第一章　概率论的基本概念

1. 写出下列随机试验的样本空间 S：

(1) 记录一个班一次数学考试的平均分数(设以百分制记分).

(2) 生产产品直到有 10 件正品为止,记录生产产品的总件数.

(3) 对某工厂出厂的产品进行检查,合格的记上“正品”,不合格的记上“次品”,如连续查出了 2 件次品就停止检查,或检查了 4 件产品就停止检查,记录检查的结果.

(4) 在单位圆内任意取一点,记录它的坐标.

解　(1) 以 n 表示该班的学生数,总成绩的可能取值为 $0,1,2,3,\cdots,100n$,所以试验的样本空间为

$$S=\left\{\left.\frac{i}{n}\,\right|\,i=0,1,2,\cdots,100n\right\}.$$

(2) 设在生产第 10 件正品前共生产了 k 件不合格品,样本空间为 $S=\{10+k\,|\,k=0,1,2,\cdots\}$ 或写成 $S=\{10,11,12,\cdots\}$.

(3) 采用 0 表示检查到一件次品,以 1 表示检查到一件正品,例如 0110 表示第一次与第四次检查到次品,而第二次与第三次检查到的是正品,样本空间可表示为

$$S=\{00,100,0100,0101,0110,1100,1010,1011,0111,1101,1110,1111\}.$$

(4) 取一直角坐标系,则有 $S=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2<1\}$,若取极坐标系,则有 $S=\{(\rho,\theta)\,|\,\rho<1,0\leqslant\theta<2\pi\}$.

2. 设 A,B,C 为三个事件,用 A,B,C 的运算关系表示下列各事件：

(1) A 发生,B 与 C 不发生.

(2) A 与 B 都发生,而 C 不发生.

(3) A,B,C 中至少有一个发生.

(4) A,B,C 都发生.

(5) A,B,C 都不发生.

(6) A,B,C 中不多于一个发生.

(7) A,B,C 中不多于两个发生.

(8) A,B,C 中至少有两个发生.

解　以下分别用 $D_i(i=1,2,\cdots,8)$ 表示(1),(2),$\cdots$,(8)中所给出的事件.注意到一个事件不发生即为它的对立事件发生,例如事件 A 不发生即为 $\overline{A}$

发生.

(1) A 发生,B 与 C 不发生,表示 $A,\overline{B},\overline{C}$ 同时发生,故$D_1=A\overline{B}\,\overline{C}$或写成 $D_1=A-B-C$.

(2) A 与 B 都发生而 C 不发生,表示 $A,B,\overline{C}$ 同时发生,故$D_2=AB\overline{C}$或写成 $D_2=AB-C$.

(3) 由和事件的含义知,事件 $A\cup B\cup C$ 即表示 A,B,C 中至少有一个发生,故 $D_3=A\cup B\cup C$.

也可以这样考虑:事件"A,B,C 至少有一个发生"是事件"A,B,C 都不发生"的对立事件,因此,$D_3=\overline{\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}}$.

也可以这样考虑:事件"A,B,C 中至少有一个发生"表示三个事件中恰有一个发生或恰有两个发生或三个事件都发生,因此,D_3 又可写成

$$D_3=A\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C\cup AB\overline{C}\cup A\overline{B}C\cup\overline{A}BC\cup ABC.$$

(4) $D_4=ABC$.

(5) $D_5=\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$.

(6) "A,B,C 中不多于一个发生"表示 A,B,C 都不发生或 A,B,C 中恰有一个发生,因此,$D_6=\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\cup A\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C$.

又"A,B,C 中不多于一个发生"表示"A,B,C 中至少有两个不发生",亦即 $\overline{A}\,\overline{B},\overline{B}\,\overline{C},\overline{A}\,\overline{C}$ 中至少有一个发生,因此又有$D_6=\overline{A}\,\overline{B}\cup\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{C}\,\overline{A}$.

又"A,B,C 中不多于一个发生"是事件 $G=$"A,B,C 中至少有两个发生"的对立事件. 而事件 G 可写成$G=AB\cup BC\cup CA$,因此又可将 D_6 写成

$$D_6=\overline{AB\cup BC\cup CA}=\overline{AB}\cap\overline{BC}\cap\overline{CA}.$$

(7) "A,B,C 中不多于两个发生"表示 A,B,C 都不发生或 A,B,C 中恰有一个发生或 A,B,C 中恰有两个发生. 因此,$D_7=\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\cup A\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C\cup AB\overline{C}\cup A\overline{B}C\cup\overline{A}BC$. 又"$A,B,C$ 中不多于两个发生"表示 A,B,C 中至少有一个不发生,亦即 $\overline{A},\overline{B},\overline{C}$ 中至少有一个发生,即有 $D_7=\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}$.

又"A,B,C 中不多于两个发生"是事件"A,B,C 三个都发生"的对立事件,因此又有 $D_7=\overline{ABC}$.

(8) $D_8=AB\cup BC\cup CA$,也可写成 $D_8=ABC\cup\overline{A}BC\cup A\overline{B}C\cup AB\overline{C}$.

注意:(i) 两事件的差可用对立事件来表示,例如 $A-B=A\overline{B}$,$A-BC=A\overline{BC}$.

(ii) 易犯的错误是,误将$\overline{AB}$与$\overline{A}\ \overline{B}$ 等同起来,事实上,$\overline{AB}=\overline{A}\cup\overline{B}\neq\overline{A}\,\overline{B}$,又如$\overline{ABC}=\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}\neq\overline{A}\ \overline{B}\ \overline{C}$.

(iii) 误以为 $S=A\cup B\cup C$,事实上,$S-A\cup B\cup C$ 可能不等于$\varnothing$,一般 $S\supset A\cup B\cup C$.

3. (1) 设 A,B,C 是三个事件，且 $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4}$，$P(AB)=P(BC)=0$，$P(AC)=\frac{1}{8}$，求 A,B,C 至少有一个发生的概率.

(2) 已知 $P(A)=\frac{1}{2}$，$P(B)=\frac{1}{3}$，$P(C)=\frac{1}{5}$，$P(AB)=\frac{1}{10}$，$P(AC)=\frac{1}{15}$，$P(BC)=\frac{1}{20}$，$P(ABC)=\frac{1}{30}$，求 $A\cup B$，$\overline{A}\overline{B}$，$A\cup B\cup C$，$\overline{A}\overline{B}\overline{C}$，$\overline{A}\overline{B}C$，$\overline{A}\overline{B}\cup C$ 的概率.

(3) 已知 $P(A)=\frac{1}{2}$，(i) 若 A,B 互不相容，求 $P(A\overline{B})$，(ii) 若 $P(AB)=\frac{1}{8}$，求 $P(A\overline{B})$.

解　(1) $P(A\cup B\cup C)$

$$=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(AC)+P(ABC)$$
$$=\frac{5}{8}+P(ABC).$$

由 $ABC\subset AB$，已知 $P(AB)=0$，故 $0\leqslant P(ABC)\leqslant P(AB)=0$，得 $P(ABC)=0$. 所求概率为 $P(A\cup B\cup C)=\frac{5}{8}$.

(2) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{10}=\frac{11}{15}$.

$P(\overline{A}\,\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=\frac{4}{15}$.

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{15}-\frac{1}{20}+\frac{1}{30}=\frac{51}{60}=\frac{17}{20}.$$

$P(\overline{A}\,\overline{B}\overline{C})=P(\overline{A\cup B\cup C})=1-P(A\cup B\cup C)=\frac{3}{20}$.

$$P(\overline{A}\,\overline{B}C)=P(\overline{A}\,\overline{B}(S-\overline{C}))=P(\overline{A}\,\overline{B}-\overline{A}\,\overline{B}\overline{C})=P(\overline{A}\,\overline{B})-P(\overline{A}\,\overline{B}\overline{C})$$
$$=\frac{4}{15}-\frac{3}{20}=\frac{16-9}{60}=\frac{7}{60}.$$

记 $p=P(\overline{A}\,\overline{B}\cup C)$，由加法公式

$$p=P(\overline{A}\,\overline{B})+P(C)-P(\overline{A}\,\overline{B}C)=\frac{4}{15}+\frac{1}{5}-\frac{7}{60}=\frac{7}{20}.$$

(3) (i) $P(A\overline{B})=P(A(S-B))=P(A-AB)=P(A)-P(AB)=\frac{1}{2}$.

(ii) $P(A\overline{B})=P(A(S-B))=P(A-AB)=P(A)-P(AB)$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{8}=\frac{3}{8}.$$

4. 设 A,B 是两个事件

(1) 已知 $A\overline{B}=\overline{A}B$，验证 $A=B$.

(2) 验证事件 A 和事件 B 恰有一个发生的概率为 $P(A)+P(B)-2P(AB)$.

解 (1) 假设 $A\overline{B}=\overline{A}B$，故有 $(A\overline{B})\cup(AB)=(\overline{A}B)\cup(AB)$，从而 $A(\overline{B}\cup B)=(\overline{A}\cup A)B$，即 $AS=SB$，故有 $A=B$.

(2) A,B 恰好有一个发生的事件为 $A\overline{B}\cup\overline{A}B$，其概率为

$$\begin{aligned}P(A\overline{B}\cup\overline{A}B)&=P(A\overline{B})+P(\overline{A}B)=P(A(S-B))+P(B(S-A))\\&=P(A-AB)+P(B-AB)=P(A)+P(B)-2P(AB).\end{aligned}$$

5. 10 片药片中有 5 片是安慰剂.

(1) 从中任意抽取 5 片，求其中至少有 2 片是安慰剂的概率.

(2) 从中每次取一片，作不放回抽样，求前 3 次都取到安慰剂的概率.

解 (1)
$$\begin{aligned}p&=1-P(\text{取到的 5 片药片均不是安慰剂})\\&\quad-P(\text{取到的 5 片药片中只有 1 片是安慰剂})\\&=1-\binom{5}{0}\binom{10-5}{5}\Big/\binom{10}{5}-\binom{5}{1}\binom{10-5}{4}\Big/\binom{10}{5}=\frac{113}{126}.\end{aligned}$$

(2) $p=\dfrac{5}{10}\cdot\dfrac{4}{9}\cdot\dfrac{3}{8}=\dfrac{1}{12}$.

6. 在房间里有 10 个人，分别佩戴从 1 号到 10 号的纪念章，任选 3 人记录其纪念章的号码.

(1) 求最小号码为 5 的概率.

(2) 求最大号码为 5 的概率.

解 E：在房间里任选 3 人，记录其佩戴的纪念章的号码. 10 人中任选 3 人共有 $\binom{10}{3}=120$ 种选法，此即为样本点的总数. 以 A 记事件“最小的号码为 5”，以 B 记事件“最大的号码为 5”.

(1) 因选到的最小号码为 5，则其中一个号码为 5 且其余两个号码都大于 5，它们可从 6～10 这 5 个数中选取，故 $N(A)=\binom{5}{2}$，从而

$$P(A)=N(A)/N(S)=\binom{5}{2}\Big/\binom{10}{3}=\frac{1}{12}.$$

(2) 同理，$N(B)=\binom{4}{2}$，故

$$P(B)=N(B)/N(S)=\binom{4}{2}\Big/\binom{10}{3}=\frac{1}{20}.$$

7. 某油漆公司发出 17 桶油漆，其中白漆 10 桶、黑漆 4 桶、红漆 3 桶，在搬运中所有标签脱落，交货人随意将这些油漆发给顾客. 问一个订货为 4 桶白漆、3 桶黑漆和 2 桶红漆的顾客，能按所订颜色如数得到订货的概率是多少？

解　E：在 17 桶油漆中任取 9 桶给顾客. 以 A 表示事件"顾客取到 4 桶白漆、3 桶黑漆与 2 桶红漆"，则有 $N(S)=\binom{17}{9}$，$N(A)=\binom{10}{4}\binom{4}{3}\binom{3}{2}$，故

$$P(A)=N(A)/N(S)=\binom{10}{4}\binom{4}{3}\binom{3}{2}\Big/\binom{17}{9}=\frac{252}{2\,431}.$$

8. 在 1 500 件产品中有 400 件次品、1 100 件正品. 任取 200 件.

(1) 求恰有 90 件次品的概率.

(2) 求至少有 2 件次品的概率.

解　E：从 1 500 件产品中任取 200 件产品. 以 A 表示事件"恰有 90 件次品"，以 B_i 表示事件"恰有 i 件次品"，$i=0,1$，以 C 表示事件"至少有 2 件次品".

(1) $N(S)=\binom{1\,500}{200}$，

$$N(A)=\binom{400}{90}\binom{1\,100}{200-90}=\binom{400}{90}\binom{1\,100}{110},$$

故

$$P(A)=N(A)/N(S)=\binom{400}{90}\binom{1\,100}{110}\Big/\binom{1\,500}{200}.$$

(2) $C=S-B_0-B_1$，其中，B_0，B_1 互不相容，所以

$$\begin{aligned}P(C)&=P(S-B_0-B_1)=P(S-[B_0\cup B_1])\\&=1-P(B_0\cup B_1)=1-P(B_0)-P(B_1).\end{aligned}$$

因

$$N(B_0)=\binom{1\,100}{200},\quad N(B_1)=\binom{400}{1}\binom{1\,100}{199},$$

故

$$P(B_0)=\binom{1\,100}{200}\Big/\binom{1\,500}{200},\quad P(B_1)=\binom{400}{1}\binom{1\,100}{199}\Big/\binom{1\,500}{200},$$

因此有

$$\begin{aligned}P(C)&=1-\binom{1\,100}{200}\Big/\binom{1\,500}{200}-\binom{400}{1}\binom{1\,100}{199}\Big/\binom{1\,500}{200}\\&=1-\left[\binom{1\,100}{200}+\binom{400}{1}\binom{1\,100}{199}\right]\Big/\binom{1\,500}{200}.\end{aligned}$$

9. 从 5 双不同的鞋子中任取 4 只，问这 4 只鞋子中至少有两只配成一双的概率是多少？

解　E:从 5 双不同的鞋子中任取 4 只. 以 A 表示事件"所取 4 只鞋子中至少有两只配成一双鞋子",则 $\overline{A}$ 表示事件"所取 4 只鞋子无配对". 先计算 $P(\overline{A})$ 较为简便. 以下按 $N(\overline{A})$的不同求法,列出本题的 3 种解法,另外还给出一种直接求 $P(A)$的解法.

解法(i)　考虑 4 只鞋子是有次序一只一只取出的. 自 5 双(10 只)鞋子中任取 4 只共有 $10\times9\times8\times7$ 种取法,$N(S)=10\times9\times8\times7$. 现在来求 $N(\overline{A})$. 第一只可以任意取,共有 10 种取法,第二只只能在剩下的 9 只中且除去与已取的第一只配对的 8 只鞋子中任取一只,共 8 种取法. 同理第三只、第四只各有 6 种、4 种取法,从而 $N(\overline{A})=10\times8\times6\times4$. 故

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-N(\overline{A})/N(S)$$
$$=1-\frac{10\times8\times6\times4}{10\times9\times8\times7}=\frac{13}{21}.$$

解法(ii)　从 10 只鞋子中任取 4 只,共有$\binom{10}{4}$种取法,即 $N(S)=\binom{10}{4}$. 为求 $N(\overline{A})$,先从 5 双鞋子中任取 4 双共有$\binom{5}{4}$种取法,再自取出的每双鞋子中各取 1 只(在一双中取一只共有 2 种取法),共有 2^4 种取法,即 $N(\overline{A})=\binom{5}{4}2^4$. 故

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{\binom{5}{4}2^4}{\binom{10}{4}}=\frac{13}{21}.$$

解法(iii)　现在来求 $N(\overline{A})$. 先从 5 只左脚鞋子中任取 k 只($k=0,1,2,3,4$),有$\binom{5}{k}$种取法,而剩下的 $4-k$ 只鞋子只能从(不能与上述所取的配对的)$5-k$ 只右脚鞋子中选取,即对于每个固定的 k,有$\binom{5}{k}\binom{5-k}{4-k}$种取法. 故

$$N(\overline{A})=\sum_{k=0}^{4}\binom{5}{k}\binom{5-k}{4-k}=80.$$

故

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-N(\overline{A})/N(S)=1-\frac{80}{\binom{10}{4}}=\frac{13}{21}.$$

解法(iv)　以 A_i 表示事件"所取 4 只鞋子中恰能配成 i 双"($i=1,2$),则 $A=A_1\cup A_2$,$A_1A_2=\varnothing$,故 $P(A)=P(A_1)+P(A_2)$. 因 A_2 为 4 只恰能配成 2 双,

它可直接从 5 双鞋子中成双地取得，故 $N(A_2)=\binom{5}{2}$. $N(A_1)$的算法是：先从 5 双中取 1 双，共有$\binom{5}{1}$种取法，另外两只能从其他 8 只中取，共有$\binom{8}{2}$种取法，不过这种取法中将成双的也算在内了，应去掉. 从而

$$N(A_1)=\binom{5}{1}\left[\binom{8}{2}-\binom{4}{1}\right]=120.$$

$N(S)$仍为解法(ii)中的$\binom{10}{4}=210$种，故

$$P(A)=P(A_1)+P(A_2)=\frac{N(A_1)}{N(S)}+\frac{N(A_2)}{N(S)}$$
$$=\frac{120+10}{210}=\frac{13}{21}.$$

10. 在 11 张卡片上分别写上 probability 这 11 个字母，从中任意连抽 7 张，求其排列结果为 ability 的概率.

解法(i)　E：自 11 个字母中随机地接连抽 7 个字母并依次排列. 将 11 个字母中的两个 b 看成是可分辨的，两个 i 也看成是可分辨的，$N(S)=A_{11}^7$. 以 A 记事件“排列结果为 ability”，则 $N(A)=4$（因 b 有两种取法，i 也有两种取法），因而

$$P(A)=N(A)/N(S)=\frac{4}{A_{11}^7}=2.4\times10^{-6}.$$

解法(ii)　本题也可利用乘法定理来计算. 以 $A_1,B_2,I_3,L_4,I_5,T_6,Y_7$ 依次表示取得字母 a,b,i,l,i,t,y 各事件，则所求概率为

$$\begin{aligned}P(A_1B_2I_3L_4I_5T_6Y_7)&=P(A_1)P(B_2|A_1)P(I_3|A_1B_2)\\&\quad\times P(L_4|A_1B_2I_3)P(I_5|A_1B_2I_3L_4)\\&\quad\times P(T_6|A_1B_2I_3L_4I_5)P(Y_7|A_1B_2I_3L_4I_5T_6)\\&=\frac{1}{11}\cdot\frac{2}{10}\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{5}=\frac{4}{A_{11}^7}.\end{aligned}$$

注意，在解法(i)中仅当将两个 i 看成是可以区分的，两个 b 看成是可以区分的，才属于古典概型问题.

11. 将 3 只球随机地放入 4 个杯子中去，求杯子中球的最大个数分别为 1，2，3 的概率.

解　E：将 3 只球随机地放入 4 个杯子中去. 易知共有 4^3 种放置法. 以 A_i 表示事件“杯子中球的最大个数为 i”，$i=1,2,3$.

A_3 只有当 3 只球放在同一杯子中时才能发生，有 4 个杯子可以任意选择，

于是 $N(A_3)=\binom{4}{1}$，故

$$P(A_3)=N(A_3)/N(S)=\binom{4}{1}\Big/4^3=\frac{1}{16}.$$

A_1 只有当每个杯子最多放一只球时才能发生. 因而 $N(A_1)=4\cdot3\cdot2=A_4^3$，故

$$P(A_1)=N(A_1)/N(S)=A_4^3/4^3=\frac{3}{8}.$$

又 $A_1\cup A_2\cup A_3=S$，且 $A_iA_j=\varnothing\ (i\neq j)$，故 $P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)=1$，从而

$$P(A_2)=1-\frac{1}{16}-\frac{3}{8}=\frac{9}{16}.$$

12. 50 只铆钉随机地取来用在 10 个部件上，其中有 3 只铆钉强度太弱. 每个部件用 3 只铆钉. 若将 3 只强度太弱的铆钉都装在一个部件上，则这个部件强度就太弱. 问发生一个部件强度太弱的概率是多少?

解 将部件自 1 到 10 编号. E:随机地取铆钉，使各部件都装 3 只铆钉. 以 A_i 表示事件“第 i 号部件强度太弱”. 由题设，仅当 3 只强度太弱的铆钉同时装在第 i 号部件上，A_i 才能发生. 由于从 50 只铆钉中任取 3 只装在第 i 号部件上共有 $\binom{50}{3}$ 种取法，强度太弱的铆钉仅有 3 只，它们都装在第 i 号部件上，只有 $\binom{3}{3}=1$ 种取法，故

$$P(A_i)=1\Big/\binom{50}{3}=\frac{1}{19\ 600},\quad i=1,2,\cdots,10,$$

且知 $A_1,A_2,\cdots,A_{10}$ 两两互不相容，因此，10 个部件中有一个强度太弱的概率为

$$\begin{aligned}p&=P\{A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_{10}\}\\&=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_{10})\\&=\frac{10}{19\ 600}=\frac{1}{1\ 960}.\end{aligned}$$

13. 一俱乐部有 5 名一年级学生，2 名二年级学生，3 名三年级学生，2 名四年级学生.

(1) 在其中任选 4 名学生，求一、二、三、四年级的学生各一名的概率.

(2) 在其中任选 5 名学生，求一、二、三、四年级的学生均包含在内的概率.

解 (1) 共有 $5+2+3+2=12$ 名学生，在其中任选 4 名共有 $\binom{12}{4}=495$ 种

选法,其中每年级各选 1 名的选法有$\binom{5}{1}\binom{2}{1}\binom{3}{1}\binom{2}{1}=60$ 种选法,因此,所求概率为 $p=\frac{60}{495}=\frac{4}{33}$.

(2) 在 12 名学生中任选 5 名的选法共有$\binom{12}{5}=792$ 种.在每个年级中有一个年级取 2 名,而其他 3 个年级各取 1 名的取法共有

$$\binom{5}{2}\binom{2}{1}\binom{3}{1}\binom{2}{1}+\binom{5}{1}\binom{2}{2}\binom{3}{1}\binom{2}{1}+\binom{5}{1}\binom{2}{1}\binom{3}{2}\binom{2}{1}+\binom{5}{1}\binom{2}{1}\binom{3}{1}\binom{2}{2}=240(\text{种}).$$

于是所求的概率为

$$p=\frac{240}{792}=\frac{10}{33}.$$

14. (1) 已知 $P(\overline{A})=0.3$,$P(B)=0.4$,$P(A\overline{B})=0.5$,求条件概率 $P(B|A\cup\overline{B})$.

(2) 已知 $P(A)=\frac{1}{4}$,$P(B|A)=\frac{1}{3}$,$P(A|B)=\frac{1}{2}$,试求$P(A\cup B)$.

解 (1) $P(B|A\cup\overline{B})=\frac{P(B(A\cup\overline{B}))}{P(A\cup\overline{B})}$

$$=\frac{P(AB)}{P(A)+P(\overline{B})-P(A\overline{B})}.$$

由题设得 $P(A)=1-P(\overline{A})=0.7$,$P(\overline{B})=1-P(B)=0.6$,$P(AB)=P(A(S-\overline{B}))=P(A)-P(A\overline{B})=0.2$,故

$$P(B|A\cup\overline{B})=\frac{0.2}{0.7+0.6-0.5}=0.25.$$

(2)
$$P(AB)=P(B|A)P(A)=\frac{1}{12},$$

$$P(B)=P(AB)/P(A|B)=\frac{1}{12}\Big/\frac{1}{2}=\frac{1}{6},$$

故
$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$
$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{12}=\frac{1}{3}.$$

15. 掷两颗骰子,已知两颗骰子点数之和为 7,求其中有一颗为 1 点的概率(用两种方法).

解 E:掷两颗骰子,观察其出现之点数.以 A 记事件"两骰子点数之和为 7",以 B 记事件"两颗骰子中有一颗出现 1 点".

解法(i)　按条件概率的定义式：$P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$来求条件概率. 设想两颗骰子是可分辨的，样本空间为

$$S=\{(1,1),(1,2),\cdots,(1,6),(2,1),(2,2),\cdots,(2,6),\cdots,(6,6)\},$$
$$A=\{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\},$$

$AB=\{(1,6),(6,1)\}$. 现在 $N(S)=36, N(A)=6, N(AB)=2$，因此

$$P(B|A)=\frac{2/36}{6/36}=\frac{1}{3}.$$

解法(ii)　按条件概率的含义来求 $P(B|A)$. 样本空间原有 36 个样本点，现在知道了"A 已经发生"这一信息，根据这一信息，不在 A 中的样本点就不可能出现了，因而试验所有可能结果所成的集合就是 A，而 A 中共有 6 个可能结果，其中只有两个结果(1,6)和(6,1)有一颗骰子出现 1 点，因此

$$P(B|A)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}.$$

16. 据以往资料表明，某一 3 口之家，患某种传染病的概率有以下规律：

$$P\{\text{孩子得病}\}=0.6, P\{\text{母亲得病}|\text{孩子得病}\}=0.5,$$
$$P\{\text{父亲得病}|\text{母亲及孩子得病}\}=0.4,$$

求母亲及孩子得病但父亲未得病的概率.

解　以 A 记事件"孩子得病"，以 B 记事件"母亲得病"，以 C 记事件"父亲得病"，按题意需要求 $P(AB\overline{C})$. 已知 $P(A)=0.6, P(B|A)=0.5, P(C|BA)=0.4$，由乘法定理得

$$\begin{aligned}P(AB\overline{C})&=P(\overline{C}BA)=P(\overline{C}|BA)P(BA)\\&=P(\overline{C}|BA)P(B|A)P(A)\\&=(1-P(C|BA))P(B|A)P(A)\\&=0.6\times0.5\times0.6=0.18.\end{aligned}$$

17. 已知在 10 件产品中有 2 件次品，在其中取两次，每次任取一件，作不放回抽样. 求下列事件的概率：

(1) 两件都是正品；

(2) 两件都是次品；

(3) 一件是正品，一件是次品；

(4) 第二次取出的是次品.

解　E：在 10 件产品中(其中有 2 件次品)任取两次，每次取 1 件，作不放回抽样. 以 $A_i(i=1,2)$表示事件"第 i 次抽出的是正品". 因为是不放回抽样，所以

(1) $P(A_1A_2)=P(A_2|A_1)P(A_1)=\dfrac{7}{9}\times\dfrac{8}{10}=\dfrac{28}{45}$.

(2) $P(\overline{A}_1\overline{A}_2)=P(\overline{A}_2|\overline{A}_1)P(\overline{A}_1)=\dfrac{1}{9}\times\dfrac{2}{10}=\dfrac{1}{45}$.

(3) $P(A_1\overline{A}_2\cup\overline{A}_1A_2)$

$$
\begin{aligned}
&=P(A_1\overline{A}_2)+P(\overline{A}_1A_2)\ (\text{因}(A_1\overline{A}_2)(\overline{A}_1A_2)=\varnothing)\\
&=P(\overline{A}_2\,|\,A_1)P(A_1)+P(A_2\,|\,\overline{A}_1)P(\overline{A}_1)\\
&=\frac{2}{9}\times\frac{8}{10}+\frac{8}{9}\times\frac{2}{10}=\frac{16}{45}.
\end{aligned}
$$

亦可利用(1)(2)的结果. 因为 $A_1A_2\cup\overline{A}_1\overline{A}_2\cup A_1\overline{A}_2\cup\overline{A}_1A_2=S$,且 A_1A_2,$\overline{A}_1\overline{A}_2$,$A_1\overline{A}_2$,$\overline{A}_1A_2$ 两两不相容,故

$$P(A_1\overline{A}_2\cup\overline{A}_1A_2)=1-\frac{28}{45}-\frac{1}{45}=\frac{16}{45}.$$

(4) $P(\overline{A}_2)=P[(A_1\cup\overline{A}_1)\overline{A}_2]=P(A_1\overline{A}_2\cup\overline{A}_1\overline{A}_2)$

$$
\begin{aligned}
&=P(A_1\overline{A}_2)+P(\overline{A}_1\overline{A}_2)\\
&=P(\overline{A}_2\,|\,A_1)P(A_1)+P(\overline{A}_2\,|\,\overline{A}_1)P(\overline{A}_1)\\
&=\frac{2}{9}\times\frac{8}{10}+\frac{1}{9}\times\frac{2}{10}=\frac{1}{5}.
\end{aligned}
$$

18. 某人忘记了电话号码的最后一个数字,因而他随意地拨号. 求他拨号不超过三次而接通所需电话的概率. 若已知最后一个数字是奇数,那么此概率是多少?

解法(i) 以 A_i 表示事件"第 i 次拨号拨通电话",$i=1,2,3$. 以 A 表示事件"拨号不超过 3 次拨通电话",则有

$$A=A_1\cup\overline{A}_1A_2\cup\overline{A}_1\overline{A}_2A_3.$$

因 A_1,$\overline{A}_1A_2$,$\overline{A}_1\overline{A}_2A_3$ 两两互不相容,且 $P(A_1)=\frac{1}{10}$,

$$
\begin{aligned}
&P(\overline{A}_1A_2)=P(A_2\,|\,\overline{A}_1)P(\overline{A}_1)=\frac{1}{9}\times\frac{9}{10}=\frac{1}{10},\\
&P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)=P(A_3\,|\,\overline{A}_1\overline{A}_2)P(\overline{A}_2\,|\,\overline{A}_1)P(\overline{A}_1)\\
&\qquad=\frac{1}{8}\times\frac{8}{9}\times\frac{9}{10}=\frac{1}{10},
\end{aligned}
$$

即有

$$
\begin{aligned}
P(A)&=P(A_1)+P(\overline{A}_1A_2)+P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)\\
&=\frac{1}{10}+\frac{1}{10}+\frac{1}{10}=\frac{3}{10}.
\end{aligned}
$$

当已知最后一位数是奇数时,所求概率为

$$p=\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}=\frac{3}{5}.$$

解法(ii) 沿用解法(i)的记号,知

$$
\begin{aligned}
P(A)&=1-P(\text{拨号 3 次都接不通})=1-P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3)\\
&=1-P(\overline{A}_3\,|\,\overline{A}_1\overline{A}_2)P(\overline{A}_2\,|\,\overline{A}_1)P(\overline{A}_1)
\end{aligned}
$$

$$= 1 - \frac{7}{8} \times \frac{8}{9} \times \frac{9}{10} = \frac{3}{10}.$$

当已知最后一位是奇数时，所求概率为

$$p = 1 - \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{4}{5} = \frac{3}{5}.$$

19. (1) 设甲袋中装有 n 只白球、m 只红球；乙袋中装有 N 只白球、M 只红球. 今从甲袋中任意取一只球放入乙袋中，再从乙袋中任意取一只球. 问取到白球的概率是多少？

(2) 第一只盒子装有 5 只红球，4 只白球；第二只盒子装有 4 只红球，5 只白球. 先从第一盒中任取 2 只球放入第二盒中去，然后从第二盒中任取一只球. 求取到白球的概率.

解法(i) (1) E：从甲袋任取一球放入乙袋（此为试验 E_1），再从乙袋任取一球观察其颜色（此为试验 E_2）. 试验 E 是由 E_1 和 E_2 合成的. 以 R 表示事件"从甲袋取得的是红球"，以 W 表示事件"从乙袋取得的是白球"，即有

$$W = SW = (R \cup \bar{R})W = RW \cup \bar{R}W, \ (RW)(\bar{R}W) = \varnothing.$$

于是

$$\begin{aligned} P(W) &= P(RW) + P(\bar{R}W) \\ &= P(W|R)P(R) + P(W|\bar{R})P(\bar{R}). \end{aligned}$$

而

$$P(R) = \frac{m}{n+m}, \quad P(\bar{R}) = \frac{n}{n+m}.$$

在计算 $P(W|R)$，$P(W|\bar{R})$时，注意在试验 E_2 中，乙袋球数为 $N+M+1$ 只；在求 $P(W|R)$时，乙袋白球数为 N，但在求 $P(W|\bar{R})$时，乙袋白球数为 $N+1$，故

$$\begin{aligned} P(W) &= \frac{N}{N+M+1}\frac{m}{n+m} + \frac{N+1}{N+M+1}\frac{n}{n+m} \\ &= \frac{n+N(n+m)}{(n+m)(N+M+1)}. \end{aligned}$$

(2) E：从第一盒中任取 2 只球放入第二盒（E_1），再从第二盒任取一球观察其颜色（E_2）. 以 R_i $(i=0,1,2)$表示事件"从第一盒中取得的球中有 i 只是红球"，以 W 表示事件"从第二盒取得一球是白球". 由于 R_0, R_1, R_2 两两互不相容，且 $R_0 \cup R_1 \cup R_2 = S$，故

$$W = SW = (R_0 \cup R_1 \cup R_2)W = R_0W + R_1W + R_2W.$$

从而

$$\begin{aligned} P(W) &= P(R_0W) + P(R_1W) + P(R_2W) \\ &= P(W|R_0)P(R_0) + P(W|R_1)P(R_1) + P(W|R_2)P(R_2). \end{aligned}$$

而

$$P(R_0)=\binom{4}{2}\Big/\binom{9}{2}=\frac{1}{6},\quad P(R_2)=\binom{5}{2}\Big/\binom{9}{2}=\frac{5}{18},$$

$$P(R_1)=1-P(R_0)-P(R_2)=1-\frac{1}{6}-\frac{5}{18}=\frac{10}{18}.$$

并注意到,在试验 E_2 中第二盒球的个数为 11,故

$$P(W|R_0)=\frac{7}{11},P(W|R_1)=\frac{6}{11},P(W|R_2)=\frac{5}{11},$$

所以

$$P(W)=\frac{7}{11}\times\frac{1}{6}+\frac{6}{11}\times\frac{10}{18}+\frac{5}{11}\times\frac{5}{18}=\frac{53}{99}.$$

解法(ii) (1) 以 A 表示事件"最后取到的是白球",以 B 表示事件"最后取到的是甲袋中的球",因

$$A=SA=(B\cup\bar{B})A=BA\cup\bar{B}A,\quad (BA)(\bar{B}A)=\varnothing,$$

于是

$$\begin{aligned}P(A)&=P(BA)+P(\bar{B}A)\\&=P(A|B)P(B)+P(A|\bar{B})P(\bar{B}).\end{aligned}$$

而

$$P(B)=\frac{1}{N+M+1},\quad P(\bar{B})=\frac{N+M}{N+M+1}$$

(这是因为最后是从乙袋中取球的,此时乙袋中共有 $N+M+1$ 只球,其中只有一只是甲袋中的球).

又有 $P(A|B)=\dfrac{n}{n+m},P(A|\bar{B})=\dfrac{N}{M+N},$

故

$$\begin{aligned}P(A)&=\frac{n}{n+m}\frac{1}{N+M+1}+\frac{N}{N+M}\frac{N+M}{N+M+1}\\&=\frac{n+N(n+m)}{(n+m)(N+M+1)}.\end{aligned}$$

(2) 以 A 表示事件"最后取到的是白球",以 B 表示事件"最后取到的是甲袋中的球",因

$$A=SA=(B\cup\bar{B})A=BA\cup\bar{B}A,(BA)(\bar{B}A)=\varnothing$$

得

$$\begin{aligned}P(A)&=P(A|B)P(B)+P(A|\bar{B})P(\bar{B})\\&=\frac{4}{9}\times\frac{2}{11}+\frac{5}{9}\times\frac{9}{11}=\frac{53}{99}.\end{aligned}$$

20. 某种产品的商标为"MAXAM",其中有 2 个字母脱落,有人捡起随意放回,求放回后仍为"MAXAM"的概率.

解 以 H_1,H_2,H_3,H_4,H_5 依次表示事件“脱落 M、M”，“脱落 A、A”，“脱落 M、A”，“脱落 X、A”，“脱落 X、M”，以 G 表示事件“放回后仍为 MAXAM”，所需求的是 $P(G)$. 可知 H_1,H_2,H_3,H_4,H_5 两两不相容，且 $H_1\cup H_2\cup H_3\cup H_4\cup H_5=S$. 已知

$$P(H_1)=\binom{2}{2}\Big/\binom{5}{2}=\frac{1}{10},\qquad P(H_2)=\binom{2}{2}\Big/\binom{5}{2}=\frac{1}{10},$$

$$P(H_3)=\binom{2}{1}\binom{2}{1}\Big/\binom{5}{2}=\frac{4}{10},\qquad P(H_4)=\binom{1}{1}\binom{2}{1}\Big/\binom{5}{2}=\frac{2}{10},$$

$$P(H_5)=\binom{1}{1}\binom{2}{1}\Big/\binom{5}{2}=\frac{2}{10},$$

而

$$P(G|H_1)=P(G|H_2)=1,$$

$$P(G|H_3)=P(G|H_4)=P(G|H_5)=\frac{1}{2}.$$

由全概率公式得

$$P(G)=\sum_{i=1}^{5}P(G|H_i)P(H_i)=\frac{1}{10}+\frac{1}{10}+\frac{2}{10}+\frac{1}{10}+\frac{1}{10}=\frac{3}{5}.$$

21. 已知男子有 5%是色盲患者，女子有 0.25%是色盲患者. 今从男女人数相等的人群中随机地挑选一人，恰好是色盲者，问此人是男性的概率是多少？

解 以 A 表示事件“选出的是男性”，则 $\overline{A}$ 表示事件“选出的是女性”，以 H 表示事件“选出的人患色盲”，则 $\overline{H}$ 表示“选出的人不患色盲”. 由题设 $P(A)=P(\overline{A})=\frac{1}{2}$，$P(H|A)=0.05$，$P(H|\overline{A})=0.0025$，所需求的概率是 $P(A|H)$. 由贝叶斯公式得

$$P(A|H)=\frac{P(AH)}{P(H)}=\frac{P(H|A)P(A)}{P(H|A)P(A)+P(H|\overline{A})P(\overline{A})}$$

$$=\frac{0.05\times\frac{1}{2}}{0.05\times\frac{1}{2}+0.0025\times\frac{1}{2}}=\frac{500}{525}=\frac{20}{21}.$$

22. 一学生接连参加同一课程的两次考试. 第一次及格的概率为 p，若第一次及格则第二次及格的概率也为 p；若第一次不及格则第二次及格的概率为 $\frac{p}{2}$.

(1) 若至少有一次及格则他能取得某种资格，求他取得该资格的概率.

(2) 若已知他第二次已经及格，求他第一次及格的概率.

解 E：一学生接连参加一门课程的两次考试. 以 A_i 表示事件“第 i 次考试及格”，$i=1,2$；以 A 表示“他能取得某种资格”.

(1) 按题意 $A=A_1\cup\overline{A}_1A_2$. 因 $A_1\cap(\overline{A}_1A_2)=\varnothing$,且由已知条件:

$$P(A_1)=p,\quad P(\overline{A}_1)=1-p,$$

$$P(A_2|A_1)=p,\quad P(A_2|\overline{A}_1)=\frac{p}{2},$$

故

$$\begin{aligned}P(A)&=P(A_1\cup\overline{A}_1A_2)=P(A_1)+P(\overline{A}_1A_2)\\&=p+P(A_2|\overline{A}_1)P(\overline{A}_1)=p+\frac{p}{2}(1-p)\\&=\frac{3}{2}p-\frac{1}{2}p^2.\end{aligned}$$

(2) $$\begin{aligned}P(A_1|A_2)&=\frac{P(A_1A_2)}{P(A_2)}\\&=\frac{P(A_2|A_1)P(A_1)}{P(A_2|A_1)P(A_1)+P(A_2|\overline{A}_1)P(\overline{A}_1)}\\&=\frac{p\times p}{p\times p+\frac{p}{2}(1-p)}=\frac{2p}{p+1}.\end{aligned}$$

23. 将两信息分别编码为 A 和 B 传送出去,接收站收到时,A 被误收作 B 的概率为 0.02,而 B 被误收作 A 的概率为 0.01. 信息 A 与信息 B 传送的频繁程度为 2∶1. 若接收站收到的信息是 A,问原发信息是 A 的概率是多少?

解　以 D 表示事件"将信息 A 传递出去",则 $\overline{D}$ 表示事件"将信息 B 传递出去",以 R 表示"接收到信息 A",则 $\overline{R}$ 表示事件"接收到信息 B",按题意需求概率 $P(D|R)$. 已知 $P(\overline{R}|D)=0.02$, $P(R|\overline{D})=0.01$,且有 $P(D)/P(\overline{D})=2$,由于 $P(D)+P(\overline{D})=1$,得知 $P(D)=\frac{2}{3}$, $P(\overline{D})=\frac{1}{3}$. 由贝叶斯公式得到

$$\begin{aligned}P(D|R)&=\frac{P(DR)}{P(R)}=\frac{P(R|D)P(D)}{P(R|D)P(D)+P(R|\overline{D})P(\overline{D})}\\&=\frac{(1-0.02)\times\frac{2}{3}}{(1-0.02)\times\frac{2}{3}+0.01\times\frac{1}{3}}=\frac{196}{197}.\end{aligned}$$

24. 有两箱同种类的零件,第一箱装 50 只,其中 10 只一等品;第二箱装 30 只,其中 18 只一等品. 今从两箱中任挑出一箱,然后从该箱中取零件两次,每次任取一只,作不放回抽样. 求

(1) 第一次取到的零件是一等品的概率.

(2) 在第一次取到的零件是一等品的条件下,第二次取到的也是一等品的概率.

解　以 H 表示事件"从第一箱中取零件",则 $\overline{H}$ 表示事件"从第二箱中取零

件”. 由已知条件 $P(H)=P(\overline{H})=\frac{1}{2}$. 又以 A_i 表示事件“第 i 次从箱中(不放回抽样)取得的是一等品”, $i=1,2$.

(1) 由条件 $P(A_1|H)=\frac{1}{5}$, $P(A_1|\overline{H})=\frac{3}{5}$,故

$$P(A_1)=P(A_1|H)P(H)+P(A_1|\overline{H})P(\overline{H})$$
$$=\frac{1}{10}+\frac{3}{10}=\frac{2}{5}.$$

(2) 需要求的是 $P(A_2|A_1)$. 因 $P(A_2|A_1)=\frac{P(A_1A_2)}{P(A_1)}$,而

$$P(A_1A_2)=P(A_1A_2|H)P(H)+P(A_1A_2|\overline{H})P(\overline{H})$$

由条件概率的含义, $P(A_1A_2|H)$ 表示在第一箱中取两次,每次取一只零件,作不放回抽样,且两次都取得一等品的概率. 因第一箱共有 50 只零件,其中有 10 只一等品,故有 $P(A_1A_2|H)=\frac{10}{50}\times\frac{9}{49}$. 同理, $P(A_1A_2|\overline{H})=\frac{18}{30}\times\frac{17}{29}$,故有

$$P(A_2|A_1)=\frac{P(A_1A_2)}{P(A_1)}$$
$$=\frac{1}{P(A_1)}[P(A_1A_2|H)P(H)+P(A_1A_2|\overline{H})P(\overline{H})]$$
$$=\frac{5}{2}\left(\frac{10}{50}\times\frac{9}{49}\times\frac{1}{2}+\frac{18}{30}\times\frac{17}{29}\times\frac{1}{2}\right)$$
$$=\frac{1}{4}\left(\frac{9}{49}+\frac{51}{29}\right)=0.485\ 6.$$

25. 某人下午 5∶00 下班,他所积累的资料表明:

到家时间	5∶35～5∶39	5∶40～5∶44	5∶45～5∶49	5∶50～5∶54	迟于 5∶54
乘地铁的概率	0.10	0.25	0.45	0.15	0.05
乘汽车的概率	0.30	0.35	0.20	0.10	0.05

某日他抛一枚硬币决定乘地铁还是乘汽车,结果他是 5∶47 到家的. 试求他是乘地铁回家的概率.

解 以 H 表示事件“乘地铁回家”,则 $\overline{H}$ 表示事件“乘汽车回家”. 因到家时间为 5∶47,它属于区间 5∶45～5∶49,以 T 记“到家时间在 5∶45～5∶49 之间”,则需要求的是概率 $P(H|T)$. 已知 $P(T|H)=0.45$, $P(T|\overline{H})=0.20$,又因他是由掷硬币决定乘地铁还是乘汽车,因此, $P(H)=P(\overline{H})=0.5$. 由贝叶斯公式得

$$P(H|T)=\frac{P(HT)}{P(T)}=\frac{P(T|H)P(H)}{P(T|H)P(H)+P(T|\overline{H})P(\overline{H})}$$

$$=\frac{0.45\times0.5}{0.45\times0.5+0.20\times0.5}=\frac{9}{13}.$$

26. 病树的主人外出，委托邻居浇水，设已知如果不浇水，树死去的概率为 0.8. 若浇水则树死去的概率为 0.15. 有 0.9 的把握确定邻居会记得浇水.

(1) 求主人回来树还活着的概率.

(2) 若主人回来树已死去，求邻居忘记浇水的概率.

解　(1) 记 A 为事件“树还活着”，记 W 为事件“邻居记得给树浇水”，即有

$$P(W)=0.9,\quad P(\overline{W})=0.1,\quad P(A|W)=0.85,\quad P(A|\overline{W})=0.2,$$

$$P(A)=P(A|W)P(W)+P(A|\overline{W})P(\overline{W})$$
$$=0.85\times0.9+0.2\times0.1=0.785.$$

(2) $$P(\overline{W}|\overline{A})=\frac{P(\overline{A}|\overline{W})P(\overline{W})}{P(\overline{A})}=\frac{[1-P(A|\overline{W})]P(\overline{W})}{1-P(A)}$$
$$=\frac{0.8\times0.1}{0.215}=0.372.$$

27. 设本题涉及的事件均有意义. 设 A,B 都是事件.

(1) 已知 $P(A)>0$，证明 $P(AB|A)\geqslant P(AB|A\cup B)$.

(2) 若 $P(A|B)=1$，证明 $P(\overline{B}|\overline{A})=1$.

(3) 若设 C 也是事件，且有 $P(A|C)\geqslant P(B|C)$，$P(A|\overline{C})\geqslant P(B|\overline{C})$，证明 $P(A)\geqslant P(B)$.

证　(1) 若 $P(A)>0$，要证 $P(AB|A)\geqslant P(AB|A\cup B)$.
上式左边等于 $P(AB)/P(A)$，上式右边等于 $P(AB)/P(A\cup B)$.
因为 $A\cup B\supset A$，$P(A\cup B)\geqslant P(A)$，故有右$\leqslant$左.

(2) 由 $P(A|B)=1$ 得 $\frac{P(AB)}{P(B)}=1$，

即
$$P(AB)=P(B).\tag{$*_1$}$$

于是 $P(\overline{B}|\overline{A})=P(\overline{A}\,\overline{B})/P(\overline{A})=P(\overline{A\cup B})/P(\overline{A})=\frac{1-P(A\cup B)}{1-P(A)}$

$$=\frac{1-P(A)-P(B)+P(AB)}{1-P(A)}.$$

由($*_1$)式得到

$$P(\overline{B}|\overline{A})=\frac{1-P(A)}{1-P(A)}=1.$$

(3) 由假设 $P(A|C)\geqslant P(B|C)$，即

$$P(AC)\geqslant P(BC).\tag{$*_2$}$$

同样由 $P(A|\overline{C})\geqslant P(B|\overline{C})$ 就有

$$P(A\overline{C})\geqslant P(B\overline{C}).\tag{$*_3$}$$

由($*_3$)式

$$P(A(S-C))\geqslant P(B(S-C)),$$

得 $P(A)-P(AC)\geqslant P(B)-P(BC)$,

或 $P(A)-P(B)\geqslant P(AC)-P(BC)$,

由($*_2$)式,得知

$$P(A)-P(B)\geqslant 0,\text{即 } P(A)\geqslant P(B).$$

28. 有两种花籽,发芽率分别为0.8,0.9,从中各取一颗,设各花籽是否发芽相互独立.求

(1) 这两颗花籽都能发芽的概率.

(2) 至少有一颗能发芽的概率.

(3) 恰有一颗能发芽的概率.

解 以 A,B 分别表示事件第一颗、第二颗花籽能发芽,即有 $P(A)=0.8$, $P(B)=0.9$.

(1) 由 A,B 相互独立,得两颗花籽都能发芽的概率为

$$P(AB)=P(A)P(B)=0.8\times0.9=0.72.$$

(2) 至少有一颗花籽能发芽的概率.即事件 $A\cup B$ 的概率为

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.8+0.9-0.72=0.98.$$

(3) 恰有一颗花籽能发芽的概率,即为事件 $A\overline{B}\cup\overline{B}A$ 的概率,由第4题(2)得

$$\begin{aligned}P(A\overline{B}\cup\overline{A}B)&=P(A)+P(B)-2P(AB)=0.8+0.9-2P(AB)\\&=0.8+0.9-2P(A)P(B)=1.7-2\times0.72=0.26.\end{aligned}$$

29. 根据报导美国人血型的分布近似地为:A型为37%,O型为44%,B型为13%,AB型为6%.夫妻拥有的血型是相互独立的.

(1) B型的人只有输入B、O两种血型才安全.若妻为B型,夫为何种血型未知,求夫是妻的安全输血者的概率.

(2) 随机地取一对夫妇,求妻为B型夫为A型的概率.

(3) 随机地取一对夫妇,求其中一人为A型,另一人为B型的概率.

(4) 随机地取一对夫妇,求其中至少有一人是O型的概率.

解 (1) 由题意知夫血型应为B、O才为安全输血者.因两种血型互不相容,故所求概率为

$$p_1=0.44+0.13=0.57.$$

(2) 因夫妻拥有血型相互独立,于是所求概率为

$$p_2=0.13\times0.37=0.048\,1.$$

(3) $p_3=2\times0.37\times0.13=0.096\,2.$

(4) 有三种可能,即夫为O,妻为非O;妻为O,夫为非O;夫妻均为O.

$$p_4=2\times0.44\times(1-0.44)+0.44\times0.44=0.686\,4.$$

30. (1) 给出事件 A、B 的例子,使得

(i) $P(A|B)<P(A)$,(ii) $P(A|B)=P(A)$,(iii) $P(A|B)>P(A)$.

(2) 设事件 A,B,C 相互独立,证明(i)C 与 AB 相互独立.(ii)C 与 $A\cup B$ 相互独立.

(3) 设事件 A 的概率 $P(A)=0$,证明对于任意另一事件 B,有 A,B 相互独立.

(4) 证明事件 A,B 相互独立的充要条件是 $P(A|B)=P(A|\bar{B})$.

解 (1) 举例

(i) 设试验为将骰子掷一次,事件 A 为"出现偶数点",B 为"出现奇数点",则 $P(A|B)=0$,$P(A)=\frac{1}{2}$,故 $P(A|B)<P(A)$.

(ii) 设试验为将骰子掷一次,A 同上,B 为"掷出点数$\geqslant 1$",则 $P(A|B)=\frac{1}{2}$,而 $P(A)=\frac{1}{2}$,故 $P(A|B)=P(A)$.

(iii) 设试验为将骰子掷一次,A 同上,B 为"掷出点数$\geqslant 4$",则 $P(A|B)=\frac{2}{3}$,而 $P(A)=\frac{1}{2}$,故 $P(A|B)>P(A)$.

(2) 因 A,B,C 相互独立,故 $P(AB)=P(A)P(B)$,$P(BC)=P(B)P(C)$,$P(CA)=P(C)P(A)$,$P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$,从而

(i) $P(C(AB))=P(CAB)=P(C)P(A)P(B)=P(C)P(AB)$,这表示 C 与 AB 相互独立.

(ii)
$$\begin{aligned}P(C(A\cup B))&=P(CA\cup CB)=P(CA)+P(CB)-P(CAB)\\&=P(C)P(A)+P(C)P(B)-P(C)P(A)P(B)\\&=P(C)[P(A)+P(B)-P(AB)]=P(C)P(A\cup B),\end{aligned}$$
这表示 C 与 $A\cup B$ 相互独立.

(3) 因 $AB\subset A$,故若 $P(A)=0$,则
$$0\leqslant P(AB)\leqslant P(A).$$
从而
$$P(AB)=0=P(B)\cdot 0=P(B)\cdot P(A),$$
按定义,A,B 相互独立.

(4) 必要性. 设 A,B 相互独立,则 $A,\bar{B}$ 也相互独立,从而知 $P(A|B)=P(A)$,$P(A|\bar{B})=P(A)$,故 $P(A|B)=P(A|\bar{B})$.

充分性. 设 $P(A|B)=P(A|\bar{B})$,按定义此式即表示
$$\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(A\bar{B})}{P(\bar{B})}.$$
由比例的性质得
$$\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(AB)+P(A\bar{B})}{P(B)+P(\bar{B})}=\frac{P(A(B\cup\bar{B}))}{1}=P(A),$$

即 $P(AB)=P(A)P(B)$，即 A,B 相互独立.

31. 设事件 A,B 的概率均大于零，说明以下的叙述(1) 必然对.(2) 必然错.(3) 可能对.并说明理由.

(1) 若 A 与 B 互不相容，则它们相互独立.

(2) 若 A 与 B 相互独立，则它们互不相容.

(3) $P(A)=P(B)=0.6$，且 A,B 互不相容.

(4) $P(A)=P(B)=0.6$，且 A,B 相互独立.

解　(1) 必然错.因若 A,B 互不相容，则 $0=P(AB)\neq P(A)P(B)$.

(2) 必然错.因若 A,B 相互独立，则 $P(AB)=P(A)P(B)>0$.

(3) 必然错.因若 A,B 互不相容，则 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)=1.2$，这是不对的.

(4) 可能对.

32. 有一种检验艾滋病毒的检验法，其结果有概率 0.005 报道为假阳性.(即不带艾滋病毒者，经此检验法有 0.005 的概率被认为带艾滋病毒). 今有 140 名不带艾滋病毒的正常人全部接受此种检验，被报导至少有一人带艾滋病毒的概率为多少？

解　在本题中，这 140 人检查结果是相互独立的，这一假定是合理的，将人编号，第 i 号人检验结果以 A_i 表示正常，则 $\overline{A}_i$ 表示被报道为带艾滋病毒者，由题意知 $P(\overline{A}_i)=0.005$，从而 $P(A_i)=1-0.005=0.995$. 于是 140 人经检验至少有一人被报道呈阳性概率为

$$p=P(\text{至少有一人呈阳性})=1-P(\text{无人为阳性})$$

$$=1-P\left(\prod_{i=1}^{140}A_i\right)=1-\prod_{i=1}^{140}P(A_i)=1-0.995^{140}.$$

由 $140\lg 0.995=\lg 0.4957$，得

$$p=1-0.4957=0.5043.$$

这说明，即使无人带艾滋病毒，这样的检验法认为 140 人中至少有一人带艾滋病毒的概率大于$\frac{1}{2}$.

33. 盒中有编号为 1,2,3,4 的 4 只球，随机地自盒中取一只球，事件 A 为“取得的是 1 号或 2 号球”，事件 B 为“取得的是 1 号或 3 号球”，事件 C 为“取得的是 1 号或 4 号球”验证：

$$P(AB)=P(A)P(B),\ P(AC)=P(A)P(C),\ P(BC)=P(B)P(C),$$

但　　$P(ABC)\neq P(A)P(B)P(C)$，

即事件 A,B,C 两两独立，但 A,B,C 不是相互独立的.

证　以 $A_i(i=1,2,3,4)$表示取到第 i 号球，则

$$P(A_1)=P(A_2)=P(A_3)=P(A_4)=\frac{1}{4},$$

又 $A=A_1\cup A_2, B=A_1\cup A_3, C=A_1\cup A_4$，且 A_1, A_2, A_3, A_4 两两互不相容，故有

$$P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{2}.$$

另外，$AB=A_1, AC=A_1, BC=A_1, ABC=A_1$，故

$$P(AB)=P(AC)=P(BC)=P(ABC)=P(A_1)=\frac{1}{4}.$$

从而有

$$P(AB)=\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=P(A)P(B),$$

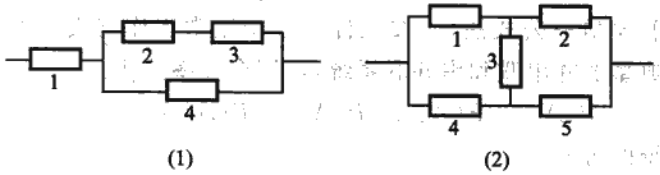
$$P(AC)=\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=P(A)P(C),$$

$$P(BC)=\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=P(B)P(C),$$

但 $P(ABC)=\frac{1}{4}\neq P(A)P(B)P(C)=\frac{1}{8}$.

34. 试分别求以下两个系统的可靠性：

(1) 设有 4 个独立工作的元件 1,2,3,4. 它们的可靠性分别为 p_1, p_2, p_3, p_4，将它们按题 1.34 图 1(1)的方式连接(称为并串联系统)；



题 1.34 图 1

(2) 设有 5 个独立工作的元件 1,2,3,4,5. 它们的可靠性均为 p，将它们按题 1.34 图 1(2)的方式连接(称为桥式系统).

解 (1) 以 A_i 表示事件“第 i 只元件正常工作”，$i=1,2,3,4$，以 A 表示“系统正常工作”，已知各元件是否正常工作相互独立，且有 $P(A_i)=p_i\ (i=1,2,3,4)$. 由图知

$$A=A_1[(A_2A_3)\cup A_4]=A_1A_2A_3\cup A_1A_4.$$

由加法公式及各元件工作的独立性得到

$$\begin{aligned}P(A)&=P(A_1A_2A_3)+P(A_1A_4)-P[(A_1A_2A_3)\cap(A_1A_4)]\\&=P(A_1)P(A_2)P(A_3)+P(A_1)P(A_4)-P(A_1A_2A_3A_4)\\&=p_1p_2p_3+p_1p_4-P(A_1)P(A_2)P(A_3)P(A_4)\\&=p_1(p_4+p_2p_3-p_2p_3p_4).\end{aligned}$$

(2) 以 A_i 表示事件“第 i 只元件正常工作”，$i=1,2,3,4,5$，以 A 表示“系统正常工作”，已知各元件是否正常工作相互独立，且有 $P(A_i)=p$ $(i=1,2,3,4,5)$.

解法(i)(路径穷举法) 根据系统逻辑框图(题 1.34 图 1(2))，将所有能使系统正常工作的路径一一列出，再利用概率的加法定理和乘法定理来计算系统的可靠性 $P(A)$. 由图知使桥式系统正常工作的路径有下列 4 条：12,45,135,432. 以 B_j 记事件第 j $(j=1,2,3,4)$条路径正常工作，即有

$$B_1=A_1A_2,B_2=A_4A_5,B_3=A_1A_3A_5,B_4=A_4A_3A_2,$$

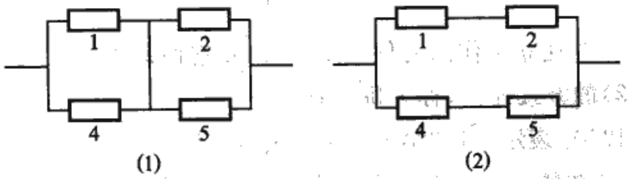
于是得系统的可靠性为

$$\begin{aligned}P(A)&=P(B_1\cup B_2\cup B_3\cup B_4)\\&=\sum_{i=1}^{4}P(B_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}P(B_iB_j)+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant 4}P(B_iB_jB_k)-P(B_1B_2B_3B_4)\\&=P(A_1A_2)+P(A_4A_5)+P(A_1A_3A_5)+P(A_4A_3A_2)-P(A_1A_2A_4A_5)\\&\quad-P(A_1A_2A_3A_5)-P(A_1A_2A_3A_4)-P(A_1A_3A_4A_5)\\&\quad-P(A_2A_3A_4A_5)-P(A_1A_2A_3A_4A_5)+P(A_1A_2A_3A_4A_5)\\&\quad+P(A_1A_2A_3A_4A_5)+P(A_1A_2A_3A_4A_5)+P(A_1A_2A_3A_4A_5)\\&\quad-P(A_1A_2A_3A_4A_5)\\&=2p^2+2p^3-5p^4+2p^5.\end{aligned}$$

解法(ii)(全概率公式法) 按元件 3 处于正常工作与失效两种状态，将原系统简化为典型的并串联和串并联系统，再用全概率公式：

$$P(A)=P(A\mid A_3)P(A_3)+P(A\mid\overline{A}_3)P(\overline{A}_3)$$

来计算原系统的可靠性.



题 1.34 图 2

当元件 3 正常工作时，系统简化成如题 1.34 图 2(1)所示，当元件 3 失效时，系统简化成如题 1.34 图 2 (2)所示. 因此

$$P(A\mid A_3)=P[(A_1\cup A_4)(A_2\cup A_5)],$$
$$P(A\mid\overline{A}_3)=P(A_1A_2\cup A_4A_5).$$

故 $P(A)=P[(A_1\cup A_4)(A_2\cup A_5)]P(A_3)+P(A_1A_2\cup A_4A_5)P(\overline{A}_3).$

注意到

$$P(A_1 \cup A_4) = P(A_1) + P(A_4) - P(A_1A_4) = 2p - p^2.$$

同样
$$P(A_2 \cup A_5) = 2p - p^2.$$

$$\begin{aligned} P(A_1A_2 \cup A_4A_5) &= P(A_1)P(A_2) + P(A_4)P(A_5) \\ &\quad - P(A_1)P(A_2)P(A_4)P(A_5) \\ &= 2p^2 - p^4. \end{aligned}$$

即得原系统的可靠性为

$$\begin{aligned} P(A) &= (2p - p^2)^2 p + (2p^2 - p^4)(1 - p) \\ &= 2p^2 + 2p^3 - 5p^4 + 2p^5. \end{aligned}$$

注意：本题易犯的错误是在使用概率的加法公式时，没有注意两事件不是不相容的，例如在(1)中应有 $P(A_1A_2A_3 \cup A_1A_4) = P(A_1A_2A_3) + P(A_1A_4) - P(A_1A_2A_3A_4)$，而错误地将最后一项 $P(A_1A_2A_3A_4)$漏了.

35. 如果一危险情况 C 发生时，一电路闭合并发出警报，我们可以借用两个或多个开关并联以改善可靠性. 在 C 发生时这些开关每一个都应闭合，且若至少一个开关闭合了，警报就发出. 如果两个这样的开关并联连接，它们每个具有 0.96 的可靠性(即在情况 C 发生时闭合的概率)，问这时系统的可靠性(即电路闭合的概率)是多少？如果需要有一个可靠性至少为 0.999 9 的系统，则至少需要用多少只开关并联？设各开关闭合与否是相互独立的.

解　以 A_i 表示事件"第 i 只开关闭合"，$i=1,2,\cdots,n$. 已知 $P(A_i)=0.96$，由此可得两只这样的开关并联而电路闭合的概率为(注意各开关闭合与否是相互独立的)

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2) &= P(A_1) + P(A_2) - P(A_1A_2) \\ &= P(A_1) + P(A_2) - P(A_1)P(A_2) \\ &= 2 \times 0.96 - 0.96^2 = 0.9984. \end{aligned}$$

设需要 n 只这样的开关并联，此时系统可靠性 $R=P\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i\right)$，注意到

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \overline{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n} = \overline{A}_1\overline{A}_2\cdots\overline{A}_n,$$

且由 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的独立性推得 $\overline{A}_1, \overline{A}_2, \cdots, \overline{A}_n$ 也相互独立. 故

$$\begin{aligned} R = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) &= 1 - P\left(\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i}\right) = 1 - P(\overline{A}_1\overline{A}_2\cdots\overline{A}_n) \\ &= 1 - P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)\cdots P(\overline{A}_n) = 1 - (1 - 0.96)^n. \end{aligned}$$

要使 $R \geqslant 0.999\,9$，即要使 $1 - 0.04^n \geqslant 0.999\,9$，亦即要使 $0.000\,1 \geqslant 0.04^n$. 故应有

$$n \geqslant \frac{\lg 0.000\,1}{\lg 0.04} = \frac{4}{\lg 25} = \frac{4}{1.397\,9} = 2.86.$$

因 n 为整数，故应有 $n \geqslant 3$，即至少要用 3 只开关并联.

36. 三人独立地去破译一份密码，已知各人能译出的概率分别为$\frac{1}{5}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{4}$。问三人中至少有一人能将此密码译出的概率是多少？

解 以 A_i 表示事件"第 i 人能译出密码"，$i=1,2,3$。已知 $P(A_1)=\frac{1}{5}$，$P(A_2)=\frac{1}{3}$，$P(A_3)=\frac{1}{4}$，则至少有一人能译出密码的概率为

$$\begin{aligned}p&=P(A_1\cup A_2\cup A_3)\\&=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-P(A_1A_2)-P(A_1A_3)-P(A_2A_3)+P(A_1A_2A_3).\end{aligned}$$

由独立性即得

$$\begin{aligned}p&=\frac{1}{5}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\times\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\times\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}\\&=\frac{3}{5}.\end{aligned}$$

也可以这样做，因 A_1,A_2,A_3 相互独立，知 $\overline{A}_1,\overline{A}_2,\overline{A}_3$ 也相互独立，即有

$$\begin{aligned}p&=1-P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3)=1-P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{A}_3)\\&=1-\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{5}.\end{aligned}$$

37. 设第一只盒子中装有 3 只蓝球，2 只绿球，2 只白球；第二只盒子中装有 2 只蓝球，3 只绿球，4 只白球。独立地分别在两只盒子中各取一只球。

(1) 求至少有一只蓝球的概率。

(2) 求有一只蓝球一只白球的概率。

(3) 已知至少有一只蓝球，求有一只蓝球一只白球的概率。

解 以 B_i 记事件"从第 i 只盒子中取得一只蓝球"，以 W_i 记事件"从第 i 只盒子中取得一只白球"，$i=1,2$。由题设在不同盒子中取球是相互独立的。

(1) 即需求 $P(B_1\cup B_2)$。利用对立事件来求较方便，即有

$$\begin{aligned}P(B_1\cup B_2)&=1-P(\overline{B_1\cup B_2})=1-P(\overline{B}_1\overline{B}_2)\\&=1-P(\overline{B}_1)P(\overline{B}_2)=1-\frac{4}{7}\times\frac{7}{9}=\frac{5}{9}.\end{aligned}$$

(2) 即需求事件 $B_1W_2\cup B_2W_1$ 的概率，注意到 B_1,W_1 是互不相容的，即 $B_1W_1=\varnothing$，因而 $(B_1W_2)(B_2W_1)=\varnothing$，故有

$$\begin{aligned}P(B_1W_2\cup B_2W_1)&=P(B_1W_2)+P(B_2W_1)\\&=P(B_1)P(W_2)+P(B_2)P(W_1)\\&=\frac{3}{7}\times\frac{4}{9}+\frac{2}{9}\times\frac{2}{7}=\frac{16}{63}.\end{aligned}$$

(3) 即需求条件概率 $p=P(B_1W_2\cup B_2W_1\mid B_1\cup B_2)$。因 $(B_1W_2\cup B_2W_1)\subset$

$B_1\cup B_2$，故有

$$p=P[(B_1W_2\cup B_2W_1)(B_1\cup B_2)]/P(B_1\cup B_2)$$
$$=P(B_1W_2\cup B_2W_1)/P(B_1\cup B_2)=\frac{16}{35}.$$

38. 袋中装有 m 枚正品硬币、n 枚次品硬币(次品硬币的两面均印有国徽)，在袋中任取一枚，将它投掷 r 次，已知每次都得到国徽. 问这枚硬币是正品的概率为多少？

解　以 T 记事件"将硬币投掷 r 次每次都出现国徽"，以 A 记事件"所取到的是正品"，由题设 $P(A)=\frac{m}{m+n}$，$P(\overline{A})=\frac{n}{m+n}$，$P(T|A)=\frac{1}{2^r}$，$P(T|\overline{A})=1$，需要求的是概率 $P(A|T)$. 由贝叶斯公式，所求概率为

$$P(A|T)=\frac{P(AT)}{P(T)}=\frac{P(T|A)P(A)}{P(T|A)P(A)+P(T|\overline{A})P(\overline{A})}$$
$$=\left(\frac{1}{2^r}\times\frac{m}{m+n}\right)\Big/\left(\frac{1}{2^r}\times\frac{m}{m+n}+\frac{n}{m+n}\right)$$
$$=\frac{m}{m+2^rn}.$$

39. 设根据以往记录的数据分析，某船只运输的某种物品损坏的情况共有三种：损坏 2%(这一事件记为 A_1)，损坏 10%(事件 A_2)，损坏 90%(事件 A_3)，且知 $P(A_1)=0.8$，$P(A_2)=0.15$，$P(A_3)=0.05$. 现在从已被运输的物品中随机地取 3 件，发现这 3 件都是好的(这一事件记为 B). 试求 $P(A_1|B)$，$P(A_2|B)$，$P(A_3|B)$(这里设物品件数很多，取出一件后不影响取后一件是否为好品的概率).

解　在被运输的物品中，随机取 3 件，相当于在物品中抽取 3 次，每次取一件，作不放回抽样. 又根据题中说明抽取一件后，不影响取后一件是否为好品的概率，已知当 A_1 发生时，一件产品是好品的概率为 $1-2\%=0.98$，从而随机取 3 件，它们都是好品的概率为 0.98^3，即

$$P(B|A_1)=0.98^3,$$

同样

$$P(B|A_2)=0.9^3,\quad P(B|A_3)=0.1^3.$$

又知

$$P(A_1)=0.8,\quad P(A_2)=0.15,\quad P(A_3)=0.05.$$

现在 $A_iA_j=\varnothing(i\neq j)$，$i,j=1,2,3$，且 $P(A_1\cup A_2\cup A_3)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)=1$，由教材第一章 §5 的页下注知道此时全概率公式、贝叶斯公式都能够应用，由贝叶斯公式得到

$$P(A_1|B)=\frac{P(B|A_1)P(A_1)}{P(B|A_1)P(A_1)+P(B|A_2)P(A_2)+P(B|A_3)P(A_3)}$$

$$=\frac{0.98^3\times 0.8}{0.862\ 4}=0.873\ 1,$$

$$P(A_2|B)=\frac{0.9^3\times 0.15}{0.862\ 4}=0.126\ 8,$$

$$P(A_3|B)=\frac{0.1^3\times 0.05}{0.862\ 4}=0.000\ 1.$$

40. 将 A、B、C 三个字母之一输入信道，输出为原字母的概率为 α，而输出为其他一字母的概率都是$\frac{1-\alpha}{2}$. 今将字母串 AAAA，BBBB，CCCC 之一输入信道，输入 AAAA，BBBB，CCCC 的概率分别为 $p_1,p_2,p_3(p_1+p_2+p_3=1)$，已知输出为 ABCA，问输入的是 AAAA 的概率是多少？(设信道传输各个字母的工作是相互独立的.)

解 以 A_1、B_1、C_1 分别表示事件“输入 AAAA”、“输入 BBBB”、“输入 CCCC”，以 D 表示事件“输出 ABCA”. 因事件 A_1,B_1,C_1 两两互不相容，且有 $P(A_1\cup B_1\cup C_1)=P(A_1)+P(B_1)+P(C_1)=p_1+p_2+p_3=1$，因此全概率公式和贝叶斯公式可以使用(参见教材第一章 §5 的页下注). 由贝叶斯公式有

$$P(A_1|D)=\frac{P(A_1D)}{P(D)}$$

$$=\frac{P(D|A_1)p_1}{P(D|A_1)p_1+P(D|B_1)p_2+P(D|C_1)p_3}.$$

在输入为 AAAA(即事件 A_1)输出为 ABCA(即事件 D)时，有两个字母为原字母，另两字母为其他字母，所以

$$P(D|A_1)=\alpha^2\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)^2.$$

同理，$P(D|B_1)=P(D|C_1)=\alpha\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)^3$. 代入上式并注意到 $p_1+p_2+p_3=1$，得到

$$P(A_1|D)=\frac{2\alpha p_1}{(3\alpha-1)p_1+1-\alpha}.$$