离散数学

Discrete Mathematics

吴梅红

厦门大学计算机科学系

E-mail: wmh@xmu.edu.cn



7.3 图的矩阵Matrix表示

- 在顶点与边数不太多的情况下，图的图形表示法有一定的优越性，它比较直观明了。
- 当顶点与边数较多时, 就无法使用图形表示, 而矩阵表示是方便的。
- 矩阵在计算机中易于存储和处理(DS),
- 可利用线性代数矩阵运算来刻画图的一些性质。
- 图中顶点与边之间的关联关系、顶点与顶点之间的相邻或邻接关系、顶点之间的连通或可达关系等都可以用矩阵来描述。

- 通过图的矩阵表示, 可以

  清楚地观察到已讨论过的图的性质,

  并进一步发现一些其它性质,

  能准确计算出图中任二顶点之间不同长度的通(回)路数

  更重要的是在图的应用中, 图的矩阵表示起着极其重要的作用。

- 缺点 矩阵表示难以表达图的平面性等性质。
- 在图的矩阵表示中, 要求图是标定图。
- 图的最本质特征是 边与顶点的关联性质。

- 关联矩阵完整地表达图中顶点与边的关联关系。
- 关联矩阵常用于研究子图和生成树的问题。

定义 设无向图 $G = \langle V, E \rangle$,

$V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$,

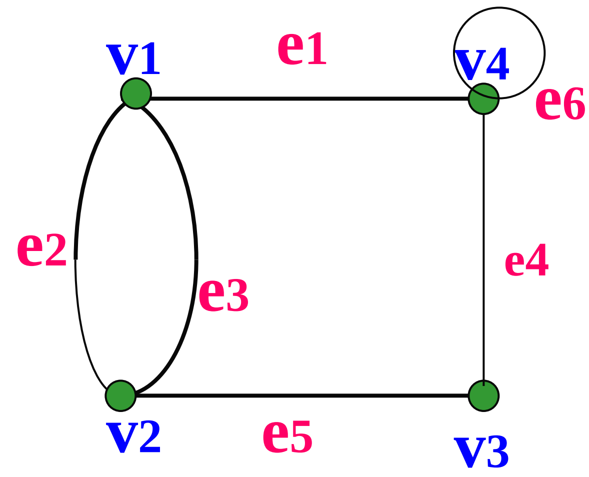
令m_{ij}为顶点v_i与边e_j的关联次数,

称$(m_{ij})_{n \times m}$为G的关联矩阵, 记作M(G)。 ■

- 图7.11所示无向图G及其关联矩阵M(G)。
- M(G)与G是相互惟一确定的,$\sum_{i=1}^{n}$

因而M(G)描述G的一切特征, M(G)具有如下性质:

$$
M(G) = \begin{array}{c} \\ v1 \\ v2 \\ v3 \\ v4 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} e1 & e2 & e3 & e4 & e5 & e6 \end{array} \\
\begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2
\end{pmatrix}
\end{array}
$$



(1) M(G)每列元素之和为2, 即 $\sum_{j=1}^{m} m_{ij} = 2 \ (j = 1, 2, \ldots, m)$,

这正说明 G中每条边有惟一的两个端点。

(2) M(G)中第 i 行元素之和为 $m_{ij} = d(v_i)$ 。

(3) $\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} m_{ij} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} m_{ij} = \sum_{j=1}^{m} 2 = 2m$。

(4) 第 i列与第 j列相同 $\Leftrightarrow$ e_i与e_j为平行边。

(5) 一行中元素全为0 $\Leftrightarrow$ 其对应的顶点为为孤立点。

$$M(G) = \begin{pmatrix} M(G_1) & & & \\ & M(G_2) & & \\ & & \cdots & \\ & & & M(G_k) \end{pmatrix}$$

(6) 若G有k (k≥2)个连通分支,

则G的关联矩阵M(G)有如上形式:

其中$M(G_r)$为G的第r个连通分支的关联[分块]矩阵,

$r = 1, 2, \ldots, k$ 。

(7) 关联矩阵的秩为 $n - 1$。 /*定理10.1

- 利用关联矩阵还可以求出所有不同的生成树,

定义 设D = <V, E>为无环有向图,

$V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$, 令

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & v_i\text{是}e_j\text{的起点} \\ 0, & v_i\text{与}e_j\text{不关联} \\ -1, & v_i\text{是}e_j\text{的终点} \end{cases}$$

则 称$(m_{ij})_{n\times m}$为D的关联矩阵, 记作M(D)。 ∎

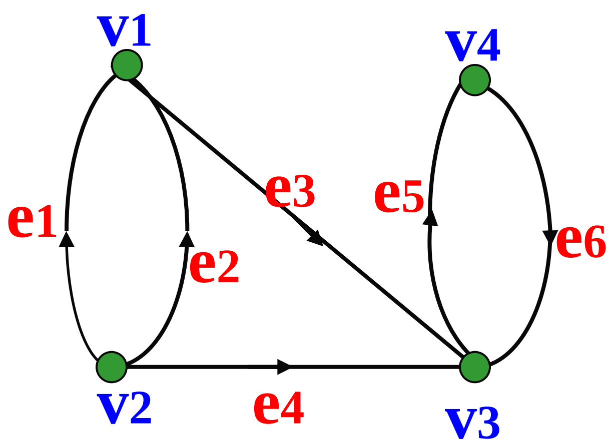


图7.12

$$M(D) = \begin{array}{c} \\ v1 \\ v2 \\ v3 \\ v4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} e1 & e2 & e3 & e4 & e5 & e6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

- 不难看出M(D)有如下性质:

(1) D每列元素之和为0, 即 $\sum_{i=1}^{n} m_{ij} = 0$, 这正说明

D中每条边关联两个顶点, 一个始点, 一个终点。

(2) 第i行元素绝对值之和等于$d(v_i)$, 即 $\sum_{i=1}^{n} |m_{ij}| = d(v_i)$

而 其中1的个数为出度$d^+(v_i)$, –1的个数入度$d^-(v_i)$。

(3) $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} m_{ij} = 0$, 因而1的个数与–1的个数相等, 都等于m,

这正说明D中各顶点入度之和等于出度之和, 都等于m,

于是各顶点度数之和等于2m,

这是有向图D的握手定理的全部内容。

(4) 若M(D)中两列相同, 说明D中这两列对应的边有相同

的始点和终点 $\Leftrightarrow$ 它们是平行边。

判定割点与割边

- 在关联矩阵中去掉结点(或边)所在的行(列),

  若所得矩阵比原关联矩阵的秩小,

  则该结点(该边)为割点(割边)。

- 下节讨论的有向图不加限制, 矩阵运算均为普通的乘法和加法。

  通路与回路含复杂通路与回路,

  回路始(终)点不同看成不同。

邻接矩阵 (Adjacent)

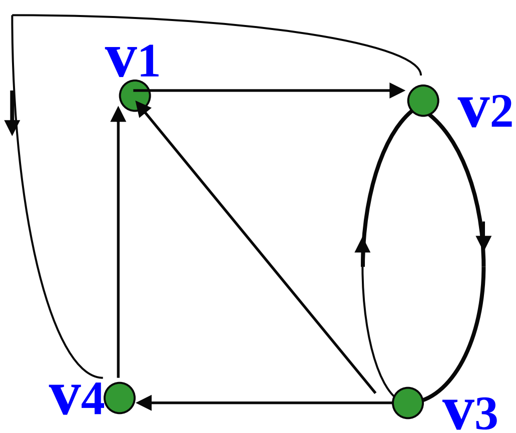
定义 n阶标定有向图D中, $V(D) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$,

令$a_{ij}^{(1)}$为v_i邻接到v_j的边的条数[多重图], 称$(a_{ij}^{(1)})$为D的

邻接矩阵, 记作A(D)。　　　/*上标长度1即邻接

- 给定的有向标定图D如图7.13所示, 它的邻接方矩阵

$$A = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$



(1) 第i 行元素之和为v_i的出度，即 $\sum_j a_{ij}^{(1)} = d^+(v_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, 而A中所有元素之和为各顶点出度之和，

即 $\sum_i \sum_j a_{ij}^{(1)} = \sum_i d^+(v_i) = m$, 其中m为D中边数。

类似地，第j列元素之和为v_j的入度，即$\sum_i a_{ij}^{(1)} = d^-(v_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, 而A中所有元素之和为各顶点入度之和，

即 $\sum_j \sum_i a_{ij}^{(1)} = \sum_j d^-(v_i) = m$。

(2) 由(1)不难看出，$\sum_i \sum_j a_{ij}^{(1)} = \sum_j \sum_i a_{ij}^{(1)}$为D中长度为1的通路数，

而 $\sum_i a_{ii}^{(1)}$为D中长度为1的回路数，即D中自环的个数。

- 计算从v_i到v_j的长度为2 的通路数, 注意到每条v_i到v_j的长度为2 的通路, 中间必须经过一个顶点v_r。
- 如果图G中有通路$v_i\ v_r\ v_j$存在, 那么$a_{ir} = a_{rj} = 1$。
- 反之, 图G中不存在通路$v_i\ v_r\ v_j$, 那么$a_{ir} = 0$ 或 $a_{rj} = 0$, 即$a_{ir}\ a_{rj} = 0$。
- 于是从v_i到v_j的长度为2 的通路数等于

$$a_{i1}\, a_{1j} + a_{i2}\, a_{2j} + \ldots + a_{in}\, a_{nj} = \sum_{r=1}^{n} a_{ir} a_{rj}$$

这恰好等于A^2中第i行、第j列的元素$a_{ij}^{(2)}$ 。

- A^2中元素$a_{ii}^{(2)}$表示通过v_i的长度为2 的回路数, i = j。
- 一般地, 有下面定理

- 对角线上元素为**1** 对应于 自环。
- 邻接矩阵有如下诸条性质：

定理 7.6 设A是n阶有向图的邻接矩阵, A的l ($l \geq 2$)次幂

$A^l = A^{l-1} \cdot A$中元素$a_{ij}^{(l)}$为v_i到v_j的长度为 l 的通路数,

而 $\sum_i \sum_j a_{ij}^{(l)}$为D中长度为 l 的通路总数,

而 $\sum_i a_{ii}^{(l)}$为D中长度为 l 的回路总数。

** 证 对l 进行强归纳。

(1) 当$l = 1$时, 由前面讨论的性质(2)所证。

(2) 设$l \leq k$时结论为真。当$l = k + 1$时, A^{l+1}中元素

$$a_{ij}^{(k+1)} = \sum_{r=1}^{n} a_{ir}^{(k)} \cdot a_{rj}^{(1)}$$

由归纳假设知, $a_{ir}^{(k)}$为v_i到v_r的长度为k的通路数,

而$a_{rj}^{(1)}$是v_r到v_j的长度为1 (邻接) 的通路数,

故$a_{ir} \cdot a_{rj}$为v_i到v_j经过v_r的长度为k+1的通路数, 而

$$a_{ij}^{(k+1)} = \sum_{r=1}^{n} a_{ir}^{(k)} \cdot a_{rj}^{(1)}$$ 为v_i到v_j的长度为k+1的通路总数。▌

- 再令 $B_r = A^1 + A^2 + \ldots + A^r = [\, b_{ij}^{(r)}]_{n \times n}$, $r = 1, 2, \ldots$,

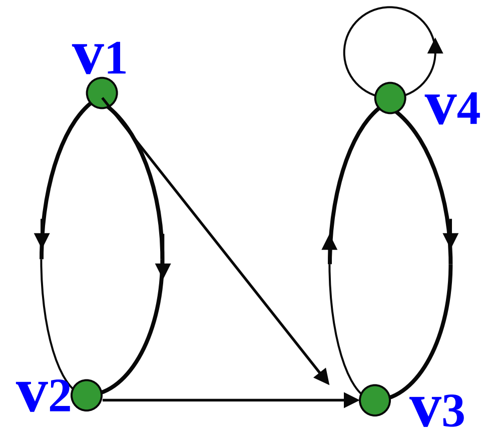
可以得到定理7.6的推论。

推论 设A是n阶有向标定图的邻接矩阵, B_r中元素$b_{ij}^{(r)}$为v_i到v_j长度小于等于r的通路数 (回路数i = j),

$\sum_i \sum_j b_{ij}^{(r)}$ 为D中长度小于等于r的通路总数,

而 $\sum_i b_{ii}^{(r)}$ 为D中长度小于等于r的回路总数。

例 在右图所示的有向图中, 求:



(1) v_2到v_4长度为3和4的通路数;

(2) v_2到v_4长度小于等于4的通路数;

(3) v_4到v_4(自身)长度为4的回路数;

(4) v_4到v_4长度小于等于4的回路数;

(5) D中长度为4的通路(不含回路)数;

(6) D中长度小于等于4的通路数, 其中有几条是回路?

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} v1 & v2 & v3 & v4 \end{array} \\ A = \begin{array}{c} v1 \\ v2 \\ v3 \\ v4 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

解 要回答以上诸问题, 必先求出D的邻接矩阵A,

及它的前4次幂, 以及B_2, B_3, B_4。

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{1} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & \underline{1} \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad A^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & \underline{2} \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & \underline{5} \end{pmatrix}$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 6 \end{pmatrix} \quad B_4 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 7 & \underline{11} \end{pmatrix}$$

(1) v_2到v_4长度为3和4的通路数分别为1条和2条;

(2) v_2到v_4长度小于等于4的通路数$4 = 0 + 1 + 1 + 2$条;

(3) v_4到v_4(自身)长度为4的回路数5条;

(4) v_4到v_4长度小于等于4的回路数$11 = 1 + 2 + 3 + 5$条;

(5) D中长度为4的通路(不含回路)数$16 = 3 + 4 + 1 + 2 + 3 + 3$条;

(6) D中长度小于等于4的通路数$53 = \sum b_{ij}^{(4)}$条, 其中15条是回路。

- 有时仅关心图中顶点之间是否连通，

而不关心顶点之间存在多少条通路和它们的长度。

定义 设n阶有向图D中, $V(D) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$,

$$p_{ij} = \begin{cases} 1 & v_i \text{可达} v_j \\ 0 & \text{否则} \end{cases}$$ /*布尔加、乘法

则称$[p_{ij}]_{n\times n}$为D的可达矩阵, 记作P(D), 简记为P。

- 可达矩阵有下列性质: /*判定图的连通性

(1) $\forall v_i \in V(D)$, v_i可达v_i, 所以P的主对角元素p_{ii}全为1。

(2) 若D是强连通的, 则P的全体元素均为1。

(3) 设D是具有k(≥2)个连通分支$D_1, D_2, \ldots, D_k$的有向图,

$D_i = D[\{v_{i1}, v_{i2}, \ldots, v_{in_i}\}]$, $i = 1, 2, \ldots, k$, 则

$$P(D) = \begin{pmatrix} P(D_1) & & & \\ & P(D_2) & & \\ & & \cdots & \\ & & & P(D_k) \end{pmatrix}$$

其中$P(D_i)$为D_i 的可达矩阵, $i = 1, 2, \ldots, k$。 /*分块矩阵

**由D的邻接矩阵可求D的可达矩阵, /*下标$n-1$

$$P(D) = I + B_{n-1}$$ /*布尔矩阵加法

- $\forall v_i, v_j \in V(D)$且$v_i \neq v_j$, 由定理7.6不难得出如下结论:

$$p_{ij} = 1 \text{ 当且仅当 } b_{ij}^{(n-1)} \neq 0$$

- 在前面有向图中, $n = 4$, $n - 1 = 3$, 由B_3可知

$$P(D) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

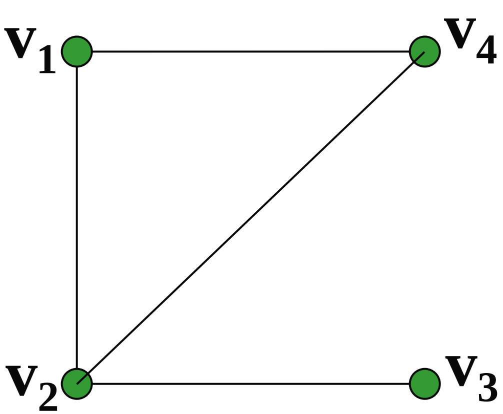
Skip！定义 设n阶无向简单图G中, $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$,

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & v_i \text{与} v_j \text{相邻}, \quad i \neq j \\ 0, & \text{否则} \end{cases}$$

称$[a_{ij}]_{n\times n}$称为G的相邻矩阵, 记作A(G), 简记为A。

- 图的相邻矩阵完整地刻划了图中各顶点间的邻接关系。把无向简单图G存入计算机, 本质上就是存入它的相邻矩阵。

$$A = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$



- 相邻矩阵是基于标定顶点所选择的次序, n阶图共有n!个不同相邻矩阵。
- 无向图G的相邻矩阵A具有如下性质:

(0) 无自环, $a_{ii} = 0, i = 1, 2, \ldots, n$;

(1) A是对称的;

(2) $\sum_{i} a_{ii}^{(l)} = d(v_i)$, 第i行元素之和恰好为$v_i$的度;

(3) $\sum_{i}\sum_{j} a_{ij}^{(1)} = \sum_{i} d(v_i) = 2m$, 所有元素之和恰好为2m;

m为图G的边数, 也为G中长度为1的通路数。

- 设$A^k = A^{k-1} \cdot A = [\,a_{ij}^{(k)}\,]_{n\times n}$, $k = 2, 3, \ldots$, 有下面定理。

定理 设G是n阶无向图, $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$,

A是G的相邻矩阵, A^k 中元素$a_{ij}^{(k)} = a_{ji}^{(k)}$ $(i \neq j)$ 为G中

v_i到v_j (v_j到v_i)长度为k的 (复杂) 通路数。

而$a_{ii}^{(k)}$为v_i到v_i长度为k的 (复杂) 回路数。

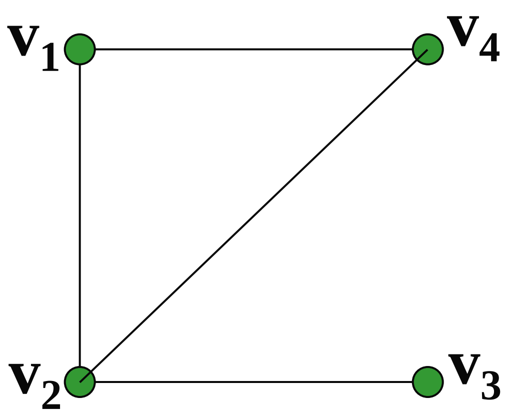
证 仿定理7.6, 用归纳法证明。

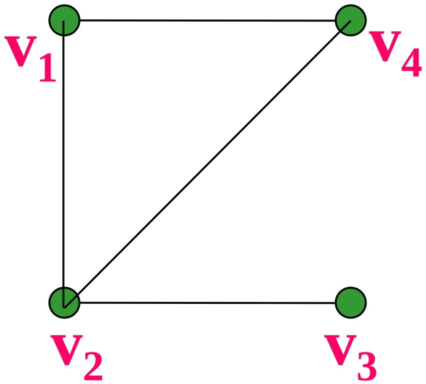
推论1 在A^2中, $a_{ii}^{(2)} = d(v_i)$ 。 /*长度为2的回路

推论2 若G是连通图, 对于$i \neq j$, v_i, v_j之间的距离$d(v_i, v_j)$是使A^k中元素 $a_{ij}^{(k)} \neq 0$ 的最小正整数k。

例 右图中, 求 v_1 到 v_2, v_1 到 v_3 长度为4的(复杂)通路数, v_1 到 v_1 长度为4的 (复杂) 回路数。

$$A = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$





$$A^2=\begin{bmatrix}2&1&1&1\\1&3&0&1\\1&0&1&1\\1&1&1&2\end{bmatrix}\quad A^3=\begin{bmatrix}2&4&1&3\\4&2&3&4\\1&3&0&1\\3&4&1&2\end{bmatrix}\quad A^4=\begin{bmatrix}7&6&4&6\\6&11&2&6\\4&2&3&4\\6&6&4&7\end{bmatrix}$$

解 从A^4可看出v_1到v_2长度为4的通路(含复杂)数有**6**条:

$v_1v_4v_1v_4v_2$；　$v_1v_4v_2v_4v_2$；　$v_1v_4v_2v_3v_2$；

$v_1v_2v_4v_1v_2$；　$v_1v_4v_2v_1v_2$；　$v_1v_2v_1v_4v_2$；

- v_1到v_3长度为4的通路(含复杂)数有**4**条。

$v_1v_2v_4v_2v_3$；　$v_1v_2v_3v_2v_3$；　$v_1v_4v_1v_2v_3$；　$v_1v_2v_1v_2v_3$

- v_1到v_1长度为4的回路(含复杂)数有**7**条。

$v_1v_4v_1v_4v_1$；　$v_1v_4v_2v_4v_1$；　$v_1v_4v_1v_2v_1$；

$v_1v_2v_1v_2v_1$；　$v_1v_2v_4v_2v_1$；　$v_1v_2v_3v_2v_1$；　$v_1v_2v_1v_4v_1$

**定义 设n阶无向简单图G中, $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, 令 /*def 10.5可达

$$p_{ij} = \begin{cases} 1, & v_i \text{与} v_j \text{连通}, \\ 0, & \text{否则} \end{cases}$$

称$[p_{ij}]_{n\times n}$称为G的连通矩阵, 记作P(G), 简记为P.

- P有如下性质: (0) P是对称的;

(1) P的主对角线元素均为1;

(2) 若G是连通图, 则P中元素全为1;

(3)设无向图G有 k (≥2)个连通分支$G_1, G_2, \ldots, G_k$,

且$G_i = G[\{v_{i1}, v_{i2}, \ldots, v_{in_i}\}]$, $i = 1, 2, \ldots, k$, 则

$$P(G) = \begin{pmatrix} P(G_1) & & & \\ & P(G_2) & & \\ & & \cdots & \\ & & & P(G_k) \end{pmatrix}$$

其中$P(G_i)$为G_i的连通矩阵, $i = 1, 2, \ldots, k$。 $\blacksquare$

- 由定理7.6, 也可以用G的相邻矩阵求连通矩阵, 布尔加

$$A^1 + A^2 + \ldots + A^r = B_r = [b^r_{ij}]_{n\times n}, \qquad r = 1, 2, \ldots$$

$i \neq j$ 时, $p_{ij} = 1$ 当且仅当 $b_{ij}^{(n-1)} \neq 0$, /*上标n–1

因而由B_{n-1}中元素是否为0就可以求出p_{ij} $(i \neq j)$。