§2-2　动量守恒定律

2-2-1 动量

车辆超载容易
引发交通事故

车辆超速容易
引发交通事故

结论： 物体的运动状态不仅取决于速度，而且与物体的质量有关。

动量： 运动质点的质量与速度的乘积。

$$\boxed{\vec{p} = m\vec{v}}$$

单位：$\mathrm{kg \cdot m \cdot s^{-1}}$

由n个质点所构成的质点系的动量：

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i$$

2-2-2 动量定理

1. 质点的动量定理

冲量：作用力与作用时间的乘积。

冲量反映力对时间的累积效应。

恒力的冲量：

$$\vec{I} = \vec{F}\cdot(t_2 - t_1)$$

运动员在投掷标枪时，伸直手臂，尽可能的延长手对标枪的作用时间，以提高标枪出手时的速度。

变力的冲量： $\boxed{\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t)\cdot \mathrm{d}t}$ 单位：**N·s**

牛顿运动定律： $\vec{F} = m\vec{a}$ $\vec{F} = \dfrac{\mathrm{d}(m\vec{v})}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}$

动量定理的微分式： $\mathrm{d}\vec{p} = \vec{F}\cdot \mathrm{d}t$

如果力的作用时间从 $t_0 \to t$，质点动量从 $\vec{p}_0 \to \vec{p}$

$$\int_{\vec{p}_0}^{\vec{p}} d\vec{p} = \int_{t_0}^{t} \vec{F}\cdot dt$$

$$\vec{I}=\int_{t_0}^{t}\vec{F}\cdot dt=\vec{p}-\vec{p}_0=m\vec{v}-m\vec{v}_0$$

质点动量定理： 质点在运动过程中，所受合外力的冲量等于质点动量的增量。

说明：

（1） 冲量的方向 $\vec{I}$ 与动量增量 $\Delta\vec{p}$ 的方向一致。

（2） 动量定理中的动量和冲量都是矢量，符合矢量叠加原理。因此在计算时可采用平行四边形法则，或把动量和冲量投影在坐标轴上以分量形式进行计算。

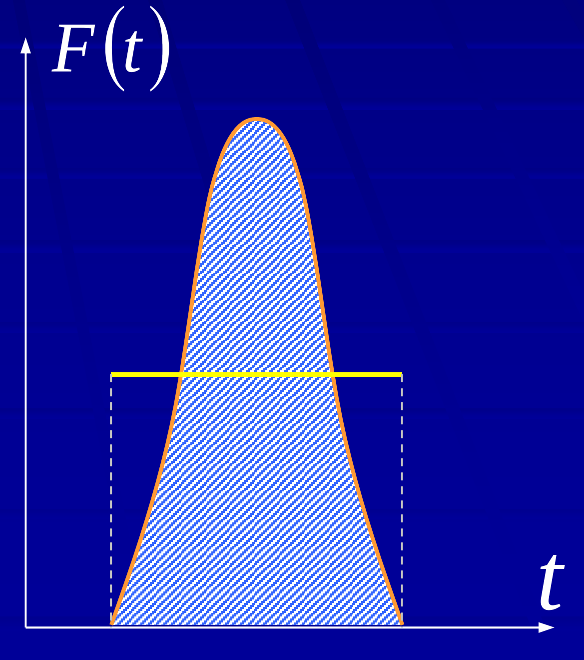
$$I_x = \int_{t_0}^{t} F_x \mathrm{d}t = mv_x - mv_{x0}$$

$$I_y = \int_{t_0}^{t} F_y \mathrm{d}t = mv_y - mv_{y0}$$

$$I_z = \int_{t_0}^{t} F_z \mathrm{d}t = mv_z - mv_{z0}$$

平均冲力： $\overline{\vec{F}} = \dfrac{1}{t - t_0} \int_{t_0}^{t} \vec{F} \cdot \mathrm{d}t$

$$\vec{I} = \overline{\vec{F}} \cdot \Delta t$$



结论：物体动量变化一定的情况下，作用时间越长，物体受到的平均冲力越小；反之则越大。

海绵垫子可以延长运动员下落时与其接触的时间，这样就减小了地面对人的冲击力。

2．质点系的动量定理

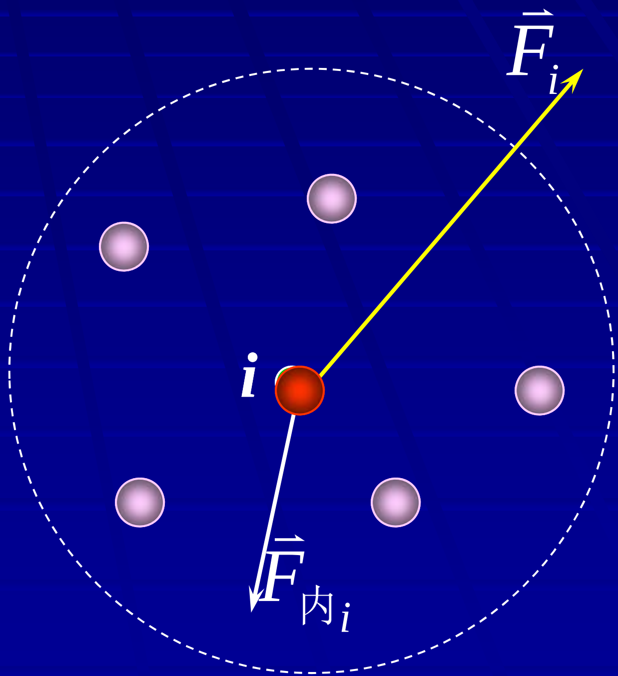
设 有n个质点构成一个系统

第i个质点： 质量 m_i

内力 $\vec{F}_{内i}$ 外力 $\vec{F}_i$

初速度 $\vec{v}_{i0}$

末速度 $\vec{v}_i$

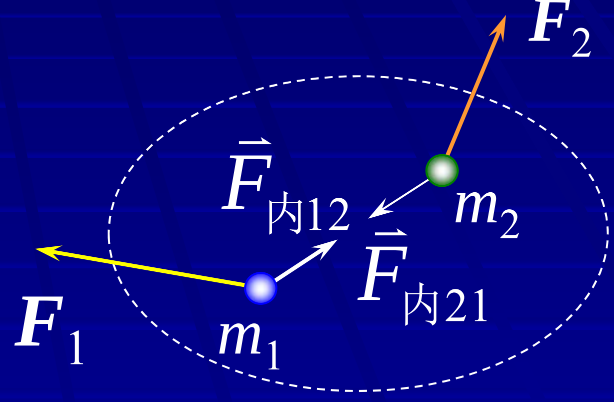


由质点动量定理：

$$\int_{t_0}^{t}\left(\vec{F}_i+\vec{F}_{内i}\right)\mathrm{d}t=m_i\vec{v}_i-m_i\vec{v}_{i0}$$

$$\int_{t_0}^{t}\left(\sum \vec{F}_i + \sum \vec{F}_{内i}\right)\mathrm{d}t = \sum m_i\vec{v}_i - \sum m_i\vec{v}_{i0}$$

其中： $\sum \vec{F}_{内i} = 0$



系统总末动量： $\vec{p} = \sum m_i\vec{v}_i$

系统总初动量： $\vec{p}_0 = \sum m_i\vec{v}_{i0}$

合外力的冲量： $\int_{t_0}^{t}\sum \vec{F}_i\mathrm{d}t$

$$\boxed{\int_{t_0}^{t} \sum \vec{F}_i \mathrm{d}t = \vec{p} - \vec{p}_0 = \Delta \vec{p}}$$

质点系的动量定理：

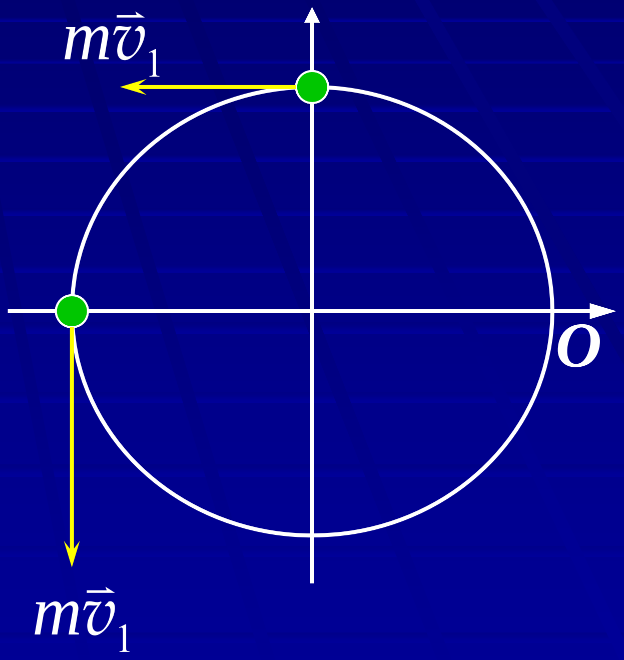
质点系统所受合外力的冲量等于系统总动量的增量。

微分式：

$$\boxed{\sum \vec{F}_i = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}}$$

注意：系统的内力不能改变整个系统的总动量。

例1 质量$m=1\text{kg}$的质点从O点开始沿半径$R=2\text{m}$的圆周运动。以O点为自然坐标原点。已知质点的运动方程为$s=0.5\pi t^2$。试求从 $t_1=\sqrt{2}\,\text{s}$到 $t_2=2\,\text{s}$这段时间内质点所受合外力的冲量。



解： $s_1=\dfrac{1}{2}\pi\sqrt{2}^2=\pi$ $\quad\theta_1=\dfrac{s_1}{R}=\dfrac{\pi}{2}$

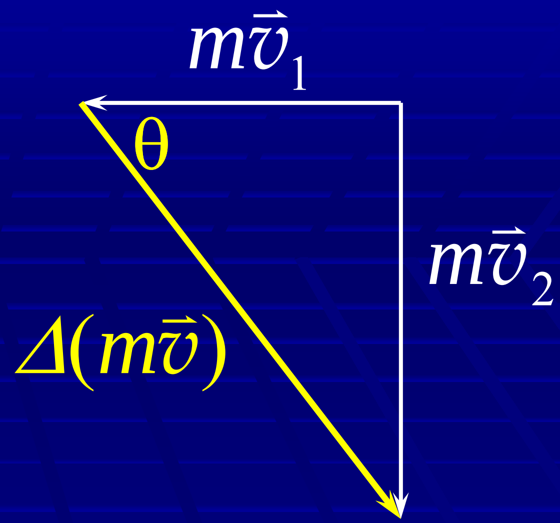
$$s_2=\frac{1}{2}\pi 2^2=2\pi \qquad \theta_2=\frac{s_2}{R}=\pi$$

$$v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\pi t$$

$$v_1=\sqrt{2}\pi\ \mathrm{m\cdot s^{-1}} \qquad v_2=2\pi\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

$$mv_1 = \sqrt{2}\pi \quad \mathrm{kg\cdot m\cdot s^{-1}}$$

$$mv_2 = 2\pi \quad \mathrm{kg\cdot m\cdot s^{-1}}$$



$$\vec{I} = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1 = \Delta(m\vec{v})$$

$$|\Delta m\vec{v}| = \sqrt{(mv_1)^2 + (mv_2)^2} = \sqrt{2\pi^2 + 4\pi^2} = \sqrt{6}\pi \ \mathrm{kg\cdot m\cdot s^{-1}}$$

$$|\vec{I}| = \sqrt{6}\pi = 7.69 \ \mathrm{kg\cdot m\cdot s^{-1}}$$

$$\tan\theta = \frac{mv_2}{mv_1} = \frac{2}{\sqrt{2}} \qquad \theta = 54°44'$$

例5 一颗子弹在枪筒里前进时所受的合力大小为$F=400-4\times10^5 t/3$，子弹从枪口射出时的速率为300 m/s。设子弹离开枪口处合力刚好为零。求：（1）子弹走完枪筒全长所用的时间t。（2）子弹在枪筒中所受力的冲量I。（3）子弹的质量。

解：（1）$F=400-\dfrac{4\times10^5}{3}t=0 \quad t=\dfrac{3\times400}{4\times10^5}=0.003\,\mathrm{s}$

（2）

$$I=\int F\mathrm{d}t=\int_0^{0.003}\left(400-\frac{4\times10^5}{3}t\right)\mathrm{d}t=400t-\frac{4\times10^5t^2}{2\times3}\bigg|_0^{0.003}=0.6\,\mathrm{N\cdot s}$$

（3）$I=mv-0 \quad m=\dfrac{I}{v}=\dfrac{0.6}{300}\mathrm{kg}=0.002\,\mathrm{kg}=2\,\mathrm{g}$

2-2-3 动量守恒定律

质点系的动量定理：$$\int_{t_0}^{t} \sum \vec{F}_i \mathrm{d}t = \vec{p} - \vec{p}_0$$

当 $\sum \vec{F}_i = 0$ 时，有 $\vec{p} = \vec{p}_0$

动量守恒定律：

系统所受合外力为零时，系统的总动量保持不变。

$$\boxed{\vec{p} = \sum m_i \vec{v}_i = \text{常矢量}}$$

条件：$\sum \vec{F}_i = 0$

说明:（1）系统的总动量守恒并不意味着系统内各个质点的动量不变，而是指系统动量总和不变。

（2）当外力作用远小于内力作用时，可近似认为系统的总动量守恒。（如：碰撞、打击等）

动量守恒的分量式:

$$p_x = \sum m_i v_{ix} = \text{常量}$$

$$p_y = \sum m_i v_{iy} = \text{常量}$$

$$p_z = \sum m_i v_{iz} = \text{常量}$$

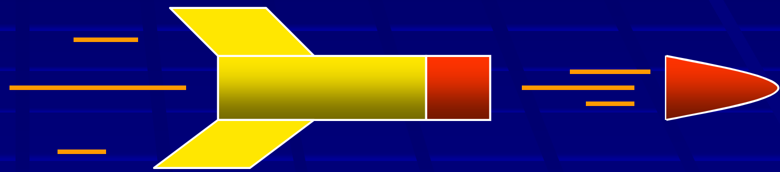
动量守恒定律是物理学中最重要、最普遍的规律之一，它不仅适合宏观物体，同样也适合微观物体。

例3　火箭以2.5×10^3m/s的速率水平飞行，由控制器使火箭分离。头部仓m_1=100kg，相对于火箭的平均速率为10^3 m/s 。火箭容器仓质量m_2=200 kg。求容器仓和头部仓相对于地面的速率。

解：

$v = 2.5\times10^3$ m/s

$v_r = 10^3$ m/s



设：头部仓速率为v_1，容器仓速率为v_2

$$v_1 = v_r + v_2$$

$$(m_1+m_2)v = m_1v_1 + m_2v_2 = m_1(v_2+v_r) + m_2v_2$$

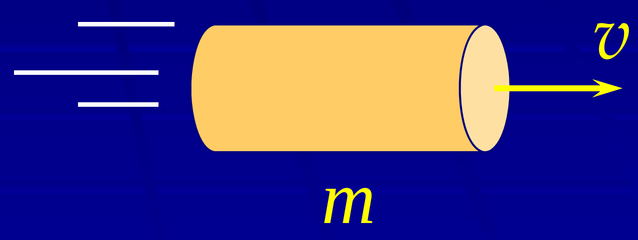
$$v_2 = v - \frac{m_1 v_r}{m_1+m_2} = 2.17\times10^3\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

$$v_1 = v_2 + v_r = 3.17\times10^3\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

例4 宇宙飞船在宇宙尘埃中飞行，尘埃密度为ρ。如果质量为m_0的飞船以初速v_0穿过尘埃，由于尘埃粘在飞船上，致使飞船速度发生变化。求飞船的速度与其在尘埃中飞行的时间的关系。（设飞船为横截面面积为S的圆柱体）

解： 某时刻飞船速度：v，质量：m

动量守恒： $m_0 v_0 = mv$



质量增量： $\mathrm{d}m = \rho S v \mathrm{d}t$

$$m = \frac{m_0 v_0}{v} \qquad \mathrm{d}m = -\frac{m_0 v_0}{v^2}\mathrm{d}v = \rho S v \mathrm{d}t$$

$$-\frac{\mathrm{d}v}{v^3}=\frac{\rho S}{m_0 v_0}\mathrm{d}t \qquad -\int_{v_o}^{v}\frac{\mathrm{d}v}{v^3}=\frac{\rho S}{m_0 v_0}\int_0^t \mathrm{d}t$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{v^2}-\frac{1}{v_0^2}\right)=\frac{\rho S}{m_0 v_0}t$$

$$v=\sqrt{\frac{m_0}{2\rho S v_0 t+m_0}}\,v_0$$

2-2-4　火箭飞行原理

设：

t 时刻：火箭的质量为m，

速度为v；

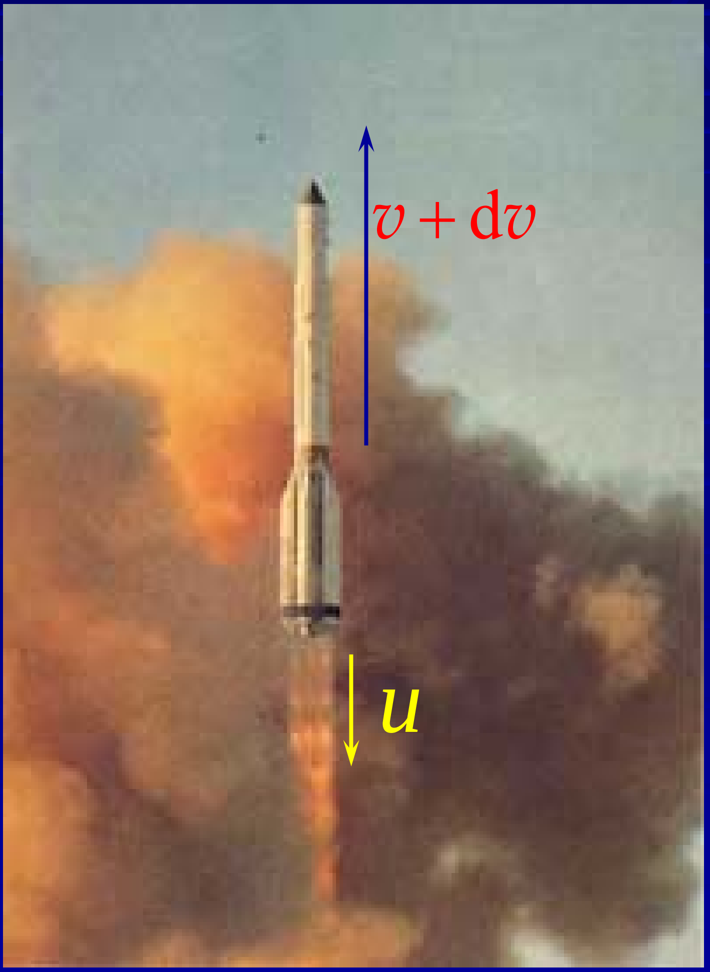
t +dt 时刻：

火箭的质量为m+dm

速度为v + dv

喷出气体的质量为-dm

相对于火箭的速度为u_r



$$mv=(m+\mathrm{d}m)(v+\mathrm{d}v)-\mathrm{d}m(v+\mathrm{d}v-u_{\mathrm{r}})$$

略去二阶无穷小量 $\mathrm{d}m\mathrm{d}v$

$$\mathrm{d}v=-u_{\mathrm{r}}\frac{\mathrm{d}m}{m}$$

设：初始 $v_0=0$　　火箭总质量 $\boldsymbol{m_0}$ ，

壳体本身的质量为$\boldsymbol{m_1}$ ，燃料耗尽时火箭的速度为 v

$$\int_0^v \mathrm{d}v=-u_{\mathrm{r}}\int_{m_0}^{m_1}\frac{\mathrm{d}m}{m}$$

$$v = u_r \ln \frac{m_0}{m_1}$$ m_0/m_1 为质量比

多级火箭：

设各级火箭的质量比分别为N_1，N_2，N_3，…

一级火箭速率： $v_1 = u_r \ln N_1$

二级火箭速率： $v_2 = v_1 + u_r \ln N_2$

三级火箭速率： $v_3 = v_2 + u_r \ln N_3$

三级火箭所能达到的速率为：

$$v_3 = u_{\mathrm{r}} (\ln N_1 + \ln N_2 + \ln N_3) = u_{\mathrm{r}} \ln(N_1 \cdot N_2 \cdot N_3)$$

设，$\boldsymbol{N_1 = N_2 = N_3 = 3}$ $\qquad u_{\mathrm{r}} = 2.5 \times 10^3 \,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$

得 $\quad v_3 = 2.5 \times 10^3 \,\mathrm{m \cdot s^{-1}} \times 3 \times \ln 3 = 8.2 \times 10^3 \,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$

这个速率已超过了第一宇宙速度的大小。

2-2-5　质心与质心运动定理

1. 质心

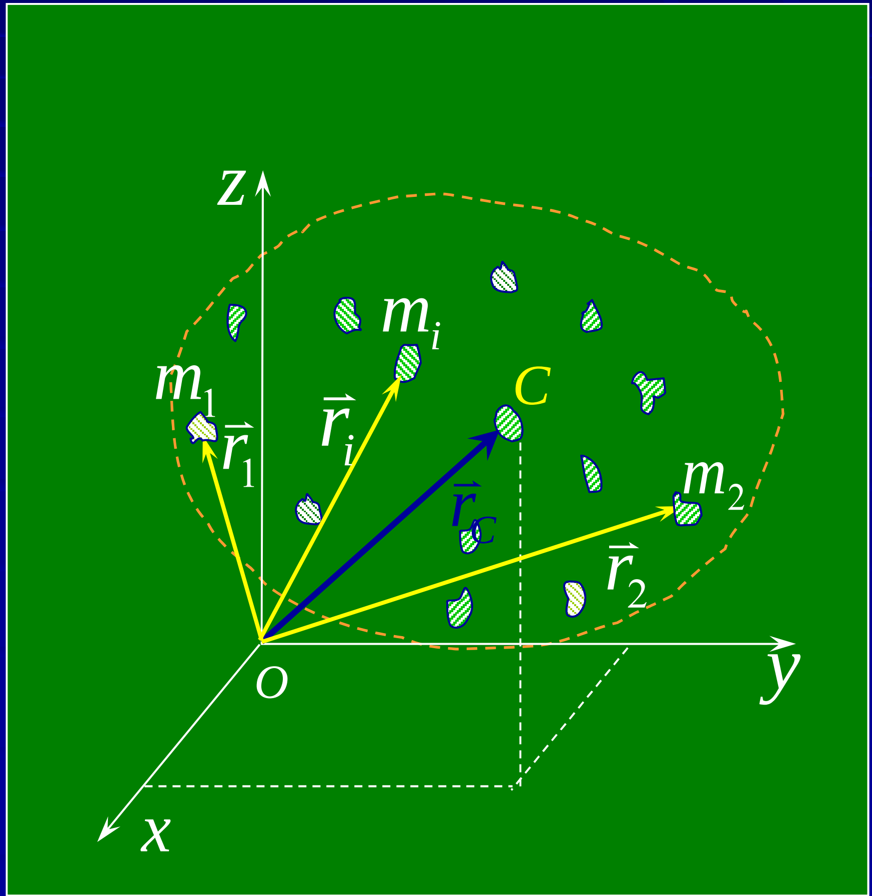
设由n个质点构成一质点系

质量：m_1，　m_2，　…，　m_n

位矢：$\vec{r}_1$，$\vec{r}_2$，　…，$\vec{r}_n$

$$\vec{r}_C = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \cdots + m_n\vec{r}_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n}$$

$$= \frac{\sum m_i\vec{r}_i}{m_{总}}$$



质心位置的分量式：

$$x_C = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i} \qquad y_C = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i} \qquad z_C = \frac{\sum m_i z_i}{\sum m_i}$$

连续体的质心位置：

$$x_C = \frac{\int x\mathrm{d}m}{\int \mathrm{d}m} \qquad y_C = \frac{\int y\mathrm{d}m}{\int \mathrm{d}m} \qquad z_C = \frac{\int z\mathrm{d}m}{\int \mathrm{d}m}$$

说明： 对于密度均匀，形状对称的物体，其质心都在它的几何中心。

2．质心运动定理

质心位置公式： $$M\vec{r}_C=\sum m_i\vec{r}_i$$

$$M\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{r}_C}{\mathrm{d}t}=\sum m_i\frac{\mathrm{d}\vec{r}_i}{\mathrm{d}t}\qquad M\vec{v}_C=\sum m_i\vec{v}_i$$

结论： 质点系的总动量等于总质量与其质心运动速度的乘积。

由质点系动量定理的微分式可得：

$$\sum\vec{F}_i=\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum m_i\vec{v}_i\right)=\sum m_i\frac{\mathrm{d}\vec{v}_i}{\mathrm{d}t}=M\frac{\mathrm{d}\vec{v}_C}{\mathrm{d}t}$$

$$\sum \vec{F}_i = M\vec{a}_C$$

质心运动定理：

作用于质点系上的合外力等于质点系的总质量与质心加速度的乘积。

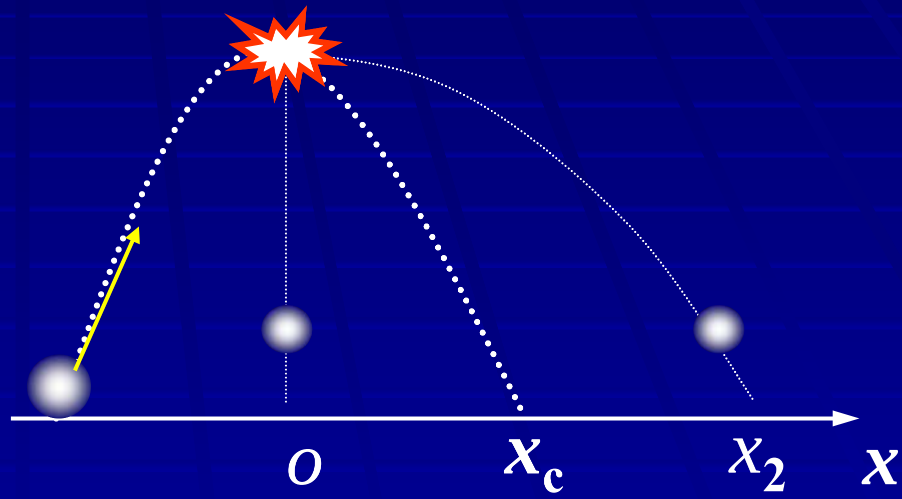
质心的两个重要性质：

（1） 系统所受合外力为零时，质心的速度为一恒矢量，内力既不能改变质点系的总动量, 也就不能改变质心的运动状态 。

（2） 系统在外力作用下，质心的加速度等于外力的矢量和除以系统的总质量。

例3　有质量为2m的弹丸，从地面斜抛出去，它的落地点为x_C。如果它在飞行到最高点处爆炸成质量相等的两碎片。其中一碎片铅直自由下落，另一碎片水平抛出，它们同时落地。问第二块碎片落在何处。

解：在爆炸的前后，质心始终只受重力的作用，因此，质心的轨迹为一抛物线，它的落地点为x_c。



$$x_C = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

$$\because \quad m_1 = m_2 = m \quad , \quad x_1 = 0$$

$$\therefore \quad x_C = \frac{m x_2}{2m}$$

$$x_2 = 2x_C$$

§2-3 角动量守恒定律

2-3-1 质点的角动量

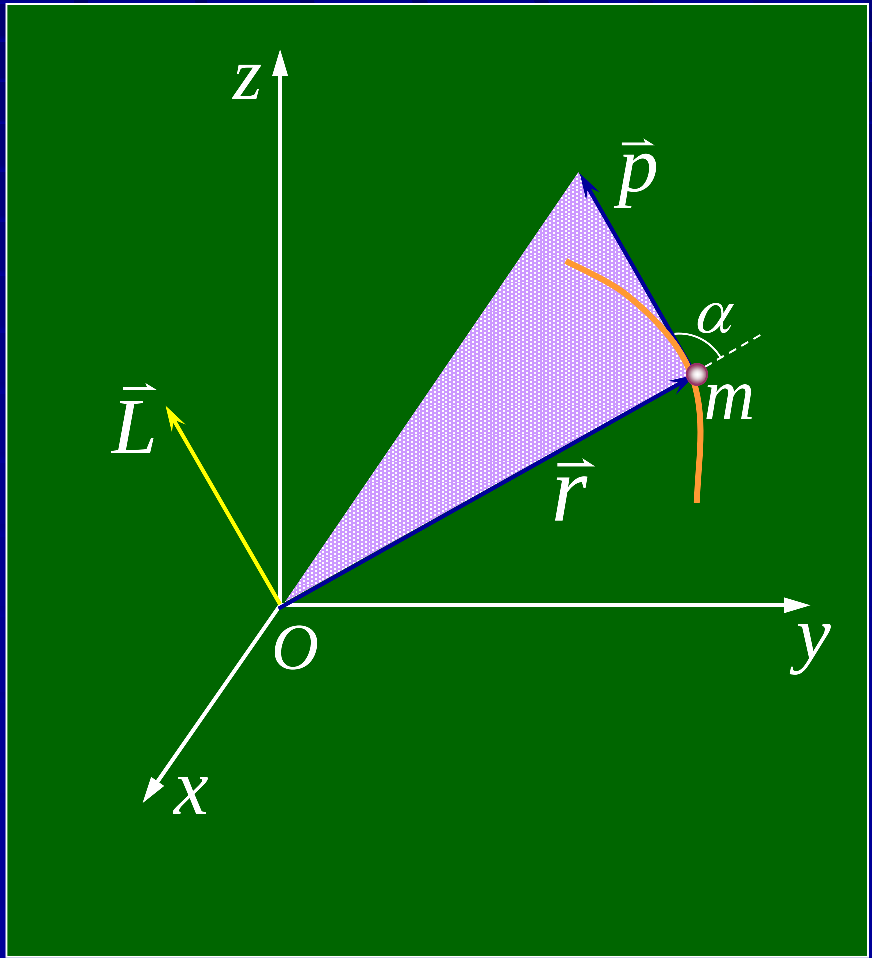
设：t时刻质点的位矢 $\vec{r}$

质点的动量 $m\vec{v}$

运动质点相对于参考原点O的**角动量**定义为：

$$\boxed{\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}=\vec{r}\times m\vec{v}}$$

单位：$kg\cdot m^2\cdot s^{-1}$

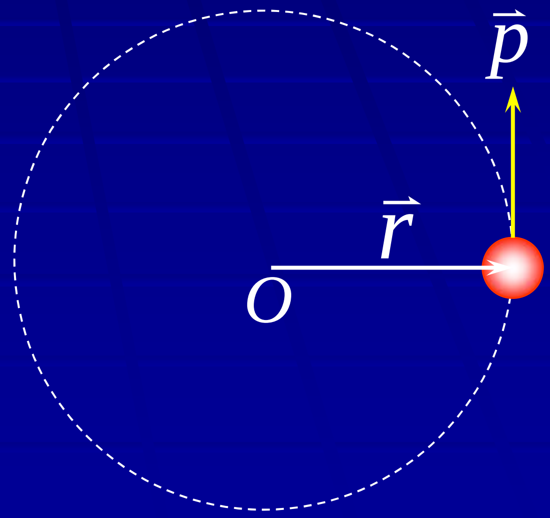


角动量大小： $L = rp\sin\alpha = mrv\sin\alpha$

角动量的方向： 位矢 $\vec{r}$ 和动量 $m\vec{v}$ 的矢积方向

如果质点绕参考点*O* 做圆周运动

$$L = r\,p = mvr$$



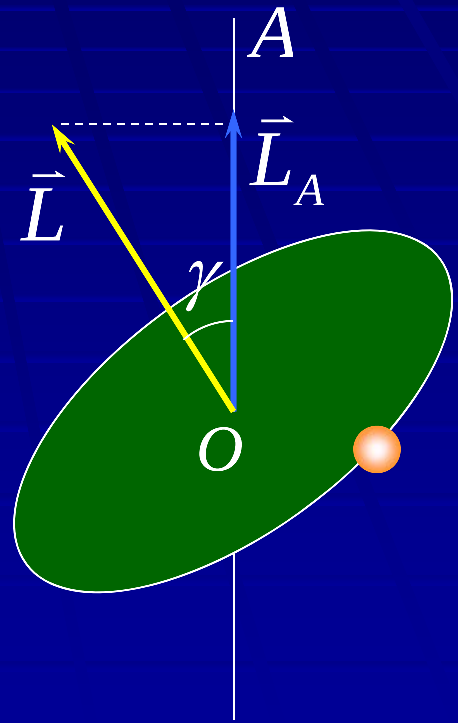
注意：

角动量与所取的惯性系有关；

角动量与参考点*O*的位置有关。

质点对参考点的角动量在通过点的任意轴线上的投影，称为质点对轴线的角动量。

$$L_A = L\cos\gamma$$



质点系的角动量 $\vec{L}$

设各质点对O点的位矢分别为

$$\vec{r}_1, \vec{r}_2, \cdots, \vec{r}_n$$

动量分别为 $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \cdots, \vec{p}_n$

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{n} \vec{L}_i = \sum_{i=1}^{n} (\vec{r}_i \times \vec{p}_i)$$

2-3-2 力矩

1. 力对参考点的力矩

质点的角动量 $\vec{L}$ 随时间的变化率为

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}(\vec{r}\times\vec{p})}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\times\vec{p}+\vec{r}\times\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}$$

式中 $\dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\times\vec{p}=\vec{v}\times\vec{p}=0$ $\qquad$ $\dfrac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}=\vec{F}$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}=\vec{r}\times\vec{F}$$

质点角动量的改变不仅与所受的作用力 $\vec{F}$ 有关，而且与参考点O到质点的位矢 $\vec{r}$ 有关。

定义： 外力 $\vec{F}$ 对参考点O的力矩：

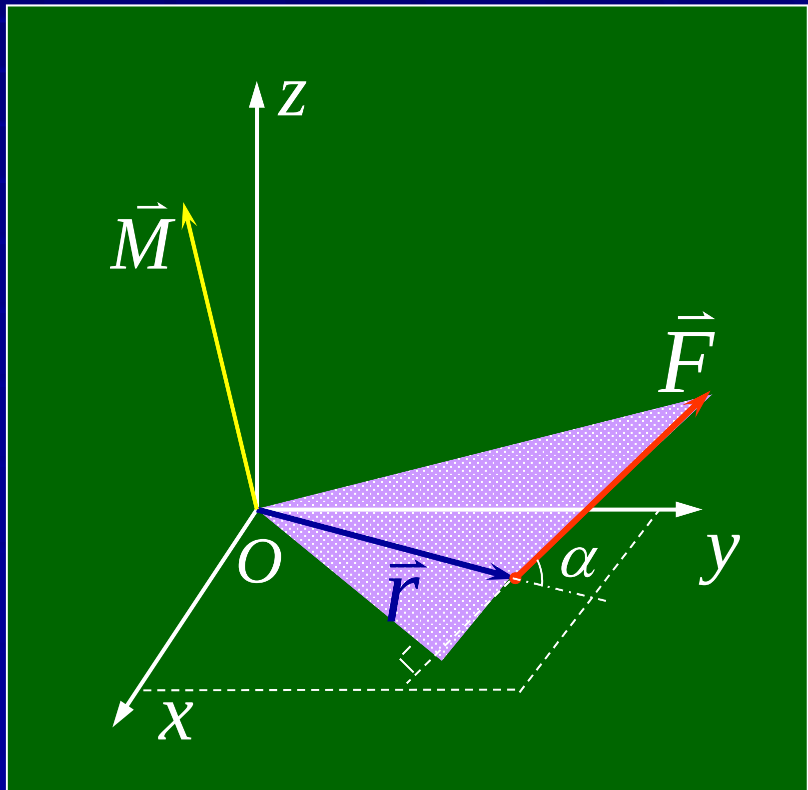
$$\boxed{\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F}}$$

单位：$\mathrm{N \cdot m}$

力矩的大小：

$$\boxed{M_O = rF\sin\alpha}$$

力矩的方向由右手螺旋关系确定，垂直于 $\vec{r}$ 和 $\vec{F}$ 确定的平面。

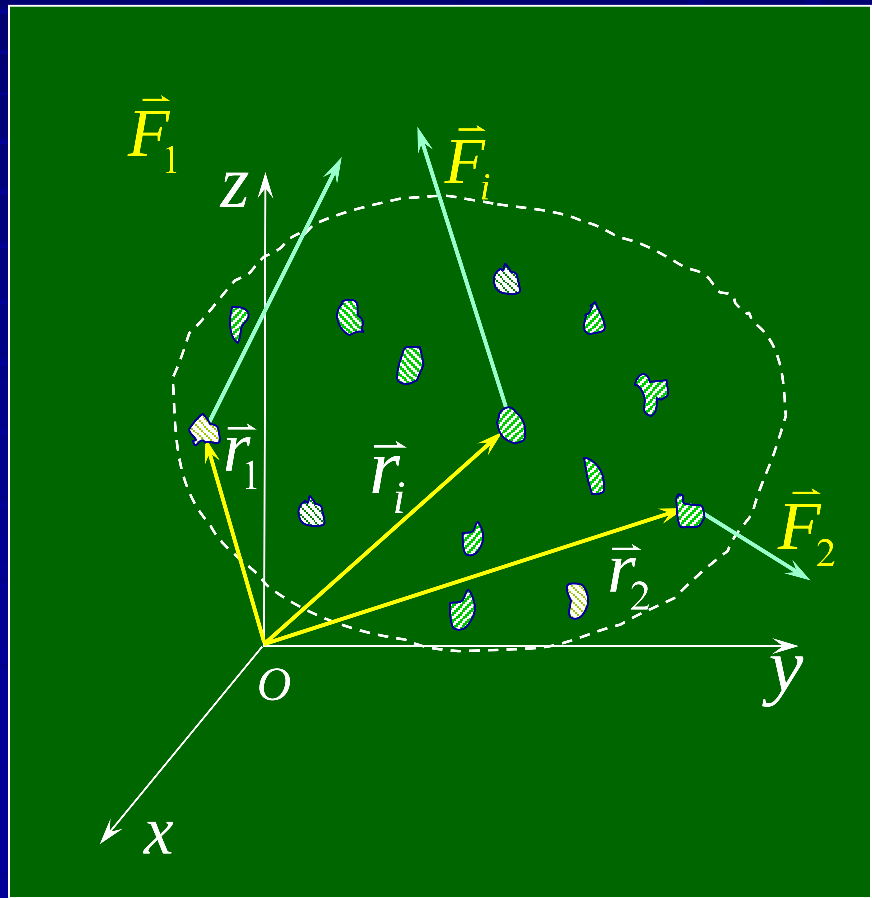


设作用于质点系的作用力分别为： $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \cdots, \vec{F}_n$

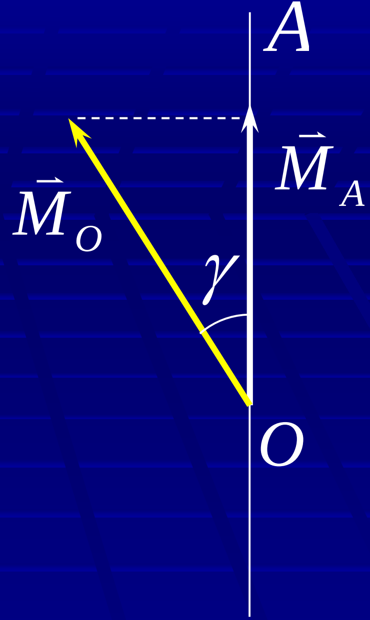
作用点相对于参考点**O**的位矢分别为： $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \cdots, \vec{r}_n$

相对于参考点**O**的合力矩为：

$$\vec{M}_O = \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i$$



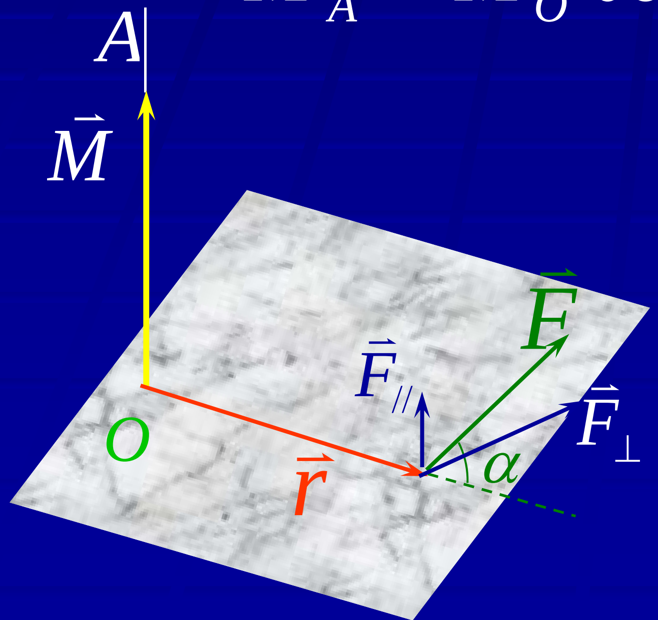
2．力对轴的矩



力 $\vec{F}$ 对轴的力矩：

力 $\vec{F}$ 对点的力矩 $\vec{M}_O$ 在过点的任一轴线上的投影。

$$M_A = M_O \cos\gamma$$



$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}_{//} + \vec{r} \times \vec{F}_{\perp}$$

力 $\vec{F}$ 对轴OA的力矩：

$$\boxed{\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}_{\perp}}$$

2-3-3 角动量定理 角动量守恒定律

$$\vec{M}_O = \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}$$

质点的角动量定理：

质点对某一参考点的角动量随时间的变化率等于质点所受的合外力对同一参考点的力矩。

角动量定理的积分式：

$$\boxed{\int_{t_1}^{t_2} \vec{M}_O \mathrm{d}t = \vec{L}_2 - \vec{L}_1}$$

$\int_{t_1}^{t_2} \vec{M}_O \mathrm{d}t$ 称为“冲量矩”

质点系的角动量：$\vec{L}=\sum_{i=1}^{n}\vec{L}_i=\sum_{i=1}^{n}(\vec{r}_i\times\vec{p}_i)$

两边对时间求导：$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}=\sum\left(\frac{\mathrm{d}\vec{r}_i}{\mathrm{d}t}\times\vec{p}_i+\vec{r}_i\times\frac{\mathrm{d}\vec{p}_i}{\mathrm{d}t}\right)$$

上式中 $\frac{\mathrm{d}\vec{r}_i}{\mathrm{d}t}\times\vec{p}_i=0$ $\qquad \vec{r}_i\times\frac{\mathrm{d}\vec{p}_i}{\mathrm{d}t}=\vec{r}_i\times\left(\vec{F}_i+\vec{f}_i\right)$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}=\sum\vec{r}_i\times\vec{F}_i+\sum\vec{r}_i\times\vec{F}_{内i}$$

上式中 $\sum\vec{r}_i\times\vec{F}_{内i}=0$ 合内力矩为零

$$\vec{M} = \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}$$

质点系角动量定理：

质点系对某一参考点的角动量随时间的变化率等于系统所受各个外力对同一参考点力矩之矢量和。

质点系对z 轴的角动量定理：

$$\boxed{M_z = \frac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t}}$$

质点系角动量定理的积分式：

$$\int_{t_1}^{t_2}\vec{M}\mathrm{d}t=\vec{L}_2-\vec{L}_1$$

作用于质点系的冲量矩等于质点系在作用时间内的角动量的增量 。

如果 $\vec{M}=0$ 则 $\vec{L}=$恒矢量

质点或质点系的角动量守恒定律：

当系统所受外力对某参考点的力矩之矢量和始终为零时，质点系对该点的角动量保持不变。

质点系对z轴的角动量守恒定律：

系统所受外力对z 轴力矩的代数和等于零，则质点系对该轴的角动量守恒。

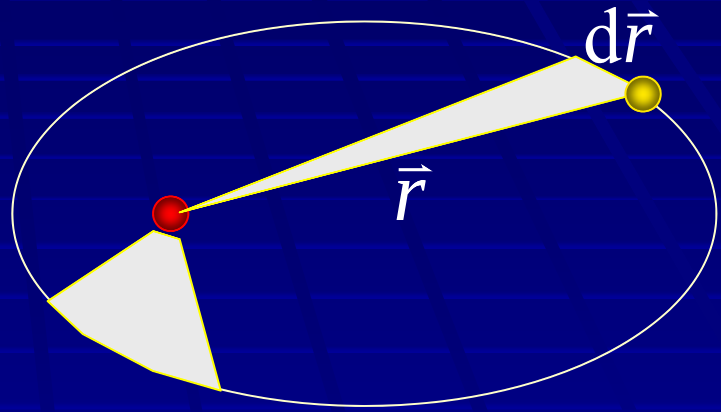
$$L_z = \text{恒量} \qquad \left(M_z = 0\right)$$

角动量守恒定律是自然界的一条普遍定律，它有着广泛的应用。

证明开普勒第二定律：行星和太阳之间的连线在相等时间内扫过的椭圆面积相等 。

证：

$$\mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{2}\vec{r} \times \mathrm{d}\vec{r}$$



$$\frac{\mathrm{d}\vec{S}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}\vec{r} \times \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}\vec{r} \times \vec{v}$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{S}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2m}\vec{r} \times m\vec{v} = \frac{1}{2m}\vec{L}$$ 有心力作用下角动量守恒

$\frac{\mathrm{d}\vec{S}}{\mathrm{d}t} =$ 恒矢量

证毕