一、（10 分）一袋中装有m枚正品硬币，n枚次品硬币（次品硬币的两面均印有国徽）从袋中任取一枚，已知将它投掷r次，每次都得到国徽，问这枚硬币是正品的概率是多少？.

设$A=$‘任取一枚硬币掷r次得r个国徽’，$B=$‘任取一枚硬币是正品’，
则$A=BA+\bar{B}A$，
所求概率为

$$P(B|A)=\frac{P(B)P(A|B)}{P(B)P(A|B)+P(\bar{B})P(A|\bar{B})}$$

$$=\frac{\frac{m}{m+n}\left(\frac{1}{2}\right)^r}{\frac{m}{m+n}\left(\frac{1}{2}\right)^r+\frac{n}{m+n}}=\frac{m}{m+n\cdot 2^r}$$

二、（10 分）证明“确定的原则”

若 P（$A|C$）$\geqslant P(B|C),P(A|\bar{C})\geqslant P(B|\bar{C})$，则 P（A）$\geqslant P(B)$.

由 P（$A|C$）$\geqslant P(B|C)$,得

$$\frac{P(AC)}{P(C)}\geq\frac{P(BC)}{P(C)},$$

即有$P(AC)\geq P(BC)$

同理由$P(A|\bar{C})\geq P(B|\bar{C})$,

得$P(A\bar{C})\geq P(B\bar{C})$,

故$P(A)=P(AC)+P(A\bar{C})\geq P(BC)+P(B\bar{C})=P(B)$

三、（15 分）已知随机变量 X 的密度函数为

$$f(x)=Ae^{-|x|}, \qquad -\infty<x<+\infty,$$

求：（1）A 值；（2）$P\{0<X<1\}$;　(3)　$F(x)$.

（1）由 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x=1$ 得

$$1=\int_{-\infty}^{\infty} Ae^{-|x|}\mathrm{d}x=2\int_{0}^{\infty} Ae^{-x}\mathrm{d}x=2A$$

故 $A=\frac{1}{2}$.

(2)　$p(0<X<1)=\frac{1}{2}\int_0^1 e^{-x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(1-e^{-1})$

(3) 当 x<0 时，$F(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{2}e^{x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}e^{x}$

当 x⩾0 时，$F(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{2}e^{-|x|}\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{2}e^{x}\mathrm{d}x+\int_{0}^{x}\frac{1}{2}e^{-x}\mathrm{d}x=1-\frac{1}{2}e^{-x}$

故 $F(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{x}, & x<0\\ 1-\frac{1}{2}e^{-x} & x\geq 0\end{cases}$

四、（15 分）设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}cx\mathrm{e}^{-k^2x^2}, & x\geq 0,\\ 0, & x<0.\end{cases}$$

求（1）c;（2）EX;（3）DX.

(1) 由 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty} cxe^{-k^2x^2}\mathrm{d}x=\frac{c}{2k^2}=1$ 得 $c=2k^2$.

(2) $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}(x)=\int_0^{+\infty} x\cdot 2k^2xe^{-k^2x^2}\mathrm{d}x=2k^2\int_0^{+\infty} x^2e^{-k^2x^2}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{2k}.$

(3) $E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2f(x)\mathrm{d}(x)=\int_0^{+\infty} x^2\cdot 2k^2xe^{-k^2x^2}\ \frac{1}{k^2}.$

故　$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{1}{k^2}-\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2k}\right)^2=\frac{4-\pi}{4k^2}.$

五、（10 分）某人乘汽车去火车站乘火车，有两条路可走.第一条路程较短但交通拥挤，所需时间 *X* 服从单位为分钟的正态分布 *N*（40，10^2）；第二条路程较长，但阻塞少，所需时间 *X* 服从单位为分钟的正态分布 *N*（50，4^2）计算概率可用标准正态分布函数表示，考虑下面两个问题：

（1）若动身时离火车开车只有 1 小时，问应走哪条路能乘上火车的把握大些？

（2）又若离火车开车时间只有 45 分钟，问应走哪条路赶上火车把握大些？

（1）若走第一条路，*X*~*N*（40，10^2），则

$$P(X<60)=P\left(\frac{x-40}{10}<\frac{60-40}{10}\right)=\Phi(2)=0.97727$$

若走第二条路，*X*~*N*（50，4^2），则

$$P(X<60)=P\left(\frac{X-50}{4}<\frac{60-50}{4}\right)=\Phi(2.5)=0.9938$$

由于$\Phi(2)<\Phi(2.5)$，故走第二条路乘上火车的把握大些.

（2）若 *X*~*N*（40，10^2），则

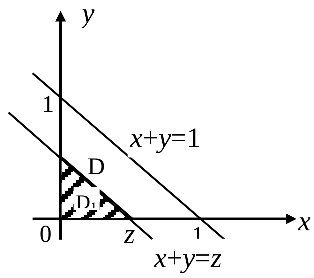
$$P(X<45)=P\left(\frac{X-40}{10}<\frac{45-40}{10}\right)=\Phi(0.5)=0.6915$$

若 *X*~*N*（50，4^2），则

$$P(X<45)=P\left(\frac{X-50}{4}<\frac{45-50}{4}\right)=\Phi(-1.25)$$

由于$\Phi(-1.25)<\Phi(0.5)$，故走第一条路乘上火车的把握大些.

六、（15 分）设二维随机变量(X,Y)在区域$D=\{(x,y)\mid x\ge 0,\ y\ge 0,\ x+y\le 1\}$上服从均匀分布. 求（1）$(X,Y)$关于$X$的边缘概率密度；（2）$Z=X+Y$的分布函数与概率密度.



（1）(X,Y)的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}2, & (x,y)\in D\\ 0, & 其它.\end{cases}$

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}2-2x, & 0\le x\le 1\\ 0\ , & 其它\end{cases}$$

（2）利用公式 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,\ z-x)dx$

其中 $f(x,z-x)=\begin{cases}2, & 0\le x\le 1, 0\le z-x\le 1-x\\ 0, & 其它\end{cases}=\begin{cases}2, & 0\le x\le 1,\quad x\le z\le 1.\\ 0, & 其它.\end{cases}$

当$z<0$或$z>1$时 $f_Z(z)=0$

当$0\le z\le 1$时 $f_Z(z)=2\int_0^z dx=2x\big|_0^z=2z$

故Z的概率密度为 $f_Z(z)=\begin{cases}2z, & 0\le z\le 1,\\ 0\ , & 其它.\end{cases}$

Z的分布函数为

$$F_Z(z)=\int_{-\infty}^{z}f_Z(y)dy=\begin{cases}0, & z<0\\ \int_0^z 2y\,dy, & 0\le z\le 1\\ 1, & z>1\end{cases}=\begin{cases}0, & z<0\\ z^2, & 0\le z\le 1\\ 1, & z>1\end{cases}$$

七、（15 分）设随机变量（*X*，*Y*）的分布律为

$Y \backslash X$	0	1	2	3	4	5
0	**0**	**0.01**	**0.03**	**0.05**	**0.07**	**0.09**
1	**0.01**	**0.02**	**0.04**	**0.05**	**0.06**	**0.08**
2	**0.01**	**0.03**	**0.05**	**0.05**	**0.05**	**0.06**
3	**0.01**	**0.02**	**0.04**	**0.06**	**0.06**	**0.05**

(1) 求 P{X=2｜Y=2}，P{Y=3｜X=0}；

（2）求 *V*=max（*X*，*Y*）的分布律；

（3）求 *U*=min（*X*，*Y*）的分布律；

（4）求 *W*=*X*+*Y* 的分布律.

（1）$P\{X=2|Y=2\}=\dfrac{P\{X=2,Y=2\}}{P\{Y=2\}}=\dfrac{P\{X=2,Y=2\}}{\sum\limits_{i=0}^{5}P\{X=i,Y=2\}}=\dfrac{0.05}{0.25}=\dfrac{1}{2}$,

$$P\{Y=3|X=0\}=\frac{P\{Y=3,X=0\}}{P\{X=0\}}=\frac{P\{X=0,Y=3\}}{\sum\limits_{j=0}^{3}P\{X=0,Y=j\}}=\frac{0.01}{0.03}=\frac{1}{3};$$

（2）$P\{V=i\}=P\{\max(X,Y)=i\}=P\{X=i,Y<i\}+P\{X\le i,Y=i\}$

$$=\sum_{k=0}^{i-1}P\{X=i,Y=k\}+\sum_{k=0}^{i}P\{X=k,Y=i\},\ i=0,1,2,3,4,5$$

所以 *V* 的分布律为

V=max(*X*,*Y*)	0	1	2	3	4	5
P	0	0.04	0.16	0.28	0.24	0.28

(3) $P\{U=i\}=P\{\min(X,Y)=i\}$

$=P\{X=i,Y\ge i\}+P\{X>i,Y=i\}$

$$=\sum_{k=i}^{3}P\{X=i,Y=k\}+\sum_{k=i+1}^{5}P\{X=k,Y=i\}\quad i=0,1,2,3,$$

U=min(*X*,*Y*)	0	1	2	3
P	0.28	0.30	0.25	0.17

(4)类似上述过程，有

W=*X*+*Y*	0	1	2	3	4	5	6	7	8
P	0	0.02	0.06	0.13	0.19	0.24	0.19	0.12	0.05

八、（**10** 分）

（1）设 $X\sim U[0,1]$**，** $Y\sim U[0,1]$ **且** X **与** Y **独立，求** $E|X-Y|$**；**

（2）设 $X\sim N(0,1),\ \ Y\sim N(0,1)$ **且** X **与** Y **独立，求** $E|X-Y|$**.**

（1） $E|X-Y|=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)|x-y|dxdy$

$=\int_0^1\int_0^x(x-y)dxdy+\int_0^1\int_x^1(y-x)dxdy=\frac{1}{3}$；

（2）因 X,Y 相互独立，所以 $Z=X-Y\sim N(0,\ 2)$

$\frac{Z}{\sqrt{2}}=\frac{X-Y}{\sqrt{2}}\sim N(0,\ 1)$

$E\left|\frac{X-Y}{\sqrt{2}}\right|=\sqrt{\frac{2}{\pi}}$,

所以 $E|X-Y|=\frac{2}{\sqrt{\pi}}$.