例1 已知质点的运动方程为 $\vec{r}=2t\vec{i}+\left(19-2t^{2}\right)\vec{j}$

求：（1）轨道方程；（2）t =2s 时质点的位置、速度以及加速度；（3）什么时候位矢恰好与速度垂直？

解： **(1)** $x=2t$ ， $y=19-2t^{2}$

消去时间参数 $y=19-\dfrac{1}{2}x^{2}$

（2） $\vec{r}\big|_{2}=[2\times 2\vec{i}+\left(19-2\times 2^{2}\right)\vec{j}]\mathrm{m}=\left(4\vec{i}+11\vec{j}\right)\mathrm{m}$

$\vec{v}=\dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}=2\vec{i}-4t\vec{j}$ $\vec{v}\big|_{2}=\left(2\vec{i}-8\vec{j}\right)\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$

$v_{2}=\sqrt{2^{2}+\left(-8\right)^{2}}\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}=8.25\ \ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$

$$\alpha = \arctan\frac{-8}{2} = -75°58'$$

（3） $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = 2\vec{i} - 4t\vec{j}$ $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -4\vec{j}$

$a = 4\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$ 方向沿 y 轴的负方向

（4） $\vec{r} \cdot \vec{v} = \left[2t\vec{i} + \left(19 - 2t^2\right)\vec{j}\right] \cdot \left(2\vec{i} - 4t\vec{j}\right)$

$$= 4t - 4t(19 - 2t^2) = 4t(2t^2 - 18)$$

$$= 8t(t+3)(t-3) = 0$$

$t_1 = 0$ ， $t_2 = 3\,\mathrm{s}$ 两矢量垂直

例2 设某一质点以初速度 $\vec{v}_0 = 100\vec{i}\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ 做直线运动，其加速度为 $\vec{a} = -10v\vec{i}\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$。问：质点在停止前运动的路程有多长？

解： $a = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -10v$ $\qquad \dfrac{\mathrm{d}v}{v} = -10\mathrm{d}t$

两边积分： $\displaystyle\int_{v_0}^{v} \frac{\mathrm{d}v}{v} = -10\int_0^t \mathrm{d}t$ ， $\ln\dfrac{v}{v_0} = -10t$

$$v = v_0 \mathrm{e}^{-10t}$$

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \quad , \quad \mathrm{d}x = v\mathrm{d}t = v_0\mathrm{e}^{-10t}\mathrm{d}t$$

两边积分：$$\int_0^x \mathrm{d}x = v_0 \int_0^t \mathrm{e}^{-10t}\mathrm{d}t$$

$$x = v_0\left[-\frac{1}{10}\left(\mathrm{e}^{-10t} - 1\right)\right]$$

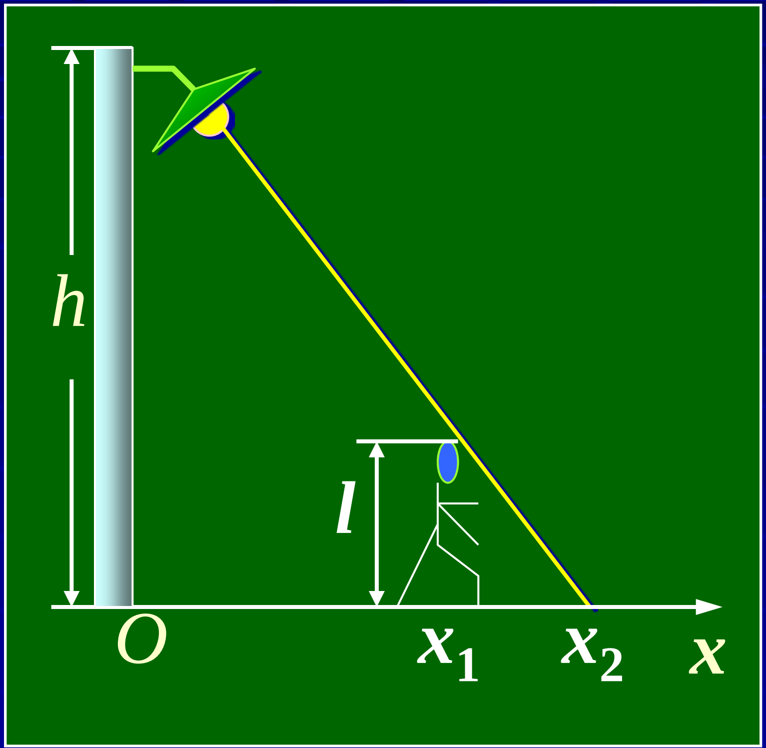
$$x = 10(1 - e^{-10t})$$

$$x_0 = 10(1 - \mathrm{e}^{-10\times 0}) = 10(1-1) = 0$$

$$x_\infty = 10(1 - \mathrm{e}^{-10\infty}) = 10(1-0)\,\mathrm{m} = 10\ \mathrm{m}$$

$$\Delta x = x_\infty - x_0 = 10\ \mathrm{m}$$

例3 路灯距地面高度为h，身高为l 的人以速度v_0在路上匀速行走。求：（1）人影头部的移动速度；（2）影长增长的速率。



解： （1）
$$\frac{x_2 - x_1}{l} = \frac{x_2}{h}$$

$$(h-l)x_2 = hx_1$$

两边求导：

$$(h-l)\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} = h\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}$$

其中：$\dfrac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} = v$ ，$\dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = v_0$

$$v = \frac{hv_0}{h-l}$$

（2） 令 $b = x_2 - x_1$ 为影长

$$b = \frac{l}{h} x_2 \qquad v' = \frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}t} = \frac{l}{h}\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}$$

以 $\dfrac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} = \dfrac{hv_0}{h-l}$ 代入

得 $$v' = \frac{lv_0}{h-l}$$

例4 半径为$r = 0.2$ m的飞轮，可绕 O 轴转动。已知轮缘上一点M的运动方程为$\varphi = -t^2+4t$，求在1秒时刻M点的速度和加速度。

解:

$$\omega = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = -2t+4 \qquad \alpha = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = -2$$

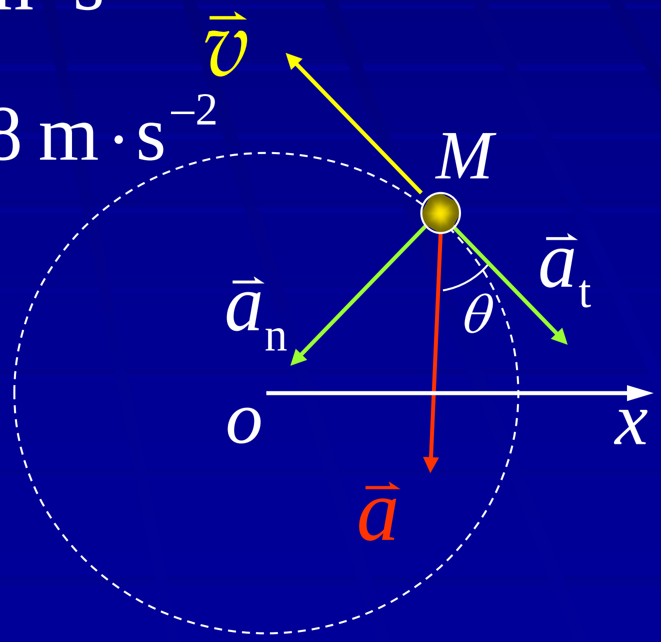
$$v = r\omega = r(-2t+4) = 0.2\times(-2\times1+4)\ \mathrm{m\cdot s^{-1}} = 0.4\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

$$a_\mathrm{t} = \alpha r = (-2)\times 0.2\ \mathrm{m\cdot s^{-2}} = -0.4\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$$

$$a_\mathrm{n} = r\omega^2 = 0.2(-2\times1+4)^2\ \mathrm{m\cdot s^{-2}} = 0.8\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$$

$$a = \sqrt{a_\mathrm{t}^2 + a_\mathrm{n}^2} = 0.89\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$$

$$\theta = \arctan\left|\frac{a_\mathrm{n}}{a_\mathrm{t}}\right| = \arctan\frac{0.8}{0.4} = 63.4^\circ$$



例5 一质点沿半径为R的圆周运动，其路程s随时间t的变化规律为$s = bt - 1/2 \cdot ct^2$，式中b，c为大于零的常数，且$b^2 > Rc$。求（1）质点的切向加速度和法向加速度。（2）经过多长时间，切向加速度等于法向加速度。

解: （1）

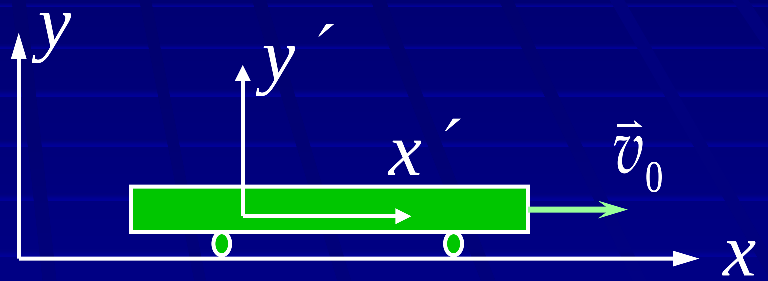
$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = b - ct$$

$$a_{\mathrm{t}} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -c \qquad a_{\mathrm{n}} = \frac{v^2}{R} = \frac{(b-ct)^2}{R}$$

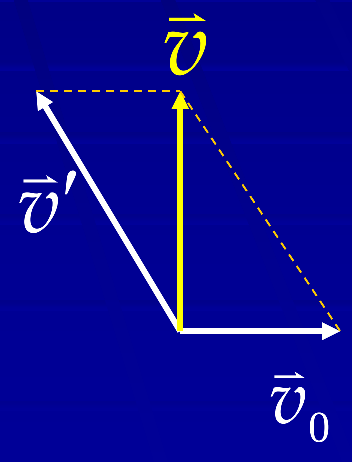
（2） $a_{\mathrm{t}} = a_{\mathrm{n}}$ 解得 $t = \frac{b}{c} \pm \sqrt{\frac{R}{c}}$

例6　一观察者A坐在平板车上，车以10 m/s的速率沿水平轨道前进。他以与车前进的反方向呈 60°角向上斜抛出一石块，此时站在地面上的观察者B看到石块沿铅垂线向上运动。求石块上升的高度。

解：　按题意作矢量图



$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}'$$



$$v = v_0 \tan 60° = 10 \tan 60° \mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

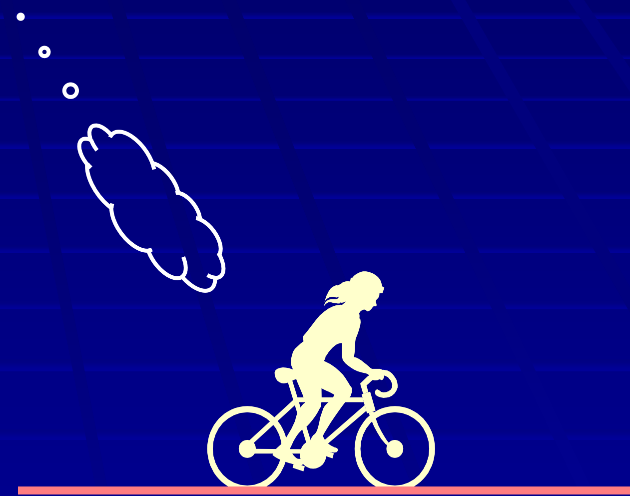
$$= 17.3 \ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

$$H = \frac{v^2}{2g} = \frac{17.3^2}{2 \times 9.80} = 15.3 \ \mathrm{m}$$

例7 某人骑自行车以速率v_0向东行驶。今有风以同样的速率由北偏西30°方向吹来。问：人感到风是从那个方向吹来？

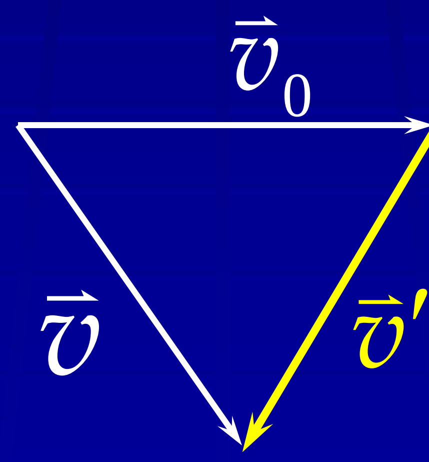
解：

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_0$$

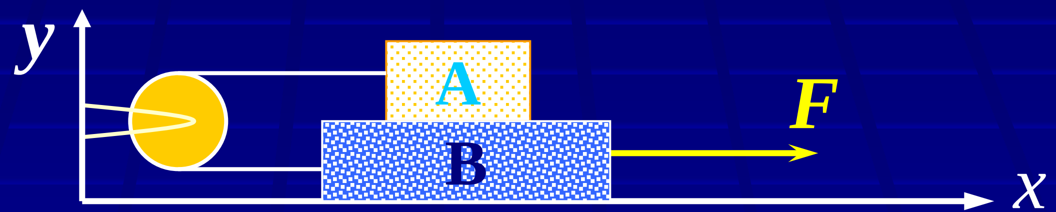


风相对地 = 风相对人 + 人相对地

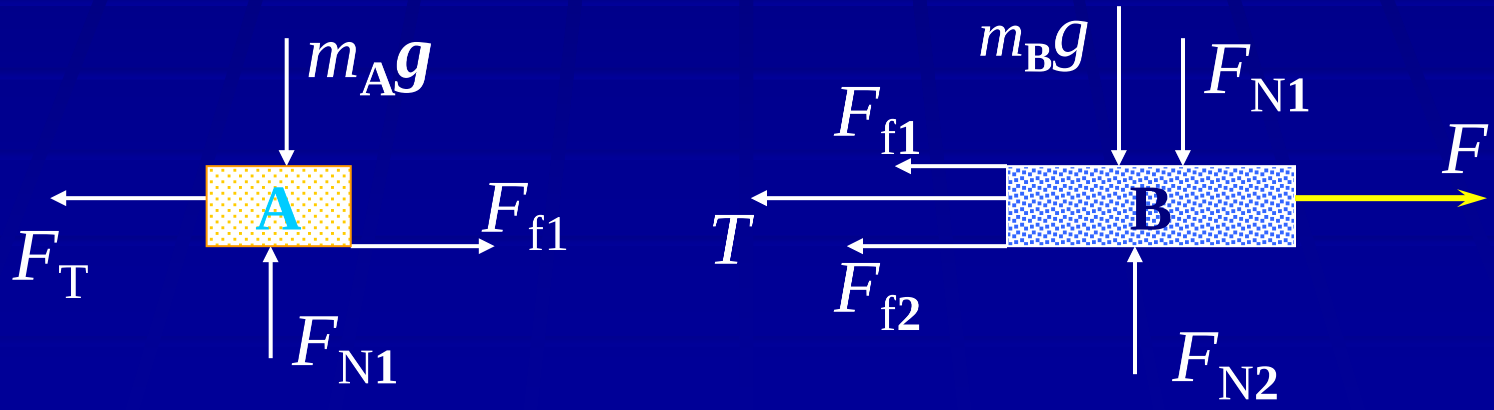
北偏西30°

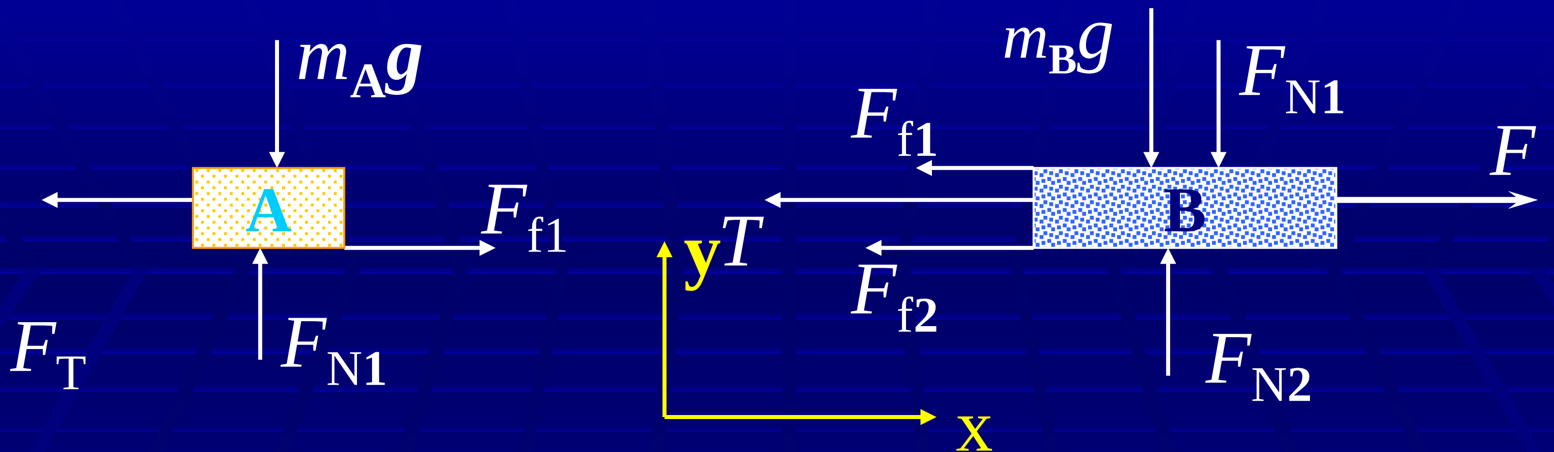


例1 如图所示，两木块质量分别为m_A=1.0kg, m_B=2.0kg。A、B间的摩擦因数μ_1= 0.20。B与桌面的摩擦因数μ_2= 0.30。若木块滑动后它们的加速度大小均为0.15 m·s^{-2}。求作用在B物上的拉力？



解:





A: $F_{f1} - F_T = -m_A a$

$F_{N1} - m_A g = 0$

B: $F - F_{f1} - F_{f2} - F_T = m_B a$

$F_{N2} - F_{N1} - m_B g = 0$

$f_2 = \mu_2 N_2$

由A式： $\mu_1 m_A g - F_T = -m_A a$

由B式： $F - \mu_1 m_A g - \mu_2 (m_A + m_B) g - F_T = m_B a$

解得： $F = 13.2\,\mathrm{N}$

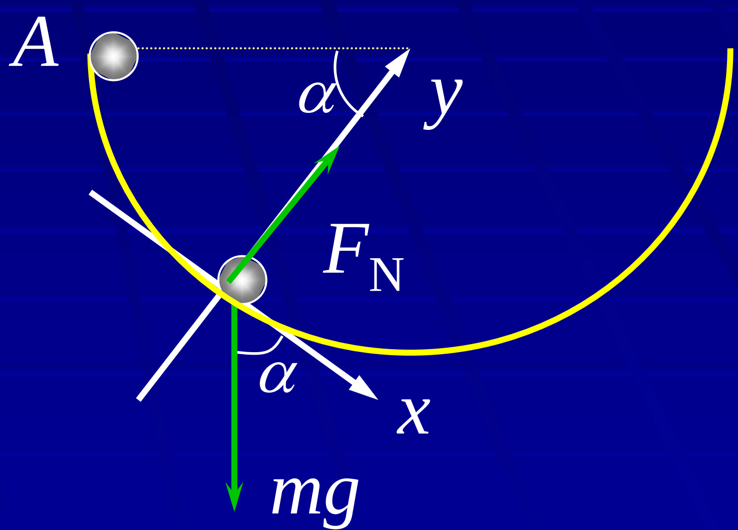
例2 质量为m的小球最初位于A点，然后沿半径为R的光滑圆弧面下滑。求小球在任一位置时的速度和对圆弧面的作用。

解：
$$mg\cos\alpha = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

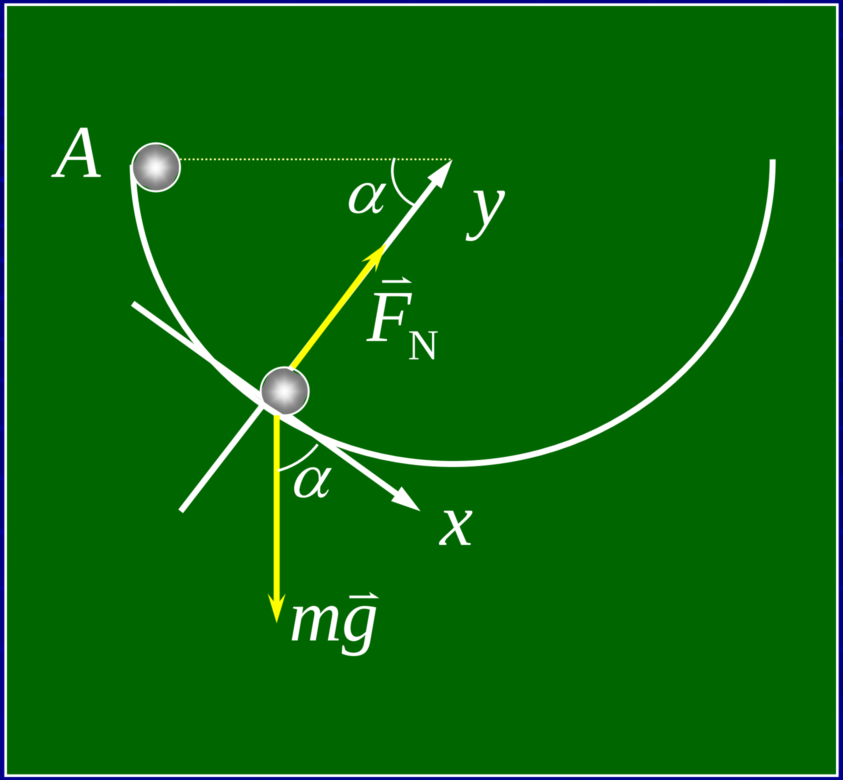
$$F_{\mathrm{N}} - mg\sin\alpha = m\frac{v^2}{R}$$

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v\mathrm{d}s}{\mathrm{d}s\mathrm{d}t} = v\frac{\mathrm{d}v}{R\mathrm{d}\alpha}$$

$$v\mathrm{d}v = Rg\cos\alpha\,\mathrm{d}\alpha$$



$$\int_0^v v\,\mathrm{d}v = \int_0^\alpha Rg\cos\alpha\,\mathrm{d}\alpha$$



$$\frac{1}{2}v^2 = Rg\sin\alpha$$

$$v = \sqrt{2Rg\sin\alpha}$$

(也可用机械能守恒)

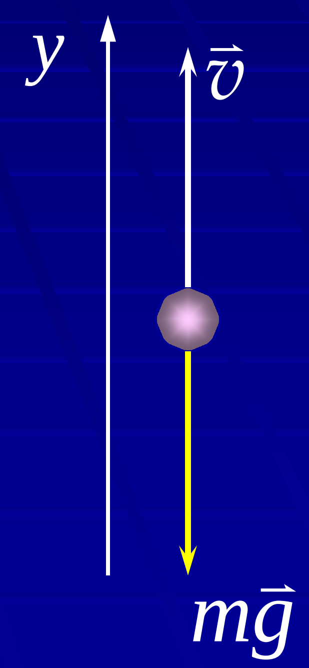
$$F_{\mathrm{N}} - mg\sin\alpha = m\frac{v^2}{R}$$

$$F_{\mathrm{N}} = mg\sin\alpha + m\frac{2Rg\sin\alpha}{R} = 3mg\sin\alpha$$

例3 由地面沿铅直方向发射质量为m的宇宙飞船。求宇宙飞船能脱离地球引力所需的最小初速度。（不计空气阻力及其他作用力，设地球半径为6378000m）

解：设地球半径为R，地球表面的重力近似等于引力：

$$G\frac{mM}{R^2}\approx mg \qquad GM=gR^2$$



宇宙飞船受的引力：$F=G\dfrac{mM}{y^2}\approx\dfrac{mgR^2}{y^2}$

运动方程：

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-\frac{mgR^2}{y^2}$$

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v\mathrm{d}y}{\mathrm{d}y\mathrm{d}t}=v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y} \qquad v\mathrm{d}v=-gR^2\frac{\mathrm{d}y}{y^2}$$

两边积分：

$$\int_{v_0}^{v} v\mathrm{d}v = \int_{R}^{y} -R^2 g\frac{\mathrm{d}y}{y^2}$$

$$\frac{1}{2}(v^2 - v_0^2) = gR^2(\frac{1}{y} - \frac{1}{R})$$

$$v^2 = v_0^2 - 2gR^2(\frac{1}{R} - \frac{1}{y})$$

飞船脱离地球引力时： $y \to \infty$ ， $v \geq 0$

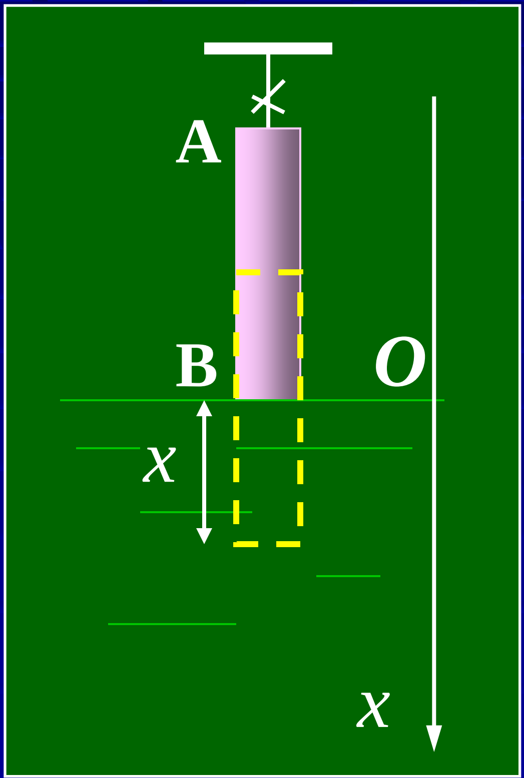
$$v_0 = \sqrt{2gR} = 11.2\ \mathrm{km \cdot s^{-1}}$$

例4 密度为ρ_1的液体，上方悬一长为l，密度为ρ_2的均质细棒AB，棒的B端刚好和液面接触。今剪断绳，并设棒只在重力和浮力作用下下沉，求：

（1）棒刚好全部浸入液体时的速度。

（2）若$\rho_2 < \rho_1/2$，棒浸入液体的最大深度。

（3）棒下落过程中能达到的最大速度。



解： （1） $mg - F = ma$

$$\rho_2 lsg - \rho_1 xsg = \rho_2 sl\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \rho_2 lsv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$

$$v\mathrm{d}v = (1 - \frac{\rho_1 x}{\rho_2 l})g\mathrm{d}x \qquad \int_0^v v\mathrm{d}v = \int_0^x (1 - \frac{\rho_1 x}{\rho_2 l})g\mathrm{d}x$$

$$\frac{1}{2}v^2=(x-\frac{\rho_1 x^2}{2\rho_2 l})g\Big|_0^x \qquad v=\sqrt{2gx-\frac{\rho_1 g x^2}{\rho_2 l}}$$

$x=l$ 时： $$v=\sqrt{\frac{(2\rho_2-\rho_1)gl}{\rho_2}}$$

（2） 最大深度时有 $v=0$

$$0=\sqrt{2gx-\frac{\rho_1 g x^2}{\rho_2 l}} \qquad x=\frac{2\rho_2 l}{\rho_1}$$

（3）　求v的极值

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=\frac{2g-2\dfrac{\rho_1 g}{\rho_2 l}x}{2\sqrt{2gx-\dfrac{\rho_1 g x^2}{\rho_2 l}}}=0$$

$$2g-\frac{2\rho_1 g}{\rho_2 l}x=0 \qquad x=\frac{\rho_2 l}{\rho_1}$$

$$v_{\max}=\sqrt{\frac{\rho_2 g l}{\rho_1}}$$

例5 升降电梯相对于地面以加速度a沿铅直向上运动。电梯中有一轻滑轮绕一轻绳，绳两端悬挂质量分别为m_1和m_2的重物（$m_1 > m_2$）。求：（1）物体相对于电梯的加速度；（2）绳子的张力。

解：

$$m_1 g + m_1 a - F_{\mathrm{T}} = m_1 a_r$$

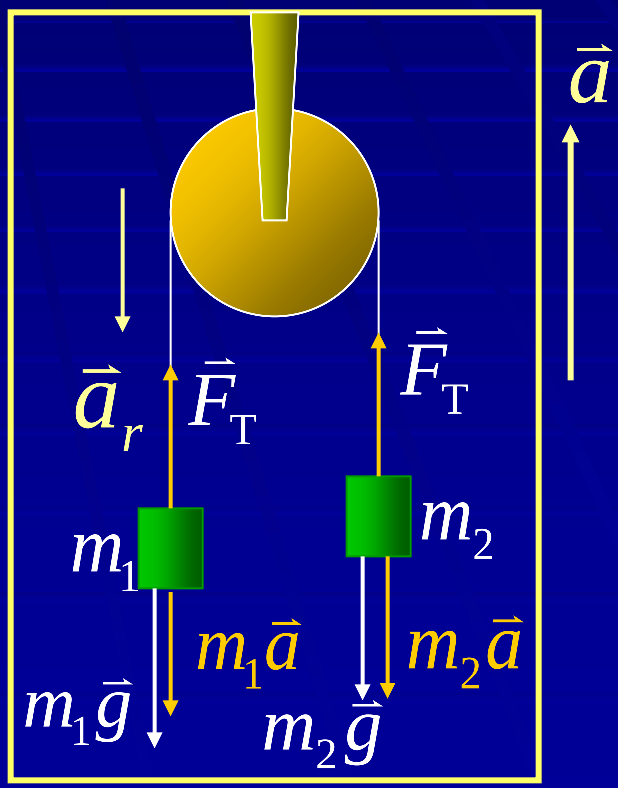
$$F_{\mathrm{T}} - m_2 g - m_2 a = m_2 a_r$$

消去 $\vec{F}_{\mathrm{T}}$

$$a_r = \frac{(m_1 - m_2)\cdot(g + a)}{m_1 + m_2}$$

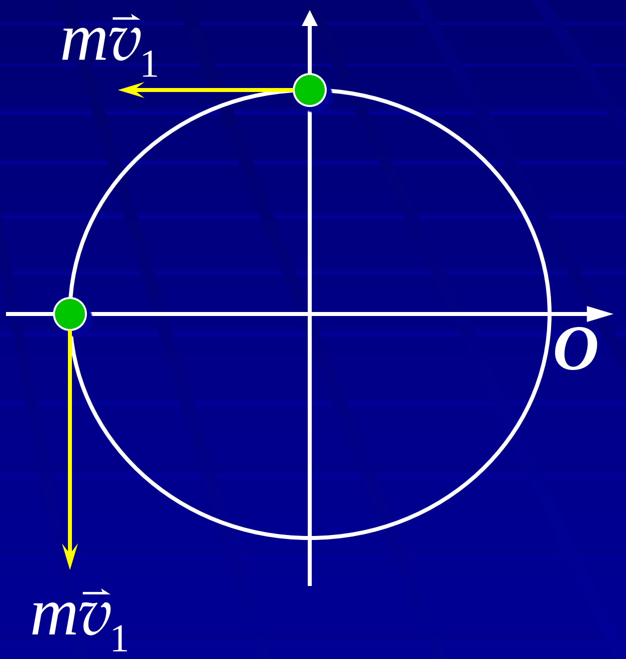
$$F_{\mathrm{T}} = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2}(g + a)$$

$\vec{F}_{\mathrm{T}}$



例1 质量$m = 1\text{kg}$的质点从O点开始沿半径$R = 2\text{m}$的圆周运动。以O点为自然坐标原点。已知质点的运动方程为$s = 0.5\pi t^2$。试求从 $t_1 = \sqrt{2}\,\text{s}$到 $t_2 = 2\,\text{s}$这段时间内质点所受合外力的冲量。

解： $s_1 = \dfrac{1}{2}\pi\sqrt{2}^2 = \pi \qquad \theta_1 = \dfrac{s_1}{R} = \dfrac{\pi}{2}$



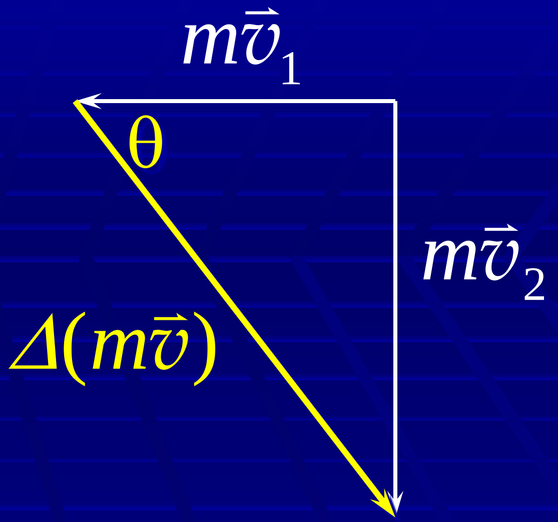
$$s_2 = \frac{1}{2}\pi\, 2^2 = 2\pi \qquad \theta_2 = \frac{s_2}{R} = \pi$$

$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \pi t$$

$$v_1 = \sqrt{2}\pi\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} \qquad v_2 = 2\pi\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

$$mv_1 = \sqrt{2}\pi \quad \mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$$

$$mv_2 = 2\pi \quad \mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$$



$$\vec{I} = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1 = \Delta(m\vec{v})$$

$$\left|\Delta m\vec{v}\right| = \sqrt{(mv_1)^2 + (mv_2)^2} = \sqrt{2\pi^2 + 4\pi^2} = \sqrt{6}\pi \ \mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$$

$$\left|\vec{I}\right| = \sqrt{6}\pi = 7.69\ \mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$$

$$\tan\theta = \frac{mv_2}{mv_1} = \frac{2}{\sqrt{2}} \qquad \theta = 54°44'$$

例5 一颗子弹在枪筒里前进时所受的合力大小为$F=400-4\times10^5t/3$，子弹从枪口射出时的速率为300 m/s。设子弹离开枪口处合力刚好为零。求：（1）子弹走完枪筒全长所用的时间t。（2）子弹在枪筒中所受力的冲量I。（3）子弹的质量。

解： （1）$F=400-\dfrac{4\times10^5}{3}t=0 \quad t=\dfrac{3\times400}{4\times10^5}=0.003\,\mathrm{s}$

（2）

$$I=\int F\mathrm{d}t=\int_0^{0.003}\left(400-\frac{4\times10^5}{3}t\right)\mathrm{d}t=400t-\frac{4\times10^5t^2}{2\times3}\Bigg|_0^{0.003}=0.6\,\mathrm{N\cdot s}$$

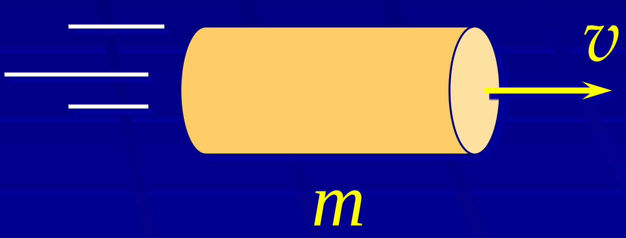
（3） $I=mv-0 \quad m=\dfrac{I}{v}=\dfrac{0.6}{300}\mathrm{kg}=0.002\,\mathrm{kg}=2\,\mathrm{g}$

例4 宇宙飞船在宇宙尘埃中飞行，尘埃密度为ρ。如果质量为m_0的飞船以初速v_0穿过尘埃，由于尘埃粘在飞船上，致使飞船速度发生变化。求飞船的速度与其在尘埃中飞行的时间的关系。（设飞船为横截面面积为S的圆柱体）

解： 某时刻飞船速度：v，质量：m

动量守恒： $m_0 v_0 = m v$

质量增量： $\mathrm{d}m = \rho S v \mathrm{d}t$



消掉质量, 保留速度和时间:

$$m = \frac{m_0 v_0}{v} \qquad \mathrm{d}m = -\frac{m_0 v_0}{v^2}\mathrm{d}v = \rho S v \mathrm{d}t$$

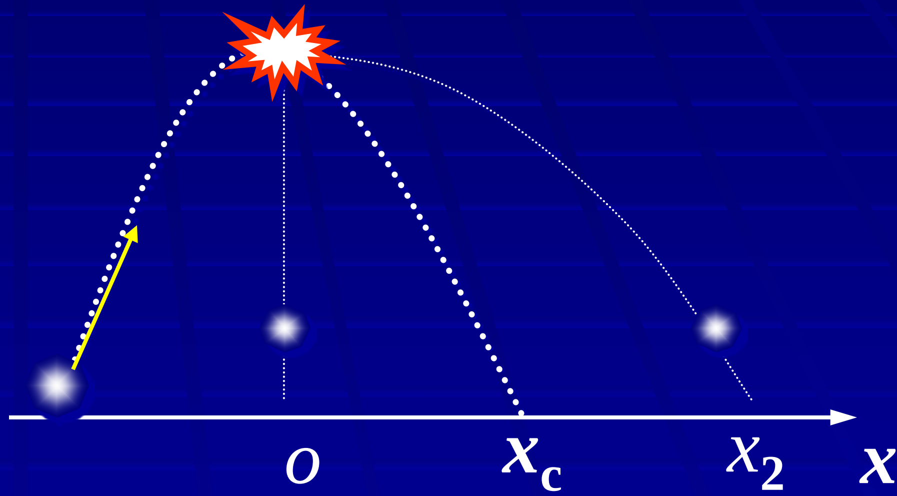
$$-\frac{\mathrm{d}v}{v^3} = \frac{\rho S}{m_0 v_0}\mathrm{d}t \qquad -\int_{v_o}^{v}\frac{\mathrm{d}v}{v^3} = \frac{\rho S}{m_0 v_0}\int_0^t \mathrm{d}t$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{v^2} - \frac{1}{v_0^2}\right) = \frac{\rho S}{m_0 v_0} t$$

$$v = \sqrt{\frac{m_0}{2\rho S v_0 t + m_0}}\, v_0$$

例3 有质量为2m的弹丸，从地面斜抛出去，它的落地点为x_C。如果它在飞行到最高点处爆炸成质量相等的两碎片。其中一碎片铅直自由下落，另一碎片水平抛出，它们同时落地。问第二块碎片落在何处。

解： 在爆炸的前后，质心始终只受重力的作用，因此，质心的轨迹为一抛物线，它的落地点为x_c。



$$x_C = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

$$\because \quad m_1 = m_2 = m \quad , \quad x_1 = 0$$

$$\therefore \quad x_C = \frac{m x_2}{2m}$$

$$x_2 = 2x_C$$

例1 设作用在质量为2kg的物体上的力$F=6t$ N。如果物体由静止出发沿直线运动，在头2 s内这力做了多少功?

解:

$$a=\frac{F}{m}=\frac{6t}{2}=3t \qquad \because \quad a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

$$\therefore \quad \mathrm{d}v=a\mathrm{d}t=3t\,\mathrm{d}t$$

两边积分:

$$\int_0^v \mathrm{d}v=\int_0^t 3t\mathrm{d}t \qquad v=\frac{3}{2}t^2$$

$$v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \qquad \mathrm{d}x=v\mathrm{d}t=\frac{3}{2}t^2\mathrm{d}t$$

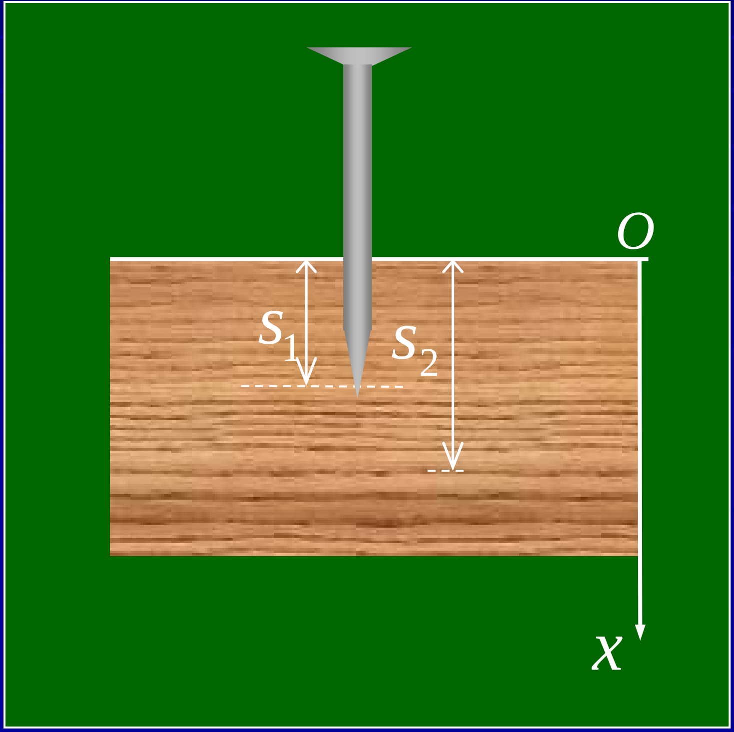
$$W=\int F\cdot\mathrm{d}x=\int_0^2 6t\cdot\frac{3}{2}t^2\mathrm{d}t=\frac{9}{4}t^4\Big|_0^2 \quad =36\ \mathrm{J}$$

例2 如图所示，用质量为m_0的铁锤把质量为m 的钉子敲入木板。设木板对钉子的阻力与钉子进入木板的深度成正比。在铁锤敲打第一次时，能够把钉子敲入1cm深，若铁锤第二次敲钉子的速度情况与第一次完全相同，问第二次能把钉子敲入多深？

解： 设铁锤敲打钉子前的速度为v_0，敲打后两者的共同速度为v。

$$m_0 v_0 = (m_0 + m) v$$

$$v = \frac{m_0 v_0}{m_0 + m}$$



铁锤第一次敲打时，克服阻力做功，设钉子所受阻力大小为：

$$F_{\mathrm{f}} = -kx$$

$\because m_0 >> m$ ， $\therefore v \approx v_0$

由动能定理，有：

$$0 - \frac{1}{2} m v_0^2 = \int_0^{s_1} -kx\mathrm{d}x = -\frac{1}{2} k s_1^2$$

设铁锤第二次敲打时能敲入的深度为**Δ***S* ，则有

$$0 - \frac{1}{2} m v_0^2 = \int_{s_1}^{s_1+\Delta s} -kx\mathrm{d}x \quad = -\left[\frac{1}{2} k (s_1 + \Delta s)^2 - \frac{1}{2} k s_1^2\right]$$

$$(s_1+\Delta s)^2 = 2s_1^2$$

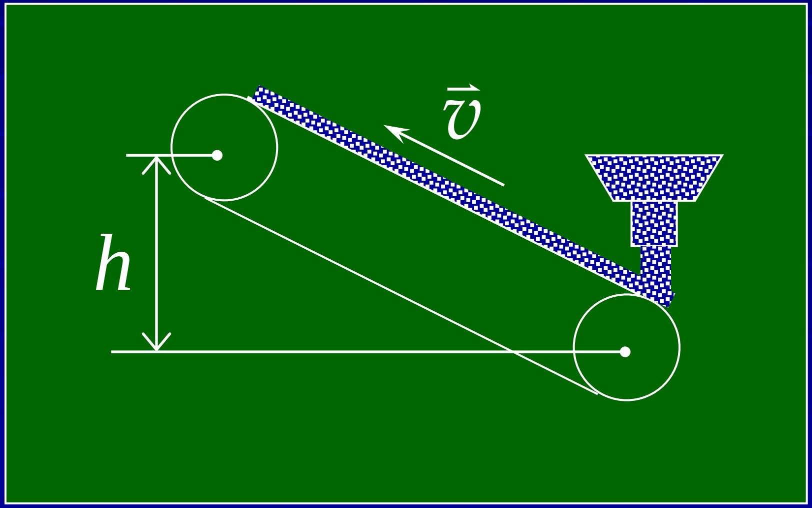
化简后 $$s_1+\Delta s=\sqrt{2}s_1$$

第二次能敲入的深度为：

$$\Delta s=\sqrt{2}s_1-s_1=(\sqrt{2}-1)\times 1\text{cm}=0.41\text{cm}$$

例3 传送带沿斜面向上运行速度为 v = 1m/s，设物料无初速地落到传送带下端的质量为 m = 50 kg/s，并被输送到高度 h = 5 m处，求配置的电动机所需功率。（忽略一切由于摩擦和碰撞造成的能量损失）

解： 在 Δt 时间内，质量为 $m\Delta t$ 的物料落到皮带上，并获得速度 v 。



Δt 内系统动能的增量：

$$\sum \Delta E_{ki} = \frac{1}{2}(m\Delta t)v^2 - 0$$

重力做功：

$$W = -(m\Delta t)gh$$

电动机对系统做的功：$P\Delta t$

由动能定理：

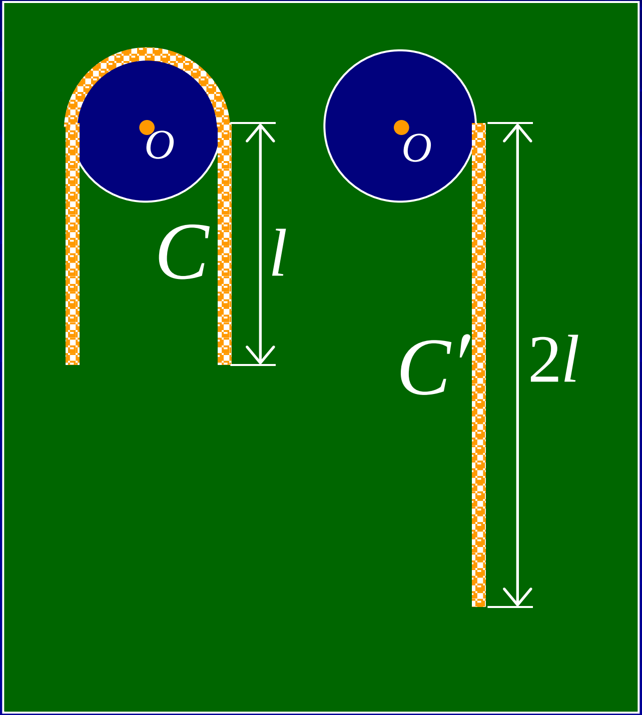
$$P\Delta t-(m\Delta t)gh=\frac{1}{2}(m\Delta t)v^2$$

$$P=m\left(\frac{v^2}{2}+gh\right)=50\times\left(\frac{1^2}{2}+9.8\times 5\right)\mathrm{W}=2475\,\mathrm{W}$$

例4 一长度为$2l$的匀质链条，平衡地悬挂在一光滑圆柱形木钉上。若从静止开始而滑动，求当链条离开木钉时的速率（木钉的直径可以忽略）

解： 设单位长度的质量为λ

始末两态的中心分别为C和C'



机械能守恒：

$$-2(\lambda lg)\frac{l}{2} = -\lambda(2l)gl + \frac{1}{2}\lambda(2l)v^2$$

解得 $v = \sqrt{lg}$

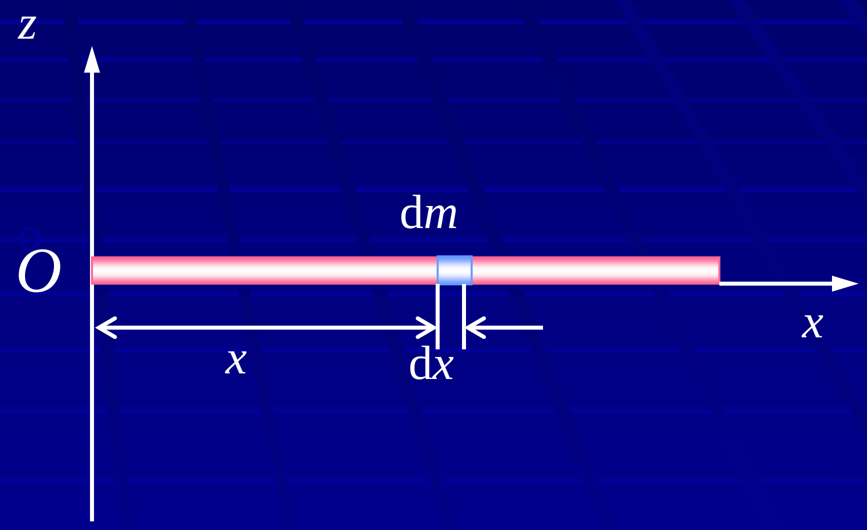
例1 计算质量为m，长为l 的细棒绕一端的转动惯量。

解：

$$J=\int r^2\mathrm{d}m$$

$$\mathrm{d}m=\rho\,\mathrm{d}x=\frac{m}{l}\mathrm{d}x$$

$$r^2=x^2$$



$$J=\int_0^l x^2\cdot\frac{m}{l}\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\frac{m}{l}x^3\Big|_0^l$$

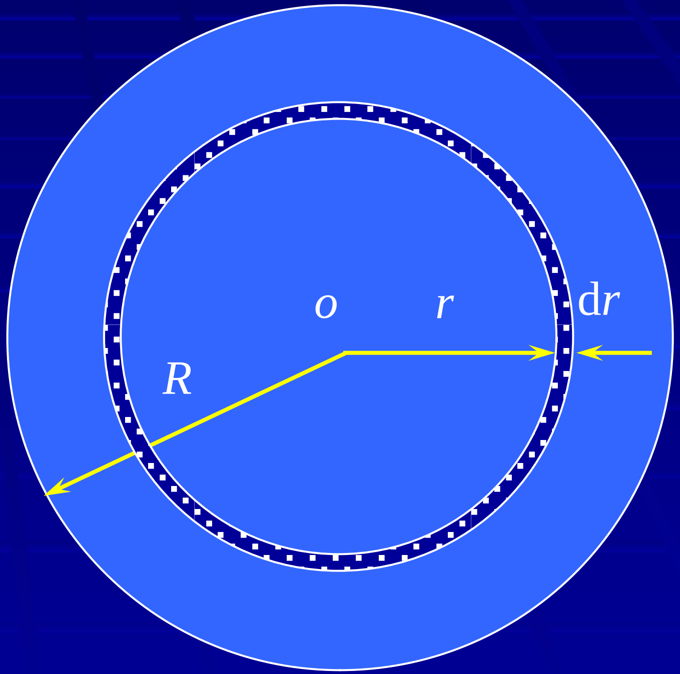
$$J=\frac{1}{3}ml^2$$

例2 一质量为m，半径为R的均匀圆盘，求对通过盘中心并与盘面垂直的轴的转动惯量。

解：

$$J=\int r^2\mathrm{d}m$$

$$\mathrm{d}m=\sigma\,2\pi\,r\mathrm{d}r$$



$$J=2\pi\sigma\int_0^R r^3\mathrm{d}r$$

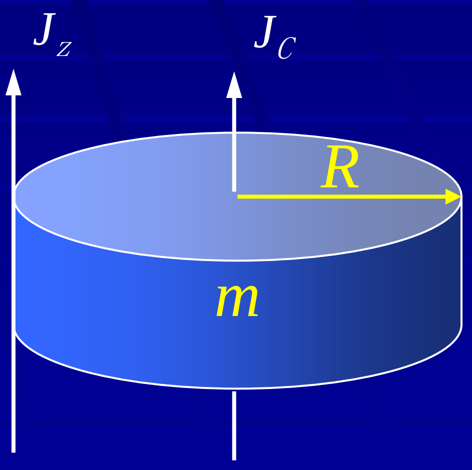
$$=\frac{\pi\sigma R^4}{2}=\frac{1}{2}mR^2$$

平行轴定理

若刚体对过质心的轴的转动惯量为J_C，则刚体对与该轴相距为d的平行轴z的转动惯量J_z是

$$J_z = J_C + md^2$$

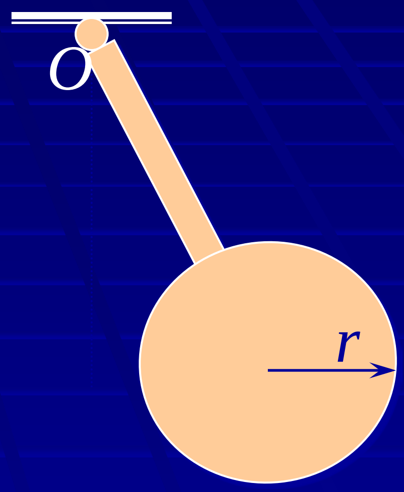
例如右图：



$$J_C = \frac{1}{2}mR^2$$

$$J_z = \frac{1}{2}mR^2 + mR^2 = \frac{3}{2}mR^2$$

例3 计算钟摆的转动惯量。（已知：摆锤质量为m，半径为r，摆杆质量也为m，长度为$2r$。）



解： 摆杆转动惯量：

$$J_1=\frac{1}{3}m(2r)^2=\frac{4}{3}mr^2$$

摆锤转动惯量：

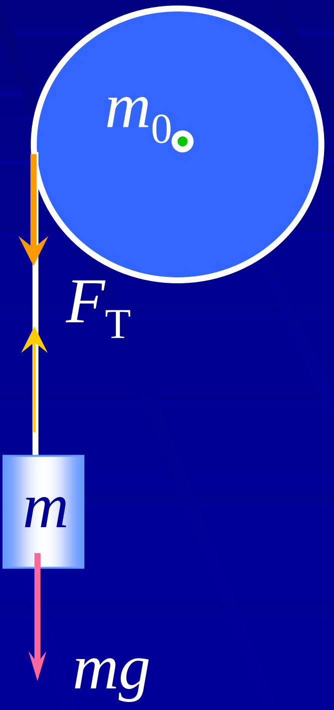
$$J_2=J_C+md^2=\frac{1}{2}mr^2+m(3r)^2=\frac{19}{2}mr^2$$

总转动惯量： $$J=J_1+J_2=\frac{65}{6}mr^2$$

例4 质量为m_0 =16 kg的实心滑轮，半径为R = 0.15 m。一根细绳绕在滑轮上，一端挂一质量为m的物体。求：（1）由静止开始1秒钟后，物体下降的距离；（2）绳子的张力。

解：$$mg - F_{\mathrm{T}} = ma$$

$$F_{\mathrm{T}}R = J\frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{2}m_0R^2\frac{a}{R}$$ 即 $$F_{\mathrm{T}} = \frac{1}{2}m_0 a$$



$$a = \frac{mg}{m + m_0/2} = \frac{8\times10}{8+8}\,\mathrm{m\cdot s^{-2}} = 5\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$$

$$h = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}\times5\times1^2\,\mathrm{m} = 2.5\,\mathrm{m}$$

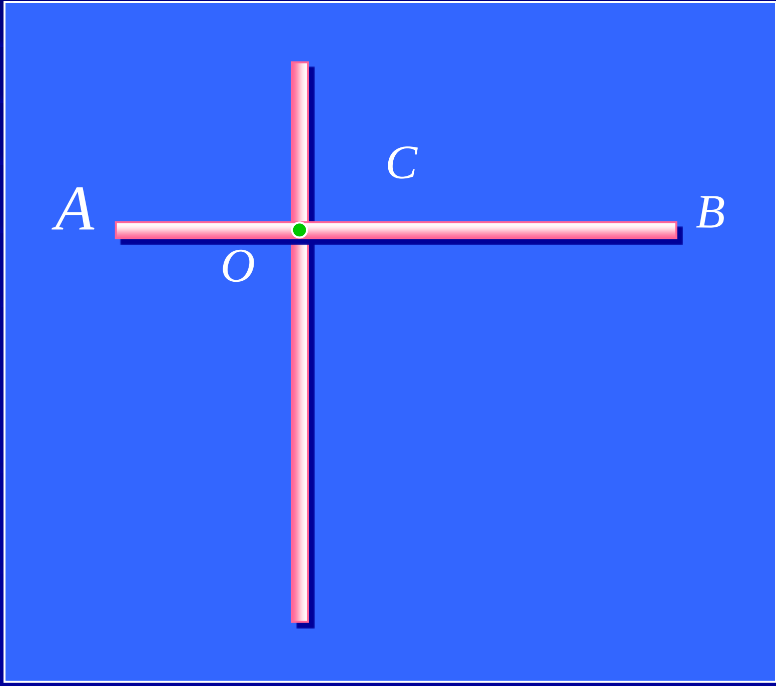
$$F_{\mathrm{T}} = \frac{1}{2}\times16\times5 = 40\,\mathrm{N}$$

例5 一质量为*m*，长为*l* 的均质细杆，转轴在*O*点，距A端 *l*/3 处。今使棒从静止开始由水平位置绕*O*点转动，求：（1）水平位置的角速度和角加速度；（2）垂直位置时的角速度和角加速度。

解：$$J_O = J_C + md^2 = J_C + m(l/6)^2$$

$$J_A = J_C + m(l/2)^2$$

$$J_A = \frac{1}{3}ml^2 \qquad \therefore J_O = \frac{1}{9}ml^2$$



（1） $$\omega_O = 0$$

$$\alpha = \frac{M}{J_O} = \frac{mgl/6}{ml^2/9} = \frac{3g}{2l}$$

（2） $M = J\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$

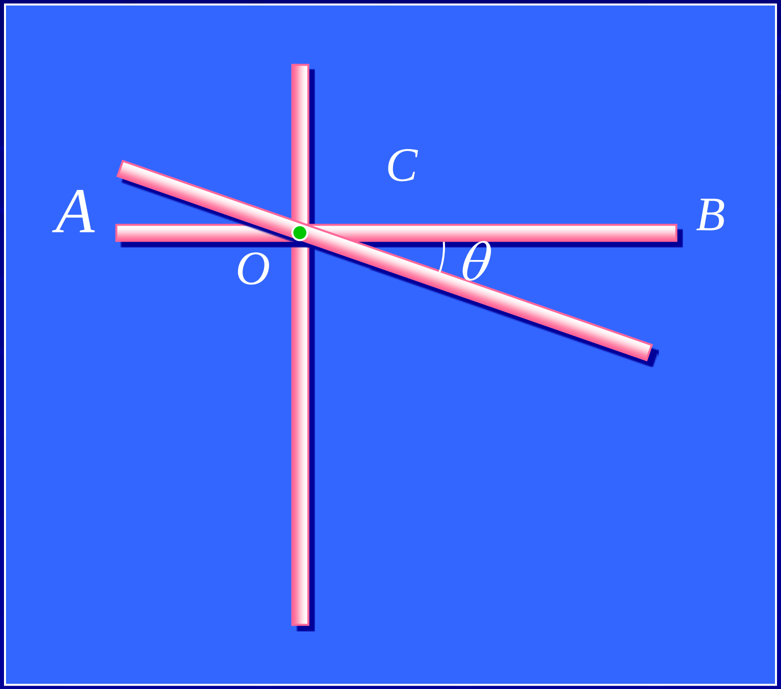
$$mg\frac{l}{6}\cos\theta = \frac{1}{9}ml^2\frac{\mathbf{d}\omega}{\mathbf{d}t} = \frac{1}{9}ml^2\omega\frac{\mathbf{d}\omega}{\mathbf{d}\theta}$$

$$\omega = \frac{\mathbf{d}\theta}{\mathbf{d}t}$$

$$\omega\,\mathrm{d}\omega = \frac{3g}{2l}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta$$

$$\int_0^{\omega}\omega\,\mathbf{d}\omega = \int_0^{\pi/2}\frac{3g}{2l}\cos\theta\,\mathbf{d}\theta$$

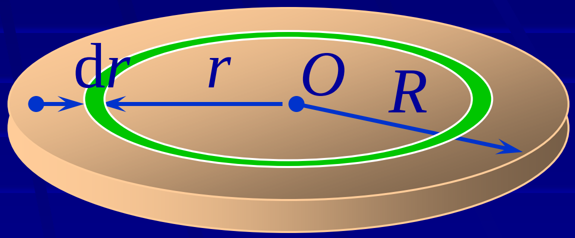
$$\frac{1}{2}\omega^2 = \frac{3g}{2l}\sin\theta\Big|_0^{\pi/2} = \frac{3g}{2l}$$



$$\omega = \sqrt{3g/l} \qquad \alpha = 0$$

例6 一半径为R，质量为m的均匀圆盘平放在粗糙的水平面上。若它的初速度为ω_0，绕中O心旋转，问经过多长时间圆盘才停止。（设摩擦系数为μ）

解： $$\mathrm{d}M = \mathrm{d}F \cdot r = \mu\,\mathrm{d}mg \cdot r$$

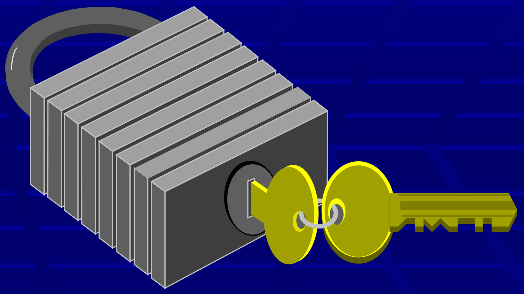


$$\mathrm{d}m = \frac{m}{\pi R^2} \cdot 2\pi r \cdot \mathrm{d}r = \frac{2mr\mathrm{d}r}{R^2}$$

$$\mathrm{d}M = \frac{2m\mu g r^2 \mathrm{d}r}{R^2}$$

$$M = \int \mathrm{d}M = \int_0^r \frac{2\mu m g r^2 \mathrm{d}r}{R^2} = \frac{2}{3}\mu m g R$$

$$-M = J\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$$



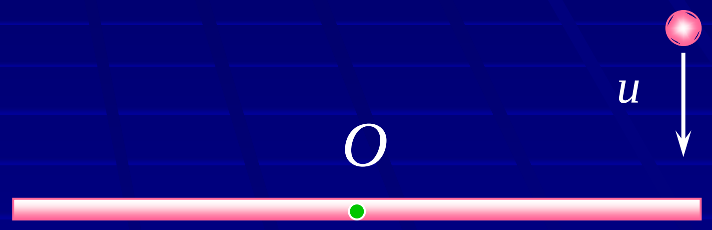
$$-\frac{2}{3}\mu mgR = \frac{1}{2}mR^2\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$$

$$\mathrm{d}t = \frac{3R}{4\mu g}\mathrm{d}\omega \qquad \int_0^t \mathrm{d}t = -\int_{\omega_0}^0 \frac{3R}{4\mu g}\mathrm{d}\omega$$

$$t = \frac{3R\omega_0}{4\mu g}$$

例7 质量为m_0，长为$2l$ 的均质细棒，在竖直平面内可绕中心轴转动。开始棒处于水平位置，一质量为m的小球以速度u垂直落到棒的一端上。设为弹性碰撞。求碰后小球的回跳速度v以及棒的角速度。

解： 系统角动量守恒：



$$-mul = -J\omega + mvl$$

弹性碰撞机械能守恒：

$$\frac{1}{2}mu^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2$$

$$\therefore \quad v = \frac{u(m_0 - 3m)}{m_0 + 3m} \qquad \omega = \frac{6mu}{(m_0 + 3m)l}$$

方法二： 设碰撞时间为Δt

$$\overline{F}\Delta t = mv - (-mu)$$

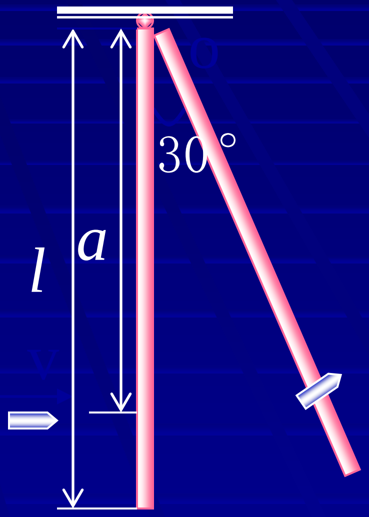
$$-\overline{F}l\Delta t = -J\omega - 0$$

消去Δt $$-mul = -J\omega + mvl$$

弹性碰撞机械能守恒： $$\frac{1}{2}mu^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2$$

$$\therefore \quad v = \frac{u(m_0 - 3m)}{m_0 + 3m} \qquad \omega = \frac{6mu}{(m_0 + 3m)l}$$

例8 长度为l，质量为m_0的杆可绕支点O自由转动。质量为m，速度为v的子弹射入距支点为a的棒内。若棒最大偏转角为30°。问子弹的初速度v。



解： 过程1碰撞, 角动量守恒：

$$mva = \left(\frac{1}{3}m_0 l^2 + ma^2\right)\omega$$

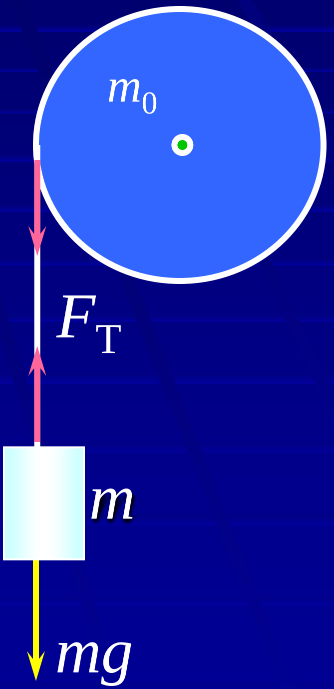
过程2棒偏转, 机械能守恒：

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}m_0 l^2 + ma^2\right)\omega^2 = mga(1-\cos 30°) + m_0 g \frac{l}{2}(1-\cos 30°)$$

$$\therefore\ v = \frac{1}{ma}\sqrt{\frac{g}{6}\left(2-\sqrt{3}\right)(m_0 l + 2ma)(m_0 l^2 + 3ma^2)}$$

例9 一质量为m_0，半径R的圆盘，盘上绕由细绳，一端挂有质量为m的物体。问物体由静止下落高度h时，其速度为多大?

解： 力矩对盘做功：



$$F_T R\Delta\varphi = \frac{1}{2}J\omega^2 - \frac{1}{2}J\omega_0^2$$

力对m做功：

$$mgh - F_T h = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$$

$$h = R\Delta\varphi \quad v = R\omega$$

$$v_0 = 0, \quad \omega_0 = 0, \quad J = m_0 R^2/2$$

解得 $v = 2\sqrt{mgh/(m_0 + 2m)}$

例10 长为 l 匀质细杆OA，一端悬于O点，铅直下垂。一单摆也悬于O点，摆线长l，摆球质量m。现将单摆拉到水平位置后由静止释放，摆球在 A 处与杆弹性碰撞后恰好静止。试求：(1) 杆质量m_0；(2) 碰撞后杆摆动的最大角度θ。（忽略一切阻力）

解：

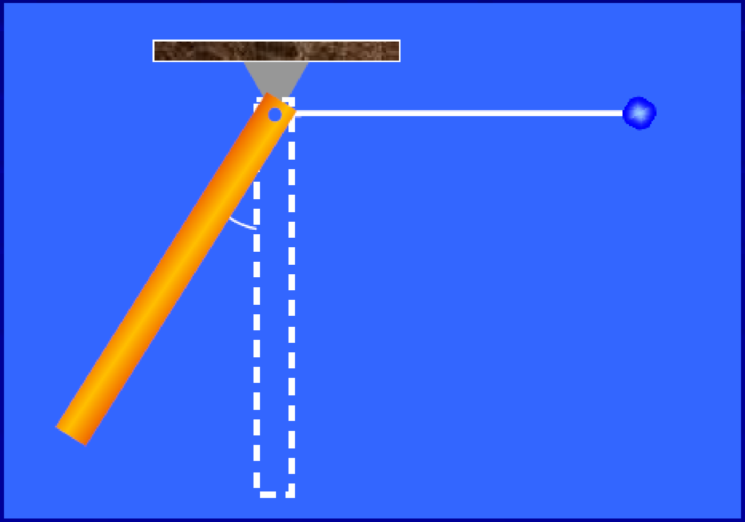
过程1单摆, 过程2碰撞, 过程3杆摆动

过程2碰撞, 角动量守恒：

$$J_m\omega_m = J_{m_0}\omega_{m_0}$$

弹性碰撞机械能守恒:

$$\frac{1}{2}J_m\omega_m{}^2 = \frac{1}{2}J_{m_0}\omega_{m_0}^2$$



两式相除得 $\omega_m = \omega_{m_0} \quad \rightarrow \quad J_m = J_{m_0} \quad \rightarrow$

$$ml^2 = \frac{1}{3} m_0 l^2$$

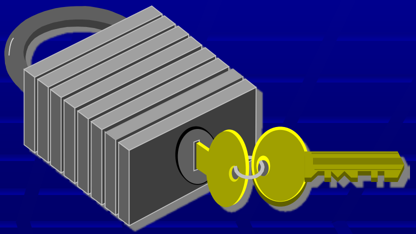
过程1-2-3(或者过程3) 机械能守恒，有:

$$mgl = m_0 g \frac{l}{2}(1 - \cos\theta)$$

$$\cos\theta = \frac{1}{3}$$

$$\theta = \arccos\frac{1}{3} = 70.5^\circ$$

解题方法



由初始条件求解振幅和初相位：

设 $t = 0$时，振动位移：$x = x_0$

振动速度：$v = v_0$

$$x = A\cos(\omega t + \varphi) \qquad x_0 = A\cos\varphi$$

$$v = -\omega A\sin(\omega t + \varphi) \qquad v_0 = -\omega A\sin\varphi$$

$$x_0 = A\cos\varphi \qquad -\frac{v_0}{\omega} = A\sin\varphi$$

$$x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2} = A^2(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) = A^2$$

$$A = \sqrt{x_0{}^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2}$$

$$\tan\varphi = -\frac{v_o}{\omega x_o}$$

例1 一质点沿x 轴作简谐振动，振幅为12 cm，周期为2s。当t = 0时, 位移为6 cm，且向x 轴正方向运动。求:(1)振动方程；(2)t = 0.5 s时，质点的位置、速度和加速度；(3)如果在某时刻质点位于x = -6 cm，且向 x 轴负方向运动，从该位置回到平衡位置所需要的时间。

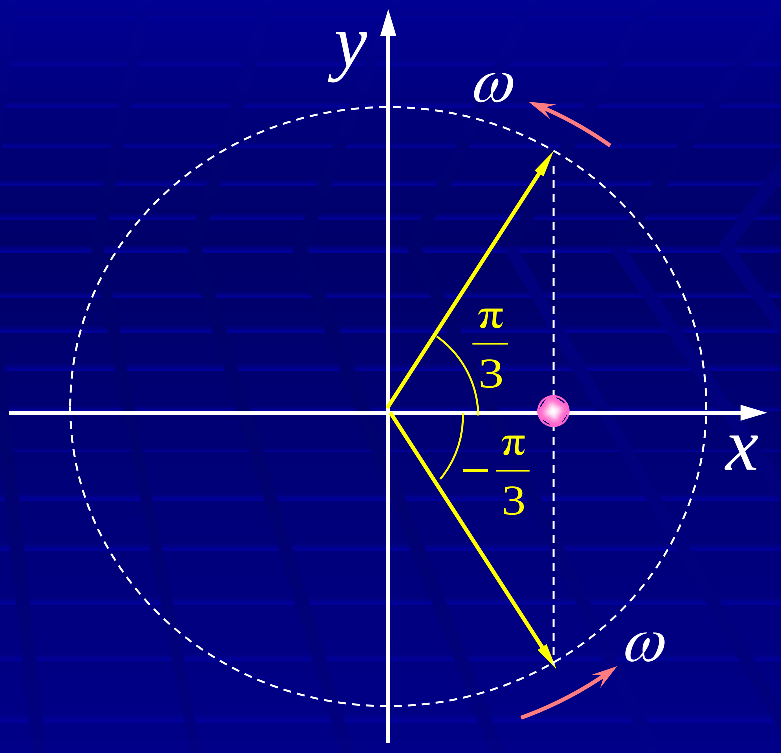
解： 设简谐振动表达式为 $x = A\cos(\omega t + \varphi)$

已知：A =12 cm， T = 2 s， $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = \pi\, s^{-1}$

$$x = 0.12\cos(\omega t + \varphi)$$

初始条件： $t = 0$ 时， $x_0 = 0.06$ m， $v_0 > 0$

$$0.06 = 0.12\cos\varphi$$



$$\frac{1}{2} = \cos\varphi \rightarrow \varphi = \pm\frac{\pi}{3}$$

$$v_0 = -\omega A\sin\varphi > 0$$

$$\rightarrow \quad \sin\varphi < 0 \qquad \varphi = -\frac{\pi}{3}$$

振动方程：$x = 0.12\cos(\pi t - \frac{\pi}{3})$

$$v\big|_{t=0.5}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0.5}=-0.12\pi\sin(\pi t-\frac{\pi}{3})\bigg|_{t=0.5}=-0.189\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$$

$$a\big|_{t=0.5}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0.5}=-0.12\pi^2\cos(\pi t-\frac{\pi}{3})\bigg|_{t=0.5}=-0.103\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$$

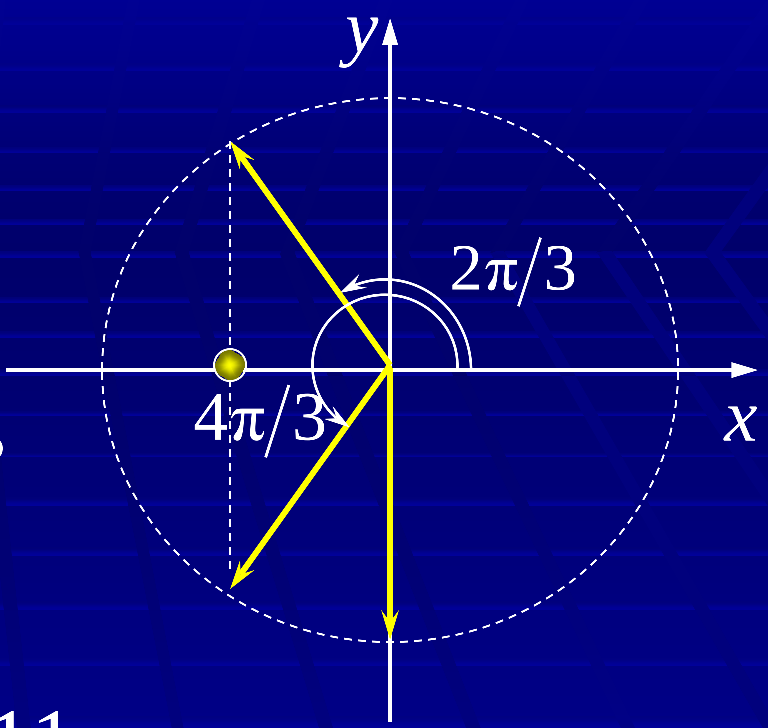
设在某一时刻 t_1， x = - 0.06 m

代入振动方程： $-0.06=0.12\cos(\pi t_1-\pi/3)$

$$\cos(\pi t_1-\pi/3)=-\frac{1}{2}$$

$$\pi t_1 - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} \quad 或 \quad \frac{4\pi}{3}$$

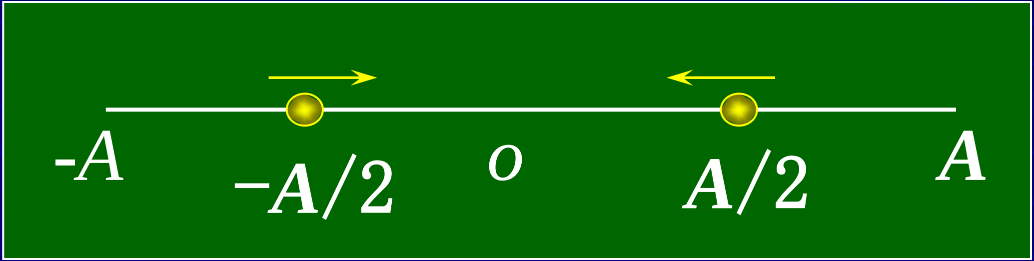
$$\pi t_1 - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} \quad \rightarrow \quad t_1 = 1\text{s}$$



$$\pi t_2 - \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi}{2} \quad \rightarrow \quad t_2 = \frac{11}{6}\text{s}$$

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{11}{6} - 1 = \frac{5}{6}\text{s}$$

例2 两质点做同方向、同频率的简谐振动，振幅相等。当质点1在 $x_1= A/2$ 处，且向左运动时，另一个质点2在 $x_2= -A/2$ 处，且向右运动。求这两个质点的相位差。



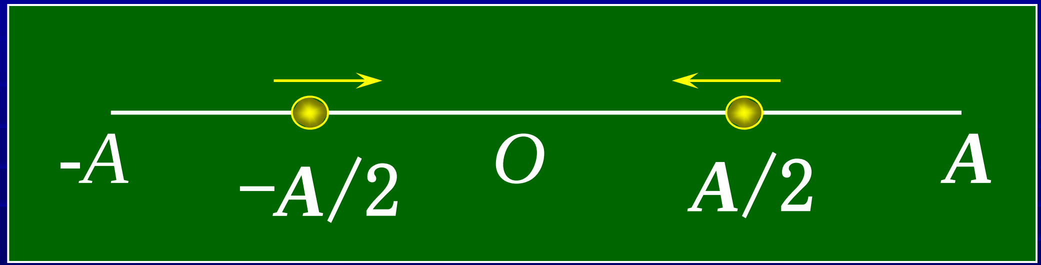
解:

$$x_1 = A\cos(\omega t + \varphi_1)$$

$$A/2 = A\cos(\omega t + \varphi_1) \quad \rightarrow \omega t + \varphi_1 = \pm \pi/3$$

$$v_1 = -\omega A\sin(\omega t + \varphi_1) < 0$$

$$\sin(\omega t + \varphi_1) > 0 \qquad \omega t + \varphi_1 = \pi/3$$



$$-A/2 = A\cos(\omega t + \varphi_2)$$

$$\rightarrow \quad \omega t + \varphi_2 = \pm 2\pi/3$$

$$v_2 = -\omega A \sin(\omega t + \varphi_2) > 0$$

$$\rightarrow \quad \sin(\omega t + \varphi) < 0$$

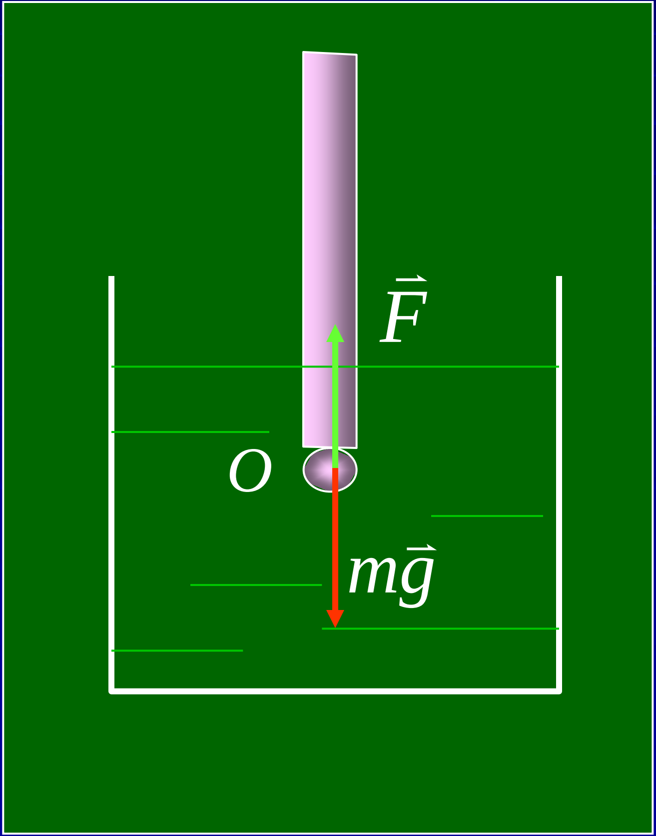
$$\omega t + \varphi_2 = -2\pi/3$$

$$\Delta\varphi = (\omega t + \varphi_1) - (\omega t + \varphi_2) = \frac{\pi}{3} - (-\frac{2\pi}{3}) = \pi$$

例3 质量为m的比重计，放在密度为ρ的液体中。已知比重计圆管的直径为d。试证明，比重计推动后，在竖直方向的振动为简谐振动，并计算周期。

解：

取平衡位置为坐标原点



平衡时： $mg - F_0 = 0$

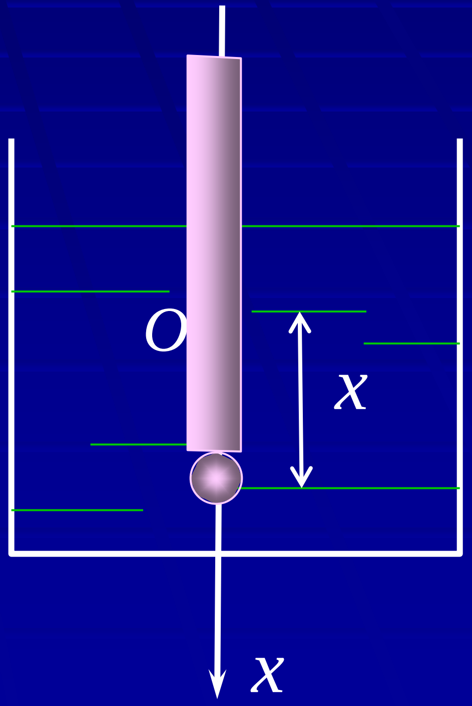
浮力： $F = \rho V g$

其中V为比重计的排水体积

$$mg-\left[V+\boldsymbol{\pi}\left(\frac{d}{2}\right)^{2}x\right]\rho\, g=m\frac{\mathbf{d}^{2}x}{\mathbf{d}t^{2}}$$

$$mg-\rho Vg-\rho\, g\pi\left(\frac{\mathrm{d}}{2}\right)^{2}x=m\frac{\mathrm{d}^{2}x}{\mathrm{d}t^{2}}$$

$$\frac{\mathrm{d}^{2}x}{\mathrm{d}t^{2}}=-\frac{\pi\, d^{2}\rho\, g}{4m}x$$



$$\omega=\frac{d}{2}\sqrt{\frac{\pi\rho\, g}{m}}\qquad T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{4}{d}\sqrt{\frac{\pi m}{\rho\, g}}$$

例4 一轻弹簧一端固定，另一端连一定质量的物体。整个振动系统位于水平面内。今将物体沿平面向右拉长到 $x_0 = 0.04\ \mathrm{m}$ 处释放，$\omega = 6.0\ \mathbf{rad \cdot s^{-1}}$ 试求：（1）简谐振动方程；（2）物体从初始位置运动到第一次经过$A/2$处时的速度。

解： $x_0 = 0.04\mathrm{m} \quad , v_0 = 0 \quad , \omega = 6.0\ \mathbf{rad \cdot s^{-1}}$

振幅： $$A = \sqrt{{x_0}^2 + \frac{{v_0}^2}{{\omega_0}^2}} = x_0 = 0.04\ \mathrm{m}$$

$$\varphi = \arctan \frac{-v_0}{\omega x_0} \rightarrow \varphi = 0$$

得 $$x = 0.04 \cos(6.0t)$$

$$x = A\cos(\omega t) \quad \rightarrow \quad \omega t = \arccos\frac{x}{A}$$

$$\omega t = \arccos\frac{A/2}{A} = \arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}(\text{或}\,\frac{5\pi}{3})$$

$$\text{按题意}: x = A \rightarrow x = +\frac{A}{2}, \omega t = \frac{\pi}{3}$$

$$v = -A\omega \sin\left(\omega t\right) = -0.04 \times 6.0 \times (\sin\frac{\pi}{3})$$

$$= -0.208\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

例5 当简谐振动的位移为振幅的一半时，其动能和势能各占总能量的多少？ 物体在什么位置时其动能和势能各占总能量的一半？

解：

$$E = E_{\mathrm{p}} + E_{\mathrm{k}} = \frac{1}{2}kA^2$$

当 $x = A/2$ 时：

$$E_{\mathrm{p}} = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}k\left(\frac{A}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}E$$

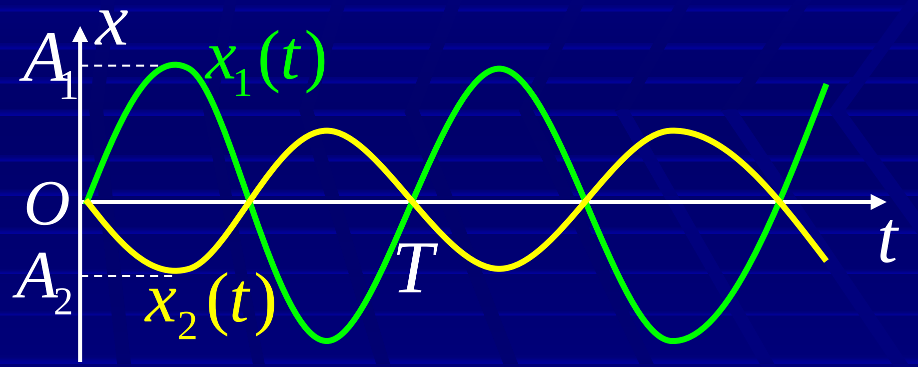
$$E_{\mathrm{k}} = E - E_{\mathrm{p}} = \frac{3}{4}E$$

$$\frac{1}{2}kx_0^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}kA^2 \qquad x_0 = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}A = \pm 0.707A$$

例6 两个同方向的简谐振动曲线(如图所示)

（1）求合振动的振幅；

（2）求合振动的振动方程。

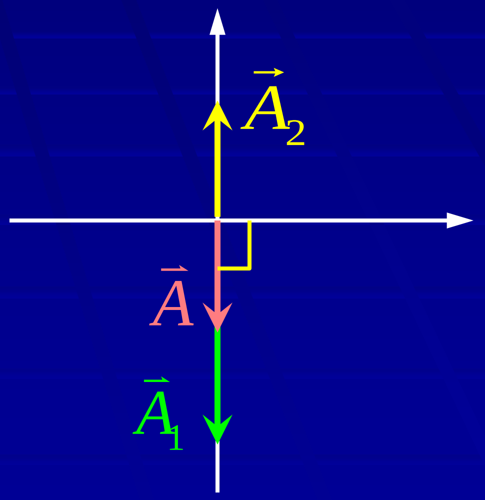


解： $A = |A_2 - A_1|$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$A_1 \cos\varphi_1 = 0 \qquad \varphi_1 = \pm\frac{\pi}{2} \to \varphi_1 = -\frac{\pi}{2}$$

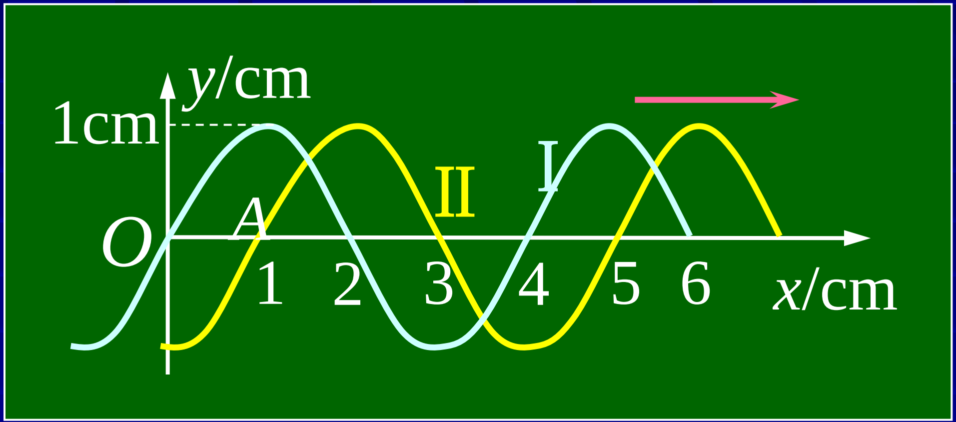
$$A_2 \cos\varphi_2 = 0 \qquad \varphi_2 = \pm\frac{\pi}{2} \to \varphi_2 = \frac{\pi}{2}$$



由矢量图： $\varphi = -\frac{\pi}{2}$

$$x = |A_2 - A_1| \cos(\frac{2\pi}{T} t - \frac{\pi}{2})$$

例1　已知t = 0时的波形曲线为Ⅰ，波沿Ox 方向传播，经t =1/2 s 后波形变为曲线Ⅱ。已知波的周期T > 1 s，试根据图中给出的条件求出波的表达式，并求A点的振动方程。



解：方法一：

$$A = 0.01\,\mathrm{m}$$

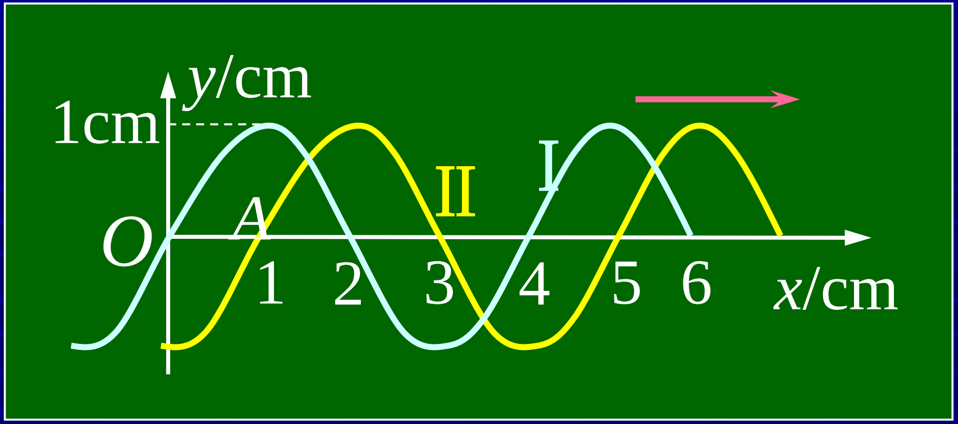
$$\lambda = 0.04\,\mathrm{m}$$

波速：$$u = \frac{x_1 - x_O}{t} = \frac{0.01}{1/2} = 0.02\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

$$T = \frac{\lambda}{u} = \frac{0.04}{0.02} = 2\,\mathrm{s} \qquad \omega = \frac{2\pi}{T} = \pi\,\mathrm{s^{-1}}$$

原点振动方程：

$$y_O = A\cos(\omega t + \varphi)$$

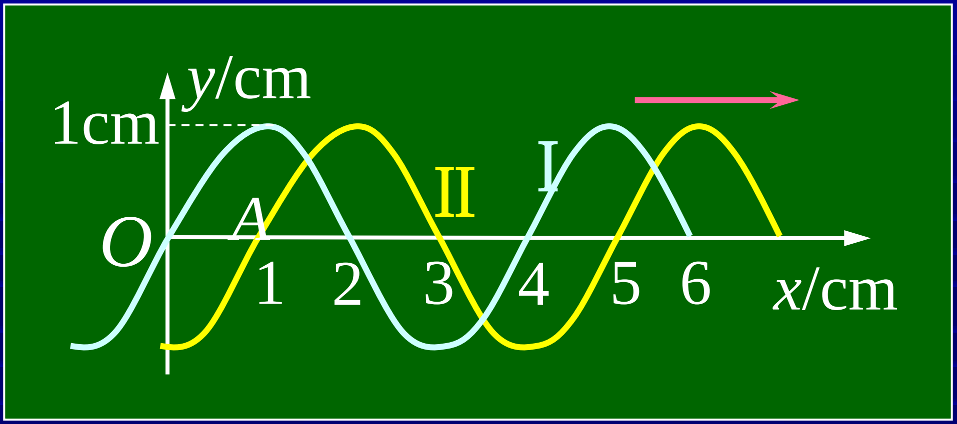


初始条件：

$$0 = A\cos\varphi \quad \rightarrow \varphi = \pm\frac{\pi}{2}$$

$$v = -\omega A\sin\varphi < 0 \quad \sin\varphi > 0 \rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$$

$$y_O = 0.01\cos(\pi t + \frac{\pi}{2})$$



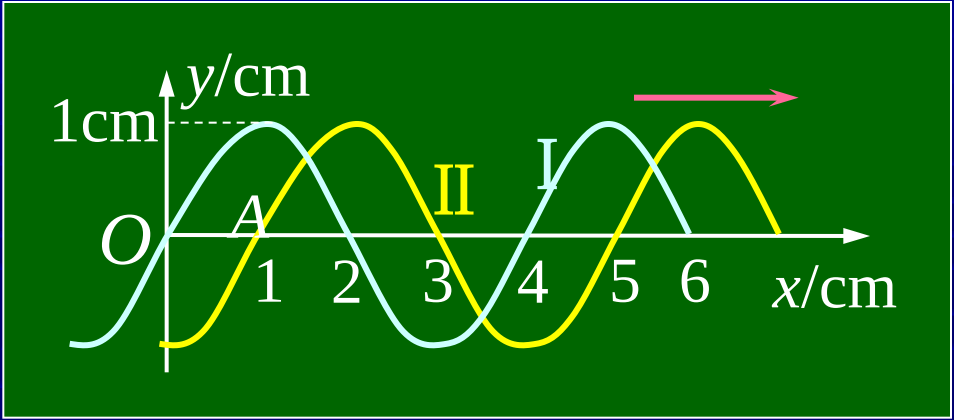
$$y_O = 0.01\cos(\pi t + \frac{\pi}{2})$$

波动方程： $$y = 0.01\cos[\pi(t - \frac{x}{0.02}) + \frac{\pi}{2}]$$

A点振动方程： $$y_A = 0.01\cos[\pi(t - \frac{0.01}{0.02}) + \frac{\pi}{2}]$$

$$y_A = 0.01\cos\pi t$$

方法二：



A点振动表达式： $y_A = A\cos(\omega t + \varphi)$

初始条件： $A = A\cos\varphi \quad \rightarrow \varphi = 0$

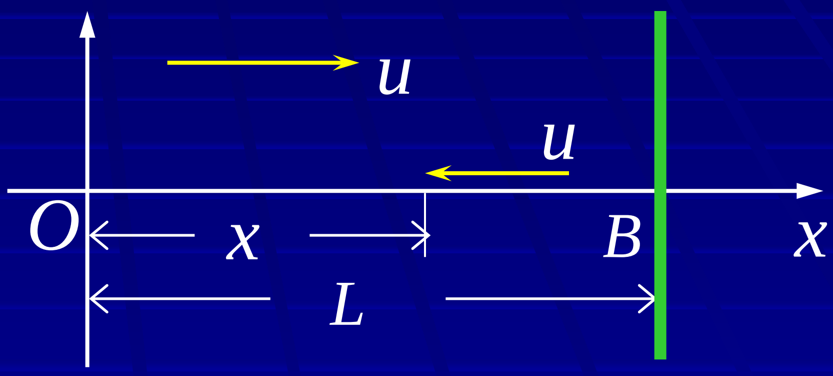
$$y_A = A\cos\omega t = 0.01\cos\pi t$$

波动表达式： $y = 0.01\cos(\pi t - \dfrac{x - 0.01}{0.02})$

$$y = 0.01\cos[\pi(t - \frac{x}{0.02}) + \frac{\pi}{2}]$$

例2 有一平面简谐波沿x轴方向传播，在距反射面B为L处的振动规律为$y = A\cos\omega t$，设波速为u，反射时无半波损失，求入射波和反射波的波动方程。

解： 入射波方程：



$$y = A\cos\omega\left(t - \frac{x}{u}\right)$$

$$y_B = A\cos\omega\left(t - \frac{L}{u}\right)$$

反射波方程：

$$y = A\cos\omega\left(t - \frac{L}{u} - \frac{L-x}{u}\right)$$

$$= A\cos\omega\left(t + \frac{x}{u} - \frac{2L}{u}\right)$$

例3 在截面积为*S*的圆管中，有一列平面简谐波，其波动的表达式为$y = A\cos(\omega t - 2\pi x/\lambda)$。管中波的平均能量密度为 $\overline{w}$，则通过截面*S*的平均能流是多少？

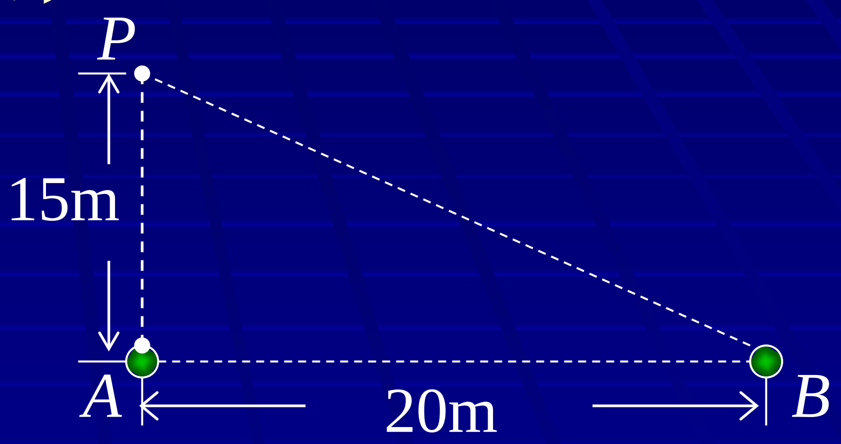
解：

$$\overline{P} = \overline{w} u S$$

$$\because \quad u = \frac{\lambda}{T} \qquad \because \quad T = \frac{2\pi}{\omega} \qquad \therefore \quad u = \frac{\omega\lambda}{2\pi}$$

$$\overline{P} = \frac{\omega\lambda}{2\pi} \overline{w} S$$

例6 AB为两相干波源，振幅均为5 cm，频率为100 Hz，波速为10 m/s。A点为波峰时，B点恰为波谷，试确定两列波在P点干涉的结果。



解： $BP=\sqrt{20^2+15^2}\ \text{m}=25\ \text{m}$

$$\lambda=\frac{u}{T}=\frac{u}{\nu}=0.1\,\mathbf{m}$$

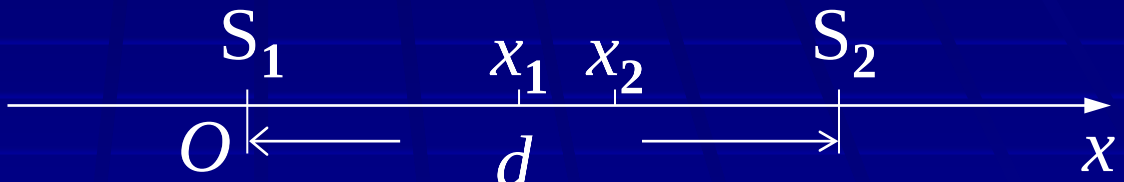
设A比B超前π $\varphi_A-\varphi_B=\pi$

$$\Delta\varphi=\varphi_B-\varphi_A-2\pi\frac{BP-AP}{\lambda}=-\pi-2\pi\frac{25-15}{0.1}$$

$=-201\pi$ 反相位 振幅 $A=0$ P点静止

例7 两相干波源S_1和S_2的间距为d = 30 m，且都在x轴上，S_1位于原点O。设由两波源分别发出两列波沿x 轴传播，强度保持不变。x_1 = 9 m和 x_2= 12 m处的两点是相邻的两个因干涉而静止的点。求两波长和两波源间最小相位差。

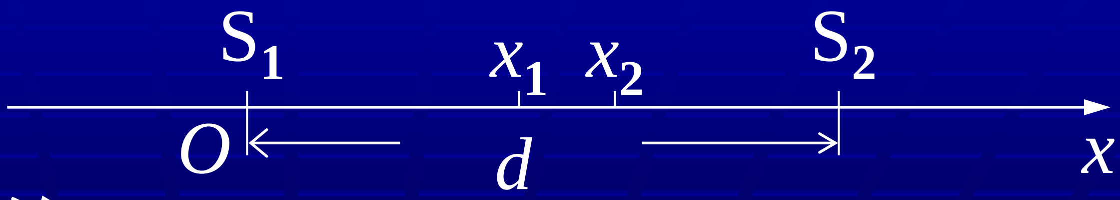
解：



设S_1和S_2的振动相位分别为： φ_1 φ_2

x_1点的振动相位差：

$$[\varphi_2-\frac{2\pi}{\lambda}(d-x_1)]-[\varphi_1-\frac{2\pi}{\lambda}x_1]=(2k+1)\pi \qquad （1）$$



x_2点的振动相位差：

$$[\varphi_2-\frac{2\pi}{\lambda}(d-x_2)]-[\varphi_1-\frac{2\pi}{\lambda}x_2]=(2k+3)\pi \qquad （2）$$

(2)式减去(1)式得:
$$\frac{4\pi}{\lambda}(x_2-x_1)=2\pi$$

$$\lambda=2(x_2-x_1)=2(12-9)\ \mathrm{m}=6\ \mathrm{m}$$

由（1）式

$$\varphi_2-\varphi_1=(2k+1)\pi+\frac{2\pi}{\lambda}(d-2x_1)\ =(2k+5)\pi$$

k **= -2，-3时相位差最小** $\varphi_2-\varphi_1=\pm\pi$

例8　在弦线上有一简谐波，其表达式为：

$$y_1 = 2.0\times10^{-2}\cos[2\pi(\frac{t}{0.02}-\frac{x}{20})+\frac{\pi}{3}]\ (\mathbf{SI})$$

为了在此弦线上形成驻波，并且在$x = 0$处为一波节，此弦上还应有一简谐波，求其表达式。

解：

反向波　$y_2 = 2.0\times10^{-2}\cos[2\pi(\frac{t}{0.02}+\frac{x}{20})+\varphi]$

$$y = y_1 + y_2 = 4.0\times10^{-2}\cos[\frac{1}{2}(\frac{2x}{20}+\varphi-\frac{\pi}{3})]\cos[\frac{1}{2}(\frac{4\pi t}{0.02}+\varphi+\frac{\pi}{3})]$$

$$y = y_1 + y_2 = 4.0\times10^{-2}\cos[\frac{1}{2}(\frac{2x}{20}+\varphi-\frac{\pi}{3})]\cos[\frac{1}{2}(\frac{4\pi t}{0.02}+\varphi+\frac{\pi}{3})]$$

因为**$x = 0$**处为波节

$$\frac{1}{2}(\varphi-\frac{\pi}{3}) = \frac{\pi}{2} \qquad \rightarrow \varphi = \frac{4\pi}{3}$$

$$y_2 = 2.0\times10^{-2}\cos[2\pi(\frac{t}{0.02}+\frac{x}{20})+\frac{4\pi}{3}]$$