第五章　大数定律及中心极限定理

1. 据以往经验，某种电器元件的寿命服从均值为 100 h 的指数分布，现随机地取 16 只，设它们的寿命是相互独立的. 求这 16 只元件的寿命的总和大于 1 920 h 的概率.

解　以 X_i $(i=1,2,\cdots,16)$ 记第 i 只元件的寿命，以 T 记16 只元件寿命的总和：$T=\sum_{i=1}^{16}X_i$，按题设 $E(X_i)=100, D(X_i)=100^2$，由中心极限定理知 $\dfrac{T-16\times100}{\sqrt{16}\ \sqrt{100^2}}$ 近似地服从$N(0,1)$ 分布，故所求概率为

$$\begin{aligned}P\{T>1\,920\}&=1-P\{T\leqslant 1\,920\}\\&=1-P\left\{\frac{T-16\times100}{\sqrt{16}\ \sqrt{100^2}}\leqslant\frac{1\,920-16\times100}{\sqrt{16}\ \sqrt{100^2}}\right\}\\&\approx1-\Phi\left(\frac{1\,920-1\,600}{400}\right)=1-\Phi(0.8)\\&=1-0.788\,1=0.211\,9.\end{aligned}$$

2. (1) 一保险公司有 10 000 个汽车投保人，每个投保人索赔金额的数学期望为 280 美元，标准差为 800 美元，求索赔总金额超过 2 700 000 美元的概率.

(2) 一公司有 50 张签约保险单，各张保险单的索赔金额为 $X_i, i=1,2,\cdots,50$(以千美元计) 服从韦布尔(Weibull) 分布，均值 $E(X_i)=5$，方差 $D(X_i)=6$，求 50 张保险单索赔的合计金额大于 300 的概率(设各保险单索赔金额是相互独立的).

解　(1) 记第 i 人的索赔金额为 X_i，则由已知条件

$$E(X_i)=280,\qquad D(X_i)=800^2.$$

要计算

$$p_1=P\left(\sum_{i=1}^{10\,000}X_i>2\,700\,000\right),$$

因各投保人索赔金额是独立的，$n=10\,000$ 很大. 故由中心极限定理，近似地有

$$\bar{X}=\frac{1}{10\,000}\sum_{i=1}^{10\,000}X_i\sim N\left(280,\frac{800^2}{100^2}\right),$$

故　$$p_1=P(\bar{X}>270)\approx1-\Phi\left(\frac{270-280}{8}\right)=1-\Phi\left(-\frac{5}{4}\right)$$

$$=\Phi\left(\frac{5}{4}\right)=\Phi(1.25)=0.894\,4.$$

(2) $E(X_i)=5, D(X_i)=6, n=50$. 故

$$p=P\left(\sum_{i=1}^{50}X_i>300\right)\approx 1-\Phi\left(\frac{300-50\times 5}{\sqrt{50\times 6}}\right)$$

$$=1-\Phi\left(\frac{50}{\sqrt{300}}\right)=1-\Phi(2.89)=0.001\,9.$$

这与情况(1)相反.(1)的概率为0.894 4表明可能性很大.而(2)表明可能性太小了,大约500次索赔中出现 >300 的只有一次.

3. 计算器在进行加法时,将每个加数舍入最靠近它的整数,设所有舍入误差相互独立且在$(-0.5,0.5)$上服从均匀分布.

(1) 将1 500个数相加,问误差总和的绝对值超过15的概率是多少?

(2) 最多可有几个数相加使得误差总和的绝对值小于10的概率不小于0.90?

解　设第 k 个加数的舍入误差为 $X_k(k=1,2,\cdots,1\,500)$,已知 X_k 在$(-0.5,0.5)$上服从均匀分布,故知 $E(X_k)=0, D(X_k)=\frac{1}{12}$.

(1) 记 $X=\sum_{k=1}^{1\,500}X_k$,由中心极限定理,当 n 充分大时有近似公式

$$P\left\{\frac{\sum_{k=1}^{1\,500}X_k-1\,500\times 0}{\sqrt{1\,500}\sqrt{1/12}}\leqslant x\right\}\approx\Phi(x).$$

于是

$$\begin{aligned}P\{|X|>15\}&=1-P\{|X|\leqslant 15\}=1-P\{-15\leqslant X\leqslant 15\}\\&=1-P\left\{\frac{-15-0}{\sqrt{1\,500}\sqrt{1/12}}\leqslant\frac{X-0}{\sqrt{1\,500}\sqrt{1/12}}\leqslant\frac{15-0}{\sqrt{1\,500}\sqrt{1/12}}\right\}\\&\approx 1-\left[\Phi\left(\frac{15}{\sqrt{1\,500}\sqrt{1/12}}\right)-\Phi\left(\frac{-15}{\sqrt{1\,500}\sqrt{1/12}}\right)\right]\\&=1-\left[2\Phi\left(\frac{15}{\sqrt{1\,500/12}}\right)-1\right]=1-[2\Phi(1.342)-1]\\&=2[1-0.909\,9]=0.180\,2.\end{aligned}$$

即误差总和的绝对值超过15的概率近似地为0.180 2.

(2) 设最多有 n 个数相加,使误差总和 $Y=\sum_{k=1}^{n}X_k$ 符合要求,即要确定 n,使

$$P\{|Y|<10\}\geqslant 0.90.$$

由中心极限定理,当 n 充分大时有近似公式

$$P\left\{\frac{Y-0}{\sqrt{n}\sqrt{1/12}}\leqslant x\right\}\approx\Phi(x).$$

于是 $$P\{|Y|<10\}=P\{-10<Y<10\}$$
$$=P\left\{\frac{-10}{\sqrt{n}\ \sqrt{1/12}}<\frac{Y}{\sqrt{n}\ \sqrt{1/12}}<\frac{10}{\sqrt{n}\ \sqrt{1/12}}\right\}$$
$$\approx\Phi\left(\frac{10}{\sqrt{n/12}}\right)-\Phi\left(\frac{-10}{\sqrt{n/12}}\right)=2\Phi\left(\frac{10}{\sqrt{n/12}}\right)-1.$$

因而 n 需满足 $$2\Phi\left(\frac{10}{\sqrt{n/12}}\right)-1\geqslant 0.90,$$

亦即 n 需满足 $$\Phi\left(\frac{10}{\sqrt{n/12}}\right)\geqslant 0.95=\Phi(1.645),$$

即 n 应满足 $$\frac{10}{\sqrt{n/12}}\geqslant 1.645,$$

由此得 $$n\leqslant 443.45.$$

因 n 为正整数，因而所求的 n 为 443. 故最多只能有 443 个数加在一起，才能使得误差总和的绝对值小于 10 的概率不小于 0.90.

4. 设各零件的重量都是随机变量，它们相互独立，且服从相同的分布，其数学期望为 0.5 kg，均方差为 0.1 kg，问 5 000 个零件的总重量超过 2 510 kg 的概率是多少？

解　以 X_i $(i=1,2,\cdots,5\ 000)$ 记第 i 个零件的重量，以 W 记 5 000 个零件的总重量：$W=\sum_{i=1}^{5\ 000}X_i$. 按题设 $E(X_i)=0.5$，$D(X_i)=0.1^2$，由中心极限定理，可知 $\dfrac{W-5\ 000\times 0.5}{\sqrt{5\ 000}\times 0.1}$ 近似地服从 $N(0,1)$ 分布，故所求概率为

$$P\{W>2510\}=1-P\{W\leqslant 2\ 510\}$$
$$=1-P\left\{\frac{W-5\ 000\times 0.5}{\sqrt{5\ 000}\times 0.1}\leqslant\frac{2\ 510-5\ 000\times 0.5}{\sqrt{5\ 000}\times 0.1}\right\}$$
$$\approx 1-\Phi\left(\frac{2\ 510-5\ 000\times 0.5}{\sqrt{5\ 000}\times 0.1}\right)=1-\Phi(\sqrt{2})$$
$$=1-0.921\ 3=0.078\ 7.$$

5. 有一批建筑房屋用的木柱，其中 80% 的长度不小于 3 m，现从这批木柱中随机地取 100 根，求其中至少有 30 根短于 3 m 的概率.

解　按题意，可认为 100 根木柱是从为数甚多的木柱中抽取得到的，因而可当作放回抽样来看待. 将检查一根木柱看它是否短于 3 m 看成是一次试验，检查 100 根木柱相当于做 100 重伯努利试验. 以 X 记被抽取的 100 根木柱中长度短于 3 m 的根数，则 $X\sim b(100,0.2)$. 于是由教材第五章 §2 定理三得

$$P\{X\geqslant 30\}=P\{30\leqslant X<\infty\}$$

$$= P\left\{\frac{30-100\times 0.2}{\sqrt{100\times 0.2\times 0.8}} \leqslant \frac{X-100\times 0.2}{\sqrt{100\times 0.2\times 0.8}} < \frac{\infty-100\times 0.2}{\sqrt{100\times 0.2\times 0.8}}\right\}$$

$$\approx \Phi(\infty) - \Phi\left(\frac{30-20}{\sqrt{16}}\right)$$

$$= 1-\Phi(2.5) = 1-0.993\,8 = 0.006\,2.$$

本题也可以这样做，引入随机变量：

$$X_k = \begin{cases} 1, & \text{若第 } k \text{ 根木柱短于 3 m}, \\ 0, & \text{若第 } k \text{ 根木柱不短于 3 m}, \end{cases} \quad k = 1,2,\cdots,100.$$

于是 $E(X_k) = 0.2, D(X_k) = 0.2\times 0.8$. 以 X 表示 100 根木柱中短于 3 m 的根数，则 $X = \sum_{k=1}^{100} X_k$. 由中心极限定理有

$$P\{X \geqslant 30\} = P\{30 \leqslant X < \infty\}$$

$$= P\left\{\frac{30-100\times 0.2}{\sqrt{100}\,\sqrt{0.2\times 0.8}} \leqslant \frac{\sum_{k=1}^{100} X_k - 100\times 0.2}{\sqrt{100}\,\sqrt{0.2\times 0.8}} < \frac{\infty-100\times 0.2}{\sqrt{100}\,\sqrt{0.2\times 0.8}}\right\}$$

$$\approx \Phi(\infty) - \Phi\left(\frac{30-20}{\sqrt{16}}\right) = 1-\Phi(2.5) = 0.006\,2.$$

6. 一工人修理一台机器需两个阶段，第一阶段所需时间(小时)服从均值为 0.2 的指数分布，第二阶段服从均值为 0.3 的指数分布，且与第一阶段独立. 现有 20 台机器需要修理，求他在 8 小时内完成的概率.

解　设修理第 $i\ (i=1,2,\cdots,20)$ 台机器，第一阶段耗时 X_i，第二阶段为 Y_i，则共耗时 $Z_i = X_i + Y_i$，今已知 $E(X_i) = 0.2, E(Y_i) = 0.3$，故 $E(Z_i) = 0.5$. $D(Z_i) = D(X_i) + D(Y_i) = 0.2^2 + 0.3^2 = 0.13$. 20 台机器需要修理的时间可认为近似服从正态分布，即有

$$\sum_{i=1}^{20} Z_i \sim N(20\times 0.5, 20\times 0.13) = N(10, 2.6).$$

所求概率　$p = P\left(\sum_{i=1}^{20} Z_i \leqslant 8\right) \approx \Phi\left(\dfrac{8-20\times 0.5}{\sqrt{20\times 0.13}}\right)$

$$= \Phi\left(-\frac{2}{1.612\,5}\right) = \Phi(-1.24) = 0.107\,5,$$

即不大可能在 8 小时内完成全部工作.

7. 一食品店有三种蛋糕出售，由于售出哪一种蛋糕是随机的，因而售出一只蛋糕的价格是一个随机变量，它取 1 元、1.2 元、1.5 元各个值的概率分别为 0.3、0.2、0.5. 若售出 300 只蛋糕.

(1) 求收入至少 400 元的概率;

(2) 求售出价格为1.2 元的蛋糕多于 60 只的概率.

解 设第 i 只蛋糕的价格为 $X_i, i=1,2,\cdots,300$,则 X_i 有分布律为

X_i	1	1.2	1.5
p_k	0.3	0.2	0.5

由此得

$$E(X_i)=1\times 0.3+1.2\times 0.2+1.5\times 0.5=1.29,$$

$$E(X_i^2)=1^2\times 0.3+1.2^2\times 0.2+1.5^2\times 0.5=1.713,$$

故 $$D(X_i)=E(X_i^2)-[E(X_i)]^2=0.048\,9.$$

(1) 以 X 表示这天的总收入,则 $X=\sum_{i=1}^{300}X_i$,由中心极限定理得

$$\begin{aligned}P\{X\geqslant 400\}&=P\{400\leqslant X<\infty\}\\&=P\left\{\frac{400-300\times 1.29}{\sqrt{300}\ \sqrt{0.048\,9}}\leqslant\frac{\sum_{i=1}^{300}X_i-300\times 1.29}{\sqrt{300}\ \sqrt{0.0489}}\right.\\&\qquad\left.<\frac{\infty-300\times 1.29}{\sqrt{300}\ \sqrt{0.048\,9}}\right\}\\&\approx 1-\Phi(3.39)=1-0.999\,7=0.000\,3.\end{aligned}$$

(2) 以 Y 记 300 只蛋糕中售价为 1.2 元的蛋糕的只数,于是 $Y\sim b(300, 0.2)$. $E(Y)=300\times 0.2$, $D(Y)=300\times 0.2\times 0.8$,由棣莫弗-拉普拉斯定理得

$$\begin{aligned}P\{Y>60\}&=1-P\{Y\leqslant 60\}\\&=1-P\left\{\frac{Y-300\times 0.2}{\sqrt{300\times 0.2\times 0.8}}\leqslant\frac{60-300\times 0.2}{\sqrt{300\times 0.2\times 0.8}}\right\}\\&\approx 1-\Phi\left(\frac{60-300\times 0.2}{\sqrt{300\times 0.2\times 0.8}}\right)=1-\Phi(0)=0.5.\end{aligned}$$

8. 一复杂的系统由 100 个相互独立起作用的部件所组成,在整个运行期间每个部件损坏的概率为 0.10. 为了使整个系统起作用,至少必须有 85 个部件正常工作,求整个系统起作用的概率.

解 将观察一个部件是否正常工作看成是一次试验,由于各部件是否正常工作是相互独立的,因而观察 100 个部件是否正常工作是做 100 重伯努利试验,以 X 表示 100个部件中正常工作的部件数,则 $X\sim b(100,0.9)$,按题意需求概率 $P\{X\geqslant 85\}$,由棣莫弗-拉普拉斯定理知 $\dfrac{X-100\times 0.9}{\sqrt{100\times 0.9\times 0.1}}$ 近似地服从标准正态分布 $N(0,1)$,故所求概率为

$$P\{X \geqslant 85\} = P\{85 \leqslant X < \infty\}$$
$$= P\left\{\frac{85-100\times0.9}{\sqrt{100\times0.9\times0.1}} \leqslant \frac{X-100\times0.9}{\sqrt{100\times0.9\times0.1}} \leqslant \frac{\infty-100\times0.9}{\sqrt{100\times0.9\times0.1}}\right\}$$
$$\approx 1-\Phi\left(-\frac{5}{3}\right) = 0.952\ 5.$$

9. 已知在某十字路口，一周事故发生数的数学期望为 2.2，标准差为1.4.

(1) 以 $\overline{X}$ 表示一年(以 52 周计) 此十字路口事故发生数的算术平均，试用中心极限定理求 $\overline{X}$ 的近似分布，并求 $P\{\overline{X}<2\}$.

(2) 求一年事故发生数小于 100 的概率.

解 (1) $E(\overline{X}) = E(X) = 2.2$，

$$D(\overline{X}) = \frac{D(X)}{52} = \frac{1.4^2}{52},$$

由中心极限定理，可认为 $\overline{X} \sim N(2.2, 1.4^2/52)$.

$$P\{\overline{X}<2\} = \Phi\left(\frac{2-2.2}{1.4/\sqrt{52}}\right) = \Phi\left(\frac{-0.2\times\sqrt{52}}{1.4}\right) = \Phi(-1.030)$$
$$= 1-\Phi(1.030) = 1-0.848\ 5 = 0.151\ 5.$$

(2) 一年 52 周，设各周事故发生数为 $X_1, X_2, \cdots, X_{52}$. 则需计算 $p = P\left\{\sum_{i=1}^{52} X_i < 100\right\}$，即 $P\{52\overline{X}<100\}$. 用中心极限定理可知所求概率为

$$p = P\{52\overline{X}<100\} = P\left\{\overline{X}<\frac{100}{52}\right\} \approx \Phi\left[\frac{\left(\frac{100}{52}-2.2\right)\sqrt{52}}{1.4}\right]$$
$$= \Phi(-1.426) = 1-0.923\ 0 = 0.077\ 0.$$

10. 某种小汽车氧化氮的排放量的数学期望为 0.9 g/km，标准差为 1.9 g/km，某汽车公司有这种小汽车 100 辆，以 $\overline{X}$ 表示这些车辆氧化氮排放量的算术平均，问当 L 为何值时 $\overline{X}>L$ 的概率不超过 0.01.

解 设以 X_i $(i=1,2,\cdots,100)$ 表示第 i 辆小汽车氧化氮的排放量，则

$$\overline{X} = \frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100} X_i.$$

由已知条件 $E(X_i) = 0.9, D(X_i) = 1.9^2$ 得

$$E(\overline{X}) = 0.9, \quad D(\overline{X}) = \frac{1.9^2}{100}.$$

各辆汽车氧化氮的排放量相互独立，故可认为近似地有

$$\bar{X} \sim N\left(0.9, \frac{1.9^2}{100}\right).$$

需要计算的是满足

$$P\{\bar{X} > L\} \leqslant 0.01$$

的最小值 L. 由中心极限定理

$$P\{\bar{X} > L\} = P\left\{\frac{\bar{X}-0.9}{0.19} > \frac{L-0.9}{0.19}\right\} \leqslant 0.01.$$

L 应为满足

$$1-\Phi\left(\frac{L-0.9}{0.19}\right) \leqslant 0.01$$

的最小值，即

$$\Phi\left(\frac{L-0.9}{0.19}\right) \geqslant 0.99 = \Phi(2.33),$$

即
$$\frac{L-0.9}{0.19} \geqslant 2.33,$$

故
$$L \geqslant 0.9 + 0.19 \times 2.33 = 1.3427,$$

应取 $L = 1.3427$ g/km.

11. 随机地选取两组学生，每组 80 人，分别在两个实验室里测量某种化合物的 pH. 各人测量的结果是随机变量，它们相互独立，服从同一分布，数学期望为 5，方差为 0.3，以 $\bar{X}, \bar{Y}$ 分别表示第一组和第二组所得结果的算术平均.

(1) 求 $P\{4.9 < \bar{X} < 5.1\}$.

(2) 求 $P\{-0.1 < \bar{X} - \bar{Y} < 0.1\}$.

解　由题设 $E(\bar{X}) = 5, D(\bar{X}) = D(\bar{Y}) = 0.3/80$.

(1) 由中心极限定理知 $\bar{X}$ 近似服从 $N(5, 0.3/80)$，故

$$\begin{aligned}
&P\{4.9 < \bar{X} < 5.1\} \\
&= P\left\{\frac{4.9-5}{\sqrt{0.3/80}} < \frac{\bar{X}-5}{\sqrt{0.3/80}} < \frac{5.1-5}{\sqrt{0.3/80}}\right\} \\
&\approx \Phi\left(\frac{5.1-5}{\sqrt{0.3/80}}\right) - \Phi\left(\frac{4.9-5}{\sqrt{0.3/80}}\right) \\
&= 2\Phi(1.63) - 1 = 2 \times 0.9484 - 1 = 0.8968.
\end{aligned}$$

(2) 因 $E(\bar{X}-\bar{Y}) = E(\bar{X}) - E(\bar{Y}) = 0, D(\bar{X}-\bar{Y}) = D(\bar{X}) + D(\bar{Y}) = 0.3/40$，由中心极限定理

$$P\{-0.1 < \bar{X} - \bar{Y} < 0.1\}$$

$$=P\left\{\frac{-0.1-0}{\sqrt{0.3/40}}<\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-0}{\sqrt{0.3/40}}<\frac{0.1-0}{\sqrt{0.3/40}}\right\}$$

$$\approx\Phi\left(\frac{0.1-0}{\sqrt{0.3/40}}\right)-\Phi\left(\frac{-0.1-0}{\sqrt{0.3/40}}\right)$$

$$=2\Phi(1.15)-1=2\times0.8749-1=0.7498.$$

12. 一公寓有 200 户住户，一户住户拥有汽车辆数 X 的分布律为

X	0	1	2
p_k	0.1	0.6	0.3

问需要多少车位，才能使每辆汽车都具有一个车位的概率至少为 0.95.

解 设需要车位数为 n，且设第 i $(i=1,2,\cdots,200)$ 户有车辆数为 X_i，则由 X_i 的分布律知

$$E(X_i)=0\times0.1+1\times0.6+2\times0.3=1.2,$$

$$E(X_i^2)=0^2\times0.1+1^2\times0.6+2^2\times0.3=1.8,$$

故 $$D(X_i)=E(X_i^2)-[E(X_i)]^2=1.8-1.2^2=0.36.$$

因共有 200 户，各户占有车位数相互独立. 从而近似地有

$$\sum_{i=1}^{200}X_i\sim N(200\times1.2,\ 200\times0.36).$$

今要求车位数 n 满足

$$0.95\leqslant P\left(\sum_{i=1}^{200}X_i\leqslant n\right),$$

由正态近似知，上式中 n 应满足

$$0.95\leqslant\Phi\left(\frac{n-200\times1.2}{\sqrt{200\times0.36}}\right)=\Phi\left(\frac{n-240}{\sqrt{72}}\right),$$

因 $0.95=\Phi(1.645)$，从而由 $\Phi(x)$ 的单调性知

$$\frac{n-240}{\sqrt{72}}\geqslant1.645,$$

故 $n\geqslant240+1.645\times\sqrt{72}=253.96$. 由此知至少需 254 个车位.

13. 某种电子器件的寿命(小时)具有数学期望 μ(未知)，方差 $\sigma^2=400$. 为了估计 μ，随机地取 n 只这种器件，在时刻 $t=0$ 投入测试(测试是相互独立的)直到失效，测得其寿命为 $X_1,X_2,\cdots,X_n$，以 $\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ 作为 μ 的估计，为使 $P\{|\bar{X}-\mu|<1\}\geqslant0.95$，问 n 至少为多少?

解 由教材第五章 §2 定理一可知，当 n 充分大时，

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \overset{\text{近似地}}{\sim} N(0,1),$$

即

$$\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \overset{\text{近似地}}{\sim} N(0,1).$$

由题设 $D(X_i)=400\ (i=1,2,\cdots,n)$，即有 $\sigma=\sqrt{400}$，于是 $\frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{400}/\sqrt{n}}=\frac{\bar{X}-\mu}{20/\sqrt{n}}$ 近似地服从 $N(0,1)$ 分布，即有

$$\begin{aligned}P\{|\bar{X}-\mu|<1\} &= P\{-1<\bar{X}-\mu<1\}\\ &= P\left\{\frac{-1}{20/\sqrt{n}}<\frac{\bar{X}-\mu}{20/\sqrt{n}}<\frac{1}{20/\sqrt{n}}\right\}\\ &\approx \Phi\left(\frac{1}{20/\sqrt{n}}\right)-\Phi\left(\frac{-1}{20/\sqrt{n}}\right)=2\Phi\left(\frac{1}{20/\sqrt{n}}\right)-1.\end{aligned}$$

现在要求 $P\{|\bar{X}-\mu|<1\}\geqslant 0.95$，即要求

$$2\Phi\left(\frac{1}{20/\sqrt{n}}\right)-1\geqslant 0.95,$$

亦即要求

$$\Phi\left(\frac{1}{20/\sqrt{n}}\right)\geqslant 0.975=\Phi(1.96),$$

故需要

$$\frac{1}{20/\sqrt{n}}\geqslant 1.96,$$

即 $$n\geqslant(20\times 1.96)^2=1\ 536.64.$$

因 n 为正整数，故 n 至少为 1 537.

14. 某药厂断言，该厂生产的某种药品对于医治一种疑难血液病的治愈率为 0.8，医院任意抽查 100 个服用此药品的病人，若其中多于 75 人治愈，就接受此断言，否则就拒绝此断言.

(1) 若实际上此药品对这种疾病的治愈率是 0.8. 问接受这一断言的概率是多少？

(2) 若实际上此药品对这种疾病的治愈率为 0.7，问接受这一断言的概率是多少？

解 由药厂断言来看 100 人中治愈人数 $X\sim b(100,0.8)$.

(1) 在治愈率与实际情况相符合条件下，接受药厂断言的概率即为 $P(X>$

75).由中心极限定理知近似地有 $X \sim N(100\times0.8,\ 100\times0.8\times0.2)=N(80,4^2)$,于是

$$p_1=P(X>75)\approx1-\Phi\left(\frac{75-80}{4}\right)=1-\Phi\left(\frac{-5}{4}\right)$$

$$=\Phi(1.25)=0.8944.$$

(2) 若实际上治疗率为0.7,即 $X\sim b(100,0.7)$,则治愈人数 X 近似地服从正态分布,即有

$$X\sim N(100\times0.7,\ 100\times0.7\times0.3).$$

所求概率

$$p_2=P(X>75)\approx1-\Phi\left(\frac{75-100\times0.7}{\sqrt{100\times0.7\times0.3}}\right)$$

$$=1-\Phi\left(\frac{5}{\sqrt{21}}\right)=1-\Phi(1.09)$$

$$=1-0.862\,1=0.137\,9.$$