离散数学

Discrete Mathematics

吴梅红

厦门大学计算机科学系

E-mail: wmh@xmu.edu.cn



第四章 二元关系和函数

- 宇宙间存在着形形色色的联系, 这些联系正是各门学科所要研究的主要问题。

例 数的>、 =、< 关系; 变量的函数关系; 程序的输入与输出联系; 程序间的调用关系; **DB**的数据特性联系等。

- 集合论为刻划这种联系提供了一种数学模型--关系。
- 关系是一个集合, 以具有该种联系的事物对为其成员。因而在关系的研究中可方便地使用集合论的概念、方法和成果。
- 关系和有向图这两个关键概念在本课程起着统一的作用, 有向图是关系的图形表示。

4.1 集合的笛卡尔积和二元关系

定义 4.1 由两个元素x, y(允许x = y)按一定顺序排列成的二元组叫做一个有序对 (**ordered pair**), 记作 $<x, y>$, 其中x是它的第一元素, y是它的第二元素。

例 二维直角坐标系中 点的坐标就是有序对。

- 一般说来, 有序对具有以下性质:

1. 当$x \neq y$时, $<x, y> \neq <y, x>$。

2. $<x, y> = <u, v>$充要条件是 $x = u, y = v$。

区别 1. 在集合$\{a, b\}$中, $a \neq b$ 且 $\{a, b\} = \{b, a\}$。

2. 在有序对$<a, b>$中, 允许$a = b$, 当 $a \neq b$, $\langle a, b\rangle \neq <b, a>$。

推广 如果有序对的第一元素为有序对$\langle a, b\rangle$, 第二元素为c, 此时将有序对$\langle\langle a, b\rangle, c\rangle$称为有序三元组, 简记为$\langle a, b, c\rangle$。 一般地, 给出下面定义。

定义 一个有序n(n≥2)元组是一个有序对, 它的第一元素为有序n–1元组$\langle a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}\rangle$, 第二元素为$a_n$, 记为$\langle a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n\rangle$, 即

$$\langle\langle a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}\rangle, a_n\rangle = \langle a_1, a_2, \ldots, a_n\rangle。 \blacksquare$$

例 n维空间中点M的坐标 $\langle a_1, a_2, \ldots, a_n\rangle$为有序n元组。

定理 $\langle a_1, a_2, \ldots, a_n\rangle = \langle b_1, b_2, \ldots, b_n\rangle$ 当且仅当 (iff)

$$a_i = b_i, i = 1, 2, \ldots, n。$$

- 笛卡尔积是一种重要的集合运算，是向量概念的推广。

定义 4.2 设A, B为二集合, 用A中元素为第一元素，B中元素为第二元素 构成有序对，所有这样的有序对组成的集合叫做A和B的笛卡尔积, 记作 $A \times B$。

符号化表示为 $A \times B = \{<x, y> \mid x \in A \wedge y \in B\}$。 ∎

注意 $\varnothing$可表示不含任何有序组的笛卡尔积。

- 由排列组合的基本常识不能证明, 如果A中有m个元素, B中有n个元素, 则$A \times B$有mn个元素。
- 笛卡尔积运算有以下性质:

性质 1. 对任意集合A, 由定义有

$$A \times \varnothing = \varnothing, \quad \varnothing \times A = \varnothing。$$

所以 $A \times B = \varnothing$ 当且仅当 $A = \varnothing$ 或 $B = \varnothing$

例 设 $A = \{a, b, c\}$, $B = \{0, 1\}$, 则

$$A \times B = \{\langle a, 0\rangle, \langle a, 1\rangle, \langle b, 0\rangle, \langle b, 1\rangle, \langle c, 0\rangle, \langle c, 1\rangle\}$$

$$B \times A = \{\langle 0, a\rangle, \langle 0, b\rangle, \langle 0, c\rangle, \langle 1, a\rangle, \langle 1, b\rangle, \langle 1, c\rangle\}$$

$$A \times A = \{\langle a, a\rangle, \langle a, b\rangle, \langle a, c\rangle, \langle b, a\rangle, \langle b, b\rangle, \langle b, c\rangle, \langle c, a\rangle, \langle c, b\rangle, \langle c, c\rangle\}$$

$$B \times B = \{\langle 0, 0\rangle, \langle 0, 1\rangle, \langle 1, 0\rangle, \langle 1, 1\rangle\}$$

性质 2. 一般地说, 笛卡尔积不满足交换律, 即

$$A \times B \neq B \times A$$

(除非 $A = \varnothing \vee B = \varnothing \vee A = B$) 。

例 设 $A = \{a, b\}$, $B = \{0, 1\}$, $C = \{u, v\}$, 则

$$A \times B \times C = \{\langle a, 0, u\rangle, \langle a, 0, v\rangle, \langle a, 1, u\rangle, \langle a, 1, v\rangle, \langle b, 0, u\rangle, \langle b, 0, v\rangle, \langle b, 1, u\rangle, \langle b, 1, v\rangle\}$$

$$(A \times B) \times C = \{\langle a, 0\rangle, \langle a, 1\rangle, \langle b, 0\rangle, \langle b, 1\rangle\} \times \{u, v\}$$

$$=\{\langle\langle a, 0\rangle, u\rangle, \langle\langle a, 0\rangle, v\rangle, \langle\langle a, 1\rangle, u\rangle, \langle\langle a, 1\rangle, v\rangle, \langle\langle b, 0\rangle, u), \langle\langle b, 0\rangle, v), \langle\langle b, 1\rangle, u), \langle\langle b, 1\rangle, v\rangle\}$$

$$A \times (B \times C) = \{a, b\} \times \{\langle 0, u\rangle, \langle 0, v\rangle, \langle 1, u\rangle, \langle 1, v\rangle\}$$

$$= \{\langle a, \langle 0, u\rangle\rangle, \langle a, \langle 0, v\rangle\rangle, \langle a, \langle 1, u\rangle\rangle, \langle a, \langle 1, v\rangle\rangle, \langle b, \langle 0, u\rangle\rangle, \langle b, \langle 0, v\rangle\rangle, \langle b, \langle 1, u\rangle\rangle, \langle b, \langle 1, v\rangle\rangle\}$$

性质 3. 一般地说, 笛卡尔积不满足结合律, 即

$$A \times B \times C = (A \times B) \times C \neq A \times (B \times C)$$

(除非 $A = \varnothing$ 或 $B = \varnothing$ 或 $C = \varnothing$),

性质4 设A, B, C为任意3个集合, $*$代表$\cup$, $\cap$, $-$, $\oplus$运算,

则笛卡尔积对运算$*$满足**分配律**, 即

$$A \times (B * C) = (A \times B) * (A \times C)$$

$$(B * C) \times A = (B \times A) * (C \times A)$$

证 证明 $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$。

$\forall \langle x, y \rangle \in A \times (B \cap C)$

$\Leftrightarrow x \in A \wedge y \in (B \cap C)$

$\Leftrightarrow x \in A \wedge (y \in B \wedge y \in C)$

$\Leftrightarrow (x \in A \wedge y \in B) \wedge (x \in A \wedge y \in C)$

$\Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in A \times B \wedge \langle x, y \rangle \in A \times C$

$\Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in (A \times B) \cap (A \times C)$。 $\blacksquare$

$$A \times (B \oplus C) = (A \times B) \oplus (A \times C)$$

证 $A \times (B \oplus C)$

$= A \times [(B - C) \cup (C - B)]$ /*设∪和–分配律已证

$= [A \times (B - C)] \cup [A \times (C - B)]$

$= [(A \times B) - (A \times C)] \cup [(A \times C) - (A \times B)]$

$= (A \times B) \oplus (A \times C)$ ■

- 另外6个分配律公式可类似地证明。

例. A, B, C是任意三个集合, $A \neq \varnothing$,

1) $A \times B \subseteq A \times C$ 当且仅当 $B \subseteq C$;

2) $B \times A \subseteq C \times A$ 当且仅当 $B \subseteq C$。

Proof 2) 若$B = \varnothing$, 结论显然成立。下设$B \neq \varnothing$, $\forall\, y \in B$。

充分性 若 $B \subseteq C$, 则 $y \in C$。

因 $A \neq \varnothing$, 存在 $x \in A$。

$\forall <y, x> \in B \times A$, 必有 $<y, x> \in C \times A$,

所以 $B \times A \subseteq C \times A$。

必要性 $\forall <y, x> \in B \times A$, 其中 $y \in B$, $x \in A$。

若 $B \times A \subseteq C \times A$, 则 $<y, x> \in C \times A$, $y \in C$。

所以$B \subseteq C$。 ■ 同理可证 1)。

性质5 设A, B, C, D为4个非空集合, 则

$$A \times B \subseteq C \times D \Leftrightarrow A \subseteq C, B \subseteq D$$

Proof 必要性 若$A \times B \subseteq C \times D$,

又A, B, C, D都非空, 故对任意的$x \in A$, $y \in B$,

$\langle x, y\rangle \in A \times B \subseteq C \times D$, 则 $x \in C$, $y \in D$,

因此 $A \subseteq C$, $B \subseteq D$。

- 充分性 若$A \subseteq C$, 因 $B \neq \varnothing$, 由上例 2)

$$A \times B \subseteq C \times B。$$

又 $B \subseteq D$, 因$C \neq \varnothing$,

由上例 2) $C \times B \subseteq C \times D$。

根据传递性, $A \times B \subseteq C \times D$。 ∎

定义 设$A_1, A_2, \ldots, A_n$是任意的n个集合, 所有有序n元组 $\langle a_1, a_2, \ldots, a_n\rangle$组成的集合, 称为集合$A_1, A_2, \ldots, A_n$的笛卡尔积, 记作$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$

$$= (A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_{n-1}) \times A_n$$

$$= \{\langle a_1, a_2, \ldots, a_n\rangle \mid a_i \in A_i, i = 1, 2, \ldots, n\}。$$ ■

例 在计算机内的字是由固定的n个有序二进位所组成, 它的全体可以表示成有序n元组的集合:

$$A = \{0, 1\}, A^n = \underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{n个}$$

$$= \{\langle a_1, a_2, \ldots, a_n\rangle \mid a_i \in A, \quad i = 1, 2, \ldots, n\}。$$

- 字长8bits, 16 bits, 32 bits, 64 bits的计算机.

定理 对任意有限集合 $A_1, A_2, \ldots, A_n$,

设 $|A_i| = n_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ 则

$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ 也是有限集, 且

$$|A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n| = |A_1| \times |A_2| \times \ldots \times |A_n|$$

$$= n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_n\ 。$$

Proof 用归纳法加以证明。 ■

- 当 $A_1 = A_2 = \ldots = A_n = A$ 时,

  $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = A^n$, 称为 A的n次幂集。

定义4.3.1 若集合R中的**全体元素均为有序的n(n≥2)元组**，则称R为**n元关系 (n-ary relation)**。

特别地，当 n = 2时，称F为**二元关系**，**简称关系**。

对于二元关系R，若 $\langle x, y\rangle \in R$，可记作 xRy。

若 $\langle x, y\rangle \notin R$，则称x与y**没有**关系R，记作**xRy**。

- 规定 空集$\varnothing$为n 元空关系，简称**空关系**。

例 $F_1 = \{\langle a, b, c, d\rangle, \langle 1,2,3,4\rangle, \langle$物理,化学,生物,数学$\rangle\}$ 为四元关系；

$F_2 = \{\langle a, b, c\rangle, \langle \alpha, \beta, \gamma\rangle, \langle$张三,李四,王五$\rangle\}$为三元关系；

- $F_3 = \{\langle 1, 2\rangle, \langle \alpha, \beta\rangle, \langle$熊猫, 金丝猴$\rangle\}$为二元关系。
- $A = \{\langle a, b\rangle, \langle 1, 2, 3\rangle, a, \alpha, 1\}$是集合，**不是关系**。

- 下面等价定义的n元关系来自某个笛卡尔积。

定义 4.4 笛卡尔积 $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ 的任何子集均称为 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 的一个n元关系。

当$A_1 = A_2 = \ldots = A_n = A$时，称R为A上的n元关系。

- 特别地，$A_1 \times A_2$ 的任何子集均称为A_1 到A_2 的一个二元关系，记作 $R \subseteq A_1 \times A_2$ 或 $R \in P(A_1 \times A_2)$。 $\blacksquare$
- 二元关系主要是描述两个集合之间元素与元素的关系或者是一个集合内部元素之间的关系。
- n元关系可化归为$(A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_{n-1})$到$A_n$ 的二元关系。

- 当$A_1 \neq A_2$时，由于 $A_1 \subseteq A_1 \cup A_2$， $A_2 \subseteq A_1 \cup A_2$，

  故 $A_1 \times A_2 \subseteq (A_1 \cup A_2) \times (A_1 \cup A_2)$，

  令 $A_1 \cup A_2 = A$，则 $A_1 \times A_2 \subseteq A \times A$。

- 因此不同集合的笛卡尔积可以

  化归为同一集合的笛卡尔积的子集来研究，

  所以定义中最重要且经常使用的是

  $n = 2$， $A_1 = A_2 = A$ 的情形。 $\blacksquare$

- 下面主要讨论A上的二元关系。

定义 4.5 对任意集合A, 定义

$E_A = \{\langle x, y\rangle \mid x, y \in A\} = A \times A$为A上的全域关系。

$I_A = \{\langle x, x\rangle \mid x \in A\}$为A上的恒等关系。

定义 A上“小于”关系L, 整除关系D

$L_A = \{<x, y>| x, y \in A \wedge x \leqslant y\}$。

$D_A = \{<x, y>| x, y \in A \wedge x|y\}$。

$R_{\subseteq} = \{<x, y>| x, y \in \mathcal{A} \wedge x \subseteq y\}$, $\mathcal{A}$是集合族。

例 设A = {1, 2, 3},

$L_A = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 1, 3\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 3, 3\rangle\}$

$D_A = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 1, 3\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 3, 3\rangle\}$

若令A = {a, b}, $\mathcal{A} = P(A) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$, 则

$R_{\subseteq} = \{<\varnothing, \varnothing>, <\varnothing, \{a\}>, <\varnothing, \{b\}>, <\varnothing, \{a, b\}>, <\{a\}, \{a\}>, <\{a\}, \{a, b\}>, <\{b\}, \{b\}>, <\{b\}, \{a, b\}>, <\{a, b\}, \{a, b\}>\}$。

例 任意两个集合A、B，若$|A| = m$，$|B| = n$，

问 **A到B共有多少个不同的二元关系?**

解 因为 卡氏积$A \times B$的任意一个子集都是A到B的关系,

本问题等价于 求 $A \times B$有多少不同的子集。

由幂集的定义, 问题又等价于

计算 $(A \times B)$的幂集的基数是多少。

所以A到B共有

$|P(A\times B)| = 2^{|A\times B|} = 2^{|A|\times|B|} = 2^{m\times n}$个不同的二元关系。∎

- A上共有 $2^{m\times m} = 2^{m}$ 个不同的二元关系。

4.2 关系的运算

- 关系是以有序对为元素 的集合,

  故可对关系进行集合的运算以产生新的关系。

- 运算的前提条件：两个关系应是同一笛卡尔积的子集。

- 关系的运算有5种, 分别定义如下:

定义 4.6 关系R的定义域dom R, 值域ran R是

$$\mathrm{dom}\ R = \{x \mid \exists y\ (xRy)\},$$ /*domain

$$\mathrm{ran}\ R = \{y \mid \exists x\ (xRy)\},$$ /*range

称 fld R = dom R ∪ ran R 为R的域(field)。

例 设A = {1, 2, 3, 4, 5, 6}, B = {a, b, c, d},

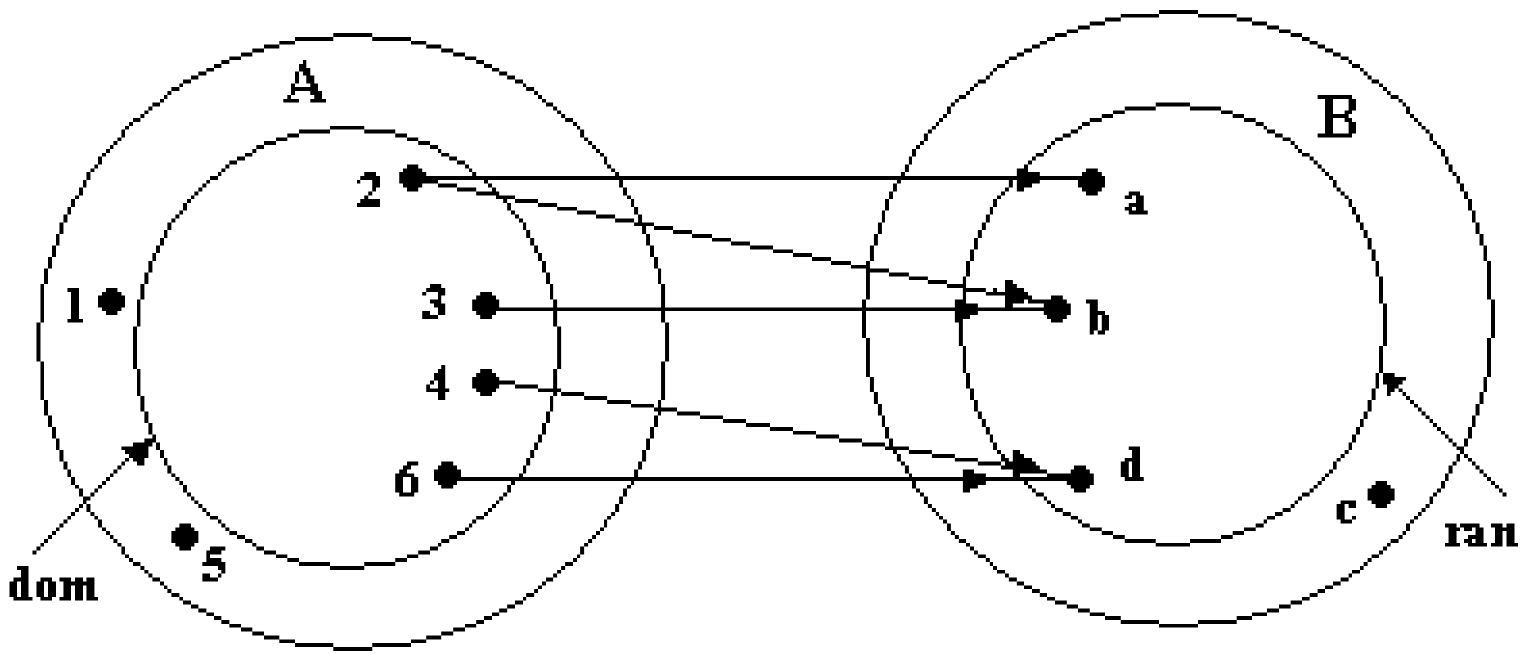
R = {‹2, a›, ‹2, b›, ‹3, b›, ‹4, d›, ‹6, d›},

则 dom R = {2, 3, 4, 6}, /*第一分量的并集

ran R = {a, b, d}。 /*第二分量的并集

fld R = domR ∪ ranR = {2, 3, 4, 6, a, b, d},

下图描绘了关系R的定义域和值域。



定义4.7 设R为二元关系, R的逆关系, 简称R的逆, 记作R^{-1}

$$R^{-1} = \{\langle x, y\rangle \mid \langle y, x\rangle \in R\} \quad \text{/*inverse} \quad ■$$

- 由定义, 只要将R的每一个序偶中元素次序加以颠倒, 就得到逆关系R^{-1}的所有有序对。
- 设 $R = \{<3, 4>, <6, 2>\}$, 则 $R^{-1} = \{<4, 3>, <2, 6>\}$。
- 称 $\sim R = \{\langle x, y\rangle \mid \langle x, y\rangle \notin R\}$为R的补(complementary)。

注意 作为关系, 补运算是对A上的全关系E_A而言的, 并不是对全集A而言的。

- 下面我们研究关系的最重要运算 — 复合运算。

定义 4.8 设F, G为二元关系, G对F的右复合记为F∘G,

$$F\circ G = \{\langle x, y\rangle \mid \exists t(xFt \wedge tGy)\}。$$ /*G first

- 这种先G后F得到F∘G的运算, 称为关系的逆序复合。
- 若F的值域 和 G的定义域 的交集为空, 则F∘G是∅。
- for i = 1 to |G| /*数组G, i指针外循环

  for k = 1 to |F| /*数组F, k指针内循环

  if F[k]的第二元素 = G[i]的第一元素

  print <F[k]的第一元素, G[i]的第二元素>}
- 设 F = {<3, 3>, <6, 2>}, G = {<2, 3>}, 则

  F∘G = {<6, 3>}; G ∘ F ={<2, 3>}

定义 4.8.2 F对G的左复合记为F◦G, 先F后G得到F◦G的运算, 称为关系的顺序复合:

$$F \circ G = \{\langle x, y\rangle \mid \exists t(xGt \wedge tFy)\}。\qquad /^{*}\ F\ first$$

- 如果把二元关系看做一种作用, <x, y> ∈ R可以解释为x通过R作用变到y, 那么右复合F◦G与左复合F◦G都是两个作用的连续发生。
- 所不同的是: 右复合F◦G表示在右边的G是复合到F上的第二步作用; 而左复合恰好相反, F◦G表示左边的F是复合到G上的第二步作用。这两种规定都是合理的。
- 本书采用右复合的定义, 其他书可能采用左复合的定义。请注意两者的区别。

例 4.7 P是所有人的集合，令

$$R = \{<x, y> \mid x, y \in P \wedge x\text{是}y\text{的父亲}\},$$

$$S = \{<x, y> \mid x, y \in P \wedge x\text{是}y\text{的母亲}\}。$$

(1) 说明$R \circ R$, $R^{-1} \circ S^{-1}$, $R^{-1} \circ S$各关系的含义、

(2) 用R, S及其逆和右复合表示以下关系：

$$\{<x, y> \mid x, y \in P \wedge y\text{是}x\text{的外祖母}\},$$

$$\{<x, y> \mid x, y \in P \wedge x\text{是}y\text{的祖母}\}。$$

解 (1) $R \circ R$表示关系$\{<x, y> \mid x, y \in P \wedge x\text{是}y\text{的祖父}\}$；

$R^{-1} \circ S^{-1}$表示关系$\{<x, y> \mid x, y \in P \wedge y\text{是}x\text{的祖母}\}$；，

$R^{-1} \circ S$表示空关系$\varnothing$。

(2) $\{<x, y> \mid x, y \in P \wedge y\text{是}x\text{的外祖母}\}$的表达式是$S^{-1} \circ S^{-1}$；

$\{<x, y> \mid x, y \in P \wedge x\text{是}y\text{的祖母}\}$的表达式是$S \circ R$。

定理4.1 设F, G, H是任意的关系, 则有

(1) $(F^{-1})^{-1} = F$ /*双重否定律

Proof 任取<x, y>,

$<x, y> \in (F^{-1})^{-1} \Leftrightarrow \langle y, x\rangle \in F^{-1} \Leftrightarrow \langle x, y\rangle \in F$,

所以 $(F^{-1})^{-1} = F$ 。

(5) $(\sim R)^{-1} = \sim(R^{-1})$ /*可换性

Proof 任意 $\langle x, y\rangle \in (\sim R)^{-1}$

$\Leftrightarrow \langle y, x\rangle \in \sim R$

$\Leftrightarrow \langle y, x\rangle \notin R$

$\Leftrightarrow \langle x, y\rangle \notin R^{-1}$

$\Leftrightarrow \langle x, y\rangle \in \sim(R^{-1})$

所以 $(\sim R)^{-1} = \sim(R^{-1})$ 。

定理 4.1 (2) $\mathrm{dom}\ F^{-1} = \mathrm{ran}\ F$

$\mathrm{ran}\ F^{-1} = \mathrm{dom}\ F$ 。

Proof 教材已经证明了$\mathrm{dom}\ F^{-1} = \mathrm{ran}\ F$ 。

(2) $\forall x \in \mathrm{ran}\ F^{-1}$

$\Leftrightarrow \exists y\ (\langle y, x\rangle \in F^{-1})$

$\Leftrightarrow \exists y\ (\langle x, y\rangle \in F)$

$\Leftrightarrow x \in \mathrm{dom}\ F$

所以 $\mathrm{ran}\ F^{-1} = \mathrm{dom}\ F$

定理 4.1(3) $(F\circ G)\circ H = F\circ(G\circ H)$。 /*顺序

证 任取$<x, y>$,

$<x, y>\in (F\circ G)\circ H$

$\Leftrightarrow \exists t\,(<x, t>\in F\circ G \wedge <t, y>\in H)$

$\Leftrightarrow \exists t\,(\exists s\,(<x, s>\in F \wedge <s, t>\in G) \wedge <t, y>\in H)$

$\Leftrightarrow \exists t\,\exists s\,(<x, s>\in F \wedge <s, t>\in G \wedge <t, y>\in H)$

$\Leftrightarrow \exists s\,(<x, s>\in F \wedge \exists t\,(<s, t>\in G \wedge <t, y>\in H))$

$\Leftrightarrow \exists s\,(<x, s>\in F \wedge <s, y>\in G\circ H)$

$\Leftrightarrow <x, y>\in F\circ(G\circ H)$

所以 $(F\circ G)\circ H = F\circ(G\circ H)$。

- 我们常删去结合律中的括号, 将它们写成 $F \circ G \circ H$。
- 由归纳法易证, 任意n个关系的复合也是可结合的。

  在 $R_1 \circ R_2 \circ \ldots \circ R_n$ 中, 只要不改变它们的次序,

  不论在它们之间怎样加括号, 其结果是一样的。
- 当 $A_1 = A_2 = \ldots = A_n = A$ 且 $R_1 = R_2 = \ldots = R_n = R$,

  复合关系 $R \circ R \circ \ldots \circ R = R^n$ 是集合A上关系R的n次幂,

  即n个R的右复合。

规定 逆运算优先于复合, 优先于求定义域、值域和域的运算。　　定义4.6-4.8 中的各种运算都优先于集合的并、交、相对补、对称差等运算。

定理 4.1(4) $(F\circ G)^{-1} = G^{-1}\circ F^{-1}$。

证 任取 $\langle x, y\rangle$,

$$\langle x, y\rangle \in (F\circ G)^{-1}$$

$$\Leftrightarrow \langle y, x\rangle \in F\circ G$$

$$\Leftrightarrow \exists t(\langle y, t\rangle \in F \wedge \langle t, x\rangle \in G)$$

$$\Leftrightarrow \exists t(\langle x, t\rangle \in G^{-1} \wedge \langle t, y\rangle \in F^{-1})$$

$$\Leftrightarrow \langle x, y\rangle \in G^{-1}\circ F^{-1}$$

定理 4.2 设R为A上的关系, 则

$$R\circ I_A = I_A\circ R = R.$$ ■

证 任取 $\langle x, y\rangle \in R\circ I_A$

$\Leftrightarrow \exists t\,(\langle x, t\rangle \in R \wedge \langle t, y\rangle \in I_A)$

$\Leftrightarrow \exists t\,(\langle x, t\rangle \in R \wedge t = y)$

$\Rightarrow \langle x, y\rangle \in R$, 即 $R\circ I_A \subseteq R$;

又任取 $\langle x, y\rangle \in R \Rightarrow \langle x, y\rangle \in R \wedge x, y \in A$

$\Rightarrow \langle x, y\rangle \in R \wedge \langle y, y\rangle \in I_A$

$\Rightarrow \langle x, y\rangle \in R\circ I_A$, 即 $R \subseteq R\circ I_A$

所以 $R\circ I_A = R$ 同理可证 $I_A\circ R = R$

定理4.2.2 设I_A、I_B为集合A、B上的恒等关系, $R\subseteq A\times B$,

则 $I_B\circ R = R\circ I_A = R$. ■

定义4.9 设R为A上的关系, n为自然数, 则R的**n次幂**是

(1) $R^0 = \{<x, x> \mid x \in A\} = I_A$,

(2) $R^{n+1} = R^n \circ R$， $n \geq 0$ 。

- 由定义4.9可知, 对于A上的任何关系R_1和R_2, 都有

$$R_1^0 = R_2^0 = I_A。$$

即A上任何关系的0次幂都相等,

都对于A上的恒等关系I_A。

- 此外, 对于A上的任何关系R都有$R^1 = R$。

因为 $R^1 = R^0 \circ R = I_A \circ R = R$。

定理 4.3 设$R \subseteq A \times A$, $|A| = n$, 则 $\exists\, s, t \in N$,

满足 $0 \le s < t \le 2^{n^2}$, 使得 $R^s = R^t$。

证 显然$P(A \times A)$中元素对幂运算是封闭的, 即对任意的自然数k, 有 $R^k \in P(A \times A) \Leftrightarrow R^k \subseteq A \times A$。

而 $|P(A \times A)| = 2^{n^2}$, 考虑R的各项幂$R^0, R^1, \ldots, R^{2^{n^2}}$,

共产生$2^{n^2} + 1$个$P(A \times A)$的二元关系,

由鸽巢(抽屉)原理可知, 存在s和t, 满足$0 \le s < t \le 2^{n^2}$,

使得 $R^s = R^t$。 $\blacksquare$

- 本定理说明有穷集上只有有穷多个不同的二元关系。
- 关系的幂运算服从指数定律。

定理 4.4 设$R \subseteq A \times A$, 任意的$m, n \in N$, 则

(1) $R^m \circ R^n = R^{m+n}$;　　(2) $(R^m)^n = R^{mn}$。

证 (1) 任给定m后, 对n进行归纳证明。

- 若$n = 0$, $R^m \circ R^0 = R^m \circ I_A = R^m = R^{m+0}$
- 假设当$n = k$时有$R^m \circ R^k = R^{m+k}$成立, 则当$n = k+1$时有

$R^m \circ R^{k+1} = R^m \circ (R^k \circ R) = (R^m \circ R^k) \circ R = R^{m+k} \circ R = R^{m+k+1}$

由归纳法原理知命题正确。 ■

(2) 任给定m后, 对n进行归纳证明。

- 若$n = 0$, $(R^m)^0 = I_A = R^0 = R^{m \cdot 0}$,
- 假设当$n = k$时$(R^m)^k = R^{mk}$成立, 则当$n = k+1$时有
- $(R^m)^{k+1} = (R^m)^k \circ R^m = R^{mk} \circ R^m = R^{mk+m} = R^{m(k+1)}$
- 由归纳法原理知命题正确。 ■

例 设$A = \{a, b, c, d, e, f\}$，

$R = \{\langle a, b\rangle, \langle b, c\rangle, \langle c, d\rangle, \langle d, e\rangle, \langle e, f\rangle\}$。

求R^n $(n = 1, 2, 3, 4, \ldots)$。

解 $R^1 = R$；

$R^2 = R \circ R = \{\langle a, c\rangle, \langle b, d\rangle, \langle c, e\rangle, \langle d, f\rangle\}$；

$R^3 = R^2 \circ R = \{\langle a, d\rangle, \langle b, e\rangle, \langle c, f\rangle\}$；

$R^4 = R^3 \circ R = \{\langle a, e\rangle, \langle b, f\rangle\}$；

$R^5 = R^4 \circ R = \{\langle a, f\rangle\}$；

$R^6 = R^5 \circ R = \varnothing$；

$R^7 = \varnothing$；

…

$R^n = \varnothing \quad (n \geqslant 6)$。

- 从本例可知, 幂集R^n的基数$|R^n|$并非随着n的增加而增加, 而是呈递减趋势, 而且, 当$n \geq |A|$时, 有 $R^n \subseteq \bigcup_{i=1}^{|A|} R^i$。

例 设A = {a, b, c, d}, A上的关系

$R = \{\langle a, a\rangle, \langle a, b\rangle, \langle b, d\rangle\}$,

$S = \{\langle a, d\rangle, \langle b, c\rangle, \langle b, d\rangle, \langle c, b\rangle\}$。

求 $R \circ S$ 和 $S \circ R$。

Sol $S \circ R = \{\langle a, d\rangle, \langle a, c\rangle\}$;

$R \circ S = \{\langle c, d\rangle\}$。

显然 $R \circ S \neq S \circ R$ 。 ■

- 从本例可知复合关系不满足交换律, 区别顺序和逆序复合关系。

逆关系分配律

$$(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}$$

$$(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$$

Proof $\forall \langle x, y\rangle \in (R \cup S)^{-1}$

$\Leftrightarrow \langle y, x\rangle \in (R \cup S)$

$\Leftrightarrow \langle y, x\rangle \in R \vee \langle y, x\rangle \in S$

$\Leftrightarrow \langle x, y\rangle \in R^{-1} \vee \langle x, y\rangle \in S^{-1}$

$\Leftrightarrow \langle x, y\rangle \in R^{-1} \cup S^{-1}$

所以 $(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}$

- 同理可证 $(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$

关系矩阵和关系图

- 当A，B是有穷集时，二元关系$R \subseteq A \times B$ 的表示法除用外延方法列举R所有元素外，还可方便地用一个$|A| \times |B|$矩阵(matrix of relation)来表示。

定义 设$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$是两个有限集，$R \subseteq A \times B$，则称n行m列矩阵 $M_R = (r_{ij})_{n\times m}$为R的关系矩阵，其分量

$$
\begin{cases}
r_{ij} = 1 & \text{当且仅当 } a_i R b_j, \\
r_{ij} = 0 & \text{否则。}
\end{cases}
$$

- 在讨论复合关系矩阵前，我们先定义布尔运算，它只涉及数字0和1。
- 布尔加法 (逻辑析取)

$$0 + 0 = 0$$

$$0 + 1 = 1 + 0 = 1 + 1 = 1$$

- 布尔乘法 (逻辑合取)

$$1 \cdot 1 = 1$$

$$0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0 \cdot 0 = 0$$

- 关系矩阵**性质:**

1. 关系R的 **集合表达式、关系矩阵M_R、关系图G_R** 三者均可以**唯一相互确定**。

2. $M(R^{-1}) = (M(R))^T$

3. $M(R_1 \circ R_2) = M(R_2)\, M(R_1)$

例 设$A = \{2, 3, 4\}$, $B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$,

定义A到B的二元关系R:

aRb 当且仅当 a整除b。

$R = \{\langle 2, 2\rangle, \langle 2, 4\rangle, \langle 2, 6\rangle, \langle 3, 3\rangle, \langle 3, 6\rangle, \langle 4, 4\rangle\}$。

$$M_R = \begin{array}{c} \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

由于逆关系矩阵M_R^{-1}是关系矩阵M_R的转置, 所以

$$M_R^{-1} = \begin{array}{c} \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

- 用矩阵表示关系, 便于在计算机中对关系进行存储和运算, 并可充分利用线性代数中矩阵的结论。
- 由线性代数知:
- $(M_R^{-1})^{-1} = M_R$, $(M_1M_2)^{-1} = M_2^{-1}M_1^{-1}$

关系并、交、差、补的矩阵可如下求取:

- $M_{R\cup S} = M_R \vee M_S$ (矩阵对应分量作逻辑析取运算)
- $M_{R\cap S} = M_R \wedge M_S$ (矩阵对应分量作逻辑合取运算)
- $M_{R-S} = M_{R\cap\sim S} = M_R \wedge M_{\sim S}$
- $M_{\sim S} = M'_S$ (矩阵对应分量作逻辑非运算)

- 一个有限集合A上的关系R还可以用一个称为R的关系图来表示，其优点是直观清晰。关系图是分析关系性质的方便形式，但不便于进行运算。

定义 A上关系R的关系图(graph of relation)

G(R) =〈A, R〉是一个有向图，其中

(1) A中的每个元素分别用一个顶点表示；

(2) 当且仅当xRy时，用弧或线段联结x和y； /*邻接

(3) 若xRx，则在x处画一条自封闭的弧线。

注意 关系图中顶点的位置，线段的长度曲直可任意。

例 设A = {a, b, c, d, e},

R = {‹a, d›, ‹b, a›, ‹b, b›, ‹c, c›}的关系图4.a,

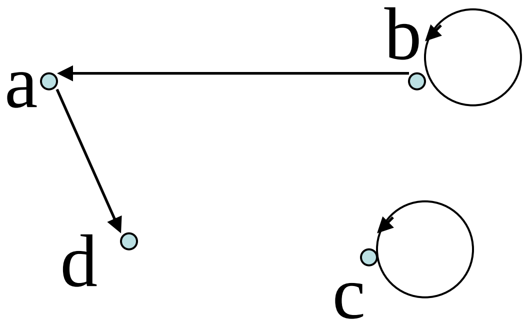


图 4.a

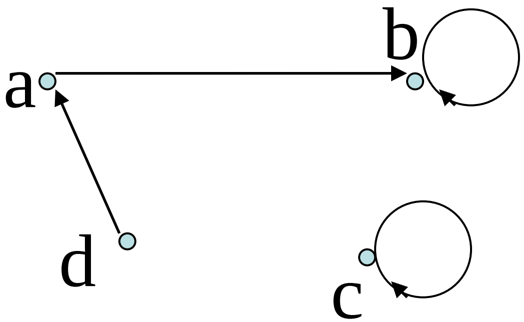


图 4.b

逆关系图: 把R的关系图中有向边的箭头**方向颠倒**即得R^{-1}的关系图, 图4.b给出A上R的逆关系图。

- 关系是以有序对为元素的集合，

故可对关系进行集合的运算以产生新的关系。

例 设 A = {a, b, c, d}, A上的关系

R = {‹a, a›, ‹a, b›, ‹b, d›, ‹c, a›, ‹d, c›},

用三种方法求复合关系R^2。

解 集合表示法: R^2 = /*逆序, bottom-up

{‹a, a›, ‹a, b›, ‹b, d›, ‹c, a›, ‹d, c›} ∘

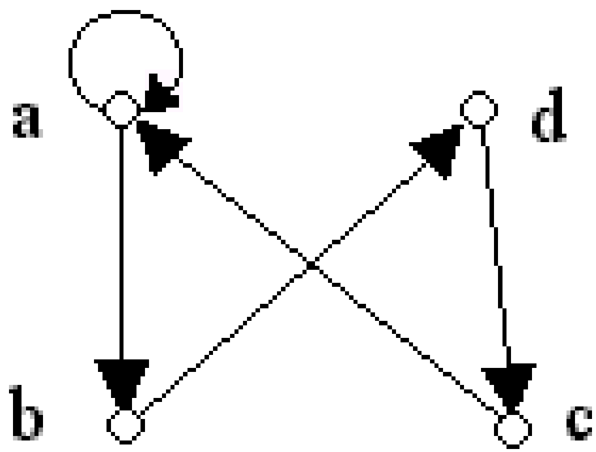
{‹a, a›, ‹a, b›, ‹b, d›, ‹c, a›, ‹d, c›}

= {‹a, a›, ‹a, b›, ‹a, d›, ‹b, c›, ‹c, a›, ‹c, b›, ‹d, a›}。

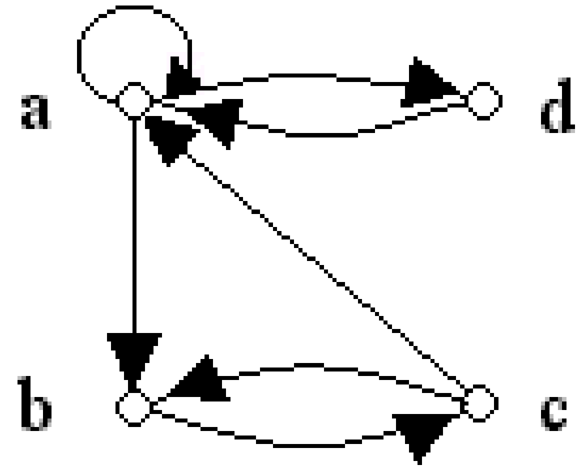
矩阵表示法:

$$M_R = \begin{array}{c|cccc} & a & b & c & d \\ \hline a & 1 & 1 & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 & 1 \\ c & 1 & 0 & 0 & 0 \\ d & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

$$M_R^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{array}{c|cccc} & a & b & c & d \\ \hline a & 1 & 1 & 0 & 1 \\ b & 0 & 0 & 1 & 0 \\ c & 1 & 1 & 0 & 0 \\ d & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$



(a)



(b)

图 4

- 关系图表示法:

构造R的关系图, 从图中每个顶点x出发, 找出经过长度为2的路能够到达的所有顶点y_1, y_2, … , y_k, 在R^2的关系图画出对应的k条边。

图4 (a)是R对应的关系图, (b)是R^2对应的关系图。

定理4a 设 $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$, $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$, $C = \{c_1, c_2, \ldots, c_p\}$。$R_1$ 是A到B的关系，R_2 是B到C的关系。它们的关系矩阵分别是M_{R1} 和M_{R2}，则**复合关系** $R_1 \circ R_2$ 的关系矩阵$M_{R_1R_2} = M_{R_1} M_{R_2}$

证 设 $M_{R_1} = \begin{pmatrix} a_{11} \ldots a_{1n} \\ a_{21} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots \\ a_{m1} \ldots a_{mn} \end{pmatrix}$, $M_{R_2} = \begin{pmatrix} b_{11} \ldots b_{1p} \\ b_{21} \ldots b_{2p} \\ \ldots\ldots \\ b_{n1} \ldots b_{np} \end{pmatrix}$

$M_{R_1R_2} = \begin{pmatrix} c_{11} \ldots c_{1p} \\ c_{21} \ldots c_{2p} \\ \ldots\ldots \\ c_{m1} \ldots c_{mp} \end{pmatrix}$, 其中$c_{ij} = 1$当且仅当$a_i(R_1 \circ R_2)c_j$

否则$c_{ij} = 0$。

依定义

$$M_{R_1}M_{R_2}=\begin{pmatrix} a_{11} \dots a_{1n} \\ a_{21} \dots a_{2n} \\ \dots\dots \\ a_{m1} \dots a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} \dots b_{1p} \\ b_{21} \dots b_{2p} \\ \dots\dots \\ b_{n1} \dots b_{np} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} d_{11} \dots d_{1} \\ d_{21} \dots d_{2p} \\ \dots\dots \\ d_{m1} \dots d_{mp} \end{pmatrix}$$

其中 $d_{ij}=\sum(a_{ik}^{(1)}\cdot b_{kj}^{(2)})$, $(i = 1, 2, \dots, m;\ j = 1, 2, \dots, p)$

注意 这里的加法与乘法都是布尔型的。

$$d_{ij} = 1 \Leftrightarrow \exists k\ (a_{ik} \wedge b_{kj}=1)$$

$$\Leftrightarrow \exists k\ (a_i R_1 b_k \wedge b_k R_2 c_j) \Leftrightarrow \exists c_{ij} = 1。$$

即对任意的 i和 j, $d_{ij} = 1$当且仅当$c_{ij}=1$。

故$M_{R_1R_2} = M_{R_1}M_{R_2}$ 。

定理 4b 设R_1是一个由A_1到A_2的关系, R_2是一个由A_2到A_3的关系, … , R_n是一个由A_n到A_{n+1}的关系

(A_i都是有限集, $1 \le i \le n+1$)。它们的关系矩阵分别是

$M_{R_1}, M_{R_2}, \ldots, M_{R_n}$, 则复合关系 $R_1 R_2 \ldots R_n$ 的关系矩阵

$$M_{R_1 R_2 \ldots R_n} = M_{R_1} M_{R_2} \ldots M_{R_n}$$

证 由定理4a运用归纳法可以证明。 ∎

定理 4c 关系矩阵的乘法满足结合律, 即

$$M_{R_1}(M_{R_2}M_{R_3}) = (M_{R_1}M_{R_2})\,M_{R_3}$$

证 由定理2.3.4, $M_{R_1}(M_{R_2}M_{R_3}) = M_{R_1}M_{R_2R_3} = M_{R_1R_2R_3}$

而 $(M_{R_1}M_{R_2})M_{R_3} = M_{R_1R_2}M_{R_1} = M_{R_1R_2R_3}$ ；

即$M_{R_1}(M_{R_2}M_{R_3}) = (M_{R_1}M_{R_2})M_{R_3}$。 $\blacksquare$

§ 4.3 关系的性质

- 设A为一集合, $R \subseteq A \times A$, 本节讨论R的一些基本性质.

定义 4.10 R在A上是自反的 $\Leftrightarrow \forall x\,(x \in A \rightarrow xRx)$,

即 $\forall x \in A$, 均有xRx, 则称R是A上自反的(reflexive)。

- 恒等元素<x, x>一个也不能少。

例 A上的全域关系E_A, 恒等关系I_A, 小于等于关系, 整除关系, 包含关系, 都是自反的。

但小于关系, 真包含关系不是自反的。

- R是A上自反的关系 $\Leftrightarrow I_A \subseteq R \subseteq E_A$。
- I_A是A上最小的自反关系;
- E_A是A上最大的自反关系。

定义 4.11 R在A上是反自反的 $\Leftrightarrow \forall x\,(x \in A \rightarrow x \not R x)$。

即 $\forall x \in A$, 都有$x \not R x$, 则称R是反自反的(antireflexive)。

- 恒等元素$\langle x, x\rangle$一个也不能要。

例 A上的空关系∅, 小于关系, 真包含关系都是反自反的。

- R是A上反自反的关系 $\Leftrightarrow I_A \cap R = \varnothing$。
- ∅是A上最小的反自反关系;
- $E_A - I_A$是A上最大的反自反关系。

定义 4.11.2 R在A上是非自反的(irreflexive),

即 $\exists y\,(y \in A \wedge y \not R y)$。

- 设集合A非空, A上的关系可以分类为:

  是自反的, 非自反的, 或者是反自反的。

例 $A = \{a, b, c\}$, A上的关系

$$R_1 = \{\langle a, a\rangle, \langle b, b\rangle, \langle c, c\rangle, \langle b, c\rangle\}$$

$$R_2 = \{\langle a, b\rangle, \langle b, a\rangle\}$$

$$R_3 = \{\langle b, b\rangle, \langle c, c\rangle, \langle b, c\rangle\}$$

由定义, R_1是自反的, R_2是反自反的, R_3是非自反的。■

- 自反性与反自反性是两个独立的概念,

  它们不是 互为否定的。

- 不是自反的 不一定 就是反自反的, 例如R_3 。
- 不是反自反的 不一定 就是自反的, 例如R_3 。

定义4.12 R在A上是对称的$\Leftrightarrow \forall x \forall y(x, y \in A \wedge xRy \rightarrow yRx)$,

即对于任意的$x, y \in A$, 若xRy, 则yRx,

称R在A上对称的(symmetric) 二元关系。

- 矩阵对称元素xRy与yRx “要有都有, 要无都无”。

例 A上的全域关系E_A, 恒等关系I_A,空关系$\varnothing$都是对称的。

- R是A上对称的关系 $\Leftrightarrow$ $R = R^{-1}$ 。

定义 4.12.2 R是非对称(asymmetric),

即 $\exists x, y \in A$, xRy, 但$y\not{R}x$。

定义4.13 R是反对称的$\Leftrightarrow \forall x \forall y(x,y \in A \land xRy \land yRx \rightarrow x=y)$

对于任意的x, y∈A, 若每当有 xRy和yRx 就必有x = y,

则称R是反对称的(antisymmetric)。

等价定义: $\forall x \forall y\ (x, y \in A \land xRy \land x \neq y \rightarrow y\cancel{R}x)$

- 即 xRy和yRx 至多只有一个出现, "有你无我" 。

例 A上的恒等关系I_A, 空关系$\varnothing$都是反对称的。

- R是A上反对称的关系 $\Leftrightarrow R \cap R^{-1} \subseteq I_A$ 。

- 关系的对称性与反对称关系也是两个截然不同的概念，它们之间没有必然的联系。

注意 A上的关系分成四类：对称的，反对称的，既是对称关系又是反对称关系(如恒等关系及其子集)，既不是对称关系又不是反对称关系。

例 $A = \{a, b, c\}$，A上的关系 $R = \{\langle a, b\rangle, \langle a, c\rangle, \langle c, a\rangle\}$，则R在A上不是对称关系，也不是反对称关系。

定义 4.14 R在A上是传递的 $\Leftrightarrow$

$$\forall x \forall y \forall z\,(x, y, z \in A \wedge xRy \wedge yRz \rightarrow xRz)。$$

即 对于任意的x, y, z∈A, 若 xRy且yRz, 就有xRz,

则 称R是可传递的(transitive)。

例 A上的全域关系E_A, 恒等关系I_A, 空关系∅, 整除关系, 小于等于关系, 包含关系, 都是传递的关系。

- R是A上传递的关系 $\Leftrightarrow R \circ R \subseteq R$。

定义 4.14.2 R是不可传递的(nontransitive)。

即 $\exists x, y, z \in A, xRy \wedge yRz$, 但$x \not R z$。

定义 4.14.3 R是反传递的 $\Leftrightarrow$

$\forall x \forall y \forall z\ (x, y, z \in A \wedge xRy \wedge yRz \rightarrow x \not R z)$。

即 对于任意的x, y, z∈A, 若 xRy且yRz, 则$x \not R z$,

则 称R是反传递的(antitransitive)。

- 在关系的5个基本类型的谓词表达式中,

  它们都是以条件式出现。

- 因而若条件式的前提为假, 则条件式必取真。

例 在关系的传递定义中, 若不存在 桥y能够首尾相邻的

两个序偶, 即找不到这样的序偶<x, y>与<y, z>,

我们也称关系满足传递性。 例 {<a, b>}

- 这是在判别关系的类型时值得注意的一个地方。

- 空关系既是反自反, 对称, 反对称, 传递的。

例 实数集R上的关系 "≤" 是自反, 反对称和可传递的。

关系 "<" 是反自反, 反对称和可传递的。

例 在集合S = {a, b, c, d}上的关系

$R = \{\langle b, c\rangle, \langle c, c\rangle, \langle c, d\rangle, \langle d, c\rangle\}$, 判断R的性质。

解 $a \in S$, 但 $a \cancel{R} a$, 所以R是非自反的;

- 但cRc, 所以R不是反自反的;
- $(b, c) \in R$, 但 $c \cancel{R} b$, 是非对称的;
- $c \neq d$, 但 cRd且dRc, 所以R不是反对称的;
- bRc, cRd, 但 $b \cancel{R} d$, 所以R不是可传递的。
- $\langle b, c\rangle, \langle c, c\rangle \to \langle b, c\rangle$, 所以R不是反传递的。

例 $R_6 = \{\langle a, b\rangle, \langle b, a\rangle, \langle b, c\rangle, \langle a, a\rangle\}$。

解 定义4.10-4.14中的5种性质都没有。

- 根据定义, 可以证明下面几个定理是成立的。

表 4.1 设$R \subseteq A \times A$，则下面命题是等价的

(1) R是自反的; /*表达方式

(2) $I_A \subseteq R \subseteq E_A$; /*集合表达式

(3) R^{-1}是自反的;

(4) M(R)主对角线上元素全是1;

(5) G(R)的每个顶点都有环。

表 4.1 设$R \subseteq A \times A$, 则下面的命题是等价的

(1) R是反自反的;　　　　　　　/*表达方式

(2) $I_A \cap R = \varnothing$;　　　　　　　/*集合表达式

(3) R^{-1}是反自反的;

(4) M(R)主对角线上的元素全为0;

(5) G(R)的每个结点处均无环。

表 4.1 设 $R \subseteq A \times A$, 则下面的命题是等价的

(1) R是对称的; /*表达方式

(2) $R^{-1} = R$; /*集合表达式

(3) M(R)是对称的; /*对称位置: 全1或全0

(4) G(R)中任何二个结点之间 若有有向边,

必有两条方向相反的有向边。

表 4.1 设 $R \subseteq A \times A$，则下面的命题是等价的

(1) R是反对称的； /*

(2) $R \cap R^{-1} \subseteq I_A$； /*集合表达式

(3) 在M(R)中，若任意的 $r_{ij} = 1\ (i \neq j)$，则必有 $r_{ji} = 0$；

(反之未必对, 即 对称的元素至多一个为1)；

(4) 在G(R)中, 对于任何二个结点 $x, y\ (x \neq y)$,

若有有向边<x, y>, 则必没有<y, x>。

表 4.1 设$R \subseteq A \times A$, 则下面的命题是等价的

(1) R是传递的;　　　　/*表示方式

(2) $R \circ R \subseteq R$;　　　　/* 集合表达式

(3) 对称矩阵M(R)中, 若 $r_{ij} = r_{jk} = 1$, 则 $r_{ik} = 1$;

(4) 在$M(R \circ R)$中，若任意的$r'_{ij} = 1$,

则M(R)中相应的元素$r_{ij} = 1$;

(5) 在G(R)中, 对于任何顶点x_i, x_j, x_k, 若有有向边

$<x_i, x_j>$, $<x_j, x_k>$则必有有向边$<x_i, x_k>$ 。

(即若从x_i到x_k有长为2的有向通路,

则从x_i到x_k有长为1的有向通路)。

定理 设R在A上是反自反和可传递的, 则R必是反对称的。

证 反证法。$\forall x,\ y \in A$,

假设 xRy 且 yRx, /*对称元素至多一个1

因为R是可传递的, 所以有xRx,

这与已知R是反自反矛盾。

由x, y的任意性, 所以R必是反对称的。 ■

- 关系是集合, 关系之间可以进行并、交、相对补、求逆、复合等运算, 经过上述运算后所得到的新关系是否仍保持有原来的性质呢?
- 这与关系原来的性质和运算种类有关。

- 我们将有关结果给出在关系运算表, 保持原来的性质的, 在对应的格内划 “√”, 否则划 “×”。

定理 设 $R, S \subseteq A \times A$

关系运算表4.2

运算\性质	自反性	反自反性	对称性	反对称性	传递性
R^{-1}	√	√	√	√	√
$R \cap S$	√	√	√	√	√
$R \cup S$	√	√	√	×	×
$R - S$	×	√	√	√	×
$R \circ S$	√	×	×	×	×

定理 4.15 设R和S为A上的对称关系,

则 (1) $R\cup S$也是A上的对称关系。

证 $\forall\langle x, y\rangle \in R\cup S$

$\Leftrightarrow \langle x, y\rangle\in R \vee \langle x, y\rangle\in S$

$\Rightarrow \langle y, x\rangle\in R \vee \langle y, x\rangle\in S$ /*R和S的对称性

$\Leftrightarrow \langle y, x\rangle \in R\cup S$, 所以$R\cup S$是对称的。

- 同理可证 $R\cap S$也是A上的对称关系。

(3) $R-S$也是A上的对称关系。

证 $\forall\langle x, y\rangle \in R-S$

$\Leftrightarrow \langle x, y\rangle\in R \wedge \langle x, y\rangle\notin S$

$\Rightarrow \langle y, x\rangle\in R \wedge \langle y, x\rangle\notin S$ /*R和S的对称性

$\Leftrightarrow \langle y, x\rangle\in R-S$, 所以$R-S$是对称的。

- 传递性对并运算不一定保持。

例 设 $A = \{1, 2, 3\}$, A上的关系

$R = \{\langle 1, 2\rangle\}$ 和 $S = \{\langle 2, 3\rangle\}$都是A上的传递关系,

但 $R \cup S = \{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle\}$却不是A上的传递关系。

- 关系运算表中保持性质的运算都可以严格证明。

对于不一定保持性质的运算都可以举出反例。