一、参数估计小结

在一个总体中总体单位(个体)在某一方面数量特征变量用ξ(大写X)表示，该变量的一般水平，即平均数$E(\xi)=\bar{\xi}=\mu$，方差$Var(\xi)=\sigma^2$。另外有一个用来反映是否具有某种特征的变量ξ'，具有某种性质时取1，不具有时取0，即ξ'是个是非标志。$E(\xi')=\bar{\xi'}=p$(小写)，方差$Var(\xi')=p(1-p)$。

从上反映总体特征的这些指标μ, σ^2, p, $p(1-p)$没有全面调查我们不知它们准确取值，是未知确定值，反映总体特征的指标又称为总体参数。例如由10万学生构成总体，平均分μ，成绩方差σ^2；及格率p，成数方差$p(1-p)$。都是未知常数。

我们从总体中随机抽取一个样本$(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$，$\xi_i$表示在一次抽样调查时第$i$个被抽中的个体的标志取值.

样本平均数$\bar{x}=\frac{\Sigma\xi_i}{n}$，样本方差$S^2$；样本成数(比例)

$$\hat{p}=\frac{n_1}{n}=\frac{\xi_1'+\xi_2'+\cdots+\xi_n'}{n}.$$

根据概率论知识，样本统计量都是随机变量，$\bar{x}$与P的抽样分布如下：

$\bar{x} \sim N(\mu, \sigma_{\bar{x}}^2)$，抽样平均误差 $\sigma_{\bar{x}} = \begin{cases} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} & (重复抽样) \\ \sqrt{\dfrac{\sigma^2}{n}\cdot\dfrac{N-n}{N-1}} \approx \sqrt{\dfrac{\sigma^2}{n}\cdot\left(1-\dfrac{n}{N}\right)} & (不重复) \end{cases}$

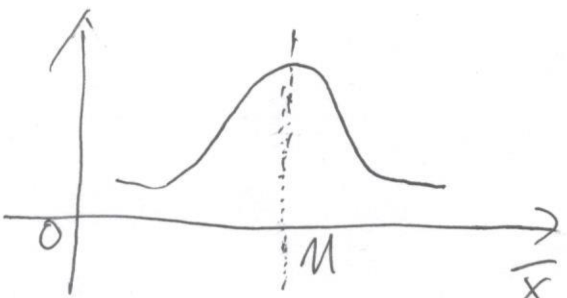
$P \sim N(p, \sigma_p^2)$，$\sigma_p = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{P(1-P)}{n}} & (重复抽样) \\ \sqrt{\dfrac{P(1-P)}{n}\cdot\dfrac{N-n}{N-1}} \approx \sqrt{\dfrac{P(1-P)}{n}\cdot\left(1-\dfrac{n}{N}\right)} & (不重复抽样) \end{cases}$

标准化后，$Z \equiv \dfrac{\bar{x}-\mu}{\sigma_{\bar{x}}} \sim N(0,1)$

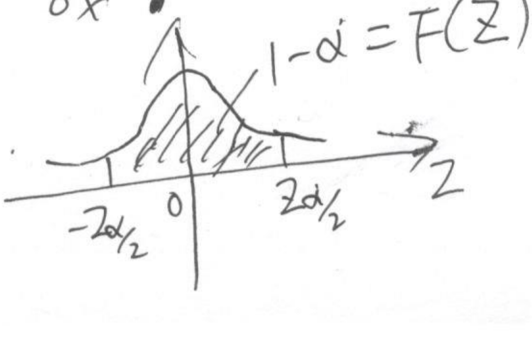
由于$E(\bar{x})=\mu$，$\bar{x}$的方差$Var(\bar{x})=\sigma_{\bar{x}}^2$. 可以证明

$$E(Z)=E\left(\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma_{\bar{x}}}\right)=\frac{E(\bar{x})-\mu}{\sigma_{\bar{x}}}=0,$$

$$Var(Z)=Var\left(\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma_{\bar{x}}}\right)=\frac{Var(\bar{x}-\mu)}{\sigma_{\bar{x}}^2}=\frac{Var(\bar{x})}{\sigma_{\bar{x}}^2}=\frac{\sigma_{\bar{x}}^2}{\sigma_{\bar{x}}^2}=1.$$



$Z \equiv \dfrac{\bar{x}-\mu}{\sigma_{\bar{x}}} \sim N(0,1)$



在置信度（概率保证程度）为 $1-\alpha$，α 是显著性水平，查标准正态分布表，可得概率度，即临界值 $z_{\alpha/2}$. $P(-z_{\alpha/2} \le Z \le z_{\alpha/2}) = 1-\alpha$，即

$$P\left(\left|\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma_{\bar{x}}}\right| \le z_{\alpha/2}\right) = 1-\alpha \Leftrightarrow P\left(-z_{\alpha/2} \le \frac{\bar{x}-\mu}{\sigma_{\bar{x}}} \le z_{\alpha/2}\right) = 1-\alpha.$$

$$\Rightarrow \bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \sigma_{\bar{x}} \le \mu \le \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \sigma_{\bar{x}}.$$

成数估计：

$$Z = \frac{P-p}{\sigma_p} \sim N(0,1),$$

$$P\left(-z_{\alpha/2} \le \frac{P-p}{\sigma_p} \le z_{\alpha/2}\right) = 1-\alpha$$

$$\Rightarrow P - z_{\alpha/2} \cdot \sigma_p \le p \le P + z_{\alpha/2} \cdot \sigma_{\bar{x}}$$

以上为原理，具体解题步骤参考课件第五章 P64 与 P65 的小结。例题作业第9题。

二、假设检验小结

(一) 总体平均数检验（μ的检验）

样本平均数 $\bar{x} \sim N(\mu, \sigma_{\bar{x}}^2)$，$E(\bar{x})=\mu$，$Var(\bar{x})=\sigma_{\bar{x}}^2$ 方差

$E(\bar{x}-\mu)=0$，$Var(\bar{x}-\mu)=\sigma_{\bar{x}}^2$

μ为总体平均数的真实值，是未知的。

μ_0是假定的一个取值。

$$E\left(\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma_{\bar{x}}}\right)=E\left(\frac{\bar{x}-\mu+\mu-\mu_0}{\sigma_{\bar{x}}}\right)=E\left(\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma_{\bar{x}}}\right)+E\left(\frac{\mu-\mu_0}{\sigma_{\bar{x}}}\right)$$

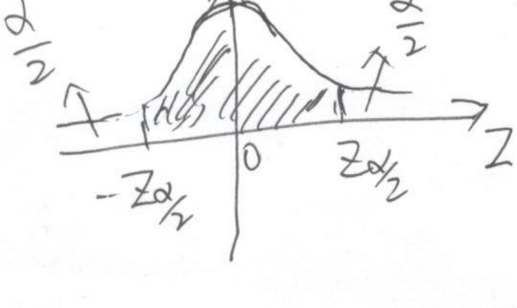
$$=\frac{\mu-\mu_0}{\sigma_{\bar{x}}}$$

1. 双侧检验

$H_0: \mu=\mu_0$，$H_1: \mu\neq\mu_0$

H_0成立时，$E\left(\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma_{\bar{x}}}\right)=\frac{\mu-\mu_0}{\sigma_{\bar{x}}}=0$，标准化后以0为对称轴。

$$Z=\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma_{\bar{x}}}$$



拒绝域为 $|Z|>Z_{\alpha/2}$

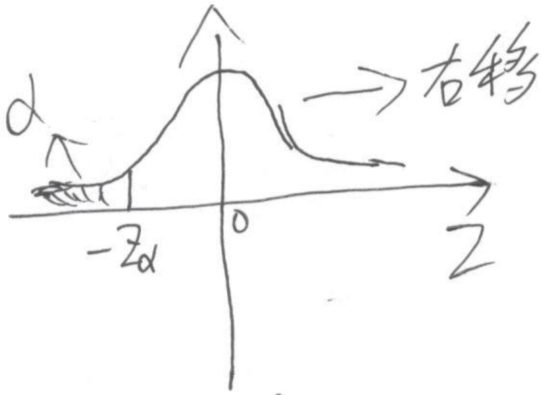
或写成 $Z<-Z_{\alpha/2}$ 或 $Z>Z_{\alpha/2}$

$\alpha=0.05$，$Z_{\alpha/2}=Z_{0.025}=1.96$

2. 左侧检验：$H_0: \mu \geq \mu_0$，$H_1: \mu < \mu_0$

$$Z = \frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma_{\bar{x}}}$$

H_0成立时，$E(Z)=E\left(\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma_{\bar{x}}}\right)=\frac{\mu-\mu_0}{\sigma_{\bar{x}}}\geq 0$



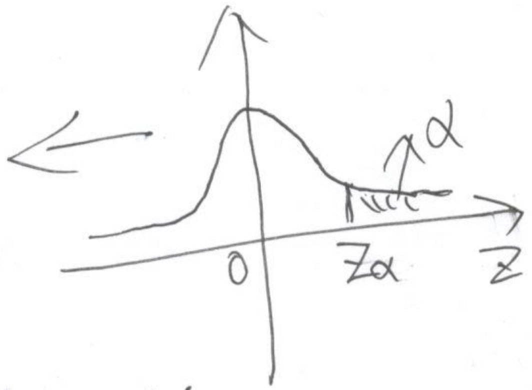
，H_0成立时，$\mu=\mu_0$，Z以0为对称轴，$\mu>\mu_0$，标准化后Z以$\frac{\mu-\mu_0}{\sigma_{\bar{x}}}>0$为对称轴，分布曲线右移，刻度$-Z_\alpha$不变。

拒绝域为

$Z<-Z_\alpha$，例如$\alpha=0.05$时，拒绝域$Z<-1.645$。

3. 右侧检验（$H_0: \mu \leq \mu_0$，$H_1: \mu > \mu_0$）

标准化$Z=\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma_{\bar{x}}}$，$H_0$成立时，$E(Z)=\frac{\mu-\mu_0}{\sigma_{\bar{x}}}\leq 0$



拒绝域为

$Z>Z_\alpha$，$\alpha=0.05$时，

拒绝域$Z>1.645$

$Z_{0.05}=1.645$

H_0取等号时，Z以0为对称轴；H_0取小于号时，Z以$\frac{\mu-\mu}{\sigma}<0$为对称轴，分布曲线左移。

(二) 总体成数 p 的检验 (总体用小写 p 表示)

样本成数 $P \sim N(p, \sigma_p^2)$, $E(P) = p$, P 方差 σ_p^2.

$E(P-p) = 0$, $Var(P-p) = Var(P) = \sigma_p^2$.

小 p 为总体成数的真实值, 是未知常数。

p_0 为假设值. $Z \equiv \dfrac{P-p_0}{\sigma_p}$

$$E(Z) = E\left(\frac{P-p_0}{\sigma_p}\right) = E\left(\frac{P-p+p-p_0}{\sigma_p}\right) = \frac{p-p_0}{\sigma_p}$$

1. 双侧 ($H_0: p = p_0$, $H_1: p \neq p_0$)

2. 左侧检验 ($H_0: p \geq p_0$, $H_1: p < p_0$)

3. 右侧检验 ($H_0: p \leq p_0$, $H_1: p > p_0$)

① 双侧拒绝域 $|Z| > Z_{\alpha/2} \Leftrightarrow Z < -Z_{\alpha/2}$ 或 $Z > Z_{\alpha/2}$

$\alpha = 0.05$ 时, $Z_{\alpha/2} = Z_{0.025} = 1.96$.

② 左侧拒绝域: $Z < -Z_\alpha$, $\alpha = 0.05$ 时, $Z < -Z_{0.05}$

$Z < -1.645$

③ 右侧检验拒绝域: $Z > Z_\alpha$, $\alpha = 0.05$ 时,

$Z > Z_{0.05} = 1.645$