厦门大学《概率论与数理统计》课程

期中试题·答案

考试日期：2011　　　信息学院自律督导部整理

答题说明:

理工类学生从前九个题中选八个题答

旅游、企管、财务系学生答七、八题以外的八个题。

以下解题过程需要用到以下数据：($\Phi(1.667)=0.95$，$\Phi(0.84)=0.8$)

一、(15 分) 抓阄问题的公平性问题

抓阄是在机会稀缺时人们公平获得机会的常用方法，假定 n 个人抓阄，n 个阄中只有一个阄是“中奖”的，其它都不中奖，常见的抓阄方式有:

(1) 同时开阄：抓阄时每个人先按任意顺序抓一个阄，全部抓完后，再同时将 n 个阄打开看，看其是否中奖;

(2) 即时开阄：n 个人按任意顺序依次抓阄，每个人抓完阄后立即打开看，当某个人抓到“中奖阄”时，整个抓阄过程就结束了。

试问这两种抓阄方式都公平吗？（讨论每个人抓到“中奖阄”的概率）。

解：令 A_k 表示“第 k 个人抓到了中奖阄”事件，$1\le k\le n$

(1) 以“同时开阄”的形式抓阄，第 $k(1\le k\le n)$ 个人抓到“中奖阄”的概率为 $P(A_k)$

则由古典概率的算法，$P(A_k)=\dfrac{(n-1)!\times 1}{n!}=\dfrac{1}{n}$，此概率不依赖于 k，与 k 无关，所以“同时开阄”这种方式可以认为是公平的;

(2) 以“即时开阄”的形式抓阄。

解法 1：利用古典概率的算法:

将 n 个阄编号，不妨假设 1 号阄是“中奖阄”，现在仅考虑第 k 个人抓到的阄号。令 ω_1 表示第 k 个抓阄的人抓到了 1 号阄，ω_2 表示第 k 个抓阄的人抓到了 2 号阄，…,

ω_n表示第 k 个抓阄的人抓到了 n 号阄，所以本问题的样本空间为$\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots\omega_n\}$，显然其中的每个基本事件发生都是等可能的，所以依照古典概率的算法有：$P(A_k)=\frac{1}{n}$，$1\le k\le n$。此概率也与 k 无关，所以"即时开阄"也应该是公平的。

解法 2：显然第一人抓到"中奖阄"的概率为$P(A_1)=\frac{1}{n}$，

由于$A_2\subset\overline{A}_1$，$A_2=\overline{A}_1\bigcap A_2$，则第二人抓到"中奖阄"的概率为

$$P(A_2)=P(\overline{A}_1A_2)=P(\overline{A}_1)P(A_2\mid\overline{A}_1)=\frac{n-1}{n}\times\frac{1}{n-1}=\frac{1}{n}$$

同理由于 $A_K\subset\overline{A}_1\overline{A}_2\cdots\overline{A}_{k-1}$，第$k(1\le k\le n)$个人抓到"中奖阄"的概率$P(A_k)$为

$$P(A_k)=P(\overline{A}_1\overline{A}_2\cdots\overline{A}_{k-1}A_K)=P(\overline{A}_1\overline{A}_2\cdots\overline{A}_{k-1})P(A_k\mid\overline{A}_1\overline{A}_2\cdots\overline{A}_{k-1})$$

$$=P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2\mid\overline{A}_1)\cdots P(\overline{A}_{k-1}\mid\overline{A}_1\overline{A}_2\cdots\overline{A}_{k-2})P(A_k\mid\overline{A}_1\overline{A}_2\cdots\overline{A}_{k-1})$$

$$=\frac{n-1}{n}\times\frac{n-2}{n-1}\times\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{1}{n-k+1}=\frac{1}{n}$$

此概率也与 k 无关，所以"即时开阄"也应该是公平的。

另外由全概率公式和数学归纳法也可以讨论此问题。（略）

二、（15 分）在有 50 人参加的登山活动中，假设每个人意外受伤的概率是 1%，每个人是否意外受伤是相互独立的。(1) 计算没有人意外受伤的概率；(2) 计算至少有一个人意外受伤的概率；（3）为保证不发生意外的概率大于 90%，应当如何控制参加人数？

解：用A_j $j=1,2,\cdots,50$表示第 j 个人没有意外受伤，则$A_1,A_2,\cdots,A_{50}$相互独立，依题意有$P(A_j)=1-0.1=0.99$.

（1） $B=\bigcap_{j=1}^{50}A_j$ 表示没有人意外受伤，$P(B)=P(\bigcap_{j=1}^{50}A_j)=0.99^{50}\approx0.605$；

（2） $\overline{B}$ 表示至少有一人意外受伤，$P(\overline{B})=1-P(B)\approx0.395$；

（3）假设控制参加登山的人数为 m 人可以满足要求，则有

$$P(\bigcap_{j=1}^{m}A_j)=\prod_{j=1}^{m}P(A_j)=0.99^m\ge0.90$$

取对数后得到 $m\ln 0.99 \ge \ln 0.9$，于是解出 $m \le \dfrac{\ln 0.9}{\ln 0.99} \approx 10.48$，

所以控制参加登山的人数在 10 人之内，便能保证不发生意外的概率大于 90%。

三、（10 分）某学生在毕业时向两个相互无关的用人单位递交了求职信，根据经验，他被第一个单位录用的概率为 0.4，被第二个单位录用的概率是 0.5,。现在知道他至少被某个单位录用了，计算他也被另一单位录用的概率。

解：用 A_1, A_2 分别表示他被第 1 单位和第 2 个单位录用这两个事件，则依题意，A_1, A_2 独立，且 $P(A_1)=0.4, P(A_2)=0.5$。已知此学生被某个单位录用，等价于事件"$A_1 \cup A_2$"发生，则所求的概率为条件概率 $P(A_1A_2 \mid A_1 \cup A_2)$，于是有

$$P(A_1A_2 \mid A_1 \cup A_2) = \frac{P(A_1A_2)}{P(A_1 \cup A_2)} = \frac{P(A_1)P(A_2)}{P(A_1)+P(A_2)-P(A_1)P(A_2)}$$

$$= \frac{0.4 \times 0.5}{0.4+0.5-0.4\times 0.5} = \frac{2}{7}$$

四、（10 分）科学技术发展到今天，任何国家的导弹发射基地都不能躲过敌方的侦察。为了有效地保存自己的导弹发射装置，大多都采用了构建真假导弹发射井的方法。假设 A 国的 100 个发射井中有 10 个发射井是发射导弹的真井，另外 90 个是假井。在对 A 国的第一波精确打击中，至少要摧毁多少个发射井，才能以 90%的概率保证对方的真井全被摧毁。

解：假设至少要摧毁 n 个发射井，才能以 90%的概率保证对方的真井全被摧毁。

观察查验每口被摧毁的发射井是否是真井，我们把它当做一次试验，在此试验中，若是真井就相当于"成功"事件发生，若是假井就算"失败"事件发生。

用 X 表示在第一波精确打击中，被摧毁的这 n 个井中的真井的个数，则 $X \sim b(n, 0.1)$，依题意有 $P(X=10) > 90\%$

于是 $$P(X=10) = C_n^{10}(0.1)^{10}(0.9)^{n-10} > 90\%$$ （若得出此式，就得满分）

验算得 n=99，满足要求，即至少要摧毁 99 个发射井，才能以 90%的概率保证对方的真井全被

摧毁。

五、(15 分)设随机变量 X 服从正态分布 $N(2,\sigma^2)$，且 $P(2<X<4)=0.3$，

求(1) $P(X<0)$；(2) σ.

解：(1) 由正态分布密度函数的对称性（关于 x=2 直线对称）知，$P(X>4)=P(X<0)$，

$P(0<X<2)=P(2<X<4)$，由 $P(X<0)+P(X>4)+P(0<X<4)=1$，

得 $2P(X<0)+2P(2<X<4)=1$

所以 $2P(X<0)=1-2P(2<X<4)=1-2\times 0.3=0.4$，故 $P(X<0)=0.2.$

(2) 由 $0.2=P(X<0)=P(\frac{X-2}{\sigma}<\frac{-2}{\sigma})=\Phi(\frac{-2}{\sigma})=1-\Phi(\frac{2}{\sigma})$，得 $\Phi(\frac{2}{\sigma})=0.8$，

故 $\frac{2}{\sigma}=0.84$，即 $\sigma=\frac{2}{0.84}=2.38$。

六、(10 分)设 X 服从参数为 λ 指数分布，其密度函数为 $f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x\ge 0\\ 0 & 其它\end{cases}$，求

$$Y=\begin{cases}X，当X\ge 1\\ X^2, 当X<1\end{cases}$$

的概率密度函数 $f_Y(y)$.

解：设 $F_Y(y)$ 表示随机变量 Y 的分布函数

当 $y\le 0$ 时，$F_Y(y)=P(Y\le y)=0$；

当 $0<y\le 1$ 时，$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(X^2\le y)=P(-\sqrt{y}\le X\le\sqrt{y})$

$$=P(0<X\le\sqrt{y})=\int_0^{\sqrt{Y}}\lambda e^{-\lambda x}dx$$

当 $y>1$ 时，$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(Y\le 1)+P(1<Y\le y)=P(Y\le 1)+\int_1^y\lambda e^{-\lambda x}dx$

所以 $f_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases}0 & y\le 0\\ \dfrac{\lambda e^{-\lambda\sqrt{y}}}{2\sqrt{y}} & 0<y\le 1\\ \lambda e^{-\lambda y} & y>1\end{cases}$。

七、(15 分)设一部手机在时间段[0,t]内收到的短信数服从泊松分布 $P(\lambda)$，其中 $\lambda=\mu t$，μ 是正数。每个短信是否是广告短信与其到达的时间独立，也与其它短信是否是广告短信独立。如

果每个短信是广告短信的概率 $p>0$，（1）已知[0,t]内收到了 n 个短信，求其中广告短信数的概率分布；（2）计算[0,t]内收到的广告短信数的概率分布；（3）证明在[0,t]内到达的广告短信数和非广告短信数相互独立。

解：（1）设在[0,t]内收到的短信数是 Y，收到的广告数是 X，依题意 $Y \sim P(\lambda)$，每收到一个短信相当于作一次试验，遇到广告是试验成功，收到其它短信算失败。若在[0,t]内收到 n 个短信，相当于作了 n 次独立试验，每次试验成功的概率是 p，根据二项分布知道，其中收到的广告数 X 的概率分布是

$$h_k = P(X=k \mid Y=n) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, 0 \le k \le n$$

（2）由于 $\{Y=j\}, j=0,1,\cdots$ 是完备事件组，所以由全概率公式得到 X 的概率分布

$$P(X=k) = \sum_{n=k}^{\infty} P(Y=n)P(X=k \mid Y=n) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= \sum_{n=k}^{\infty} \frac{[\lambda(1-p)]^{n-k}}{k!(n-k)!} e^{-\lambda} (\lambda p)^k = \frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{-\lambda} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{[\lambda(1-p)]^j}{j!}$$

$$= \frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{-\lambda} e^{\lambda(1-p)} = \frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{-\lambda p}, k=0,1,2,\cdots$$

所以 X 服从泊松分布 $P(\lambda p)$。

（3）收到的非广告短信数 $Z=Y-X$，由（2）同理知，$Z \sim P(\lambda q), q=1-p$。

$$P(X=k，Z=j) = P(X=k，Y-X=j) = P(X=k，Y=j+k)$$

$$= P(Y=j+k)P(X=k \mid Y=j+k)$$

$$= \frac{\lambda^{j+k}}{(j+k)!} e^{-\lambda} C_{j+k}^k p^k (1-p)^j = \frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{-\lambda p} \frac{(\lambda q)^j}{j!} e^{-\lambda q}$$

$$= P(X=k)P(Z=j)$$

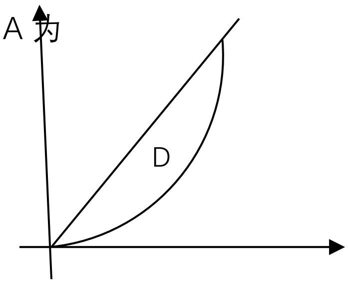
所以在[0,t]内到达的广告短信数和非广告短信数相互独立。

八、(20 分) 设(X,Y)在由曲线 $y=\frac{x^2}{2}$ 和 $y=x$ 所围的有限区域内均匀分布，

（1）求(X,Y)的联合密度；（2）计算边缘密度 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$；（3）X 与 Y 是否独立；

（4）条件密度 $f_{X|Y}(x\,|\,y)$，$P(X\ge\frac{3}{4}|Y=\frac{1}{2})$；（5） $E(X),E(Y),DX,DY.$

解：（1）由曲线 $y=\frac{x^2}{2}$ 和 $y=x$ 所围的有限区域的面积 A 为



$$A=\iint\limits_D dxdy=\int_0^2 dx\int_{\frac{x^2}{2}}^{x}dy=\int_0^2(x-\frac{x^2}{2})dx\int_{\frac{x^2}{2}}^{x}dy=\frac{2}{3}$$

于是(X,Y)的联合密度是

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{2}{3} & (x,y)\in D\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

（2） $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_{x^2/2}^{x}\frac{2}{3}dy & 0\le x\le 2\\ 0 & \text{其它}\end{cases}=\begin{cases}\frac{2}{3}(x-\frac{x^2}{2}) & 0\le x\le 2\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$，

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_{y}^{\sqrt{2y}}\frac{2}{3}dx & 0\le y\le 2\\ 0 & \text{其它}\end{cases}=\begin{cases}\frac{2}{3}(\sqrt{2y}-y) & 0\le y\le 2\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

（3）由于 $f(x,y)\ne f_X(x)f_Y(y)$，所以 X 与 Y 不独立。

（4）当 $0<y<2$ 时，条件密度为 $f_{X|Y}(x\,|\,y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\frac{1}{\sqrt{2y}-y},\ y\le x\le\sqrt{2y}$，

$$P(X\ge\frac{3}{4}|Y=\frac{1}{2})=\int_{\frac{3}{4}}^{1}f_{X|Y}(x\,|\,y=\frac{1}{2})dx=\int_{\frac{3}{4}}^{1}2dx=\frac{1}{2}$$

（5） $E(X)=\int_0^2 x\cdot\frac{2}{3}(x-\frac{x^2}{2})dx=\frac{4}{9}$， $E(Y)=\int_0^2 y\cdot\frac{2}{3}(\sqrt{2y}-y)dy=\frac{16}{45}$

$E(X^2)=\int_0^2 x^2\cdot\frac{2}{3}(x-\frac{x^2}{2})dx=\frac{8}{15}$， $E(Y^2)=\int_0^2 y^2\cdot\frac{2}{3}(\sqrt{2y}-y)dy=\frac{8}{21}$

$$DX=EX^2-(EX)^2=\frac{8}{15}-(\frac{4}{9})^2=\frac{136}{405},$$

$$DY=EY^2-(EY)^2=\frac{8}{21}-(\frac{16}{45})^2=\frac{3608}{2205\times 7}=\frac{3608}{15435}.$$

九、（10 分）设商店每销售一吨大米获利 a 元，每库存一吨大米损失 b 元，假设大米的销售量 Y(单位：吨)服从参数为 λ 的指数分布，其密度函数为 $f(y)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda y} & y\ge 0\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$，问库存多少吨大

米才能获得最大的平均利润。

解：设所求的大米库存量为 N 吨，则所获得的利润函数为

$$Q(N,Y)=\begin{cases} aY-b(N-Y), & Y<N \\ aN, & Y\ge N \end{cases}$$

所求的平均利润为

$$q(N)=E[Q(N,Y)]=\int_{-\infty}^{+\infty}Q(N,y)f(y)dy=\int_{0}^{N}[ay-b(N-y)]f(y)dy+\int_{N}^{+\infty}aNf(y)dy$$

$$=\int_{0}^{N}[(a+b)y-bN]\lambda e^{-\lambda y}dy+aN\int_{N}^{+\infty}\lambda e^{-\lambda y}dy$$

$$=\frac{(a+b)(1-e^{-\lambda N})}{\lambda}-bN$$

由 $q'(N)=(a+b)e^{-\lambda N}-b=0$，得到 $q(N)$ 的唯一的极值点 $N=\frac{1}{\lambda}\ln(\frac{a+b}{b})$，

再由 $q''(N)=-(a+b)\lambda e^{-\lambda N}<0$ 知道，$N=\frac{1}{\lambda}\ln(\frac{a+b}{b})$ 是 $q(N)$ 的唯一的最大值点。

于是库存 $N=\frac{1}{\lambda}\ln(\frac{a+b}{b})$ 吨大米可以获得最大平均利润。

十、（10 分）某办公室每月平均支付 350 元的电话费，若已知每月电话费的标准差是 30 元，

（1） 试估算下个月至少支付 400 元电话费的概率；（2）如果已知每月的电话费服从正态分布 $N(350,30^2)$，估算（1）中的概率。($\Phi(1.667)=0.95$)

解：用 X 表示该办公室每个月支付的电话费，依题意有 EX=350，DX=30^2.

（1）由切比雪夫不等式可得

$$P(X>400)=P(X-350>50)\le P(|X-350|>50)$$

$$\le\frac{DX}{50^2}=\frac{30^2}{50^2}=0.36$$

（2） 由正态分布可得

$$P(X>400)=P(X-350>50)\le P(\frac{X-350}{30}>\frac{50}{30})=1-P(\frac{X-350}{30}\le\frac{5}{3})$$

$$=1-\Phi(\frac{5}{3})=1-\Phi(1.667)\approx 1-0.96=0.05。$$