厦门大学《微积分 I-2》课程
期中试题

考试日期：2013.4　　信息学院自律督导部整理

一、（6 分）求初值问题 $y''+9y=6e^{3x}$，$y(0)=y'(0)=0$ 的解.

二、（6 分）已知二阶齐次线性方程 $y''+p(x)y'-y\cos^2 x=0$ 有两个互为倒数的特解，求 $p(x)$ 及此方程的通解.

三、（6 分）设函数 $y(x)$ 满足 $y'(x)=1+\int_0^x[6\sin^2 t-y(t)]dt$，$y(0)=1$，求 $y(x)$.

四、（6 分）求曲线 $C:\begin{cases} x^3+y^3+z^3=3 \\ z=xy \end{cases}$ 在 $(1,1,1)$ 处的法平面.

五、（6 分）求过直线 $l:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{-1}$ 且垂直于平面 $\pi: x-y+2z-1=0$ 的平面方程.

六、（6 分）求直线 $\begin{cases} x+y-z-1=0 \\ x-y+z+1=0 \end{cases}$ 在平面 $x+y+z=0$ 上的投影直线方程.

七、（6 分）求过点 $M_0(1,1,1)$，与平面 $\pi: x+y+z+3=0$ 平行，且与直线 $l_1:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-3}{3}=\dfrac{z-2}{1}$ 相交的直线 l 的方程.

八、计算（8 分，每小题 4 分）

（1）$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy(x+y)}{x^2+y^2}$

（2）设 $\dfrac{x}{z}=\ln\dfrac{z}{y}$，求 dz.

九、（6 分）已知 $f(x,y)=x^2+(\ln y)\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{x^2+y^2}}$，求 $f_x'(2,1)$, $f_y'(2,1)$.

十、（6 分）试讨论函数

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0), \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

在 $(0,0)$ 处的连续性、可偏导性、可微性.

十一、（6 分）设 $f(x,y,z)=\left(\dfrac{x}{y}\right)^{\frac{y}{z}}$，试证明: $x\dfrac{\partial f}{\partial x}+y\dfrac{\partial f}{\partial y}+z\dfrac{\partial f}{\partial z}=0.$

十二、(6 分) 求 $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ 在球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 上的点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处沿外法线方向的方向导数.

十三、计算下面二重积分（8 分，每小题 4 分）

（1）$I=\iint\limits_D e^{\frac{y}{x}}dxdy,$ 其中 D 由 $x=1, y=0, y=x$ 围成.

（2）$I=\iint\limits_D \sin(\sqrt{x^2+y^2})dxdy,$ 其中 $D:\pi^2\le x^2+y^2\le 4\pi^2$.

十四、（6 分）计算二重积分 $\iint\limits_D [\cos(\pi\sqrt{x^2+y^2})+\sin(y\sqrt{x^2+y^2})]dxdy$，其中 $D=\{(x,y)\,|\,1\le x^2+y^2\le 4, x\ge 0\}$.

十五、（6 分）交换二重积分的次序 $\int_{-1}^{0}dx\int_{1-\sqrt{x+1}}^{1+\sqrt{x+1}}(2x+y)dy+\int_{0}^{3}dx\int_{x}^{1+\sqrt{x+1}}(2x+y)dy$，并求其值.

十六、（6 分）求曲线 $C:\begin{cases} x+y+z=1 \\ x^2+y^2+z^2=1 \end{cases}$ 上到 xoy 平面距离最近的点。