厦门大学《微积分 I-1》课程期末试卷

试卷类型：（理工类 A 卷）　考试日期　2019.01.16

得　分	
评阅人	

一、求下列的定积分（每小题 6 分，共 18 分）：

1. $\int_{-3}^{1} \frac{x}{1+\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x$；

2. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\sin x}{1+\cos x}\,\mathrm{d}x$；

3. $\int_{0}^{1} x\cdot\arccos x\,\mathrm{d}x$。

二、求下列的不定积分（每小题 6 分，共 12 分）：

得　分	
评阅人	

1. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x(1+\ln x)}$；

2. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2-1}}$。

三、（8 分）求反常积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x+\sqrt{x})(1+x)}$。

得　分	
评阅人	

四、（8 分）设 $f(x)=\int_x^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$，求定积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x+1)e^x\cdot f(x)\,\mathrm{d}x$。

得　分	
评阅人	

五、（10 分）求函数 $f(x)=5\sqrt{4+x^2}-3x$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上的极值和最值，并判定其图形的凹凸性。

得　分	
评阅人	

六、（8 分）试求常数 a 和 b，使得当 $x \to 0$ 时，函数 $f(x) = x - a\sin x - b\sin 2x$ 是关于 x 的 5 阶无穷小。

得　分	
评阅人	

七、（8 分）求心形线 $\rho=1+\cos\theta$， $0 \le \theta \le 2\pi$ 的长度 s。

得　分	
评阅人	

八、（14 分）过坐标原点作曲线 $y=e^x$ 的切线，该切线与曲线 $y=e^x$ 及 y 轴围成平面图形 D，试求：

得　分	
评阅人	

（1）平面图形 D 的面积 A;

（2）平面图形 D 绕 y 轴旋转一周所形成的旋转体的体积 V。

九、（8 分）设非负函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，且 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=0$。证明：在区间 $[a,b]$ 上 $f(x)\equiv 0$。

得　分	
评阅人	

十、（6 分）设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，其值域为 I。函数 $\varphi(u)$ 在 I 上二阶可导，且对于 I 上任意的一点 u 都有 $\varphi''(u)\geq 0$ 。

证明 Jensen 不等式：$\varphi(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x)\leq \frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi(f(x))\,\mathrm{d}x$ 。

得　分	
评阅人	