

## 随机变量的计算机产生

**内容摘要：**根据任务要求，用 C++ 语言编写程序产生相应的随机变量，并将数据输出到 data 文件夹中，用 MATLAB 读取数据并输出随机变量的直方图用于分析。

**任务 1：**采用 Wichmann-Hill 算法产生 10000 个均匀分布的随机变量，根据两组种子做出随机序列的直方图，两组种子自行设定。

**实验原理：**

Wichmann-Hill 算法是通过将 3 个周期相近的随机数发生器产生的数据序列进行相加，进而得到更大周期的数据序列。

定义 3 个随机数发生器，它们都是全周期的，产生的三个序列的周期分别是 30269、30307、30323：

$$x_{i+1} = (171x_i) \bmod(30269)$$

$$y_{i+1} = (170y_i) \bmod(30307)$$

$$z_{i+1} = (172z_i) \bmod(30323)$$

将这三个序列组合相加即可得到一个周期更大的均匀分布随机序列。

$$u_i = \left( \frac{x_i}{30269} + \frac{y_i}{30307} + \frac{z_i}{30323} \right) \bmod(1)$$

等价的乘性发生器中  $a=16555425264690$ ， $m=2.7817 \times 10^{13}$ 。

$x$ ， $y$ ， $z$  的初始迭代值通常称为“种子”，即  $x_1$ ， $y_1$ ， $z_1$ ，可设置为任意整数。

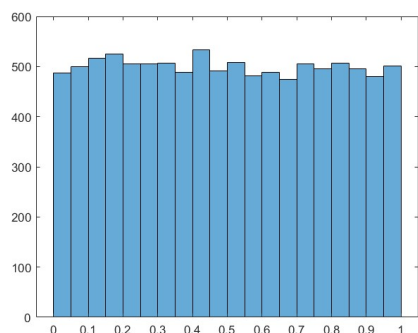
**实验过程：**

为了便于程序设计， $x$ ， $y$ ， $z$  从  $x_0$ ， $y_0$ ， $z_0$  开始迭代。

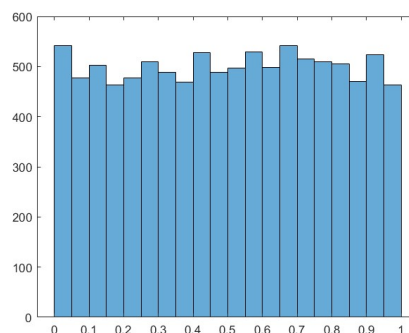
根据实验原理编写程序，设置种子值 (1, 2, 3) 及 (1, 233, 114514)，执行程序后得到两组均匀分布的随机序列(分别存于 data 文件夹下的 u1.dat, u2.dat)。

程序代码为 Task1.cpp, 后通过 HistogramGenerator.m 输出直方图。

**实验结果：**



种子值(1, 2, 3)



种子值(1, 233, 114514)

**任务 2：**使用逆变换法产生其他分布的随机变量（Rayleigh）设定  $\sigma^2$  为 0.5、1 和 2，分别做出 Rayleigh 随机变量序列的直方图，观察图形。

### 实验原理：

逆变换法：将一个不相关均匀分布的随机序列  $U$  映射到一个具有概率分布函数  $F_X(x)$  的不相关序列  $X$ （条件：要产生的随机变量的分布函数有闭合表达式）。即设定  $U = F_X(X)$ ，反解得到  $X = F_X^{-1}(U)$ 。

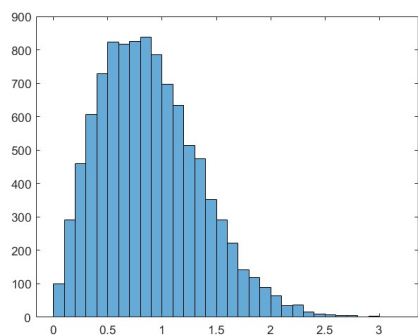
对于 Rayleigh 随机分布，其概率密度函数  $f_R(r) = \frac{r}{\sigma^2} \exp(-\frac{r^2}{2\sigma^2})$ 。概率分布函数  $F_R(r) = \int_0^r \frac{y}{\sigma^2} \exp(-\frac{y^2}{2\sigma^2}) dy = 1 - \exp(-\frac{r^2}{2\sigma^2})$ 。令其为  $U$ ，最后得  $R = \sqrt{-2\sigma^2 \ln(U)}$ 。

### 实验过程：

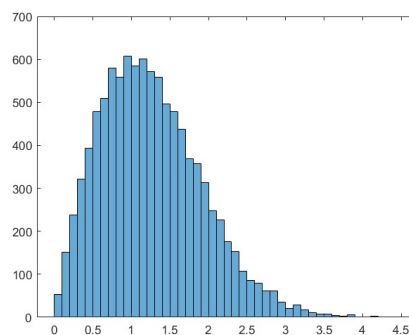
由任务 1 已得两组不相关均匀分布的随机序列  $U_1, U_2$ 。

根据实验原理编写程序，设置  $\sigma^2=0.5, 1, 2$ ，得到三个  $\sigma^2$  下的 Rayleigh 随机变量序列（由  $U_1$  分别存于 data 文件夹下的 r1\_0.5.dat, r1\_1.dat, r1\_2.dat，由  $U_2$  分别存于 data 文件夹下的 r2\_0.5.dat, r2\_1.dat, r2\_2.dat）。程序代码为 Task2.cpp，后通过 HistogramGenerator.m 输出直方图。

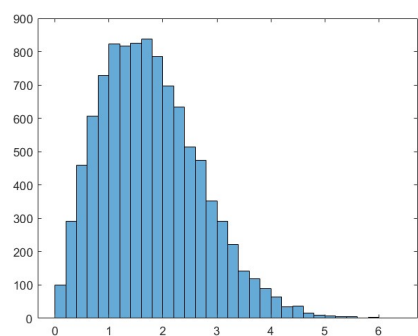
### 实验结果：



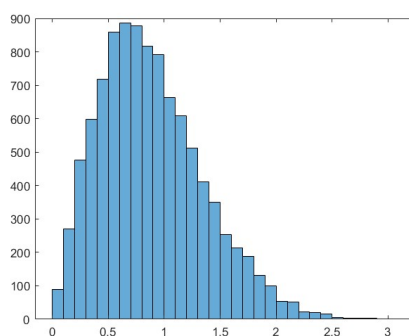
种子值(1, 2, 3),  $\sigma^2=0.5$



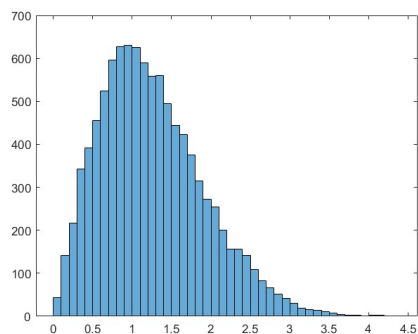
种子值(1, 2, 3),  $\sigma^2=1$



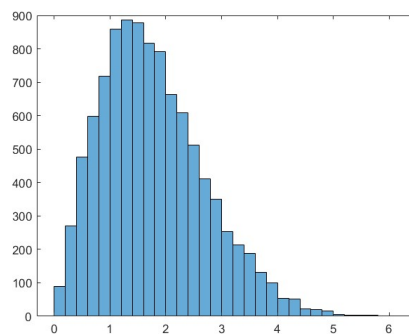
种子值(1, 2, 3),  $\sigma^2=2$



种子值(1, 233, 114514),  $\sigma^2=0.5$



种子值(1, 233, 114514),  $\sigma^2=1$



种子值(1, 233, 114514),  $\sigma^2=2$

**任务 3:** 通过 Rayleigh 分布随机变量产生 Gussian 分布随机变量, 设定  $\sigma^2$  为 1 产生标准正态分布的随机变量, 计算其方差并做直方图。

改变  $\sigma^2$  值观察直方图的变化。

#### 实验原理:

由随机过程的理论知两个相互独立的高斯随机变量的均方根是 Rayleigh 分布的随机变量:

$$f_{XY}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2\sigma^2}\right)$$

令  $x = r\cos\theta$ ,  $y = r\sin\theta$ ,  $x^2 + y^2 = r^2$ , 且由坐标变换  $\theta = \tan^{-1}(\frac{y}{x})$  可得

$$f_{R\theta}(r, \theta) = \frac{r}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right), \quad 0 \leq r < \infty, \quad 0 \leq \theta < 2\pi$$

令  $R$  为 Rayleigh 变量,  $\Theta$  是  $(0, 2\pi)$  均匀分布随机变量。由  $X =$

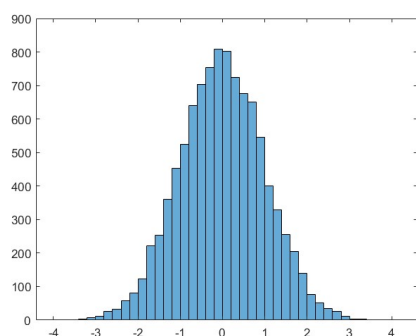
$R\cos\theta$ ,  $Y = R\sin\theta$ ,  $R = \sqrt{-2\sigma^2 \ln(U)}$  可得  $X = \sqrt{-2\sigma^2 \ln(U_1)} \cos 2\pi U_2$ ,  $Y = \sqrt{-2\sigma^2 \ln(U_1)} \sin 2\pi U_2$ 。其中  $U_1$  和  $U_2$  分别是两个均匀分布的随机变量, 产生的  $X$  和  $Y$  均为高斯随机变量。

### 实验过程:

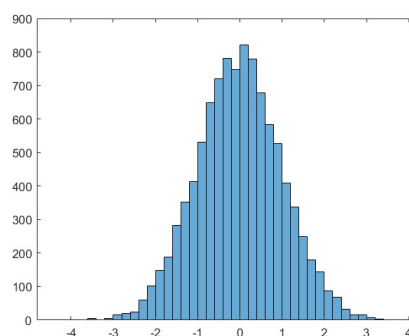
由任务 1 已得两组不相关均匀分布的随机序列  $U_1$ ,  $U_2$ 。

根据实验原理编写程序, 令  $\sigma^2=1$ , 得到两个相互独立的高斯随机变量  $X$ ,  $Y$  (分别存于 data 文件夹下的  $X\_1.dat$ ,  $Y\_1.dat$ )。改变  $\sigma^2$  的值, 令  $\sigma^2=2$ , 得到两个相互独立的高斯随机变量  $X$ ,  $Y$  (分别存于 data 文件夹下的  $X\_2.dat$ ,  $Y\_2.dat$ )。程序代码为 Task3.cpp, 后通过 HistogramGenerator.m 输出直方图。

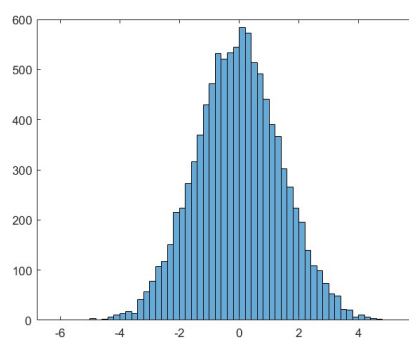
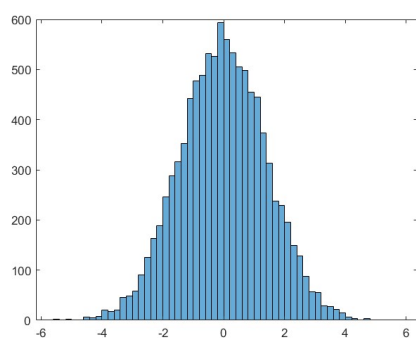
### 实验结果:



$X, \sigma^2=1$



$Y, \sigma^2=1$



$$X, \sigma^2=2$$

$$Y, \sigma^2=2$$

**任务 4：**根据课本附录 P377 产生离散随机变量，产生具有例 1 中分布律的随机变量，要求产生个数 10000，并绘制直方图。

**实验原理：**

$X=i$	1	2	3	4
$p_i$	0.20	0.15	0.25	0.40

产生伪随机数  $u$

若  $u < 0.20$ ，则令  $X=1$ ；

若  $0.20 \leq u < 0.35$ ，则令  $X=2$ ；

若  $0.35 \leq u < 0.60$ ，则令  $X=3$ ；

否则，令  $X=4$

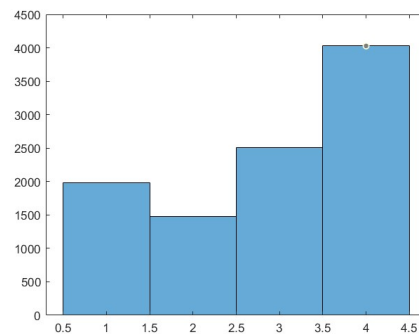
**实验过程：**

由任务 1 已得均匀分布的随机序列  $U_1$ 。以  $U_1$  作为任务 4 中的伪随机数  $u$ 。

根据实验原理编写程序，得到随机变量  $X$ （存于 data 文件夹下的 Task4\_X.dat）。

程序代码为 Task4.cpp，后通过 HistogramGenerator.m 输出直方图。

**实验结果：**



$X$