离散数学

Discrete Mathematics

吴梅红

厦门大学计算机科学系

E-mail: wmh@xmu.edu.cn

第二章 一阶谓词(predicate)逻辑

- 在命题演算中，简单命题作为基本研究单位，对它不再进行分解。不考虑命题之间的内在联系，只考虑一个命题的真假。这样就忽略了命题丰富的内涵。
- 有时甚至无法判断一些简单而又常见的推理。
- 如典型的逻辑三段论：

例 凡人都是要死的。　　　　p

Socrates是人。　　　　q

所以Socrates是要死的。　　r

- 则 $p \land q \rightarrow r$表示这个推理。直观上看，推理正确，r是前题p和q的有效结论。但推理的

形式结构不是重言式，这反映了命题逻辑的局限性。

- 原因是只将p, q, r看成独立的命题, 不考虑其内在联系。
- 不能对简单命题自身的内部特征作进一步的分析, 无法揭示前提和结论在形式结构方面的联系, 因此就不可能认识到这种推理的形式和规律, 这就使得命题逻辑的适用面比较狭窄。

例 熊猫是动物。 **p**

长颈鹿是动物。**q**

- 它们是两个简单命题, 只能用两个不同的符号来表示, 但这样的符号不能揭示这两个命题的共性。因此,
- 将命题演算扩展成一阶谓词演算, 对简单命题的成分、结构和简单命题间的共同特性等作进一步的分析,
- 这正是一阶谓词逻辑所要研究的内容。

§ 2.1 一阶First-order逻辑的基本概念

- 在一阶逻辑中, 简单命题被分解为个体词 (主语)与谓词 (谓语) 两部分。

一. 谓词、个体词和个体域

定义 可以独立存在的客体称为个体(individual)。

- 个体可以是一个具体的事物, 或是一个抽象的概念。

例 计算机、熊猫、围棋、自然数、定理、思想、爱国主义等都可以充当个体词。

- 表示具体的、特指的个体词，称为个体常项，常用小写字母**a, b, c**…来表示。
- 表示抽象的、泛指的、或在一定范围内变化的个体词, 称为个体变项, 常用小写字母**x, y, z**…来表示。

- 称个体变项的取值范围为个体域(Domain)或论域。
- 个体域可以是有穷集合或无穷集合。最大的个体域是包含宇宙全体事物的个体域, 称为全总个体域。
- 本书若无特别声明时, 个体域均指全总个体域。
- 陈述句是由主语和谓语两部分组成, 主语通常是个体。

定义 用来刻划一个个体的性质或多个个体之间关系的词称为谓词。谓词常用大写字母F, G, H, …来表示。

- 称表示有具体性质或关系的谓词, 称为谓词常项, 否则称为谓词变项。谓词都用F, G, H, …表示, 根据上下文的具体情况确定是谓词变项还是常项。
- 谓词中包含个体的数目称为谓词的元数。

- 含n(n≥1)个个体的谓词称为**n元谓词**。一元谓词是描述个体性质的, n(n≥2)元谓词刻画个体之间“关系”的。
- 用$P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$抽象地表示n(n≥1)元谓词, 它是以个体域为定义域, 以{0, 1}为值域的n元函数, 它不是命题。
- 第一章的逻辑联结词均是谓词。

例 将下列命题符号化:

(1) 熊猫是动物。

(2) 上海位于南京与杭州之间。

(3) 2是偶数且是素数。

解 (1) A(x): x是动物, 这里x是个体变项, 它可在动物范围内任意取值。 b: 熊猫, b是个体常项,

则命题可符号化为A(b)或A(熊猫)。

(2) B(x, y, z): x位于y与z之间。A: 上海, b: 南京, c: 杭州,

则命题可符号化为 B(a, b, c) 或为 B(上海, 南京, 杭州)。

(3) E(x): x是偶数, P(x): x是素数, a: 2,

则命题可符号化为 $E(a) \wedge P(a)$ 或 $E(2) \wedge P(2)$。

- 一般地, 一个由n个个体和n元谓词所组成的命题可表示为$P(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, 其中P表示n元谓词, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 分别表示n个个体。
- $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 的排列次序通常是重要的。例中 B(a, b, c) 不同于 B(b, a, c)。
- 例中A(x), B(x, y, z), E(x)实际上是个体变项x, y, z的简单函数, 它们均以{0, 1}为值域。

- 由有限个简单命题函数以及逻辑联结词组成的命题形式称为复合命题函数, 仍以{0, 1}为值域。
- 简单命题函数和复合命题函数统称为命题函数。

例 $(P(x) \vee Q(y, z)) \leftrightarrow R(x, z)$是命题函数。

- 将不带个体变项的谓词称为0元谓词。
- 命题逻辑中的命题常项与变项都可用0元谓词表示, 因而可把命题看作是谓词的特殊情况。
- 命题逻辑中的连结词、等值式、推理定律等均可在一阶逻辑中使用, 只是要注意谓词逻辑的特殊性就是了。

例 L(a, b)为0元谓词。当L仍为变项时, 它仍为命题变项。一旦L的意义明确后, 它就变成命题了。

- 现在考虑如下形式的命题在一阶逻辑中符号化的问题:

  (1) 所有的活人都呼吸。

  (2) 有的人吸烟。

- 在以上两个命题中, 除了有个体词和谓词外,

  还有表示数量的词(所有的, 有的)。

- 在命题中分析出个体和谓词后,

  仍不足以表达逻辑三段论和日常生活中的各种问题。

- 问题在于“所有的”和“有些”这种全称量词和特称量词还没有分析出来, 因此必须引入量词。

定义 称表示数量的词为量词(quantifier)。

- 量词分为两种:

(1) 全称(universal)量词“∀” 对应常用语言中的“所有”、“任意”、“一切”、“每一个”等。

∀x表示对个体域中的所有个体, x称为全称性变项,

∀xF(x)表示个体域里所有个体都有性质F。

(2) 存在(existence)量词“∃” 对应常用语言中的“存在着”、“有一个”、“有些”、“至少存在一个”等。

∃x表示存在个体域中的个体, x 称为存在性变项,

∃xA(x)表示存在着个体域中的个体具有性质A。

- 量词也可看作是对个体词所附加约束的词。
- 考虑前面两个命题的符号化问题。

- 使用量词将命题符号化后真值与所用个体域有关。

(I) 个体域为人类集合**D**。

(1) 符号化为: $\forall x F(x)$, 其中$F(x)$: x要呼吸。命题为真。

(2) 符号化为: $\exists x G(x)$: 其中$G(x)$: x吸烟。命题为真。

- 本个体域只有人而无其他事物, 以上两个命题均讨论人的性质, 所以命题符号化形式很简单。

(II) 个体域为全总个体域**D'**。

- 若将(1)仍符号化为: $\forall x F(x)$的形式, 其涵义变成了“宇宙间的一切事物都要呼吸”, 这与原命题不是一回事。
- 若将(2)仍符号化为: $\exists x G(x)$的形式, 表示“宇宙间有的事物吸烟”，也没有表达有的人吸烟。

- 在D’中要想将(1), (2)正确符号化, 必须将人从中分离出来, 就要引入新的谓词, 称这样的谓词为特性谓词。
- 而对个体变化的真正取值范围, 用特性谓词加以限制。
- 这里特性谓词M(x): x是人。在个体域D’的情况下, F(x)与G(x)的涵义同(I)。 (1)与(2)可作如下叙述:

(1) 对宇宙间的一切事物, 如果它是人, 则它要呼吸。

(2) 在宇宙间存在会吸烟的人。

- 则 (1)应符号化为 $\forall x\ (M(x) \rightarrow F(x))$。仍为真命题。
- 对全称量词后的特性谓词应作为蕴涵式的前件;

或前、后件同真, 或前件假(x非人时)。蕴含式总是真。

(2) 应符号化为 $\exists x\ (M(x) \wedge G(x))$。仍为真命题。

- 对存在量词后的特性谓词应作为合取式的一项。

- 若对全称量词的特性谓词作为合取而加入，就会将各种个体不加区分地混为一体，从而得出不正确的结论。
- 在一阶逻辑中，使用量词时应注意下列要点：

(1) 在不同的个体域中，命题符号化的形式可能不同，命题的真值也可能会改变。

(2) 如果个体域未做声明，一律使用全总个体域。

(3) 多个量词同时出现时，不能随意颠倒它们的顺序，否则后会改变原命题的含义。

(4) 在引入特性谓词后，全称量词后特性谓词为蕴涵式，存在量词后的特性谓词应作为合取式。

(5) 个体域和谓词的涵义确定后，n元谓词要转化为命题至少需要n个量词。

- 量词本身并不是一个独立的逻辑概念，

当个体域是有限集时，它可以用联结词替代。

- 设个体域$D = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$，则包含有全称量词的谓词公式$\forall x A(x)$表示$a_1$有性质A，$a_2$有性质A，…，$a_n$有性质A。因此

$$\forall x\, A(x) \Leftrightarrow A(a_1) \wedge A(a_2) \wedge \ldots \wedge A(a_n)$$

- 因为$A(a_i)(i = 1, 2, \ldots, n)$中都没有个体变项，也没有量词，所以这一合取式实际上是命题演算中的命题公式。
- 当个体域为有限集时，全称量词可看作是合取联结词的推广。

- 存在量词的谓词公式 $\exists x\ A(x)$表示a_1有性质A，或者a_2有性质A，…, 或者a_n 有性质A 。因此

$$\exists x\ A(x) \Leftrightarrow A(a_1) \vee A(a_2) \vee \ldots \vee A(a_n)。$$

- 当个体域为有限集时, 存在量词可看作是析取联结词的推广。
- 当个体域为有限时, 实际上是将一阶谓词的公式转化为命题公式, 即量词可以省略。
- 注意当个体域为无限时, 则不能转化。
- 当个体域为无限时, 全称量词"相当于"无限个合取联结词的作用, 一般说来, 这时的谓词公式不能转换成命题公式。

- 当个体域为无限时, 存在量词“相当于”无限个析取联结词的作用, 这时的谓词公式一般也不能转换成命题公式
- 如果一个谓词公式中包含有多个量词, 则可以从里到外地用上述方法将量词逐个消去, 因而使公式转换成命题演算中的命题公式。
- 但当个体域中元素很多, 甚至为无限集时, 此法就变得不实际甚至不可能了。
- 为了说明量词与否定联结词¬关系, 我们 约定, 出现在量词之前的否定, 不是否定该量词, 而是否定被量化了的整个命题。
- 在 § 2.3中我们将进一步研究量词转化律。

例 我为人人, 人人为我。

解 设 S(x, y): x为y服务, 用i表示我。命题表示为:

$$\forall x\, S(i, x) \land \forall x\, S(x, i)$$

例 勇敢者未必都是成功者。

解 设 B(x): x勇敢, S(x): x是成功者。命题表示为:

$\neg\forall x\, (B(x) \rightarrow S(x))$ 或 $\exists x\, (B(x) \land \neg S(x))$

例 并非一切劳动都能用机器代替。

解 设 L(x): x是一种劳动, M(x): x是一种机器, R(x, y): x被y代替。命题表示为:

$$\neg\forall x\, (L(x) \rightarrow \exists y\, (M(y) \land R(x,y)))$$

- 在引入个体词、谓词和量词后，数学上的所有概念和定理都可以表示为谓词逻辑的命题，

  因而可以用数理逻辑中的方法来研究数学的内容。

例 数学分析中函数f (x)在点a连续的定义为:

对任意的 $\varepsilon>0$, 存在一个 $\delta>0$, 使得对所有x,

若 $|x-a|<\delta$, 则 $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$, 符号化此定义。

解 令R(x): x是实数, G(x, y): x大于y。

$$\forall\varepsilon\,((R(\varepsilon)\wedge G(\varepsilon,0))\rightarrow$$

$$\exists\delta\,(R(\delta)\wedge G(\delta,0)\wedge$$

$$\forall x\,((R(x)\wedge G(\delta,|x-a|))\rightarrow G(\varepsilon,|f(x)-f(a)|))))。$$

- 有了谓词的概念和符号表示, 就可以更深刻地刻划周围的事物。任一命题都可以通过引入具有相应含义的谓词 (个体词视为常项)来表示,

  或认为一个命题是没有个体变项的零元谓词。
- 谓词逻辑是命题逻辑的推广,

  命题逻辑是谓词逻辑的特殊情形。 从而命题逻辑的很多概念和规则, 都可推广到谓词逻辑中延用。
- 然而, 在谓词逻辑中出现了 个体变项、谓词和量词 等新概念, 给我们的讨论带来复杂性,

  尤其是个体域常是无限的, 这加大了处理难度。

- 一个简单又深刻的例子是:
- 命题逻辑里, 一个公式不难判断它是否是重言式, 因为总可以用真值表进行判断。
- 但在谓词逻辑里, 就没有一般的能行算法, 来判断任一公式是否普遍有效(或重言)。
- 1936年Turing证明了: 当个体域D是无限集时, 对于一阶逻辑, (公式的重言性和矛盾性的)判定问题是不可解的。
- 困难就在于D是无限集以及对谓词设定的任意性. 然而, 并不排除谓词公式有子类(如命题逻辑)是可判定的。

§2.2 一阶谓词公式及解释

- 为使符号化更为准确和规范地进行谓词演算和推理，在本节给出一阶逻辑合适公式的概念。
- 为此先给出本书在一阶逻辑部分所用的字母表。

定义 2.1 字母表定义如下：

(1) 个体常项：$a, b, c, \ldots, a_i, b_i, c_i, \ldots, i \geqslant 1$;

(2) 个体变项：$x, y, z, \ldots, x_i, y_i, z_i, \ldots, i \geqslant 1$;

(3) 函数符号：$f, g, h, \ldots, f_i, g_i, h_i, \ldots, i \geqslant 1$;

(4) 谓词符号：$F, G, H, \ldots, F_i, G_i, H_i, \ldots, i \geqslant 1$;

(5) 量词符号：$\forall, \exists$;

(6) 联结词符号：$\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$;

(7) 括号与逗号：(,), ,。

定义 2.2 项的递归定义:

(1) 个体常项和变项是项。

(2) 若$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$是任意的n元函数, $t_1, t_2, \ldots, t_n$是任意的n个项, 则 $\varphi(t_1, t_2, \ldots, t_n)$是项。

(3) 只有有限次地应用(1), (2)形成的符号串才是项。█

- 根据定义,常项, 变项以及由它们生成的各种函数及复合函数都叫做项。

例 a, b, x, y, z, $f(x, y) = x \cdot y$, $g(x, y) = x^2 + y^2$,

$h(x, y) = 2x-y$ 都是项。

$f(x, g(x,y)) = x(x^2 + y^2)$,

$g(f(x, y), h(x, y)) = x^2y^2 + (2x-y)^2$ 等也都是项。

定义 2.3 设$R(x_1, x_2, \ldots, x_n)$是任意的**n元谓词**, $t_1, t_2, \ldots, t_n$ 是任意的n个项, 则称 $R(t_1, t_2, \ldots, t_n)$是**原子公式**。■

- 1元谓词F(x), G(y), 2元谓词H(x, y)等都是原子公式。
- 有了原子公式就能定义合式公式了。

定义 2.4 **合式公式**也称谓词公式, 简称公式的递归定义:

(1) 原子公式是合式公式(Well formed formula, WFF)。

(2) 若A是合式公式, 则$(\neg A)$也是合式公式。

(3) 若A, B是合式公式, 则 $(A\vee B)$、$(A\wedge B)$、$(A \rightarrow B)$、$(A \leftrightarrow B)$也是合式公式。

(4) 若A是合式公式, 则$\forall xA$和$\exists xA$也是合式公式。

(5) 只有有限次地应用(1)-(4)形成的符号串才是合式公式.

- 谓词公式是由原子谓词公式、命题联接词、量词以及圆括号按照上述规则组成的一个符号串。
- 我们本章讨论的是一阶谓词逻辑, 限定量词仅作用于个体变项,
- 不允许量词作用于命题变项、谓词变项和函数变项, 也不讨论谓词的谓词(二阶)。
- 个体变项有自由free变项和约束bound变项之分。

定义 2.5 在公式 $\forall x\ A(x)$ 和 $\exists x\ A(x)$中, 称x为 **指导变项**,

A为相应量词的**辖域(scope)**。 在$\forall x$和$\exists x$的**辖域**中,

x的所有出现都称为**约束(bound)出现**,

A中**不**是约束出现的其它变项均称为是**自由出现的**。■

- 公式中约束出现的变项是**约束变项**,
- 自由**(free)**出现的变项是**自由变项**。

  可把**自由变项**看作是公式中的**参数**。
- 若量词后**有**括号, 在**括号内的公式即为此量词的辖域**。

  若量词后**无**括号, 则量词后**最短的公式**为此量词的辖域

- 从约束变项的概念可以看出, $P(x_1, x_2, \ldots, a_n)$是n元谓词, 它有n个相互独立的自由变项, 若对其中k个变项进行约束, 则成为n – k元谓词。

定义2.6 设A为任意一公式, 若A中无自由出现的个体变项, 则称A是封闭的公式, 简称闭式。

例 $\exists x\, P(x, y, z)$是二元谓词,

$\forall x \exists y\, Q(x, y, z)$是一元谓词。

例 $\exists x\, (x < 88 \land x$是奇数$)$, 是闭式, 个体变项x是约束变项。

- 这已经不是一个命题函数, 而是一个命题。它相当于说 "存在有小于88的奇数", 这是一个真命题。

例 ∀y (如果y是辣椒, 则y是红的), 是闭式, 个体变项y是约束变项。这也不是一个命题函数, 而是一个命题。

- 对于其中的个体变项不需要再作代替, 它的含义是确定的, 它断定“一切辣椒都是红的”, 这当然是一个假命题。
- $\forall x\,\forall y\,(F(x)\wedge G(y)\rightarrow H(x,y))$是闭式。
- 而$F(x)\wedge G(y)$, $F(x)\rightarrow\forall y\,(G(y)\rightarrow H(x,y))$等都不是闭式
- 要想使含n(n≥1)个自由出现的个体变项的公式变成闭式, 至少要加n个量词。

例 要使$(F(x)\rightarrow G(x,y)\wedge L(x,y,z))$成为闭式, 可加3个量词, 如$\forall x\,(F(x)\rightarrow\exists y\,(G(x,y)\wedge\forall z\,L(x,y,z)))$就已成为闭式。

例 (1) $\forall x\, P(x) \wedge Q(y)$, 公式中的个体变项x是约束变项，

y是自由变项, $\forall$的辖域是$P(x)$。

(2) $\forall x(A(x) \vee \exists y\, B(x, y))$,

$\forall x$的辖域是$A(x) \vee \exists y\, B(x, y)$,

$\exists y$的辖域是$B(x, y)$;

x和y两者的所有出现都是约束出现。

(3) $\exists x\, (A(x) \rightarrow B(x))$, $\exists x$的辖域是$A(x) \rightarrow B(x)$,

x的所有出现都是约束出现。

(4) $\exists x\, A(x) \rightarrow B(x)$, $\exists x$的辖域是$A(x)$,

x在$B(x)$中是自由出现。

- 注意区别(3)和(4)。

- 有时同一个个体变项在同一个公式中, 既有约束出现又有自由出现。为避免混淆, 使一个变项在同一个公式中不同时是约束的又是自由出现的, 可采用下面两条规则
- 任一个公式的约束变项的符号是无关紧要的。
- 对约束变项进行换名(replacement)时须遵守如下的

换名原则: 将公式A中某量词辖域中, 某约束变项的所有出现及相应的指导变项, 改成该量词辖域中未曾出现过的个体变项符号(最好是公式中未曾出现过的符号), A中其余部分不变, 则所得公式A’与A等值。

- 对公式中自由变项的更改叫做代替(substitution)。

代替规则:将公式A中某自由出现的个体变项的所有出现,用A中未曾出现过的个体变项符号代替,

A中其余部分不变,则所得公式A’与A等值。

(1) 对于谓词公式中的自由变项,可以代替,

代替时须对该自由变项的所有出现同时进行代替。

(2) 代替时所选用的变项符号与原公式中所有变项的符号不能相同。

- 下表列出了换名规则与代替规则的主要区别:

区别表

	换名规则	代替规则
对象	约束变项	自由变项
范围	一个量词及其辖域内	整个公式
结果	只能换名为另一变项,不能换名为个体常项,换名后公式的含义不变。	可以代以另一变项。还可代入个体常项,公式由具有普遍意义变成仅对该个体常项有意义。

例 6.2.4 $\forall x\,(Q(x) \to R(x, y)) \lor \exists z\,P(x, z)$

解 用约束变项的换名规则得:

$\forall u\,(Q(u) \to R(u, y)) \lor \exists z\,P(x, z)$;

或用自由变项得代替规则得:

$\forall x\,(Q(x) \to R(x, y)) \lor \exists z\,P(u, z)$。

但下面的改名都是不对的。

(1) $\forall u\,(Q(u) \to R(x, y)) \lor \exists z\,P(x, z)$

(2) $\forall x\,(Q(u) \to R(x, u)) \lor \exists z\,P(x, z)$

(3) $\forall u\,(Q(u) \to R(u, y)) \lor \exists z\,P(u, z)$

(4) $\forall y\,(Q(y) \to R(y, y)) \lor \exists z\,P(x, z)$

- 当多个量词连续出现, 它们之间无括号分隔时, 约定从左到右的次序读出。后面的量词在前面量词的辖域之中, 且量词对变项的约束与量词的次序有关。

  注意: 词的次序不能颠倒, 否则将与原命题意义不符。

例 $\forall y \exists x\ (x < (y - 2))$, x, y的个体域为实数集。

$\forall y$ 的辖域为 $\exists x\ (x < (y - 2))$,

$\exists x$ 的辖域为 $x < (y - 2)$。

表示任何实数y均存在有实数x, $x < y - 2$, 是真命题。

- 将量词次序改为 $\exists x \forall y (x < (y - 2))$,

表示存在一个实数x, 对任何实数y均有$x<y-2$, 是假命题

- 一般情况下, 一个一阶逻辑公式中含有个体常项、变项(自由出现的或约束出现的), 函数的常项、变项, 谓词的常项、变项等。若对各种变项都指定特殊的常项去代替, 就构成公式的一个解释, 有时使其成为命题, 有确定的真值。

定义 2.7 谓词公式A的每一个解释I由下面4部分组成:

(1) 非空的个体域D;

(2) D中一部分特定元素 (用来解释个体变项);

(3) D上一些特定函数 (用来解释出现的函数变项);

(4) D上一些特定谓词 (用来解释谓词变项)。

例 $\forall x \forall y\,(F(x) \wedge F(y) \wedge G(x, y) \rightarrow H(f(x, y), g(x, y)))$,

这是一个一阶逻辑中的合式公式, 没有什么意义。

- 但当我们给这个符号串一个解释,

  使它就具有惟一的真值, 变成一个命题了。

解释1 个体域D: 全总个体域; $F(x)$: x是实数;

$G(x)$: $x \neq y$; $H(x, y)$: $x > y$;

$f(x, y) = x^2 + y^2$; $g(x, y) = 2xy$.

- 在解释1下, 本公式涵义为: 对于任意的x, y, 若x是实数, y是实数, 并且$x \neq y$, 则$x^2 + y^2 > 2xy$。这是真命题。

解释2 只将$H(x, y)$改为$x < y$, 其他情况同解释1,

则得到的命题为假命题。

1. 有的公式在具体的解释中真值确定, 即变成了命题。

- 有的公式在某些解释中真值仍然不能确定, 仍不是命题。

2. 闭式(不包含自由变项)在任何解释中都成为命题。

闭式中每个个体变项都受量词的约束, 因而在具体解释中总表达一个意义确定的语句, 即真命题或假命题。

3. 不是闭式的公式在某一解释中, 可能成为命题; 也可能不能成为命题。

例 $\forall x\,(P(x) \lor Q(x))$,

解释: 个体域是{1, 2}, $P(x)$: $x = 1$, $Q(x)$: $x = 2$,

求公式的真值。

解 $\forall x\,(P(x) \lor Q(x))$

$\Leftrightarrow (P(1) \lor Q(1)) \land (P(2) \lor Q(2))$

但 $P(1)$为1, $Q(1)$为0, $P(2)$为0, $Q(2)$为1。

所以 $\forall x\,(x = 1 \lor x = 2)$

$\Leftrightarrow (1 \lor 0) \land (0 \lor 1)$

$\Leftrightarrow 1$

例 **G(x, y)是二元谓词,**

解释: 指定D为实数域, G(x, y)表示“x大于y”,

则G有了确定的含义, 但还不是命题。

- 如再指定π为3.14156, e为2.71828,

则G(π, e)就是命题“3.14156大于2.71828”, 其真值为1。

例 S(x)表示 $x^2 + 1 = 0$,

- 若x的个体域为实数, 则这是一个矛盾式。
- 若x的个体域为复数, 则除了S(i)和S(–i)是真值为1的命题外, 其余情形均为真值为0的命题。

例 若个体域为{a, b, c}, 消去$\forall x \neg P(x) \vee \forall x P(x)$中的量词:

解 $\forall x \neg P(x) \vee \forall x P(x)$

$\Leftrightarrow (\neg P(a) \wedge \neg P(b) \wedge \neg P(c)) \vee (P(a) \wedge P(b) \wedge P(c))$

例 设个体域为{0, 1}, 将$\exists x\, (\forall y\, F(x,y) \vee G(x))$

转换成不含量词的形式:

解 $\exists x\, (\forall y\, F(x, y) \vee G(x))$

$\Leftrightarrow \exists x\, ((F(x, 0) \wedge F(x, 1)) \vee G(x))$

$\Leftrightarrow ((F(0,0) \wedge F(0,1)) \vee G(0)) \vee ((F(1,0) \wedge F(1,1)) \vee G(1))$

- 同在命题逻辑一样, 在一阶逻辑中也将公式分类为:

定义 2.8 设A为一公式,

- 若A在任何解释下都为真,

  则称A为永真式 (或称逻辑有效式)。

- 如果A在任何解释下都是假的,

  则称A为矛盾式 (或称永假式)。

- 若至少存在着一种解释使A为真, 则称A是可满足式. ■

- 永真式一定是可满足式, 但反之不然。

- 一般情况下, 由于公式的复杂性和解释的多样性,

  到目前为止, 还没有一个可行的算法, 用来判断某一公式是可满足的, 还是不可满足的(矛盾式)。/*Open

定义 2.9 设A_0是含命题变项$p_1, p_2, \ldots, p_n$的命题公式, $A_1, A_2, \ldots, A_n$是n个谓词公式, 用$A_i\,(1 \leqslant i \leqslant n)$处处代替$A_0$中的$p_i$, 所得的公式A称为$A_0$的代换实例。

例 $F(x) \to G(x)$, $\forall x F(x) \to \exists y G(y)$等是$p \to q$的代换实例;

- $F(x, y) \wedge \forall x G(x)$, $\forall x F(x) \wedge \exists y G(y)$等都可以作为$p \wedge q$的代换实例。
- 可以证明, 重言式的代换实例均为永真式, 而矛盾式的代换实例均为矛盾式。

例2.9 判断下列公式中, 哪些是永真式, 哪些是矛盾式?

(1) $\forall x F(x) \rightarrow (\forall x \exists y G(y) \rightarrow \forall x F(x))$,

解: 这是$p \rightarrow (q \rightarrow p)$的代换实例,

而$p \rightarrow (q \rightarrow p) \Leftrightarrow \neg p \vee (\neg q \vee p) \Leftrightarrow 1$

所以(1)是永真式。

(2) $((\exists x F(x) \vee \exists y G(y)) \wedge \neg \exists y G(y)) \rightarrow \exists x F(x)$,

解: 这是$(p \vee q) \wedge \neg q \rightarrow p$的代换实例,

由I_5析取三段论可知, $(p \vee q) \wedge \neg q \rightarrow p$是重言式,

所以(2)是永真式。

(3) $\neg(F(x) \rightarrow G(x, y)) \wedge G(x, y)$,

解: 这是$\neg(p \rightarrow q) \wedge q$的代换实例,

$\neg(p \rightarrow q) \wedge q \Leftrightarrow \neg(\neg p \vee q) \wedge p \Leftrightarrow p \wedge \neg q \wedge q \Leftrightarrow 0$.

所以(3)是矛盾式。

(4) $(\forall xF(x) \vee \neg\forall xF(x)) \rightarrow (\exists yG(y) \vee \neg\exists yG(y))$.

解: 这是$(p \vee \neg p) \rightarrow (q \vee \neg q)$的代换实例,

$(p \vee \neg p) \rightarrow (q \vee \neg q) \Leftrightarrow 1 \rightarrow 1 \Leftrightarrow 1$是重言式,

所以(4)是永真式。

- 对于不是重言式和矛盾式的代换实例, 判断它们是否为永真式或矛盾, 确实不是易事。对特殊简单公式可判断

例2.10 讨论下面公式的类型:

A: $\forall xF(x) \rightarrow \exists xF(x)$,

证: 设I为任意一个解释, 其个体域为D。

- 若$\exists b \in D$, 使得F(b)为假,

  则前件$\forall xF(x)$为假, A为真。

- 若$\forall x \in D$, F(x)均为真,

  则前件$\forall xF(x)$和后件$\exists xF(x)$都为真, 从而A也为真。

- 由I的任意性, 所以A是永真式。

例2.10 讨论下面公式的类型:

B: $\forall x \exists y F(x, y) \rightarrow \exists x \forall y F(x, y)$,

证: 取解释I如下: 个体域为自然数集N, F(x, y): $x \leqslant y$。

在I下, B的前、后件(令x=0)均为真, 所以B不会是矛盾式。

- 再取解释II如下:个体域为自然数集N, F(x, y): $x = y$。

在II下, B的前件为真, 后件为假, 故B假,

这又说明B不会是永真式。

- 综上所述, B是非永真式的可满足式。

§ 2.3 一阶逻辑等值式与前束范式

- 与命题逻辑一样, 在一阶逻辑的演算及推理过程中, 一些重要的永真等价式起着很重要的作用

定义 2.10 设A, B是一阶逻辑中任意二公式,

若$A \leftrightarrow B$是永真式, 则称A和B是等值的, 记作$A \Leftrightarrow B$, 称$A \Leftrightarrow B$为等值式。 ■

定义设A, B是一阶逻辑中任意二公式,

若 $A \to B \Leftrightarrow 1$, 则称A蕴含B, 记作$A \Rightarrow B$。 ■

- 当个体域是有限集合的时候, 原则上来说, 可以用真值表法来验证一个公式是否为永真公式, 或者验证两个公式是否等值。

- 包含有量词而不包含自由变项的谓词公式, 实际上也是命题演算的公式。
- 由于重言式的代换实例都是永真式, 第一章P10和P24的24个等值式的代换实例都是一阶逻辑中的等值式。
- 因此对命题演算中的所有重言式, 若将其中每一个命题变项分别用这些公式去作代入, 便可得到谓词演算中的永真公式。

例 在 $P \vee \neg P$ 和 $(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\neg P \vee Q)$,

若用 $\forall x\, P(x)$ 代替P, 用 $\exists x\, Q(x)$ 代替Q, 得到永真公式:

$\forall x\, P(x) \vee \neg \forall x\, P(x)$,

$(\forall x\, P(x) \rightarrow \exists x\, Q(x)) \leftrightarrow (\neg \forall x\, P(x) \vee \exists x\, Q(x))$。

- 下面给出一阶逻辑中一些基本的等值式。

  其中的A(x), B(x)均为有x自由出现的任意公式。

1. 在有限个体域$D = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$中消去量词等值式

- 全称量词可看作是合取联结词的推广。
- 存在量词可看作是析取联结词的推广。

(1) $\forall x\, A(x) \Leftrightarrow A(a_1) \wedge A(a_2) \wedge \ldots \wedge A(a_n)$

(2) $\exists x\, A(x) \Leftrightarrow A(a_1) \vee A(a_2) \vee \ldots \vee A(a_n)$。

2. 量词否定等值式 (量词转换律):

反映量词的特性以及量词与联结词之间的关系。

(3) $\neg\forall x\, A(x) \Leftrightarrow \exists x\, \neg A(x)$ /* ∀与∃对偶

(4) $\neg\exists x\, A(x) \Leftrightarrow \forall x\, \neg A(x)$

- 当个体域为有限集 $D = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$,

  量词转换律证明如下:

Proof: $\neg\forall x\, A(x)$

$$\Leftrightarrow \neg(A(a_1) \land A(a_2) \land \ldots \land A(a_n))$$

$$\Leftrightarrow \neg A(a_1) \lor \neg A(a_2) \lor \ldots \lor \neg A(a_n)$$

$$\Leftrightarrow \exists x\, \neg A(x)$$

Proof: $\neg\exists x\, A(x)$

$$\Leftrightarrow \neg(A(a_1) \lor A(a_2) \lor \ldots \lor A(a_n))$$

$$\Leftrightarrow \neg A(a_1) \land \neg A(a_2) \land \ldots \land \neg A(a_n)$$

$$\Leftrightarrow \forall x\, \neg A(x)$$

- 对于无穷个体域, 可作语义解释如下:
- 如果 $\forall x\, A(x)$为真,

  则可以把$\neg\forall x\, A(x)$理解成“命题$\forall x A(x)$是假的”,

  而它与“存在某些 x, A(x)不是真的”意思等价。

  即 $\neg\forall x\, A(x) \Leftrightarrow \exists x\, \neg A(x)$。
- 类似地, 如果$\exists x\, A(x)$为真, 则$\neg\exists x\, A(x)$表示

  “至少存在一个x, 能使A(x)为真”这个命题为假。

  它等价于“不存在任何一个x能使A(x)为真”,

  或者“对于所有的x, A(x)是假的”。即

  $$\neg\exists x\, A(x) \Leftrightarrow \forall x\, \neg A(x)$$

- 量词转换律说明:

(1) 在谓词演算中只要有一个量词就够了。

(2) 量词前面的否定符号可深入至量词辖域内,

但与此同时必须将存在量词和全称量词作对换。

- 其他常见的等值关系式和蕴含关系式列于下表中,

各式中的**B**表示任意一个不含有约束变项**x**的公式。

3. 量词辖域收缩与扩张律, B中不含有约束变项x:

(5-1) $\forall x\,(A(x) \vee B) \Leftrightarrow \forall x\, A(x) \vee B$ /* ∨可交换

(5-2) $\forall x\,(A(x) \wedge B) \Leftrightarrow \forall x\, A(x) \wedge B$ /* ∧可交换

(5-3) $\forall x\,(A(x) \rightarrow B) \Leftrightarrow \exists x\, A(x) \rightarrow B$

(5-4) $\forall x\,(B \rightarrow A(x)) \Leftrightarrow B \rightarrow \forall x\, A(x)$

(6-1) $\exists x\,(A(x) \vee B) \Leftrightarrow \exists x\, A(x) \vee B$ /* ∨可交换

(6-2) $\exists x\,(A(x) \wedge B) \Leftrightarrow \exists x\, A(x) \wedge B$ /* ∧可交换

(6-3) $\exists x\,(A(x) \rightarrow B) \Leftrightarrow \forall x\, A(x) \rightarrow B$

(6-4) $\exists x\,(B \rightarrow A(x)) \Leftrightarrow B \rightarrow \exists x\, A(x)$

例2.13 以5-2前的公式为基础证明5-3和5-4

证5-3 $\forall x\,(A(x) \rightarrow B)$

$\Leftrightarrow \forall x\,(\neg A(x) \vee B)$ /*E_{12}蕴含等值式

$\Leftrightarrow \forall x\,\neg A(x) \vee B$ /*公式5-1辖域收缩

$\Leftrightarrow \neg\exists x\, A(x) \vee B$ /*量词否定转换

$\Leftrightarrow \exists x\, A(x) \rightarrow B$ /*E_{12}蕴含等值式

证5-4 $\forall x\,(B \rightarrow A(x))$

$\Leftrightarrow \forall x\,(\neg B \vee A(x))$ /*E_{12}蕴含等值式

$\Leftrightarrow \neg B \vee \forall x\, A(x)$ /*公式5-1辖域收缩

$\Leftrightarrow B \rightarrow \forall x\, A(x)$ /*E_{12}蕴含等值式

- 同理可证6-3和6-4

4. 量词分配等值式

(7) $\forall x\,(A(x) \land B(x)) \Leftrightarrow \forall x\, A(x) \land \forall x\, B(x)$

(8) $\exists x\,(A(x) \lor B(x)) \Leftrightarrow \exists x\, A(x) \lor \exists x\, B(x)$

5. 量词分配蕴涵律 P53

(9) $\forall x\, A(x) \lor \forall x\, B(x) \Rightarrow \forall x\,((A(x) \lor B(x))$

(10) $\exists x\,(A(x) \land B(x)) \Rightarrow \exists x\, A(x) \land \exists x\, B(x)$

注意: $\forall x\,(A(x) \lor B(x)) \not\Rightarrow \forall x\, A(x) \lor \forall x\, B(x)$

$\exists x\, A(x) \land \exists x\, B(x) \not\Rightarrow \exists x\,(A(x) \land B(x))$

$\forall$不能对$\lor$分配, $\exists$不能对$\land$分配。

(11) $\forall x\,(A(x) \to B(x)) \Rightarrow \forall x\, A(x) \to \forall x\, B(x)$

(12) $\forall x\,(A(x) \to B(x)) \Rightarrow \exists x\, A(x) \to \exists x\, B(x)$

例 设个体域为自然数集合N,

O(x)表示“x是奇数”, E(x)表示“x是偶数”。

(1) $\forall x\,(O(x) \vee E(x))$的涵义为:

任意的自然数不是奇数就是偶数, 这是真命题。

(2) 而$\forall x\, O(x) \vee \forall x\, E(x)$的涵义为: 所有的自然数都是奇数 或 所有的自然数都是偶数, 这是假命题。

- $\forall x\, A(x) \vee \forall x\, B(x) \not\Leftrightarrow \forall x\, ((A(x) \vee B(x))$

(3) $\exists x\, O(x) \wedge \exists x\, E(x)$ 的涵义为: 存在奇数的自然数, 也存在偶数的自然数, 这是真命题。

(4) 而$\exists x\, (O(x) \wedge E(x))$的涵义为: 要求存在一个自然数, 它既是奇数, 同时又是偶数, 这是假命题。

- $\exists x\, (A(x) \wedge B(x)) \not\Leftrightarrow \exists x\, A(x) \wedge \exists x\, B(x)$

例2.11 设个体域为D = {a, b, c}, 消去下列公式中的量词:

(2) $\exists x\,(F(x) \wedge G(y))$;

解 $\exists x\,(F(x) \wedge G(y))$

$\Leftrightarrow \exists x\, F(x) \wedge G(y)$ /*先将量词辖域收缩

$\Leftrightarrow (F(a) \vee F(b) \vee F(c)) \wedge G(y)$

(3) $\forall x(F(x) \rightarrow \exists y G(y))$;

解 $\forall x(F(x) \rightarrow \exists y G(y))$

$\Leftrightarrow \exists x\, F(x) \rightarrow \exists y G(y)$ /* 先将量词辖域收缩(5-3)

$\Leftrightarrow (F(a) \vee F(b) \vee F(c)) \rightarrow G(a) \vee G(b) \vee G(c))$

→和↔基本的等值关系式和蕴涵关系式表

E_{21} $\exists x\,(A(x) \rightarrow B) \Leftrightarrow \forall x\, A(x) \rightarrow B$

E_{22} $\forall x\,(A(x) \rightarrow B) \Leftrightarrow \exists x\, A(x) \rightarrow B$

E_{23} $\exists x\,(A \rightarrow B(x)) \Leftrightarrow A \rightarrow \exists x\, B(x)$

E_{24} $\forall x\,(A \rightarrow B(x)) \Leftrightarrow A \rightarrow \forall x\, B(x)$

E_{25} $\exists x\,(A(x) \rightarrow B(x)) \Leftrightarrow \forall x\, A(x) \rightarrow \exists x\, B(x)$

I_{13} $\exists x\, A(x) \rightarrow \forall x\, B(x) \Rightarrow \forall x\,(A(x) \rightarrow B(x))$

I_{14} $\forall x\,(A(x) \leftrightarrow B(x)) \Rightarrow \forall x\, A(x) \leftrightarrow \forall x\, B(x)$

例 证明E_{25} $\exists x\,(A(x)\to B(x)) \Leftrightarrow \forall x\,A(x)\to \exists x\,B(x)$

证明 $\exists x\,(A(x)\to B(x))$

$\Leftrightarrow \exists x\,(\neg A(x)\vee B(x))$

$\Leftrightarrow \exists x\,\neg A(x)\vee \exists x\,B(x)$ (8)

$\Leftrightarrow \neg\forall x\,A(x)\vee \exists x\,B(x)$

$\Leftrightarrow \forall x\,A(x)\to \exists x\,B(x)$

- 若A不含有个体变项, 则

$\forall x\,A \Leftrightarrow A$; $\exists x\,A \Leftrightarrow A$。

- 在谓词公式中, 若有多个量词, 那么

  量词的次序直接关系到命题的意义。

- 两个例外, 即相同量词间的次序是可以任意交换的:

  E_{26} $\forall x \forall y A(x, y) \Leftrightarrow \forall y \forall x A(x,y)$

  E_{27} $\exists x \exists y A(x,y) \Leftrightarrow \exists y \exists x A(x,y)$

- "对于所有的x和所有的y, A(x, y)均成立"与

  "对于所有的y和所有的x, A(x, y)均成立"

  其含义是完全相同的, 故E_{26}正确。

- 类似地, E_{27}正确。

例 设个体域为鞋子集合, S(x, y)表示:“x与y成双”。

- $\exists y\ \forall x\ A(x,y)$表示:“存在一只鞋子, 它与每只鞋都成双”,这显然是假命题。
- $\forall x\ \exists y\ A(x,y)$ 表示:“每只鞋都可找到一只鞋与之成双”, 这是真命题。
- 此例子说明改变不同量词间的位置往往改变了命题的题意, 下面不同量词间的次序是不可随意交换的。

由定义可知下面I_{22}~I_{27}的正确性。

I_{22} $\forall x \forall y A(x, y) \Rightarrow \exists y \forall x A(x, y)$

I_{23} $\forall y \forall x A(x, y) \Rightarrow \exists x \forall y A(x, y)$

I_{24} $\forall x \exists y A(x, y) \Rightarrow \exists y \exists x A(x, y)$

I_{25} $\forall y \exists x A(x, y) \Rightarrow \exists x \exists y A(x, y)$

I_{26} $\exists y \forall x A(x, y) \Rightarrow \forall x \exists y A(x, y)$

I_{27} $\exists x \forall y A(x, y) \Rightarrow \forall y \exists x A(x, y)$。

例 I_{26} 由“有些动物为所有人喜欢。”

必可知 “每个人喜欢一些动物。” I_{26} 正确

- 反之,“每个人喜欢一些动物。” I_{26}的逆命题不成立。

不一定能有“有些动物为所有人喜欢。”

定义 2.11 设A为一谓词公式, 若A具有如下形式

$$Q_1x_1Q_2x_2\ldots Q_kx_kB$$

则称A为前束范式(prenex form)。

其中, $Q_i(1\leq i\leq k)$为∀或∃, B为不含量词的谓词公式。

- 即公式的所有量词均非否定地出现在公式的最前面, 且它们的辖域一直延伸到公式的末尾。

例 (1) $\forall x\,(F(x)\rightarrow \exists y\,(G(y)\wedge H(x, y)))$不是前束范式;

(2) $\exists x(F(x)\rightarrow \forall y\,(G(y)\rightarrow H(x, y, z)))$不是前束范式;

- (3) $\exists x\forall y\forall z\,((P(x,y)\wedge(\neg Q(x)))\rightarrow(R(y,z)\vee(\neg Q(x))$;

(4) $\forall x\exists y\forall z\,(P(x)\rightarrow Q(y)\wedge R(x, z))$ (3),(4)都是前束范式

定理 任一谓词公式都可以化成为与之等值的前束范式。

证明 构造性算法步骤如下:

1. 消去联结词$\rightarrow$, $\leftrightarrow$。 /*1和3的次序可交换

2. 将联结词$\neg$向内深入, 使之只作用于原子公式。

3. 利用换名或代替规则使所有约束变项的符号均不同, 并且自由变项与约束变项的符号也不同。

4. 利用量词辖域的扩张和收缩律 或 量词分配等值式, 将所有量词以在公式中出现的顺序移到公式最前面, 扩大量词的辖域至整个公式。 ■

- 但前束范式的形式可能不是惟一的。

例求公式B: $(\forall x P(x,y) \to \exists y Q(y)) \to \forall x R(x,y)$的前束范式

解 $B \Leftrightarrow (\forall x P(x, t) \to \exists y Q(y)) \to \forall x R(x, t)$ /*自由代替

$\Leftrightarrow (\forall x P(x, t) \to \exists y Q(y)) \to \forall z R(z, t)$ /*约束换名

$\Leftrightarrow \neg(\neg \forall x P(x, t) \vee \exists y Q(y)) \vee \forall z R(z, t)$ /*消去联结词→

$\Leftrightarrow (\forall x P(x, t) \wedge \neg \exists y Q(y)) \vee \forall z R(z, t)$ /*¬向内深入

$\Leftrightarrow (\forall x P(x, t) \wedge \forall y \neg Q(y)) \vee \forall z R(z,t)$ /*量词转换

$\Leftrightarrow \forall x \forall y \forall z\, (P(x,t) \wedge \neg Q(y)) \vee R(z,t))$ /*量词辖域扩张

例 求公式A:$(\forall x\, P(x) \vee \exists y\, Q(y)) \rightarrow \forall x\, R(x)$的前束范式。

解 $A \Leftrightarrow \neg(\forall x P(x) \vee \exists y Q(y)) \vee \forall x R(x)$ /*消去联结词→

$\Leftrightarrow \neg\forall x P(x) \wedge \neg\exists y Q(y) \vee \forall x R(x)$ /*¬向内深入

$\Leftrightarrow \exists x \neg P(x) \wedge \forall y \neg Q(y) \vee \forall z R(z)$ /*量词转换, 换名

$\Leftrightarrow \exists x \forall y\, \forall z\, (\neg P(x) \wedge \neg Q(y) \vee R(z))$ /*量词辖域扩张

例2.14 求(1) $\forall x\, F(x) \wedge \neg\exists x G(x)$的前束范式。/*不惟一

解1 原式 $\Leftrightarrow \forall x\, F(x) \wedge \forall x \neg G(x)$ /*量词转换

$\Leftrightarrow \forall x\, (F(x) \wedge \neg G(x))$ /*(7)量词分配

解2 原式 $\Leftrightarrow \forall x\, F(x) \wedge \forall x \neg G(x)$ /*量词转换

$\Leftrightarrow \forall x\, F(x) \wedge \forall y \neg G(y)$ /*约束换名

$\Leftrightarrow \forall x \forall y\, (F(x) \wedge \neg G(y))$ /*量词辖域扩张

例2.14 求(2) $\forall x\, F(x) \vee \neg\exists x\, G(x)$的前束范式。/*不惟一

解 $\forall x\, F(x) \vee \neg\exists x\, G(x)$

$\Leftrightarrow \forall x\, F(x) \vee \forall x\, G(x)$ /*量词转换

$\Leftrightarrow \forall x\, F(x) \wedge \forall y\, \neg G(y)$ /*约束换名

$\Leftrightarrow \forall x\, (F(x) \wedge \forall y \neg G(y))$ /*令扩张5-2 B= $\forall y \neg G(y)$

$\Leftrightarrow \forall x \forall y\, (F(x) \wedge \neg G(y))$ /*令扩张5-2 B = $F(x)$

例2.14 求(4) $\forall x\, F(x) \rightarrow \exists x\, G(x)$的前束范式。

解 $\forall x\, F(x) \rightarrow \exists x\, G(x)$

$\Leftrightarrow \forall x\, F(x) \rightarrow \exists y\, G(y)$ /*约束换名

$\Leftrightarrow \exists x\, (F(x) \rightarrow \exists y\, G(y))$ /*扩张6-3令B=$\exists y\, G(y)$

$\Leftrightarrow \exists x \exists y\, (F(x) \rightarrow G(y))$ /*扩张6-4令B=F(x)

例2.14 求(5) $\exists x\, F(x) \rightarrow \forall x\, G(x)$的前束范式。

解 $\exists x\, F(x) \rightarrow \forall x\, G(x)$

$\Leftrightarrow \exists y\, F(y) \rightarrow \forall x\, G(x)$ /*约束换名

$\Leftrightarrow \forall y\, (F(y) \rightarrow \forall x\, G(x))$ /*扩张5-3令B=$\forall x\, G(x)$

$\Leftrightarrow \forall y \forall x\, (F(x) \wedge G(y))$ /*令扩张5-4 B=F(x)

例2.14 求(6) $\forall x\, F(x) \rightarrow \exists y\, G(y)$的前束范式。

解 $\forall x\, F(x) \rightarrow \exists y\, G(y)$ /*(4)的第二步

$\Leftrightarrow \exists x\, (F(x) \rightarrow \exists y\, G(y))$ /*扩张6-3令B=$\exists y\, G(y)$

$\Leftrightarrow \exists x \exists y\, (F(x) \rightarrow G(y))$ /*扩张6-4令B=F(x)

求(7) $(\forall x\, F(x, y) \rightarrow \exists y\, G(y)) \rightarrow \forall x\, H(x, y)$的前束范式。

解 $(\forall x\, F(x, y) \rightarrow \exists y\, G(y)) \rightarrow \forall x\, H(x, y)$

$\Leftrightarrow (\forall x\, F(x, y) \rightarrow \exists t\, G(t)) \rightarrow \forall w\, H(w, y)$ /*约束换名

$\Leftrightarrow \exists x \exists t\, (F(x, y) \rightarrow G(t)) \rightarrow \forall w\, H(w, y)$ /*本例(6)

$\Leftrightarrow \forall x (\exists t\, (F(x, y) \rightarrow G(t)) \rightarrow \forall w\, H(w, y))$ /*5-3

$\Leftrightarrow \forall x \forall t \forall w\, (F(x, y) \rightarrow G(t)) \rightarrow H(w, y))$ /*本例(5)

求(8) $(\forall xF(x, y)\vee\forall yG(x, y))\wedge\exists zH(x, y, z)$的前束范式。

解 $(\forall xF(x, y)\vee\forall yG(x, y))\wedge\exists zH(x, y, z)$

$\Leftrightarrow (\forall xF(x, t)\vee\forall yG(x, y))\wedge\exists zH(x, t, z)$ /*自由代替

$\Leftrightarrow (\forall xF(x, t)\vee\forall yG(w, y))\wedge\exists zH(w, t, z)$ /*自由代替

$\Leftrightarrow \forall x(F(x, t)\vee\forall yG(w, y))\wedge\exists zH(w, t, z)$ /*5-1

$\Leftrightarrow \forall x\forall y(F(x, t)\vee G(w, y))\wedge\exists zH(w, t, z)$ /*5-1

$\Leftrightarrow \forall x(\forall y(F(x, t)\vee G(w, y))\wedge\exists zH(w, t, z))$/*5-2

$\Leftrightarrow \forall x(\forall y\exists z((F(x, t)\vee G(w, y))\wedge H(w, t, z)))$/*本例(3)

$\Leftrightarrow \forall x\forall y\exists z((F(x, t)\vee G(w, y))\wedge H(w, t, z))$ /*5-2

- 前束范式的优点在于它的量词全部集中在公式的前面，此部分称为公式的首标。
- 而公式的其余部分可看作是一个不含量词的谓词公式，它被称为公式的尾部。
- 在求给定谓词公式的前束范式时，对量词的左移的次序没有机械地规定，对于尾部也没有进一步的要求，因此一个公式的前束范式可以不唯一；
- 由于在谓词逻辑中的判定问题无解，因此前束范式并不象命题逻辑中的范式那样能解决判定问题。
- 前束范式只是使公式的形式比较整齐规范，为判定工作提供一些方便。

定义 设谓词公式A是一前束范式, 若A的尾部具有形式:

$$(A_{11} \lor A_{12} \lor \ldots \lor A_{1n1}) \land \ldots \land (A_{m1} \lor A_{m2} \lor \ldots \lor A_{mnm}) \quad (*)$$

其中 A_{ij}是原子谓词公式或其否定,

则称A是前束合取范式;

若A的尾部具有形式:

$$(A_{11} \land A_{12} \land \ldots \land A_{1n1}) \lor \ldots \lor (A_{m1} \land A_{m2} \land \ldots \land A_{mnm}) \quad (**)$$

则称A是前束析取范式。

例 $\forall x \exists y \forall z((P(x, y) \lor \neg R(x, z)) \land (\neg Q(y, z) \lor \neg P(x, y)))$

是前束合取范式;

$\exists x \forall z \ \forall y \ (S(x, z) \lor (\neg P(x, y) \land Q(y, z)))$是前束析取范式。

定理 **每个谓词公式A均可以变换为与它等值的前束合取范式和前束析取范式。**

证明 将一个公式化为前束合取范式或前束析取范式时，只需在前面求前束范式的 (1)~(4) 四个步骤基础上，再增加下面步骤：

(5) 利用分配律将公式化为前束合取范式 或 前束析取范式。

例 将A: $\forall x(P(x) \leftrightarrow Q(x,y)) \rightarrow (\neg\exists x R(x) \wedge \exists z S(z))$

化为前束合取范式和前束析取范式。

解 (1) 消去联结词$\rightarrow$, $\leftrightarrow$:

$$A \Leftrightarrow \forall x((P(x) \rightarrow Q(x, y)) \wedge (Q(x, y) \rightarrow P(x)))$$
$$\rightarrow (\neg\exists x R(x) \wedge \exists z S(z))$$

$$\Leftrightarrow \neg\forall x((\neg P(x) \vee Q(x, y)) \wedge (\neg Q(x, y) \vee P(x)))$$
$$\vee (\neg\exists x R(x) \wedge \exists z S(z))$$

(2) 将联结词$\neg$深入至原子谓词公式:

$$A \Leftrightarrow \exists x(\neg(\neg P(x) \vee Q(x, y)) \vee \neg(\neg Q(x, y) \vee P(x)))$$
$$\vee (\forall x \neg R(x) \wedge \exists z S(z))$$

$$\Leftrightarrow \exists x((P(x) \wedge \neg Q(x, y)) \vee (Q(x, y) \wedge \neg P(x)))$$
$$\vee (\forall x \neg R(x) \wedge \exists z S(z))$$

(3) 换名:

$$A \Leftrightarrow \exists x((P(x)\wedge\neg Q(x, y))\vee(Q(x, y)\wedge\neg P(x)))$$

$$\vee(\forall t\neg R(t)\wedge\exists z S(z))$$

(4) 将量词提到公式前:

$$A \Leftrightarrow \exists x(((P(x)\wedge\neg Q(x, y))\vee(Q(x, y)\wedge\neg P(x)))$$

$$\vee\forall t\exists z(\neg R(t)\wedge S(z))$$

$$\Leftrightarrow \exists x\forall t\exists z((P(x)\wedge\neg Q(x,y))\vee(Q(x, y)\wedge\neg P(x))$$

$$\vee(\neg R(t))\wedge S(z)))$$

至此, 已得A的前束析取范式。

(5) 利用分配律化其为前束合取范式：

$$A \Leftrightarrow \exists x \forall t \exists z(((P(x) \vee Q(x, y)) \wedge (\neg Q(x, y) \vee \neg P(x))$$

$$\vee (\neg R(t)) \wedge S(z)))$$

$$\Leftrightarrow \exists x \forall t \exists z(((P(x) \vee (Q(x,y) \vee \neg R(t))$$

$$\wedge (\neg Q(x,y) \vee \neg P(x) \vee S(z))$$

$$\wedge (\neg Q(x,y) \vee \neg P(x)) \vee \neg R(t))$$

$$\wedge (\neg Q(x,y) \vee \neg P(x)) \vee S(z)))$$

例 求等价于$\forall x(P(x) \rightarrow \forall y(\forall z Q(x, y) \rightarrow \neg\forall z R(y, x)))$的前束合取范式和前束析取范式：

解 $\forall x (P(x) \rightarrow \forall y (\forall z\ Q(x, y) \rightarrow \neg\forall z\ R(y, x))$

$\Leftrightarrow \forall x (\neg P(x) \vee \forall y (Q(x, y) \rightarrow \neg R(y, x))$

$\Leftrightarrow \forall x \forall y (\neg P(x) \vee \neg Q(x, y) \vee \neg R(y, x))$

至此, 已得前束合取范式, /* 1个合取范式

由主范式性质可得前束析取范式 $\Leftrightarrow$

$\forall x \forall y ((P(x) \wedge Q(x,y) \wedge R(y,x)) \vee (P(x) \wedge Q(x,y) \wedge \neg R(y,x))$

$\vee (P(x) \wedge \neg Q(x,y) \wedge R(y,x)) \vee (\neg P(x) \wedge Q(x,y) \wedge R(y,x))$

$\vee (\neg P(x) \wedge \neg Q(x,y) \wedge R(y,x)) \vee (\neg P(x) \wedge Q(x,y) \wedge \neg R(y,x))$

$\vee (P(x) \wedge \neg Q(x,y) \wedge \neg R(y,x)))$ /* 7个析取范式

§2.4 一阶逻辑推理理论

- 利用谓词公式间的各种等值关系和蕴含关系, 通过一些推理规则, 从一些谓词公式推出另一些谓词公式, 这就是一阶谓词中的推理。

定义 在一阶谓词中, 推理的形式结构仍为

$$(H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n) \rightarrow C \qquad (*)$$

若 (*)为永真式, 则称推理正确,

称C是$H_1, H_2, \ldots, H_n$的逻辑结论。

这里$H_1, H_2, \ldots, H_n$, C均为一阶谓词中的合式公式。∎

- 判断(*)是否为永真式比在命题逻辑中困难得多。
- 在本节着重介绍 构造证明的方法。

- 要进行正确的推理, 必须构造一个结构严谨的形式证明, 给出一些相应的推理规则。
- 由于谓词逻辑中引进了个体、谓词和量词, 所以要增加一些与量词有关的推理规则。
- 在一阶谓词中仍称永真的蕴涵式为推理定律。
- 推理定律的一般来源有以下几种:

1. 命题逻辑中重言蕴涵式的代换实例。例如,

$$\forall x\, F(x) \wedge \exists y\, G(y) \Rightarrow \forall x\, F(x) \qquad \text{/*化简}$$

$$\exists x\, F(x) \Rightarrow \exists x\, F(x) \vee \exists y\, G(y) \qquad \text{/*附加}$$

2. 每个基本等值式生成2条推理定律

$$\neg \forall x\, F(x) \Leftrightarrow \exists x\, \neg F(x)$$

$$\neg \exists x\, F(x) \Leftrightarrow \forall x\, \neg F(x)$$

3. 关于量词分配的4条推理定律:

$$\forall x\, A(x) \vee \forall x\, B(x) \Rightarrow \forall x\, ((A(x) \vee B(x))$$

$$\exists x\, (A(x) \wedge B(x)) \Rightarrow \exists x\, A(x) \wedge \exists x\, B(x)$$

$$\forall x\, (A(x) \rightarrow B(x)) \Rightarrow \forall x\, A(x) \rightarrow \forall x\, B(x)$$

$$\forall x\, (A(x) \rightarrow B(x)) \Rightarrow \exists x\, A(x) \rightarrow \exists x\, B(x)$$

- 在推理过程中, 除用到命题中已介绍的11条推理规则外, 还有下面4条推理规则, 不过使用它们是有条件的。
- 在以下4条规则中, 均使用了A $\Rightarrow$ B的形式,
  但在这里A $\Rightarrow$ B不一定表示A $\rightarrow$ B为永真式, 而只是表明在一定条件下, 当A为真时, B也为真的推理关系。
- 在使用以下规则时均要注意条件, 否则会犯错误。

1. 全称量词消去规则 (简记为UI规则)

这条规则有以下两种形式:

$$\forall x\, A(x) \Rightarrow A(y)$$

$$\forall x\, A(x) \Rightarrow A(c)$$

- 两式成立的条件是:

(1) x是A(x)中自由出现的个体变项;

(2)在第1式中, y为任意的不在A(x)中约束出现的个体变项;

(3) 在第2式中, c为任意的个体常项。

- UI规则的意思: 如果个体域的所有个体都具有性质A, 则个体域中的任一个个体具有性质A。

例 设个体域D为实数集, $L(x, y)$: $x < y$, 则 $\forall x \exists y\, L(x, y)$:

对任意的实数x, 都存在实数y, 使 $x < y$, 这是真命题。

- 由于y在 $\exists y\, L(x, y)$ 中是约束出现,

  而不能 $\forall x \exists y\, L(x, y) \Rightarrow \exists y\, L(y, y)$, 使得 $y < y$,

  出错的原因是违背了条件2。

2. 全称量词引入规则(简称为UG规则)。

$$A(y) \Rightarrow \forall x A(x)$$

UG规则成立的条件是:

(1) y在A(y)中自由出现, 且y取任何值时, A均为真;

(2) 取代y的x不能在A(y)中约束出现。

- UG规则是说，若个体域中任意一个个体都具有性质A, 则个体域中的全体个体都具有性质A。

例 设个体域D为实数集, 仍取L(x, y): $x < y$,

则对任意给定的y, $A(y) = \exists x\, L(x, y)$是真命题。

- 但$\forall x\, A(x) = \forall x \exists x\, L(x, x)$是假命题, 使得$x < x$, 出错的原因是违背了条件2。

3. 存在引入规则(简称EG规则)

$$A(c) \Rightarrow \exists y\ A(y)$$

- EG规则成立的条件是:

(1) c为特定的个体常项;

(2) 取代c的x不能在A(c)中出现。

- EG规则是说, 如果个体域中有某一个体c具有性质A, 则个体域中存在着具有性质A的个体。

例 设个体域D为实数集, 仍取$L(x, y)$: $x < y$,

并取 $A(8) = \exists x\ L(x,8)$, 则A(8)是真命题。

- 由于x已在A(8)中出现, 因此若用x替换8得到$\exists x\ L(x, x)$是假命题, 使得$x < x$, 出错的原因是违背了条件2。

4. 存在量词消去规则(简称EI)

$$\exists x\, A(x) \Rightarrow A(c)$$

- EI规则成立的条件是:

(1) c是使A为真的特定的个体常项;

(2) c不在A(x)中出现;

(3) 若A(x)中除x外还有其它自由出现的个体变项时,

不能用此规则。 /*用EI时A(x)中只能有一个变项

- EI规则是说, 如果个体域存在有性质A的个体,

则个体域中 必有某一个个体c具有性质A。

- 必须注意: 这里的个体c不是任意的。

例 设个体域D为实数集, 仍取$L(x, y)$: $x < y$,

则 $\forall x\ (x < c)$是假命题。

(1)	$\forall x \exists y\ (x < y)$	P
(2)	$\exists y\ (u<y)$	(1), UI
(3)	$u<c$	(2), EI
(4)	$\forall x\ (x<c)$	(3), UG

- 结论(4)是错的, 出错原因是违背了条件3,
  对(2)使用EI规则时, u为自由出现的个体变项。
- 另外, 要注意的是, 如果$\exists x\ P(x)$和$\exists x\ Q(x)$都真,
  则对于某个c和某个d, 可以断定$P(c) \land Q(d)$必真,
  但不能断定$P(c) \land Q(c)$为真。

例个体域为自然数集N, 设O(x): x是奇数; E(x): x是偶数。

- $\exists x O(x) \wedge \exists x E(x)$是真命题, 而$\exists x (O(x) \wedge E(x))$是假命题。
- 前提$\exists x\ O(x) \wedge \exists x E(x)$, ?结论$\exists x\ (O(x) \wedge E(x))$ 。

推导 (1) $\exists x O(x)$ I_1化简

(2) $O(c)$ (1); EI

(3) $\exists x E(x)$ I_1化简

(4) $E(c)$; (3); EI

(5) $O(c) \wedge E(c)$ (2), (4)合取

(6) $\exists x (O(x) \wedge E(x))$ (5) EG规则

- 分析: (2)的c是某奇数, 此c不能使E(x)为真,

  所以(4)应改为E(d), d是某偶数。

- 在使用以上4个规则时，要严格按照限制条件去使用，并从整体上考虑个体变项和常项符号的选择，否则会犯错误。
- 这4个规则可形象地称为：“脱帽”、“戴帽”规则，
- 对全称量词“脱帽容易戴帽难”，
- 对存在量词“戴帽容易脱帽难”。

例 2.16 证明Socrates三段论

“凡人都要死的。Socrates是人。所以Socrates是要死的”。

- 由于没指明个体域, 所以应该使用全总个体域。
- 设$F(x)$: x是人; $G(x)$: x是要死的, c: Socrates。
- 前提: $\forall x\,(F(x) \rightarrow G(x))$, $F(c)$。
- 结论: $G(c)$。

证明

(1) $\forall x\,(F(x) \rightarrow G(x))$	前提
(2) $F(c) \rightarrow G(c)$	(1); UI
(3) $F(c)$	前提
(4) $G(c)$	(2), (3); I_3假言推理

例 证明 $\exists x A(x) \to \forall x B(x) \Rightarrow \forall x(A(x) \to B(x))$

证明 编号	公式	依据
(1)	$\neg\forall x\,(A(x) \to B(x))$	假设
(2)	$\exists x\,\neg(A(x) \to B(x))$	(1), E
(3)	$\neg(A(a) \to B(a))$	(2), EI
(4)	$A(a) \wedge \neg B(a)$	(3), I
(5)	$A(a)$	(4), I
(6)	$\neg B(a)$	(4), I
(7)	$\exists x\, A(x)$	EG
(8)	$\exists x\, A(x) \to \forall x\, B(x)$	前提
(9)	$\forall x\, B(x)$	I
(10)	$B(a)$	UI
(11)	$B(a) \wedge \neg B(a)$	(5)(10)矛盾

例 前提: $\forall x\,(F(x) \to (G(y) \wedge H(x)))$, $\exists x\,F(x)$,

证明结论: $\exists x\,(F(x) \wedge H(x))$。

证明 编号	公式	依据
(1)	$\exists x\,F(x)$	前提
(2)	$F(a)$	(1), EI
(3)	$\forall x\,(F(x) \to (G(y) \wedge H(x)))$	前提
(4)	$F(a) \to (G(y) \wedge H(a))$	(3), UI
(5)	$G(y) \wedge H(a)$`	(2),(4);I
(6)	$H(a)$	(5);I
(7)	$F(a) \wedge H(a)$	(2),(6);I
(8)	$\exists x\,(F(x) \wedge H(x))$	EG

§　机器证明定理

- 由于计算机具有一定程度的“思维能力”，它能代替人类的部分脑力劳动。
- 而数理逻辑则是研究形式逻辑推理规律的科学，是研究思维活动的科学，所以它们之间有本质的联系。
- 人们从20世纪50年代开始就探索使用计算机来证明数学定理，定理的机器证明是计算科学领域的重要课题。
- 机器证明主要使用四种方法:

一. 试探法

- 算法是一种保证能在有限步内获得某问题解的机械方法,
- 而试探法只是“有可能”获得问题的解, 并不“保证”一定获得解。

(1) 正向试探法:

- 由前提、公理、定义、已证明的定理和待证定理的假设出发，推出若干命题作为中间结果，并不断地把中间结果加到前提中去，若推出了所要的结论，定理便得到证明。
- 否则考虑另外的命题作为前提, 继续上述过程。

(2) 逆向试探法：

- 由结论出发，考虑若要证明结论，那么前面一步必定有某某命题；而要证明某某命题，有归约为证明另一些命题。
- 这样步步归约，若发现前提中有归约到的命题，那么定理得证。
- 否则就考虑另外的命题, 继续上述过程寻找证明
- 当机器存储空间用完或前提中的公式用完或归约的子问题表中公式用完，试探法即告结束。
- 可见试探法结束时，定理并不一定得到证明。

二. 判定法

- 对于一个数学理论, 若存在算法, 使用它可对该理论中的任何命题判定是否其中的定理, 则该理论称为可判定的, 否则是不可判定的。
- 对可判定的理论或问题来说, 我们要寻找判定的算法;

  对不可判定的理论或问题则要证明判定算法不存在。
- 证明公式是永真的就等于证明该公式是定理。

  一般先用判定法确信某公式是定理, 然后用优化的算法通过机器具体证明某公式是永真。
- 对不可判定问题, 一方面证明算法不存在;

  另一方面寻找它的可判定的子问题也很有意义。

三. 计算机辅助证明

- 在计算机辅助之下进行单独的定理证明。

  在定理证明中, 遇到大量计算和推理是人力所无法完成的, 这可交给机器做, 从而帮助人们完成。

- 四色定理(任何地图用四种颜色着色即可区分相邻区域)就是计算机辅助证明的一个成功例子。

四. 证明算法

- 证明算法不同于判定算法, 是对一类半可判定问题而言的算法。
- 所谓半可判定问题是指对某个不可判定问题的子问题来说, 若该子问题可判定便有算法可证明它。
- 若不可判定, 则没有算法来证明。

本 章 小 结

- 在命题函数中，命题变项的论述范围称作个体域。
- 用来刻划一个个体的性质或多个个体之间关系的词称为谓词。
- 表示有具体确定意义的性质或关系的谓词，称为谓词常项，否则称为谓词变项。
- 量词可看作是对个体词所附加约束的词。
- 对谓词公式的约束变项进行换名时，该变项在量词及其辖域中的所有出现均须同时更改，公式的其余部分不变。换名时一定要更改为该量词辖域中没有出现过的符号。

- 对公式中自由变项进行代入时, 须对该自由变项的所有出现同时进行代入, 所选用的变项符号与原公式中所有变项的符号不能相同。
- 前束范式把量词均放在公式的开头, 它们的作用域延伸到整个公式的末尾。
- 任意一个谓词公式, 均和一个前束范式等价。
- 熟悉谓词公式的蕴涵与等价式，善于将语句符号化, 灵活使用全称特定化规则、存在特定化规则、全称一般化规则和存在一般化规则进行推理, 以便正确、迅速地将谓词公式化为前束范式。

Definition

给定一个合式公式 G，若变元 x 出现在使用变元的量词的辖域之内，则称变元 x 的出现为约束出现，此时的变元 x 称为约束变元。若 x 的出现不是约束出现，则称它为自由出现，此时的变元 x 称为自由变元。

☞ 量词辖域的确定

- 若量词后有括号，则括号内的子公式就是该量词的辖域；$(\forall x)(\cdots)$
- 若量词后无括号，则与量词邻接的子公式为该量词的辖域。$(\forall x)F(x)$

定义 设A是不含联结词→和↔的谓词公式, 则在其中

以联结词$\wedge$, $\vee$分别代换$\vee$, $\wedge$,

以量词$\forall$, $\exists$分别代换$\exists$, $\forall$,

以常量0 ,1分别代换1, 0

后所得的公式称为A的对偶公式, 记作A^D。

例 $A = \forall y \exists x (P(x,y) \wedge Q(x,y)) \vee 1$

$A^D = \exists y \forall x (P(x,y) \vee Q(x,y)) \wedge 0$

定理 (对偶原理) 设A, B是两个不含联结词→和↔的谓词公式, 若$A \Leftrightarrow B$, 则$A^D \Leftrightarrow B^D$。

二. 斯柯林范式

- 前束合(析)取范式的优点在于它的量词全部集中在公式的首部, 公式其余部分实际上是一个命题演算公式, 这就为谓词公式提供了一种规范的形式, 从而将公式形式的范围缩小, 给研究工作提供了一定的方便。
- 但前束范式的不足之处是首标中比较杂乱无章, 全称量词与存在量词无一定的排列规则。
- 下面我们再引入前束词都是某种特定类型量词的斯柯林(Skolem)范式。

定义 首标中不含存在量词的前束范式称为斯柯林范式。

定理 每个谓词公式A均可以变换为与它等值的斯柯林范式。

证明 由定理6.4.1知, 任一谓词公式A均可以变换为与它等值的前束范式, 因此可假定公式A已是前束范式:

$$A \Leftrightarrow Q_1x_1Q_2x_2\ldots Q_nx_n\, G(x_1, x_2, \ldots x_n)$$

其中首标Q_ix_i为$\forall x_i$或$\exists x_i$ $(1\le i\le n)$, 公式G中不含量词。现可进行如下的斯柯林变换消去首标中的存在量词:

1. 若$\exists x_k$ $(1\le k\le n)$左边没有全称量词, 则取不在G中出现过的个体常项c替换G中所有的x_k, 并删除首标中的$\exists x_k$。

2. 若$\exists x_k$ $(1 \le k \le n)$左边有全称量词

$\forall x_{s1}, \forall x_{s2}, \ldots, \forall x_{sr}$ $(1 \le r,\ 1 \le s1 < s2 < \ldots < sr < k)$,

则取不在G中出现过的r元函数$f_r(x_{s1}, x_{s2}, \ldots, x_{sr})$

替换G中所有的x_k, 并删除首标中的$\exists x_k$。

3. 反复执行1. 和2. 的变换, 直至删除首标中的所有存在量词, 即得到不含存在量词的斯柯林范式。

- 其中用来替换x_k的个体常项和函数符号称为关于公式A的斯柯林函数。

例 求$\exists x\forall y\forall z\exists u\forall v\exists w\ G(x, y, z, u, v, w)$的斯柯林范式:

解 用a替换x, 删除$\exists x$得

$\forall y\forall z\exists u\forall v\exists w\ G(a, y, z, u, v, w)$,

用$f(y, z)$替换u, 删除$\exists u$得

$\forall y\forall z\forall v\exists w\ G(a, y, z, f(y,z), v, w)$,

- 用$h(y, z, v)$替换w, 删除$\exists w$得

$\forall y\forall z\forall v\ G(a, y, z, f(y,z), v, h(y, z, v))$。

定理 设公式G是谓词公式A的斯柯林范式,

则公式A是永假式 当且仅当 公式G是永假式。

证明 (1)设A的前束范式为P, 即

$$P \Leftrightarrow Q_1x_1Q_2x_2\ldots Q_nx_n\, G(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

并设Q_k是P的前束词中, 从左往右数的第一个存在量词, 令

$$P' \Leftrightarrow \forall x_1\ldots\forall x_{k-1}\, Q_{k+1}x_{k+1}\ldots Q_nx_n$$
$$G(x_1,\ldots,x_{k-1}, f\,(x_1,\ldots,x_{k-1}), x_{k+1}, \ldots, x_n),$$

其中, f是替换x_k的斯柯林函数。

- 我们证明, P是永假式当且仅当P'是永假式。

事实上, 若P是永假式, 而假设P'是可满足的, 则存在某指派E, 使P'为真, 则对个体域D

中任意的元素$x^0{}_1,\ldots,x^0{}_{k-1}$至少存在一个

$f(x^0{}_1,\ldots,x^0{}_{k-1})\in D$, 使得 $Q_{k+1}x_{k+1}\ldots Q_nx_n$

$G(x^0{}_1,\ldots,x^0{}_{k-1},f(x^0{}_1,\ldots,x^0{}_{k-1}),x_{k+1}\ldots x_n)$

在E下为真, 但是P'的指派就是P的指派。

于是在E下, P为真, 这与P永假的假设矛盾。

- 反之，如果P'永假，而P可满足，于是可设在指派E下，P为真, 则对D中任意的元素$x^0{}_1,\ldots,x^0{}_{k-1}$, 存在$x^0{}_k\in D$, 使得

$Q_{k+1}x_{k+1}\ldots Q_nx_n\,G(x^0{}_1,\ldots,x^0{}_{k-1},x^0{}_k,x_{k+1}\ldots x_n)$

在E下为真。

将指派E扩充为E', 使其包含函数符号

$f(x_1,\ldots,x_{k-1})$,

而f规定为：对任意的元素$x^0_1,\ldots,x^0_{k-1} \in D$，有$f(x^0_1,\ldots,x^0_{k-1}) = x^0_k$。于是E'使P'的一个指派，P'在E'下为真，这与P'永假的假设矛盾。

这就证明P永假，当且仅当P'永假，亦即对任意的前束范式P，如果删去它的第一个存在量词(从左往右数)，并且用斯柯林函数代入后的公式为P'，则必有：P永假，当且仅当P'永假

(2) 不失一般性，可设A本身就是一个含有m个存在量词的前束范式($1 \le m \le n$)，设$A_0 \Leftrightarrow A$，A_k是由A_{k-1}删去第一个存在量词(从左往右数)，并用斯柯林函数代入后得到的公式($1 \le k \le m$)显然，A_m就是A的斯柯林范式，即$G \Leftrightarrow A_m$。

根据(1)我们有，

A_0永假，当且仅当A_1永假；

A_1永假，当且仅当A_2永假；…；

A_{m-1}永假，当且仅当A_m永假。

因此，A_0永假，当且仅当A_m永假；

亦即，A永假，当且仅当G永假。

- 注意，斯柯林范式与前束范式不同，任何公式与它的全束范式是等值的，但是一个公式的斯柯林范式不一定与其自身等值。
- 一般说来，如果公式A不是永假式，则A与它的斯柯林范式G不等值。

例 6.4.8 设谓词公式A为$\exists x\ F(x)$，则其斯柯林范式G为$F(a)$，给定A和G的指派E如下：

(1) 个体域$D = \{a, b\}$；

(2) D中特定元素$k = a$；

(3) 谓词$F(x)$为$F(a) = 0$，$F(b) = 1$。

- 于是，A在E下为真，而G在E下为假。所以A不等价G。
- 一阶逻辑中的斯柯林范式在定理的机器证明中很有用。在定理的机器证明中，由Robinson提出的消解(resolution)原理就是建立在斯柯林范式基础上的。