例1 氢原子中，电子与质子距离约5.3×10^{-11} m。求它们之间的万有引力和静电力。

（已知： $m_p = 1.67\times10^{-27}$ kg , $G = 6.67\times10^{-11}$ N·m^2·kg^{-2}, $m_e = 9.11\times10^{-31}$ kg）

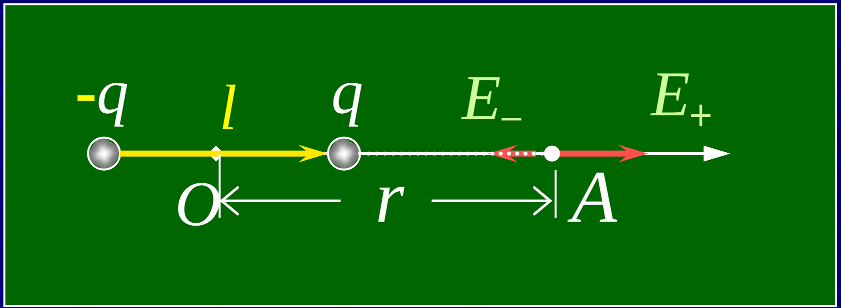
解：

$$F_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r^2} = 8.23\times10^{-8}\ \mathrm{N}$$

$$F_G = G\frac{m_e m_p}{r^2} = 3.64\times10^{-47}\ \mathrm{N}$$

$$\boxed{F_e / F_G = 2.27\times10^{39}}$$

例2 计算在电偶极子延长线上任一点A的场强。



解：

$$E_+ = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 (r - l/2)^2}$$

$$E_- = \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 (r + l/2)^2}$$

$$E_A = E_+ + E_- = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2rl}{r^4}\frac{1}{\left(1 - l^2/4r^2\right)^2}$$

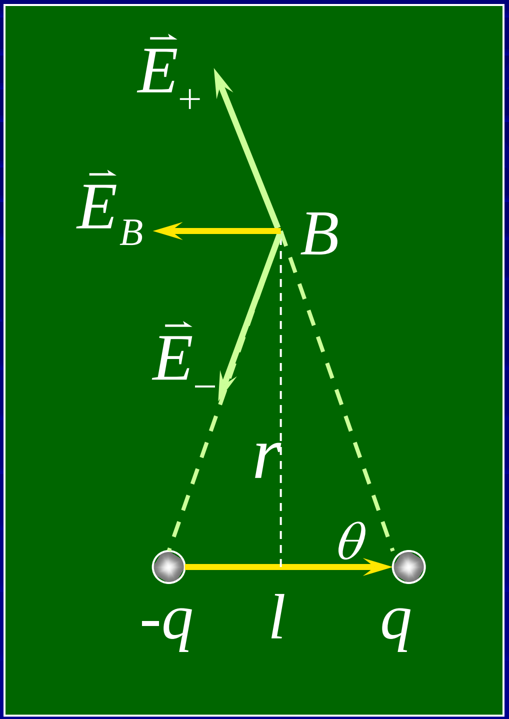
$\because \quad r >> l$

$\therefore \quad l^2/4r^2 \approx 0$

$$E_A \approx \frac{2ql}{4\pi\varepsilon_0 r^3} = \frac{2p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

例3 计算电偶极子中垂线上任一点B的场强。

解： $$E_B = E_+ \cos\theta + E_- \cos\theta$$



$$E_+ = E_- = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0(r^2 + l^2/4)}$$

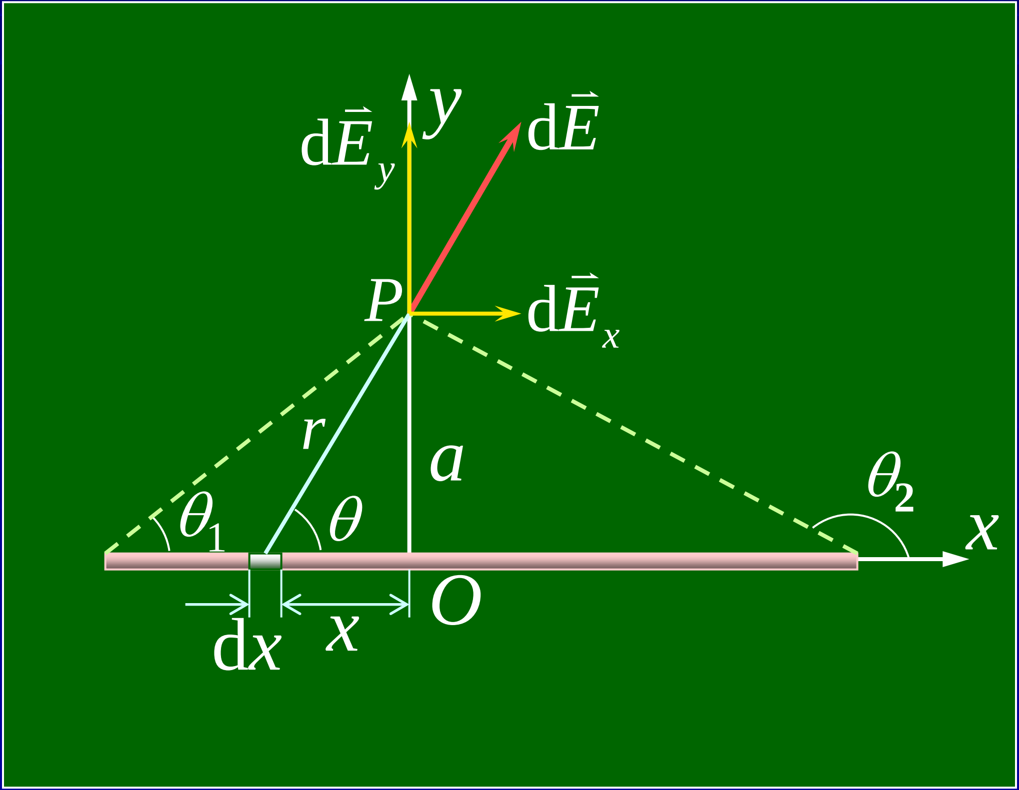
$$\cos\theta = \frac{l/2}{\sqrt{r^2 + l^2/4}}$$

$$E_B = 2E_+ \cos\theta = \frac{ql}{4\pi\varepsilon_0\left(r^2 + l^2/4\right)^{3/2}}$$

因为$r >> l$　　所以 $E_B \approx \frac{ql}{4\pi\varepsilon_0 r^3} = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$

例4 真空中有均匀带电直线，长为L，总电荷量为Q。线外有一点P，离开直线的垂直距离为a，P点和直线两端连线的夹角分别为θ_1和θ_2。求P点的场强。（设电荷线密度为λ）

解： 电荷元：$\mathbf{d}q=\lambda\mathbf{d}x$



$$\mathbf{d}E=\frac{\lambda\,\mathbf{d}x}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$\mathbf{d}E_x=\mathbf{d}E\cos\theta$$

$$=\frac{\lambda\cos\theta dx}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$\mathrm{d}E_y = \mathrm{d}E\sin\theta = \frac{\lambda\sin\theta\,\mathbf{d}x}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$\mathbf{d}E_x = \frac{\lambda\cos\theta dx}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \qquad \mathbf{d}E_y = \frac{\lambda\sin\theta dx}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$r = \frac{a}{\sin\theta} \qquad x = -a/\tan\theta$$

$$\rightarrow \mathbf{d}x = \frac{a}{\sin^2\theta}\mathbf{d}\theta$$

$$\therefore \mathbf{d}E_x = \frac{\lambda\cos\theta dx}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\lambda\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 a}d\theta$$

$$E_x = \int \frac{\lambda \cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 a} \mathrm{d}\theta = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}(\sin\theta_2 - \sin\theta_1)$$

$$E_y = \int \mathbf{d}E_y = \cdots = \frac{\lambda}{4\boldsymbol{\pi}\varepsilon_0 a}(\cos\theta_1 - \cos\theta_2)$$

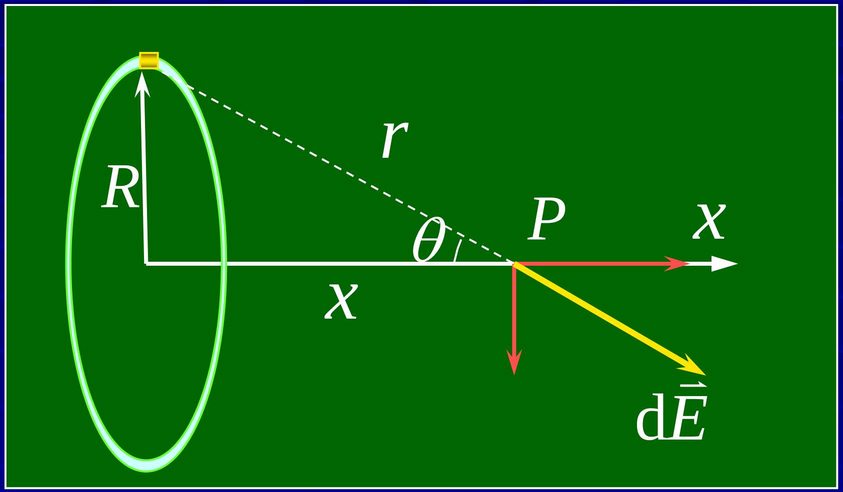
无限长带电直线： $\boldsymbol{\theta_1} = 0$ ， $\boldsymbol{\theta_2} = \pi$

$$E_x = 0 \qquad E = E_y = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 a}$$

例5 电荷q均匀地分布在半径为R的圆环。计算圆环的轴线上任一给定点P的场强。

解:

$$\mathrm{d}q = \frac{q}{2\pi R}\mathrm{d}l$$



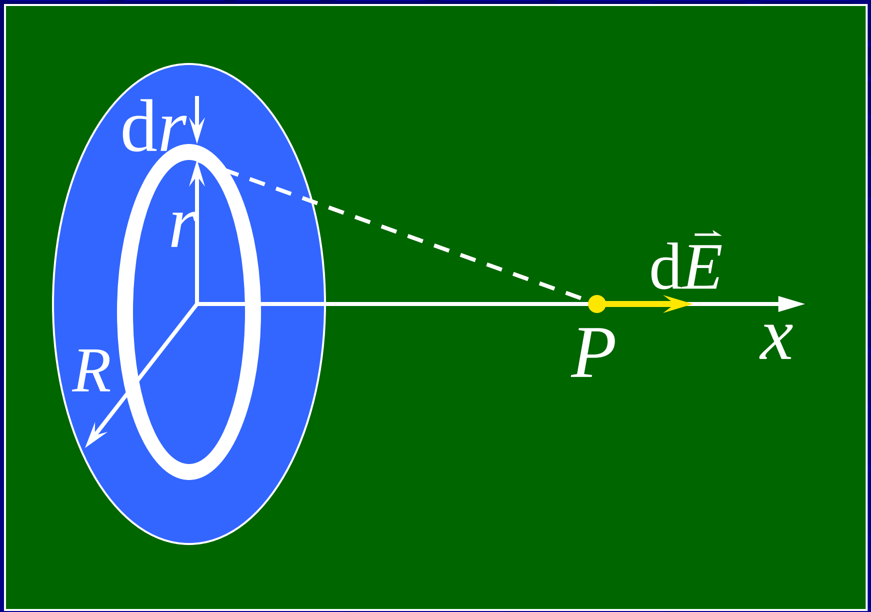
$$\mathrm{d}E = \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{q\mathrm{d}l}{8\pi^2 R\varepsilon_0 r^2}$$

$$E = E_x = \int_L \mathbf{d}E_x = \int_L \cos\theta \mathrm{d}E \qquad \cos\theta = \frac{x}{r}$$

$$E = \int_0^{2\pi R} \frac{qx\mathrm{d}l}{8\pi^2\varepsilon_0 R r^3} = \frac{qx}{4\pi\varepsilon_0\left(x^2 + R^2\right)^{3/2}}$$

例6 均匀带电圆板，半径为R，电荷面密度为σ。求轴线上任一点 P 的电场强度。

解： 利用带电圆环场强公式



$$E=\frac{qx}{4\pi\varepsilon_0\left(x^2+R^2\right)^{3/2}}$$

$$\mathrm{d}q=\sigma 2\pi r\mathrm{d}r$$

$$\mathrm{d}E=\frac{x\sigma 2\pi r\mathrm{d}r}{4\pi\varepsilon_0\left(x^2+r^2\right)^{3/2}}$$

$$E=\int \mathrm{d}E=\int_0^R \frac{x\sigma\, 2\pi r\,\mathrm{d}r}{4\pi\varepsilon_0\left(x^2+r^2\right)^{3/2}}$$

$$=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[1-\frac{x}{(x^2+R^2)^{1/2}}\right]$$

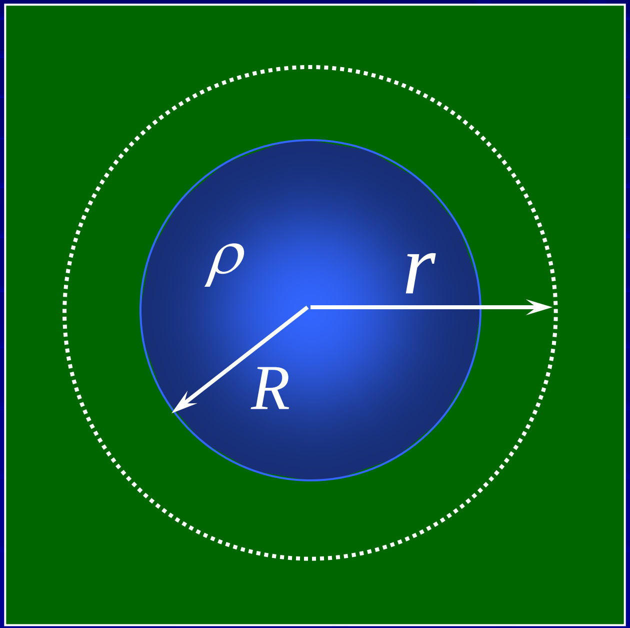
无限大带电平板的电场强度：

$R\to\infty$ 时 $\boxed{E=\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}}$

当考察点很接近带电平面时（$x<<R$），可以把带电平面近似看做无限大。$R\to\infty$

例7　求均匀带电介质球的场强分布。（已知球半径为R，带电荷q，电荷密度为ρ）

解：（1）球外某点的场强



$$\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_o} \qquad q = \rho\frac{4}{3}\pi R^3$$

$$E\oint_S \mathbf{d}S = E4\boldsymbol{\pi} r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2} \quad (r \geq R)$$

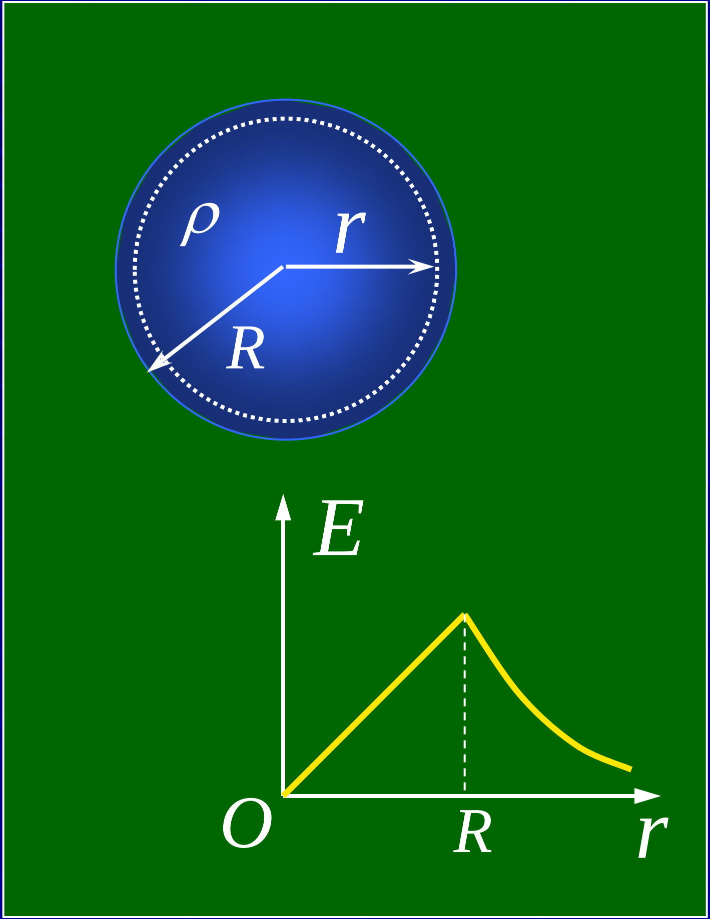
（2）球内某点的场强

$$\oint_S \vec{E}\cdot \mathbf{d}\vec{S} = \frac{\sum q_i}{\varepsilon_o}$$

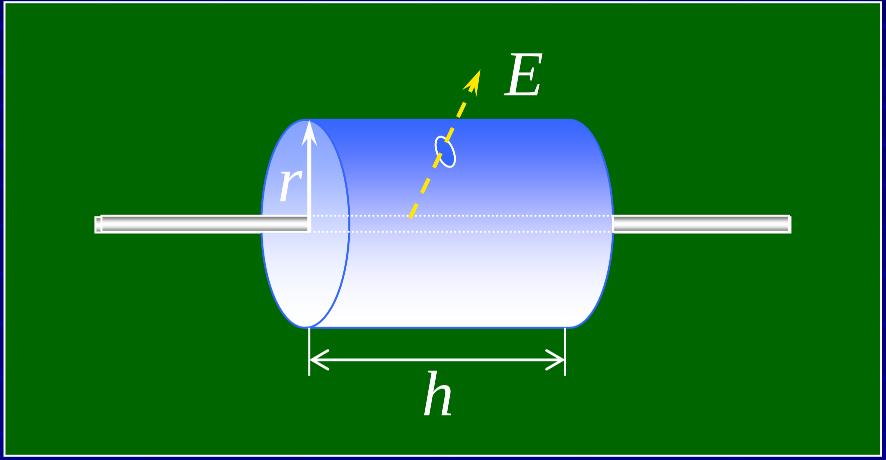
$$E\oint_S \mathbf{d}S \qquad \frac{\rho}{\varepsilon_o}\frac{4}{3}\boldsymbol{\pi} r^3$$

$$E\,4\boldsymbol{\pi} r^2$$

$$E = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0} \qquad （r < R）$$



例8　求无限长带电直线的场强分布。（已知线电荷密度为λ）



解：$$\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{\sum q_i}{\varepsilon_0}$$

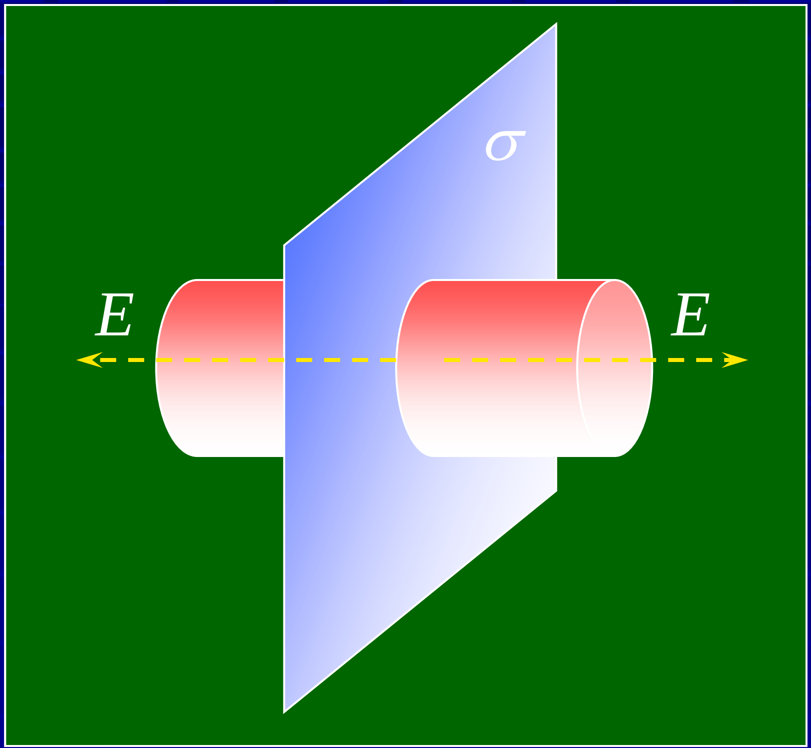
$$\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \Phi_{e1} + \int_{S_2} E\mathrm{d}S + \Phi_{e3}$$

$$\Phi_{e1} = \Phi_{e3} = 0 \qquad \int_{S_2} E\mathrm{d}S = E\,2\pi rh$$

$$E\,2\pi rh = \frac{\lambda h}{\varepsilon_0} \qquad \therefore E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

例9 计算无限大均匀带电平面的场强分布。

（电荷密度为σ）



解： $$\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0}$$

$$\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = 2\Phi_{\mathrm{e底}} + \Phi_{\mathrm{e侧}}$$

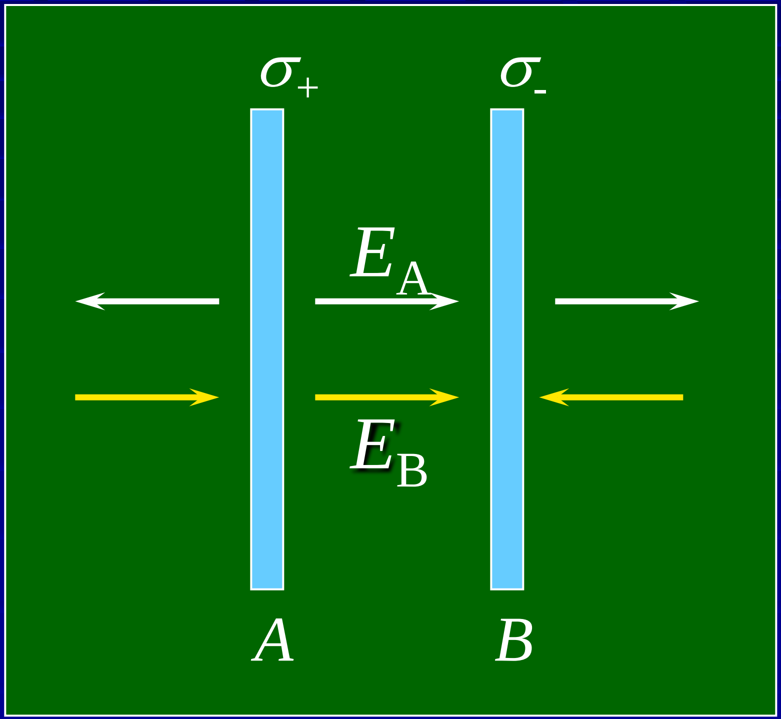
$$\Phi_{\mathrm{e侧}} = 0 \qquad \Phi_{\mathrm{e底}} = 2ES$$

$$2ES = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0} \qquad \therefore E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

例10　计算两无限大均匀带异号电荷平面的场强分布。

解：　电场可叠加：

$$E_{\mathbf{A}} = E_{\mathbf{B}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$



平面之间：

$$E_{内} = E_{\mathbf{A}} + E_{\mathbf{B}} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

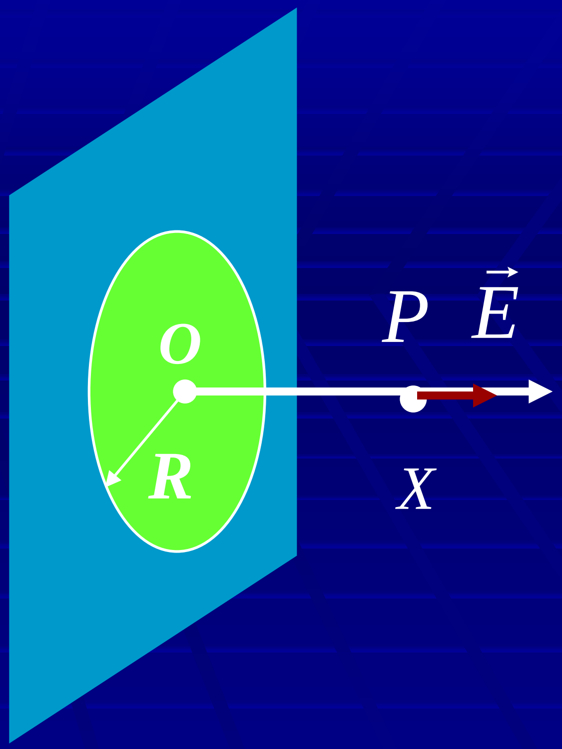
两平面外侧：

$$E_{外} = E_{\mathbf{A}} - E_{\mathbf{B}} = 0$$

例11　无限大平面挖一圆孔

已知: σ　R

求:轴线上一点P的场强



实际 → $+\sigma$ 全平面 → $E_1 = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$

实际 → $-\sigma$ 圆 → $E_2 = \dfrac{-\sigma}{2\varepsilon_0}\left[1 - \dfrac{x}{(x^2+R^2)^{1/2}}\right]$

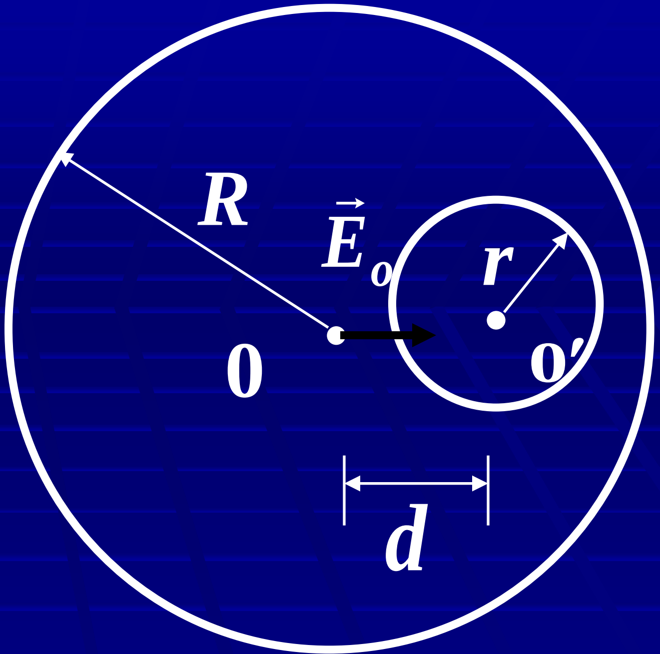
$$E = E_1 + E_2 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{x}{(x^2+R^2)^{1/2}}$$

例12　球体内挖一空腔

已知: $\rho \quad R \quad r \quad d$

求: $\vec{E}_o \quad \vec{E}_{o'}$

并证明空腔内为均匀电场



解:

实际 → $\boxed{+\rho}$ $\boxed{\text{球R}}$ $\xrightarrow{\text{0 处}}$ $E_1 = 0$

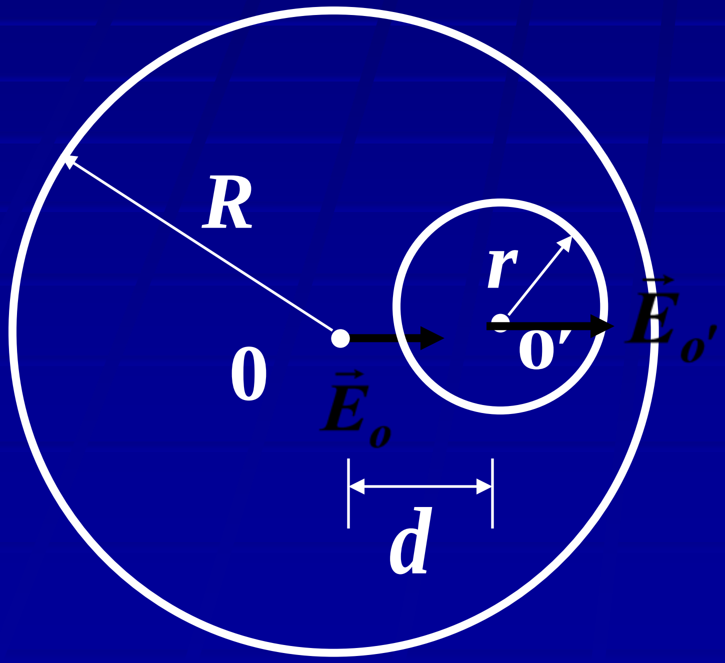
实际 → $\boxed{-\rho}$ $\boxed{\text{球r}}$ $\xrightarrow{\text{0 处}}$ $E_2 = \dfrac{-\rho \dfrac{4}{3}\pi r^3}{4\pi\varepsilon_0 d^2} = -\dfrac{\rho r^3}{3\varepsilon_0 d^2}$

O 处: $E_0 = E_1 + E_2 = E_2$

O' 处:

实际 ← $+\rho$ 球R $\xrightarrow{0' \text{处}}$ $E_1' = \dfrac{\rho \frac{4}{3}\pi d^3}{4\pi\varepsilon_0 d^2} = \dfrac{\rho d}{3\varepsilon_0}$

实际 ← $-\rho$ 球r $\xrightarrow{0' \text{处}}$ $E_2' = 0$



O' 处:

$$E_{0'} = E_1' + E_2' = E_1'$$

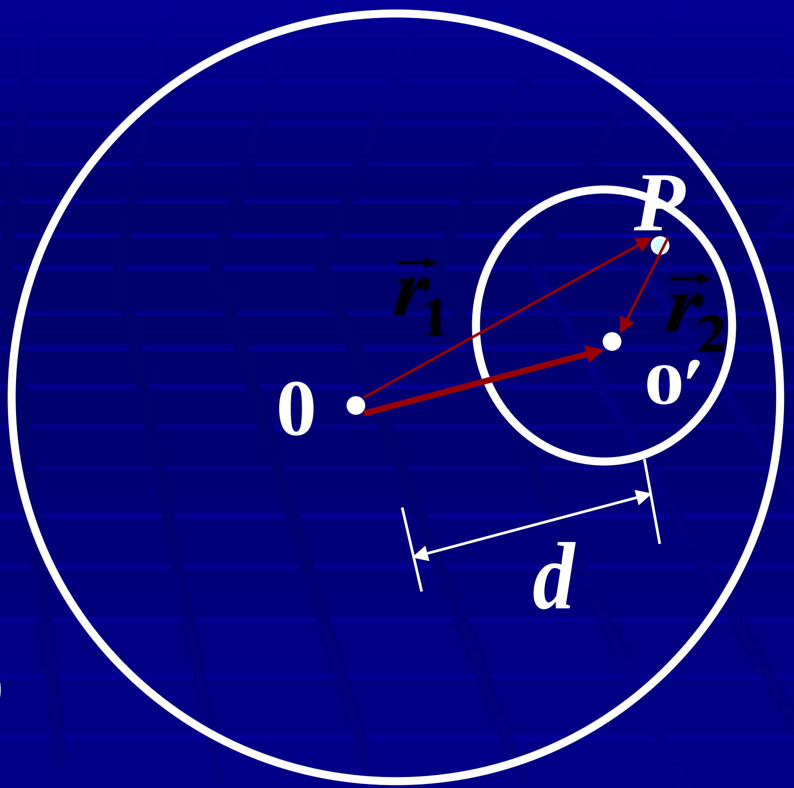
证明空腔内为均匀电场:

$$\vec{E} = \vec{E}_R + \vec{E}_r$$

$$= \frac{\rho \frac{4}{3}\pi r_1^{\,3}}{4\pi\varepsilon_0 r_1^{\,2}}\vec{r}_{10} + \frac{-\rho \frac{4}{3}\pi r_2^{\,3}}{4\pi\varepsilon_0 r_2^{\,2}}\vec{r}_{20}$$

$$= \frac{\rho r_1}{3\varepsilon_0}\vec{r}_{10} + \frac{-\rho r_2}{3\varepsilon_0}\vec{r}_{20}$$

$$= \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{r}_{00'}$$

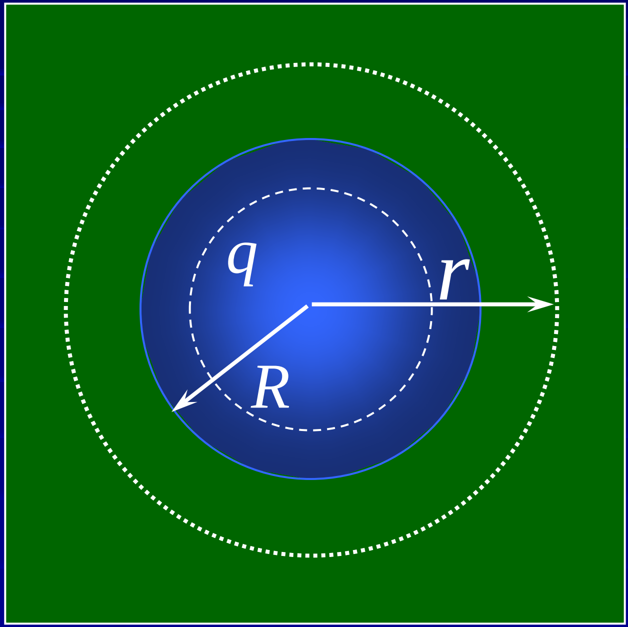


空腔内 场强大小、方向处处相同, 为均匀电场

例13 半径为R的均匀带电球体，带电荷量为q。求电势分布。

解：

$$\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum q_i$$



$$E_1 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{q}{4\pi R^3/3}\frac{4\pi r^3}{3}$$

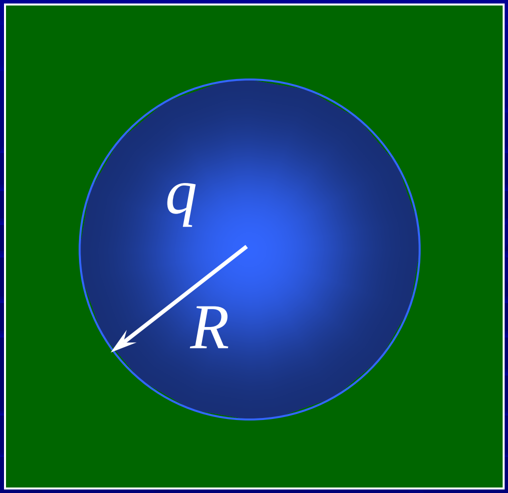
球内：

$$E_1 = \frac{qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3}$$

球外：

$$E_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$U_1(r) = \int_r^R E_1 \mathbf{d} r + \int_R^\infty E_2 \mathbf{d} r$$

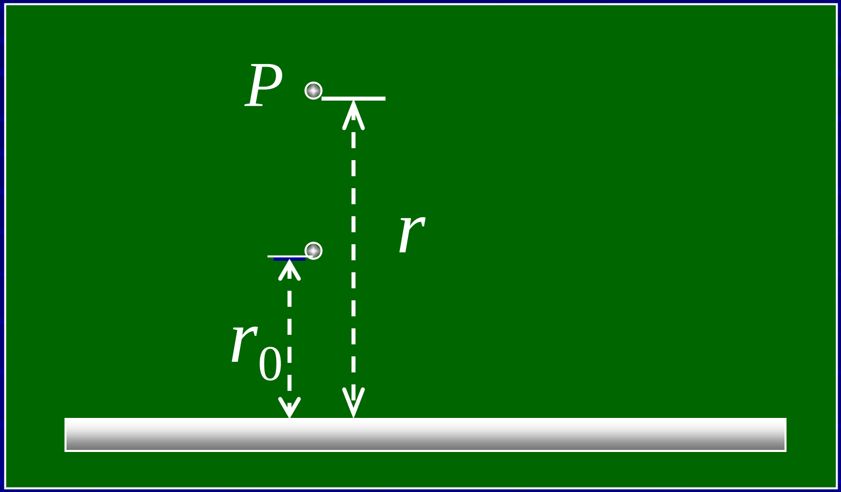


$$= \int_r^R \frac{qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3} \mathrm{d}r + \int_R^\infty \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \mathrm{d}r$$

$$= \frac{q}{8\pi\varepsilon_0 R^3}(R^2 - r^2) + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{q(3R^2 - r^2)}{8\pi\varepsilon_0 R}$$

$$U_2(r) = \int_r^\infty E_2 \mathbf{d} r = \int_r^\infty \frac{q}{4\boldsymbol{\pi}\varepsilon_0 r^2} \mathbf{d} r = \frac{q}{4\boldsymbol{\pi}\varepsilon_0 r}$$

例14　求无限长均匀带电直线外任一点P的电势。(电荷线密度为λ)



解：

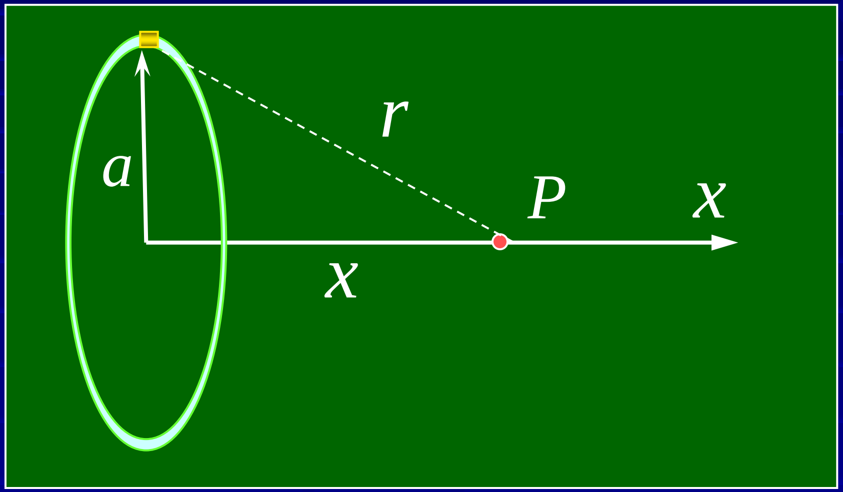
$$E=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

$$U=\int_r^{r_0}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\int_r^{r_0}\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\mathrm{d}r$$

$$=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln r\Big|_r^{r_0}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}(\ln r_0-\ln r)$$

$$=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_0}{r}$$

例15 均匀带电圆环，带电荷量为q，半径为a，求轴线上任意一点P的电势。



解：方法一：

$$\mathrm{d}q = \lambda \mathrm{d}l = \frac{q}{2\pi a}\mathrm{d}l$$

$$\mathrm{d}U = \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{q\,\mathrm{d}l}{8\pi^2\varepsilon_0 a r}$$

$$U = \int \mathrm{d}U = \frac{q}{8\pi^2\varepsilon_0 a r}\int_L \mathrm{d}l = \frac{q2\pi a}{8\pi^2\varepsilon_0 a r}$$

$$U = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2 + a^2}}$$

方法二：

$$E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qx}{(x^2+a^2)^{3/2}}$$

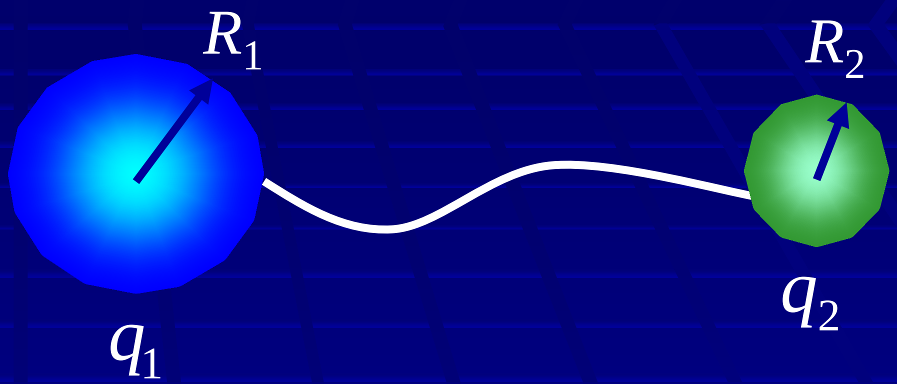
$$U=\int_x^{\infty}E\mathrm{d}x=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_x^{\infty}\frac{x}{(x^2+a^2)^{3/2}}\mathrm{d}x$$

$$U=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2+a^2}}$$

例16 两球半径分别为R1、R2，带电量q1、q2，两球相距很远。用导线连接，电荷将如何 分布？

解: 设导线连接后，

两球带电量为 $q_1' \,\&\, q_2'$

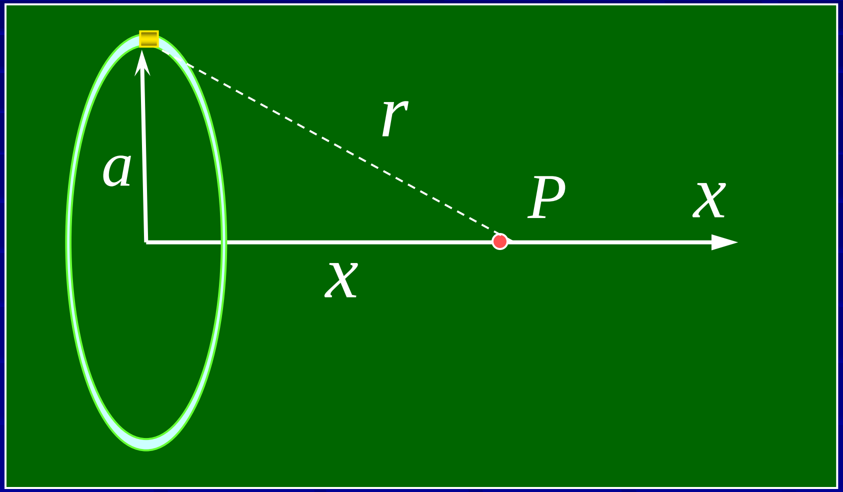


$$q_1' + q_2' = q_1 + q_2$$

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= \frac{q_1'}{4\pi\varepsilon_0 R_1} \\ u_2 &= \frac{q_2'}{4\pi\varepsilon_0 R_2} \end{aligned}\right\} \xrightarrow[q=\sigma 4\pi R^2]{u_1 = u_2} \frac{\sigma_1 4\pi R_1^{\ 2}}{\sigma_2 4\pi R_2^{\ 2}} = \frac{R_1}{R_2}$$

$$\longrightarrow \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{R_2}{R_1}$$

例17　均匀带电圆环，带电荷量为q，半径为a。求轴线上任一点P的场强。



解:

$$U=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2+a^2}}$$

$$E=E_x=-\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}=\frac{qx}{4\pi\varepsilon_0(x^2+a^2)^{3/2}}$$

$$\vec{E}=-\nabla U=-\vec{i}\,\frac{\partial U}{\partial x}-\vec{j}\,\frac{\partial U}{\partial y}-\vec{k}\,\frac{\partial U}{\partial z}$$

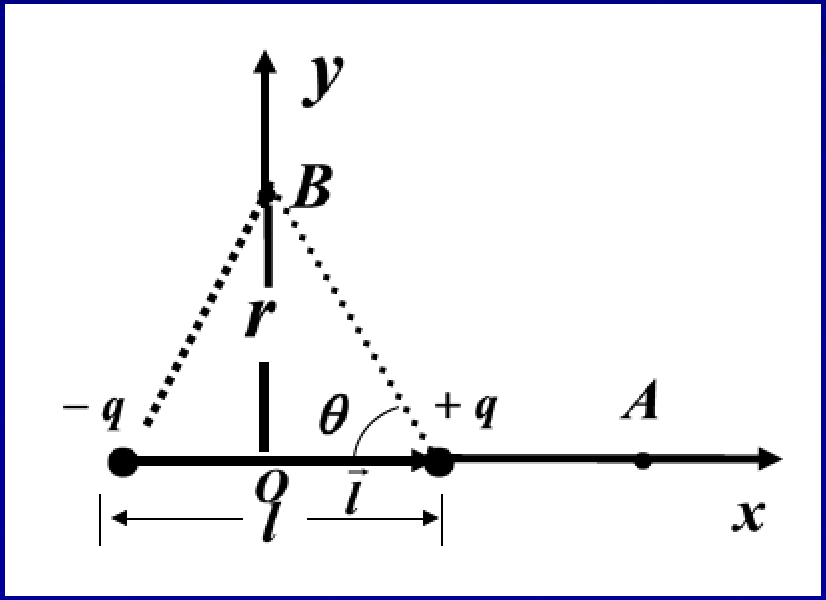
例18 计算电偶极子电场中任一点的场强

解：$U(x,y)=\cdots+\cdots=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{px}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}$

$$\vec{E}=-\nabla U=-\vec{i}\,\frac{\partial U}{\partial x}-\vec{j}\,\frac{\partial U}{\partial y}-\vec{k}\,\frac{\partial U}{\partial z}=\cdots$$

B点(x=0) $\quad \vec{E}=-\vec{i}\,\dfrac{p}{4\pi\varepsilon_0 y^3}$

A点(y=0) $\quad \vec{E}=\vec{i}\,\dfrac{p}{2\pi\varepsilon_0 x^3}$

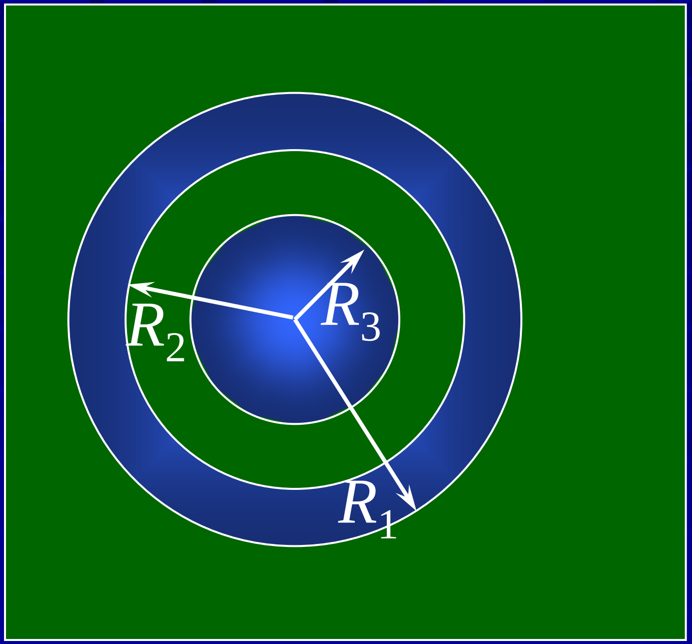


例1 外半径R_1内半径R_2的金属球壳。球壳内半径R_3的金属球，球壳和球均带10^{-8}C的正电荷。问：（1）两球电荷分布；（2）球心电势；（3）球壳电势。

解:（1）电荷$+q$分布在内球表面。

球壳内表面带电荷 $-q$。

球壳外表面带电荷 $2q$。



$$E_3 = 0 \qquad (r < R_3)$$

$$E_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \qquad (R_3 < r < R_2)$$

$$E_1 = 0 \qquad (R_2 < r < R_1)$$

$$E_0 = \frac{2q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \qquad (r > R_1)$$

（2） $$U_O=\int_0^{\infty}\vec{E}\cdot\mathbf{d}\vec{l}=\int_0^{R_3}+\int_{R_3}^{R_2}+\int_{R_2}^{R_1}+\int_{R_1}^{\infty}$$

$$U_O=\int_{R_3}^{R_2}E_2\mathbf{d}r+\int_{R_1}^{\infty}E_0\mathbf{d}r=\int_{R_3}^{R_2}\frac{q\mathbf{d}r}{4\boldsymbol{\pi}\varepsilon_0 r^2}+\int_{R_1}^{\infty}\frac{2q\mathbf{d}r}{4\boldsymbol{\pi}\varepsilon_0 r^2}$$

$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_3}-\frac{1}{R_2}\right)+\frac{2q}{4\pi\varepsilon_0 R_1}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_3}-\frac{1}{R_2}+\frac{2}{R_1}\right)$$

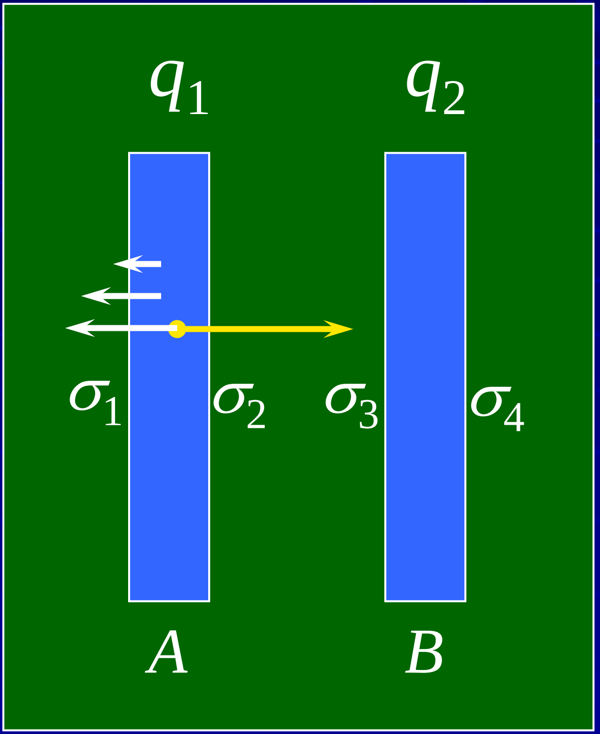
（3） $$U_1=\int_{R_1}^{\infty}\frac{2q}{4\boldsymbol{\pi}\varepsilon_0 r^2}\mathbf{d}r=\frac{2q}{4\boldsymbol{\pi}\varepsilon_0 R_1}$$

例2 两块导体平板，面积为S，分别带电荷q_1和q_2，两极板间距远小于平板的线度。求平板各表面的电荷密度。

解: $\sigma_1 S+\sigma_2 S=q_1$

电荷守恒： $\sigma_3 S+\sigma_4 S=q_2$

由静电平衡条件，导体板内$E=0$



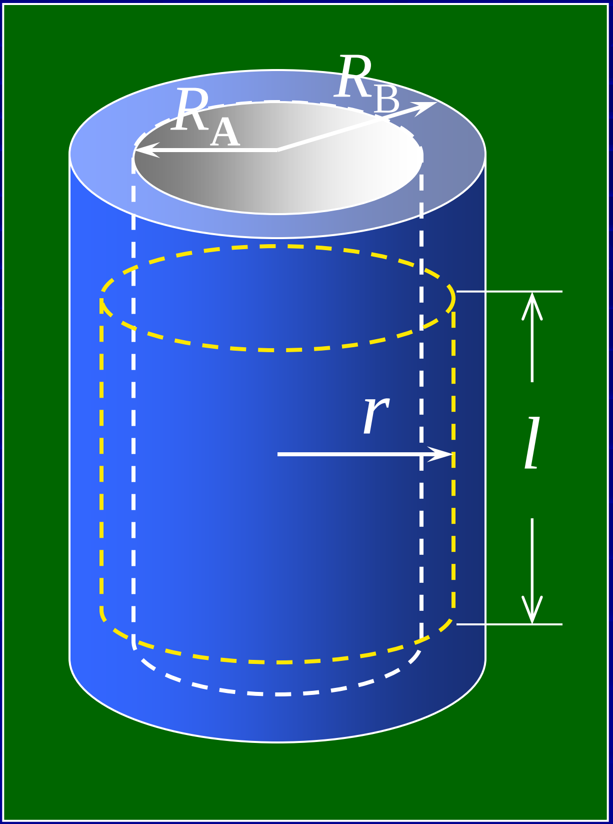
$$E_A=\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}-\frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}-\frac{\sigma_3}{2\varepsilon_0}-\frac{\sigma_4}{2\varepsilon_0}=0$$

$$E_B=\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}+\frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}+\frac{\sigma_3}{2\varepsilon_0}-\frac{\sigma_4}{2\varepsilon_0}=0$$

$$\sigma_1=\sigma_4=\frac{q_1+q_2}{2S} \qquad \sigma_2=-\sigma_3=\frac{q_1-q_2}{2S}$$

3. 圆柱形电容器

由高斯定理计算得：$E=\dfrac{q}{\varepsilon}\dfrac{1}{2\pi rl}$



$$U_{\mathbf{AB}}=\int_{R_{\mathbf{A}}}^{R_{\mathbf{B}}}\frac{q}{2\pi\varepsilon l}\frac{\mathbf{d}r}{r}=\frac{q}{2\pi\varepsilon l}\ln\frac{R_{\mathbf{B}}}{R_{\mathbf{A}}}$$

圆柱形电容器电容：

$$C=\frac{q}{U_{\mathrm{AB}}}=\frac{2\pi\varepsilon l}{\ln\left(R_{\mathrm{B}}/R_{\mathrm{A}}\right)}$$

圆柱形电容器电容： $C=\dfrac{q}{U_{AB}}=\dfrac{2\pi\varepsilon l}{\ln\left(R_B/R_A\right)}$

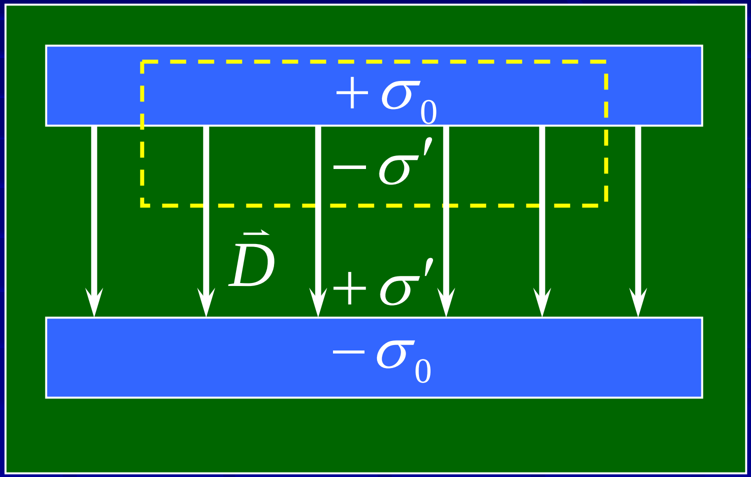
设极板间距为d， $R_B = R_A + d$

当$d \ll R_A$时 $\ln\dfrac{R_B}{R_A}=\ln\dfrac{R_A+d}{R_A}=\ln\left(1+\dfrac{d}{R_A}\right)\approx\dfrac{d}{R_A}$

$$C\approx\frac{2\pi\varepsilon lR_A}{d}=\frac{\varepsilon S}{d}$$ （$S=2\pi lR_A$）

例3 自由电荷面密度为σ_0的平行板电容器，其电容量为多少？极化电荷面密度为多少？

解： 由介质中的高斯定理



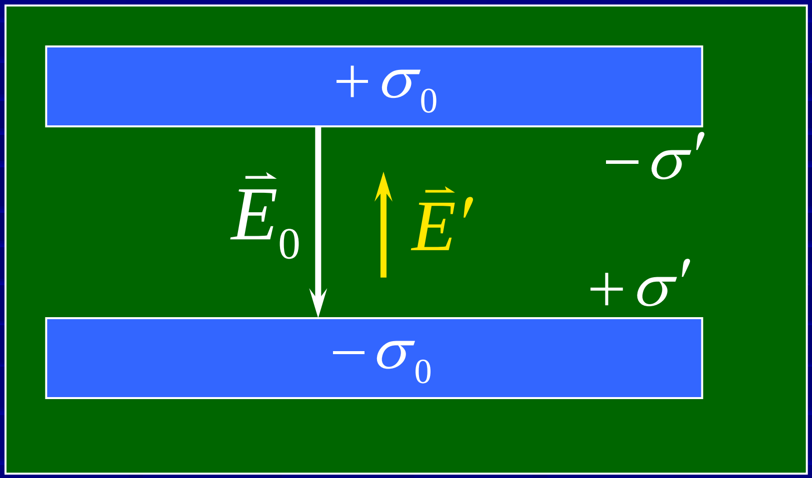
$$D \cdot S = \sigma_0 S \qquad D = \sigma_0$$

$$E = \frac{D}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}$$

$$U_{AB} = Ed = \frac{\sigma_0 d}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}$$

$$C = \frac{\sigma_0 S}{U_{AB}} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}{d}$$

$$E_0 = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}$$



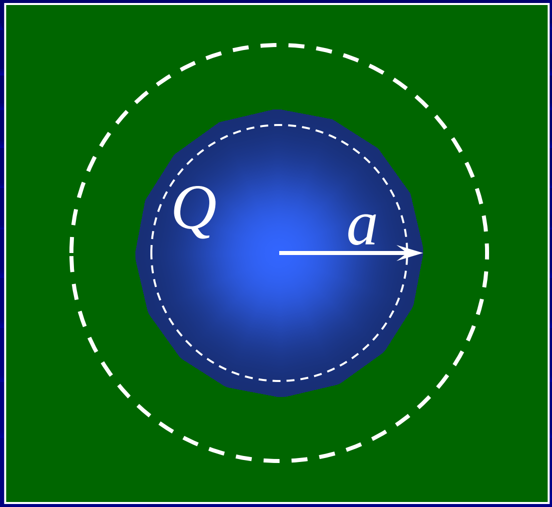
$$E' = \frac{\sigma'}{\varepsilon_0}$$

$$E = E_0 - E'$$

$$\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} - \frac{\sigma'}{\varepsilon_0}$$

$$\sigma' = \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right)\sigma_0$$

例7　真空中一半径为*a*，带电荷量为*Q* 的均匀球体的静电场能。



解：

$$E_1 4\pi r^2 = \frac{Q}{4\pi a^3/3}\frac{4\pi r^3/3}{\varepsilon_0}$$

$$\rho = \frac{Q}{4\pi a^3/3}$$

球内场强：

$$E_1 = \frac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 a^3}$$

球外场强：

$$E_2 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$U(r) = \int_r^a E_1 \mathrm{d}r + \int_a^\infty E_2 \mathrm{d}r$$

$$= \int_r^a \frac{Qr\mathrm{d}r}{4\pi\varepsilon_0 a^3} + \int_a^\infty \frac{Q\mathrm{d}r}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{3}{a} - \frac{r^2}{a^3}\right)$$

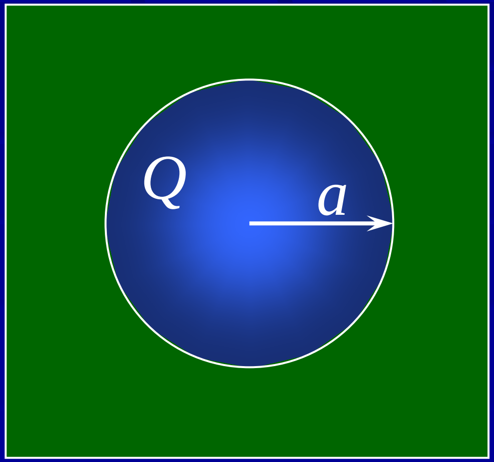
$$U(r)=\int_r^a \frac{Qr\mathbf{d}r}{4\boldsymbol{\pi}\varepsilon_0 a^3}+\int_a^\infty \frac{Q\mathbf{d}r}{4\boldsymbol{\pi}\varepsilon_0 r^2}=\frac{Q}{8\boldsymbol{\pi}\varepsilon_0}\left(\frac{3}{a}-\frac{r^2}{a^3}\right)$$

解法一：

$$W_\mathbf{e}=\frac{1}{2}\int \rho U\mathbf{d}V=\frac{1}{2}\int_0^a \frac{Q}{4\boldsymbol{\pi}a^3/3}\frac{Q}{8\boldsymbol{\pi}\varepsilon_0}\left(\frac{3}{a}-\frac{r^2}{a^3}\right)4\boldsymbol{\pi}r^2\mathbf{d}r$$

$$=\frac{3Q^2}{16\pi\varepsilon_0 a^3}\int_0^a r^2\left(\frac{3}{a}-\frac{r^2}{a^3}\right)\mathrm{d}r$$

$$W_\mathrm{e}=\frac{3Q^2}{20\pi\varepsilon_0 a}$$



解法二：

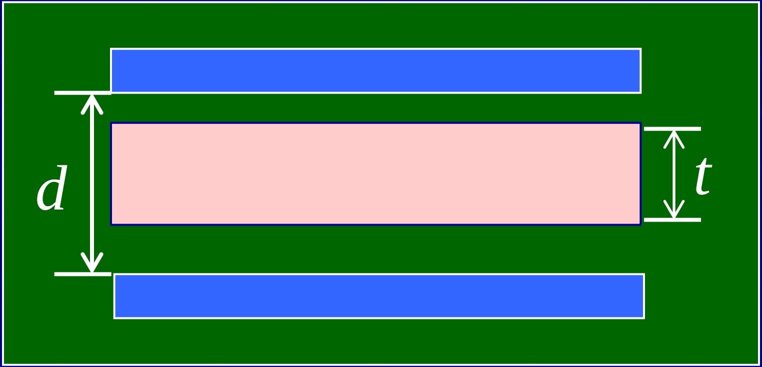
$$W_{\mathrm{e}}=\int w_{\mathrm{e}}\mathrm{d}V=\int_0^a\frac{1}{2}\varepsilon_0E_1^2\mathrm{d}V+\int_a^\infty\frac{1}{2}\varepsilon_0E_2^2\mathrm{d}V$$

$$=\int_0^a\frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\frac{Qr}{4\pi\varepsilon_0a^3}\right)^2 4\pi r^2\mathrm{d}r+\int_a^\infty\frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0r^2}\right)^2 4\pi r^2\mathrm{d}r$$

$$=\frac{Q^2}{40\pi\varepsilon_0a}+\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0a}=\frac{3Q^2}{20\pi\varepsilon_0a}$$

例8 平行板电容器，面积为S，间距为d。现在把一块厚度为t的铜板插入其中。（1）计算电容器的电容改变量；（2）电容器充电后断开电源，再抽出铜板需做多少功？

解： 插入前：$C_0 = \varepsilon_0 S/d$



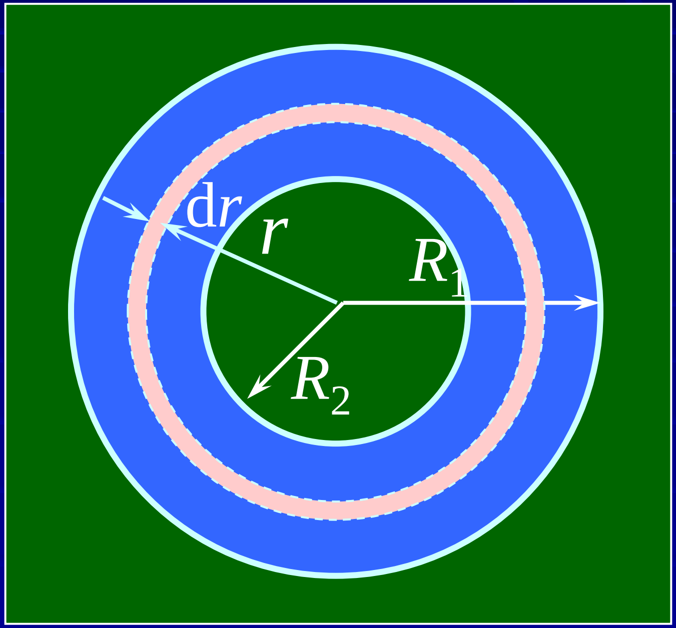
插入后：$\Delta U = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}(d-t)$

$$C = \frac{\sigma S}{\Delta U} = \frac{\varepsilon_0 S}{d-t}$$

$$\Delta C = C - C_0 = \frac{\varepsilon_0 S t}{d(d-t)}$$

$$A = W_0 - W = \frac{Q^2}{2C_0} - \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q^2 t}{2\varepsilon_0 S}$$

例9 球形电容器带电荷量q，内外半径分别为R_1和R_2，极板间充满介电常数为ε的电介质。计算电场的能量。



解：

$$E=\frac{q}{4\pi\varepsilon r^2}$$

$$w_e=\frac{1}{2}\varepsilon E^2=\frac{q^2}{32\pi^2\varepsilon r^4}$$

$$\mathrm{d}V=4\pi r^2\mathrm{d}r$$

$$W_e=\int w_e\mathrm{d}V=\int_{R_1}^{R_2}\frac{q^2}{8\pi\varepsilon r^2}\mathrm{d}r=\frac{q^2}{8\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)$$

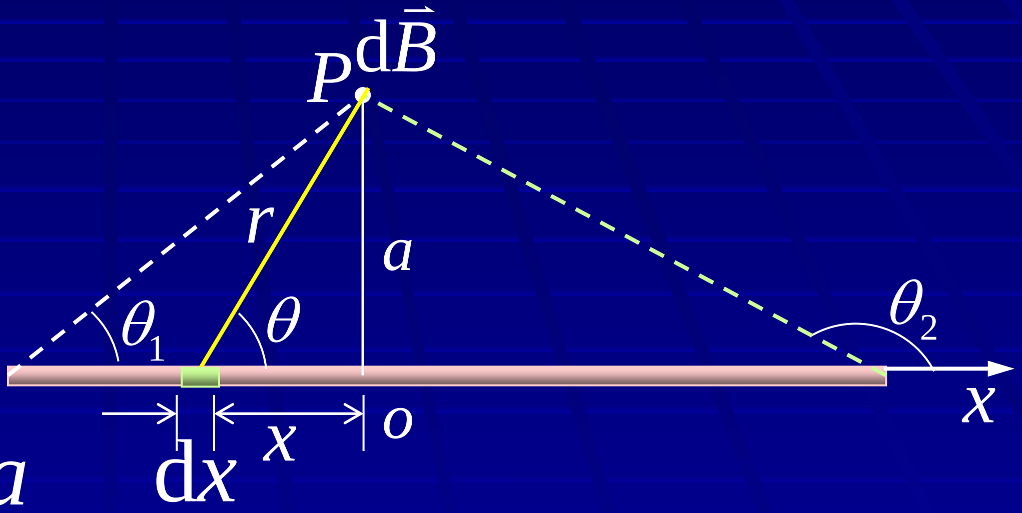
$$W_e = \int w_e \mathrm{d}V = \int_{R_1}^{R_2} \frac{q^2}{8\pi\varepsilon r^2}\mathrm{d}r = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

计算电容量：

$$W_{\mathbf{e}} = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} \quad \rightarrow C = \frac{4\boldsymbol{\pi}\varepsilon R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

1. 载流直导线的磁场　载流长直导线，电流为I，导线两端到P点的连线与导线的夹角分别为θ_1和θ_2。求距导线为a处P点的磁感应强度。

$$\mathrm{d}B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}x\sin\theta}{r^2}$$



$$x = -a\cot\theta$$

$$\mathrm{d}x = \frac{a\,\mathrm{d}\theta}{\sin^2\theta} \qquad r = \frac{a}{\sin\theta}$$

$$B = \int \mathrm{d}B = \int \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{a}{\sin^2\theta}\frac{\sin^2\theta}{a^2}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin\theta \, \mathrm{d}\theta$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\left(\cos\theta_1 - \cos\theta_2\right)$$

无限长载流导线： $\theta_1 = 0$ ， $\theta_2 = \pi$

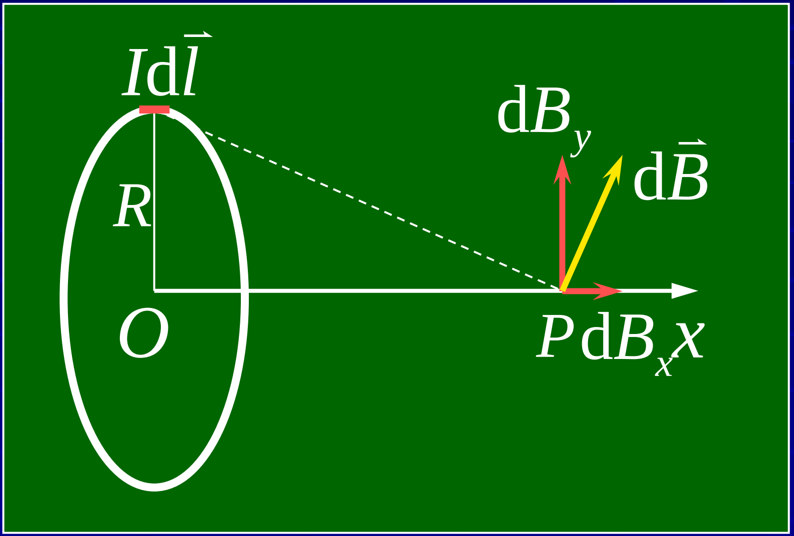
$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}$$

半无限长载流导线： $\theta_1 = 0$ ， $\theta_2 = \pi/2$

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}$$

2. 圆形载流导线轴线上的磁场 载流圆线圈半径R，电流I。求轴线上距圆心O为x处P点的磁感应强度。

$$\mathrm{d}B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}l\sin\theta}{r^2}$$



$$\because \quad \mathrm{d}\vec{l} \perp \vec{r}\,, \therefore \quad \theta = 90^\circ$$

$$B_y = 0$$

$$B = B_x = \int \mathrm{d}B\cos\alpha = \int \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}l\sin 90^\circ\cos\alpha}{r^2}$$

$$r = \sqrt{R^2 + x^2} \qquad \cos\alpha = R\Big/\sqrt{R^2 + x^2}$$

$$B=\int_0^{2\pi R}\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{IR\mathrm{d}l}{\left(R^2+x^2\right)^{3/2}}=\frac{\mu_0 IR^2}{2\left(R^2+x^2\right)^{3/2}}$$

圆心：$x = 0$

$$B=\frac{\mu_o I}{2R}$$

轴线上远离圆电流处：（$x>>R$）

$$B\approx\frac{\mu_0 IR^2}{2x^3}=\frac{\mu_0 IS}{2\pi x^3}$$

$S=\pi R^2$ 为圆电流的面积

例1 在玻尔的氢原子模型中，电子绕原子核运动相当于一个圆电流，具有磁矩（称轨道磁矩）。求轨道磁矩μ与轨道角动量之间的关系。

解： 设电子的轨道半径为r，每秒转圈数为ν。

电流： $I=\nu e$ 圆电流面积： $S=\pi r^2$

磁矩： $\mu=IS=\nu e\pi r^2$

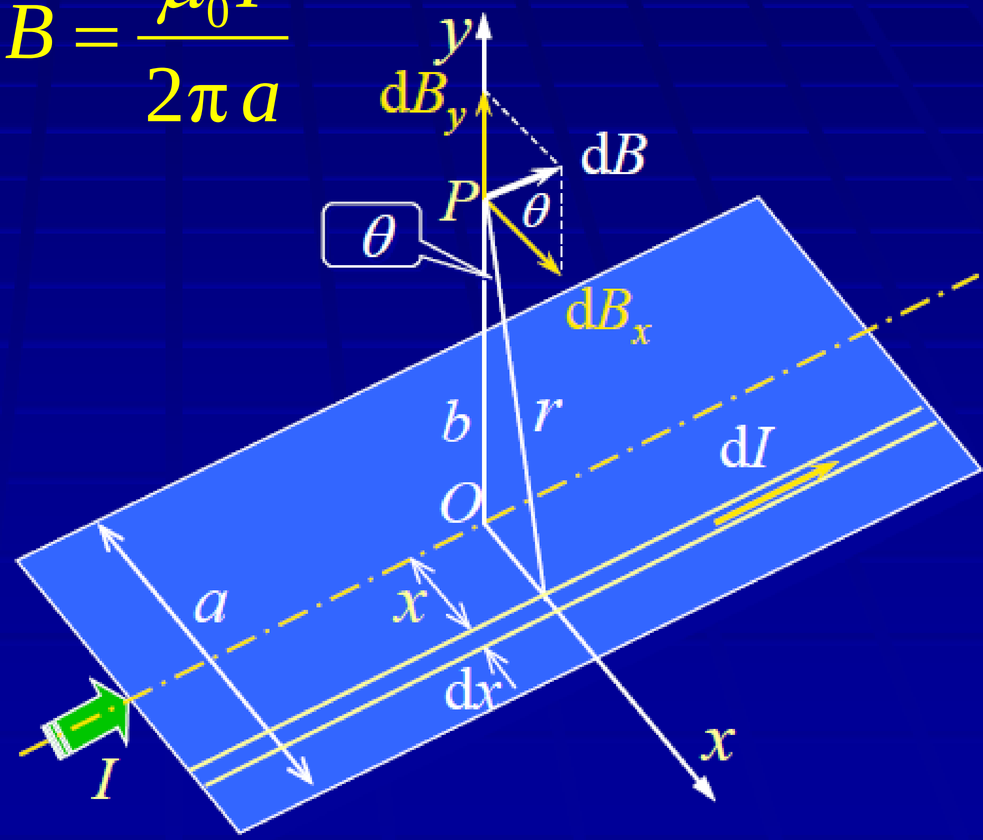
电子角动量： $L=m\upsilon r=m2\pi r\nu r$

$$\frac{\mu}{L}=\frac{e}{2m}$$

例2 无限长载流平板，宽度为a，电流为I。求正上方P点的磁感应强度。

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}$$

解： $$\mathrm{d}B = \frac{\mu_0 \mathrm{d}I}{2\pi r}$$



根据对称性 $B_y = 0$

$$\mathbf{d}B_x = \cos\theta \mathbf{d}B$$

$$B = B_x = \int \mathbf{d}B_x$$

$$= \int \frac{\mu_0 I}{2\pi a}\mathbf{d}\theta = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}\int_{-\arctan\frac{a/2}{y}}^{\arctan\frac{a/2}{y}} \mathbf{d}\theta = \frac{\mu_0 I}{\pi a}\arctan\frac{a}{2y}$$

注意：积分过程中 **a y** 固定，**r x** θ 变

$$\mathbf{d}B = \frac{\mu_0 \mathbf{d}I}{2\boldsymbol{\pi} r}, \quad \mathrm{d}I = \frac{I}{a}\mathrm{d}x \quad \rightarrow \mathbf{d}B = \frac{\mu_0 I \mathbf{d}x}{2\boldsymbol{\pi} a r}$$

$$\mathbf{d}B_x = \cos\theta \mathbf{d}B = \frac{\mu_0 I}{2\boldsymbol{\pi} a}\frac{\cos\theta}{r}\mathbf{d}x$$

$$r\cos\theta = y \rightarrow d\left(r\cos\theta\right) = 0 \rightarrow \cos\theta dr = r\sin\theta d\theta$$

$$r\sin\theta = x \rightarrow \sin\theta dr + r\cos\theta d\theta = dx$$

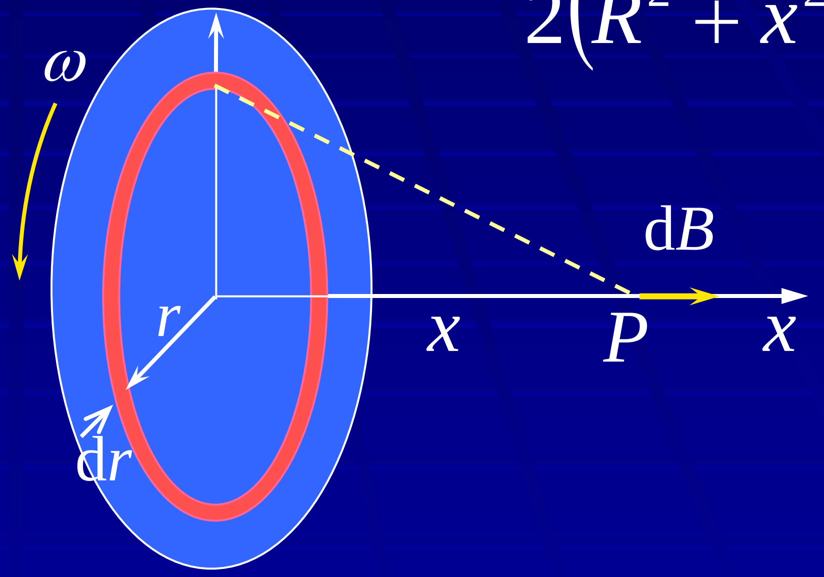
$$\therefore dx = \frac{r}{\cos\theta}d\theta$$

$$\mathbf{d}B_x = \frac{\mu_0 I}{2\boldsymbol{\pi} a}\mathbf{d}\theta$$

例5 圆盘均匀带电，半径R电荷密度σ。若圆盘以角速度ω绕圆心O旋转，求轴线上距圆心x处的磁感应强度以及磁矩。

$$B=\frac{\mu_0 IR^2}{2\left(R^2+x^2\right)^{3/2}}$$

解：



$$\mathrm{d}B=\frac{\mu_o r^2\mathrm{d}I}{2(x^2+r^2)^{3/2}}$$

$$\mathbf{d}I=\frac{\mathbf{d}q}{T}=\frac{\omega}{2\boldsymbol{\pi}}\mathbf{d}q$$

$$\mathbf{d}q=\sigma 2\boldsymbol{\pi}\, r\mathbf{d}r \qquad \rightarrow \mathbf{d}I=\omega\sigma\, r\mathbf{d}r$$

$$B=\int \mathrm{d}B=\int_0^R \frac{\mu_0 r^3 \omega \sigma}{2(x^2+r^2)^{3/2}}\mathrm{d}r$$

$$=\frac{\mu_0 \omega \sigma}{2}\left(\frac{R^2+2x^2}{\sqrt{R^2+x^2}}-2x\right)$$

磁矩：

$$\mathrm{d}p_{\mathrm{m}}=\pi r^2 \mathrm{d}I=\pi r^2 \omega \sigma r \mathrm{d}r=\pi r^3 \omega \sigma \mathrm{d}r$$

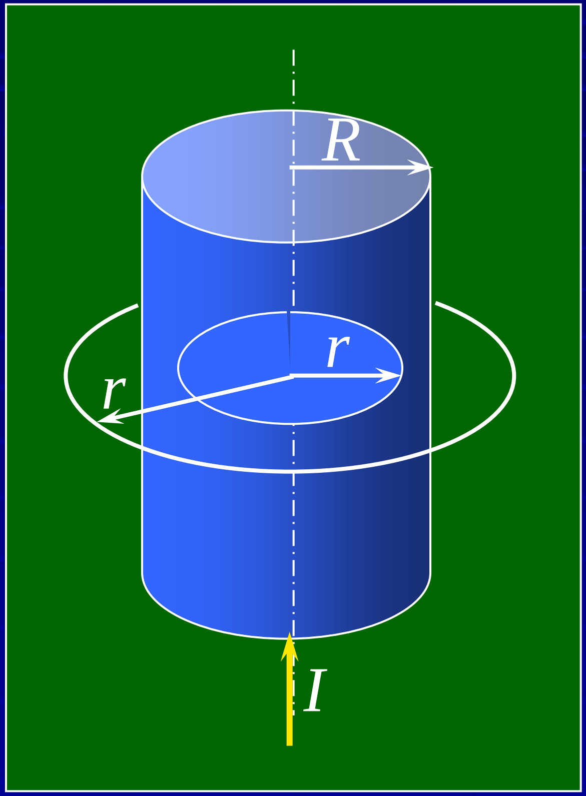
$$p_{\mathrm{m}}=\int_0^R \pi r^3 \omega \sigma \mathrm{d}r=\frac{1}{4}\pi \omega \sigma R^4$$

3. 无限长载流圆柱形导体的磁场分布

（1）圆柱外的磁场：

$$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = B2\pi r = \mu_0 I$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$



（2）圆柱内的磁场：

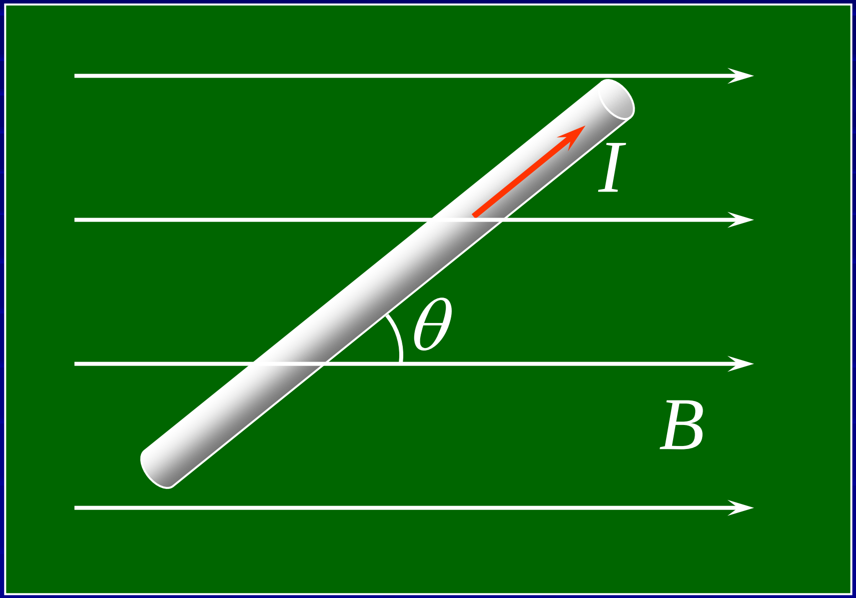
$$I' = \frac{I}{\pi R^2}\cdot \pi r^2 = \frac{r^2}{R^2} I$$

$$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = B2\pi r = \mu_0 \frac{r^2}{R^2} I$$

$$B = \frac{\mu_0 r I}{2\pi R^2}$$

例1 计算长为L的载流直导线在均匀磁场B中所受的力。

解：



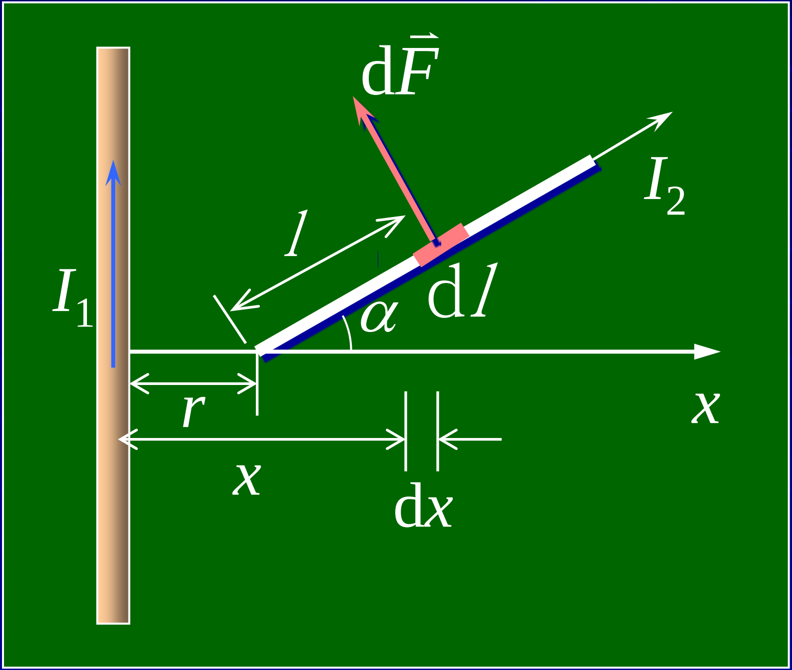
$$\vec{F} = \int_L I\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{B}$$

$$F = \int_L IB\sin\theta\,\mathrm{d}l$$

$$= IB\sin\theta \int_L \mathrm{d}l$$

$$F = ILB\sin\theta$$

例2 无限长直载流导线通电流I_1，在同一平面内长为L的载流直导线，通电流I_2（如图所示）。求长为L的导线受的磁场力。



解：$\mathrm{d}F = I_2 \mathrm{d}lB = I_2 \mathrm{d}l \dfrac{\mu_0 I_1}{2\pi x}$

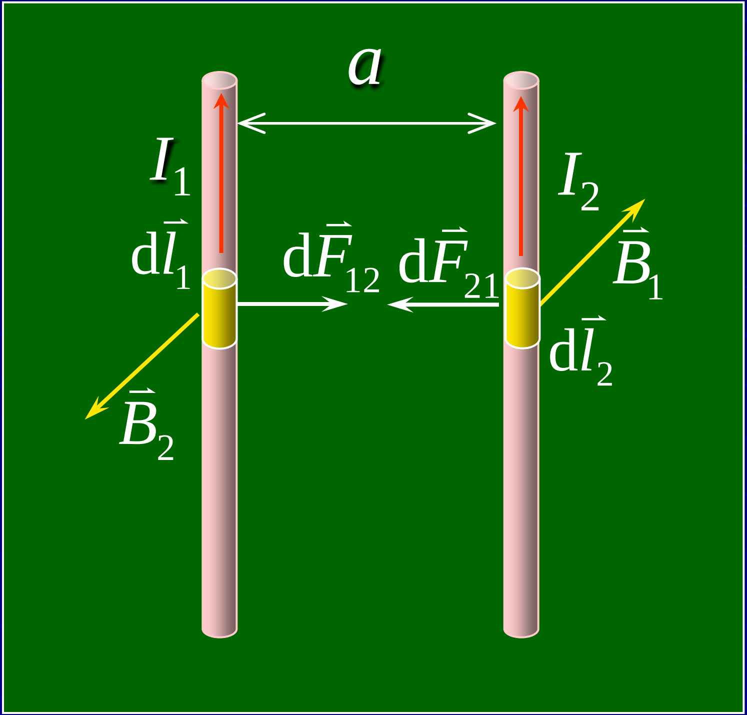
$$x = r + l\cos\alpha \qquad \mathrm{d}l = \frac{\mathrm{d}x}{\cos\alpha}$$

$$\mathrm{d}F = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi x} \frac{\mathrm{d}x}{\cos\alpha}$$

$$F = \int \mathrm{d}F = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi\cos\alpha} \int_r^{r+L\cos\alpha} \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi\cos\alpha} \ln\frac{r+L\cos\alpha}{r}$$

平行电流间的相互作用

$$B_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi a} \qquad B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi a}$$



$$\mathrm{d}F_{12} = I_1 B_2 \mathrm{d}l_1 = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a}\mathrm{d}l_1$$

单位长度受力：

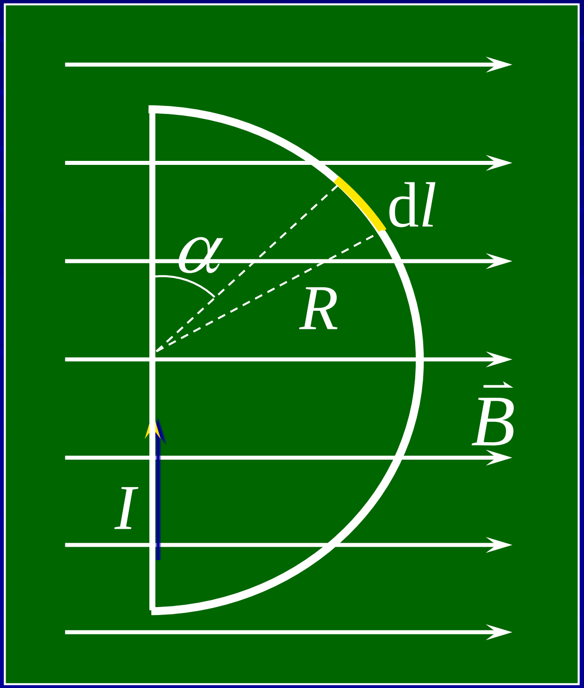
$$\frac{\mathrm{d}F_{12}}{\mathrm{d}l_1} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a}$$

$$\frac{\mathrm{d}F_{21}}{\mathrm{d}l_2} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a}$$

例4 半圆形闭合载流线圈，半径R，电流I。放在均匀磁场中，磁感应强度B，其方向与线圈平面平行。求：（1）以直径为转轴，线圈所受磁力矩的大小和方向；（2）在力矩作用下，线圈转过90°，求力矩做的功。

解： 解法一

$$\mathrm{d}F = IB\mathrm{d}l\sin\alpha = IBR\sin\alpha\,\mathrm{d}\alpha$$



作用力垂直于线圈平面

$$\mathrm{d}M = \mathrm{d}F\cdot R\sin\alpha$$

$$= IBR^2\sin^2\alpha\,\mathrm{d}\alpha$$

力矩：

$$M=\int \mathbf{d}M=\int_0^{\pi} IBR^2\sin^2\alpha\,\mathbf{d}\alpha=I\frac{\pi R^2}{2}B$$

力矩的功：

$$m=I\frac{\pi R^2}{2}$$

$$\vec{M}=\vec{m}\times\vec{B}$$

$$W=\int M(\theta)\mathbf{d}\theta=\int_{\pi/2}^{0}-mB\sin\theta\,\mathbf{d}\theta=mB$$

$$W=\frac{1}{2}\pi R^2 IB$$

解法二：

$$\vec{M}=\vec{m}\times\vec{B}\quad\rightarrow M=mB\sin\theta$$

$$\because\quad m=I\frac{\pi R^2}{2}\quad\theta=90^\circ\qquad\therefore\quad M=\frac{1}{2}\pi IBR^2$$

线圈转过90°时，磁通量的增量为

$$\Delta\Phi=\frac{\pi R^2}{2}B$$

$$W=I\Delta\Phi=\frac{\pi R^2}{2}BI$$

例1 一长直导线通以电流 $i = I_0 \sin\omega t$，旁边有一个共面的矩形线圈*abcd*。求：线圈中的感应电动势。

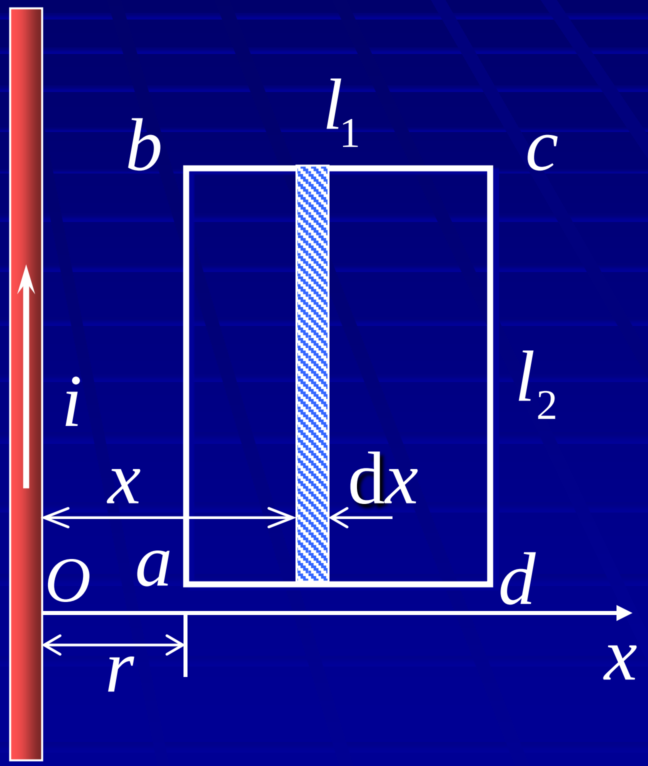
解：

$$\Phi = \oint_S \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_r^{r+l_1} \frac{\mu_0 i}{2\pi x} l_2 \mathrm{d}x$$

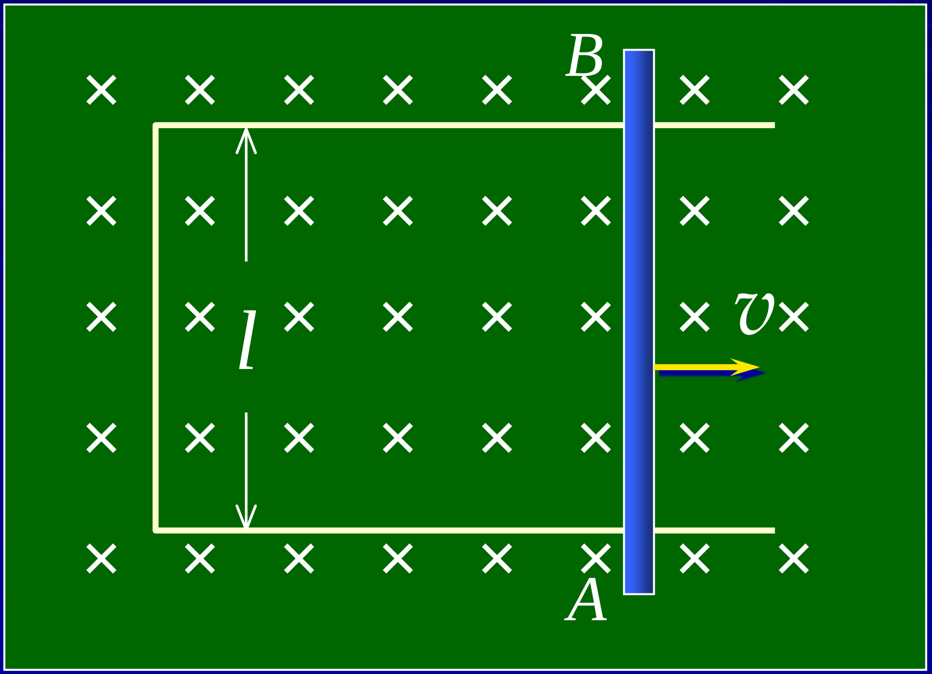
$$= \frac{\mu_0 I_0 l_2}{2\pi} \sin\omega t \ln\frac{r+l_1}{r}$$

$$\varepsilon_i = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$$

$$= -\frac{\mu_0 I_0}{2\pi} l_2 \omega \cos\omega t \ln\frac{r+l_1}{r}$$



例2　一矩形导体线框，宽为l，与运动导体棒构成闭合回路。如果导体棒一速度v 做匀速直线运动，求回路内的感应电动势。



解：　解法一

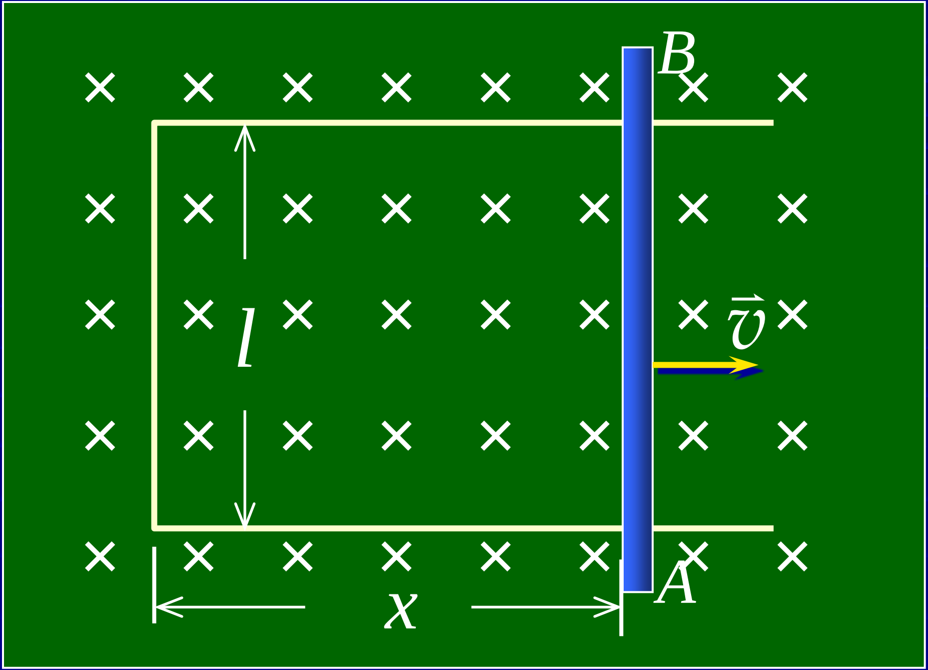
$$\varepsilon_{\mathrm{i}}=\int_a^b(\vec{v}\times\vec{B})\cdot\mathrm{d}\vec{l}$$

$$=\int_0^l vB\mathrm{d}l$$

$$=vBl$$

电动势方向 $A\rightarrow B$

解法二



$$\varepsilon_{\mathrm{i}} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$$

$$\Phi = Blx$$

$$\varepsilon_{\mathrm{i}} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -Bl\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

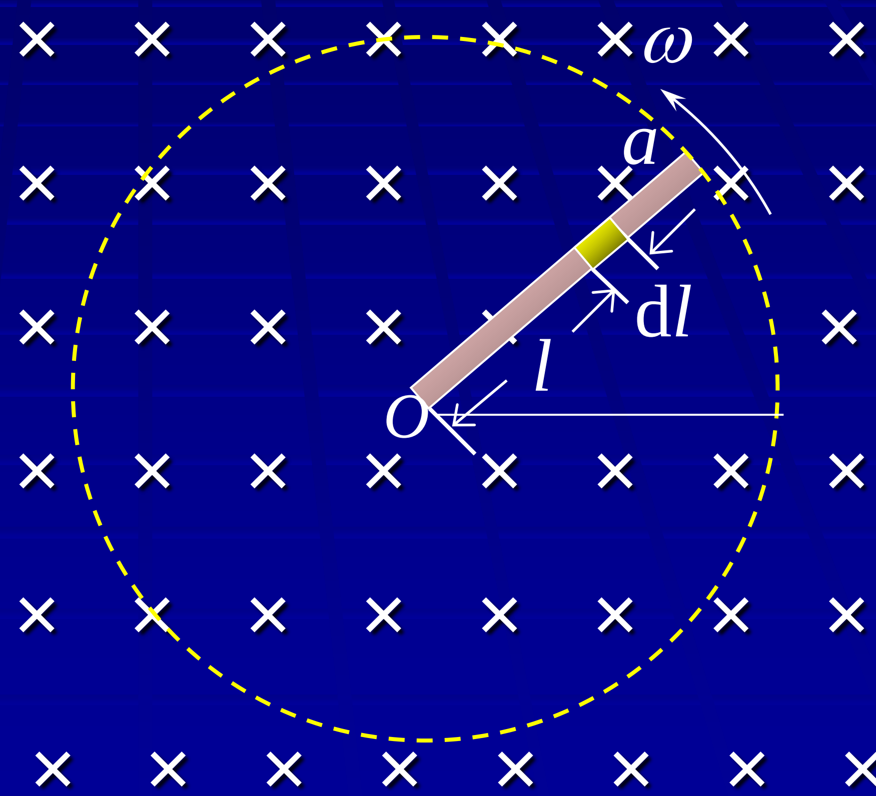
$$\varepsilon_{\mathbf{i}} = -vBl$$

$$\left|\varepsilon_{\mathbf{i}}\right| = vBl$$

电动势方向 $\boldsymbol{A \to B}$

例3 一根长为L的铜棒，在均匀磁场B中以角速度ω在与磁场方向垂直的平面上做匀速转动。求棒的两端之间的感应电动势大小。

解：



$$\varepsilon_{\mathrm{i}} = \int_0^L (\vec{v}\times\vec{B})\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$= -\int_0^L vB\mathrm{d}l$$

$$= -\int_0^L B\omega l\mathrm{d}l$$

$$= -\frac{1}{2}B\omega L^2$$

动生电动势方向：$a \to O$ $\qquad \vec{E}_k = \vec{v}\times\vec{B}$

例4 一长直导线中通电流 I =10A，有一长为L= 0.2m的金属棒与导线垂直共面。当棒以速度v = 2 m/s平行于长直导线匀速运动时，求棒产生的动生电动势。

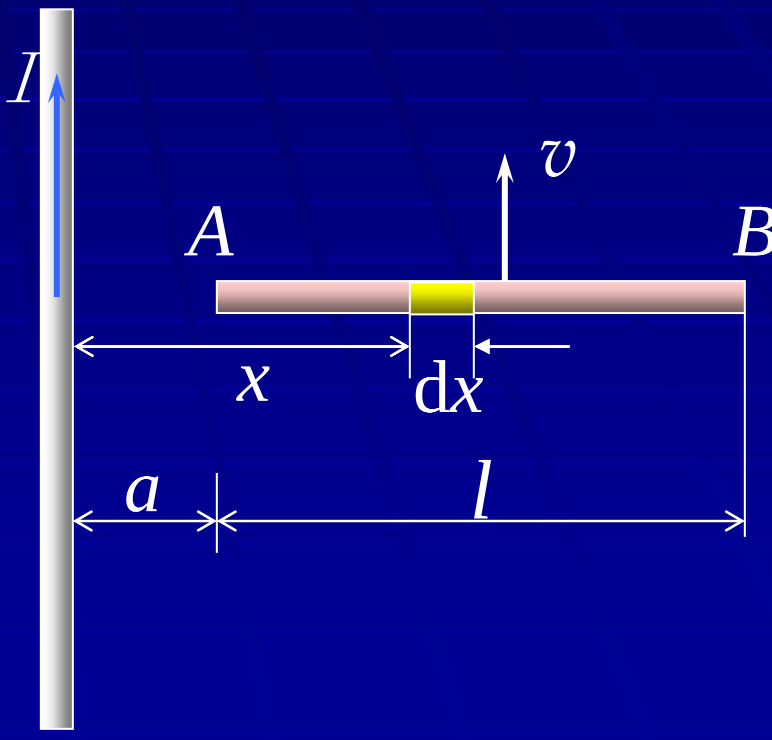
解：

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}$$

$$\mathrm{d}\varepsilon_{\mathrm{i}} = (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \mathrm{d}\vec{x} = -Bv\mathrm{d}x$$

$$\varepsilon_{\mathrm{i}} = -\int_a^{a+l} \frac{\mu_0 I v}{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

$$= -\frac{\mu_0 I v}{2\pi} \ln \frac{a+l}{a}$$



电动势方向 B→A

例5 半径为R 的圆柱形空间区域，充满着均匀磁场。已知磁感应强度的变化率大于零且为恒量。问在任意半径r 处感生电场的大小以及棒AB上的感生电动势。

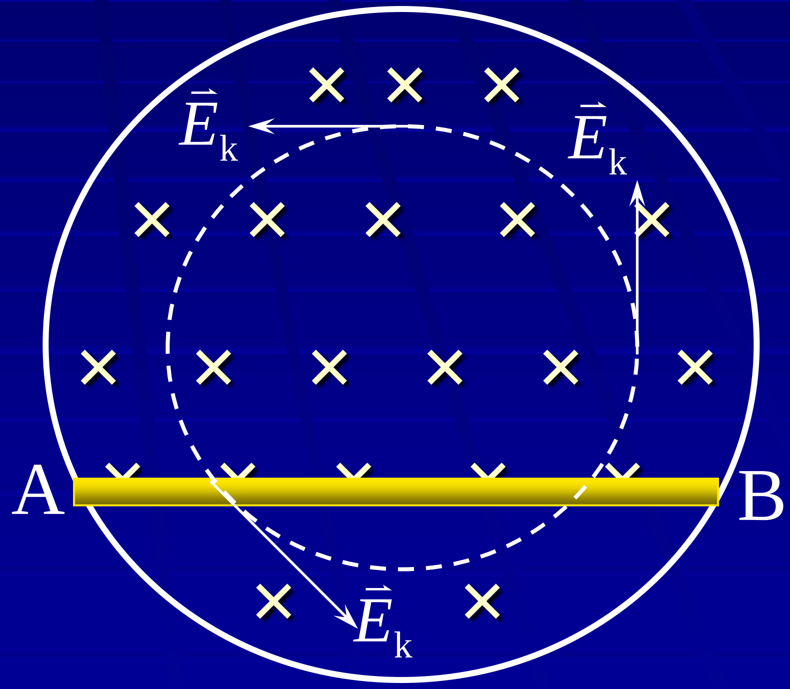
解：（1） $r < R$时

$$\Phi = BS = B\pi r^2$$

$$\varepsilon_{\mathrm{i}} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = \oint_L \vec{E}_{\mathrm{k}} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$-\left(\boldsymbol{\pi} r^2\right)\frac{\mathbf{d}B}{\mathbf{d}t} = E_{\mathbf{k}} 2\boldsymbol{\pi} r$$

$$E_{\mathrm{k}} = -\frac{1}{2} r \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$$

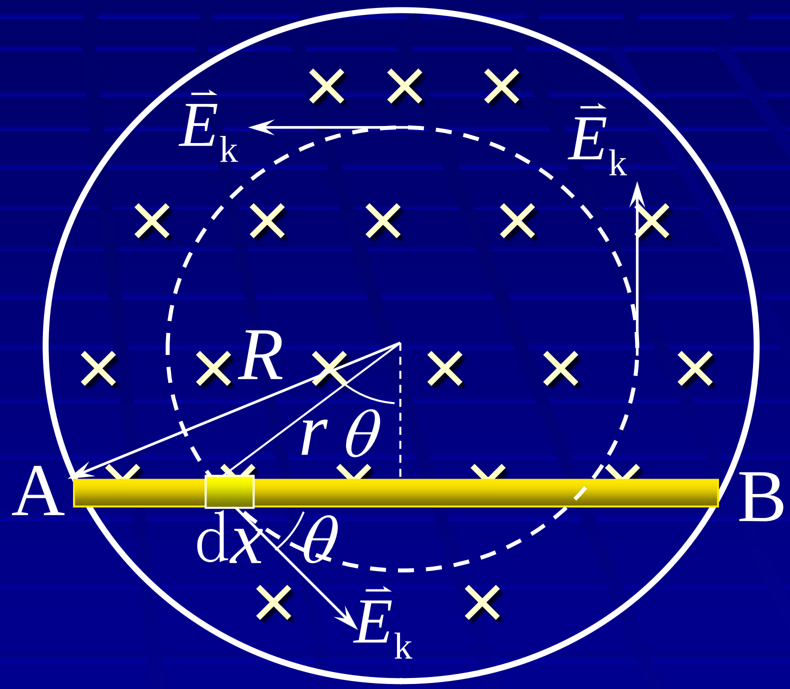


$r > R$ 时 $\qquad \Phi = B \cdot \pi R^2$

$$\varepsilon_{\mathrm{i}} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = \oint_L \vec{E}_{\mathrm{k}} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$-\left(\pi R^2\right)\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} = E_{\mathrm{k}}\, 2\pi R$$

$$E_{\mathrm{k}} = -\frac{R^2}{2r}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$$



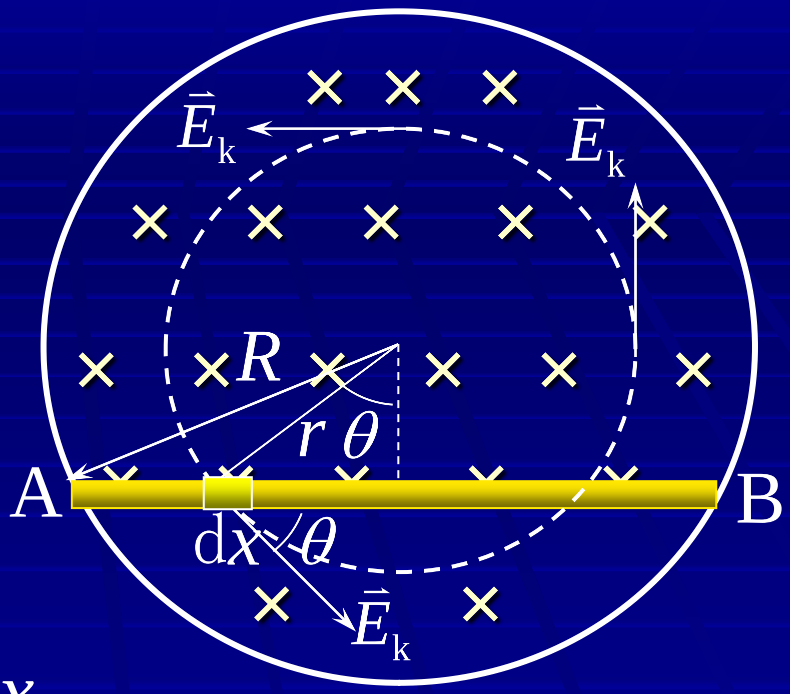
（2） $$\varepsilon_{\mathrm{i}} = \int_0^L \vec{E}_{\mathrm{k}} \cdot \mathrm{d}\vec{x} = \int_0^L E_{\mathrm{k}} \cos\theta \, \mathrm{d}x$$

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{R^2 - l^2/4}}{r}$$

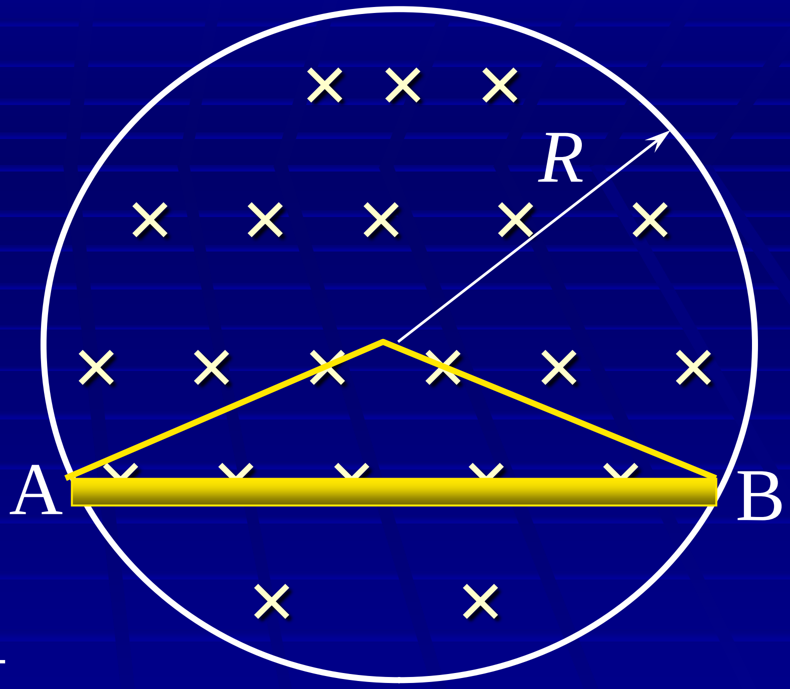
$$\varepsilon_\mathrm{i} = \int_0^L E_\mathrm{k} \cos\theta \, \mathrm{d}x$$

$$= \int_0^L \frac{1}{2} r \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} \frac{\sqrt{R^2 - L^2/4}}{r} \mathrm{d}x$$

$$= \frac{L}{2}\sqrt{R^2 - \left(\frac{L}{2}\right)^2} \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$$



方法二：

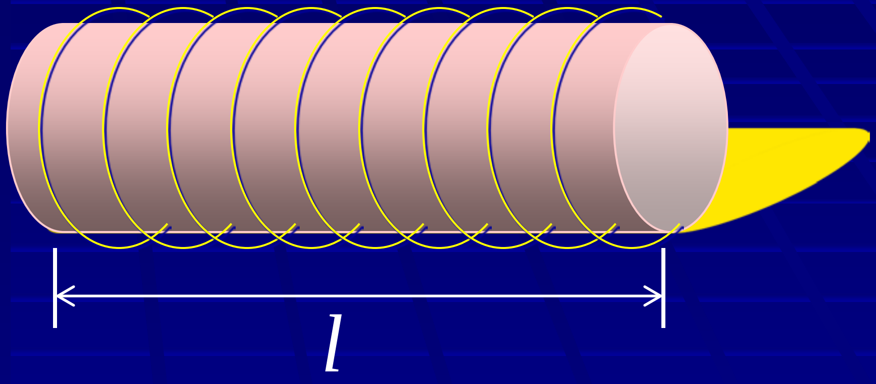


$$\Phi = B \cdot \frac{L}{2}\sqrt{R^2 - \left(\frac{L}{2}\right)^2}$$

$$\varepsilon_{\mathrm{i}} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -\frac{L}{2}\sqrt{R^2 - \left(\frac{L}{2}\right)^2}\,\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$$

$$\varepsilon_{\mathrm{i}} = \varepsilon_{AB} + \varepsilon_{BO} + \varepsilon_{OA} = \varepsilon_{AB}$$

例6　长为l 的螺线管，横断面为S，线圈总匝数为N，管中磁介质的磁导率为μ 。求自感系数。



解：

$$B=\mu\frac{N}{l}I$$

$$\Psi=NBS=\mu\frac{N^2}{l}IS$$

线圈体积： $V=lS$

$$L=\frac{\Psi}{I}=\mu\frac{N^2}{l}S=\mu\frac{N^2}{l^2}lS$$

$$n=\frac{N}{l}$$

$$L=\mu n^2 V$$

例7 有一电缆，由两个“无限长”的同轴圆桶状导体组成，其间充满磁导率为μ的磁介质，电流I从内桶流进，外桶流出。设内、外桶半径分别为R_1和R_2，求长为l的一段导线的自感系数。

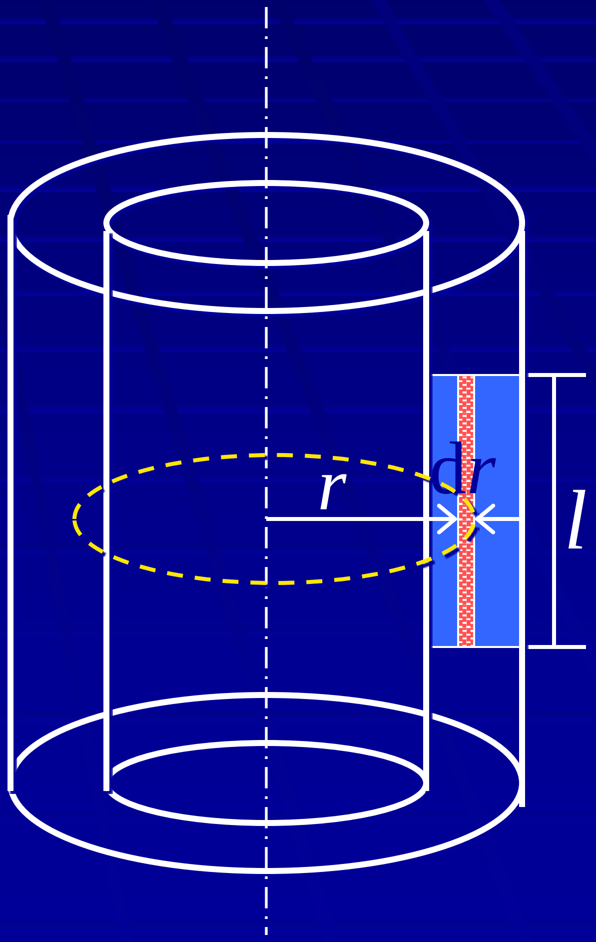
解:

$$B=\frac{\mu I}{2\pi r}$$

$$\mathrm{d}\Phi=B\mathrm{d}S=Bl\mathrm{d}r$$

$$\Phi=\int_{R_1}^{R_2}\frac{\mu I}{2\pi r}l\mathrm{d}r=\frac{\mu Il}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

$$L=\frac{\Phi}{I}=\frac{\mu l}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}$$



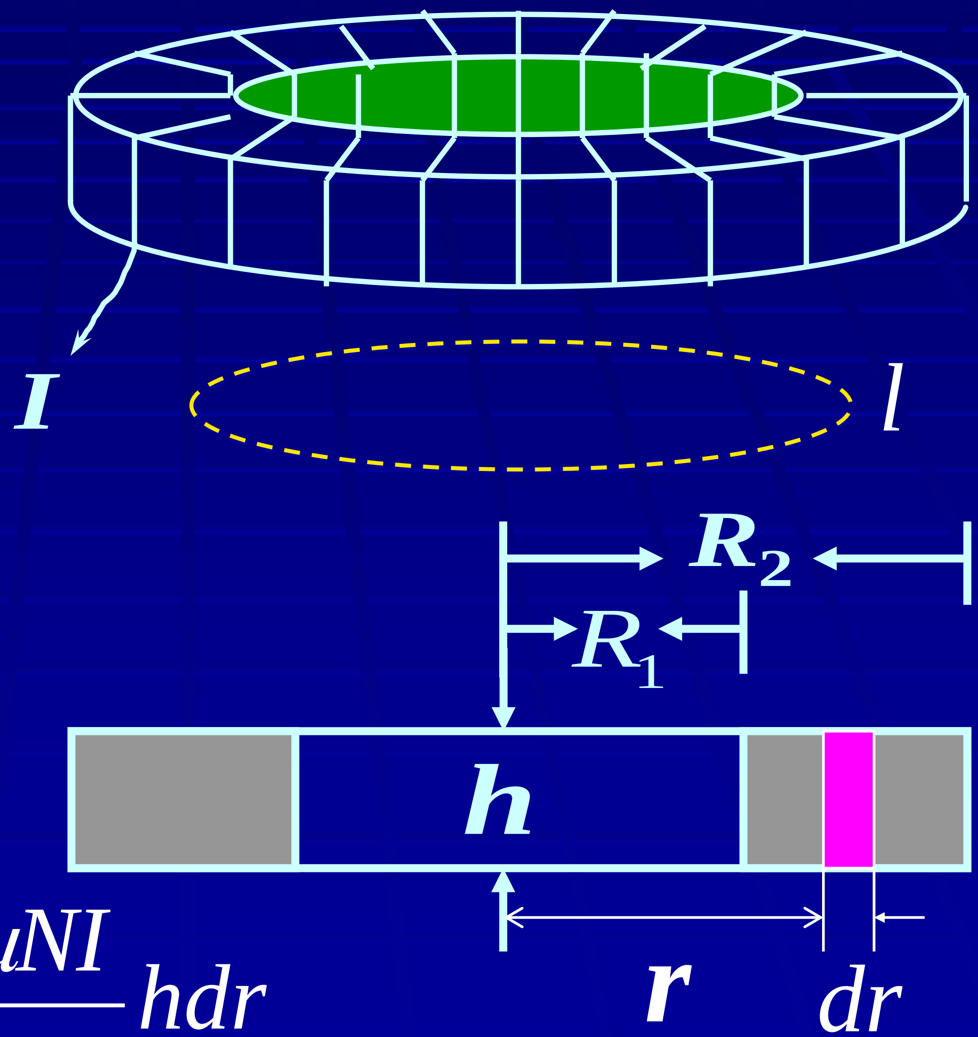
例8 求一环形螺线管的自感。已知：R_1、R_2、h、N

安培环路定理：

$$\oint_l \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu I$$

$$B2\pi r = \mu NI$$

$$B = \frac{\mu NI}{2\pi r}$$



$$d\Phi_m = \vec{B}\cdot d\vec{S} = \frac{\mu NI}{2\pi r} h dr$$

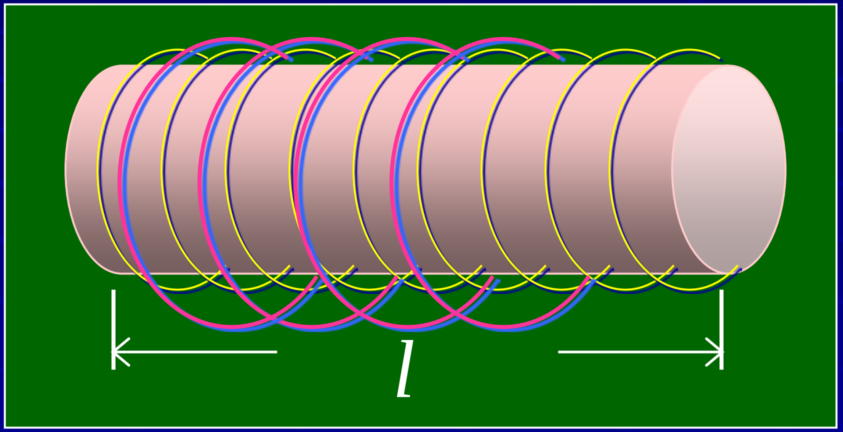
$$d\Phi_m = \vec{B} \cdot d\vec{S} = \frac{\mu NI}{2\pi r} hdr$$

$$\Phi_m = \int d\Phi_m = \frac{\mu NIh}{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = \frac{\mu NIh}{2\pi} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

$$\Psi_m = N\Phi_m = \frac{\mu N^2 Ih}{2\pi} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

$$L = \frac{\Psi_m}{I} = \frac{\mu N^2 h}{2\pi} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

例8 设在一长为1m，横断面积S =10cm^2，密绕 N_1 =1000匝线圈的长直螺线管中部，再绕N_2=20匝的线圈。（1）计算互感系数（2）若回路1中电流的变化率为10 A/s。求回路2中引起的互感电动势。（3）M和L的关系。



解:

$$B = \mu_0 \frac{N_1}{l} I_1$$

互感:

$$\Psi_2 = BSN_2 = \mu_0 \frac{N_1 N_2 I_1 S}{l}$$

$$M = \frac{\Psi_2}{I_1} = \frac{\mu_0 N_1 N_2 S}{l} = 2.51\times10^{-5}\,\mathrm{H}$$

$$\varepsilon_2 = -M\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t} = -2.51\times10^{-4}\,\mathrm{H}$$

自感：$$\Psi_1 = N_1\Phi_1 = \frac{\mu_0 N_1^2 I_1 S}{l}$$

$$L_1 = \frac{\Psi_1}{I_1} = \frac{\mu_0 N_1^2 S}{l}$$

同理：$$L_2 = \frac{\Psi_2}{I_2} = \frac{\mu_0 N_2^2 S}{l}$$

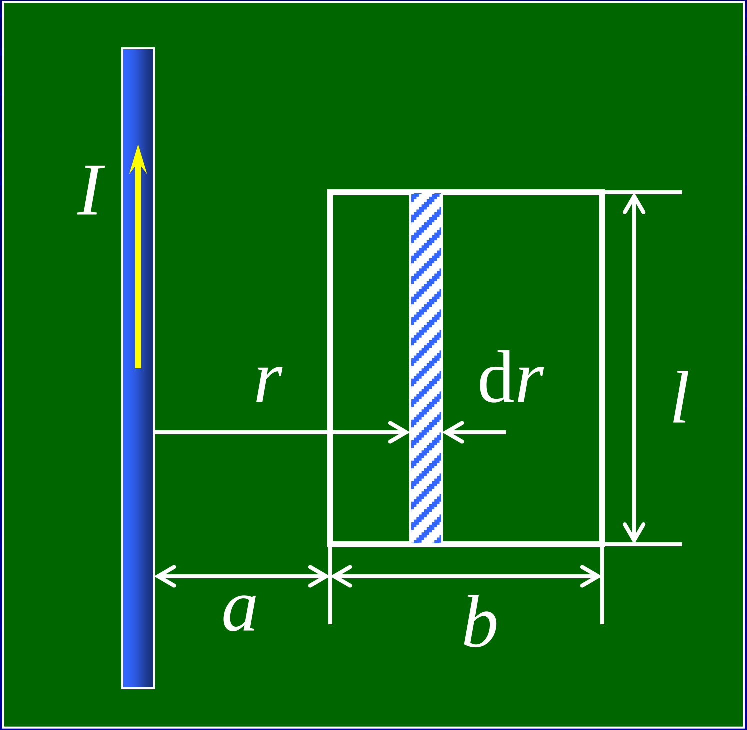
$$L_1 L_2 = \frac{\mu_0^2 N_1^2 N_2^2 S^2}{l^2} = M^2$$

$$M = \sqrt{L_1 L_2}$$

一般情况：$$M = k\sqrt{L_1 L_2}$$

k 称为“**耦合系数**” $\mathbf{0 \le k \le 1}$

例9 在磁导率为μ的均匀无限大的磁介质中，有一无限长直导线，与一边长分别为b和l的矩形线圈在同一平面内，求它们的互感系数。



解：

$$B = \frac{\mu I}{2\pi r}$$

$$\mathrm{d}\Phi = B\mathrm{d}S = \frac{\mu I}{2\pi r} l \mathrm{d}r$$

$$\Phi = \int_a^{a+b} \frac{\mu I l}{2\pi r}\mathrm{d}r = \frac{\mu I l}{2\pi}\ln\frac{a+b}{a}$$

$$M = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu l}{2\pi}\ln\frac{a+b}{a}$$

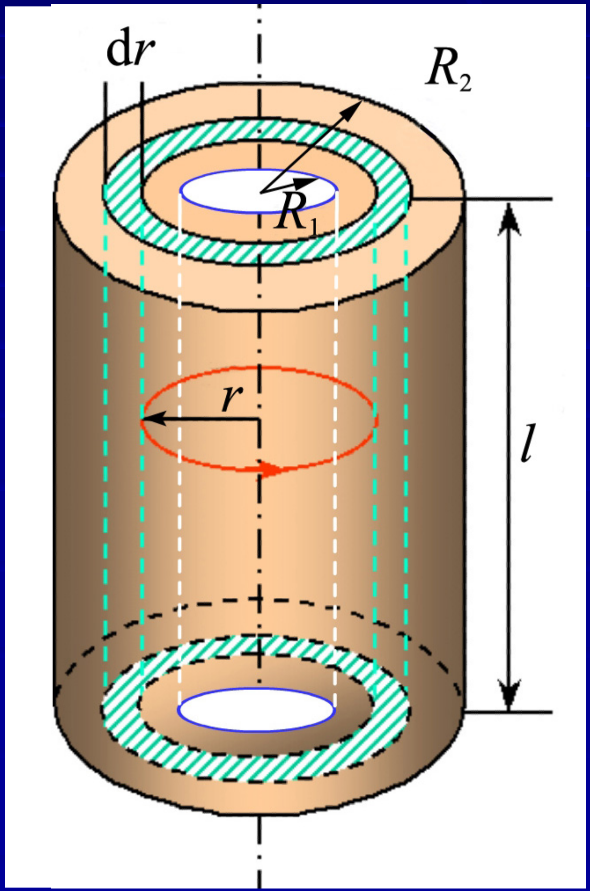
例10　一根长直同轴电缆，由半径为R_1和R_2的两同心圆柱组成，电缆中有恒定电流 I，经内层流进外层流出形成回路。试计算长为l 的一段电缆内的磁场能量。

解：方法一：

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

$$w_{\mathrm{m}} = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{\mu_0 I}{8\pi^2 r^2}$$

$$\mathrm{d}V = 2\pi r l \mathrm{d}r$$



$$W_{\mathrm{m}}=\int_V w_{\mathrm{m}}\mathrm{d}V=\int_{R_1}^{R_2}\frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 r^2}\cdot 2\pi l r\mathrm{d}r$$

$$=\frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi}\int_{R_1}^{R_2}\frac{\mathrm{d}r}{r}\quad=\frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

方法二:

先计算自感系数 $$L=\frac{\mu_0 l}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

$$W_{\mathrm{m}}=\frac{1}{2}LI^2=\frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

例1 杨氏双缝的间距为0.2 mm，距离屏幕为1m。

（1） 若第一到第四明纹距离为7.5 mm，求入射光波长；

（2） 若入射光的波长为600 nm，求相邻两明纹的间距。

解

$$x = \pm \frac{D}{d} k\lambda \qquad (k = 0,1,2,\cdots)$$

$$\Delta x_{1,4} = x_4 - x_1 = \frac{D}{d}(k_4 - k_1)\lambda$$

$$\lambda = \frac{d}{D} \cdot \frac{\Delta x_{1,4}}{k_4 - k_1} = \frac{0.2\times 10^{-3}}{1}\frac{7.5\times 10^{-3}}{4-1}\,\mathrm{m} = 5\times 10^{-7}\,\mathrm{m} = 500\mathrm{nm}$$

$$\Delta x = \frac{D}{d}\lambda = \frac{1\times 6\times 10^{-7}}{0.2\times 10^{-3}}\,\mathrm{m} = 3\times 10^{-3}\,\mathrm{m} = 3\,\mathrm{mm}$$

例2 无线电发射台的工作频率为1500kHz，两根相同的垂直偶极天线相距400m，并以相同的相位做电振动。试问：在距离远大于400m的地方，什么方向可以接受到比较强的无线电信号？

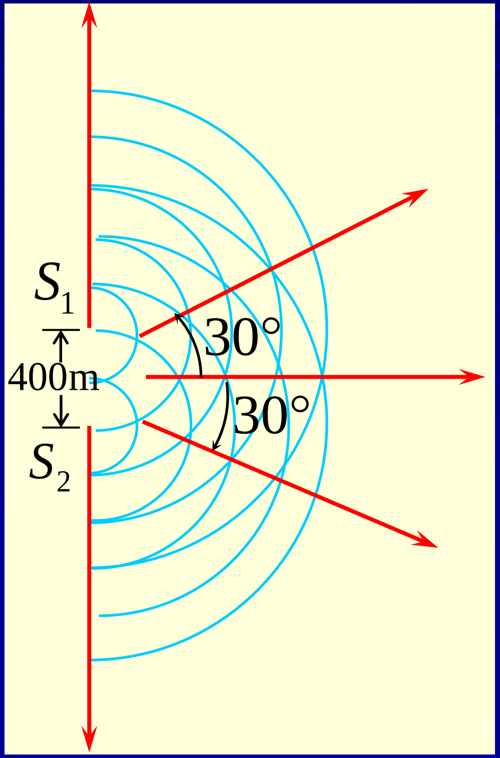
解：

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{3\times10^{8}\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}}{1.5\times10^{6}\,\mathrm{s^{-1}}} = 200\,\mathrm{m}$$

$$\sin\theta = \pm\frac{k\lambda}{d} = \frac{\pm k\cdot 200}{400} = \pm\frac{k}{2}$$

取 $k = 0$，1，2

得 $\theta = 0, \pm 30°, \pm 90°$



例3 用薄云母片（$n = 1.58$）覆盖在杨氏双缝的其中一条缝上，这时屏上的零级明纹移到原来的第七级明纹处。如果入射光波长为550 nm，问云母片的厚度为多少？

解： P 点为七级明纹位置

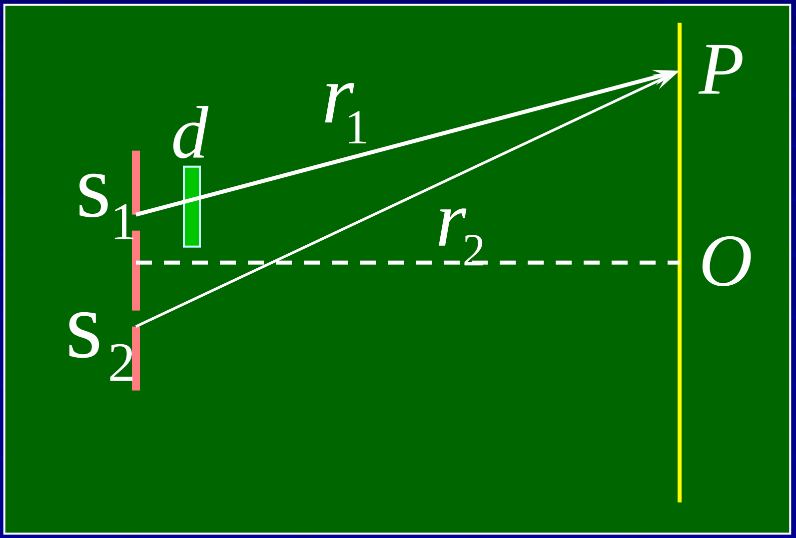
$$r_2 - r_1 = 7\lambda$$

插入云母后，P点为零级明纹

$$r_2 - \left(r_1 - d + nd\right) = 0$$

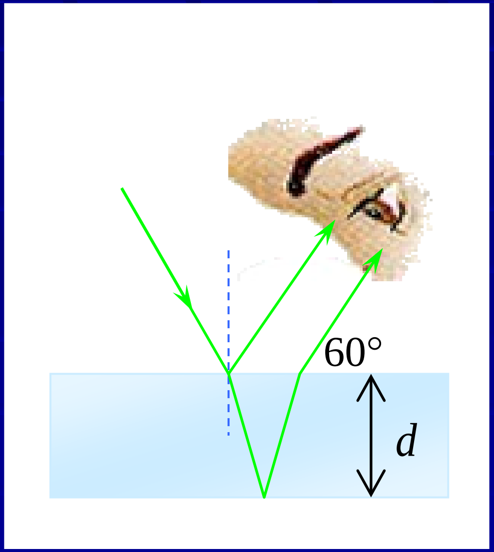
$$7\lambda = (n-1)d$$

$$d = \frac{7\lambda}{n-1} = \frac{7 \times 5500 \times 10^{-10}}{1.58 - 1}\,\mathrm{m} = 6.6 \times 10^{-6}\,\mathrm{m}$$



例4 用波长为550nm的黄绿光照射到一肥皂膜上，沿与膜面成60°角的方向观察到膜面最亮。已知肥皂膜折射率为1.33，求此膜至少是多厚？若改为垂直观察，求能够使此膜最亮的光波长。

解： 空气折射率$n_1 \approx 1$，肥皂膜折射率$n_2 = 1.33$。$i = 30°$



反射光加强条件：

$$\delta = 2d\sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 i} + \frac{\lambda}{2} = k\lambda$$

解得：

$$d = \frac{k\lambda - \frac{\lambda}{2}}{2\sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 i}}$$

肥皂膜的最小厚度（**$k=1$**）

$$d=\frac{\lambda}{4\sqrt{n_2^2-n_1^2\sin^2 i}}$$

$$=\frac{550\times10^{-9}\,\mathrm{m}}{4\sqrt{1.33^2-1^2\sin^2 30^\circ}}=1.22\times10^{-7}\,\mathrm{m}$$

垂直入射 反射光加强条件： $\delta=2n_2d+\frac{\lambda}{2}=k\lambda$

$$\lambda=\frac{2n_2d}{k-\frac{1}{2}}$$

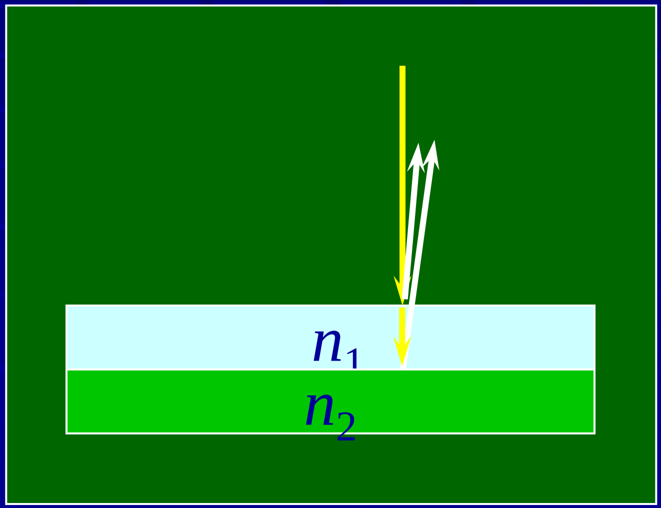
$k=1,\quad \lambda_1=649.0\,\mathbf{nm}$ 红

$k=2,\quad \lambda_2=216.3\,\mathbf{nm}$ 不可见光

例5 平面单色光垂直照射在厚度均匀的油膜上，油膜覆盖在玻璃板上。光源波长可以连续变化，波长为500 nm与700 nm 时光在反射中消失。油膜的折射率为1.30，玻璃折射率为1.50，求油膜的厚度。

解：

$$2n_1 d = \frac{2k+1}{2}\lambda_1$$



$$2n_1 d = \frac{2(k-1)+1}{2}\lambda_2$$

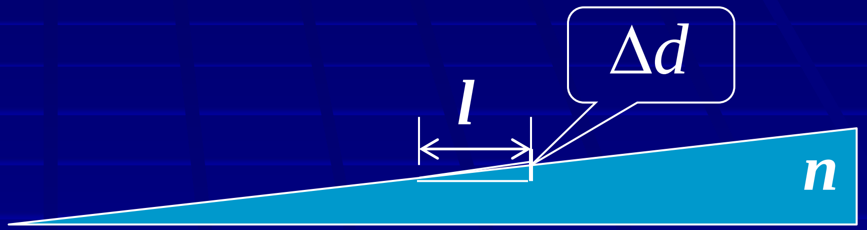
$$\therefore (2k+1)\frac{\lambda_1}{2} = (2k-1)\frac{\lambda_2}{2}$$

$$\therefore k = 3 \qquad d = 6.73\times 10^{-4}\,\mathrm{mm}$$

例6　有一玻璃劈尖，夹角 $\theta = 8\times10^{-6}$ rad，放在空气中。波长 $\lambda = 0.589$ μm 的单色光垂直入射时，测得相邻干涉条纹的宽度为 $l = 2.4$ mm，求玻璃的折射率。

解:

$$\Delta d = \frac{\lambda}{2n}$$



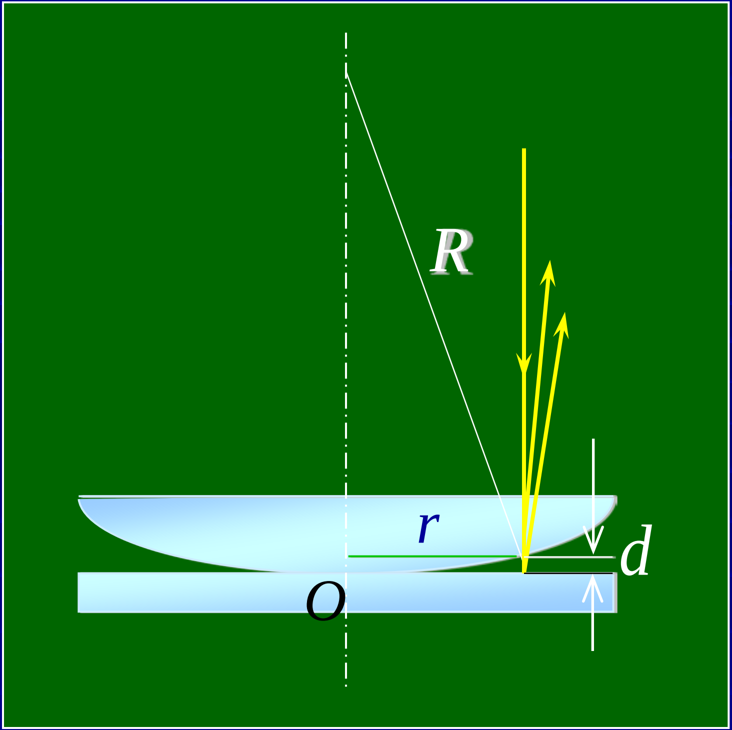
$$\theta = \frac{\Delta d}{l} = \frac{\lambda}{2nl}$$

$$n = \frac{\lambda}{2\theta l} = \frac{5.89\times10^{-7}}{2\times8\times10^{-5}\times2.4\times10^{-3}} = 1.53$$

2. 牛顿环

$$2d+\frac{\lambda}{2}=k\lambda \quad \text{明纹}$$

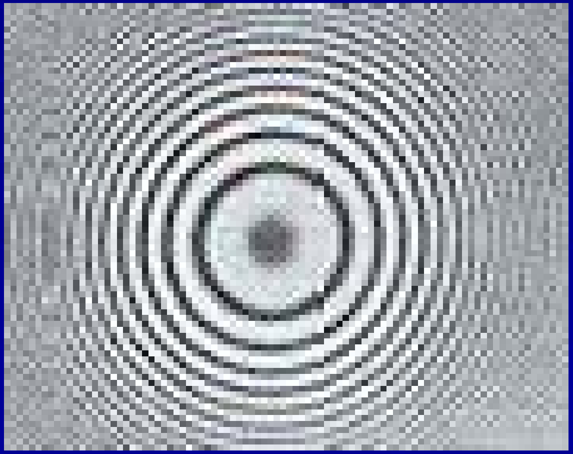
$$2d+\frac{\lambda}{2}=(2k+1)\frac{\lambda}{2} \quad \text{暗纹}$$



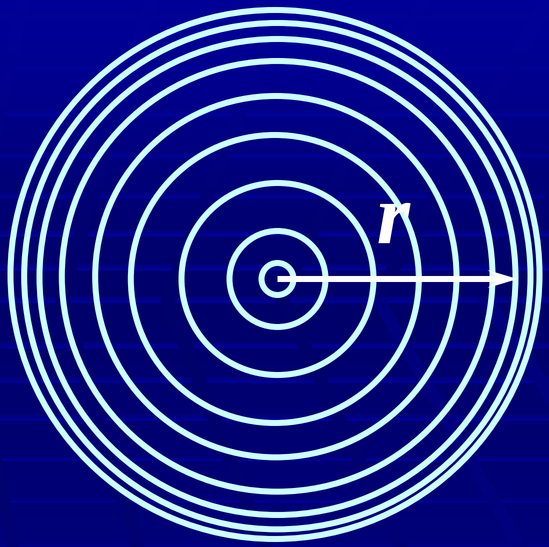
$$r^2=R^2-(R-d)^2=2Rd-d^2$$

$$\because \quad R>>d \rightarrow 2Rd>>d^2$$

$$d=\frac{r^2}{2R}$$



牛顿环半径公式：



$$r=\sqrt{\frac{(2k-1)R\lambda}{2}} \qquad (k=1,2,\cdots) \qquad \text{明环}$$

$$r=\sqrt{kR\lambda} \qquad (k=0,1,2,\cdots) \qquad \text{暗环}$$

例8 波长为546 nm的平行光垂直照射在 b = 0.437 mm 的单缝上，缝后有焦距为40 cm的凸透镜，求透镜焦平面上出现的衍射中央明纹的宽度。

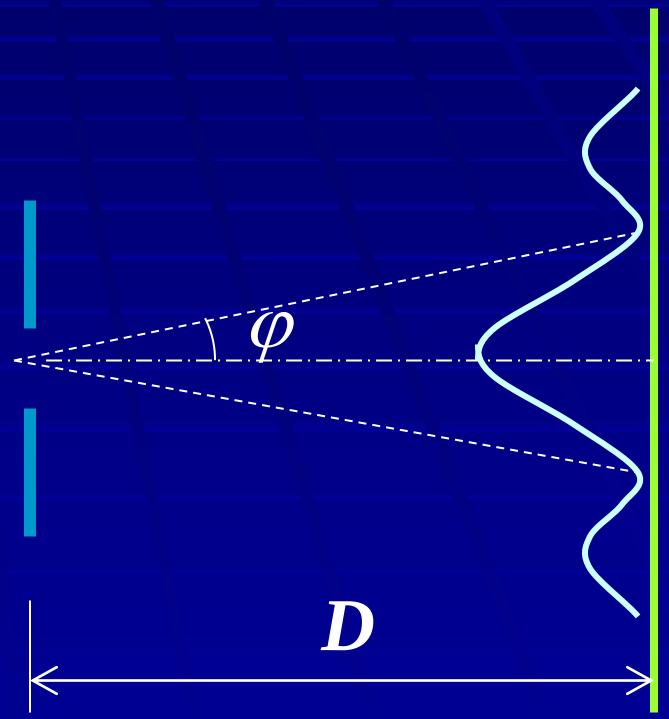
解: 一级暗纹: $b\sin\varphi = \lambda$

$$\varphi \approx \sin\varphi = \frac{\lambda}{b}$$

$$\therefore L = 2x = 2D \cdot \tan\varphi$$

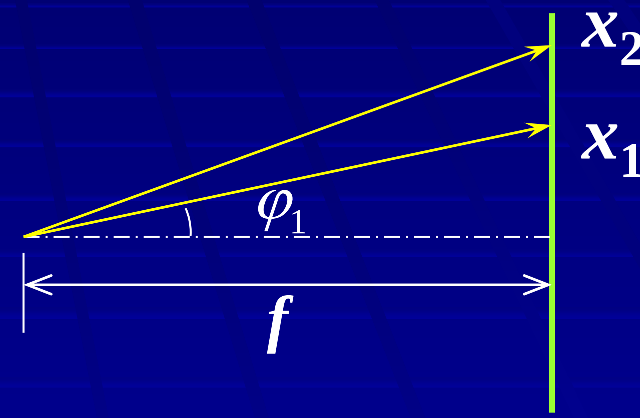
$$\approx 2D\varphi \approx \frac{2\lambda D}{b}$$

$$= 1.0 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}$$



例11　波长为500 nm和520 nm的两种单色光同时垂直入射在光栅常数为0.002 cm的光栅上，紧靠光栅后用焦距为2 m的透镜把光线聚焦在屏幕上。求这两束光的第三级谱线之间的距离。

解： $(b+b')\sin\varphi = k\lambda$



$$\sin\varphi_1 = \frac{3\lambda_1}{b+b'} \qquad \sin\varphi_2 = \frac{3\lambda_2}{b+b'}$$

$$x_1 = f\cdot\tan\varphi_1 \qquad x_2 = f\cdot\tan\varphi_2 \qquad \sin\varphi \approx \tan\varphi$$

$$\Delta x = f(\tan\varphi_2 - \tan\varphi_1) = f\left(\frac{3\lambda_2}{b+b'} - \frac{3\lambda_1}{b+b'}\right) = 0.006\ \mathrm{m}$$

例12　用波长为$\lambda = 600$ nm的单色光垂直照射光栅，观察到第二级、第三级明纹分别出现在$\sin\theta = 0.20$ 和$\sin\theta = 0.30$ 处，第四级缺级。计算:（1）光栅常数；（2）狭缝的最小宽度；（3）列出全部条纹的级数。

解:

(1) $$(b+b') = \frac{k\lambda}{\sin\theta} = \frac{2\times 6000\times 10^{-10}}{0.2}\,\mathrm{m} = 6\times 10^{-6}\,\mathrm{m}$$

(2) $$(b+b')/b = m \qquad \therefore b = \frac{(b+b')}{m} = \frac{(b+b')}{4} = 1.5\times 10^{-6}\,\mathbf{m}$$

(3) $$k = \frac{b+b'}{\lambda}\sin\varphi = \frac{6\times 10^{-6}\times 1}{6\times 10^{-7}} = 10 \qquad (\varphi = 90^\circ)$$

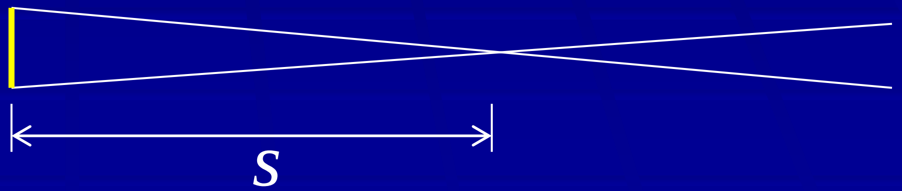
$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 5, \pm 6, \pm 7, \pm 9$$

例10 在通常亮度下，人眼的瞳孔直径为3 mm，问：人眼分辨限角为多少？（$\lambda = 550$ nm ）。如果窗纱上两根细丝之间的距离为2.0 mm，问：人在多远恰能分辨。

解： $$\theta_0 = 1.22\frac{\lambda}{D}$$

$$= 1.22 \times \frac{5500\times10^{-10}}{3\times10^{-3}}\,\text{rad} = 2.2\times10^{-4}\,\text{rad} \approx 1'$$

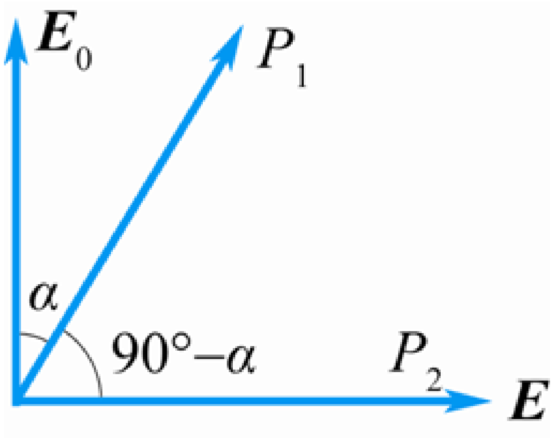
$$\because \theta_0 = \frac{l}{s}$$



$$\therefore s = \frac{l}{\theta_0} = \frac{2.0\times10^{-3}}{2.2\times10^{-4}}\,\mathbf{m} = 9.1\,\mathbf{m}$$

例1. 要使一束线偏振光通过偏振片后振动方向转过90°，至少需要让这束光通过几块理想偏振片？在此情况下，透射光强最大是原来光强的多少倍？

解　至少需要两块理想偏振片(如图所示). 其中P_1透光轴与线偏振光振动方向的夹角为 α，第二块偏振片透光轴与P_1透光轴夹角为(90° − α). 设入射线偏振光原来的光强为I_0，则透射光强



$$I = I_0\cos^2\alpha\cos^2(90°-\alpha) = I_0\cos^2\alpha\sin^2\alpha = \frac{I_0}{4}\sin^2 2\alpha$$

当2α＝90°，即 α＝45° 时，$I = I_{\max} = \dfrac{I_0}{4}$

例2 一束光由自然光和线偏振光组成，使它通过一偏振片。转动偏振片，透射光的强度可以变化到五倍。求入射光中自然光和线偏振光的强度各占入射光强度的几分之几?

解： 设入射光强度：I_0；

其中自然光强度：I_{10}；偏振光强度：I_{20}

$$I_o = I_{10} + I_{20}$$

设通过偏振片后的光强分别为：I，I_1，I_2

$$I_1 = \frac{1}{2} I_{10} \qquad\qquad I_2 = I_{20}\cos^2\alpha$$

$$I = I_1 + I_2 = \frac{1}{2} I_{10} + I_{20} \cos^2 \alpha$$

$$\alpha = 0, \pi \text{ 时}: I = I_{\max} = \frac{1}{2} I_{10} + I_{20}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \text{ 时}: I = I_{\min} = \frac{1}{2} I_{10}$$

$$I_{\max} = 5 I_{\min} \rightarrow \frac{1}{2} I_{10} + I_{20} = 5 \times \frac{1}{2} I_{10} \rightarrow I_{20} = 2 I_{10}$$

$$\frac{I_{10}}{I_0} = \frac{I_{10}}{I_{10} + I_{20}} = \frac{1}{3} \qquad \frac{I_{20}}{I_0} = \frac{2}{3}$$

布儒斯特定律：当自然光以布儒斯特角入射到两不同介质的界面时，其反射光为线偏振光，光振动垂直于入射面。

$$i_0 + \gamma = \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore \tan i_0 = \frac{\sin i_0}{\cos i_0} = \frac{\sin i_0}{\sin \gamma} = \frac{n_2}{n_1}$$

★**布儒斯特角：** $$\boxed{\tan i_0 = \frac{n_2}{n_1}}$$