厦门大学《大学物理》B1 课程
期中试题·答案

考试日期：2013.4　　信息学院自律督导部整理

1.（16 分）

一个质点 xoy 平面内运动，其运动方程为：$\begin{cases} x = 3t+5 \\ y = 0.5t^2 - 3t - 4 \end{cases}(SI)$，求：

（1） 质点的轨迹方程；

（2） 从 $t_1 = 1s$ 到 $t_2 = 2s$ 内质点的位移矢量；

（3） 任意时刻质点的速度矢量和加速度矢量；

（4） $t = 3s$ 时质点的切向加速度和法向加速度矢量。

解：（1）轨迹方程：$y = \frac{1}{18}(x^2 - 28x + 43) = \frac{1}{18}x^2 - \frac{14}{9}x + \frac{43}{18}$ ；　　（4 分）

（2）$\vec{r}\big|_{t=1} = 8\vec{i} - 6.5\vec{j}$ ，　$\vec{r}\big|_{t=2} = 11\vec{i} - 8\vec{j}$ ，　$\Delta\vec{r} = 3\vec{i} - 1.5\vec{j}(m)$；　（1+1+2=4 分）

（3）$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = 3\vec{i} + (t-3)\vec{j}$ ，　$\vec{a} = \vec{j}$ ；　（2+2=4 分）

（4）方法一：$\because$ 当 $t = 3s$ 时，$\vec{v}\cdot\vec{a} = 0$，即此时 $\vec{v} \perp \vec{a}$，

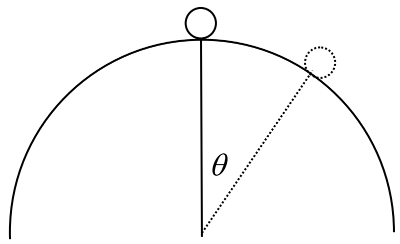
$\therefore \vec{a}_n = \vec{a} = \vec{j}$ ，$\vec{a}_\tau = 0$ ；　（2+2=4 分）

方法二：$\because v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{t^2 - 6t + 18} \quad \Rightarrow$

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{t-3}{\sqrt{t^2-6t+18}}\bigg|_{t=3} = 0, \qquad \therefore \vec{a}_n = \vec{a} = \vec{j}$$

2.（15 分）

一质量为 m 的质点，沿半径为 R 的光滑圆弧轨道，无初速度地由顶端滑下，求：



（1）在 θ 位置时的角加速度 $\beta(\theta)$ 和角速度 $\omega(\theta)$；

（2）在 θ 位置时质点受到轨道的正压力 $N(\theta)$；

（3）滑到 θ 为多大时，质点将脱离轨道飞出？

解：（1） $\begin{cases} \tau: mg\sin\theta = mR\beta \longrightarrow (1) \\ n: mg\cos\theta - N = mR\omega^2 \longrightarrow (2) \end{cases}$ ，（2+2=4 分）

由（1）得 ： $\beta = \dfrac{g\sin\theta}{R}$ （2 分）， 又 $\because \beta = \dfrac{d\omega}{dt}\cdot\dfrac{d\theta}{d\theta} = \dfrac{\omega d\omega}{d\theta}$ ，

$\therefore \int_0^{\omega}\omega d\omega = \int_0^{\theta}\beta d\theta = \int_0^{\theta}\dfrac{g}{R}\sin\theta d\theta$ $\Rightarrow$ 解得： $\omega = \sqrt{\dfrac{2g}{R}(1-\cos\theta)}$ （3 分） ；

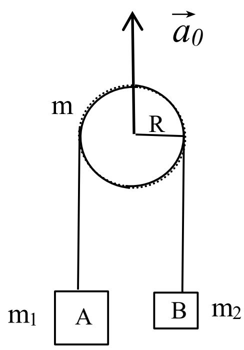
（2）由（2）式可得： $N = mg(3\cos\theta - 2)$ ；（3 分）

（3）当 $N=0$ 时，即 $\theta = \arccos\dfrac{2}{3}$ 时，质点将开始脱离球面飞出。（3 分）

（另，由**机械能守恒定律**求解也可）

3.（14 分）

如图所示，一质量为 m 的均质滑轮上跨有不能伸长的轻绳，绳子的两端连接着质量分别为 m_1 和 m_2 的物体 A、B（ $m_1 > m_2$ ）. 滑轮以恒定加速度 a_0 向上运动，求：A、B 两物体的加速度 a_1、 a_2 的大小；



（设滑轮可视为**均质圆盘**，滑轮与绳子无相对滑动，**且不计滑轮轴承及滑轮与绳子间的摩擦力**）

解： $m_1: m_1 g - T_1 = m_1(a' - a_0) \to (1)$

$m_2: T_2 - m_2 g = m_2(a' + a_0) \to (2)$ （2+2+2+2=8 分,四个方程各给 2 分）

$m: T_1 R - T_2 R = \dfrac{1}{2}mR^2\cdot\beta \to (3)$

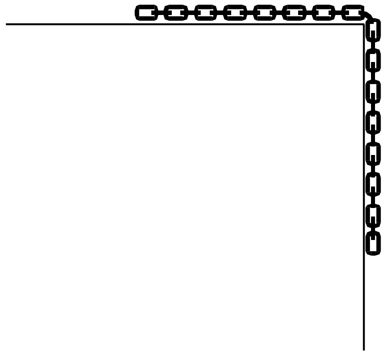
又 $a' = R\beta \to (4)$ 解得：

物体的加速度： $a_1 = (a' - a_0) = \dfrac{(m_1 - m_2)g - (2m_2 + \frac{m}{2})a_0}{m_1 + m_2 + \frac{m}{2}}$ ，

$a_2 = (a' + a_0) = \dfrac{(m_2 - m_1)g + (2m_1 + \frac{m}{2})a_0}{m_1 + m_2 + \frac{m}{2}}$ ；

（3+3=6 分）

4.（14 分）



长为l的均质链条，部分置于水平面上，另一部分自然下垂，已知链条与水平面间静摩擦系数为μ_0，滑动摩擦系数为μ，问：

（1）**满足什么条件时，链条将开始滑动；**

（2）在满足问题（1）的条件下，链条自静止开始滑动，当链条末端刚刚滑离桌面时，其速度等于多少？

解：（1）假设链条单位长度质量为λ，当垂直部分长度为b时链条开始下滑，b应满足：

$$\lambda bg - \mu_0\lambda(l-b)g = 0 \text{（3 分）} \rightarrow \therefore b = \frac{\mu_0}{1+\mu_0}l \text{；（2 分）}$$

（2）链条下滑过程中**重力功**：$W_G = \int_b^l \lambda yg\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\lambda g(l^2-b^2)$，

摩擦力的功：$W_f = -\int_b^l \mu\lambda(l-y)\mathrm{d}y = -\frac{1}{2}\mu\lambda g(l-b)^2$，（3 分）

由**动能定理**：$W_G + W_f = \Delta E_k \Rightarrow \frac{1}{2}\lambda g(l^2-b^2) - \frac{1}{2}\mu\lambda g(l-b)^2 = \frac{1}{2}\lambda l\upsilon^2 - 0$（3 分）

解得：$\upsilon = \sqrt{\frac{g}{l}(l^2-b^2) - \frac{\mu g}{l}(l-b)^2}$。（3 分）

***另，用功能原理求解：**

$$W_f = \Delta E \Rightarrow -\frac{1}{2}\mu\lambda g(l-b)^2 = (-\frac{1}{2}\lambda gl^2 + \frac{1}{2}\lambda l\upsilon^2) - (-\frac{1}{2}\lambda gb^2 + 0) \text{（或 3 分）}$$

5.（12 分）

把一个物体从地球表面上沿铅垂方向以**第二宇宙速度**$\upsilon_0 = \sqrt{\frac{2GM_e}{R_e}}$，发射出去，忽略空气阻力。式中$M_e$和$R_e$分别为地球的质量和平均半径，$G$为万有引力常量。求物体从地面飞行到与地心相距$nR_e$的高度处所经历的时间。

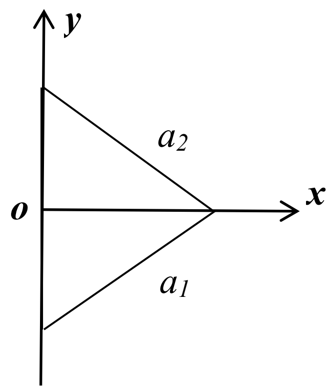
解：物体上升过程中机械能守恒，当上升高度为x时：

$$\frac{1}{2}m\upsilon_0^2 - G\frac{M_e m}{R_e} = \frac{1}{2}m\upsilon^2 - G\frac{M_e m}{x} \text{（4 分）} \rightarrow \upsilon = \sqrt{\frac{2GM_e}{x}} \text{（2 分）}$$

$$\because \upsilon = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \sqrt{\frac{2GM_e}{x}} \rightarrow \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x}{\upsilon} = \frac{1}{\sqrt{2GM_e}}\sqrt{x}\mathrm{d}x$$

$$\therefore \int_0^t \mathrm{d}t = \int_{R_e}^{nR_e} \frac{1}{\sqrt{2GM_e}}\sqrt{x}\mathrm{d}x$$ （2 分） $$\rightarrow t = \frac{2}{3\sqrt{2GM_e}} R_e^{3/2}\left(n^{3/2}-1\right)$$ （4 分）。

6.（14 分）



求一质量为m，边长为a的**等边三角形**平面，绕通过其边长轴的转动惯量J_y（已知质量为m、长为L的均匀细棒，对通过棒的一端、且与棒长相垂直的轴的转动惯量为$J=\frac{1}{3}mL^2$）。

解：设三角形质量面密度为σ，$\sigma = \dfrac{m}{\frac{1}{2}\cdot a\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a} = \dfrac{4\sqrt{3}m}{3a^2}$ （2 分），

在$x>0, y>0$处，三角形边长的直线方程：$y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{a}{2}$ （4 分），

$$\therefore dJ_y = \frac{1}{3}\cdot dm\cdot x^2 = \frac{1}{3}\sigma x^3 dy = -\frac{\sqrt{3}}{9}\sigma x^3 dx$$ ，（4 分）

$$\therefore J_y = \int dJ_y = 2\times\int_{\frac{\sqrt{3}a}{2}}^{0} -\frac{\sqrt{3}}{9}\sigma x^3 dx = \frac{\sqrt{3}}{18}\sigma\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^4 = \frac{1}{8}ma^2$$ （4 分）

庄某注释：另解如下

三角形质量面密度为：$\sigma = \dfrac{m}{\frac{1}{2}\cdot a^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}$

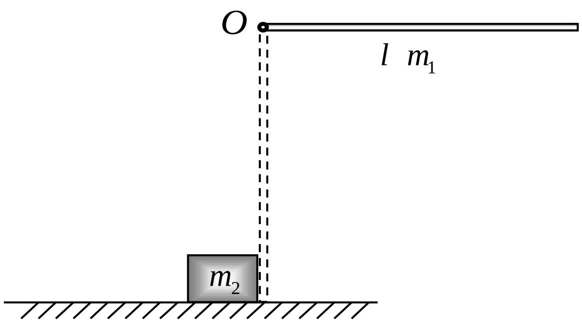
上边长的直线方程：$y_1 = -\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot x + \frac{a}{2}$；**下边长**的直线方程：$y_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}\cdot x - \frac{a}{2} = -y_1$

于是得到$\mathrm{d}J = x^2\cdot\sigma\cdot(y_1-y_2)\cdot\mathrm{d}x$

从而得到

$$J = \int\limits_{x=0}^{\sqrt{3}/2} x^2 \cdot \sigma \cdot (y_1 - y_2) \cdot \mathrm{d}x = \int\limits_{x=0}^{\sqrt{3}/2} x^2 \cdot \frac{m}{\frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} \cdot 2 \cdot (-\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot x + \frac{a}{2}) \cdot \mathrm{d}x = \frac{1}{8} \cdot m \cdot a^2$$

7.（15 分）



长度l，质量m_1的匀质细杆，可绕通过O点垂直于纸面的水平轴转动。令杆自水平位置静止下摆，在铅垂位置与质量m_2的物体发生**完全弹性碰撞**，碰后物体沿着摩擦系数为μ的水平面滑动，当$m_1 = m_2$时，求：

（1）碰撞时物体受到杆的冲量；

（2）物体滑过的距离；

（3）碰后杆能上升的最大角度。■

解：a. 细杆由水平位置静止下摆至铅垂位置过程机械能守恒：

$$m_1 g\frac{l}{2} = \frac{1}{2}(\frac{1}{3}m_1 l^2)\omega_{10}^2 \quad （2\text{ 分}） \quad \to \quad \omega_{10} = \sqrt{\frac{3g}{l}} \quad ,$$

b. 细杆在铅垂位置与m_2**完全弹性碰撞过程**

角动量守恒：$\frac{1}{3}m_1 l^2\omega_{10} = \frac{1}{3}m_1 l^2\omega_1 + m_2 l^2\omega_2$ ——（1）　（2 分）

机械能守恒：$\frac{1}{2}(\frac{1}{3}m_1 l^2)\omega_{10}^2 = \frac{1}{2}(\frac{1}{3}m_1 l^2)\omega_1^2 + \frac{1}{2}(m_2 l^2)\omega_2^2$　（2 分）

解得：$\omega_1 = (\frac{m_1 - 3m_2}{m_1 + 3m_2})\omega_{10} = \frac{m_1 - 3m_2}{m_1 + 3m_2}\sqrt{\frac{3g}{l}}$ ，

$\Rightarrow$ 当$m_1 = m_2$时有 $\omega_1 = -\frac{1}{2}\omega_{10} = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3g}{l}}$ ，负号表示细杆往回摆；

$\omega_1 = \frac{2m_1}{m_1 + 3m_2}\omega_{10} = \frac{2m_1}{m_1 + 3m_2}\sqrt{\frac{3g}{l}}$ ，**（注释：应该是指ω_2啊，笔误显然！）**

$\Rightarrow$ 当$m_1 = m_2$时有 $\omega_1 = \frac{1}{2}\omega_{10} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3g}{l}}$，**（注释：应该是指$\omega_2$啊，笔误显然！）**

（1）碰撞时物体受到杆的冲量：$\vec{I} = \Delta\vec{P}$ ，

即：$I=P_2-P_1=m_2 l\omega_2-0=\dfrac{2m_1m_2}{m_1+3m_2}\sqrt{3gl}$ ； 当 $m_1=m_2$ 时有 $I=\dfrac{1}{2}\sqrt{3gl}$（3 分）

（2）根据**动能定理**有：$-fs=0-\dfrac{1}{2}m_2v^2$ （2 分），又 $f=\mu N=\mu m_2 g$

解得 m_2 移动距离：$s=\dfrac{6m_1^2 l}{\mu(m_1+3m_2)^2}=\dfrac{3l}{8\mu}$ （1 分）;

（3）碰后杆上升过程机械能守恒：

$\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{3}m_1 l^2)\omega_1^2=m_1 g\dfrac{l}{2}(1-\cos\theta)$ （2 分），

解得：$\theta=\arccos\dfrac{12m_1m_2}{(m_1+3m_2)^2}=\arccos\dfrac{3}{4}=41.4^0$（1 分）

■

1.