厦门大学《大学物理C》课程期中试卷

2013-2014 第二学期

2014.04

1.（10 分） 一个质点 xoy 平面内运动，其运动方程为：$\begin{cases} x = 3t + 5 \\ y = 0.5t^2 - 3t - 4 \end{cases} (SI)$，求：

（1） 质点的轨迹方程；

（2） 从 $t_1 = 1s$ 到 $t_2 = 2s$ 内质点的位移矢量；

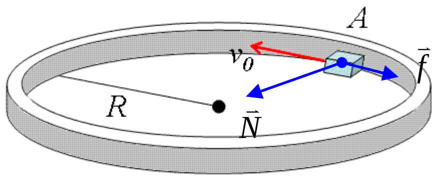
（3） 任意时刻质点的速度矢量和加速度矢量；

（4） 若质点质量为 $2\,kg$，求 $t_1 = 1s$ 到 $t_2 = 2s$ 时间段内质点所受到的冲量 I 。

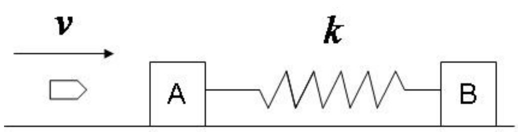
2.（15 分） 光滑水平面上放置一固定的圆环，半径为 R。一物体贴着环的内侧运动，物体与环之间滑动摩擦系数为 μ。设物体在某时刻经 A 点时速率为 v_0，求：

（1） 此后 t 时刻作用在物体上的摩擦力大小。

（2） 从 A 点开始到速率减少为 $\frac{v_0}{2}$ 时，物体转了过了多少圈？

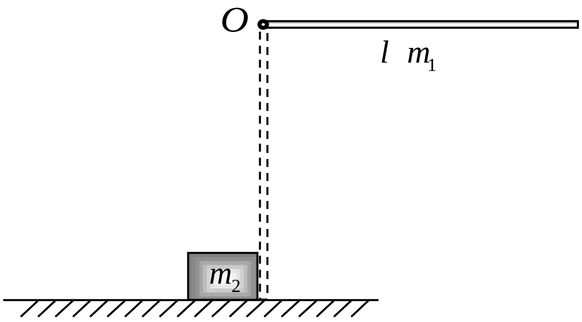


3.（10 分） 如图所示，光滑水平桌面上，一根弹性系数为 k 的轻弹簧两端各连着质量为 m 的滑块 A 和 B。 如果滑块 A 被水平飞来的质量为 $\frac{m}{4}$ 、速度为 v 的子弹射中，并留在其中，求运动过程中弹簧的最大压缩量。



4.（10 分） 物体质量为3kg，$t=0$时位于$\vec{r}_0=4\vec{i}\,\mathbf{m}$， $\vec{v}_0=\vec{i}+6\vec{j}\,\mathbf{m}\cdot\mathbf{s}^{-1}$，若有一力$\vec{f}=6t\,\vec{j}$ N作用在物体上，求$2\mathbf{s}$后，（1）该力对物体所做的总功；（2）物体相对z轴角动量的变化。

5.（20 分） 长度l，质量m_1的匀质细杆，可绕通过O点垂直于纸面的水平轴转动。(匀质细杆绕其一端转动的转动惯量为 $J=\dfrac{1}{3}m_1l^2$) 令杆自水平位置静止下摆，在铅垂位置与质量m_2的物体发生完全弹性碰撞，碰后物体沿着摩擦系数为μ的水平面滑动，当$m_1=m_2$时，求：



（1）碰撞时物体受到杆的冲量；

（2）物体滑过的最远距离；

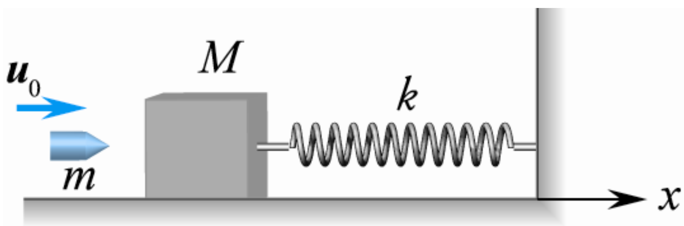
（3）碰后杆能上升的最大角度。

6.（15分） 如图所示，光滑平面上的弹簧振子由质量为 $M=0.9$ kg 的木块和劲度系数为 $k=\pi^2$ N/m 的轻弹簧构成。现有一个质量为 $m=0.1$ kg，速度为 $u_0=\pi$ m/s 的子弹射入静止的木块后陷入其中，此时弹簧处于自由状态，并开始计时。

（1）试写出该谐振子的振动方程；

（2）画出该简谐振动的 $x-t$ 曲线；

（3）求出 $t=1.5$ s 时刻系统的动能和势能。



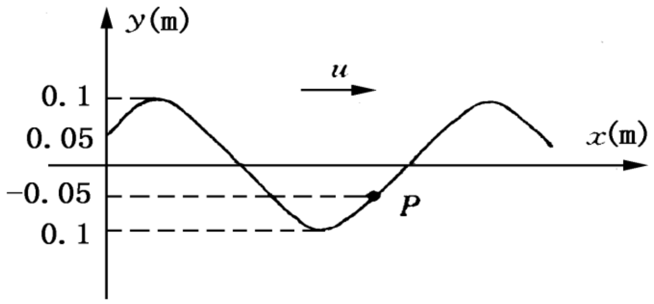
7.（20分） 一列平面简谐波沿 x 轴正向传播， $t=0$ 时刻的波形如图（a）所示，已知波速 $u=10$ m/s,波长为 $\lambda=2$ m。图中 P 点位置为两种介质的分界面，如图（b）所示平面简谐波从波密介质入射而从波疏介质上反射后振幅无变化。试求：

（1）入射波的波动方程；

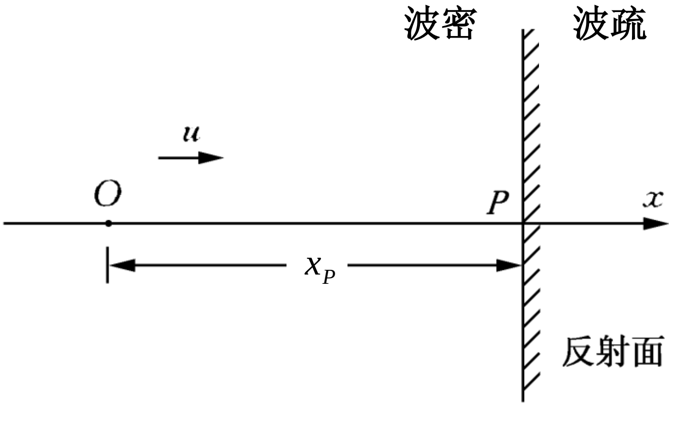
（2）P 点的坐标以及入射波在两介质分界面 P 处的振动方程；

（3）反射波的波动方程；

（4）驻波方程，并给出 O 与 P 之间各个波节和波腹点的坐标。



（a）



（b）

厦门大学《大学物理 C》课程期中试卷答案

2013-2014 第二学期

2014.04

1.（10 分）改编自旧版习题 1.3

解：（1）轨迹方程： $y=\frac{1}{18}(x^2-28x+43)=\frac{1}{18}x^2-\frac{14}{9}x+\frac{43}{18}$ ；（2 分）

（2）$\vec{r}\big|_{t=1}=8\vec{i}-6.5\vec{j}$ m， $\vec{r}\big|_{t=2}=11\vec{i}-8\vec{j}$ m， $\Delta\vec{r}=3\vec{i}-1.5\vec{j}$ (m)；（3 分）

（3）$\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}=3\vec{i}+(t-3)\vec{j}$ m/s， $\vec{a}=\vec{j}$ m/s^2；（3 分）

（3） $\vec{I}=\vec{P}_2-\vec{P}_1=m(\vec{v}_2-\vec{v}_1)=2\vec{j}$ kg*m/s（2 分）

2.（15 分）学习指导例题 2.4

解：（1）环带支撑力 N：提供物体圆周运动的向心加速度，

摩擦力 f：产生切向加速度，使物体减速

$$\begin{cases} N=F_n=m\dfrac{v^2}{R} \\ -f=F_t=m\dfrac{dv}{dt} \end{cases}$$ 其中： $f=\mu N$（2×2=4 分）

所以有： $m\frac{dv}{dt}=-\mu m\frac{v^2}{R}$ $\rightarrow \frac{dv}{v^2}=-\frac{\mu}{R}dt$（2 分）

两边积分： $\int_{v_0}^{v}\frac{dv}{v^2}=-\int_0^t\frac{\mu}{R}dt$（1 分）

得： $\frac{1}{v}-\frac{1}{v_0}=\frac{\mu}{R}t$ ，即： $v=\frac{R}{R+\mu v_0 t}v_0$（1 分）

$$f=\mu N=\frac{\mu m R v_0^2}{(R+\mu v_0 t)^2}$$（1 分）

（2）$\because -\mu m g\frac{v^2}{R}=m\frac{dv}{dt}\cdot\frac{ds}{ds}$ ，（2 分） $\therefore \int_0^s ds=-\frac{R}{\mu}\int_{v_0}^{v_0/2}\frac{dv}{v}$ ；（1 分）

解得：$s=\dfrac{R}{\mu}\ln 2$ ，（1 分） 物体转过的圈数 $n=\dfrac{\Delta\theta}{2\pi}=\dfrac{s}{2\pi R}=\dfrac{\ln 2}{2\pi\mu}$ 。 （2 分）

3.（10 分）解：子弹射中滑块 A： 动量守恒 $\dfrac{m}{4}v=(\dfrac{m}{4}+m)v_1$ （2 分）

子弹、滑块 A、滑块 B、轻弹簧一起运动。当 A、B 相对静止时弹簧压缩最大，此时系统的速度为 v_2

动量守恒 $(\dfrac{m}{4}+m)v_1=(\dfrac{m}{4}+m+m)v_2$， （2 分）

机械能守恒 $\dfrac{1}{2}(\dfrac{m}{4}+m)v_1^2=\dfrac{1}{2}(\dfrac{m}{4}+m+m)v_2^2+\dfrac{1}{2}kx_m^2$ （2 分）

解得：（$v_1=\dfrac{v}{5}$， $v_2=\dfrac{v}{9}$） $x_m=\sqrt{\dfrac{mv^2}{45k}}$ （4 分）

4.（10 分）改编旧版课本习题 2.23

解：（1） $\dfrac{dv_x}{dt}=a_x=\dfrac{f_x}{m}=0 \quad \therefore dv_x=0 \quad \therefore v_x=v_{x0}=1$

$$\frac{dv_y}{dt}=a_y=\frac{f_y}{m}=2t \quad \therefore dv_y=2t\,d\,t \quad \therefore v_y=v_{y0}+t^2=6+t^2$$

$\therefore\ \vec{v}=\vec{i}+(6+t^2)\vec{j}(\mathbf{m\cdot s^{-1}})$ （2 分）

$$\frac{dx}{dt}=v_x=1 \quad \therefore dx=dt \quad \therefore x=x_0+t=4+t$$

$$\frac{dy}{dt}=v_y=6+t^2 \quad \therefore dy=(6+t^2)dt \quad \therefore y=y_0+6t+\frac{1}{3}t^3=6t+\frac{1}{3}t^3$$

$\therefore\ \vec{r}=(4+t)\vec{i}+(6t+\dfrac{1}{3}t^3)\vec{j}(\mathbf{m})$ （2 分）

$W=E_k-E_{k0}=\dfrac{1}{2}m(v^2-v_0^2)=\dfrac{3}{2}(12t^2+t^4)=96(J)$ （3 分）

或 $W=\int_0^t \vec{f}\cdot d\vec{r}=96\ (J)$

（2） 解(一) $\vec{L}_0=\vec{r}_0\times m\vec{v}_0=4\vec{i}\times 3(\vec{i}+6\vec{j})=72\vec{k}$

$$\vec{L}=\vec{r}\times m\vec{v}=[(4+t)\vec{i}+(6t+\frac{1}{3}t^3)\vec{j}]\times 3[\vec{i}+(6+t^2)\vec{j}]=136\vec{k}$$

$$\therefore \Delta\vec{L}=\vec{L}-\vec{L}_0=64\vec{k}\ \mathbf{kg\cdot m^2\cdot s^{-1}}$$ （3 分）

解(二)　　相对 z 轴角动量的变化等于 z 方向上的冲量矩的大小:

$$\Delta\vec{L}=\int_0^t\vec{M}\cdot \mathrm{d}t=\int_0^t(\vec{r}\times\vec{F})\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^2\left[(4+t)\vec{i}+(6t+\frac{1}{3}t^3)\vec{j}\right]\times(6t\vec{j})\mathbf{d}t$$

$$=64\vec{k}\ \mathbf{kg\cdot m^2\cdot s^{-1}}$$

5.　（20分）旧课本例题2.25

解：a. 细杆由水平位置静止下摆至铅垂位置过程机械能守恒：

$$m_1g\frac{l}{2}=\frac{1}{2}(\frac{1}{3}m_1l^2)\omega_{10}^2$$ （2 分）　→　$\omega_{10}=\sqrt{\dfrac{3g}{l}}$　，　（1 分）

b. 细杆在铅垂位置与 m_2 完全弹性碰撞过程

角动量守恒：　$\frac{1}{3}m_1l^2\omega_{10}=\frac{1}{3}m_1l^2\omega_1+m_2l^2\omega_2$　（2 分）

动能守恒：　$\frac{1}{2}(\frac{1}{3}m_1l^2)\omega_{10}^2=\frac{1}{2}(\frac{1}{3}m_1l^2)\omega_1^2+\frac{1}{2}(m_2l^2)\omega_2^2$　（2 分）

解得：　$\omega_1=(\dfrac{m_1-3m_2}{m_1+3m_2})\omega_{10}=\dfrac{m_1-3m_2}{m_1+3m_2}\sqrt{\dfrac{3g}{l}}$　，　（1 分）

$\Rightarrow$ 当 $m_1=m_2$ 时有　$\omega_1=-\dfrac{1}{2}\omega_{10}=-\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{3g}{l}}$　，负号表示细杆往回摆；（1 分）

$\omega_2=\dfrac{2m_1}{m_1+3m_2}\omega_{10}=\dfrac{2m_1}{m_1+3m_2}\sqrt{\dfrac{3g}{l}}$ ，　（1 分）

$\Rightarrow$　当 $m_1=m_2$ 时有　$\omega_2=\dfrac{1}{2}\omega_{10}=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{3g}{l}}$　（1 分）

（1）碰撞时物体受到杆的冲量：$\vec{I}=\Delta\vec{P}$　，

即：$I=P_2-P_1=m_2l\omega_2-0=\dfrac{2m_1m_2}{m_1+3m_2}\sqrt{3gl}$　；

当 $m_1=m_2$ 时有 $I=\dfrac{1}{2}m_2\sqrt{3gl}$　（3 分）

（2）根据动能定理有：$-fs=0-\frac{1}{2}m_2v^2$ （2 分），

又 $f=\mu N=\mu m_2 g$

解得 m_2 移动距离：$s=\frac{6m_1^2 l}{\mu(m_1+3m_2)^2}=\frac{3l}{8\mu}$ （1 分）；

（3）碰后杆能上升过程机械能守恒：

$\frac{1}{2}(\frac{1}{3}m_1 l^2)\omega_1^2=m_1 g\frac{l}{2}(1-\cos\theta)$ （2 分），

解得：$\theta=\arccos\frac{12m_1m_2}{(m_1+3m_2)^2}=\arccos\frac{3}{4}=41.4^0$ （1 分）

6.（15分）

解：（1）子弹射入木块过程中，水平方向（x 轴方向）动量守恒。设子弹陷入木块后两者的共同速度为 v_0，则有 $mu_0=(m+M)v_0$

$$v_0=\frac{m}{m+M}u_0=0.1\pi\ \text{m/s}$$ （1分）

子弹陷入木块后的谐振子系统的角频率（圆频率）为

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m+M}}=\pi\ \text{rad/s}$$ （1分）

设谐振子系统的振动方程为 $x=A\cos(\omega t+\varphi_0)$

$t=0$ 时刻的初始条件为 $x_0=0$，$v_0>0$，代入振动方程，得

$$\begin{cases}0=A\cos\varphi_0\\ v_0=-\omega A\sin\varphi_0>0\end{cases}$$ （1分）

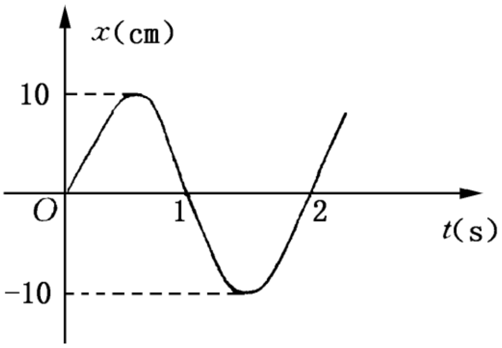
联立求出 $\varphi_0=\frac{3}{2}\pi$ （1分）

同时可以求出振幅 $A=-\frac{v_0}{\omega\sin\varphi_0}=\frac{mu_0}{\sqrt{k(m+M)}}=0.1\ \text{m}$ （1分）

所以该谐振子系统的振动方程为

$$x=0.1\cos(\pi t+\frac{3}{2}\pi)\ \text{m}$$ （1分）

（2） 该简谐振动的 $x-t$ 曲线如图：



（共4分）

注意：振幅和周期在图上的标注（各1分）以及横纵轴的单位，此图位移单位为 cm，若用 m 为单位振幅应标为 0.1。

建议：若答卷（1）的振动方程求错，但是（2）的曲线与其（1）所得到的振动方程相符，应给（2）小题的分数。

（3） $t=1.5$ s 时有： 振动位移 $x=-A=-0.1$ m，速度 $v=0$ （1分）

所以此时该谐振子系统的

势能为 $E_p=\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}kA^2=\frac{m^2u_0^2}{2(m+M)}=0.005\pi^2\ \text{J}=0.049\ \text{J}$ （2分）

动能为 $E_k=\frac{1}{2}mv^2=0$ （2分）

（或） 谐振子系统总机械能守恒为 $E=\frac{1}{2}kA^2$，所以动能为 $E_k=E-E_p=0$

7.（20分）

解：（1） 设入射波在原点 O 处的的振动方程为 $y_{入}^{O}=A\cos(\omega t+\varphi_0)$

由图可知，振幅 $A=0.1$ m

振动角频率（圆频率） $\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi u}{\lambda}=10\pi$ rad/s

$t=0$ 时刻原点处振动的初始条件为 $y_0=0.05\ \text{m}=\frac{A}{2}$，并且 $v_0<0$，所以有

$$\begin{cases}A\cos\varphi_0=\frac{A}{2}\\-\omega A\sin\varphi_0<0\end{cases}$$

可求出振动初相位 $\varphi_0=\dfrac{\pi}{3}$

所以入射波在原点 O 处的振动方程为

$$y_{入}^{O}=0.1\cos[10\pi t+\frac{\pi}{3}]\ \mathrm{m}$$ （2 分）

入射波以波速 $u=10$ m/s 沿 x 轴正向传播，可推知入射波的波动方程为

$$y_{入}=0.1\cos[10\pi(t-\frac{x}{10})+\frac{\pi}{3}]\ \mathrm{m}$$ （2 分）

（2） 设 P 点坐标为 x_P

由图可知，$t=0$ 时刻，入射波在 P 点处振动的位移为 $y_0^P=-0.05\ \mathrm{m}=-\dfrac{A}{2}$，速度 $v_0^P<0$，向 y 轴负方向运动，即

$$y_{入}\Big|_{t=0,x=x_P}=0.1\cos[-\pi x_P+\frac{\pi}{3}]=-0.005$$

并且 $$-\pi\sin[-\pi x_P+\frac{\pi}{3}]<0$$ （1 分）

可推知 $-\pi x_P+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{2}{3}\pi+2k\pi$，结合图（a）可知 $k=-1$

即 P 点坐标为 $x_P=\dfrac{5}{3}$ m （1 分）

所以入射波在两介质分界面 P 点处的振动方程为

$$y_{入}^{P}=y_{入}\Big|_{x=x_P}=0.1\cos[10\pi t-\frac{5}{3}\pi+\frac{\pi}{3}]\ \mathrm{m}$$
$$=0.1\cos[10\pi t+\frac{2}{3}\pi]\ \mathrm{m}$$ （2 分）

（3） 由于简谐波从波密介质入射而从波疏介质上反射，反射波在 P 点处的振动相位与入射波在该点的振动相位相同。故有反射波在 P 点处的振动方程为

$$y_{反}^{P}=0.1\cos[10\pi t+\frac{2}{3}\pi]\ \mathrm{m}$$ （2 分）

反射波以波速 $u=10$ m/s 沿 x 轴负向传播，t 时刻反射波在原点 O 处的振动状态与 $t-\dfrac{x_P}{u}$ 时刻其在 P 点处的振动状态相同，则反射波在原点 O 处的振动方程为

$$
\begin{aligned}
y_{反}^{O} &= 0.1\cos[10\pi(t-\frac{x_P}{u})+\frac{\pi}{3}]\ \text{m} \\
&= 0.1\cos[10\pi t-\frac{5}{3}\pi+\frac{2}{3}\pi]\ \text{m} \\
&= 0.1\cos[10\pi t-\pi]\ \text{m}
\end{aligned}
$$
（2 分）

所以反射波的波动方程为

$$y_{反} = 0.1\cos[10\pi(t+\frac{x}{10})-\pi]\ \text{m}$$
（2 分）

（4）驻波方程为

$$
\begin{aligned}
y &= y_{入} + y_{反} \\
&= 0.1\cos[10\pi(t-\frac{x}{10})+\frac{\pi}{3}]+0.1\cos[10\pi(t+\frac{x}{10})-\pi]\ \text{m} \\
&= 0.2\cos(\pi x-\frac{2}{3}\pi)\cos(10\pi t-\frac{\pi}{3})\ \text{m}
\end{aligned}
$$
（2 分）

（或）

$$
\begin{aligned}
y &= y_{入} + y_{反} \\
&= 0.1\cos[10\pi(t-\frac{x}{10})+\frac{\pi}{3}]-0.1\cos[10\pi(t+\frac{x}{10})]\ \text{m} \\
&= 0.2\sin(\pi x-\frac{\pi}{6})\sin(10\pi t+\frac{\pi}{6})\ \text{m}
\end{aligned}
$$

波腹点处满足 $\pi x-\frac{2}{3}\pi = k\pi \quad (k=0,\pm1,\pm2,\ldots)$ （1 分）

（或） $\pi x-\frac{\pi}{6} = k\pi+\frac{\pi}{2} \quad (k=0,\pm1,\pm2,\ldots)$

即 $x = k+\frac{2}{3}\ \text{m} \quad (k=0,\pm1,\pm2,\ldots)$

在 O 点与 P 点之间的波腹处坐标为 $\frac{2}{3}$ m， $\frac{5}{3}$ m （1 分）

波节点处满足 $\pi x-\frac{2}{3}\pi = k\pi+\frac{\pi}{2} \quad (k=0,\pm1,\pm2,\ldots)$ （1 分）

（或） $\pi x-\frac{\pi}{6} = k\pi \quad (k=0,\pm1,\pm2,\ldots)$

即 $x = k+\frac{1}{6}\ \text{m} \quad (k=0,\pm1,\pm2,\ldots)$

在 O 点与 P 点之间的波节处坐标为 $\frac{1}{6}$ m， $\frac{7}{6}$ m （1 分）