



# 厦门大学《微积分 I-1》课程期末试卷

试卷类型：(理工类 A 卷) 考试日期 2021.01.05

一、求下列的不定积分（每小题 6 分，共 18 分）：

1.  $\int \frac{x^2}{1-x^6} dx;$

2.  $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} dx;$

二、求下列的定积分（每小题 7 分，共 14 分）：

1.  $\int_{-2}^2 \frac{x+1}{\sqrt{4x^2+9}} dx;$

2.  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin^2 x dx .$

三、（8 分）求反常积分  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt[3]{x-1}} dx$ 。

四、（8 分）设函数  $y = y(x)$  由方程  $\int_1^{y^3} e^{-t^2} dt + \int_x^0 \cos^6(x-t) dt = 0$  所确定，求  $\frac{dy}{dx} \big|_{x=0}$ 。

五、（12 分）已知标准正态分布密度函数为  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ ，

(1) 求该函数的单调区间、极值、最值；(2) 判定该函数图形的凹凸性，并求其拐点。

六、（8 分）求星形线  $r = a \cos(3\theta)$  的全长  $s$ 。

七、(8 分) 求心形线  $\rho=1+\cos\theta$  所围成的平面图形与圆  $\rho=1$  所围成平面图形之间重叠部分的面积  $A$ 。

八、(8 分) 求由圆  $x^2 + (y-3)^2 = 4$  所围成的平面图形绕  $y$  轴一周所形成的旋转体的体积  $V$ 。

九、(8 分) 设函数  $f(x)$ 、 $g(x)$  在区间  $[a, b]$  上连续, 证明 Cauchy-Schwartz 不等式:

$$\left(\int_a^b f(x) \cdot g(x) dx\right)^2 \leq \int_a^b f^2(x) dx \cdot \int_a^b g^2(x) dx。$$

十、(8 分) 已知对于任意的  $t > 0$ , 反常积分  $\int_0^{+\infty} e^{-x} x^{t-1} dx$  都是收敛的。现设  $\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{t-1} dx$ ,  $t > 0$ , 称之为 Gamma 函数。

(1) 证明对任意的  $t > 0$ , 成立递推公式:  $\Gamma(t+1) = t \Gamma(t)$ ;

(2) 计算反常积分  $\int_0^1 x^2 (\ln x)^{10} dx$ 。

