厦门大学《概率统计（A)》课程试卷

信息　学院　　系 2019 级 计算机大类 专业

学年学期：19202 主考教师：王　琳 试卷类型：D 卷（√）

一、　选择题（在各小题的四个备选答案中选出一个正确答案，填在题后的括号中，本大题共 5 个小题，每小题 3 分，总计 15 分）

1. 设A,B,C为三个事件，用A,B,C的运算关系表示“三个事件至多一个发生”为（　）。

A. $A\cup B\cup C$　　　　B. $A\overline{B}\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\overline{B}C$

C. $\Omega-ABC$　　　　D. $\overline{A}\overline{B}\overline{C}+A\overline{B}\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\overline{B}C$

知识点：随机事件的概念
答案：D

2. 10 个球中只有 1 个球是红球，有放回的抽取，每次取一个球，设$1\le k\le n$，则随机事件“直到第n次抽取，红球才第k次出现”的概率为（　）

A. $(\frac{1}{10})^k(\frac{9}{10})^{n-k}$　　　　B. $C_n^k(\frac{1}{10})^k(\frac{9}{10})^{n-k}$

C. $C_{n-1}^{k-1}(\frac{1}{10})^k(\frac{9}{10})^{n-k}$　　　　D. $C_{n-1}^{k-1}(\frac{1}{10})^{k-1}(\frac{9}{10})^{n-k}$

知识点：伯努利试验
答案：C

3. 设随机变量 $X\sim N(0,1)$， X 的分布函数为$\Phi(x)$，则$P(|X|>2)$的值为（　）

A. $2[1-\Phi(2)]$　　　　B. $2\Phi(2)-1$

C. $2-\Phi(2)$　　　　D. $1-2\Phi(2)$

知识点：正态分布
答案：A

4. 设 X 与 Y 相互独立，方差 $D(2X-3Y)=$（　）

A. $2D(X)+3D(Y)$　　　　B. $2D(X)-3D(Y)$

C. $4D(X)+9D(Y)$　　　　D. $4D(X)-9D(Y)$

知识点：期望方差的计算
答案：C

5. 在假设检验中，设 H_0 为原假设，犯第一类错误的情况是（　）

A. H_0 为真，接受 H_0　　B. H_0 为真，拒绝 H_0

C. H_0 不真，接受 H_0　　D. H_0 不真，拒绝 H_0

知识点：假设检验的第一类错误
答案：B

二、（15 分）

（1）设一批混合麦种中，一、二、三等品分别占 80%、15%、5%，三个等级的发芽率依次为 0.98、0.95、0.8 求这批麦种的发芽率

（2）设有一箱同类产品是由三家工厂生产得，其中$\frac{1}{2}$是第一家工厂生产的，其余两家各生产$\frac{1}{4}$。又知第一、二、三家工厂生产的产品分别有 2%、4%、5%的次品。现从箱子中任取一件产品，若取到的是次品，它是第一家工厂生产的概率是多少？

答案：（1）设$B=\{能发芽\}$，$A_i=\{取的是第i等品\}$，$i=1,2,3$………………1 分

$P(A_1)=0.8$，$P(A_2)=0.15$，$P(A_3)=0.05$

$P(B|A_1)=0.98$，$P(B|A_2)=0.95$，$P(B|A_3)=0.8$，………………………2 分

由全概率公式得：

$P(B)=$

$\sum_{i=1}^{3}P(A_i)\,P(B|A_i)$…………………………………………………3 分

$=0.8\times0.98+0.15\times0.95+0.05\times0.8=0.9665$………………………………1 分

（2）设$B=\{取到次品\}$，$A_i=\{取到的产品是第i家工厂生产\}$，$i=1,2,3$…1 分

$P(A_1)=0.5$，$P(A_2)=0.25$，$P(A_3)=0.25$

$P(B|A_1)=0.02$，$P(B|A_2)=0.04$，$P(B|A_3)0.05$………………………3 分

由贝叶斯公式得：

$P(A_1|B)=\frac{P(A_1B)}{P(B)}=\frac{P(A_1)P(B|A_1)}{\sum_{i=1}^{3}P(A_i)P(B|A_i)}$……………………………………………3 分

$=\frac{0.5\times0.02}{0.5\times0.02+0.25\times0.04+0.25\times0.05}=\frac{4}{13}\approx0.3077$……………………………1 分

三、(15 分)

(1)某药厂断言，该厂生产的某种药品对于医治一种疑难血液病的治愈率为 0.8，医院任意抽查 100 个服用此药品的病人，若其中多于 75 人治愈，就接受此断言，否则就拒绝此断言。若实际上此药品对这种疾病的治愈率是 0.8，请运用中心极限定理求解接受这一断言的概率是多少？

$(\Phi(1.15)=0.8749,\Phi(1.20)=0.8849,\Phi(1.25)=0.8944)$

(2)随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{e^{-(x+y)}}{1-e^{-1}}, & 0<x<1,0<y<\infty\\ 0, & 其他\end{cases}$$

求:1)随机变量X和Y相互独立；2)随机变量X和Y的分布函数；3)和函数$U=max(X,Y)$的分布函数。

答案:

(1)解：若实际上治愈率为 0.8，则 100 人中治愈人数$X\sim b(100,0.8)$…1 分
由中心极限定理知，近似地有

$X\sim N(100\times0.8,100\times0.8\times0.2)=N(80,4^2)$

……………………………………………………………………………2 分

于是,接受药厂断言的概率即为

$p=P\{X>75\}\approx1-\Phi(\frac{75-80}{4})=1-\Phi(-\frac{5}{4})=\Phi(1.25)=0.8944$………2 分

即当实际上治愈率为 0.8 时，接受此断言的概率为 0.8944.

(2)解:

1)$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\frac{1}{1-e^{-1}}\int_0^{\infty}e^{-(x+y)}dy=\frac{e^{-x}}{1-e^{-1}}, & 0<x<1\\ 0, & 其他\end{cases}$ 1.5 分

$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\frac{1}{1-e^{-1}}\int_0^{1}e^{-(x+y)}dy=e^{-y}, & y>0\\ 0, & 其他\end{cases}$…………………1.5 分

由上可知$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$，故X,Y相互独立。 …………………………1 分

2） $F_X(u)=\int_{-\infty}^{u}f_X(x)dx=\begin{cases}0, & u<0\\ \int_0^u \frac{e^{-x}}{1-e^{-1}}dx, & 0\le u<1\\ 1, & u\ge 1\end{cases}=\begin{cases}0, & u<0\\ \frac{1-e^{-u}}{1-e^{-1}}, & 0\le u<1\\ 1, & u\ge 1\end{cases}$ 1.5 分

$F_Y(u)=\int_{-\infty}^{u}f_Y(y)dy=\begin{cases}0, & u<0\\ \int_0^u e^{-y}dy, & u\ge 0\end{cases}=\begin{cases}0, & u<0\\ 1-e^{-u}, & u\ge 0\end{cases}$ …………1.5 分

3）计 $U=max(X,Y)$，X和Y的分布函数为$F_U(u),F_X(x)$和$F_Y(y)$，则有

$F_U(u)=F_X(u)F_Y(u)$ ……………………………………………………………1 分

将$F_X(u)$和$F_Y(u)$的表达式代入$F_U(u)=F_X(u)F_Y(u)$，得到$U=max(X,Y)$的分布函数为

$F_U(u)=\begin{cases}0, & u<0\\ \frac{(1-e^{-u})^2}{1-e^{-1}}, & 0\le u<1\\ 1-e^{-u}, & u\ge 1\end{cases}$ ……………………………………………………2 分

四、（15 分）

设总体 X 的概率密度函数为 $f(x,\theta)=\begin{cases}\frac{6x}{\theta^3}(\theta-x), 0<x<\theta\\ 0,其它\end{cases}$，其中$\theta$为未知参数，$\theta>0$，设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的样本。

（1）求θ的矩估计量$\hat{\theta}$；（2）计算$\hat{\theta}$的方差$D(\hat{\theta})$；（3）证明$\hat{\theta}$是否是θ的无偏估计。

答案:

（1） 由于

$\mu_1=E(X)=\int_0^\theta \frac{6x^2(\theta-x)}{\theta^3}dx=\frac{\theta}{2}$. . . . . 2 分

用样本矩代替总体矩：$\frac{\hat{\theta}}{2}=\bar{X}$，. . . . . 1 分

因此，的矩估计量为$\hat{\theta}=2\bar{X}$。. . . . . 2 分

（2） 由于$E(X^2)=\int_0^\theta \frac{6x^3(\theta-x)}{\theta^3}dx=\frac{3\theta^2}{10}$，. . . . . 2 分

因此$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{\theta^2}{20}$，. . . . . 2 分

$D(\hat{\theta})=D(2\bar{X})=4D(\bar{X})=\frac{4}{n}D(X)=\frac{\theta^2}{5n}$，. . . . . 2 分

（3） 由于$E(\hat{\theta})=E(2\bar{X})=2E(\bar{X})=2\times\frac{\theta}{2}=\theta$， …………………… 2 分

因此，$\hat{\theta}$是θ的无偏估计。 ………………………………… 2 分

五、（15 分）

设某种清漆的 9 个样品，其干燥时间（以 h 计）分别为

6.0　5.7　5.8　6.5　7.0　6.3　5.6　6.1　5.0

设干燥时间总体服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$. 求μ的置信水平为 0.95 的置信区间.

（1） 若由以往经验知$\sigma=0.6(h)$.

（2） 若σ为未知.

（已知 $z_{0.025}=1.96, z_{0.05}=1.645, t_{0.025}(8)=2.306, t_{0.05}(8)=1.860$）

解：算得$\bar{x}=6$，$s^2=0.33$, ………………………………………………1 分

总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，μ未知，σ^2已知，$X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自 X 的样本, 需要求μ的置信水平为$1-\alpha$的置信区间，既需确定随机区间$(\underline{\theta},\bar{\theta})$,使得

$$P\{\underline{\theta}<\mu<\bar{\theta}\}=1-\alpha$$

因为$\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$，有

$P\left\{-z_{\alpha/2}<\frac{\bar{X}-\sigma}{\sigma/\sqrt{n}}<z_{\alpha/2}\right\}=1-\alpha$ ……………………………………………3 分

在上述式子中解出μ，得

$$P\left\{\bar{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}<\mu<\bar{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}\right\}=1-\alpha$$

即得到的一个置信水平为$1-\alpha$的置信区间为

$\left(\bar{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}，\bar{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}\right)$ ………………………………………………3 分

令$n=9,\sigma=0.6,1-\alpha=0.95,\alpha/2=0.025,z_{0.025}=1.96$，并算得$\bar{x}=6$，

得到μ的一个置信水平为 0.95 的置信区间为$\left(6-\frac{0.6}{3}z_{0.025}，6-\frac{0.6}{3}z_{0.025}\right)=$

$(5.608，6.392)$. …1 分

（2）σ未知，由于$\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$

有$P\left\{-t_{\alpha/2}(n-1)<\frac{\bar{X}-u}{S/\sqrt{n}}<t_{\alpha/2}(n-1)\right\}=1-$

α

………………………………………3 分

在上述式子中解出μ，得

$$P\left\{\bar{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)<\mu<\bar{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)\right\}=1-\alpha$$

即得到的一个置信水平为$1-\alpha$的置信区间为

$\left(\bar{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1), \bar{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)\right)$ ………………………………………3

分

令$n=9, 1-\alpha=0.95, \alpha/2=0.025, t_{0.025}(8)=2.306$，并算得$\bar{x}=6$，$s^2=0.33$，得到$\mu$的一个置信水平为 0.95 的置信区间为

$\left(6-\frac{\sqrt{0.33}}{3}\times 2.306, 6-\frac{\sqrt{0.33}}{3}\times 2.306\right)=$

$(5.558, 6.442)$.

…………………………1 分

六、(15 分)

(1)某机器生产的零件长度(单位：cm) $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，今抽取容量为 16 的样本，测得样本均值$\bar{X}=10$，样本方差$S^2=0.16$。规定该零件平均长度不能超过 9.8cm，问在显著性水平 0.05 下，这批零件是否合格？

(2)某种导线，要求其电阻的标准差不得超过 0.005Ω，今在生产的一批导线中取样品 10 根，测得$s=0.006\Omega$，设总体为正态分布，参数均未知，问在显著性水平$\alpha=0.05$下能否认为这批导线的标准差显著地偏大？

($t_{0.05}(16)=1.746$，$t_{0.05}(15)=1.753$，$t_{0.025}(15)=2.132$；

$\chi^2_{0.05}(8)=15.507$，$\chi^2_{0.05}(9)=16.919$，$\chi^2_{0.05}(10)=18.307$，$\chi^2_{0.05}(11)=19.675$)

答案：

(1) 设$H_0:\mu\le 9.8$，$H_1:\mu>9.8$……………………………………………………2 分

采用 t 检验法，取检验统计量$t=\frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$，

令$n=16$，$S^2=0.16$，$\bar{X}=10$，$\alpha=0.05$，则$t_\alpha(n-1)=t_{0.05}(15)=1.753$. 拒绝域为

$t\geq t_\alpha(n-1)=1.753$··3 分

因t的观察值$t=\frac{(10-9.8)}{0.4}\sqrt{16}=2>1.753$，落在拒绝域内··························2 分

故在水平$\alpha=0.05$下拒绝H_0，因此可以认为这批零件不合格。···············1 分

（2）设$H_0:\sigma\leq 0.005, H_1:\sigma>0.005$···2 分

采用χ^2检验，取检验统计量为$\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$，

令$n=10, s^2=0.006^2, \alpha=0.05$，$\chi_\alpha^2(n-1)=\chi_{0.05}^2(9)=16.919$，拒绝域为

$\chi^2=\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}\geq\chi_\alpha^2(n-1)=16.919$ ··2 分

因χ^2的观察值$\chi^2=\frac{9\times(0.006)^2}{0.005^2}=12.96<16.919$， 没有落在拒绝域内·········2 分

故在显著性水平$\alpha=0.05$下接受H_0，
即不能认为这批导线的标准差显著地偏大。 ·································1 分

七、（10 分）

若随机变量X服从自由度为n_1,n_2的F分布，求证：

（1） $Y=\frac{1}{X}$服从自由度为n_2,n_1的F分布；

（2） 并由此证明 $F_{1-\alpha}(n_1,n_2)=\frac{1}{F_\alpha(n_2,n_1)}$.

答案：(1)$\because X\sim F(n_1,n_2)$

$\therefore$可设 $X=\frac{U/n_1}{V/n_2}$，其中$U\sim\chi^2(n_1),V\sim\chi^2(n_2)$，且$U$ 和V 相互独立，···2 分

$\therefore\frac{1}{X}=\frac{V/n_2}{U/n_1}\sim F(n_2,n_1)$···1 分

(2)由上侧α分位数的定义可知

$P(X \geq F_{1-a}(n_1, n_2)) = 1 - a$ ……………………………………………………2 分

$P(\frac{1}{X} \leq \frac{1}{F_{1-a}(n_1, n_2)}) = 1 - a$

即 $P(Y \leq \frac{1}{F_{1-a}(n_1, n_2)}) = 1 - a$

$1 - P(Y > \frac{1}{F_{1-a}(n_1, n_2)}) = 1 - a$

$P(Y > \frac{1}{F_{1-a}(n_1, n_2)}) = a$ ……………………………………………………3 分

而 $P(Y > \frac{1}{F_{1-a}(n_1, n_2)}) = a$.又因为$\boldsymbol{Y}$为连续型随机变量，故

$P(Y \geq \frac{1}{F_{1-a}(n_1, n_2)}) = a$ ……………………………………………………1 分

从而

$F_{1-a}(n_1, n_2) = \frac{1}{F_a(n_2, n_1)}$ ……………………………………………………1 分