厦门大学《概率统计 I》试卷

________学院________系________年级________专业

主考教师：_ _ _ _ 试卷类型：(A 卷)

分数	阅卷人

1、(10分)设A，B，C是三个事件，$P(A)=P(B)=\frac{1}{2}$，$P(C)=\frac{1}{4}$，且A，B，C相互独立。求(1)A，B，C中至少有一个事件发生的概率；(2)A，B，C中恰好有两个事件发生的概率。

解：(1)由于 A，B，C 相互独立，故 $P(AB)=P(A)P(B)=\frac{1}{4}$，$P(AC)=P(A)P(C)=\frac{1}{8}$，

$P(BC)=P(B)P(C)=\frac{1}{8}$，$P(ABC)=P(A)P(B)P(C)=\frac{1}{16}$.

由加法公式得

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}$$

$$=\frac{13}{16}.$$

(2)A，B，C 中恰好有两个事件发生的概率

$$P(AB\bar{C}\cup A\bar{B}C\cup\bar{A}BC)(\text{或 } P(AB\bar{C}+A\bar{B}C+\bar{A}BC))=P(AB\bar{C})+P(A\bar{B}C)+P(\bar{A}BC)$$

$$=P(A)P(B)P(\bar{C})+P(A)P(\bar{B})P(C)+P(\bar{A})P(B)P(C)$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{5}{16}.$$

分数	阅卷人

2、（15 分）设有白球与黑球各 4 只，从中任取 4 只放入甲盒，余下的 4 只放入乙盒，然后分别在两盒中各任取一只，(1) 求取到的两球都是白球的概率；(2) 求取到的两球颜色相同的概率；(3) 取到的两球颜色相同时，放入甲盒的 4 球中有几只白球的概率最大？求出此概率.

解. 设 A = {取到的两球都是白球}, H_k = {甲盒中有 k 只白球}，k=0, 1, . . . , 4, B = {取到的两球都是黑球}，C = {取到的两球颜色相同}，

(1)

$$P(H_0)=P(H_4)=\frac{C_4^0C_4^4}{C_8^4}=\frac{1}{70},\ P(H_1)=\ P(H_3)=\frac{C_4^1C_4^3}{C_8^4}=\frac{8}{35},P(H_2)=\frac{C_4^2C_4^2}{C_8^4}=\frac{18}{35},$$

$$P(A|H_0)=P(A|H_4)=0,\ P(A|H_1)=\ P(A|H_3)=\frac{3}{16},P(A|H_2)=\frac{4}{16},$$

则

$$P(A)=\sum_{k=0}^{4}P(H_k)P(A|H_k)=\frac{3}{14}.$$

(2) 根据对称性，$P(B)=P(A)$, 则 $P(C)=P(B)+P(A)=3/7.$

(3) 由

$$P(C|H_0)=P(C|H_4)=0,\ P(C|H_1)=\ P(C|H_3)=\frac{3}{8},P(C|H_2)=\frac{4}{8},$$

$$P(H_k|C)=\frac{P(H_k)P(C|H_k)}{P(C)},\ k=0,1,\ldots,4,$$

得

$$P(H_0|C)=P(H_4|C)=0,\ P(H_1|C)=P(H_3|C)=\frac{1}{5},P(H_2|C)=\frac{3}{5},$$

即放入甲盒中的 4 球中，有两只白球的概率最大为 3/5.

分数	阅卷人

3、（15 分） 已知连续型随机变量 X 的密度函数

$$\boldsymbol{f(x)=\begin{cases}1-e^{-x}, & 0\le x\le 1,\\ ce^{-x}, & x>1,\\ 0, & x<0,\end{cases}}$$

试求（1）常数 C；　（2）X 的分布函数 $\boldsymbol{F(x)}$；　（3）$\boldsymbol{P\{X>\frac{1}{2}\}}$

解:

$$(1)\int_0^1(1-e^{-x})dx+\int_1^{\infty}ce^{-x}dx=1\Rightarrow c=e-1.$$

$$(2)F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \int_0^x(1-e^{-t})dt, & 0\le x\le 1,\\ \int_0^1(1-e^{-t})dt+\int_1^x ce^{-t}dt, & x>1.\end{cases}=\begin{cases}0, & x<0,\\ x+e^{-x}-1, & 0\le x\le 1,\\ 1+(1-e)e^{-x}, & x>1.\end{cases}$$

$$(3)P\{X>\frac{1}{2}\}=1-F(\frac{1}{2})=\frac{3}{2}-e^{-\frac{1}{2}}.$$

分数	阅卷人

4、（10 分）设随机变量 X 在区间（1，2）上服从均匀分布，试求随机变量 Y=e^{2X}的概率密度 $f_Y(y)$.

【解】 $f_X(x)=\begin{cases}1, & 1<x<2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

因为 P（$1<X<2$）=1,故 P（$e^2<Y<e^4$）=1

当 $y\leqslant e^2$ 时 F_Y（y）=$P(Y\leqslant y)$=0.

当 $e^2<y<e^4$ 时，$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(e^{2X}\le y)$

$$=P(1<X\le \frac{1}{2}\ln y)$$

$$=\int_1^{-\frac{1}{2}\ln y}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln y-1$$

当 $y\geqslant e^4$ 时，$F_Y(y)=P(Y\le y)=1$

即
$$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y\le e^2\\ \frac{1}{2}\ln y-1, & e^2<y<e^4\\ 1, & y\ge e^4\end{cases}$$

故
$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2y}, & e^2<y<e^4\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

分数	阅卷人

5、(10分) 某商店某两种商品在一天内的销售量相互独立，分别服从正态分布 $N(20,4)$ 和 $N(20,1)$，这两种商品的价格分别为20元和30元，试求这两种商品在一天内的总销售收入超过1100元的概率。

（已知 $\Phi(1)=0.8413$，$\Phi(1.65)=0.9500$，$\Phi(2)=0.9772$，$\Phi(2.33)=0.9900$）

解：记两种商品的销售量分别为X，Y，总销售额为Z, 则 $X\sim N(10,4)$， $Y\sim N(10,1)$， X与Y相互独立，故

$$Z=20X+30Y\sim N(1000,50^2)\,,$$

因此

$$\frac{Z-1000}{50}\sim N(0,1),$$

于是这两种商品在一天内的总销售收入超过600元的概率为

$$P(Z>1100)=P(\frac{Z-1000}{50}>2)=1-\Phi(2)=1-0.9772=0.0228\,.$$

分数	阅卷人

6、(12 分) 已知(X，Y)为离散型二维随机变量，其分布律如下：

Y \ X	1	3
1	0.2	a
2	b	0.3

其中a、b为常数，且a>b，又X与Y相互独立，试求

(1) a、b；

(2) $Z=(X-Y)^2$ 的概率分布律；

(3) Z的方差.

解：(1)

X	1	3
P	0.2+b	a+0.3

Y	1	2
P	0.2+a	b+0.3

故

$$\begin{cases} a+b=0.5 \\ 0.2=(0.2+b)(0.2+a) \end{cases}$$

又a>b，故解得 a=0.3, b=0.2

(2) Z的分布律为

X	0	1	4
P	0.2	0.5	0.3

(3)

$$EZ=0.2\times0+0.5\times1+0.3\times4=1.7$$

$$E(Z^2)=0.2\times0^2+0.5\times1^2+0.3\times4^2=5.3$$

$$\mathrm{D(Z)}=E(Z^2)-(EZ)^2=5.3-1.7^2=2.41$$

分数	阅卷人

7、（15 分）已知 X,Y 的联合概率密度为

$$f(x,\ y)=\begin{cases} e^{-x}, & 0<y<x \\ 0, & 其它 \end{cases}$$

求（1）边缘密度 $f_X(x),\ f_Y(y)$；（2）条件概率密度 $f_{Y|X}(y|x)$；（3）X,Y 是否独立；

（4） $P(Y<X/2)$.

解 （1）由题意，知

当 $x\in(0,+\infty)$， $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\int_0^x e^{-x}dy=xe^{-x}$

当 $x\in(-\infty,0]$ ， $f_X(x)=0$

所以： $f_X(x)=\begin{cases} 0, x\le 0 \\ xe^{-x}, x>0 \end{cases}$；

当 $y\in(0,+\infty)$ ， $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx=\int_y^{+\infty} e^{-x}dx=e^{-y}$

当 $y\in(-\infty,0]$， $f_Y(y)=0$

所以 ： $f_Y(y)=\begin{cases} 0, y\le 0 \\ e^{-y}, y>0 \end{cases}$；

（2）当 $x>0$ 时，有

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases} \dfrac{1}{x}, 0<y<x \\ 0, y\text{取其他值} \end{cases}$$

当已知 $\{X=x\}$ 时，由 $f_{Y|X}(y|x)$ 的公式可以判断出，Y 的条件分布为 $[0,x]$ 上的均匀分布。

(3) $f(x,y)\ne f_X(x)f_Y(y)$，故 X 与 Y 不独立

（4） $P(Y<X/2)=\iint\limits_{y<x/2} f(x,y)dxdy=\int_0^{\infty}\int_0^{x/2} e^{-x}dydx=\int_0^{\infty}\frac{x}{2}e^{-x}dx=\frac{1}{2}$

分数	阅卷人

8、(13 分) 设$X_1,X_2,\ldots,X_5$是独立同分布的随机变量，其概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1;\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

试求$Y=\max\{X_1,X_2,\ldots,X_5\}$的概率密度函数、数学期望和方差。

解：因 $X_1,X_2,\cdots,X_5$ 的共同分布函数为

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}p(u)du=\begin{cases}0, & x<0,\\ x^2, & 0\le x<1,\\ 1, & x\ge 1.\end{cases}$$

当 $Y=\max\{X_1,X_2,\cdots,X_5\}$的分布函数为

$$F_Y(y)=P\{Y=\max\{X_1,X_2,\cdots,X_5\}\le y\}=P\{X_1\le y\}P\{X_2\le y\}\cdots P\{X_5\le y\}=[F(y)]^5$$

$$=\begin{cases}0, & y<0,\\ y^{10}, & 0\le y<1,\\ 1, & y\ge 1.\end{cases}$$

故 Y 的密度函数为

$$p_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases}10y^9, & 0<y<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

数学期望 $E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}yp_Y(y)dy=\int_0^1 y\cdot 10y^9dy=\frac{10}{11}y^{11}\Big|_0^1=\frac{10}{11}$；

且 $E(Y^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}y^2p_Y(y)dy=\int_0^1 y^2\cdot 10y^9dy=\frac{10}{12}y^{12}\Big|_0^1=\frac{10}{12}$，

故方差 $\mathrm{Var}(Y)=\frac{10}{12}-\left(\frac{10}{11}\right)^2=\frac{10}{1452}=\frac{5}{726}$.