

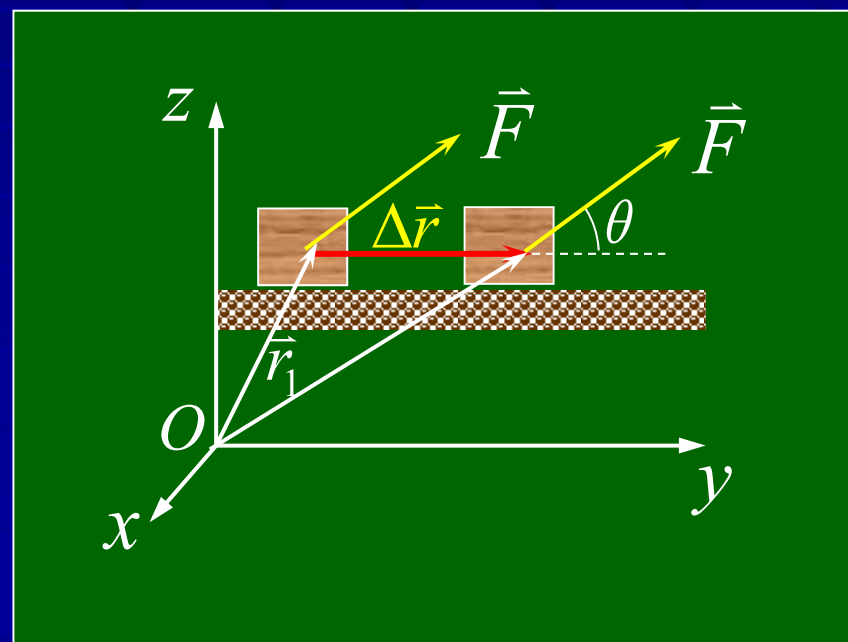
§ 2-4 能量守恒定律

2-4-1 功和功率

功是度量能量转换的基本物理量，它反映了力对空间的累积作用。

功的定义：

在力 \vec{F} 的作用下，物体发生了位移 $\Delta\vec{r}$ ，则把力在位移方向的分力与位移 $\Delta\vec{r}$ 的乘积称为功。



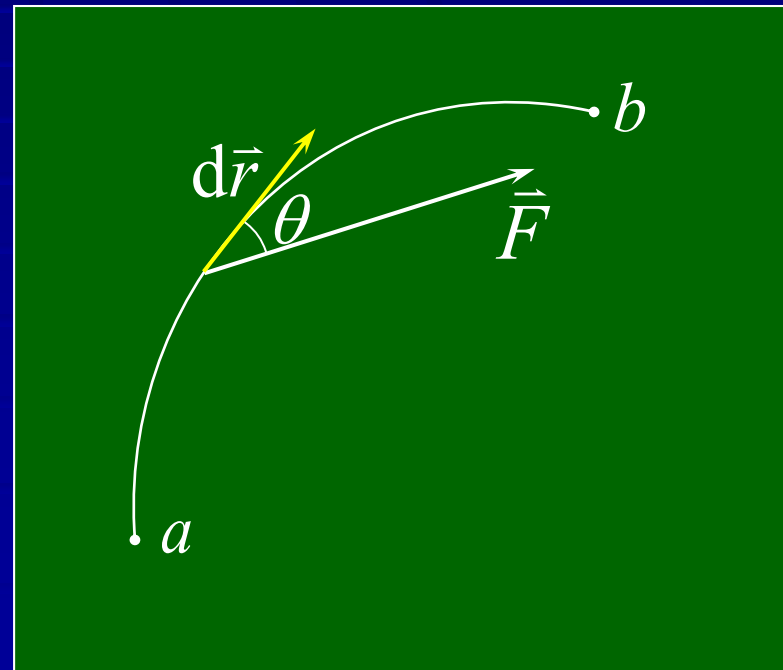
$$W = |\vec{F}| |\Delta \vec{r}| \cos \theta = \vec{F} \cdot \Delta \vec{r}$$

国际单位制单位： 焦耳（J）

质点由 a 点沿曲线运动到 b 点的过程中，变力 \vec{F} 所做的功。

元功： $dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$

$$W = \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b F \cos \alpha |d\vec{r}|$$



合力的功:

$$\begin{aligned} W &= \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_n) \cdot d\vec{r} \\ &= \int_a^b \vec{F}_1 \cdot d\vec{r} + \int_a^b \vec{F}_2 \cdot d\vec{r} + \cdots + \int_a^b \vec{F}_n \cdot d\vec{r} \end{aligned}$$

$$W = W_1 + W_2 + \cdots + W_n$$

结论: 合力对质点所做的功等于每个分力对质点做功之代数和。

在直角坐标系 $Oxyz$ 中

$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}$$

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\begin{aligned} W &= \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b (F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}) \cdot (dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}) \\ &= \int_a^b F_x dx + F_y dy + F_z dz \end{aligned}$$

功率是反映做功快慢程度的物理量。

功率： 单位时间内所做的功。

平均功率： $\bar{P} = \frac{\Delta W}{\Delta t}$ **单位：** $W = J \cdot s^{-1}$

瞬时功率： $P = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{dW}{dt}$

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

例1 设作用在质量为2kg的物体上的力 $F = 6t$ N。如果物体由静止出发沿直线运动，在头2 s内这力做了多少功？

解： $a = \frac{F}{m} = \frac{6t}{2} = 3t \quad \therefore a = \frac{dv}{dt}$
 $\therefore dv = a dt = 3t dt$

两边积分： $\int_0^v dv = \int_0^t 3t dt \quad v = \frac{3}{2} t^2$
 $v = \frac{dx}{dt} \quad dx = v dt = \frac{3}{2} t^2 dt$

$$W = \int F \cdot dx = \int_0^2 6t \cdot \frac{3}{2} t^2 dt = \frac{9}{4} t^4 \Big|_0^2 = 36 \text{ J}$$

2-4-2 动能和动能定理

1. 质点动能定理

动能： 质点因有速度而具有的对外做功本领。

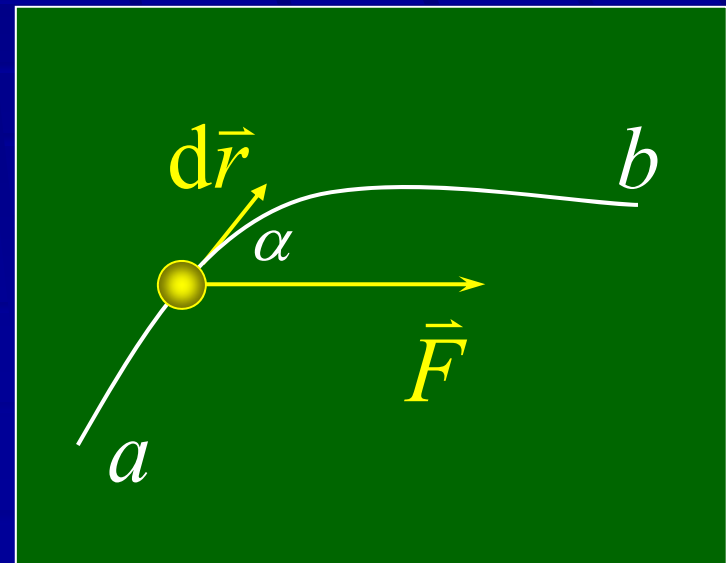
$$E_k = \frac{1}{2}mv^2$$

单位：J

设质点 m 在力的作用下沿曲线从 a 点移动到 b 点

元功：

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F \cos \alpha ds$$



$$F \cos \alpha = ma_t = m \frac{dv}{dt}$$

$$dW = F \cos \alpha ds = m \frac{dv}{dt} ds = mv dv$$

总功: $W = \int dW = \int_{v_1}^{v_2} mv dv = \frac{1}{2} m(v_2^2 - v_1^2)$

质点的动能定理:

合外力对质点所做的功等于质点动能的增量。

$$W = \frac{1}{2} mv_2^2 - \frac{1}{2} mv_1^2 = E_{k2} - E_{k1}$$

2. 质点系的动能定理

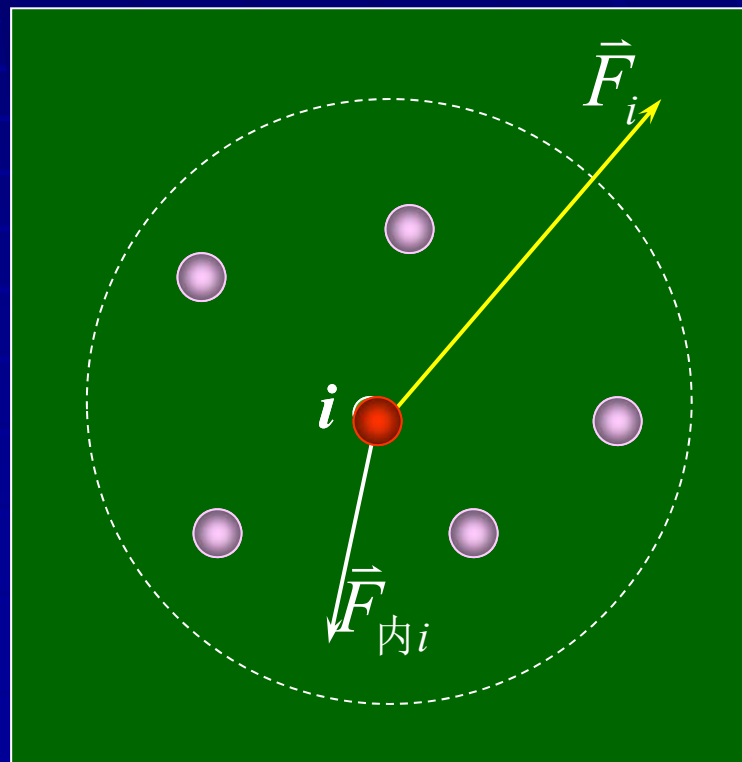
一个由 n 个质点组成的质点系，考察第 i 个质点。

质点的动能定理：

$$W_{i\text{外}} + W_{i\text{内}} = E_{k2i} - E_{k1i}$$

对系统内所有质点求和

$$\sum_{i=1}^n W_{i\text{内}} + \sum_{i=1}^n W_{i\text{外}} = \sum_{i=1}^n E_{k2i} - \sum_{i=1}^n E_{k1i}$$



$$W_{\text{内}} + W_{\text{外}} = E_{k2} - E_{k1}$$

质点系的动能定理：

质点系动能的增量等于作用于系统的所有外力和内力做功之代数和。

值得注意：

内力做功可以改变系统的总动能。

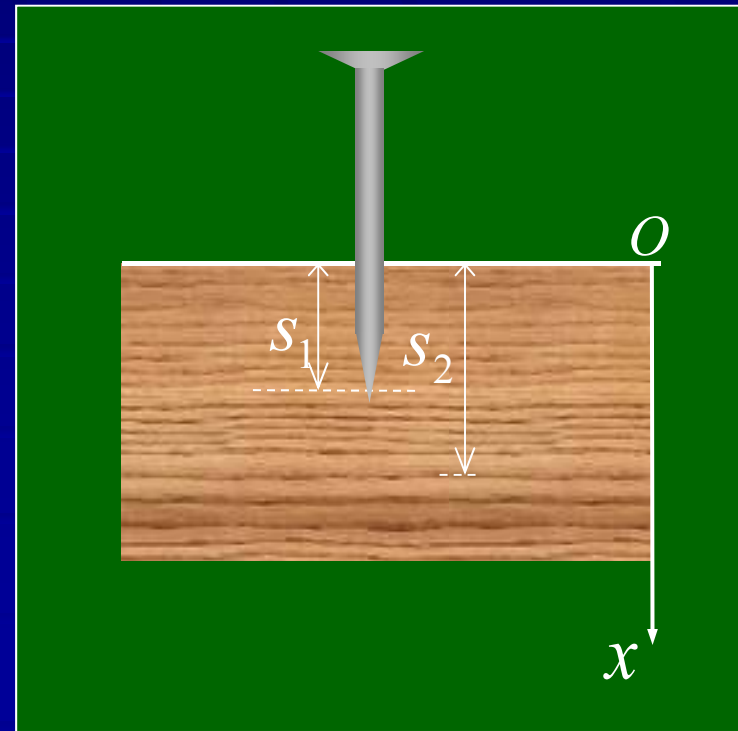


例2 如图所示，用质量为 m_0 的铁锤把质量为 m 的钉子敲入木板。设木板对钉子的阻力与钉子进入木板的深度成正比。在铁锤敲打第一次时，能够把钉子敲入1cm深，若铁锤第二次敲钉子的速度情况与第一次完全相同，问第二次能把钉子敲入多深？

解： 设铁锤敲打钉子前的速度为 v_0 ，敲打后两者的共同速度为 v 。

$$m_0 v_0 = (m_0 + m)v$$

$$v = \frac{m_0 v_0}{m_0 + m}$$



铁锤第一次敲打时，克服阻力做功，设钉子所受阻力大小为：

$$F_f = -kx$$

$$\because m_0 \gg m, \quad \therefore v \approx v_0$$

由动能定理，有：

$$0 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \int_0^{s_1} -kx dx = -\frac{1}{2}ks_1^2$$

设铁锤第二次敲打时能敲入的深度为 Δs ，则有

$$0 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \int_{s_1}^{s_1 + \Delta s} -kx dx = -\left[\frac{1}{2}k(s_1 + \Delta s)^2 - \frac{1}{2}ks_1^2 \right]$$

$$(s_1 + \Delta s)^2 = 2s_1^2$$

化简后

$$s_1 + \Delta s = \sqrt{2}s_1$$

第二次能敲入的深度为：

$$\Delta s = \sqrt{2}s_1 - s_1 = (\sqrt{2} - 1) \times 1 \text{ cm} = 0.41 \text{ cm}$$

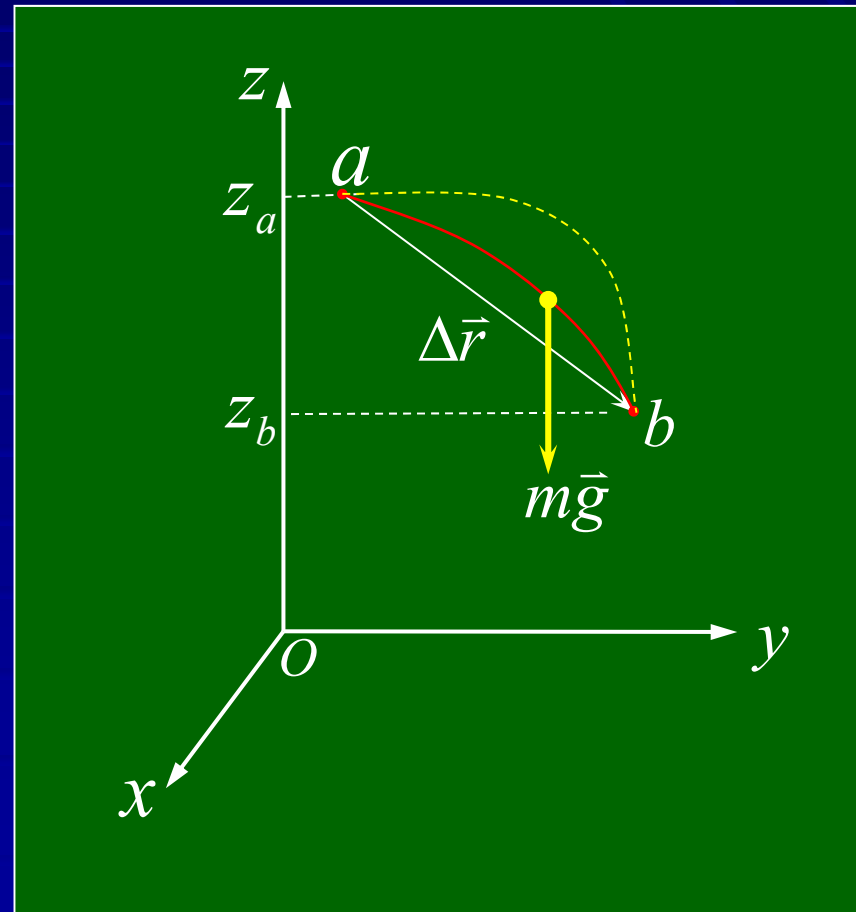
2-4-3 保守力与非保守力 势能

(1) 重力的功

初始位置 $a(x_a, y_a, z_a)$

末了位置 $b(x_b, y_b, z_b)$

$$\begin{aligned} W_{ab} &= \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{r} \\ &= \int_a^b -mg\vec{k} \cdot (dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}) \\ &= \int_a^b -mgdz = mg(z_a - z_b) \end{aligned}$$



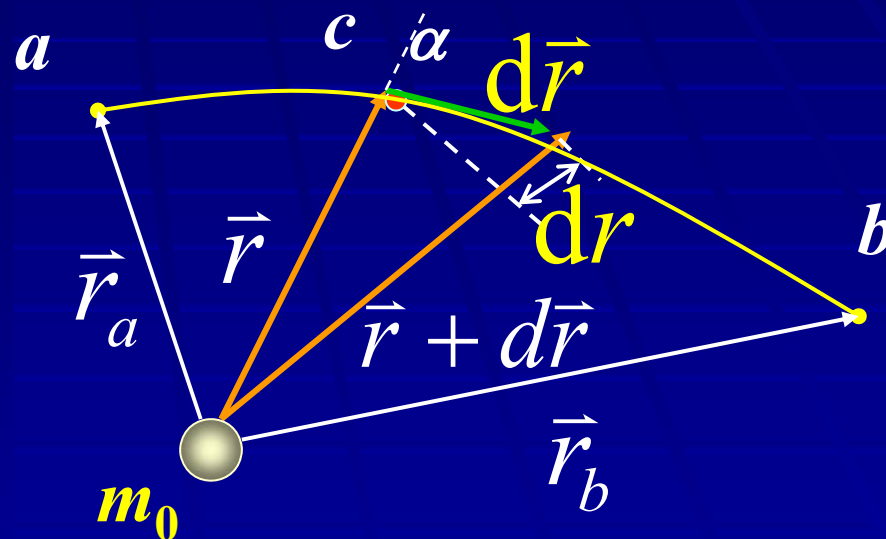
重力做功仅取决于质点的始、末位置 z_a 和 z_b ,
与质点经过的具体路径无关。

(2) 万有引力做功

设质量为 M 的质点固定, 另一质量为 m 的质点在 M 的引力场中从 a 点运动到 b 点。

$$\vec{F} = -G \frac{m_0 m}{r^2} \vec{e}_r$$

$$W = \int_{r_a}^{r_b} -G \frac{m_0 m}{r^2} \vec{e}_r \cdot d\vec{r}$$

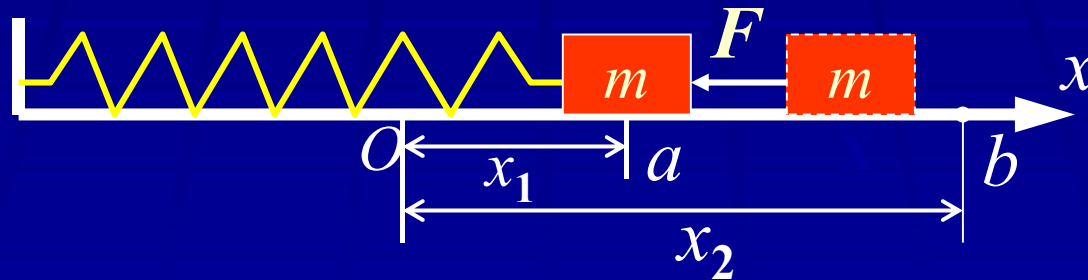


$$\vec{e}_r \cdot d\vec{r} = |d\vec{r}| \cos \alpha = dr$$

$$W = -Gm_0m \int_{r_a}^{r_b} \frac{dr}{r^2} = -Gm_0m \left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b} \right)$$

万有引力做功只与质点的始、末位置有关，而与具体路径无关。

(3) 弹性力的功



由胡克定律: $\vec{F} = -kx\vec{i}$

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{x} = \int_{x_1}^{x_2} -kx\vec{i} \cdot dx\vec{i} = -\int_{x_1}^{x_2} kx dx$$

$$W = \frac{1}{2} kx_1^2 - \frac{1}{2} kx_2^2$$

弹性力做功只与弹簧的起始和末了位置有关，而与弹性变形的过程无关。

保守力：

做功与路径无关，只与始末位置有关的力。

保守力的特点：

保守力沿任何闭合路径做功等于零。

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

证明： 设保守力沿闭合路径 $acbda$ 做功

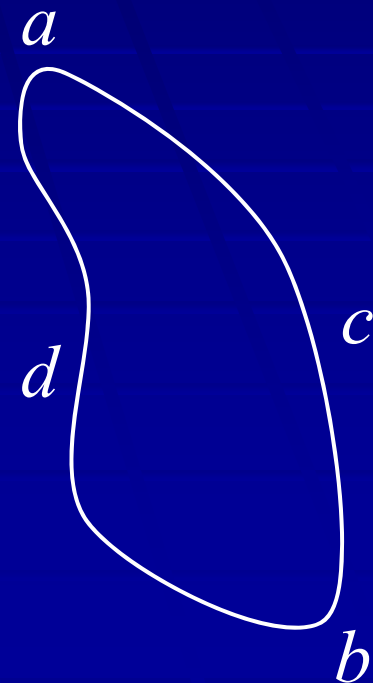
按保守力的特点： $W_{acb} = W_{adb}$

因为： $-W_{acb} = W_{bda}$

所以：

$$W = W_{acb} + W_{bda} = W_{acb} - W_{acb} = 0$$

证毕



势能

由物体的相对位置所确定的系统能量称为**势能** (E_p)

保守力做的功与势能的关系：

物体在保守力场中 a 、 b 两点的势能 E_{pa} 与 E_{pb} 之差，等于质点由 a 点移动到 b 点过程中保守力所做的功 W_{ab} 。

$$E_{pa} - E_{pb} = \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{r} = W_{ab}$$

$$W_{ab} = -(E_{pb} - E_{pa}) = -\Delta E_p$$

保守力做功在数值上等于系统势能的减少。

说明：（1）势能是一个系统的属性。

（2）势能的大小只有相对的意义，相对于势能的零点而言。

（3）势能的零点可以任意选取。

设空间 r_o 点为势能的零点，则空间任意一点 r 的势能为：

$$E_p(\vec{r}) = E_p(\vec{r}) - E_p(\vec{r}_o) = \int_{\vec{r}}^{\vec{r}_o} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

结论： 空间某点的势能 E_p 在数值上等于质点从该点移动到势能零点时保守力做的功。

重力势能:

$$E_p = mgh \quad (\text{地面 } (h = 0) \text{ 为势能零点})$$

弹性势能:

$$E_p = \frac{1}{2} kx^2 \quad (\text{弹簧自由端为势能零点})$$

引力势能:

$$E_p = -G \frac{m_0 m}{r} \quad (\text{无限远处为势能零点})$$

保守力功与势能的积分关系： $W = -\Delta E_p$

保守力功与势能的微分关系： $dW = -dE_p$

因为： $dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz$

$$dE_p = \frac{\partial E_p}{\partial x} dx + \frac{\partial E_p}{\partial y} dy + \frac{\partial E_p}{\partial z} dz$$

所以：

$$F_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x} \quad F_y = -\frac{\partial E_p}{\partial y} \quad F_z = -\frac{\partial E_p}{\partial z}$$

保守力的矢量式：

$$\vec{F} = -\left(\frac{\partial E_p}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial E_p}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial E_p}{\partial z} \vec{k} \right)$$

结论：

保守力沿各坐标方向的分量，在数值上等于系统的势能沿相应方向的空间变化率的负值，其方向指向势能降低的方向。

2-4-4 机械能守恒定律

质点系的动能定理: $W_{\text{内}} + W_{\text{外}} = E_{\text{k}2} - E_{\text{k}1}$

其中 $W_{\text{内}} = W_{\text{保内}} + W_{\text{非保内}}$

$$W_{\text{外}} + W_{\text{保内}} + W_{\text{非保内}} = E_{\text{k}2} - E_{\text{k}1}$$

$$\therefore W_{\text{非保内}} = -(E_{\text{p}2} - E_{\text{p}1})$$

$$\therefore W_{\text{外}} + W_{\text{非保内}} = (E_{\text{k}2} + E_{\text{p}2}) - (E_{\text{k}1} + E_{\text{p}1})$$

机械能

$$E = E_k + E_p$$

$$W_{\text{外}} + W_{\text{非保内}} = E_2 - E_1$$

质点系的功能原理

质点系机械能的增量等于所有外力和所有非保守内力所做功的代数和。

如果 $W_{\text{外}} = 0$, $W_{\text{非保内}} = 0$

$$E = E_k + E_p = \text{恒量}$$

机械能守恒定律

当系统只有保守内力做功时，质点系的总机械能保持不变。

注意：

(1) 机械能守恒定律只适用于惯性系，不适合于非惯性系。这是因为惯性力可能做功。

(2) 在某一惯性系中机械能守恒，但在另一惯性系中机械能不一定守恒。这是因为外力的功与参考系的选择有关。对一个参考系外力功为零，但在另一参考系中外力功也许不为零。

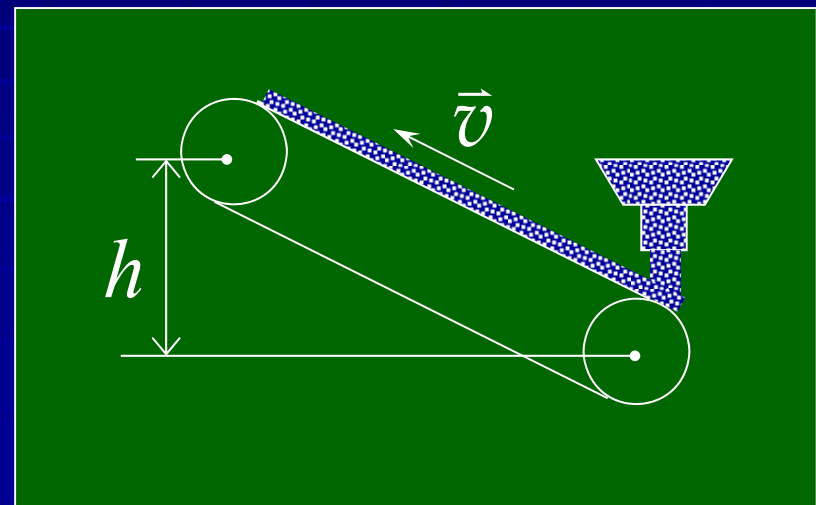
例3 传送带沿斜面向上运行速度为 $v = 1\text{ m/s}$ ，设物料无初速地落到传送带下端的质量为 $m = 50\text{ kg/s}$ ，并被输送到高度 $h = 5\text{ m}$ 处，求配置的电动机所需功率。（忽略一切由于摩擦和碰撞造成的能量损失）

解： 在 Δt 时间内，质量为 $m\Delta t$ 的物料落到皮带上，并获得速度 v 。

Δt 内系统动能的增量：

$$\sum \Delta E_{ki} = \frac{1}{2}(m\Delta t)v^2 - 0$$

重力做功： $W = -(m\Delta t)gh$



电动机对系统做的功: $P\Delta t$

由动能定理:

$$P\Delta t - (m\Delta t)gh = \frac{1}{2}(m\Delta t)v^2$$

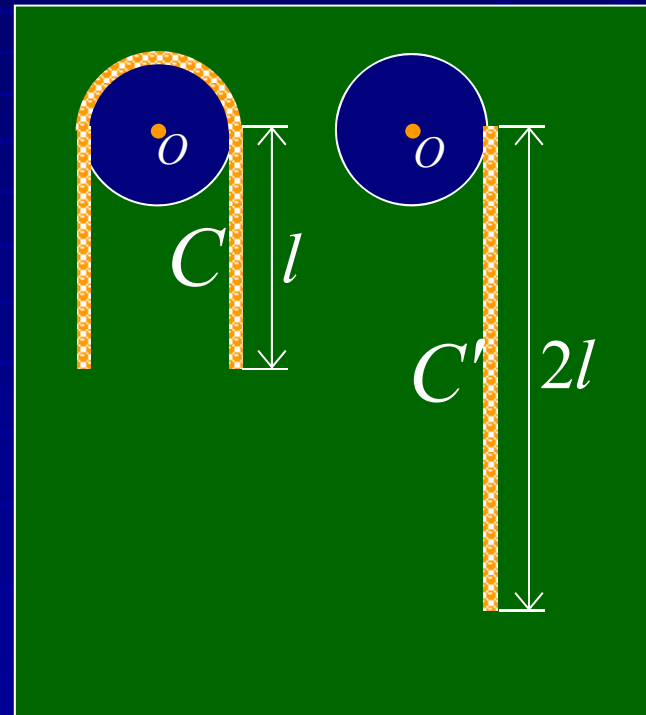
$$P = m\left(\frac{v^2}{2} + gh\right) = 50 \times \left(\frac{1^2}{2} + 9.8 \times 5\right) \text{ W} = 2475 \text{ W}$$

例4 一长度为 $2l$ 的匀质链条，平衡地悬挂在一光滑圆柱形木钉上。若从静止开始而滑动，求当链条离开木钉时的速率（木钉的直径可以忽略）

解： 设单位长度的质量为 λ
始末两态的中心分别为 C 和 C'
机械能守恒：

$$-2(\lambda l g) \frac{l}{2} = -\lambda(2l)gl + \frac{1}{2} \lambda(2l)v^2$$

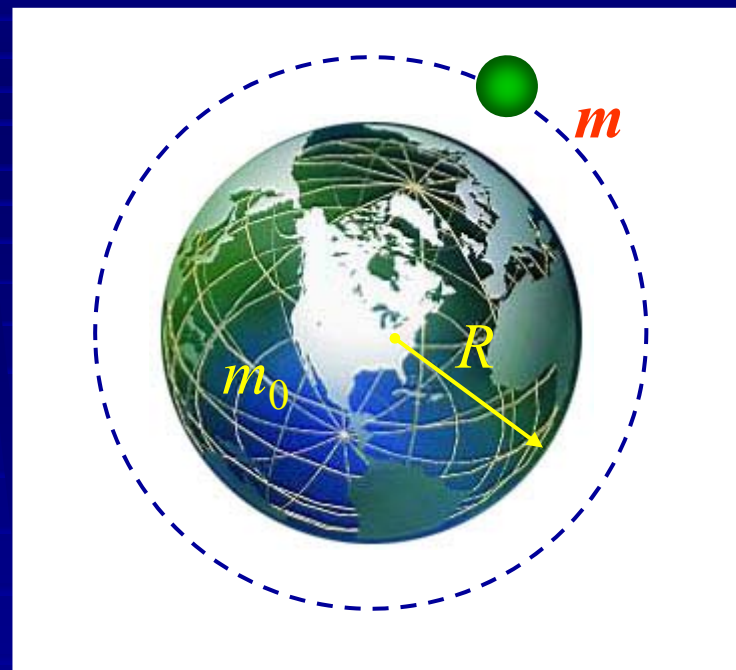
解得 $v = \sqrt{lg}$



例5 计算第一、第二宇宙速度

1. 第一宇宙速度

已知：地球半径为 R ，质量为 m_0 ，卫星质量为 m 。要使卫星在距地面 h 高度绕地球作匀速圆周运动，求其发射速度。



解： 设发射速度为 v_1 ，绕地球的运动速度为 v 。

机械能守恒：

$$\frac{1}{2}mv_1^2 - G\frac{m_0m}{R} = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{m_0m}{R+h}$$

由万有引力定律和牛顿定律：
$$G \frac{m_0 m}{(R+h)^2} = m \frac{v^2}{R+h}$$

解方程组，得：
$$v_1 = \sqrt{\frac{2Gm_0}{R} - \frac{Gm_0}{R+h}}$$

$$\because mg \approx G \frac{mm_0}{R^2} \quad \therefore \frac{Gm_0}{R} = gR$$

代入上式，得：
$$v_1 = \sqrt{gR(2 - \frac{R}{R+h})}$$

$$\because h \ll R$$

$$\therefore v_1 \approx \sqrt{gR} = 7.9 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

2. 第二宇宙速度

宇宙飞船脱离地球引力而必须具有的发射速度

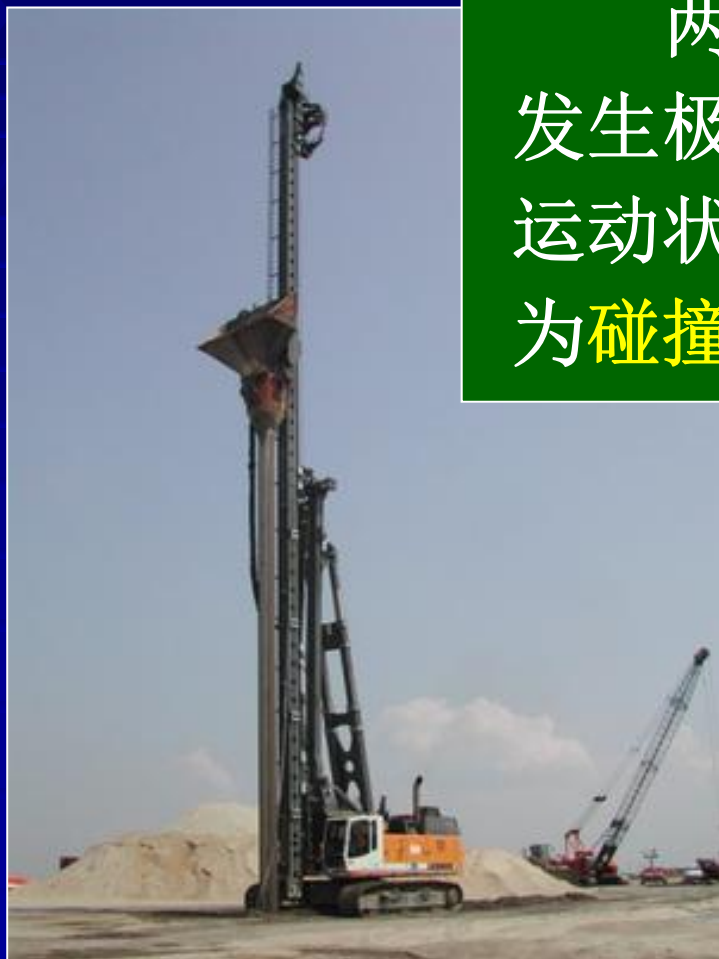
- (1) 脱离地球引力时，飞船的动能必须大于或至少等于零。
- (2) 脱离地球引力处，飞船的引力势能为零。

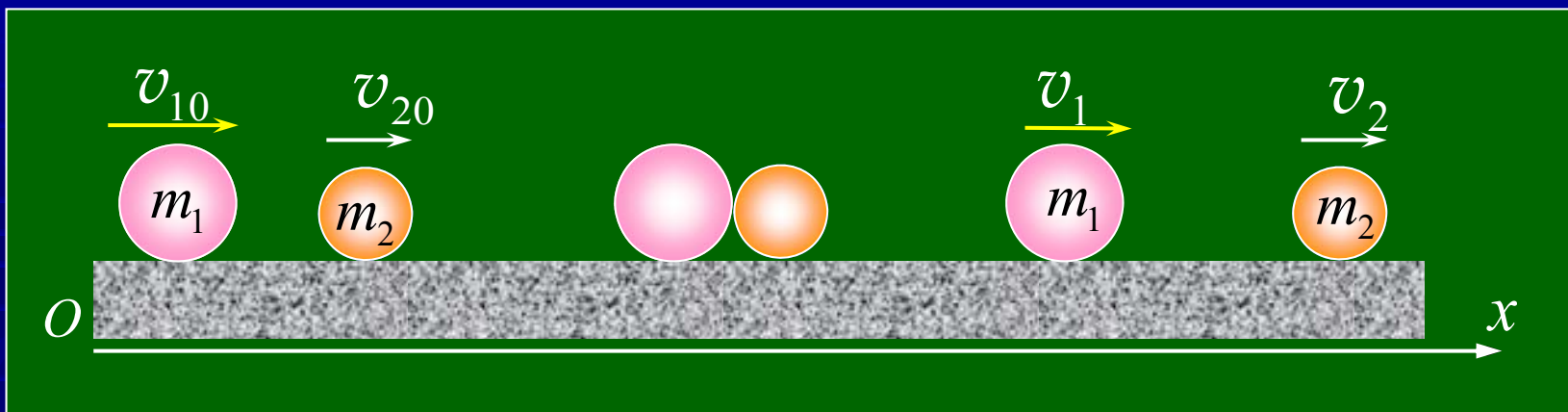
由机械能守恒定律：
$$\frac{1}{2}mv_2^2 - G\frac{m_0m}{R} = E_{k\infty} + E_{p\infty} = 0$$

解得：
$$v_2 = \sqrt{\frac{2Gm_0}{R}} = \sqrt{2gR} = \sqrt{2}v_1 = 11.2 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

2-4-5 碰撞

两个或两个以上的物体在运动中发生极其短暂的相互作用，使物体的运动状态发生急剧变化，这一过程称为**碰撞**。





动量守恒 $m_1 \vec{v}_{10} + m_2 \vec{v}_{20} = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2$

完全弹性碰撞：碰撞后物体系统的机械能没有损失。

非弹性碰撞：碰撞后物体系统的机械能有损失。

完全非弹性碰撞：碰撞后物体系统的机械能有损失，
且碰撞后碰撞物体结合成一体，以同一速度运动。

1. 完全弹性碰撞

$$\frac{1}{2}m_1v_{10}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{20}^2 = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2$$

$$m_1v_{10} + m_2v_{20} = m_1v_1 + m_2v_2$$

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= \frac{(m_1 - m_2)v_{10} + 2m_2v_{20}}{m_1 + m_2} \\ v_2 &= \frac{(m_2 - m_1)v_{20} + 2m_1v_{10}}{m_1 + m_2} \end{aligned} \right\}$$

(1) 如果 $m_1 = m_2$ ，则 $v_1 = v_{20}$ ， $v_2 = v_{10}$ ，即两物体在碰撞时速度发生了交换。

(2) 如果 $v_{20} = 0$ ，且 $m_2 \gg m_1$ ，则 $v_1 = -v_{10}$ ， $v_2 = 0$

2. 完全非弹性碰撞

由动量守恒定律

$$v = \frac{m_1 v_{10} + m_2 v_{20}}{m_1 + m_2}$$

完全非弹性碰撞中动能的损失

$$\begin{aligned}\Delta E &= \left(\frac{1}{2} m_1 v_{10}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{20}^2 \right) - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v^2 \\ &= \frac{m_1 m_2 (v_{10} - v_{20})^2}{2(m_1 + m_2)}\end{aligned}$$

3. 非弹性碰撞

牛顿的碰撞定律：在一维对心碰撞中，碰撞后两物体的分离速度 $v_2 - v_1$ 与碰撞前两物体的接近速度 $v_{10} - v_{20}$ 成正比，比值由两物体的材料性质决定。

$$e = \frac{v_2 - v_1}{v_{10} - v_{20}}$$

e 为恢复系数

$e = 0$ ，则 $v_2 = v_1$ ，为完全非弹性碰撞。

$e = 1$ ，则分离速度等于接近速度，为完全弹性碰撞。

一般非弹性碰撞： $0 < e < 1$

§ 2-5 守恒定律和对称性



2-5-1 对称性与对称操作

如果系统的状态在某种操作下保持不变，则称该系统对于这一操作具有**对称性**。

如果某一物理现象或规律在某一变换下保持不变，则称该现象或规律具有该变换所对应的**对称性**。

物理学中最常见的对称操作：

时间操作：时间平移、时间反演等；

空间操作：空间平移、旋转、镜像反射、空间反演等。

时空操作：伽利略变换、洛伦兹变换等。

1. 空间的对称性及其操作

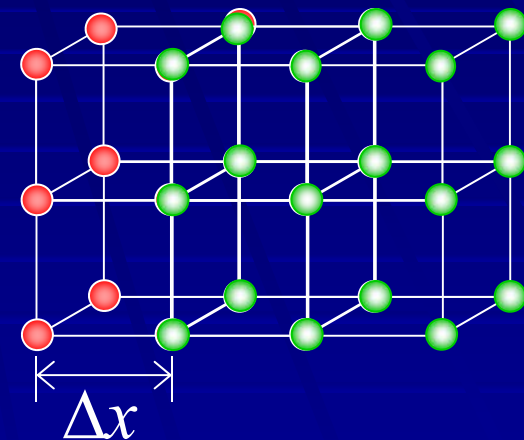
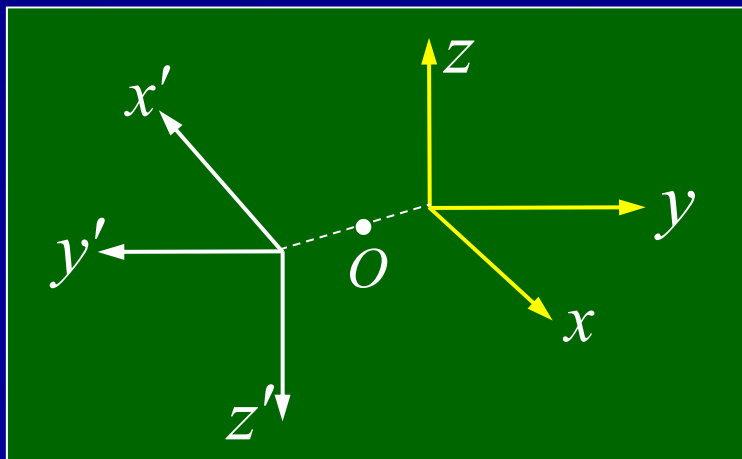
(1) 空间平移操作

$$x \rightarrow x + \Delta x, y \rightarrow y + \Delta y, z \rightarrow z + \Delta z$$

系统具有空间平移对称性。

(2) 空间反演操作

$$x \rightarrow -x, y \rightarrow -y, z \rightarrow -z$$

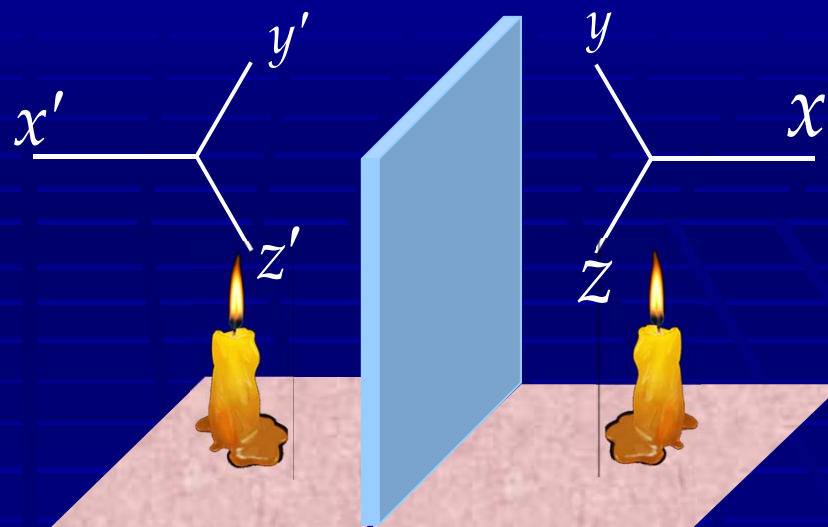


空间反演操作下
不变的系统具有
对O点的对称性。

(3) 镜像反射操作

$$x \rightarrow -x$$

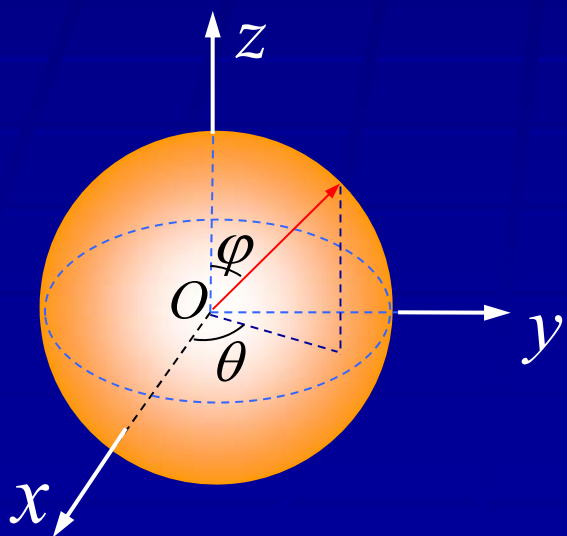
y, z 不变



(4) 空间旋转（球对称）操作

r 保持不变

$$\varphi \rightarrow \varphi + \Delta\varphi \quad \theta \rightarrow \theta + \Delta\theta$$

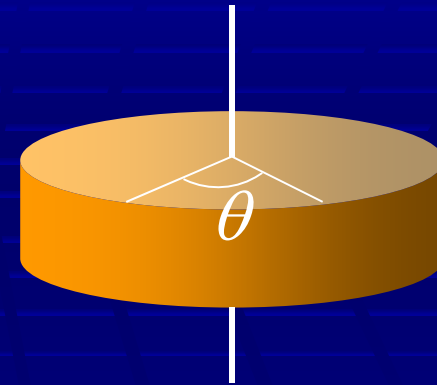


在此操作下系统称具有球对称性。

(5) 空间旋转（轴对称）操作

r , φ 保持不变

$$\theta \rightarrow \theta + \Delta\theta$$



对绕 z 轴做任意旋转都不变的系统具有轴对称性。

2. 时间的对称性及其操作

(1) 时间平移操作

$t \rightarrow t + \Delta t$, 系统不变

例如,系统作周期性变化



(2) 时间反演操作

$t \rightarrow -t$ 系统具有时间反演对称性。

3. 时空的对称性操作

物理规律对于某一变换（也是一个时空联合操作）具有不变性。

4. 对称性破缺

如果对于某个物理学系统的运动施加限制（比如，施加外力或外力矩作用等），从而导致该系统原有的某些对称性遭到破坏，物理上称这种情况为**对称性破缺**。

2-5-2 守恒定律和对称性

诺特定理：

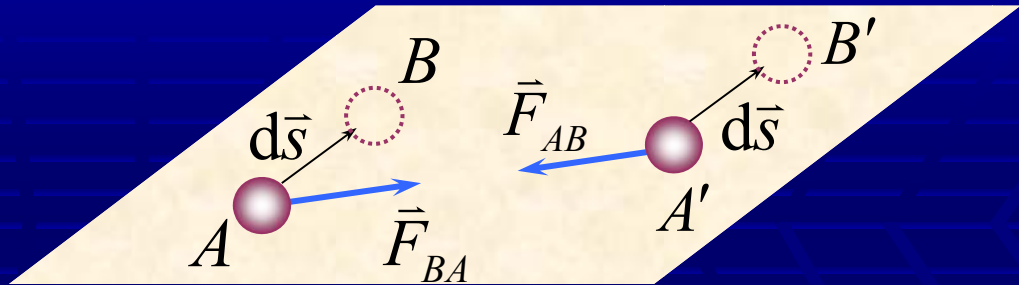
每一种对称性均对应于一个物理量的守恒律；
反之，每一种守恒律均对应于一种对称性。

1. 动量守恒与空间平移对称性

空间平移对称性反映了空间的均匀性质。

空间的均匀性是指一个给定的物理实验或现象的进展过程和实验室的位置无关。

系统势能的增加量为



$$dE_p = -\vec{F}_{AB} \cdot d\vec{s} - \vec{F}_{BA} \cdot d\vec{s} = -(\vec{F}_{AB} + \vec{F}_{BA}) \cdot d\vec{s}$$

根据空间平移的对称性，应有： $dE_p = 0$

因此 $\vec{F}_{AB} + \vec{F}_{BA} = 0$

即

$$\frac{d\vec{p}_A}{dt} + \frac{d\vec{p}_B}{dt} = \frac{d(\vec{p}_A + \vec{p}_B)}{dt} = 0$$

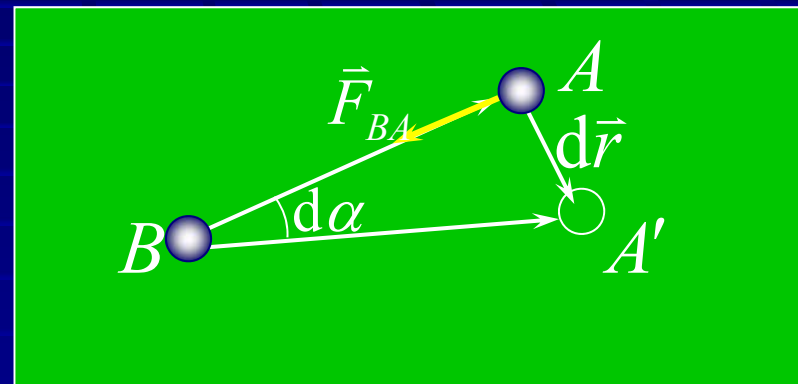
$$\vec{p}_A + \vec{p}_B = \text{恒量}$$

2. 角动量守恒与空间旋转对称性

空间的旋转对称性反映了空间的各向同性。

旋转前后系统势能的
增量为

$$dE_p = -\vec{F}_{BA} \cdot d\vec{r}$$



由空间的旋转对称性，有 $dE_p = 0$

$\therefore \vec{F}_{BA} \neq 0$, $d\vec{r}$ 为任意

$\therefore \vec{F}_{BA} \perp d\vec{r}$

$\therefore \vec{F}_{BA}$ 为有心力

角动量守恒

3. 能量守恒与时间平移对称性

时间平移对称性反映了时间的均匀性。

在保守系统中：

$$F = -\frac{dE_p}{dx}$$

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F(x) dx = -\int_{x_1}^{x_2} \frac{dE_p}{dx} dx = E_{p1} - E_{p2}$$

根据动能定理

$$W = E_{k2} - E_{k1}$$

因此 $E_{p1} + E_{k1} = E_{p2} + E_{k2}$ 机械能守恒定律