厦门大学《线性代数 I》期末试卷

________ 学院 ________ 系 ________ 年级 ________ 专业

主考教师：________ 试卷类型：(B 卷)

一、(10) 设三阶矩阵 A 的特征值为 $1,-1,2$，求矩阵 $A^*+3A-2E$ 的行列式值。

9。过程 8 分，结果 2 分

二、(10) 已知二次型 $f=x_1x_2+3x_1x_3-5x_2x_3$，求一个可逆变量替换 $x=Py$，把二次型化为规范形。

方法不唯一，最好配方法得到 $(y_1-y_3)^2-(y_2-4y_3)^2+15y_3^2$。惯性指数两正一负。过程 8 分，结果 2 分

三、(10) 设 $A=\begin{bmatrix}-1&1&0\\-2&2&0\\4&-2&1\end{bmatrix}$，求 A^{100}。

特征值 $0,1,1$, 特征向量为 $[1,1,-2]^T,[1,2,0]^T,[0,0,1]^T$，最后结果 $\begin{bmatrix}-1&1&0\\-2&2&0\\4&-2&1\end{bmatrix}$。过程 8 分，结果 2 分

四、(10) 求一个与 $\alpha_1=[1,1,-1,1]^T$, $\alpha_2=[1,-1,1,1]^T$, $\alpha_3=[1,1,1,1]^T$ 都正交的单位向量。

$\pm[1/\sqrt{2},0,0,-1/\sqrt{2}]^T$。过程 8 分，结果 2 分

五、(10) 已知 $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&3&2\\0&1&3\end{bmatrix}$，若 $AX=2X+A$，求 X。

$(A-2E)^{-1}=\begin{bmatrix}-1&&\\&-1&2\\&1&-1\end{bmatrix}$，最后 $X=\begin{bmatrix}-1&&\\&-1&4\\&2&-1\end{bmatrix}$。过程 8 分，结果 2 分

六、(10) 设 x_1,x_2,x_3 是 $Ax=\beta$ 的三个解，若 $x_1+x_2=[4,6,-8,4]^T$, $x_3=[1,2,-1,1]^T$, $R(A)=2$ 且 $[0,1,-3,0]^T$ 是 $Ax=0$ 的解，求方程组的通解。

$\begin{bmatrix}1\\2\\-1\\1\end{bmatrix}+c_1\begin{bmatrix}0\\1\\-3\\0\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}1\\1\\-3\\1\end{bmatrix}$。过程 8 分，结果 2 分

七、(15) 设 R^3 的两个基为 $\alpha_1=[1,0,1]^T,\alpha_2=[1,1,0]^T,\alpha_3=[0,1,1]^T$ 和 $\beta_1=[1,0,0]^T,\beta_2=[1,1,0]^T,\beta_3=[1,1,1]^T$，求由基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 到基 β_1,β_2,β_3 的过渡矩阵以及 $\eta=[1,3,6]^T$ 在这两组基下的坐标。

过渡矩阵为 $\begin{bmatrix}1/2&0&1/2\\1/2&1&1/2\\-1/2&0&1/2\end{bmatrix}$（过程 7 分，结果 2 分）；坐标分别为 $[2,-1,4]^T,[-2,-3,6]^T$（过程 4 分，结果 2 分）。

八、(15) $\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=0\\2x_1+3x_2+5x_3=0\\x_1+x_2+ax_3=0\end{cases}$ 和 $\begin{cases}x_1+bx_2+(c-1)x_3=0\\2x_1+b^2x_2+cx_3=0\end{cases}$ 是同解线性方程组，求 a,b,c 的值。

根据第二个方程组有非零解判断出 $a=2$（4 分）；然后由第一个方程组解出基础解系 $[1,1,-1]^T$（2 分）；代入第二个方程组得到 $b=0,c=2$ 或者 $b=1,c=3$（6 分）；验证后舍去一组，最终

$a=2,b=1,c=3$（3 分）。

九、(10) 任何与 1 距离小于 1 的数字都是可逆矩阵，即如果 $|\delta|<1$，则 $1-\delta\neq 0$。如果对 n 阶方阵也能定义某种“长度”或“距离”，那么也可以类似判断：距离单位矩阵 E 不太远的矩阵都是可逆的。

对任意 n 阶实矩阵 A，定义长度 $\|A\|$ 如下：$\|A\|^2=tr(A^TA)$，其中 tr 是矩阵的迹，即对角线元素的和。请证明：若 $\|A\|<1$，则 $E-A$ 必然可逆。

（提示：可能会用到特征值的定义和性质，二次型的规范形和实对称矩阵的惯性指数）

判断 A^TA 是实对称矩阵，可以正交相似于对角形，对角线元素为特征值（2 分）；利用二次型函数取值特点判断特征值没有负数（2 分）；利用 A 长度小于 1 判断特征值小于 1（3 分）；最后反证，如果 A 有特征值 1 则导出矛盾（3 分）。