第一次作业答案

1. 在以下几种条件下，字母 A、B、C、D、E、F 一共有多少种排列方式

（a）A 和 B 必须在一起；（b）A 在 B 之前；（c）A 在 B 之前，B 在 C 之前；（d）A 在 B 之前，C 在 D 之前；

（e）A 和 B 必须在一起，C 和 D 也必须在一起；（f）E 不在最后.

解：（a）$2\times5!$

(b) 6 个字母一共 $6!$ 个排列，其中一半 A 在 B 之前，所以有 $\frac{6!}{2}$

（c）A、B、C 共有 6 中排列，仅有一种是 A 在 B 之前，B 在 C 之前，所以有 $\frac{6!}{6}$

(d) A 在 B 之前共 $\frac{6!}{2}$ 种，其中一半 C 在 D 之前，所以一共 $\frac{6!}{4}$

(e) $4!\times2\times2$

(d) E 在最后的排列数 $5!$ ，所以不在最后：$6!-5!$

2. 4 个美国人、3 个法国人和 3 个英国人坐在一排，要求相同国籍的人必须坐在一起，一共有多少种坐法？

解： $3!\times4!\times3!\times3!$

3. 从有 10 人的俱乐部中分别选 1 名总裁、1 名财务和 1 名秘书，一共有多少种选法，（a）没有任何限制；（b）A 和 B 不能同时被选；（c）C 和 D 要么同时被选，要么同时不被选；（d）E 必须被选；（e）F 被选中的话，必须担任总裁

解：

(a) $10\times9\times8$

(b) 如果 A, B 不入选有 $8\times7\times6$, A 或者 B 入选, 则 $2\times3\times8\times7$, 所以共: $2\times3\times8\times7$
$+8\times7\times6$

(c) 不入选 $8\times7\times6$， 入选 $8\times2\times3$

(d) $3\times9\times8$

(e) F 不入选： $9\times8\times7$， 入选： 9×8

4. 某人将 7 件礼物分给他的 3 个孩子, 其中老大得 3 件, 其余两人分别得 2 件, 一共有多少种分法?

解： $\dfrac{7!}{3!3!2!}$

5. 7 位汽车牌照中有 3 位是字母，4 位是数字，如果允许字母或者数字重复且位置没有任何限制，一共有多少种牌照?

解：一共有 $\binom{7}{3}$ 个位置，字母和数字分别有： 26^3 和 10^4 ，所以有 $\binom{7}{3}26^3 10^4$

6. 考虑一共 n 位数，每位数字都是 0,1，......，9 中的一个，一共有多少个这样的数？如果（a）没有连续的相同的两个数字；（b）
0 出现 i 次，i=0,1，.......,n

解：(a) 第一位有 10 种选法，其后依次有 9 中选法，故： $10\times9^{n-1}$

(b) $\binom{n}{i}9^{n-i}$

7. 从 7 个男人、8 个女人中选取 6 人组成委员会，如果要求至少 3 个女人、2 个男人，一共有多少种选取方法?

解： 3 男 3 女: $\binom{7}{3}\binom{8}{3}$ ，2 男 4 女: $\binom{7}{2}\binom{8}{4}$

8. 从集合 S={1,2,...,20}中选 4 个元素组成子集，并且 1,2,3,4,5 中至少有一个被选中，一共有多少种子集?

解：4 个元素组成的集合: $\binom{20}{4}$ ，不包括前 5 个数的集合有: $\binom{15}{4}$，因此至少有一个被选中的有: $\binom{20}{4}$-$\binom{15}{4}$

补充：

1. 证明: $\binom{n+m}{r}=\binom{n}{0}\binom{m}{r}+\binom{n}{1}\binom{m}{r-1}+\cdots+\binom{n}{r}\binom{m}{0}$

   故事证明法：从 n 个男人和 m 个女人中选取 r 个人的取法数。

2. 证明: $\binom{2n}{n}=\sum_{k=0}^{N}\binom{n}{k}^2$

   故事证明法：从 n 个男人和 n 个女人中选取 n 个人的取法数，即左边

   $\binom{2n}{n}=\sum_{k=0}^{N}\binom{n}{k}\binom{n}{n-k}$，又由于$\binom{n}{n-k}=\binom{n}{k}$，所以得证

3. 证明：费马组合恒等式 $\binom{n}{k}=\sum_{i=k}^{N}\binom{i-1}{k-1}$

证：考虑从 1 到 n 的集合中，以 i 为最大值，包含 k 个元素的子集的个数。

4. $\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}=n.2^{n-1}$

故事证明，假定要从 n 个人中选取若干人组成委员会，并选定一名主席的取法数。两种方法，一是先选 k 个人，然后选取一名主席，等式左边。二是先选一名主席，共 n 个人，每个人都可能，有 n 种，然后选剩下的委员，剩下的 n-1 个人要么在委员会中要么不在，每个人有 2 中情况，所以共 2^{n-1} 情况。

$\sum_{k=1}^{n}k^2\binom{n}{k}=n(n+1).2^{n-2}$

故事证明，假定要从 n 个人中选取若干人组成委员会，并选定一名主席和一名秘书的取法数。两种方法，一是先选 k 个人，然后选取一名主席和秘书，各有 k 种选法（可为同一人），为等式左边。二是先选一名主席，共 n 个人，每个人都可能，有 n 种，如果主席和秘书为同一人，有 $n2^{n-1}$ 种选法，如果不为同一人，有 $n(n-1)2^{n-2}$ 种选法，

所以一共有 $n2^{n-1}+n(n-1)2^{n-2}=(2n+n(n-1))2^{n-2}=n(n+1)2^{n-2}$

5. $\sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j}\binom{j}{i}=\binom{n}{i}2^{n-i}, i\le n$

假定从 n 个人中选 j 人组成委员会，再从 j 人中选 i 人组成分委员会的取法。两种：1.先选 j 人组成委员会，再从中选 j 人组成分会，左边取法。2.先选 i 人组成分会，再补充 j-i 人到委员会，相当于剩下的 n-i 人，每个人要么入选，要么不入选，每人有 2 中取法，即等式右边。

6. 证明: $\binom{n}{n_1,n_2,\cdots n_r}=\binom{n-1}{n_1-1,n_2,\cdots n_r}+\binom{n-1}{n_1,n_2-1,\cdots n_r}+\cdots+\binom{n-1}{n_1,n_2,\cdots n_r-1}$

证明类似于$\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}$

7. 证明: $\binom{n}{2}=\binom{k}{2}+\binom{n-k}{2}+k(n-k), \qquad 1\le k\le n$

假定从 n 个元素里面取 2 个的取法。1.直接从 n 中去 2 个, 取法为等式左边。2.将 n 个元素分成两部分, 第一部分有 k 个, 第二部分 n-k 个, 从第一部分取 2 个, 从第二部分取 2 个, 第一和第二部分各取 1 个, 即为等式右边。