厦门大学《概率统计》试卷

________学院________系________年级________专业

1、 设 A 与 B 独立，且 $P(A)=p, P(B)=q$，求下列事件的概率：$\boldsymbol{P(A\cup B)}$，$\boldsymbol{P(A\cup \bar{B})}$，$\boldsymbol{P(\bar{A}\cup \bar{B})}$.

解 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A)P(B)=p+q-pq$

$$P(A\cup \bar{B})=P(A)+P(\bar{B})-P(A)P(\bar{B})=p+1-q-p(1-q)=1-q+pq$$

$$P(\bar{A}\cup \bar{B})=P(\overline{AB})=1-P(A)P(B)=1-pq$$

2、 某保险公司把被保险人分为三类：“谨慎的”，“一般的”，“冒失的”.统计资料表明，上述三种人在一年内发生事故的概率依次为 **0.05, 0.15** 和 **0.30**；如果“谨慎的”被保险人占 **20%**，“一般的”占 **50%**，“冒失的”占 **30%**，现知某被保险人在一年内出了事故，则他是“谨慎的”的概率是多少？

解 设 A={该客户是“谨慎的”}，B={该客户是“一般的”}，
C={该客户是“冒失的”}，D={该客户在一年内出了事故}
则由贝叶斯公式得

$$P(A|D)=\frac{P(AD)}{P(D)}=\frac{P(A)P(D|A)}{P(A)P(D|A)+P(B)P(D|B)+P(C)P(D|C)}$$

$$=\frac{0.2\times0.05}{0.2\times0.05+0.5\times0.15+0.3\times0.3}=0.057$$

3、 设随机变量 X 的密度函数为 $\boldsymbol{f(x)=Ae^{-|x|},-\infty<x<+\infty}$，

求：（**1**）系数 A；（**2**）$\boldsymbol{P(0<X<1)}$；（**3**）**X** 的分布函数。

解 （1）系数 A 必须满足 $\int_{-\infty}^{+\infty}Ae^{-|x|}dx=1$，由于 $e^{-|x|}$ 为偶函数，所以

$$\int_{-\infty}^{+\infty}Ae^{-|x|}dx=2\int_0^{+\infty}Ae^{-|x|}dx=2\int_0^{+\infty}Ae^{-x}dx=1$$

解得 $A=\frac{1}{2}$；

（2）$P(0<X<1)=\int_0^1\frac{1}{2}e^{-|x|}dx=\int_0^1\frac{1}{2}e^{-x}dx=\frac{1}{2}\left(1-e^{-1}\right)$；

（3）$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(x)dx$

$$=\begin{cases}\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{2}e^{-|x|}dx & x<0\\ \int_{-\infty}^{0}\frac{1}{2}e^{-|x|}dx+\int_{0}^{x}\frac{1}{2}e^{-|x|}dx & x\geq 0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{2}e^{x}dx & x<0\\ \int_{-\infty}^{0}\frac{1}{2}e^{x}dx+\int_{0}^{x}\frac{1}{2}e^{-x}dx & x\geq 0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{x} & x<0\\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(1-e^{-x}\right) & x\geq 0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{x} & x<0\\ 1-\frac{1}{2}e^{-x} & x\geq 0\end{cases}$$

4、国际市场每年对某种出口商品的需求量 X 是一个随机变量，它在[2000，4000]（单位：吨）上服从均匀分布。若每售出一吨，可获利 3 万美元，若销售不出而积压，则每吨需保养费 1 万美元。问应组织多少货源，才能使平均收益最大？

解 设随机变量 Y 表示平均收益（单位：万元），进货量为 a 吨

$$Y=\begin{cases}3X-(a-X) & x<a\\ 3a & x\geq a\end{cases}$$

则

$$E(Y)=\int_{2000}^{a}(4x-a)\frac{1}{2000}dx+\int_{a}^{4000}3a\frac{1}{2000}dx$$
$$=\frac{1}{2000}\left(-2a^2+14000a-8000000\right)$$

要使得平均收益 $E(Y)$ 最大，所以

$$\left(-2a^2+14000a-8000000\right)'=0$$

得 $a=3500$（吨）

5、对圆片直径进行测量，测量值 X 服从 $(5,6)$ 上的均匀分布，求圆面积 Y 的概率密度。

解 圆面积 $Y=\frac{1}{4}\pi X^2$，由于 X 均匀取 $(5,6)$ 中的值，所以 X 的密度函数

$$f_X(x)=\begin{cases}1, & 5<x<6;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

且 $y=\frac{1}{4}\pi x^2$ 为单调增加函数 $\left(x\in(5,6)\right)$，其反函数

$$h(y)=\sqrt{\frac{4y}{\pi}}=\frac{2\sqrt{y}}{\sqrt{\pi}},h'(y)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{y}}=\frac{1}{\sqrt{\pi y}},$$

Y 的密度函数为

$$f_Y(y)=f_X(h(y))|h'(y)|=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{\pi y}}, & 5<\frac{2\sqrt{y}}{\sqrt{\pi}}<6;\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{\pi y}}, & \frac{25}{4}\pi<y<9\pi;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

6、 已知二维随机变量(X,Y)的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}k(1-x)y, & 0<x<1,0<y<x\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

（1）求常数k；（2）分别求关于 X 及关于 Y 的边缘密度函数；（3）X 与 Y 是否独立？

解 （1）k 满足$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy=1$，即$\int_0^1dx\int_0^xk(1-x)ydy=1$解得$k=24$；

（2）X 的边缘密度函数

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_0^x24(1-x)ydy, & 0<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}12x^2(1-x), & 0<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

Y 的边缘密度函数为

$$f_Y(y)=\begin{cases}\int_y^124(1-x)ydx, & 0<y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}12y(1-y)^2, & 0<y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

（3）因为 $f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}144x^2(1-x)y(1-y)^2, & 0<x,y<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}\neq f(x,y)$，所以 X 与 Y 不相互独立。

7、设 X 与 Y 是相互独立的随机变量，X 服从$[0,0.2]$上的均匀分布，Y 服从参数为 1/5 的指数分布，即 $f_Y(y)=\begin{cases}5e^{-5y}, & y>0\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$ ，求$P(X\geq Y)$。

解. 由均匀分布的定义知

$$f_X(x)=\begin{cases}5, & 0<x<0.2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

由指数分布的定义知

$$f_Y(y)=\begin{cases} 5e^{-5y}, & y>0 \\ 0, & 其他 \end{cases}$$

因为 X 与 Y 独立，易得 (X,Y) 的联合密度函数

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases} 25e^{-5y}, & 0<x<0.2, y>0 \\ 0, & 其他 \end{cases}$$

概率 $P(X\ge Y)=\iint\limits_G f(x,y)dxdy$，

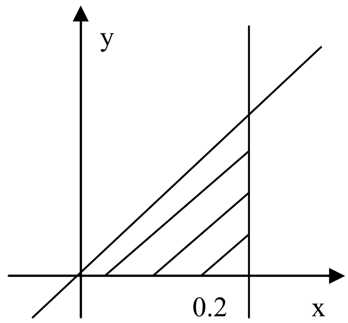

图 5.3

其中区域 $G=\{(x,y)\mid x\ge y\}$ 见图 5.3，经计算有

$$P(X\ge Y)=\int_0^{0.2}dx\int_0^x 25e^{-5y}dy=\int_0^{0.2}5\left(1-e^{-5x}\right)dx=e^{-1}。$$

8、设随机变量 (X,Y) 的联合分布律为

X\Y	**0**	**1**
0	**0.3**	**0.2**
1	**0.4**	**0.1**

求相关系数 $\rho_{X,Y}$。

解　关于 X 与 Y 的边缘分布律分别为：

X	0	1
Pr	0.5	0.5

Y	0	1
Pr	0.7	0.3

$$E(X)=0\times0.5+1\times0.5=0.5$$

$$E\left(X^2\right)=0^2\times0.5+1^2\times0.5=0.5$$

$$D(X)=0.5-(0.5)^2=0.25$$

$$E(Y)=0\times0.7+1\times0.3=0.3$$

$$E\left(Y^2\right)=0^2\times0.7+1^2\times0.3=0.3$$

$$D(Y)=0.3-(0.3)^2=0.21$$

$$\operatorname{cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)\cdot E(Y)=0.1-0.5\times0.3=-0.05$$

$$\rho_{X,Y}=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=\frac{-0.05}{\sqrt{0.25}\sqrt{0.21}}=-\frac{\sqrt{21}}{21}$$