

2015-2016 学年第一学期《微积分 I-1》期中试卷参考解答

一、求下列函数极限（每题 6 分，共 12 分）：

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\ln(1+x)} - \sqrt{1+\sin x}}{x(e^x - 1)}$

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+\sqrt{2}} + L + \frac{1}{n+\sqrt{n}} \right)$

二、求下列函数的导数：（每小题 8 分，共 16 分）。

1. 设 $y = y(x)$ 是由方程 $e^y + 6xy + x^2 - 1 = 0$ 所确定的隐函数，求 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0}$ 和 $\left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{x=0}$ 。

2. 设 $\begin{cases} x = t - \ln(1+t) \\ y = t^3 + t^2 \end{cases}$ ，求 $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ 。

三、（8 分）证明数列 $\sqrt{6}, \sqrt{6+\sqrt{6}}, \sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6}}}, L$ 的极限存在，并求出该极限。

四、（8 分）设 $f(x) = x^2 e^{2x} + \frac{2x}{1-x^2}$ ，求 $f^{(n)}(x)$ 。

五、（8 分）证明恒等式： $2\arctan x + \arcsin \frac{2x}{1+x^2} = \pi$ ($x \geq 1$)。

六、（8 分）设 $f(x) = x^x$ ($x > 0$)，求该函数的单调区间和凹凸区间。

七、（8 分）求函数 $y = e^x \cos x$ ($0 \leq x \leq 2\pi$) 的极值。

八、（8 分）试确定常数 a 、 b 的值，使得曲线 $y = x^2 + ax + b$ 和 $2y = -1 + xy^3$ 在点 $(1, -1)$ 处有相同的切线，并求该切线方程。

九、（8 分）讨论 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+2}}{\sqrt[3]{2^{3n} + x^{3n}}}$ ($x \geq 0$) 的连续性，并指出间断点的类型。

十、（8 分）设 $\varphi'(x)$ 连续，且 $\varphi(0) = -1$ ， $f(x) = (e^{2x} - e^x)^2 \varphi(x)$ ，求 $f'(x)$, $f'(0)$ 和 $f''(0)$

十一、（8 分）若函数 $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上连续，在 $(0, 2)$ 内可导，且 $f(1) + f(2) = 2f(0)$ ，证明：在 $(0, 2)$ 内至少存在一个 ξ ，使得 $f'(\xi) = 0$ 。