3}\cdot g\cdot y^3-\frac{1}{2}\cdot\frac{L}{m}\cdot F\cdot y^2=0$$
$$\Rightarrow$$
$$v(y;F)=\sqrt{\frac{F}{\lambda}-\frac{2}{3}\cdot g\cdot y}\quad ;\quad \lambda=\frac{m}{L}$$

特别地，有：$v(L;m\cdot g)=\sqrt{\frac{1}{3}\cdot g\cdot L}$

五、（15 分）

一质量为 $2\ kg$ 的质点在 xoy 平面内运动，其运动方程为：$\vec{r}(t)=\left[2\sin(\pi t)\vec{i}+3\cos(\pi t)\vec{j}\right]$ (m). 试求：

（1）$t=1\ (s)$ 时质点所受的合外力 $\vec{F}$；

（2）从 $t\ (\mathrm{s})$ 至 $t+1\ (\mathrm{s})$ 时间内合外力对质点的冲量 $\vec{I}$；

（3）质点任意时刻对 o 点的角动量，并用角动量定理验验证质点对 o 点角动量守恒。

解：质点速度：$\vec{v}=\dfrac{d\vec{r}}{dt}=2\pi\cos(\pi t)\vec{i}-3\pi\sin(\pi t)\vec{j}$ ，

质点加速度：$\vec{a}=\dfrac{d\vec{v}}{dt}=-2\pi^2\sin(\pi t)\vec{i}-3\pi^2\cos(\pi t)\vec{j}=-\pi^2\vec{r}$ ，

（1）$t=1s$ 时，$\vec{F}=m\vec{a}=-2m\pi^2\sin(\pi t)\vec{i}-3m\pi^2\cos(\pi t)\vec{j}=-6\pi^2\vec{j}(N)$ ；

（2）$\because t$ 时刻：$\vec{v}_1=2\pi\cos(\pi t)\vec{i}-3\pi\sin(\pi t)\vec{j}$ ，

$(t+1)$ 时刻：$\vec{v}_2=2\pi\cos[\pi(t+1)]\vec{i}-3\pi\sin[\pi(t+1)]\vec{j}=-2\pi\cos(\pi t)\vec{i}+3\pi\sin(\pi t)\vec{j}$ ，

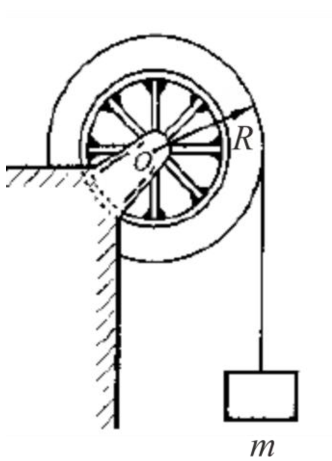
$\therefore \vec{I}=\Delta\vec{P}=\vec{P}_2-\vec{P}_1=m\vec{v}_2-m\vec{v}_1=-8\pi\cos(\pi t)\vec{i}+12\pi\sin(\pi t)\vec{j}(N\cdot s)$

（3）$\vec{L}_o=\vec{r}\times\vec{P}=m\vec{r}\times\vec{v}=-12\pi\vec{k}(kg\cdot m^2/s)$ ；

$\because \vec{M}_o=\vec{r}\times\vec{F}=m\vec{r}\times\vec{a}=m\vec{r}\times(-\pi^2\vec{r})=0$ ，所以质点角动量守恒。

（ $3\times5=15$分 ）

六、（14 分）



实验中常用**落体法**测定刚体的转动转动惯量：如图所示，将质量为 m 的物体悬挂于一条**不可伸长的轻绳**的一端，绳的另一端绕在一半径为 R 的**定滑轮**上，滑轮可绕水平轴转动。若**滑轮与轴光滑接触**，且绳子与滑轮无相对滑动，当物体从静止释放后，在时间 t 内下降了一段距离 S，试求：

（1）滑轮的转动惯量 J；

（2）绳子受到的张力的大小。

解：（1）系统动力学方程：

物体：$mg-T=ma$ ，（2 分）

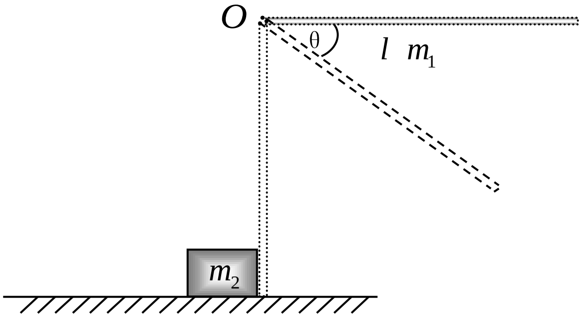
飞轮：$TR=J\beta$ ， 又：$\begin{cases} a_\tau = a = R\beta \\ s=\dfrac{1}{2}at^2 \end{cases}$ ，（3*2=6 分）

解得：$J=mR^2(\dfrac{gt^2}{2s}-1)$ ；（3 分）

（2）绳子张力：$T=m(g-a)=m(g-\dfrac{2s}{t^2})$ 。（3 分）

七、（16 分）

长度为l，质量m（即$m_1=m$）的匀质细杆，可绕通过O点、垂直于纸面的水平轴转动。令杆自水平位置由静止下摆，求：



（1）当细杆下摆至θ角时的角加速度$\beta(\theta)$与角速度$\omega(\theta)$；

（2）若细杆在铅垂位置与质量也为m（即$m_2=m$）的静止物体发生完全弹性碰撞，碰后物体仍沿水平面运动，求碰后物体获得的速度，及细杆的角速度；

（3）碰后杆能上升的最大角度。■

解：（1）细杆下摆的动力学方程：

$$mg\frac{l}{2}\cos\theta=\frac{1}{3}ml^2\beta=\frac{1}{3}ml^2\cdot\frac{d\omega}{dt} ,$$

$$\beta=\frac{3g}{2l}\cos\theta=\frac{d\omega}{dt}\cdot\frac{d\theta}{d\theta}=\frac{\omega d\omega}{d\theta} \quad \Rightarrow \quad \int_0^\omega \omega d\omega=\int_0^\theta \frac{3g}{2l}\cos\theta d\theta ,$$

解得：$\begin{cases} \beta=\dfrac{3g}{2l}\cos\theta \\ \omega=\sqrt{\dfrac{3g}{l}\sin\theta} \end{cases}$ ；（5分）

（2） 设：$J_1=\dfrac{1}{3}ml^2$ ，$J_2=ml^2$ ，$\omega_{10}=\sqrt{\dfrac{3g}{l}}$ ，

则碰撞过程细杆与物体的动力学方程：

$$\begin{cases} J_1\omega_{10} = J_1\omega_1 + J_2\omega_2 \\ \frac{1}{2}J_1\omega_{10}^2 = \frac{1}{2}J_1\omega_1^2 + \frac{1}{2}J_2\omega_2^2 \end{cases} \Rightarrow$$

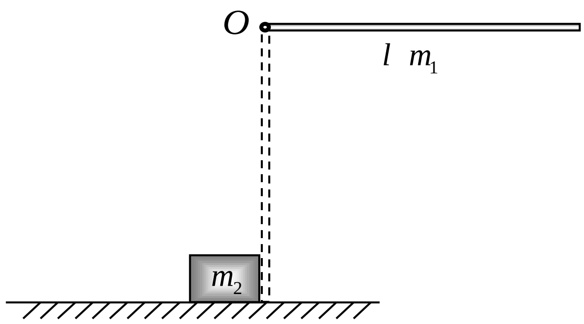
解得：$\omega_1 = \frac{(J_1 - J_2)\omega_{10}}{J_1 + J_2} = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3g}{l}}$ ——细杆反弹，

$\omega_2 = \frac{2J_1\omega_{10}}{J_1 + J_2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3g}{l}} \Rightarrow$ $v_2 = l\omega_2 = \frac{1}{2}\sqrt{3gl}$ ——方向向左 ；（6分）

（3）细杆上摆过程中机械能守恒：$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}ml^2\cdot\omega_1^2 = mg\frac{l}{2}(1-\cos\alpha)$ ，

解得：$\alpha = \cos^{-1}(\frac{3}{4}) = 41.4^0$ （5分）

7.（15 分）



长度l，质量m_1的匀质细杆，可绕通过O点垂直于纸面的水平轴转动。令杆自水平位置静止下摆，在铅垂位置与质量m_2的物体发生**完全弹性碰撞**，碰后物体沿着摩擦系数为μ的水平面滑动，当$m_1 = m_2$时，求：

（1）碰撞时物体受到杆的冲量；

（2）物体滑过的距离；

（3）碰后杆能上升的最大角度。■

解：a. 细杆由水平位置静止下摆至铅垂位置过程机械能守恒：

$$m_1 g\frac{l}{2} = \frac{1}{2}(\frac{1}{3}m_1 l^2)\omega_{10}^2 \quad （2 分） \quad \to \quad \omega_{10} = \sqrt{\frac{3g}{l}} \ ,$$

b. 细杆在铅垂位置与m_2**完全弹性碰撞过程**

角动量守恒：$\frac{1}{3}m_1 l^2\omega_{10} = \frac{1}{3}m_1 l^2\omega_1 + m_2 l^2\omega_2$ ——（1）　（2 分）

机械能守恒：$\frac{1}{2}(\frac{1}{3}m_1 l^2)\omega_{10}^2 = \frac{1}{2}(\frac{1}{3}m_1 l^2)\omega_1^2 + \frac{1}{2}(m_2 l^2)\omega_2^2$　（2 分）

解得：$\omega_1 = (\frac{m_1 - 3m_2}{m_1 + 3m_2})\omega_{10} = \frac{m_1 - 3m_2}{m_1 + 3m_2}\sqrt{\frac{3g}{l}}$ ，

$\Rightarrow$ 当$m_1 = m_2$时有 $\omega_1 = -\frac{1}{2}\omega_{10} = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3g}{l}}$ ，负号表示细杆往回摆；

$\omega_1 = \frac{2m_1}{m_1 + 3m_2}\omega_{10} = \frac{2m_1}{m_1 + 3m_2}\sqrt{\frac{3g}{l}}$ ，**（注释：应该是指ω_2啊，笔误显然！）**

$\Rightarrow$ 当$m_1 = m_2$时有 $\omega_1 = \frac{1}{2}\omega_{10} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3g}{l}}$，**（注释：应该是指$\omega_2$啊，笔误显然！）**

（1）碰撞时物体受到杆的冲量：$\vec{I} = \Delta\vec{P}$ ，

即：$I=P_2-P_1=m_2l\omega_2-0=\dfrac{2m_1m_2}{m_1+3m_2}\sqrt{3gl}$ ； 当 $m_1=m_2$ 时有 $I=\dfrac{1}{2}\sqrt{3gl}$ （3 分）

（2）根据**动能定理**有：$-fs=0-\dfrac{1}{2}m_2v^2$ （2 分），又 $f=\mu N=\mu m_2g$

解得 m_2 移动距离：$s=\dfrac{6m_1^2l}{\mu(m_1+3m_2)^2}=\dfrac{3l}{8\mu}$ （1 分）；

（3）碰后杆上升过程机械能守恒：

$\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{3}m_1l^2)\omega_1^2=m_1g\dfrac{l}{2}(1-\cos\theta)$ （2 分），

解得：$\theta=\arccos\dfrac{12m_1m_2}{(m_1+3m_2)^2}=\arccos\dfrac{3}{4}=41.4^0$ （1 分）

■

1.