

## 2015-2016 学年第一学期《微积分 I-1》期中试卷参考解答

一、求下列函数极限（每题 6 分，共 12 分）：

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\ln(1+x)} - \sqrt{1+\sin x}}{x(e^x - 1)}$

2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+\sqrt{2}} + L + \frac{1}{n+\sqrt{n}} \right)$

二、求下列函数的导数：（每小题 8 分，共 16 分）。

1. 设  $y = y(x)$  是由方程  $e^y + 6xy + x^2 - 1 = 0$  所确定的隐函数，求  $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0}$  和  $\left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{x=0}$ 。

2. 设  $\begin{cases} x = t - \ln(1+t) \\ y = t^3 + t^2 \end{cases}$ ，求  $\frac{dy}{dx}$ ,  $\frac{d^2y}{dx^2}$ 。

三、（8 分）证明数列  $\sqrt{6}, \sqrt{6+\sqrt{6}}, \sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6}}}, L$  的极限存在，并求出该极限。

四、（8 分）设  $f(x) = x^2 e^{2x} + \frac{2x}{1-x^2}$ ，求  $f^{(n)}(x)$ 。

五、（8 分）证明恒等式： $2\arctan x + \arcsin \frac{2x}{1+x^2} = \pi$  ( $x \geq 1$ )。

六、（8 分）设  $f(x) = x^x$  ( $x > 0$ )，求该函数的单调区间和凹凸区间。

七、（8 分）求函数  $y = e^x \cos x$  ( $0 \leq x \leq 2\pi$ ) 的极值。

八、（8 分）试确定常数  $a$ 、 $b$  的值，使得曲线  $y = x^2 + ax + b$  和  $2y = -1 + xy^3$  在点  $(1, -1)$  处有相同的切线，并求该切线方程。

九、（8 分）讨论  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+2}}{\sqrt[3]{2^{3n} + x^{3n}}}$  ( $x \geq 0$ ) 的连续性，并指出间断点的类型。

十、（8 分）设  $\varphi'(x)$  连续，且  $\varphi(0) = -1$ ， $f(x) = (e^{2x} - e^x)^2 \varphi(x)$ ，求  $f'(x)$ ,  $f'(0)$  和  $f''(0)$

十一、（8 分）若函数  $f(x)$  在  $[0, 2]$  上连续，在  $(0, 2)$  内可导，且  $f(1) + f(2) = 2f(0)$ ，证明：在  $(0, 2)$  内至少存在一个  $\xi$ ，使得  $f'(\xi) = 0$ 。