用矩母函数证明中心极限定理

正态分布的矩母函数：随机变量 X 服从均值为μ，方差为σ^2的正态分布，矩母函数为

$$M_X(t)=e^{\mu t+\frac{\sigma^2 t^2}{2}}$$

标准正态分布 Z 的矩母函数为

$$M_Z(t)=e^{\frac{t^2}{2}}$$

要证明中心极限定理，只要证明独立同分布随机变量的标准化和Z_N的矩母函数与标准正态分布的矩母函数相同即可。

$$Z_N=\frac{\bar{X}_N-\mu}{\sigma/\sqrt{N}}, \qquad \bar{X}_N=\frac{X_1+X_2+\cdots+X_N}{N}$$

I. 特殊情况证明，X_n 服从独立同分布的泊松分布。泊松分布的矩母函数$M_X(t)$

$$M_X(t)=e^{\lambda(e^t-1)}$$

证明： 对于标准化变量 Z_N的矩母函数为：

$$M_{Z_N}(t)=M_{\frac{X_1+X_2+\cdots+X_N-N\mu}{\sigma\sqrt{N}}}(t)$$

$$=M_{\sum\frac{X-\mu}{\sigma\sqrt{N}}}(t)$$

$$=\prod_{n=1}^{N}M_{\frac{X-\mu}{\sigma\sqrt{N}}}(t)$$

$$=\prod_{n=1}^{N}e^{\frac{-\mu t}{\sigma\sqrt{N}}}M_x\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{N}}\right)$$

$$=\prod_{n=1}^{N}e^{\frac{-\mu t}{\sigma\sqrt{N}}}e^{\lambda\left(e^{\frac{t}{\sigma\sqrt{N}}}-1\right)}$$

上式中第四个等号是由于 $M_{\frac{X+b}{a}}(t)=e^{\frac{bt}{a}}M_X(\frac{t}{a})$

$e^{\frac{t}{\sigma\sqrt{N}}}-1$ 展开为

$e^{\frac{t}{\sigma\sqrt{N}}}-1=\frac{t}{\sigma\sqrt{N}}+\frac{t^2}{2!\sigma^2 N}+\frac{t^3}{3!\sigma^3 N\sqrt{N}}+\cdots$ 代入前式，有

$$
\begin{aligned}
M_{Z_N}(t)&=\prod_{n=1}^{N}e^{\frac{-\mu t}{\sigma\sqrt{N}}}e^{\lambda\left(e^{\frac{t}{\sigma\sqrt{N}}}-1\right)}\\
&=\prod_{n=1}^{N}e^{\frac{-\mu t}{\sigma\sqrt{N}}}e^{\lambda\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{N}}+\frac{t^2}{2!\sigma^2 N}+\frac{t^3}{3!\sigma^3 N\sqrt{N}}+\cdots\right)}\\
&=\prod_{n=1}^{N}e^{\mu\left(\frac{t^2}{2!\sigma^2 N}+\frac{t^3}{3!\sigma^3 N\sqrt{N}}+\cdots\right)}\\
&=\prod_{n=1}^{N}e^{\frac{\mu t^2}{2\sigma^2 N}+\frac{\mu t^3}{3!\sigma^3 N\sqrt{N}}+\cdots}
\end{aligned}
$$

由于泊松分布的均值和方差都是 λ，所以忽略高阶项得到

$$M_{Z_N}(t)=\prod_{n=1}^{N}e^{\frac{\mu t^2}{2\sigma^2 N}}=\prod_{n=1}^{N}e^{\frac{t^2}{2N}}=e^{\frac{t^2}{2}}$$

II. **一般分布的证明：独立同分布，且有均值 μ 方差 σ^2**

由前面的推导，有

$$
\begin{aligned}
M_{Z_N}(t)&=\prod_{n=1}^{N}e^{\frac{-\mu t}{\sigma\sqrt{N}}}M_x(\frac{t}{\sigma\sqrt{N}})\\
&=e^{\frac{-\mu\sqrt{N}t}{\sigma}}\prod_{n=1}^{N}M_x(\frac{t}{\sigma\sqrt{N}})\\
&=e^{\frac{-\mu\sqrt{N}t}{\sigma}}M_x(\frac{t}{\sigma\sqrt{N}})^N
\end{aligned}
$$

对上式两边取对数有，

$$\ln M_{Z_N}(t)=\frac{-\mu\sqrt{N}t}{\sigma}+N\ln M_x(\frac{t}{\sigma\sqrt{N}})$$

由于有

$$\begin{aligned}
&M_X(t)=E\{e^{Xt}\}=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{xt}f(x)dx\\
&=\int_{-\infty}^{+\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k t^k}{k!}f(x)dx=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}\int_{-\infty}^{+\infty}x^k f(x)dx\\
&=1+\mu t+\mu_2\frac{t^2}{2!}+\cdots=1+t\left(\mu+\mu_2\frac{t}{2!}+\cdots\right)
\end{aligned}$$

$$M_X(t)-1=t\left(\mu+\mu_2\frac{t}{2!}+\cdots\right)$$

函数$\ln(u+1)$展开为:

$$\ln(u+1)=u-\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{3!}-\cdots$$

令 $M_X(t)-1=u$

$$\ln M_X(t)=\ln\left[\left(M_X(t)-1\right)+1\right]=t\left(\mu+\mu_2\frac{t}{2!}+\cdots\right)-\frac{t^2\left(\mu+\mu_2\frac{t}{2!}+\cdots\right)}{2!}+\cdots$$

$$=\mu t+\frac{\mu_2-\mu^2}{2}t^2+\cdots$$

其中， $\mu_2-\mu^2=\sigma^2$， 所以

$$\ln M_X(t)=\mu t+\frac{\sigma^2}{2}t^2+\cdots$$

由于 $\ln M_{Z_N}(t)=\frac{-\mu\sqrt{N}t}{\sigma}+N\ln M_x(\frac{t}{\sigma\sqrt{N}})$， 所以

$$\begin{aligned}
&\ln M_{Z_N}(t)=\frac{-\mu\sqrt{N}t}{\sigma}+N\left(\mu\frac{t}{\sigma\sqrt{N}}+\frac{\sigma^2}{2}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{N}}\right)^2+\cdots\right)\\
&=\frac{-\mu\sqrt{N}t}{\sigma}+\frac{\mu\sqrt{N}t}{\sigma}+\frac{t^2}{2}+\cdots\\
&=\frac{t^2}{2}+\cdots
\end{aligned}$$

所以 $M_{Z_N}(t)=e^{\frac{t^2}{2}+\cdots}$