厦门大学《大学物理》B（上）
课程期中试卷（A 卷）

2016－2017 第 2 学期（2017.4）

一、（15 分）

质点在 xoy 平面内运动，其速度为为：$\vec{v}=2\vec{i}-4t\vec{j}$，计时开始时质点的 $\vec{r}_0=19\vec{j}$，试求：

（1）质点的运动方程；

（2）当质点的位置矢量与速度矢量恰好垂直时，将发生在什么时刻？

（3）求 t 时刻质点的切向加速度和法向加速度的大小。

解：（1）$\because \vec{v}=2\vec{i}-4t\vec{j}=\dfrac{d\vec{r}}{dt} \quad \Rightarrow \quad \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{r}=\int_0^t (2\vec{i}-4t\vec{j})dt$，

运动方程：$\vec{r}(t)=2t\vec{i}+\left(19-2t^2\right)\vec{j}$　（5 分）

（2）令：$\vec{r}\cdot\vec{v}=[2t\vec{i}+\left(19-2t^2\right)\vec{j}]\cdot(2\vec{i}-4t\vec{j})=8t^3-72t=0$，

得：$t_1=0$，$t_2=3(s)$，$t_3=-3(s)$ (不合题意，舍去)；（5 分）

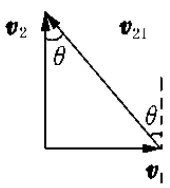
（3）$\because \vec{a}=\dfrac{d\vec{v}}{dt}=-4\vec{j} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a=4 \\ v=2\sqrt{1+4t^2} \end{cases}$，

$a_\tau=\dfrac{dv}{dt}=\dfrac{8t}{\sqrt{1+4t^2}}$，　$a_n=\sqrt{a^2-a_\tau^2}=\dfrac{4}{\sqrt{1+4t^2}}$。（5 分）

二、（10 分）

一船以速率 $v_1=4\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ 沿直线向东行驶，另一小艇在其前方以速率 $v_2=4\sqrt{3}\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ 沿直线向北行驶，试问对在船上的观察来说，小艇的速度为多少？速度方向请作图标示。

解:



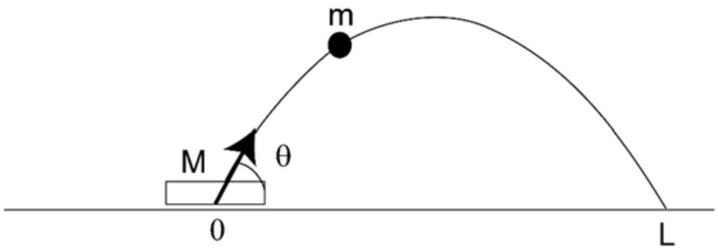
大船看小艇，则有 $\boldsymbol{\vec{v}_{21}}=\boldsymbol{\vec{v}_2}-\boldsymbol{\vec{v}_1}$，（2 分）依题意作速度矢量图如图（2 分）

由图可知 $v_{21}=\sqrt{v_1^2+v_2^2}=8\ \mathrm{(m/s)}$　（3 分）

方向北偏西 $\theta=\arctan\left(\frac{v_1}{v_2}\right)=\arctan\left(\frac{4}{4\sqrt{3}}\right)=30°$.　(3 分)

三、（15 分）

如果所示，在水平地面上大炮炮管与水平方向的角度为θ，炮弹相对于炮车的发射初速度大小为v，大炮炮身质量 M，炮弹质量 m。若视大炮炮管与炮弹为质点处理，且忽略空气阻力。试求：



（1）如果炮车固定在地面上，炮弹飞行的时间为多少？炮弹的射程为多少？

（2）如果炮车可以在地面上滑动，忽略摩擦阻力，炮弹飞行时间多少？炮弹的射程多少？

参考答案：

（1）（6 分）

水平初速度：$v\cos\theta$

垂直初速度：$v\sin\theta$

飞行时间：$t=\frac{2v\sin\theta}{g}$

射程：$L=v\cos\theta\frac{2v\sin\theta}{g}$

（2）（9 分）

垂直初速度：$v\sin\theta$

飞行时间：$t=\frac{2v\sin\theta}{g}$

在水平方向上，动量守恒，并且炮弹相对于炮车的水平速度为：$v\cos\theta$

$$Mv_{M,x}+mv_{m,x}=0$$

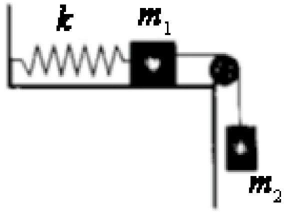
$$v_{m,x}-v_{M,x}=v\cos\theta$$

$$v_{m,x}=\frac{Mv\cos\theta}{M+m}$$

$$L=v_{m,x}t=\frac{Mv\cos\theta}{M+m}\frac{2v\sin\theta}{g}=\frac{2Mv^2\cos\theta\sin\theta}{(M+m)g}$$

四、（15 分）

质量分别为 m_1 和 m_2 的两个物体与劲度系数为 k 的轻弹簧连接成为如图所示的系统，质量为 m_1 的物体放置在光滑的桌面上，忽略绳与滑轮的质量及摩擦。当物体达到平衡后，将质量为 m_2 的物体往下拉 h 距离后放手，求两物体运动的最大速率。



参考解答：取竖起向下为 x 轴正方向，取系统达到平衡时，质量为 m_2 的物体所处位置为坐标原点，且为重力势能零点。此时，设弹簧伸长量为 x_0，则有

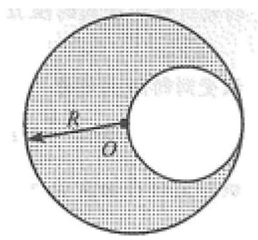
$$-kx_0 + m_2 g = 0 \quad \Rightarrow \quad x_0 = \frac{m_2 g}{k} \qquad （5 分）$$

机械能守恒，$\frac{1}{2}k(x_0+h)^2 - m_2 gh = \frac{1}{2}(m_1+m_2)v^2 + \frac{1}{2}k(x_0+x)^2 - m_2 gx$ （5 分）

$v^2 = \frac{k}{m_1+m_2}(h^2 - x^2)$，$x$=0 时，$v = v_{\max} = \sqrt{\frac{kh^2}{m_1+m_2}}$ （5 分）

五、（15 分）

如图所示，从一个半径为 R 的均匀薄板上挖去一个直径为 R 的圆板，所形成的圆洞中心在距原薄板中心 $R/2$ 处，所剩薄板的质量为 m。求此时薄板对通过原中心点 O 且与板面垂直的轴的转动惯量。



参考解答：

薄板的质量面密度为 $\sigma = \frac{m}{\pi R^2 - \pi R^2/4} = \frac{4m}{3\pi R^2}$ （2 分）

挖去的小圆薄板的质量为 $m' = \frac{4m\pi R^2/4}{3\pi R^2} = \frac{m}{3}$ （2 分）

则 m' 绕通过 O 并与板面垂直的轴的转动惯量为

$$I_{m'} = \frac{1}{2}\cdot m' \cdot (\frac{R}{2})^2 + m' \cdot (\frac{R}{2})^2 = \frac{3}{8}m'R^2 = \frac{1}{8}mR^2 \quad （3 分）$$

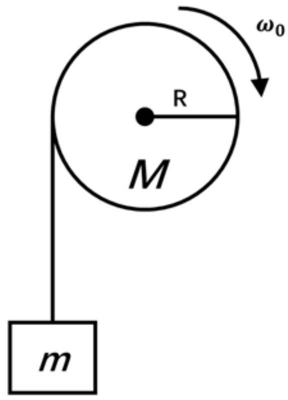
原来大薄圆板的质量为 $M = m + m' = \frac{4m}{3}$，则 M 绕通过 O 并与板面垂直的轴的转动惯量为

$$I_M = \frac{1}{2}MR^2 = \frac{2}{3}mR^2 \qquad （3 分）$$

设剩余薄板绕通过 O 并与板面垂直的轴的转动惯量为 I_m,则 $I_m + I_{m'} = I_M$,即

$$I_m = I_M - I_{m'} = \frac{2}{3}mR^2 - \frac{1}{8}mR^2 = \frac{13}{24}mR^2 \quad （3+2=5 分）$$

六、（15 分）



一个承轴光滑的定滑轮，质量为M，半径为R，一根不能伸长的轻绳，一端固定在定滑轮上，另一端系有一个质量为m，如图所示。已知定滑轮初角速度为ω_0，方向垂直纸面向里。求：

（1）定滑轮的角加速度大小和方向；

（2）定滑轮的角速度第一次变化到$\omega=0$，物体上升的高度；（假设此时物体 m 仍在定滑轮下方）

（3）当物体回到原来位置时，定滑轮的角速度大小和方向。

参考解答：

（1）由牛顿第二定律和转动定律列方程

$$\begin{cases} \mathrm{mg}-T=\mathrm{ma}\text{（2分）} \\ T'R=J\beta\text{........（2分）} \\ \mathrm{a}=R\beta\text{..........（2分）} \\ T=T'\text{.........（1分）} \end{cases}$$

解得

$$\beta=\frac{\mathrm{mg}R}{\mathrm{m}R^2+J}=\frac{\mathrm{mg}R}{\mathrm{m}R^2+\frac{1}{2}MR^2}=\frac{2\mathrm{mg}}{(2\mathrm{m}+M)R}\text{（2 分）}$$

方向垂直纸面向外。

（2）由运动学方程得

$$\omega^2=\omega_0^2-2\beta\theta\text{（2 分）}$$

当$\omega=0$时，有

$$\theta=\frac{\omega_0^2}{2\beta}\text{（1 分）}$$

所以物理上升的高度为

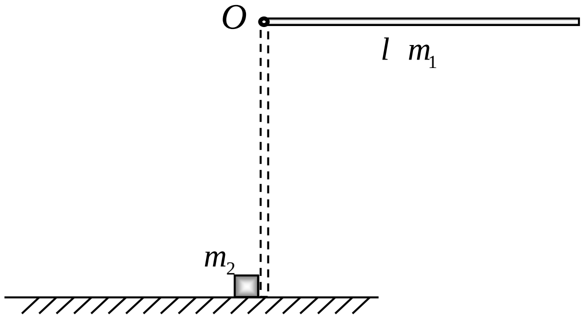
$$\mathrm{h}=R\theta\text{（1 分）}$$

（3）当物体回到原来位置时

$$\omega=\sqrt{2\beta\theta}\text{（2 分）}$$

方向垂直纸面向外。

七、（15 分）



长度l，质量$m_1 = 3M$的匀质细杆，可绕通过O点垂直于纸面的水平轴转动。令杆自水平位置静止下摆，在铅垂位置与质量$m_2 = M$的物体碰撞并黏在一起，求：

（1）碰撞后物体 m_2 的运动速度；

（2）碰撞时的机械能损失；

（3）碰后杆能上升的最大角度（杆与竖直方向的夹角）。

参考解答：

（1）（5 分）

细杆从水平位置运动到垂直位置，碰撞前能量守恒：

$$\frac{1}{2}J\omega^2 = m_1 g\frac{l}{2}$$
$$\frac{1}{2}\frac{1}{3}m_1 l^2\omega^2 = m_1 g\frac{l}{2}$$
$$\omega = \sqrt{\frac{m_1 gl}{\frac{1}{3}m_1 l^2}} = \sqrt{3g/l}$$

碰撞过程角动量守恒：

$$J\omega = (J + Ml^2)\omega_1$$
$$J = \frac{1}{3}m_1 l^2 = Ml^2$$
$$\omega_1 = \frac{\omega}{2} = \frac{\sqrt{3g/l}}{2}$$
$$v = \omega_1 l = \frac{\sqrt{3gl}}{2}$$

（2）（5 分）

碰撞前动能： $E_{k0} = m_1 g\frac{l}{2} = \frac{3Mgl}{2}$

碰撞后动能： $E_{k1} = \frac{1}{2}(J + Ml^2)\omega_1^2 = \frac{3Mgl}{4}$

能量损失： $\Delta E = E_{k1} - E_{k0} = \frac{3Mgl}{4}$

（3）（5 分）

碰撞后细杆与物体机械能守恒：

$$E_{k1} = \frac{3Mgl}{4} = E_p = m_1 gl/2(1-\cos\theta) + m_2 l(1-\cos\theta) = \frac{5Mgl}{2}(1-\cos\theta)$$
$$\cos\theta = 1 - \frac{3/4}{5/2} = 0.7$$
$$\theta = \arccos 0.7$$