# 厦门大学《概率论与数理统计》课程期末试卷

信息学院信息与通信工程系19级计算机类专业

学年学期：2019-2020学年春季学期

主考教师：王　琳　试卷类型：B卷(√)C卷(　)

一、 选择题（在各小题的四个备选答案中选出一个正确答案，填在题后的括号中，本大题共5个小题，每小题3分，总计15分）

1. 设$A,B$为随机事件，则$P(A)=P(B)$的充分必要条件是（）。

A. $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$　　B. $P(AB)=P(A)P(B)$

C. $P(A\overline{B})=P(B\overline{A})$　　D. $P(AB)=P(\overline{A}\overline{B})$

知识点：随机事件定义

答案：C

$$P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)$$

$$P(B\overline{A})=P(B)-P(AB)$$

2. 设随机变量序列$X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$独立同分布，如果（　　），则其不服从辛钦大数定理。

A. $X_1$服从参数为1的泊松分布.　　B. $X_2$在区间$(0,1)$上均匀分布.

C. $X_3$服从参数$(3,0.1)$的二项分布.　　D. $X_n$都服从同一连续型分布.

知识点：　辛钦大数定理

答案：D

辛钦大数定理前提：随机变量独立同分布且数学期望已知

3. 设随机变量$X\sim t(n)(n>1)$，$Y=\dfrac{1}{X^2}$，则（　　　）。

A. $Y\sim\chi^2(n)$　　B. $Y\sim\chi^2(n-1)$　　C. $Y\sim F(n,1)$　　D. $Y\sim F(1,n)$

知识点：三大抽样分布的定义

答案：C

4. 设二维随机变量$(X,Y)$服从二维正态分布，则随机变量$\xi=X+Y$与$\eta=X-Y$不相关的充分必要条件是（　　　）。

A. $E(X)=E(Y)$　　B. $E(X^2)-[E(X)]^2=E(Y^2)-[E(Y)]^2$

C. $E\left(X^2\right)=E\left(Y^2\right)$　　D. $E\left(X^2\right)+\left[E\left(X\right)\right]^2=E\left(Y^2\right)+\left[E\left(Y\right)\right]^2$

知识点：相关系数的定义

答案：B

5. 下列各函数是随机变量分布函数的为（　　）。

A. $F\left(x\right)=\dfrac{1}{1+x^2},-\infty<x<\infty$　　B. $F\left(x\right)=\begin{cases}0 & x<0\\ \dfrac{x}{1+x} & x\ge 0\end{cases}$

C. $F\left(x\right)=e^{-x},-\infty<x<\infty$　　D. $F\left(x\right)=\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{2\pi}\arctan x,-\infty<x<\infty$

知识点：分布函数性质

答案：B

## 二、 计算题（本大题共 5 小题，每小题 15 分，共计 75 分）

1.（1）甲、乙、丙三人独立地向一敌机射击，设甲、乙、丙命中率分别为 0.4、0.5 和 0.7，又设敌机被击中 1 次、2 次、3 次而坠毁的概率分别为 0.2、0.6 和 1.现三人向敌机各射击一次，求敌机坠毁的概率。

（2）按以往某学科考试结果分析，努力学习的学生有90%的可能考试及格，不努力学习的学生有90%的可能考试不及格。据调查，学生中有80%的人是努力学习的，问：考试及格的学生有多大可能是不努力学习的人？

**答案：（1）设 $A_1,A_2,A_3$ 分别表示甲、乙、丙射击击中敌机，**

$Bi=\{敌机被击中i次\}，i=1,2,3.C=\{敌机坠毁\}$ ··································1 分

**由题设可知** $P(A_1)=0.4,P(A_2)=0.5,P(A_3)=0.7$，

$P(C|B_1)=0.2,P(C|B_2)=0.6,P(C|B_3)=1$

**则** $B_1=A_1\overline{A}_2\overline{A}_3\cup\overline{A}_1A_2\overline{A}_3\cup\overline{A}_1\overline{A}_2A_3$

$B_2=\overline{A}_1A_2A_3\cup A_1\overline{A}_2A_3\cup A_1A_2\overline{A}_3$

$B_3=A_1A_2A_3$

**则** $P(B_1)=P(A_1\overline{A}_2\overline{A}_3)+P(\overline{A}_1A_2\overline{A}_3)+P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)$

$=P(A_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{A}_3)+P(\overline{A}_1)P(A_2)P(\overline{A}_3)+P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P(A_3)$

$=0.36$

**同理可得：** $P(B_2)=0.51, P(B_3)=0.14$ **，**······································3 分

**由全概率公式得**

$P(C)=\sum_{i=1}^{3}P(B_i)P(C|B_i)$ ·························································3 分

$=0.36\times0.2+0.51\times0.6+0.14\times1=0.458$ ······································1 分

**（2）设** $A=\{\text{被调查学生是努力学习的}\}$

**则** $\bar{A}=\{\text{被调查学生是不努力学习的}\}$·············································1 分

**依题意得** $P(A)=0.8$，$P(\bar{A})=0.2$ **，**

**又设** $B=\{\text{被调查的学生考试及格}\}$**，依题意得：**

$P(B|A)=0.9$，$P(\bar{B}|\bar{A})=0.9$ ·························································2 分

**故由贝叶斯公式可知：**

$P(\bar{A}|B)=\dfrac{P(\bar{A}B)}{P(B)}=\dfrac{P(\bar{A})P(B|\bar{A})}{P(A)P(B|A)+P(A)P(B|\bar{A})}$ ········································3 分

$=\dfrac{0.2\times0.1}{0.8\times0.9+0.2\times0.1}=\dfrac{1}{37}=0.02702$ ···············································1 分

**即考试及格的学生中不努力学习的学生仅占 2.70。**

2.（1）某种商品一周的需求量是一个随机变量，其概率密度为

$$f(t)=\begin{cases}te^{-t}, t>0\\ 0,\ \text{其他}\end{cases}$$

设各周的需求量是相互独立的。求两周的需求量的概率密度。

（2）计算器在进行加法时，将每个加数舍入最靠近它的整数，设所有舍入误差相互独立且在（-0.5，0.5）上服从均匀分布。运用中心极限定理求：最多可有几个数相加使得误差总和的绝对值小于 10 的概率不小于 0.90?

（$\Phi(1.285)=0.90,\Phi(1.645)=0.95$）

**答案：**

**（1）解：设某种商品在第** $i$ **周的需求量为** $X_i(i=1,2,3)$**，由题设** $X_1,X_2,X_3$ **相互独立，并且有**

$$f_{X_i}(t)=f(t)=\begin{cases} te^{-t}, t>0 \\ 0, \ \text{其他} \end{cases}$$

记两周的需求量为$Z$，即$Z=X_1+X_2$，则$Z$的概率密度为

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)f(z-x)dx$$ ………………………… 2分

由$f(t)$的定义，知仅当

$$\begin{cases} x>0, \\ z-x>0, \end{cases} \text{亦即} \begin{cases} x>0, \\ x<z, \end{cases}$$ ………………………… 2分

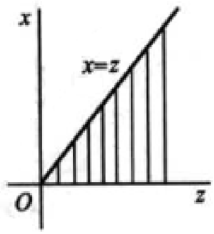
时上述积分的被积函数不等于零。

于是（参见右图）$Z$的概率密度为

$$f_Z(z)=\begin{cases} \int_0^z f(x)f(z-x)dx, & z>0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$=\begin{cases} \int_0^z xe^{-x}(z-x)e^{-(z-x)}dx, & z>0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$=\begin{cases} e^{-z}\int_0^z (xz-x^2)dx=\frac{z^3e^{-z}}{3!}, & z>0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$




· 2分

………………………… 1分

（2）解：设最多有$n$个数相加，使误差总和$Y=\sum_{k=1}^{n}X_k$符合要求，即要确定$n$，使

$$P\{|Y|<10\}\ge 0.90$$ ………………………… 1分

由中心极限定理，当$n$充分大时有近似公式

$$P\left\{\frac{Y-0}{\sqrt{n}\sqrt{1/12}}\le x\right\}\approx\Phi(x)$$ ………………………… 2分

于是

$$P\{|Y|<10\}=P\{-10<Y<10\}$$

$$=P\{\frac{-10}{\sqrt{n}\sqrt{1/12}}<\frac{Y}{\sqrt{n}\sqrt{1/12}}<\frac{10}{\sqrt{n}\sqrt{1/12}}\}$$

$$\approx\Phi(\frac{10}{\sqrt{n/12}})-\Phi(\frac{-10}{\sqrt{n/12}})=2\Phi(\frac{10}{\sqrt{n/12}})-1$$ ………………… 2分

因而$n$需满足 $2\Phi(\frac{10}{\sqrt{n/12}})-1\geq 0.90$

亦即$n$需满足 $\Phi(\frac{10}{\sqrt{n/12}})\geq 0.95=\Phi(1.645)$

即$n$应满足 $\frac{10}{\sqrt{n/12}}\geq 1.645$ ………………… 2 分

由此得 $n\leq 443.45$ ………………… 1 分

因$n$为正整数，因而所求的$n$为 443. 故最多只能有 443 个数加在一起，才能使得误差总和的绝对值小于 10 的概率不小于 0.90.

3. （1）设总体 $X$ 的概率分布为

| X | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $P$ | $1-\theta$ | $\theta-\theta^2$ | $\theta^2$ |

，其中$\theta\in(0,1)$未知. 以$N_i$表示来自总体 $X$ 的简单随机样本（样本容量为$n$）中等于$i$的个数$(i=1,2,3)$. 试求常数$a_1,a_2,a_3$，使$T=\sum_{i=1}^{3}a_iN_i$为$\theta$的无偏估计量，并求$T$的方差.

（2）设总体 $X$ 的概率密度为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\frac{1}{1-\theta},\theta\leq x\leq 1\\ 0,\text{其他}\end{cases}$$

其中$\theta$为未知参数，$X_1,X_2,\ldots,X_n$是来自总体的简单样本. 求参数$\theta$的最大似然估计量.

答案:

（1）根据简单随机样本的性质，样本$X_1,X_2,\cdots X_n$相互独立且与总体 X 同分布，

因此 $P\{X_i=1\}=1-\theta,\quad P\{X_i\neq 1\}=\theta,\quad i=1,2,\cdots,n.$

在那次独立观测中取 1 的个数$N_1$是个随机变量，且$N_1\sim B(n,1-\theta)$. 同理

$N_2\sim B(n,\theta-\theta^2)$, $N_3\sim B(n,\theta^2)$. 2 分

于是

$$\begin{aligned}E(T)&=E\left(\sum_{i=1}^{3}a_iN_i\right)=a_1E(N_1)+a_2E(N_2)+a_3E(N_3)\\&=a_1n(1-\theta)+a_2n(\theta-\theta_2)+a_3n\theta^2\\&=na_1+n(a_2-a_1)\theta+n(a_3-a_2)\theta^2.\end{aligned}$$

若 T 为$\theta$的无偏估计，则$E(T)=\theta$，即

$$\theta=na_1+n(a_2-a_1)\theta+n(a_3-a_2)\theta^2.\quad 3\text{ 分}$$

解得$a_1=0,a_2=a_3=1/n$，　1 分

故$T=\dfrac{N_2+N_3}{n}$.

由于$N_1+N_2+N_3=n$, 于是

$$\begin{aligned}D(T)&=D\left(\frac{N_1+N_2}{n}\right)=D\left(1-\frac{N_1}{n}\right)=\frac{1}{n^2}D(N_1)\\&=\frac{1}{n^2}n(1-\theta)\theta=\frac{(1-\theta)\theta}{n}.\end{aligned}\quad 3\text{ 分}$$

（2）样本$X_1,X_2,\dots,X_n$的观察值记为$x_1,x_2,\dots,x_n$，则似然函数为

$$L(x_1,x_2,\dots,x_n;\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{(1-\theta)^n},\theta\le x_1,x_2,\dots x_n\le 1\\ 0,\qquad \text{其他}\end{cases}\quad 3\text{ 分}$$

由于$L(\theta)$是关于$\theta$的单调递增函数，为了使似然函数达到最大，只要使$\theta$尽量大即可。因此，参数$\theta$的最大似然估计量为：$\hat{\theta}=\min(x_1,x_2,\dots,x_n)$。　3 分

4. 从一批钉子中随机抽取 16 枚，测得其长度（单位：cm）为

2.14，　2.10，　2.13，　2.15，　2.13，　2.12，　2.13，　2.10

2.15，　2.12，　2.14，　2.10，　2.13，　2.11，　2.14，　2.11

假设钉子的长度$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，在下列两种情况下分别求总体均值$\mu$的置信度为 90%的置信区间.（$\Phi(1.645)=0.95$，$t_{0.05}(15)=1.7531$，$t_{0.05}(16)=1.7456$）

（1）已知$\sigma=0.01$；（2）$\sigma$未知.

**答案：**

由观察值可得$\bar{x}=2.125$，$S=0.01713$ • • • • • • • • • • • • • • • • • • 1分

（1）已知 $\sigma = 0.01$，$1-\alpha = 0.90$, $\frac{\alpha}{2} = 0.05$, $n = 16$.

选取随机变量 $U = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0,1)$. ……………………………………………1分

由 $P\{|U| < u_{0.05}\} = 0.90$，$u_{0.95} = 1.645$ ……………………………………………2分

计算 $\bar{x} - \frac{u_{0.95} \times \sigma}{\sqrt{n}} = 2.125 - \frac{1.645 \times 0.01}{\sqrt{16}} = 2.121$

$\bar{x} + \frac{u_{0.95} \times \sigma}{\sqrt{n}} = 2.125 + \frac{1.645 \times 0.01}{\sqrt{16}} = 2.129$

所以置信区间为 $(2.121, 2.129)$. ……………………………………………4分

（2）由于 $\sigma$ 未知，因此用随机变量 $T = \frac{\overline{X} - \mu}{S / \sqrt{n}} \sim t(n-1)$， ……………………1分

由 $P\{|T| < t_{0.05}(n-1)\} = 0.90$，$t_{0.05}(15) = 1.7531$， ……………………………2分

计算得 $\bar{x} - t_{0.05}(15)\frac{S}{\sqrt{n}} = 2.125 - \frac{1.753 \times 0.01713}{\sqrt{16}} = 2.117$

$\bar{x} + t_{0.05}(15)\frac{S}{\sqrt{n}} = 2.125 + \frac{1.753 \times 0.01713}{\sqrt{16}} = 2.133$

故置信区间为 $(2.117, 2.133)$. ……………………………………………………4分

5. （1）设某次考试的学生成绩服从正态分布，从中随机抽取 36 位考生的成绩，算得样本均值 $\bar{X} = 66.5$ 分，样本方差 $S^2 = 15^2$ 分，问在显著性水平 0.05 下，是否可以认为这次考试全体考生的平均成绩为 70 分？并给出检验过程。

（2）设某地区成年人的每日睡眠时间服从正态分布。随机抽取 25 个成年人，随机样本显示平均每日睡眠时间为 8h，样本标准差为 1.8h。试问：在显著性水平 0.05 下，是否可以认为成年人的每日睡眠时间的方差超过 2h？

（$t_{0.025}(35) = 2.03$，$t_{0.05}(35) = 1.69$，$t_{0.025}(36) = 2.028$；

$\chi^2_{0.05}(25) = 37.652$，$\chi^2_{0.05}(24) = 36.415$，$\chi^2_{0.025}(25) = 40.646$，$\chi^2_{0.025}(24) = 39.364$）

答案：（1）设学生成绩为 $X$，则 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

本题要求在水平 $\alpha=0.05$ 下检验假设：

$H_0:\mu=70$; $H_1:\mu\neq 70$ ··································································2 分

采用 t 检验法，取检验统计量 $t=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$，

令 $n=36$，$S^2=15^2$，$\overline{X}=66.5$，$\alpha=0.05$，则 $t_{\alpha/2}(n-1)=t_{0.025}(35)=2.03$. 拒绝域为

$|t|\geq t_{\alpha/2}(n-1)=2.03$ ·····································································3 分

因 $t$ 的观察值 $|t|=\left|\dfrac{66.5-70}{15}\cdot\sqrt{36}\right|=1.4<2.03$，不落在拒绝域内·················2 分

故在水平 $\alpha=0.05$ 下接受 $H_0:\mu=70$ ··························································1 分

（2）设 $H_0:\sigma^2\leq 2$; $H_1:\sigma^2>2$ ························································2 分

选取检验统计量 $\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$

构造拒绝域：$\chi^2\geq\chi_\alpha^2(n-1)$

带入 $n=25$，$\alpha=0.05$，得 $\chi_{0.05}^2(24)=36.415$ ·······································2 分

计算得 $\chi^2=\dfrac{24\times 1.8^2}{2}=38.88>36.415$ ·············································2 分

故拒绝 $H_0$，可以认为成年人每日得睡眠时间的方差超过 2h。··················1 分

## 三、 证明题（本大题共 1 小题，每小题 10 分，共计 10 分）

设 $X_1,X_2,\cdots X_n$ 是独立同分布的随机变量，且 $X_1$ 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases}xe^{-x},x>0\\0,x\leq 0\end{cases}$。

证明：$P\left(0<\sum_{i=1}^{n}X_i<4n\right)\geq\dfrac{2n-1}{2n}$

答案：$\because X_1$，$X_2,\cdots,X_n$ 是独立同分布的随机变量

$\therefore f(X_1)=f(X_2)=\cdots=f(X_n)$.

$$\therefore E(X_i)=E(X_1)=\int_0^{+\infty} xf(X_1)dx=\int_0^{+\infty} x^2e^{-x}dx$$

$$=-x^2e^{-x}\Big|_0^{+\infty}+2\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx=2$$ ……………………………………2 分

$$E(X_i^2)=E(X_1^2)=\int_0^{+\infty} x^2f(X_1)dx=\int_0^{+\infty} x^3e^{-x}dx$$

$$=-x^3e^{-x}\Big|_0^{+\infty}+3\int_0^{+\infty} x^2e^{-x}dx=6$$ ……………………………………2 分

$$\therefore D(X_i)=E(X_i^2)-\left(E(X_i)\right)^2=6-4=2$$ ……………………………………………1 分

由切比雪夫不等式得：

$$P\left\{\left|\sum_{i=1}^{n}X_i-nE(X_i)\right|\geq 2n\right\}\leq\frac{nD(X_i)}{(2n)^2}$$ ……………………………………………2 分

$$\Rightarrow P\left\{\left|\sum_{i=1}^{n}X_i-nE(X_i)\right|<2n\right\}\geq 1-\frac{nD(X_i)}{(2n)^2}$$ ……………………………………1 分

$$\therefore p\left\{\left|\sum_{i=1}^{n}X_i-2n\right|<2n\right\}\geq 1-\frac{2n}{4n^2}$$

$$\Rightarrow P\left\{\left|\sum_{i=1}^{n}X_i-nE(X_i)\right|<2n\right\}\geq 1-\frac{nD(X_i)}{(2n)^2}$$ ……………………………………2 分