



厦门大学《概率论与数理统计》课程

期中试题2·答案

考试日期:

信息学院自律督导部整理



1. (6分) 设 A, B 都出现的概率与 A, B 都不出现的概率相等, 且 $P(A) = p$, 求 $P(B)$.

解 由题设条件得

$$P(AB) = P(\overline{AB}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - P(A) - P(B) + P(AB) \quad \text{-----4 分}$$

$$\text{故} \quad P(B) = 1 - P(A) = 1 - p. \quad \text{-----2 分}$$

2. (6分) 设某光学仪器厂制造的透镜, 第一次落下时打破的概率为 $1/2$, 若第一次落下未打破, 第二次落下打破的概率为 $7/10$, 若前两次落下未打破, 第三次落下打破的概率为 $9/10$. 试求透镜落下三次而未打破的概率.

解 以 $A_i (i=1,2,3)$ 表示事件“透镜第 i 次落下打破”, B 表示事件“透镜落下三次而未打

破”. 为 $B = \overline{A_1} \overline{A_2} \overline{A_3}$, 故有 -----2 分

$$\begin{aligned} P(B) &= P(\overline{A_1} \overline{A_2} \overline{A_3}) = P(\overline{A_1}) P(\overline{A_2} | \overline{A_1}) P(\overline{A_3} | \overline{A_1} \overline{A_2}) \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{7}{10}\right) \left(1 - \frac{9}{10}\right) = \frac{3}{200}. \end{aligned} \quad \text{-----4 分}$$

3. (8分) 人们为了解一支股票未来一定时期内价格的变化, 往往会去分析影响股票价格的基本因素, 比如利率的变化. 现假设人们经分析估计利率下调的概率为 60% , 利率不变的概率为 40% . 根据经验, 人们估计, 在利率下调的情况下, 该支股票价格上涨的概率为 80% , 而在利率不变的情况下, 其价格上涨的概率为 40% , 求该支股票将上涨的概率.

解 记 A 为事件“利率下调”, 那么 \overline{A} 即为“利率不变”, 记 B 为事件“股票价格上涨”.

依题设知 $P(A) = 60\%$, $P(\overline{A}) = 40\%$, $P(B|A) = 80\%$, $P(B|\overline{A}) = 40\%$, -----2 分

于是

$$P(B) = P(AB) + P(\overline{A}B) = P(A)P(B|A) + P(\overline{A})P(B|\overline{A}) = 60\% \times 80\% + 40\% \times 40\% = 64\%.$$

-----6 分

4. (12 分) 一条自动生产线上的产品, 次品率为 4%, 求解以下两个问题:

(1) 从中任取 10 件, 求至少有两件次品的概率;

(2) 一次取 1 件, 无放回地抽取, 求当取到第二件次品时, 之前已取到 8 件正品的概率.

解 (1) 由于一条自动生产线上的产品很多, 当抽取的件数相对较少时, 可将无放回抽取近似看成是有放回抽取, 每抽 1 件产品看成是一次试验, 抽 10 件产品相当于做 10 次重复独立试验, 且每次试验只有“次品”或“正品”两种可能结果, 所以可以看成 10 重伯努利试验.

设 A 表示“任取 1 件是次品”, 则 $p = P(A) = 0.04$, $q = P(\bar{A}) = 0.96$. -----2 分

设 B 表示“10 件中至少有两件次品”, 由伯努利公式有

$$P(B) = \sum_{k=2}^{10} P_{10}(k) = 1 - P_{10}(0) - P_{10}(1) = 1 - 0.96^{10} - C_{10}^1 \times 0.04 \times 0.96^9 = 0.0582 \quad \text{-----4 分}$$

(2) 由题意, 至第二次抽到次品时, 共抽取了 10 次, 前 9 次中抽得 8 件正品 1 件次品. 设 C 表示“前 9 次中抽到 8 件正品 1 件次品”, D 表示“第十次抽到次品”, 则由独立性和伯努利公式, 所求的概率为 -----4 分

$$P(CD) = P(C)P(D) = C_1^9 \times 0.04 \times 0.96^8 \times 0.04 = 0.0104. \quad \text{-----2 分}$$

5. (14 分) 设随机变量 X 具有概率密度

$$f(x) = \begin{cases} kx, & 0 \leq x < 3, \\ 2 - \frac{x}{2}, & 3 \leq x \leq 4, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

(1) 确定常数 k ; (2) 求 X 的分布函数 $F(x)$; (3) 求 $P\{1 < X \leq 7/2\}$.

解 (1) 由 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$, 得 $\int_0^3 kx dx + \int_3^4 \left(2 - \frac{x}{2}\right) dx = 1$, -----2 分

$$\text{解得 } k = 1/6, \text{ 于是 } X \text{ 的概率密度为 } f(x) = \begin{cases} \frac{x}{6}, & 0 \leq x < 3 \\ 2 - \frac{x}{2}, & 3 \leq x \leq 4. \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \quad \text{-----2 分}$$

(2) X 的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \int_0^x \frac{t}{6} dt, & 0 \leq x < 3 \\ \int_0^3 \frac{t}{6} dt + \int_3^x \left(2 - \frac{t}{2}\right) dt, & 3 \leq x < 4 \\ 1, & x \geq 4 \end{cases} = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x^2/12, & 0 \leq x < 3 \\ -3 + 2x - x^2/4, & 3 \leq x < 4 \\ 1, & x \geq 4 \end{cases} \quad \text{-----6 分}$$

$$(3) P\{1 < X \leq 7/2\} = \int_1^{7/2} f(x) dx = \int_1^3 \frac{1}{6} x dx + \int_3^{7/2} \left(2 - \frac{x}{2}\right) dx = \frac{1}{12} x^2 \Big|_1^3 + \left(2x - \frac{x^2}{4}\right) \Big|_3^{7/2} = \frac{41}{48},$$

$$\text{或 } P\{1 < X \leq 7/2\} = F(7/2) - F(1) = 41/48. \quad \text{-----4 分}$$

6. (12 分) 设二维随机变量 (X, Y) 具有概率密度

$$f(x, y) = \begin{cases} 2e^{-(2x+y)}, & x > 0, y > 0, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

(1) 求分布函数 $F(x, y)$; (2) 求概率 $P\{Y \leq X\}$.

$$\text{解 (1) } F(x, y) = \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^x f(x, y) dx dy = \begin{cases} \int_0^y \int_0^x 2e^{-(2x+y)} dx dy, & x > 0, y > 0, \\ 0, & \text{其它} \end{cases}, \quad \text{-----4 分}$$

$$\text{即有 } F(x, y) = \begin{cases} (1 - e^{-2x})(1 - e^{-y}), & x > 0, y > 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}. \quad \text{-----2 分}$$

(2) 将 (X, Y) 看作是平面上随机点的坐标, 即有 $\{Y \leq X\} = \{(X, Y) \in G\}$, 其中 G 为 xOy 平面上直线 $y = x$ 及其下方的部分, 于是

$$P\{Y \leq X\} = P\{(x, y) \in G\}$$

$$= \iint_G f(x, y) dx dy = \int_0^{+\infty} \int_y^{+\infty} 2e^{-(2x+y)} dx dy = \int_0^{+\infty} dy \int_y^{+\infty} 2e^{-(2x+y)} dx \quad \text{-----4 分}$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-y} [-e^{-2x}] \Big|_y^{+\infty} dy = \int_0^{+\infty} e^{-3y} dy = \frac{1}{3}. \quad \text{-----2 分}$$

7. (12 分) 设店主在每日开门营业时, 放在柜台上的货物量为 Y , 当日销售量为 X 假定一天中不再往柜台上补充货物, 于是 $X \leq Y$. 根据历史资料, (X, Y) 的概率密度函数为

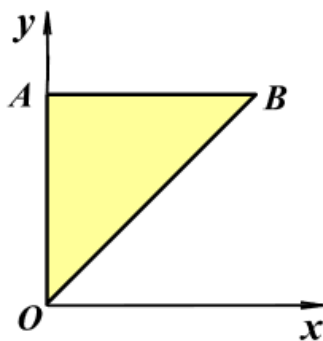
$$f(x, y) = \begin{cases} 1/200, & \text{当 } 0 \leq x \leq y, \quad 0 \leq y \leq 20 \text{ 时,} \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

即 (X, Y) 服从直角三角形区域 OAB 上的均匀分布, 见右图.
求

(1) 给定 $Y = y$ 条件下, X 的条件分布.

(2) 假定某日开门时, $Y = 10$ 件, 求这天顾客买走 $X \leq 5$ 件的概率. 如果 $Y = 20$ 件呢?

解 (1) Y 的边缘概率密度为



$$f_Y(y) = \begin{cases} \int_0^y \frac{1}{200} dx = \frac{y}{200}, & 0 \leq y \leq 20, \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \quad \text{-----3 分}$$

于是, 当 $0 < y \leq 20$ 时, 有 $f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \begin{cases} 1/y, & 0 \leq x \leq y, \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$, -----3 分

该结果表明: 对给定的 $0 < y \leq 20$, x 的条件分布是 $[0, y]$ 上的均匀分布.

(2) 因为 $f_{X|Y}(x|10) = 1/10, 0 \leq x \leq 10$, -----1 分

所求概率 $P\{X \leq 5 | Y = 10\} = \int_{-\infty}^5 f_{X|Y}(x|10) dx = \int_0^5 \frac{1}{10} dx = \frac{1}{2}$, -----2 分

即开门营业时有 10 件货物, 当日卖出不超过 5 件的概率为 1/2.

又因为 $f_{X|Y}(x|20) = 1/20, 0 \leq x \leq 20$ -----1 分

于是 $P\{X \leq 5 | Y = 20\} = F_{X|Y}(5|20) = \int_{-\infty}^5 f_{X|Y}(x|20) dx = \int_0^5 \frac{1}{20} dx = \frac{1}{4}$ -----2 分

即开门营业时有 20 件货物, 当日卖出不超过 5 件的概率仅为 1/4. 这表明货物销售量的概率与现有货物数量的关系很密切.

8. (10 分) 某商店对某种家用电器的销售采用先使用后付款的方式. 记使用寿命为 X (以年计), 规定:

- $X \leq 1$, 一台付款1500元;
- $1 < X \leq 2$, 一台付款2000元;
- $2 < X \leq 3$, 一台付款2500元;
- $X > 3$, 一台付款3000元.

设寿命 X 服从指数分布, 概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{10} e^{-x/10}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

试求该类家用电器一台收费 Y 的数学期望.

解 先求出寿命 X 落在各个时间区间的概率, 即有

$$P\{X \leq 1\} = \int_0^1 \frac{1}{10} e^{-x/10} dx = 1 - e^{-0.1} = 0.0952 \quad \text{-----1 分}$$

$$P\{1 < X \leq 2\} = \int_1^2 \frac{1}{10} e^{-x/10} dx = e^{-0.1} - e^{-0.2} = 0.0861 \quad \text{-----1 分}$$

$$P\{2 < X \leq 3\} = \int_2^3 \frac{1}{10} e^{-x/10} dx = e^{-0.2} - e^{-0.3} = 0.0779 \quad \text{-----1 分}$$

$$P\{X > 3\} = \int_3^{\infty} \frac{1}{10} e^{-x/10} dx = e^{-0.3} = 0.7408 \quad \text{-----1 分}$$

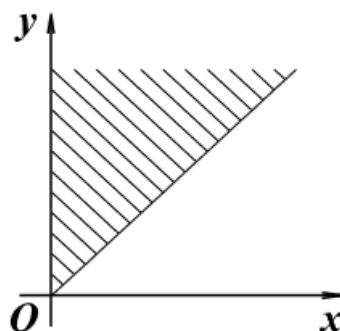
则 Y 的分布律为

Y	1500	2000	2500	3000	
p_k	0.0952	0.0861	0.0779	0.7408	-----3 分

得 $E(Y) = 273215$, 即平均一台收费 273215 元. -----3 分

9. (20 分) 设随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-y}, & 0 < x < y; \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$



(1) 求 X 与 Y 的边际概率密度, 并判断 X 与 Y 是否相互独立;

(2) 求在 $Y = y$ 的条件下, X 的条件概率密度;

(3) 求概率

$$P\{X + 2Y \leq 1\}, \quad P\{0 \leq X \leq 1/2 | Y \leq 1\} \quad P\{X \geq 2 | Y = 4\}.$$

解 (1) $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy, \quad -\infty < x < +\infty,$

当 $x \leq 0$ 时, $f_X(x) = 0,$

当 $x > 0$ 时, $f_X(x) = \int_x^{+\infty} e^{-y} dy = e^{-x},$

所以 $f_X(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$ -----4 分

类似可得 $f_Y(y) = \begin{cases} ye^{-y}, & y > 0 \\ 0, & y \leq 0 \end{cases}$ -----2 分

由于当 $0 < x < y$ 时, $f_X(x) \cdot f_Y(y) \neq f(x, y)$, 故 X 与 Y 不相互独立. -----3 分

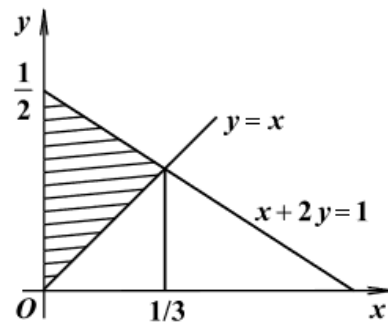
(2) 由(1)知, 当 $y > 0$ 时, $f_Y(y) > 0$, 所以, 在 $Y = y$ 的条件下, X 的条件概率密度为

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} = \begin{cases} 1/y, & 0 < x < y \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \quad \text{-----3 分}$$

$$(3) \quad P\{X+2Y \leq 1\} = \iint_{x+2y \leq 1} f(x,y) dx dy = \int_0^{\frac{1}{3}} dx \int_x^{\frac{1-x}{2}} e^{-y} dy = 1 + 2e^{-\frac{1}{2}} - 3e^{-\frac{1}{3}}, \quad \text{-----2 分}$$

$$P\{0 \leq X \leq 1/2 | Y \leq 1\} = \frac{P\{0 \leq X \leq 1/2, Y \leq 1\}}{P\{Y \leq 1\}}$$

$$= \frac{\int_0^{\frac{1}{2}} dx \int_x^1 e^{-y} dy}{\int_0^1 y e^{-y} dy} = \frac{1 - \frac{1}{2}e^{-1} - e^{-\frac{1}{2}}}{1 - 2e^{-1}} \quad \text{---2 分}$$



由于 $P\{Y=4\}=0$, 因此不能用前面的方法来求 $P\{X \geq 2 | Y=4\}$, 但由(2)知, 在 $Y=4$ 的条件下, X 的条件概率密度为

$$f_{X|Y}(x|4) = \begin{cases} 1/4, & 0 < x < 4 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}, \quad \text{-----2 分}$$

$$\text{故有 } P\{X \geq 2 | Y=4\} = \int_2^{+\infty} f_{X|Y}(x|4) dx = \int_2^4 \frac{1}{4} dx = \frac{1}{2}. \quad \text{-----2 分}$$