第三讲

刚体力学基础

自学导读

1、基本内容

A、刚体运动的描述

B、定轴转动定律

C、转动动能　力矩的功

D、角动量守恒定律

2、难点

* 角动量

3、学习方法 类比法

$$\vec{v} — \vec{\omega}$$

$$\vec{a} — \vec{\beta}$$

$$m — J$$

$$\vec{F} — \vec{M}$$

$$\vec{p} — \vec{L}$$

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad — \quad \vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad — \quad M = J\beta$$

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 \quad — \quad E_{rk} = \frac{1}{2}J\omega^2$$

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad — \quad dA = Md\theta$$

$$\vec{P} = m\vec{v} \quad — \quad \vec{L} = J\vec{\omega}$$

刚体

刚体：

形状和大小都不变的物体

任意两质点之间的距离
保持不变的质点系

刚体是一种特殊的质点系统，
无论它在多大外力作用下，系统内
任意两质点间的距离始终保持不变。

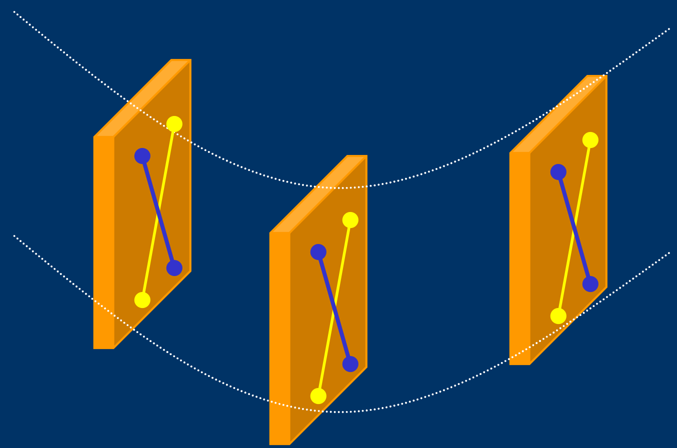
A、刚体运动的描述

刚体最简单的运动形式是平动和转动。

一、刚体的平动和转动

平动：　刚体在运动过程中，其上任意两点的连线始终保持平行。

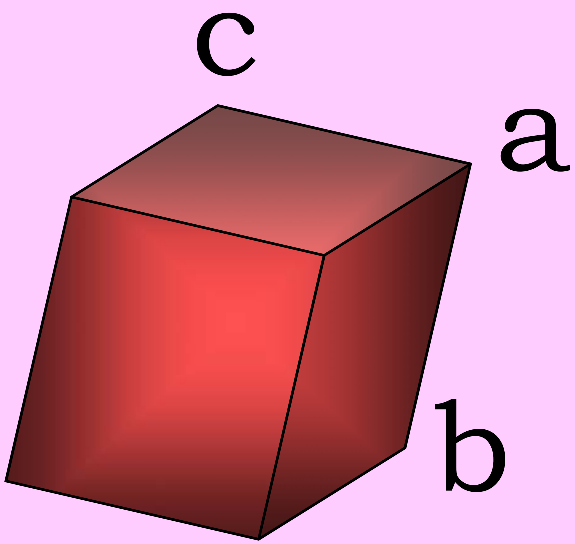
可以用质点动力学的方法来处理刚体的平动问题。



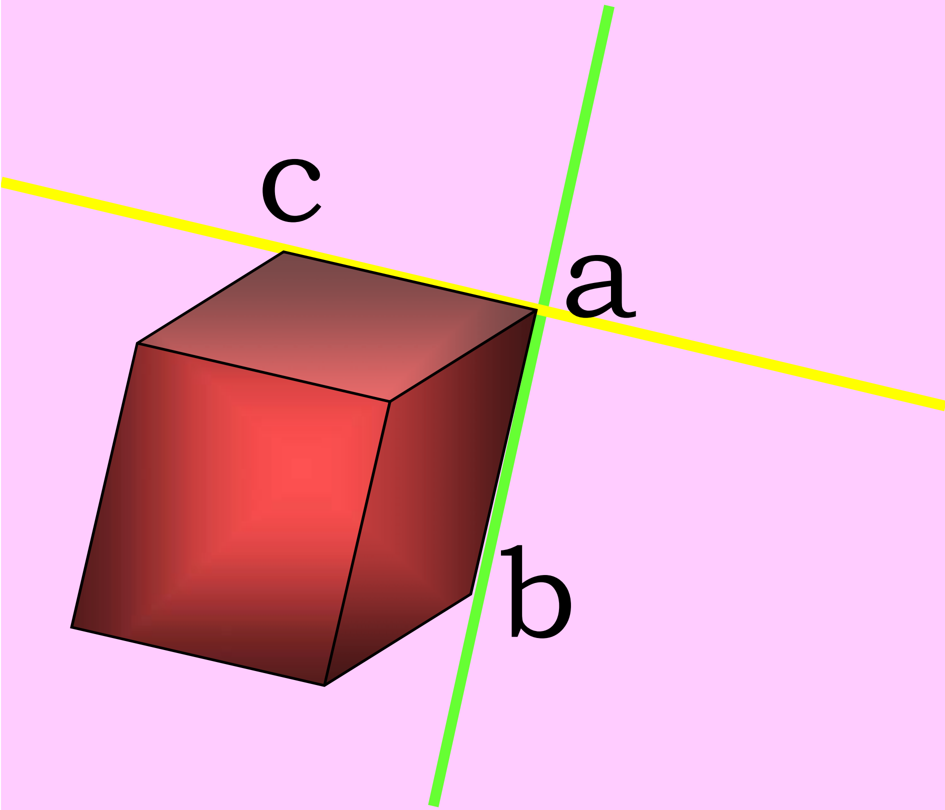
当刚体运动时，如果刚体内任何一条给定的直线，在运动中始终保持它的方向不变，这种运动叫平动。

刚体在平动时，在任意一段时间内，刚体中所质点的位移都是相同的。而且在任何时刻，各个质点的速度和加速度也都是相同的。所以刚体内任何一个质点的运动，都可代表整个刚体的运动。

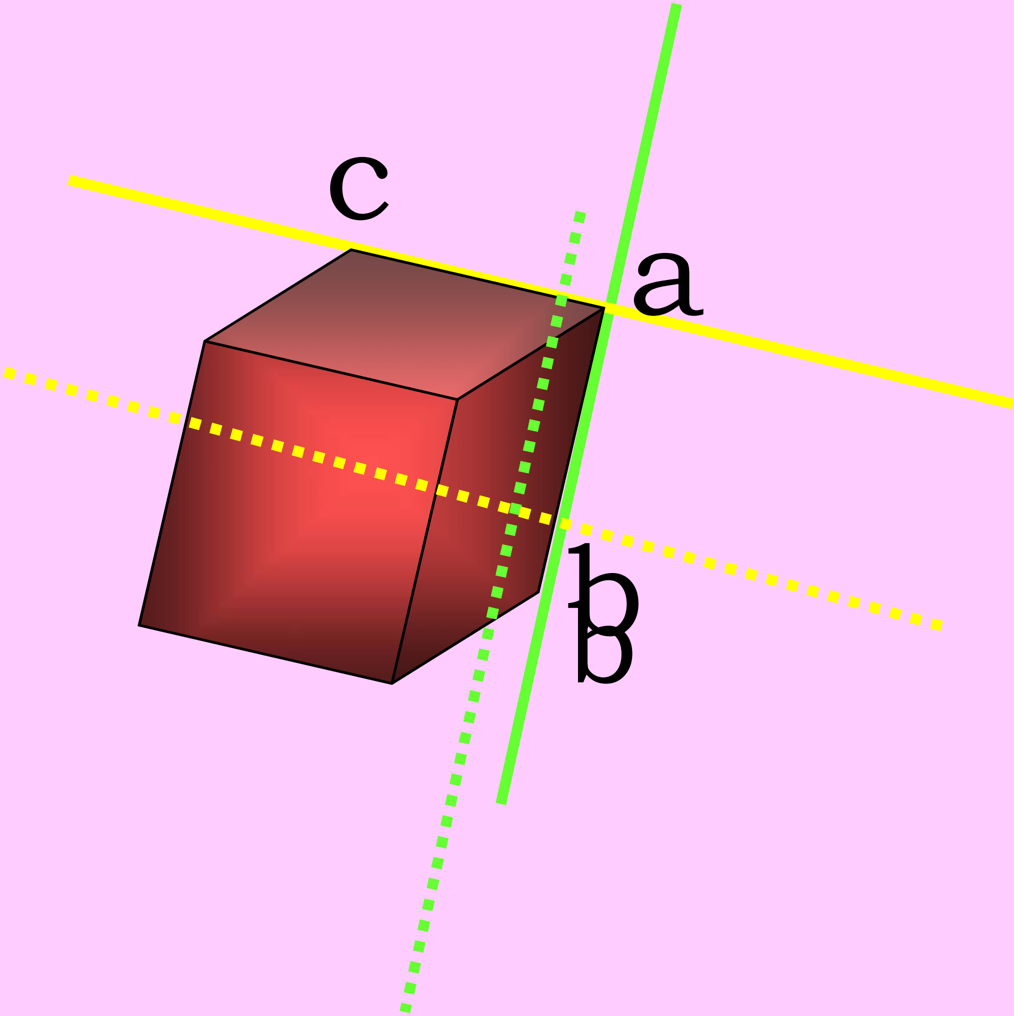
刚体的平动过程



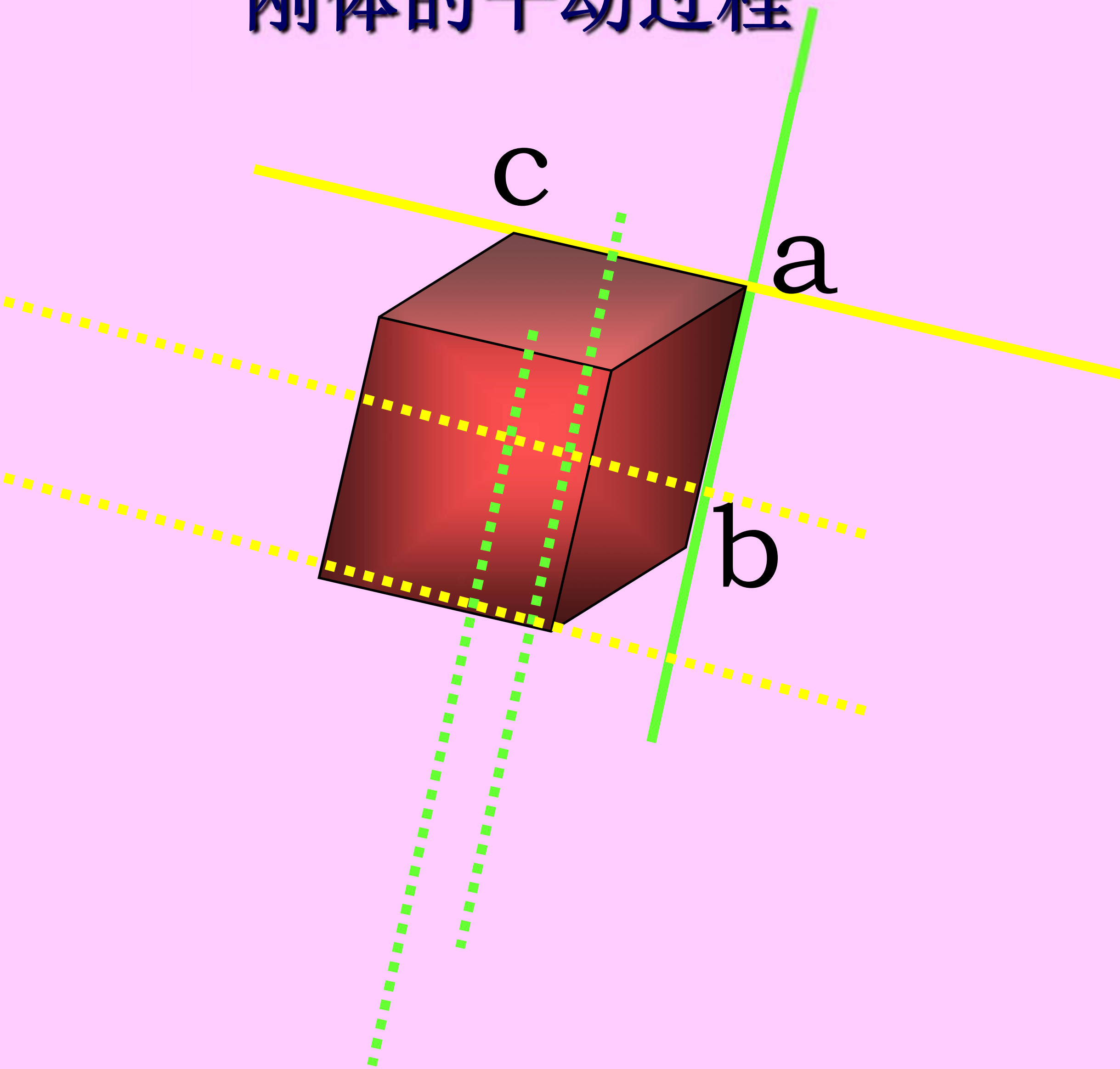
刚体的平动过程



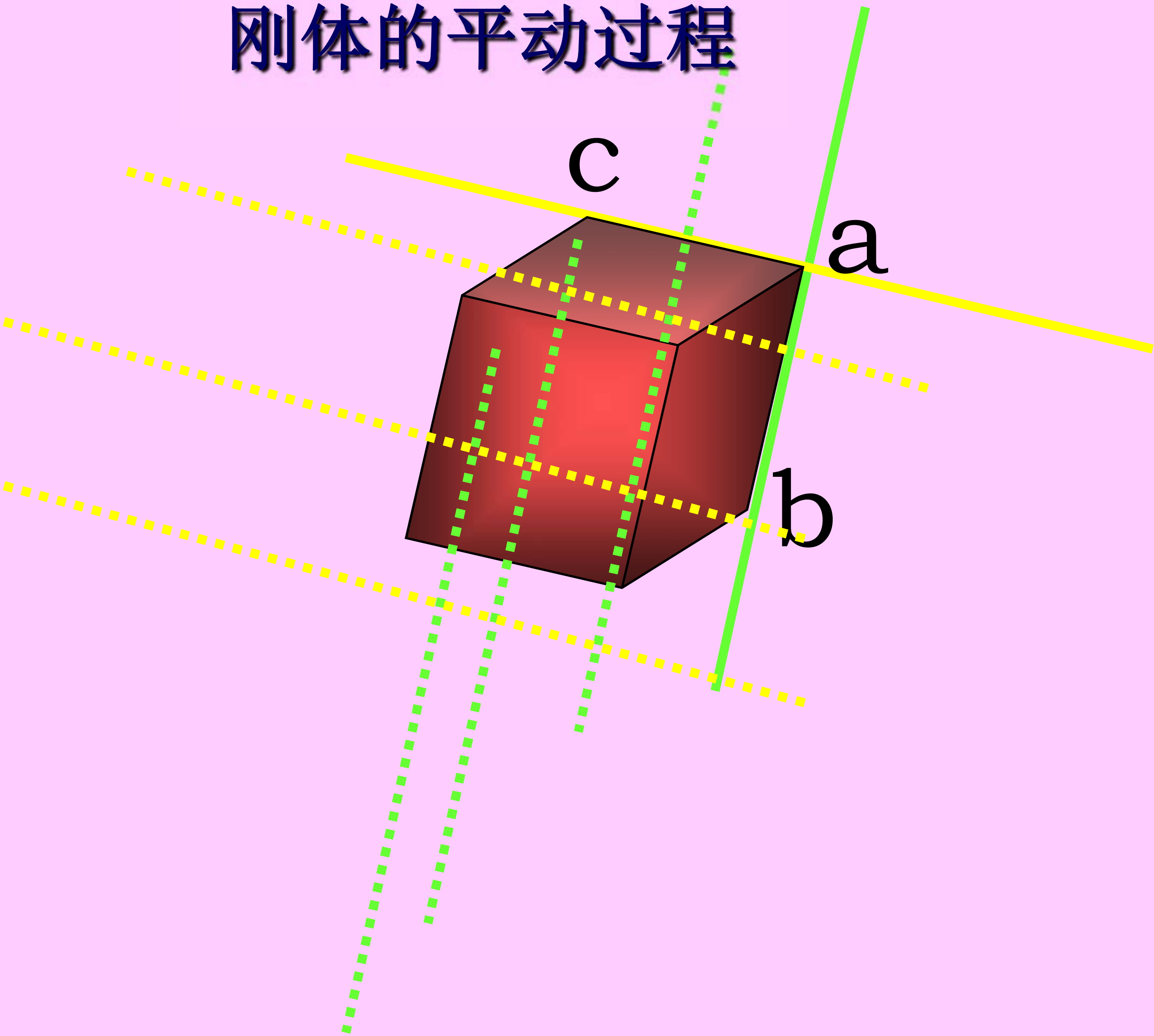
刚体的平动过程



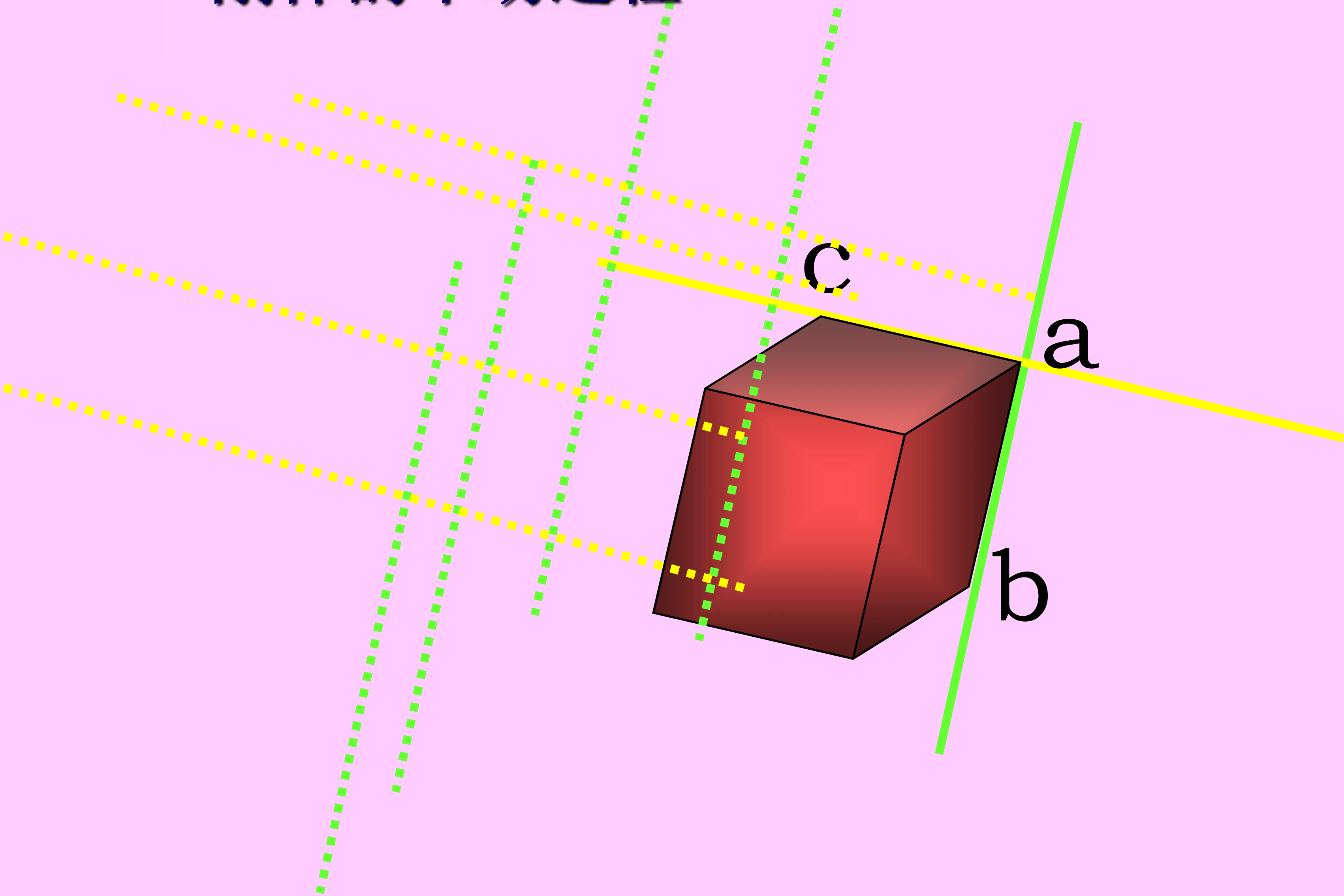
刚体的平动过程



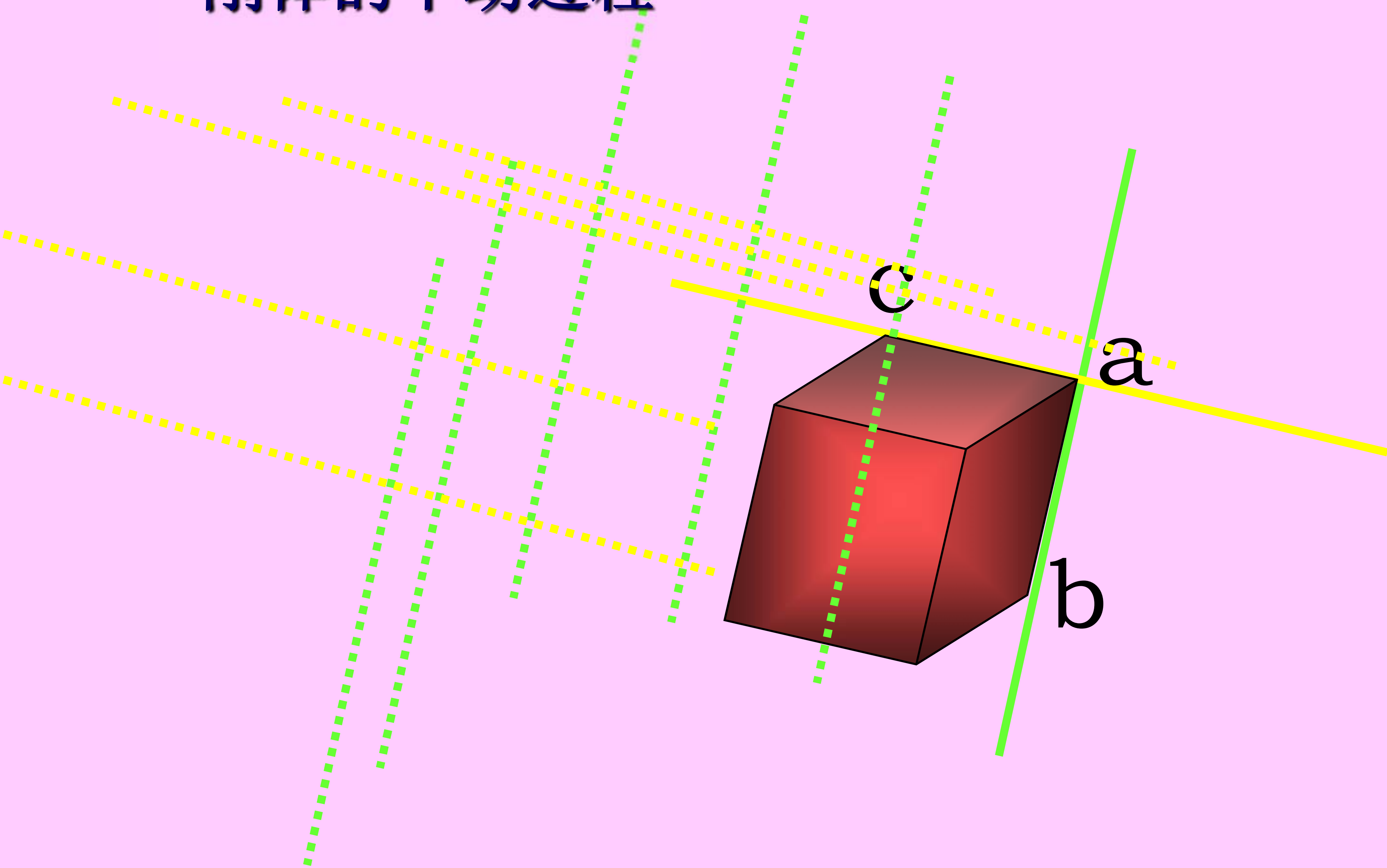
刚体的平动过程



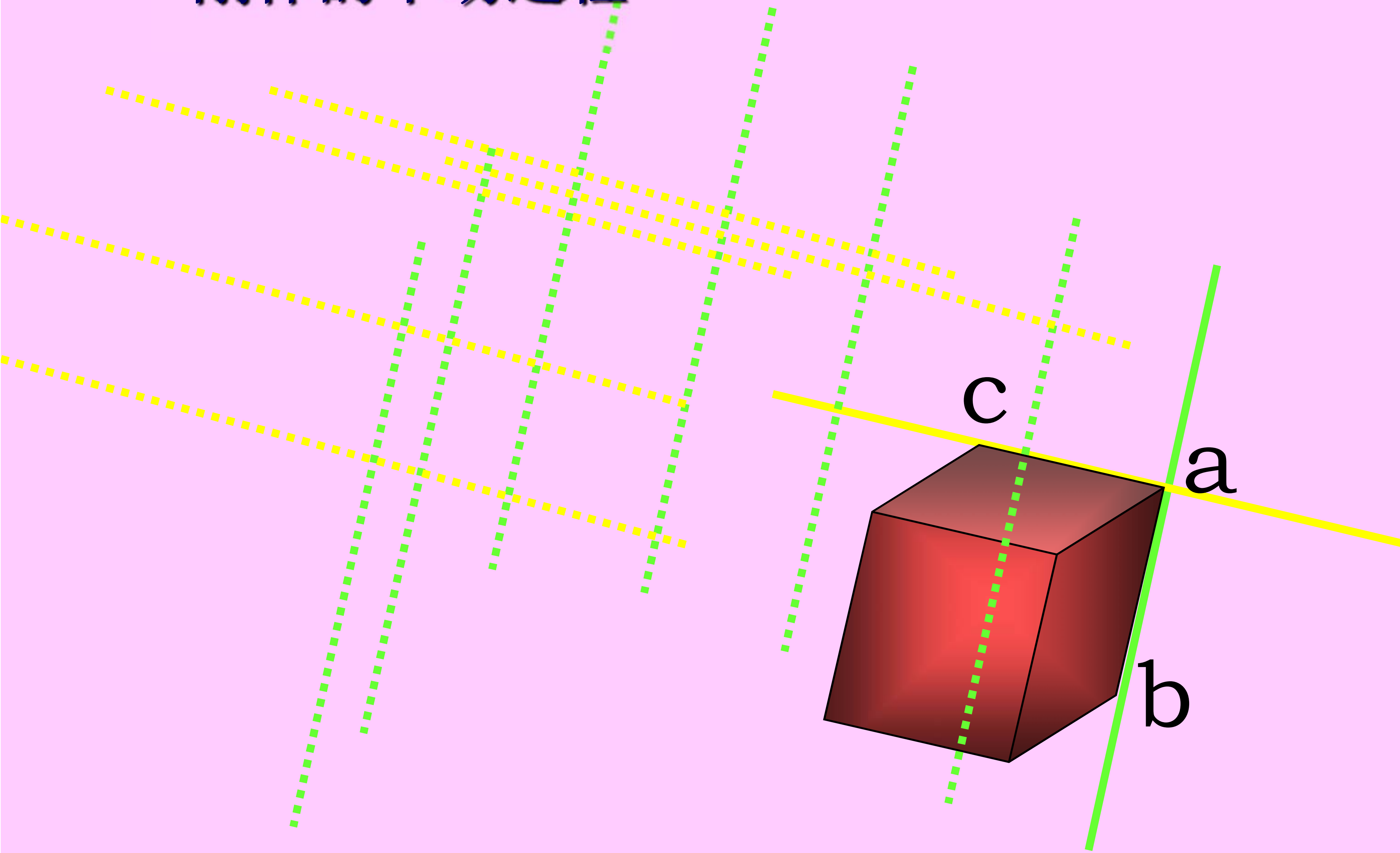
刚体的平动过程



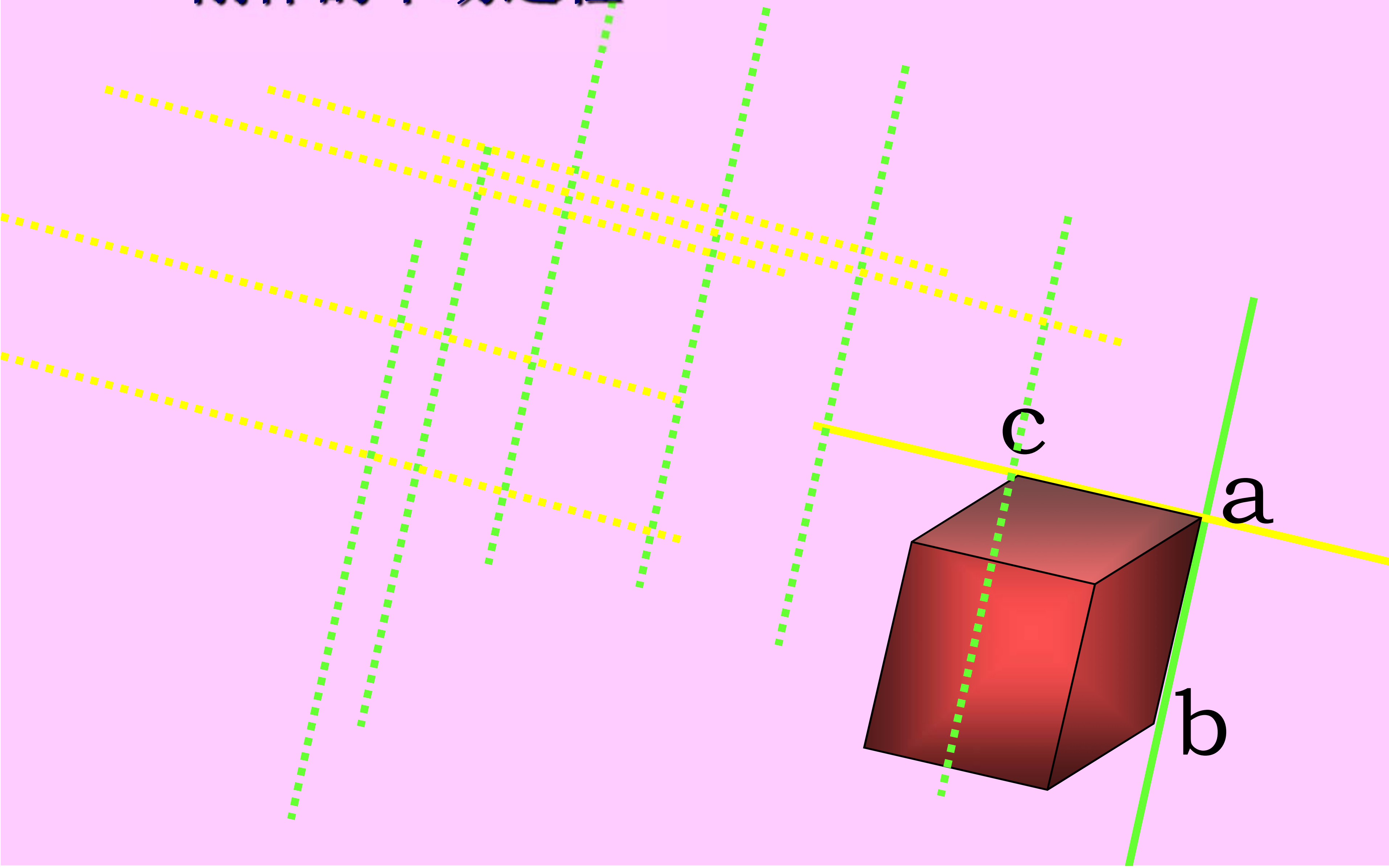
刚体的平动过程



刚体的平动过程



刚体的平动过程

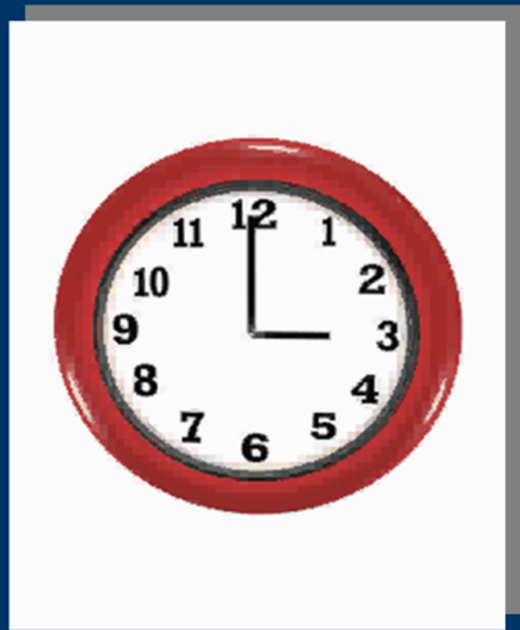


定轴转动

转动： 刚体上所有质点都绕同一直线作圆周运动。这种运动称为刚体的转动。这条直线称为转轴。

定轴转动：

转轴固定不动的转动。

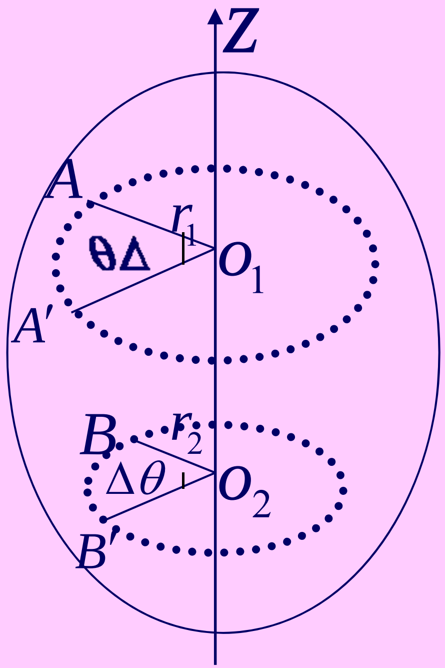


定轴转动：

刚体上各点都绕同一转轴作不同半径的圆周运动，且在相同时间内转过相同的角度。

定轴转动

特点： 角位移，角速度和角加速度均相同；
质点在垂直转轴的平面内运动，且作圆周运动。

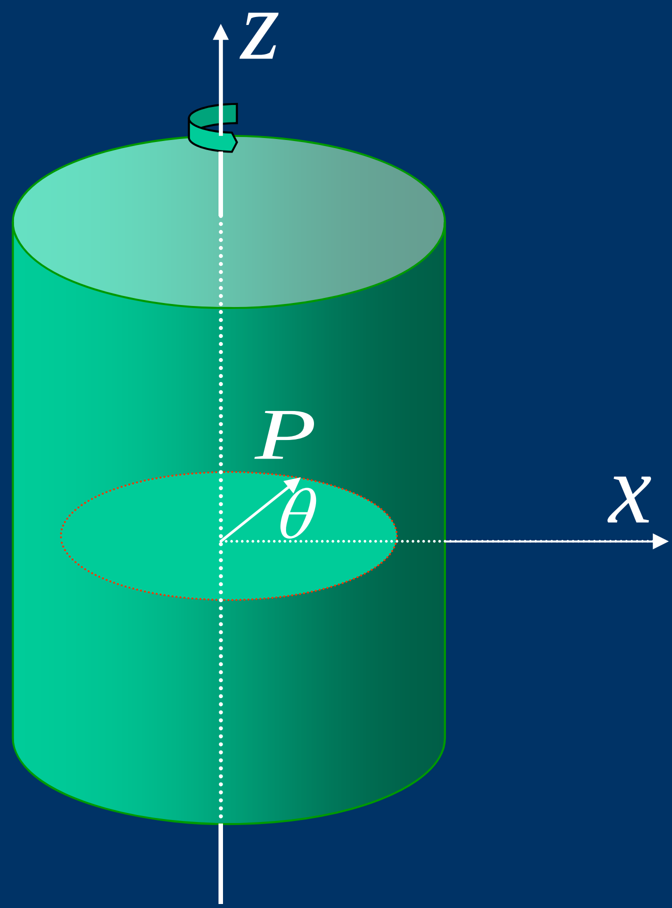


刚体的定轴转动

二、描述刚体转动的物理量

角坐标 θ

角位移 $d\theta$



角速度

角速度的大小：

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

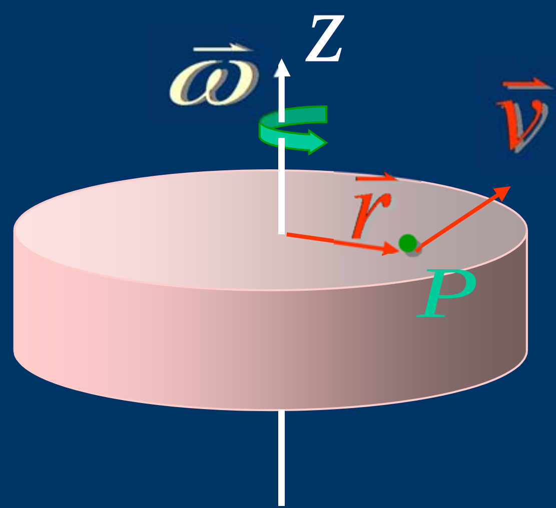
角速度 $\vec{\omega}$的方向：

由右手螺旋法则确定。右手弯曲的四指沿转动方向，伸直的大拇指即为角速度的方向。

$$\vec{\omega} = \frac{d\theta}{dt}\vec{k}$$

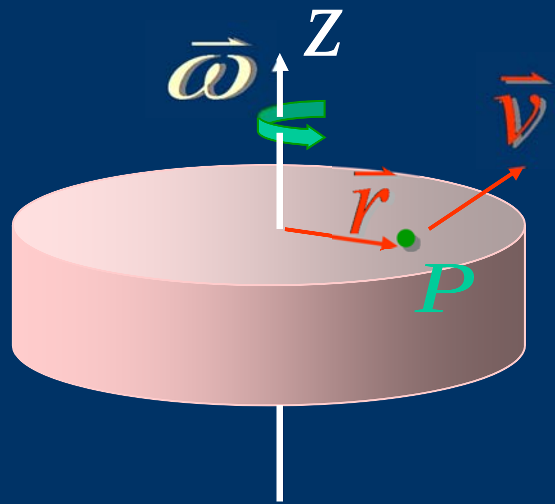
*P*点线速度与角速度的关系：

$$\boxed{\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}}$$



角加速度

$$\vec{\beta}=\frac{d\vec{\omega}}{dt}$$



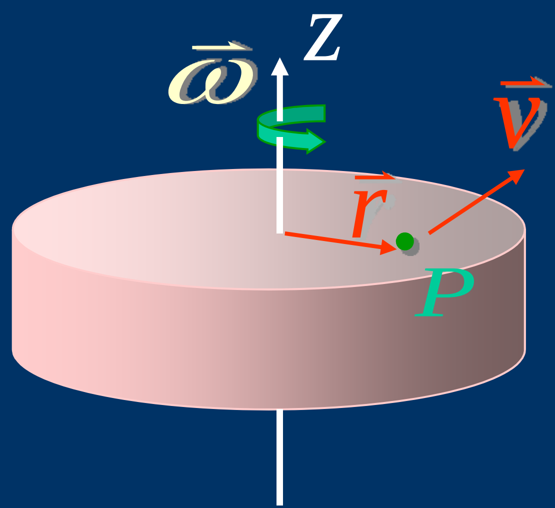
$$\vec{\beta}=\frac{d\omega}{dt}\vec{k}=\frac{d^2\theta}{dt^2}\vec{k}$$ （定轴）

若 $\frac{d\omega}{dt}>0$ $\vec{\beta}$ 沿 Z 轴正方向

P点线加度与角量的关系：

$$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d}{dt}(\vec{\omega}\times\vec{r})$$

$$=\vec{\beta}\times\vec{r}+\vec{\omega}\times\vec{v}$$



$$\vec{a}_{\tau}=\vec{\beta}\times\vec{r}$$

$$\vec{a}_{n}=\vec{\omega}\times\vec{v}$$

对于定轴转动

$$\boxed{\begin{aligned} a_{\tau}&=r\beta \\ a_{n}&=r\omega^{2} \end{aligned}}$$

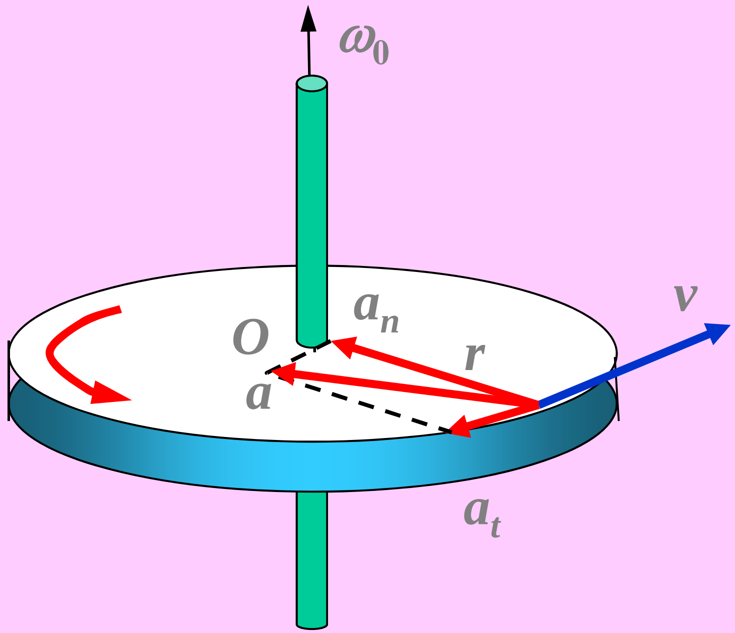
刚体各质元的角量相同，线量一般不同。

例题4-1　一飞轮转速n=1500r/min，受到制动后均匀地减速，经 t=50 s后静止。

（1）求角加速度α 和飞轮从制动开始到静止所转过的转数N；

（2）求制动开始后t=25s 时飞轮的加速度ω；

（3）设飞轮的半径r=1m，求在t=25s 时边缘上一点的速度和加速度。



解　（1）设初角度为ω_0方向如图所示，

角速度

量值为ω_0=2π×1500/60=50π rad/s，对于匀变速转动，可以应用以角量表示的运动方程，在t=50S 时刻ω=0 ，代入方程$\omega=\omega_0+at$ 得

$$a=\frac{\omega-\omega_0}{t}=\frac{-50\pi}{50}rad/s^2$$

$$=-3.14\ rad/s^2$$

从开始制动到静止，飞轮的角位移$\Delta\theta$及转数N 分别为

角速度

$$\Delta\theta = \theta - \theta_0 = \omega_0 t + \frac{1}{2}at^2 = 50\pi \times 50 - \frac{1}{2} \times \pi \times 50^2$$

$$= 1250\pi\ rad$$

$$N = \frac{\Delta\theta}{2\pi} = \frac{1250\pi}{2\pi} = 625 \text{转}$$

（2）t=25s 时飞轮的角速度为

$$\omega = \omega_0 + \alpha t = \left(50\pi - \pi \times 25\right) rad/s$$

$$= 25\pi rad/s = 78.5 rad/s$$

ω的方向与ω_0相同 ；

（3） t=25s 时飞轮边缘上一点P 的速度。

由 $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$

$$\Rightarrow v = \left|\vec{v}\right| = \omega r \sin\varphi = \omega r \sin 90^0$$

$$= \omega r = 78.5 m/s$$

$\vec{v}$ 的方向垂直于 $\vec{\omega}$ 和 $\vec{r}$ 构成的平面，如图所示相应的切向加速度和向心加速度分别为

$$a_t = ar = -3.14 m/s^2$$

角速度

$$a_n = \omega^2 r = 6.16 \times 10^3 m/s^2$$

边缘上该点的加速度 $\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_l$ 其中 $\vec{a}_l$ 的方向与 $\vec{v}$ 的方向相反，a 的方向指向轴心，a 的大小为

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{(6.16 \times 10^3)^2 + 3.14^2} m/s^2$$

$$\approx 6.16 \times 10^3 m/s^2$$

$\vec{a}$ 的方向几乎和 $\vec{a}_n$ 相同。

2. 刚体的转动动能

刚体的转动动能应该是组成刚体的各个质点的动能之和。设刚体中第i个质点的质量为 Δm_i ，速度为 v_i ，则该质点的动能为：

$$\frac{1}{2}\Delta m_i v_i^2$$

刚体做定轴转动时，各质点的角速度ω相同。设质点 Δm_i 离轴的垂直距离为 r_i ，则它的线速度

$$v_i = \omega r_i$$

因此整个刚体的动能

$$E_K = \sum \frac{1}{2}\Delta m_i v_i^2 = \frac{1}{2}\left(\sum \Delta m_i r_i^2\right)\omega^2$$

式中$\sum \Delta m_i r_i^2$是刚体对转轴的转动惯量 J ，所以上式写为

$$E_K = \frac{1}{2} J\omega^2$$

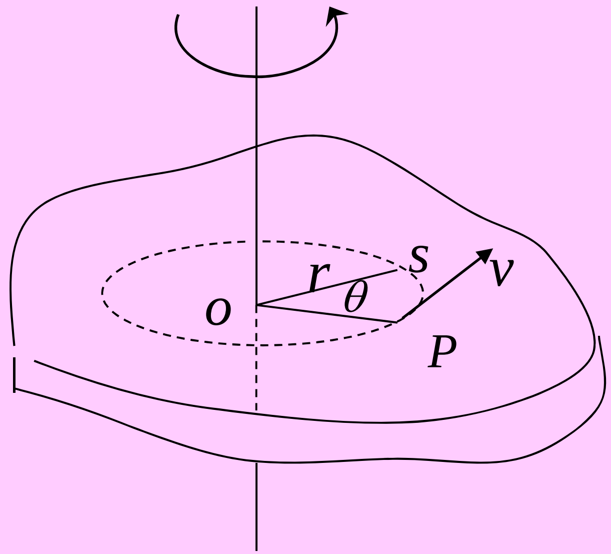
上式中的动能是刚体因转动而具有的动能，因此叫刚体的转动动能。

一、刚体对定轴的角动量

$$L = \sum \Delta m_i v_i r_i$$

$$= \sum \Delta m_i r_i^2 \omega = J\omega$$

质点的动量：$\mathrm{P} = \mathrm{m}\vec{\mathrm{v}}$



力矩

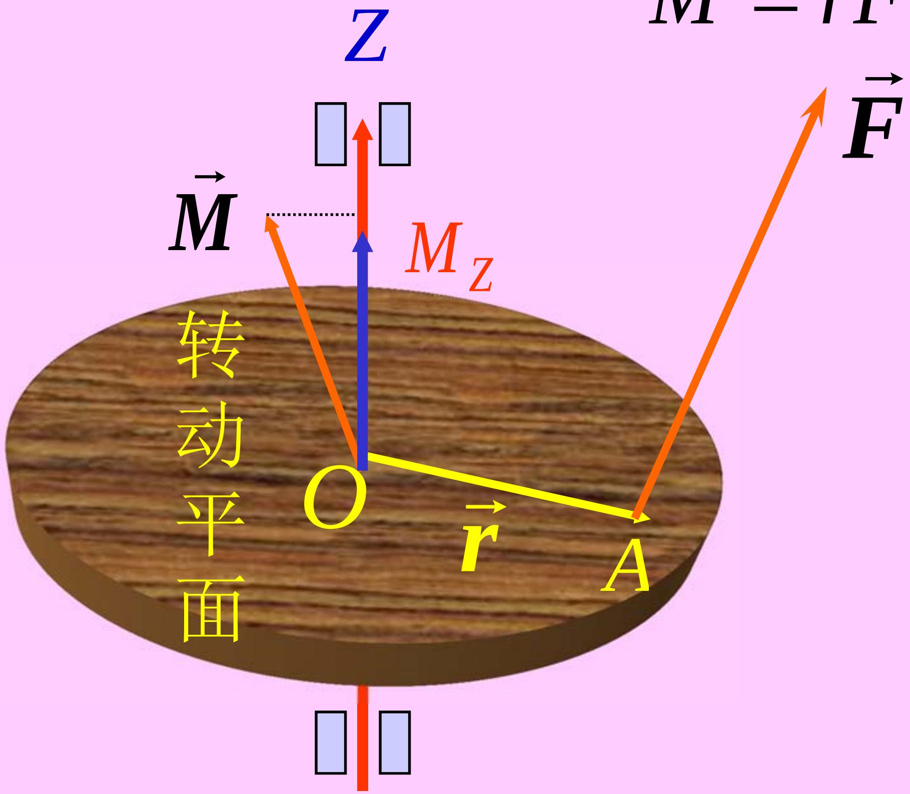
B、定轴转动定律

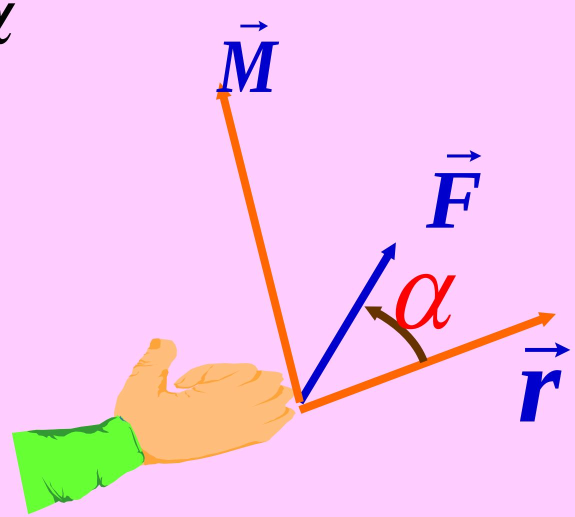
一、对转轴的力矩

1. 力矩

$\vec{F}$ 对 O 点的力矩：$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$

$$M = rF\sin\alpha$$



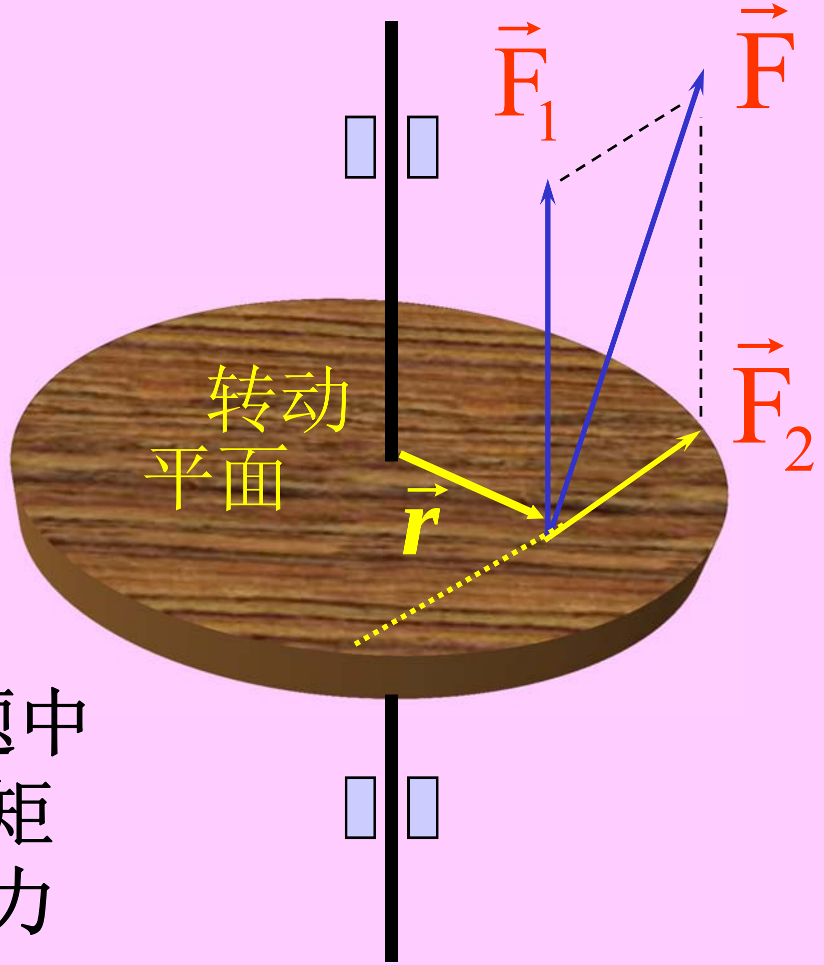


$\vec{M}$ 沿 Z 轴分量为 $\vec{F}$ 对 Z 轴力矩 M_Z

力不在转动平面内

$$\vec{M}=\vec{r}\times\vec{F}$$
$$=\vec{r}\times(\vec{F}_1+\vec{F}_2)$$
$$=\vec{r}\times\vec{F}_1+\vec{r}\times\vec{F}_2$$

$\vec{r}\times\vec{F}_1$ 只能引起轴的变形，对转动无贡献。



注 （1）在定轴动问题中，如不加说明，所指的力矩是指力在转动平面内的分力对转轴的力矩。

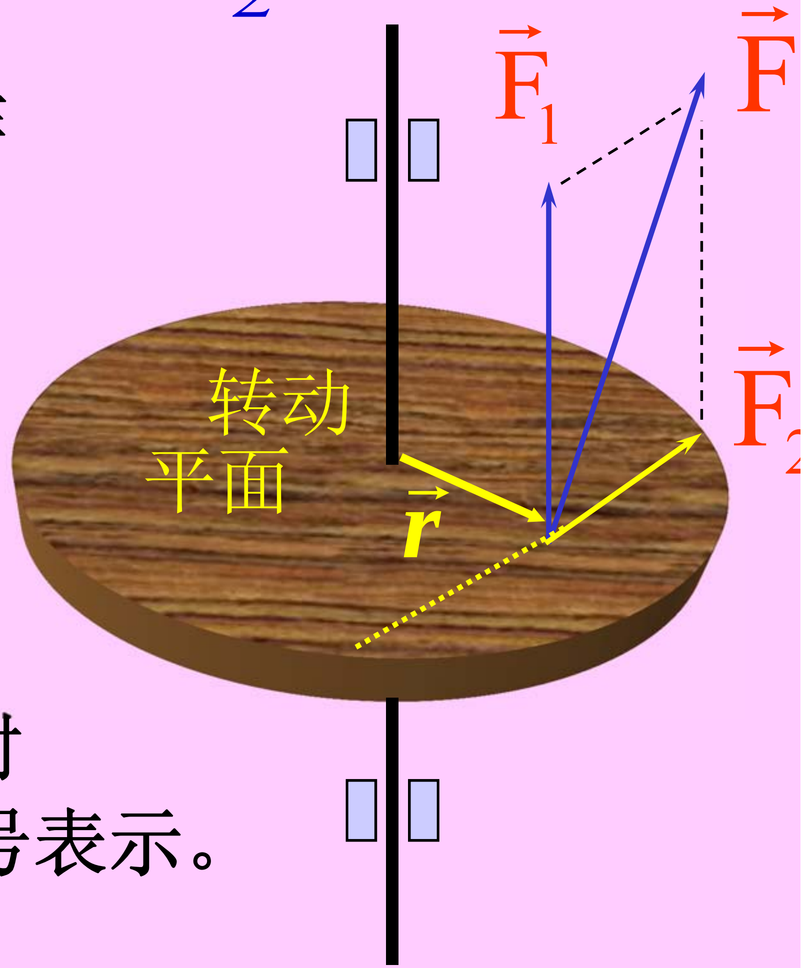
力矩

（2） $M_Z = rF_2 \sin\alpha = F_2 d$

$d = r\sin\alpha$是转轴到力作用线的距离，称为力臂。

（3） $\vec{F}_1$ 对转轴的力矩为零，在定轴转动中不予考虑。

（4）在转轴方向确定后，力对转轴的力矩方向可用+、-号表示。



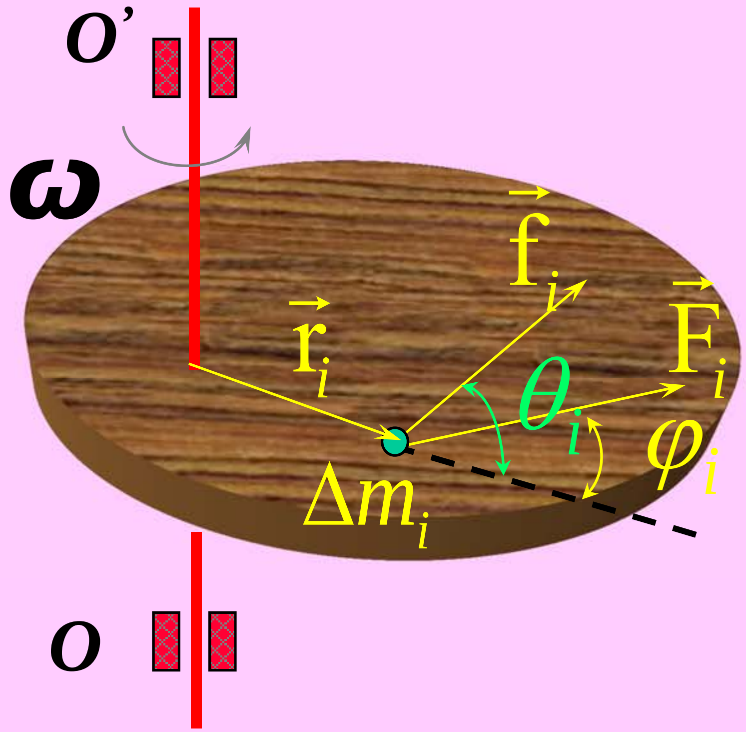
定轴转动定律

2. 刚体定轴转动定律

对刚体中任一质量元Δm_i

$\vec{F}_i$ -外力

$\vec{f}_i$ -内力



应用牛顿第二定律，可得：

$$\vec{F}_i + \vec{f}_i = \Delta m_i \vec{a}_i$$

采用自然坐标系，上式切向分量式为：

$$F_i \sin\varphi_i + f_i \sin\theta_i = \Delta m_i a_{i\tau} = \Delta m_i r_i \beta$$

用r_i 乘以上式左右两端：

$$F_i r_i \sin\varphi_i + f_i r_i \sin\theta_i = \Delta m_i r_i^2 \beta$$

设刚体由***N*** 个点构成，对每个质点可写出上述类似方程，将***N*** 个方程左右相加，得：

$$\sum_{i=1}^{N} F_i r_i \sin\varphi_i + \sum_{i=1}^{N} f_i r_i \sin\theta_i = \sum_{i=1}^{N} (\Delta m_i r_i^2)\beta$$

根据内力性质(每一对内力等值、反向、共线, 对同一轴力矩之代数和为零)，得：

$$\sum_{i=1}^{N} f_i r_i \sin\theta_i = 0$$

得到：$$\sum_{i=1}^{N} F_i r_i \sin\varphi_i = \sum_{i=1}^{N} (\Delta m_i r_i^2)\beta$$

上式左端为刚体所受外力的合外力矩，以M 表示；右端求和符号内的量与转动状态无关，称为刚体转动惯量，以J 表示。于是得到

$$\boxed{M = J\beta = J\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}}$$

刚体定轴转动定律

二、定轴转动定律

把刚体看作一个质点系

$$\vec{F}_i + \vec{f}_i = \Delta m_i \vec{a}_i$$

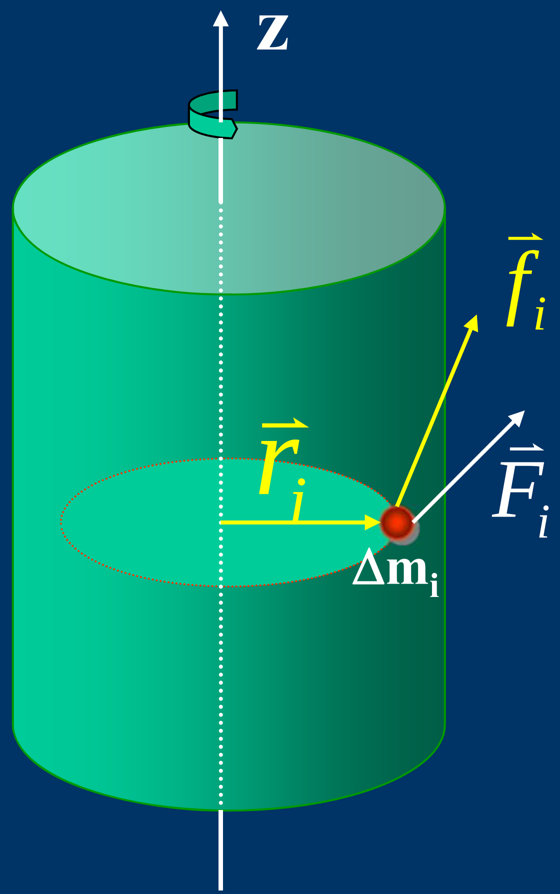
$$\vec{r}_i \times \vec{F}_i + \vec{r}_i \times \vec{f}_i = \Delta m_i \vec{r}_i \times \vec{a}_i$$

$$\sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i + \sum \vec{r}_i \times \vec{f}_i = \sum \Delta m_i \vec{r}_i \times \vec{a}_i$$

合外力矩： $\vec{M} = \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i$

合内力矩： $\sum \vec{r}_i \times \vec{f}_i = 0$

加 速 度： $\vec{a}_i = \vec{a}_{i\tau} + \vec{a}_{in}$



$$\vec{M} = \sum \Delta m_i \vec{r}_i \times \vec{a}_{i\tau} + \sum \Delta m_i \vec{r}_i \times \vec{a}_{in}$$

其中: $\vec{r}_i \times \vec{a}_{in} = 0 \quad \vec{r}_i \times \vec{a}_{i\tau} = r_i a_{i\tau} \sin\frac{\pi}{2} \cdot \vec{k} = r_i^2 \beta \vec{k}$

$$M_z \vec{k} = \sum \Delta m_i r_i^2 \beta \vec{k}$$

转动惯量: $\boxed{J_z = \sum \Delta m_i r_i^2}$

转动定律: $\boxed{M_z = J_z \beta}$

定轴，可
不写下标

三、转动惯量的计算

$$\boxed{J=\sum \Delta m_i r_i^2}$$

连续体：

$$\boxed{J=\int r^2 dm}$$

J 取决于刚体对给定转轴的质量分布。

特别要注意：J 与转轴的位置有关。

dm —质元的质量

区别：

r—质元到转轴的距离

平动： 平动动能 $\frac{1}{2}mv^2$ 线动量 mv

转动： 转动动能 $\frac{1}{2}J\omega^2$ 角动量 $J\omega$

质量是平动中惯性大小的量度。

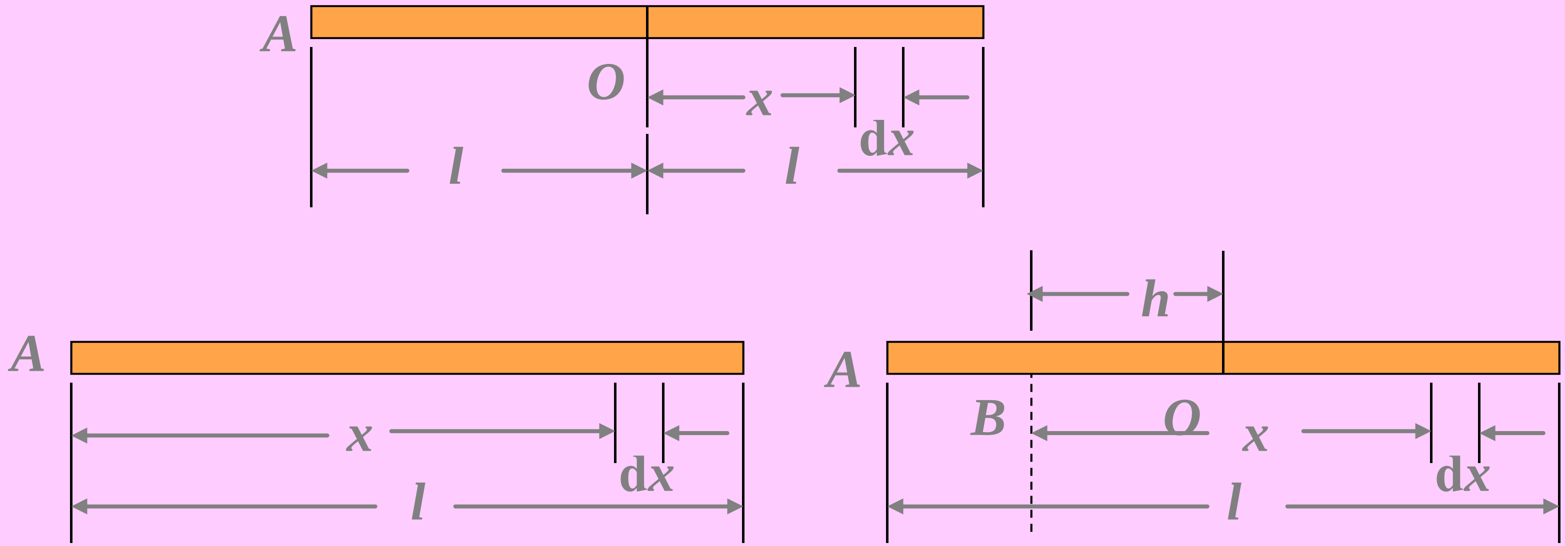
转动惯量是转动中惯性大小的量度。

例题4-3 求质量为m、长为 l 的均匀细棒对下面三种转轴的转动惯量：

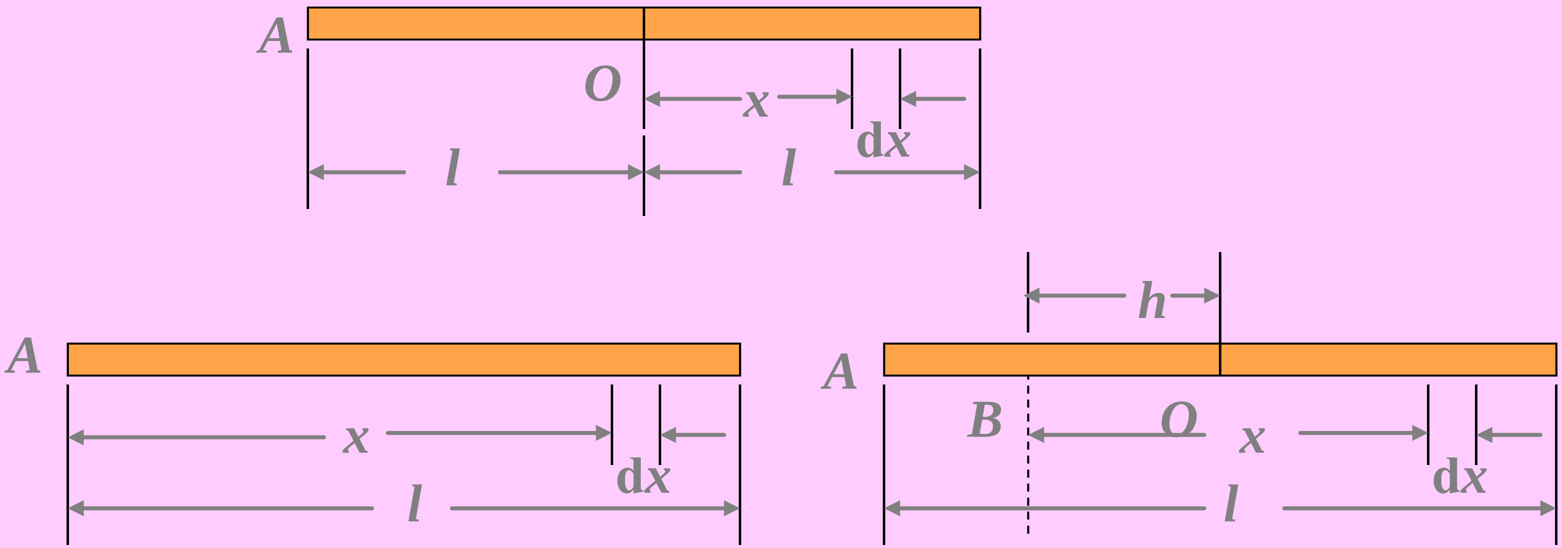
（1）转轴通过棒的中心并和棒垂直；

（2）转轴通过棒的一端并和棒垂直；

（3）转轴通过棒上距中心为h的一点并和棒垂直。



转动惯量的计算



解 如图所示，在棒上离轴x 处，取一长度元dx，如棒的质量线密度为λ，这长度元的质量为dm=λdx。

（1）当转轴通过中心并和棒垂直时，我们有

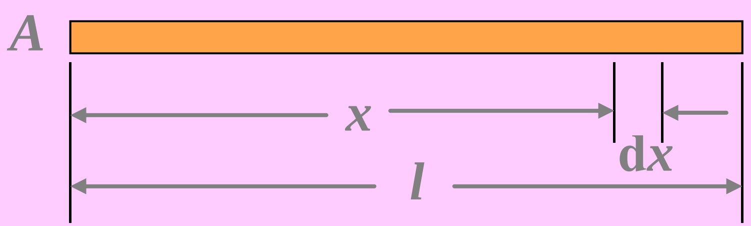
$$J_0=\int r^2\mathrm{d}m=\int_{-l/2}^{+l/2}\lambda x^2\mathrm{d}x=\frac{\lambda l^3}{12}$$

因$\lambda l=m$，代入得

$$J_0=\frac{1}{12}ml^2$$

（2）当转轴通过棒的一端A并和棒垂直时，我们有

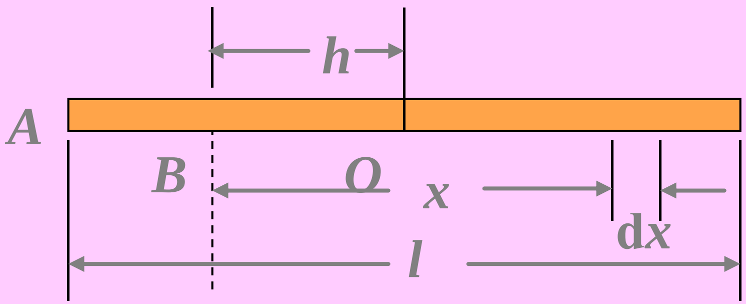
$$J_A=\int_0^l \lambda x^2 dx=\frac{\lambda l^3}{3}=\frac{ml^2}{3}$$



（3）当转轴通过棒上距中心为h的B点并和棒垂直时，我们有

$$J_B = \int_{-l/2+h}^{l/2+h} \lambda x^2 dx = \frac{ml^2}{12} + mh^2$$

这个例题表明，同一刚体对不同位置的转轴，转动惯量并不相同。

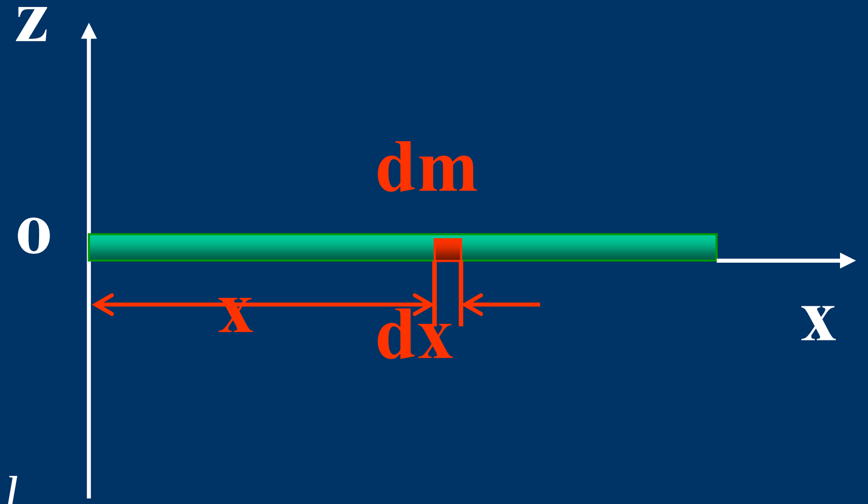


例1、计算质量为 m ，长为 l 的细棒绕通过其端点的垂直轴的转动惯量。

解：

$$J=\int r^2 dm$$

$$dm=\rho\, dx=\frac{m}{l}dx$$

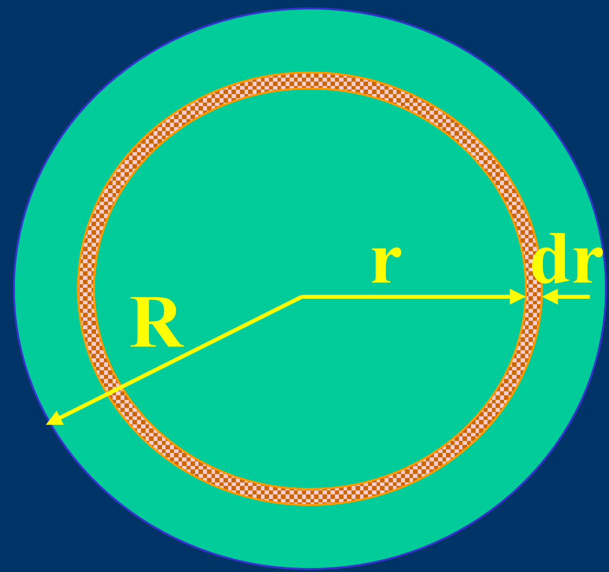


$$J=\int_0^l x^2\cdot\frac{m}{l}dx=\frac{1}{3}\frac{m}{l}x^3\Big|_0^l$$

$$J=\frac{1}{3}ml^2$$

例2、一质量为 m ，半径为 R 的均匀圆盘，求通过盘中心并与盘面垂直的轴的转动惯量。

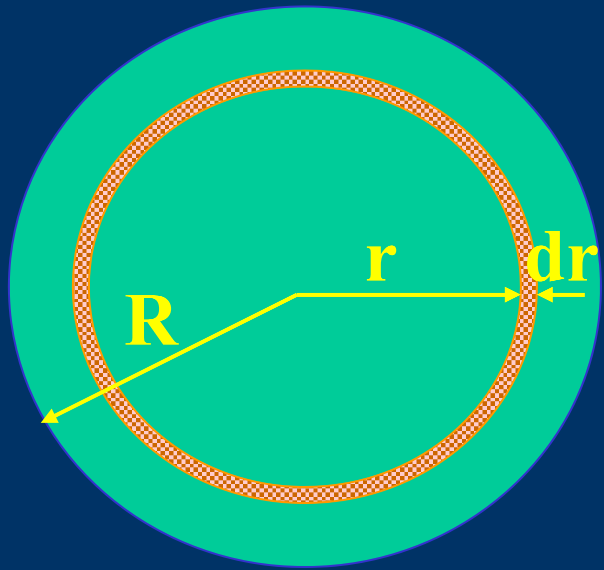
解：



例2、一质量为 m，半径为 R 的均匀圆盘，求通过盘中心并与盘面垂直的轴的转动惯量。

解：

$$dm = \sigma 2\pi r dr$$



$$J = \int r^2 dm = 2\pi\sigma \int r^3 dr$$

$$J = 2\pi\sigma \int_0^R r^3 dr$$

$$= \frac{\pi\sigma R^4}{2} = \frac{1}{2} mR^2$$

三、刚体的转动惯量I

1.定义：

(1).对单个质点：$I=mr^2$

(2)对分立的质点系：$I=\sum \Delta m_i r_i^2$

(3)对于质量连续分布的刚体$\mathrm{I}=\int \mathrm{r}^2 \mathrm{dm}$

线分布$\mathrm{dm}=\lambda \mathrm{dl}$ 面分布$\mathrm{dm}=\sigma \mathrm{ds}$ 体分布$\mathrm{dm}=\rho \mathrm{dV}$

2.决定I的三要素：

（1）总质量M;

(2) 转动轴的位置；

（3）对给定轴的M的分布；

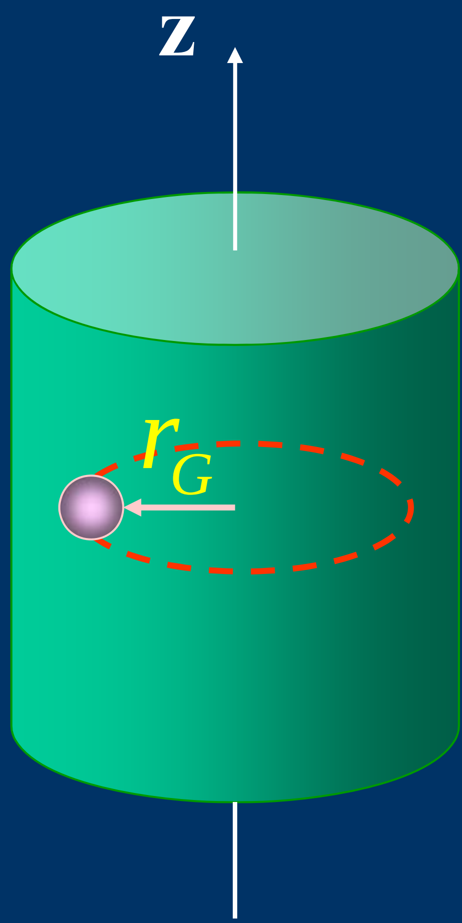
3.I的计算

（1）由定义

回转半径

$$r_G = \sqrt{\frac{J}{m}}$$

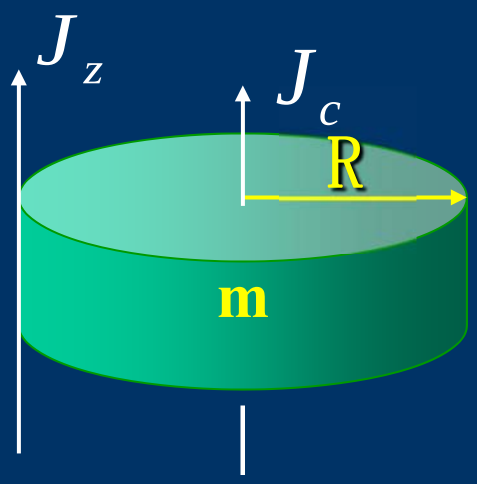
$$J = m r_G^2$$



平行轴定理

若刚体对过质心的轴的转动惯量为 J_c，则刚体对与该轴相距为 d 的平行轴 z 的转动惯量 J_z 是

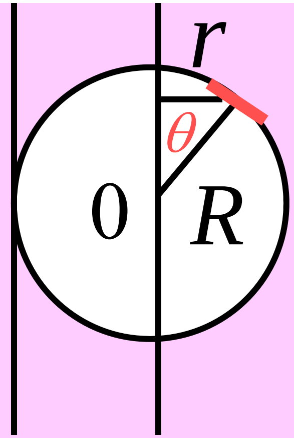
$$J_z = J_c + md^2$$



$$J_c = \frac{1}{2}mR^2$$

$$J_z = \frac{1}{2}mR^2 + mR^2 = \frac{3}{2}mR^2$$

例2、求质量为m、半径为R的细元环绕其直径转动的转动惯量。



用 λ表示细元环的质量密度λ=m/2πR

$$J=\int r^2 dm = 2\int_0^{\pi}(R\sin\theta)^2\lambda R d\theta = 2\lambda R^3\int_0^{\pi}\sin^2\theta d\theta$$

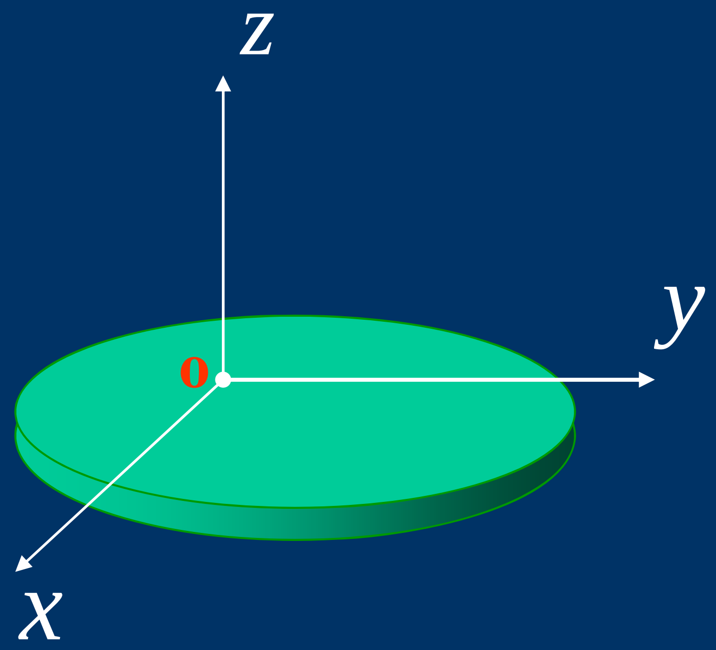
$$=\frac{2\pi\lambda R^3}{2}=\frac{mR^2}{2}$$

若将转轴移动到圆环的左边，由平行轴定理圆环的转动惯量是多少？

$$J=\frac{mR^2}{2}+mR^2=\frac{3mR^2}{2}$$

垂直轴定理

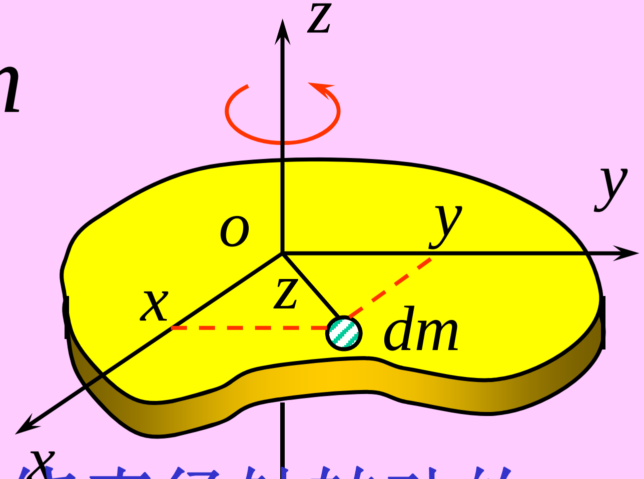
$$J_z = J_x + J_y$$



$$I_z = \int z^2 dm = \int (x^2 + y^2) dm$$

$$= \int y^2 dm + \int x^2 dm$$

$$= I_x + I_y \quad \text{证毕}$$



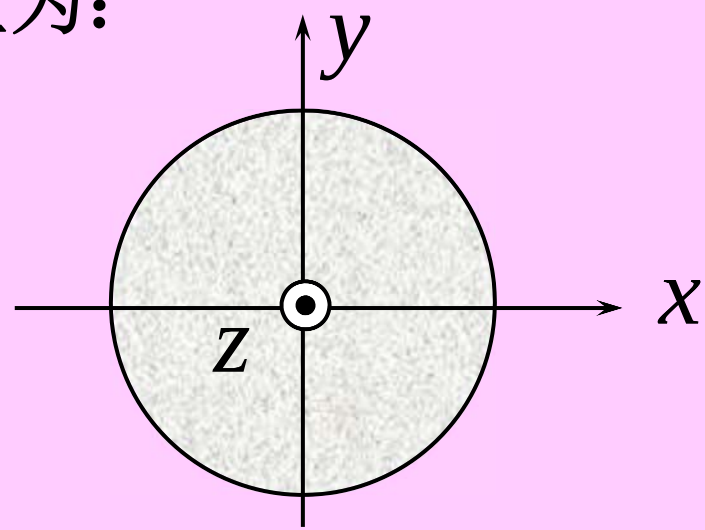
例：半径为 R 质量为 M 的圆盘，求绕直径轴转动的转动惯量J_y。

解：圆盘绕垂直于盘面的质心 z 轴转动的转动惯量为：

$$I_z = \frac{1}{2} MR^2$$

$$I_z = I_x + I_y = 2I_y$$

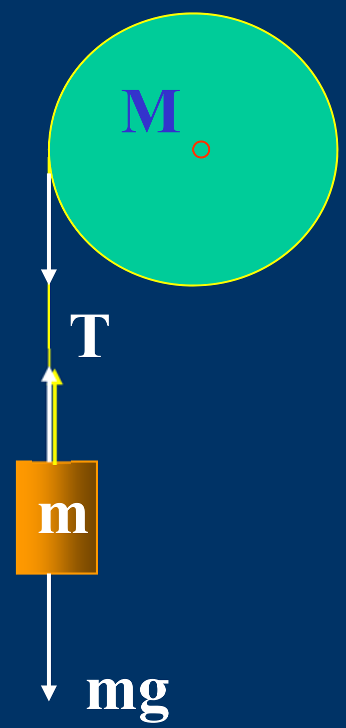
$$I_y = \frac{1}{2} I_z = \frac{1}{4} MR^2$$



转动定律的应用

例3、质量 $m = 16$ kg 、半径为 $R = 0.15$ m 的实心滑轮,一根细绳绕在其上，绳端挂一质量为 m 的物体。求（1）由静止开始 1 秒钟后，物体下降的距离。（2）绳子的张力。

解:

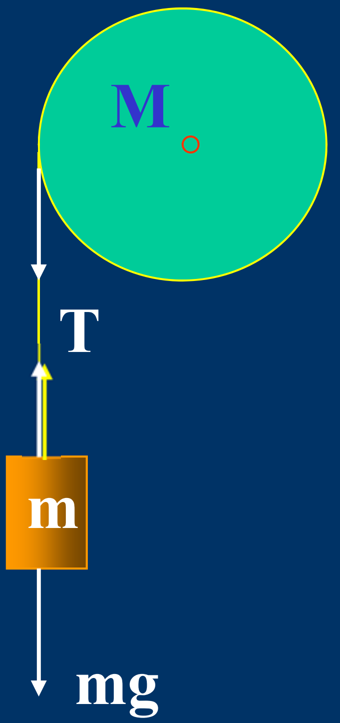


转动定律的应用

例3、质量 $m = 16$ kg 、半径为 $R = 0.15$ m 的实心滑轮，一根细绳绕在其上，绳端挂一质量为 m 的物体。求（1）由静止开始 1 秒钟后，物体下降的距离。（2）绳子的张力。

解：

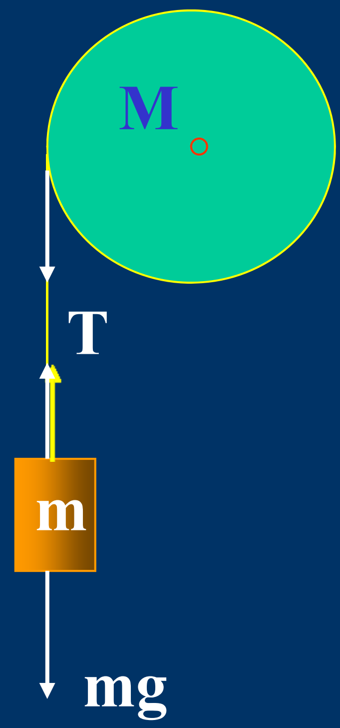
$$\begin{cases} mg - T = ma \\ T \cdot R = \dfrac{1}{2} mR^2 \cdot \beta \\ a = R\beta \end{cases}$$



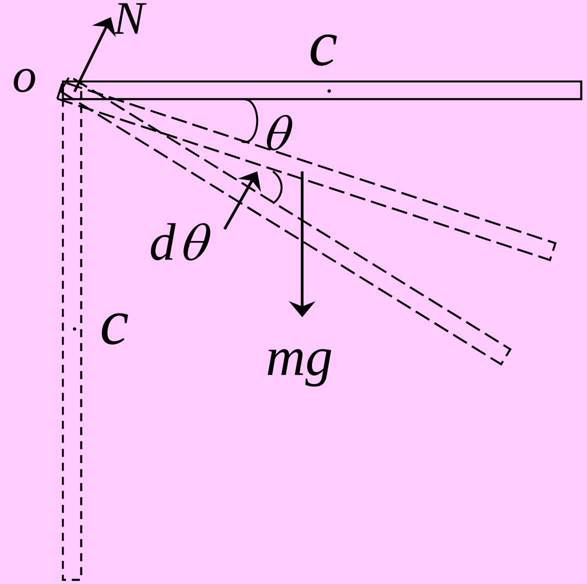
$$a=\frac{mg}{m+M/2}=\frac{8\times 10}{8+8}=5\,m\cdot s^{-2}$$

$$h=\frac{1}{2}at^{2}=\frac{1}{2}\times 5\times 1^{2}=2.5\,m$$

$$T=\frac{1}{2}\times 16\times 5=40\,N$$

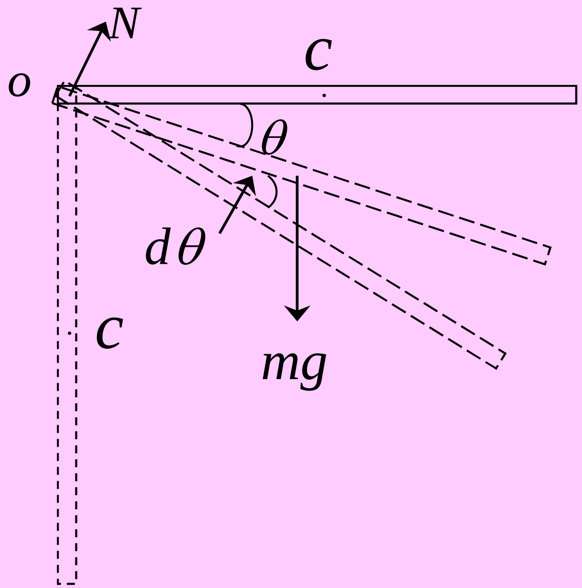


例8 如图所示，一均匀细棒，可绕通过其端点并与棒垂直的水平轴转动。已知棒长为l，质量为m，开始时棒处于水平位置。令棒由静止下摆，求：（1）棒在任意位置时的角加速度；（2）θ 角为30^0，90^0时的角速度。



例8　如图所示，一均匀细棒，可绕通过其端点并与棒垂直的水平轴转动。已知棒长为l，质量为m，开始时棒处于水平位置。令棒由静止下摆，求：（1）棒在任意位置时的角加速度；（2）θ 角为30^0，90^0时的角速度。

解:(1) 棒在任意位置时的重力矩



$$M = mg\frac{l}{2}\cos\theta$$

$$M = I\beta = \frac{1}{3}ml^2\beta \qquad \beta = \frac{3g}{2l}\cos\theta$$

$$(2)\quad mg\frac{1}{2}\cos\theta = \frac{1}{3}ml^2\frac{d\omega}{dt}$$

$$= \frac{1}{3}ml^2\frac{d\omega}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{3}ml^2\omega\frac{d\omega}{d\theta}$$

分离变量积分　$$\int_0^\theta \frac{g}{2}\cos\theta\, d\theta = \int_0^\omega \frac{l}{3}\omega\, d\omega$$

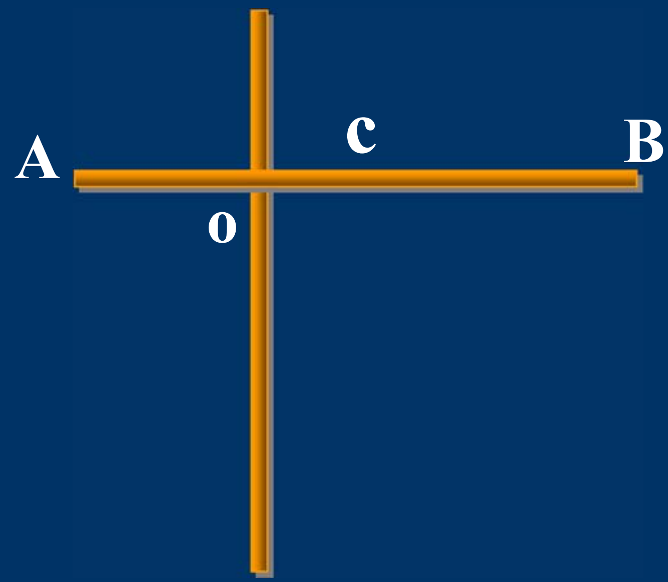
$$\omega = \sqrt{(3g\sin\theta)/l} \qquad \theta = 30^0, \omega = \sqrt{\frac{3g}{2l}} \qquad \theta = 90^0, \omega = \sqrt{\frac{3g}{l}}$$

例5、一质量为 m 、长为 l 的均质细杆，转轴在 O 点，距A端 $l/3$ 。杆从静止开始由水平位置绕O点转动。求：

（1）水平位置的角速度和角加速度。

（2）垂直位置时的角速度和角加速度。

解：

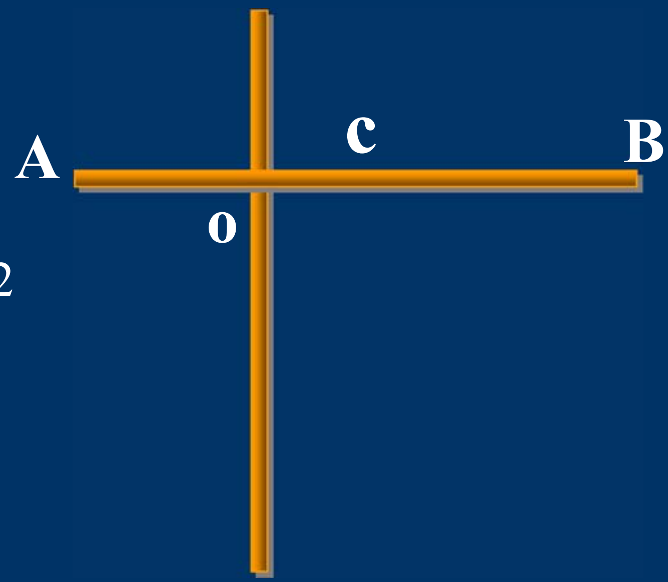


例5、一质量为 m 、长为 l 的均质细杆，转轴在 O 点，距A端 l/3 。杆从静止开始由水平位置绕O点转动。求：

（1）水平位置的角速度和角加速度。

（2）垂直位置时的角速度和角加速度。

解：



$$J_o = J_c + md^2$$

$$J_0 = \frac{1}{12}ml^2 + m\left(\frac{l}{6}\right)^2 = \frac{1}{9}ml^2$$

（1）水平 $\qquad \omega_o = 0$

$$mg\frac{l}{6} = \frac{1}{9}ml^2\beta \qquad \beta = \frac{3g}{2l}$$

C、转动中的功和能

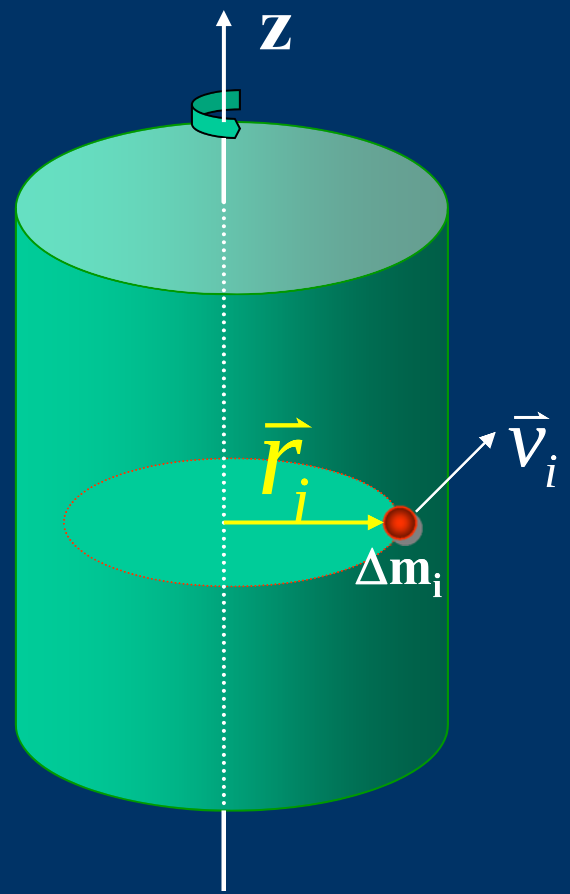
一、刚体转动动能

质元动能：$\dfrac{1}{2}\Delta m_i v_i^2=\dfrac{1}{2}\Delta m_i r_i^2\omega^2$

刚体的转动动能：

$$E_k=\sum\frac{1}{2}\Delta m_i r_i^2\omega^2=\frac{1}{2}\left(\sum\Delta m_i r_i^2\right)\omega^2$$

$$\boxed{E_k=\frac{1}{2}J\omega^2}$$



二、刚体重力势能

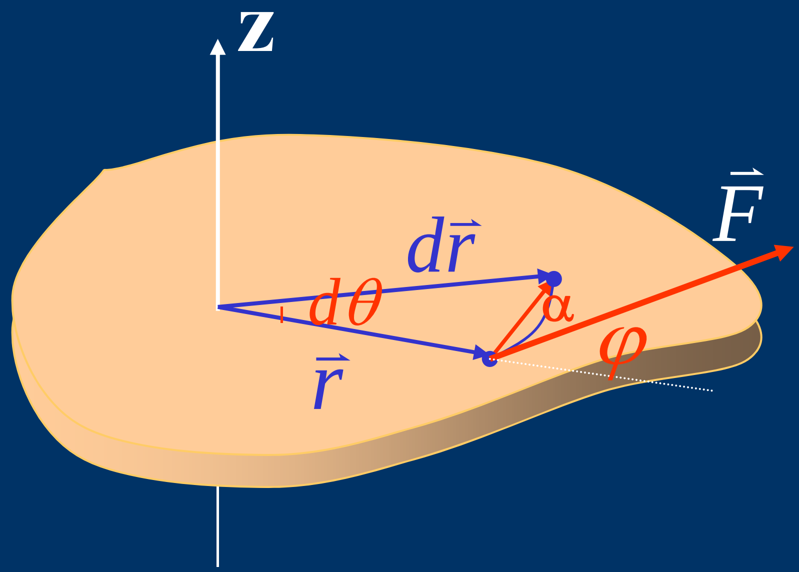
$$E_p = \sum \Delta m_i g z_i = mg \frac{\sum \Delta m_i z_i}{m} = mgz_c$$

$$\boxed{E_p = mgz_c}$$

一个不太大的刚体的重力势能和它的全部质量集中于质心时的重力势能一样。

二、力矩的功

$$dA = F\cos\alpha\, dr$$
$$= F\cos\alpha \cdot r d\theta$$
$$= Fr\sin\varphi \cdot d\theta$$
$$= M d\theta$$



$$\boxed{A = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M d\theta}$$

力矩的功

力矩的功：当刚体在外力矩作用下绕定轴转动而发生角位移时，就称力矩对刚体做功。

对于刚体定轴转动情形，因质点间无相对位移，任何一对内力作功为零。

三、刚体定轴转动的动能定理

$$dA = Md\theta = J\frac{d\omega}{dt}d\theta = J\omega\,d\omega$$

$$A = \int dA = \int_{\omega_1}^{\omega_2} J\omega\,d\omega = \frac{1}{2}J\omega_2^2 - \frac{1}{2}J\omega_1^2$$

$$\boxed{A = \frac{1}{2}J\omega_2^2 - \frac{1}{2}J\omega_1^2}$$

合外力矩对刚体所作的功等于刚体转动动能的增量。

四、刚体定轴转动的功能原理

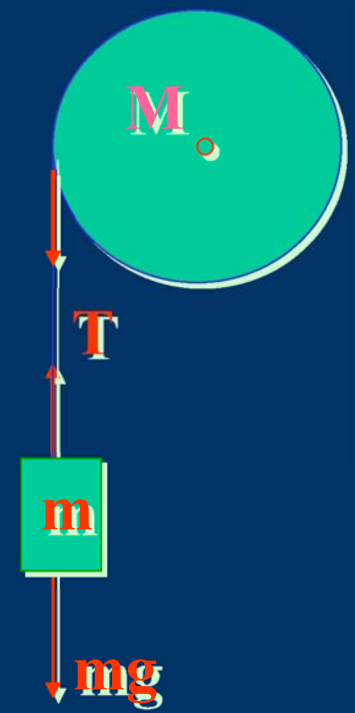
$$\int_{\theta_1}^{\theta_2}\left(M_{外}+M_{重}\right)d\theta=\frac{1}{2}J\omega_2^2-\frac{1}{2}J\omega_1^2$$

$$\boxed{\int_{\theta_1}^{\theta_2}M_{外}d\theta=\left(mgz_{c2}+\frac{1}{2}J\omega_2^2\right)-\left(mgz_{c1}+\frac{1}{2}J\omega_1^2\right)}$$

若 $\int_{\theta_1}^{\theta_2}M_{外}d\theta=0$ $\qquad E_2=E_1$

例4、一质量为 M 、半径 R 的实心滑轮，，一根细绳绕在其上，绳端挂有质量为 m 的物体。问物体由静止下落高度 h 时，其速度为多大?

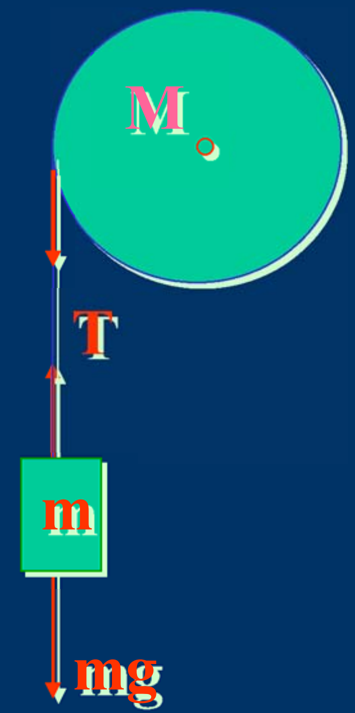
解：



例4、一质量为 M 、半径 R 的实心滑轮,，一根细绳绕在其上，绳端挂有质量为 m 的物体。问物体由静止下落高度 h 时，其速度为多大？

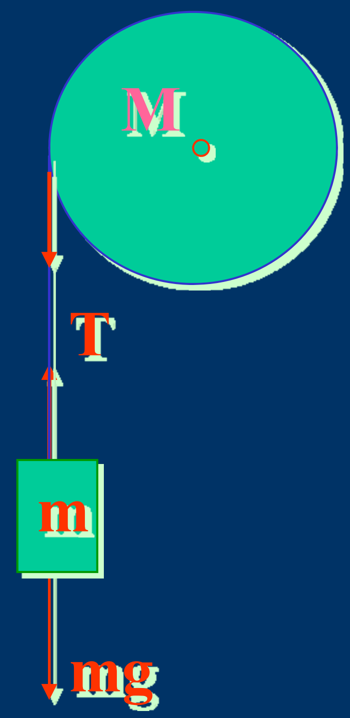
解：

$$\begin{cases} TR\,\Delta\varphi = \frac{1}{2}J\omega^2 - \frac{1}{2}J\omega_0^2 \\ mg\,h - T\,h = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 \\ h = R\,\Delta\varphi \\ v = R\omega \end{cases}$$



$$v_0 = 0 \quad , \omega_0 = 0 \quad , \quad J = MR^2/2$$

解得： $$v = 2\sqrt{\frac{mgh}{M+2m}}$$



亦可：

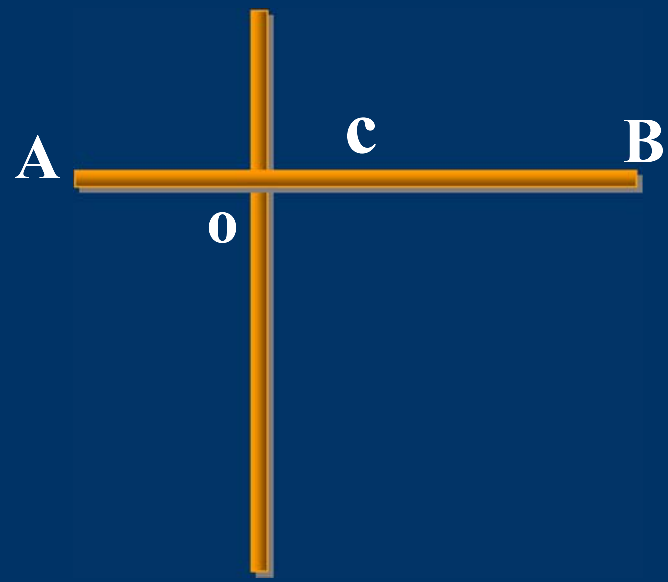
$$\begin{cases} mgh = \frac{1}{2}J\omega^2 + \frac{1}{2}mv^2 \\ v = R\omega \end{cases}$$

例5、一质量为 m 、长为 l 的均质细杆，转轴在 O 点，距A端 l/3 。杆从静止开始由水平位置绕O点转动。求：

（1）水平位置的角速度和角加速度。

（2）垂直位置时的角速度和角加速度。

解：



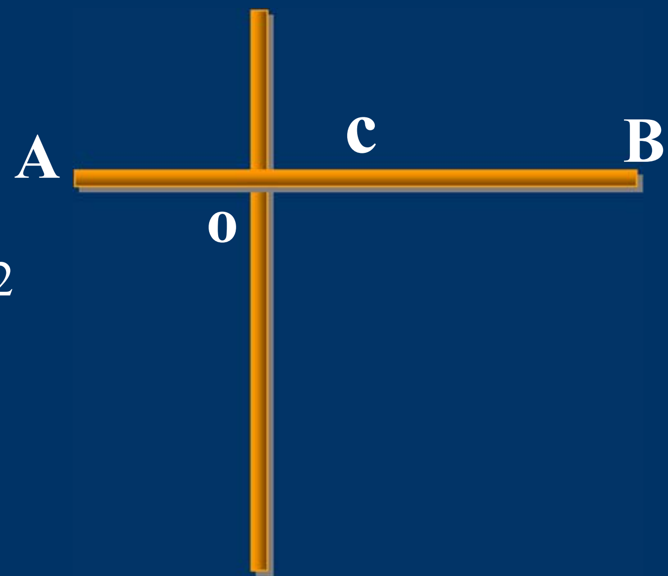
例5、一质量为 m 、长为 l 的均质细杆，转轴在 O 点，距A端 l/3 。杆从静止开始由水平位置绕O点转动。求：

（1）水平位置的角速度和角加速度。

（2）垂直位置时的角速度和角加速度。

解：

$$J_o = J_c + md^2$$



$$J_0 = \frac{1}{12}ml^2 + m\left(\frac{l}{6}\right)^2 = \frac{1}{9}ml^2$$

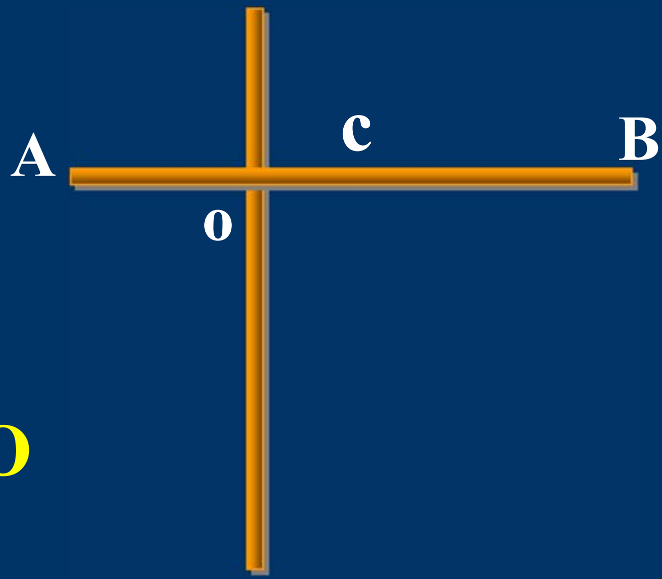
（1）水平 $\omega_o = 0$

$$mg\frac{l}{6} = \frac{1}{9}ml^2\beta \qquad \beta = \frac{3g}{2l}$$

（2）垂直

$$M=0,\quad \beta=0$$

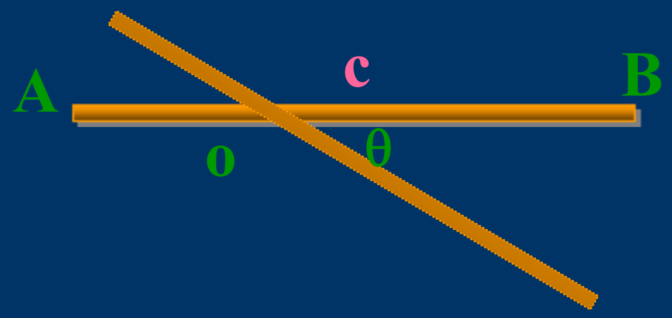
机械能守恒　　势能零点O



$$\frac{1}{2}J_0\omega^2-mg\frac{l}{6}=0+0$$

$$\omega=\sqrt{\frac{3g}{l}}$$

（3）任意位置



$$M = mg\frac{l}{6}\cos\theta = J_0\,\beta$$

$$\frac{1}{2}J_0\omega^2 - mg\frac{l}{6}\sin\theta = 0 + 0$$

势能零点O

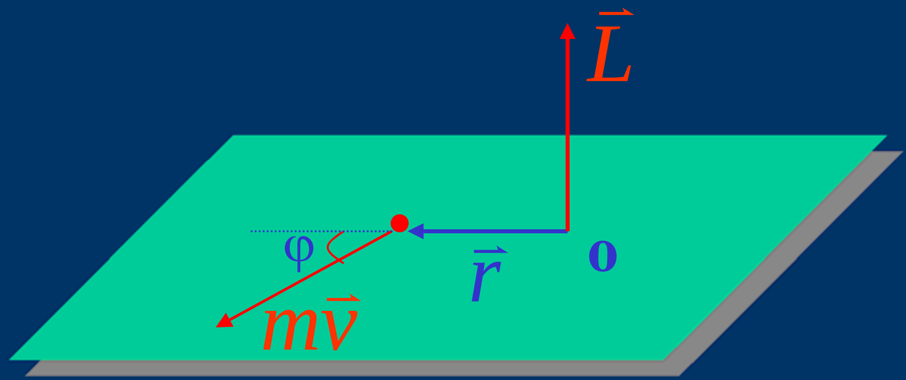
D、角动量守恒定律

用角动量来描述物体绕某定点（轴）旋转的机械运动量

一、质点的角动量

质点对0点的角动量：

$$\boxed{\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}}$$



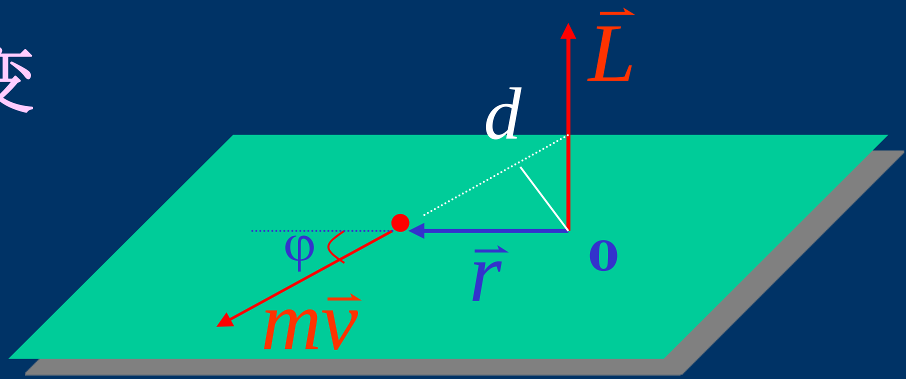
$$L = rp\sin\varphi = mvr\sin\varphi$$

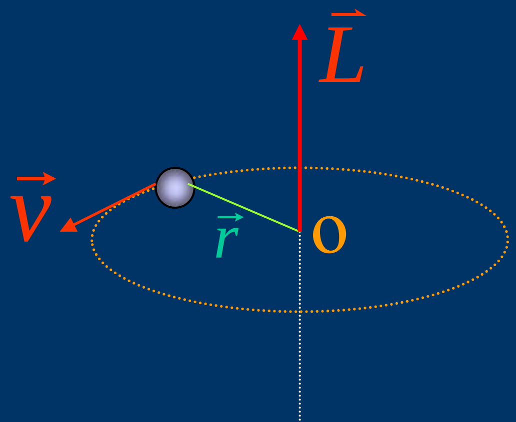
$kg \cdot m^2 \cdot s^{-1}$

匀速直线运动角动量不变

$$L = mvr\sin\varphi$$

$$= mvd$$





匀速率圆周运动：

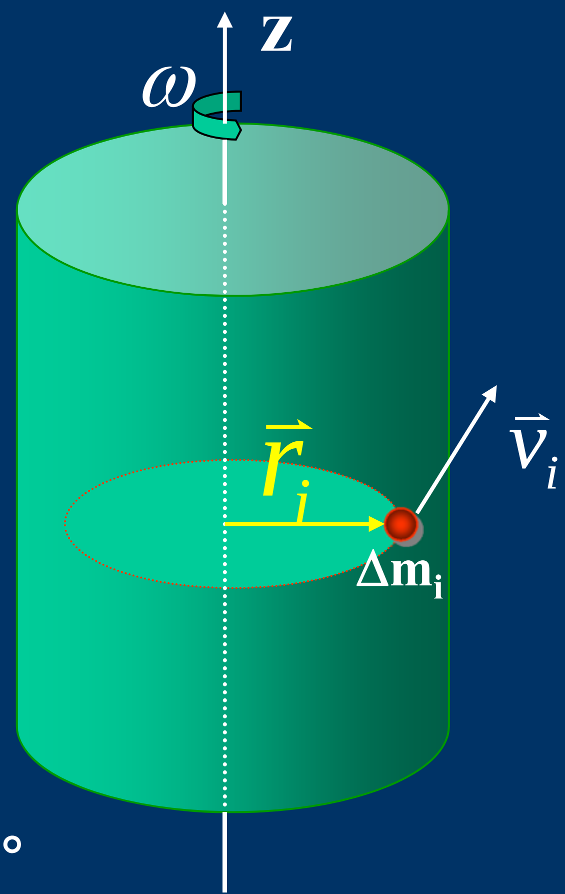
$$L = mvr = mr^2\omega = J\omega$$

$$\vec{L} = J\vec{\omega}$$

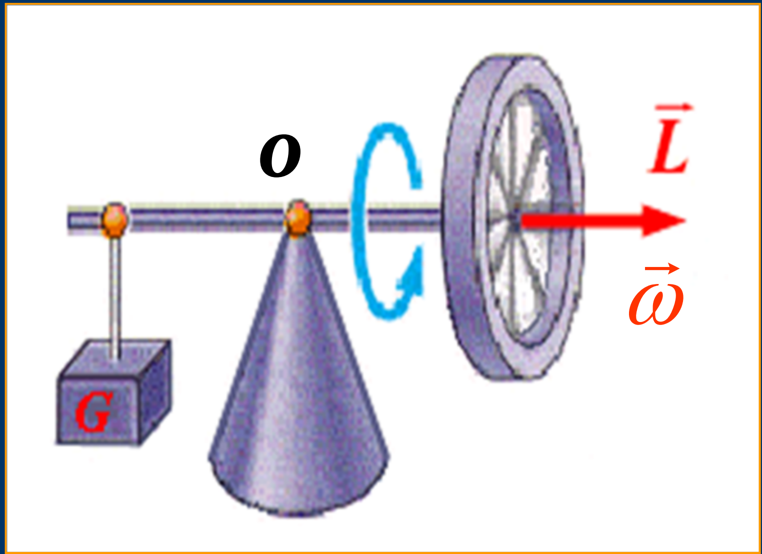
二、刚体对定轴的角动量

$$L_i = \Delta m_i r_i^2 \omega$$

$$\boxed{L_z = \sum \Delta m_i r_i^2 \omega = J_z \omega}$$



$\vec{L}$ 方向沿定轴，可用正、负表示方向。



$$\vec{L} = J\vec{\omega}$$

三、角动量定理

$$\boxed{\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}}$$

适用于质点、质点系

刚体定轴转动：

$$M_z = \frac{dL_z}{dt}$$

$$= \frac{d}{dt}(J_z\omega) = J_z\frac{d\omega}{dt} = J_z\beta$$

$$\boxed{\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}}$$

$$\boxed{\int_{t_1}^{t_2} \vec{M}dt = \vec{L}_2 - \vec{L}_1}$$

合外力矩的冲量矩等于质点系角动量的增量。

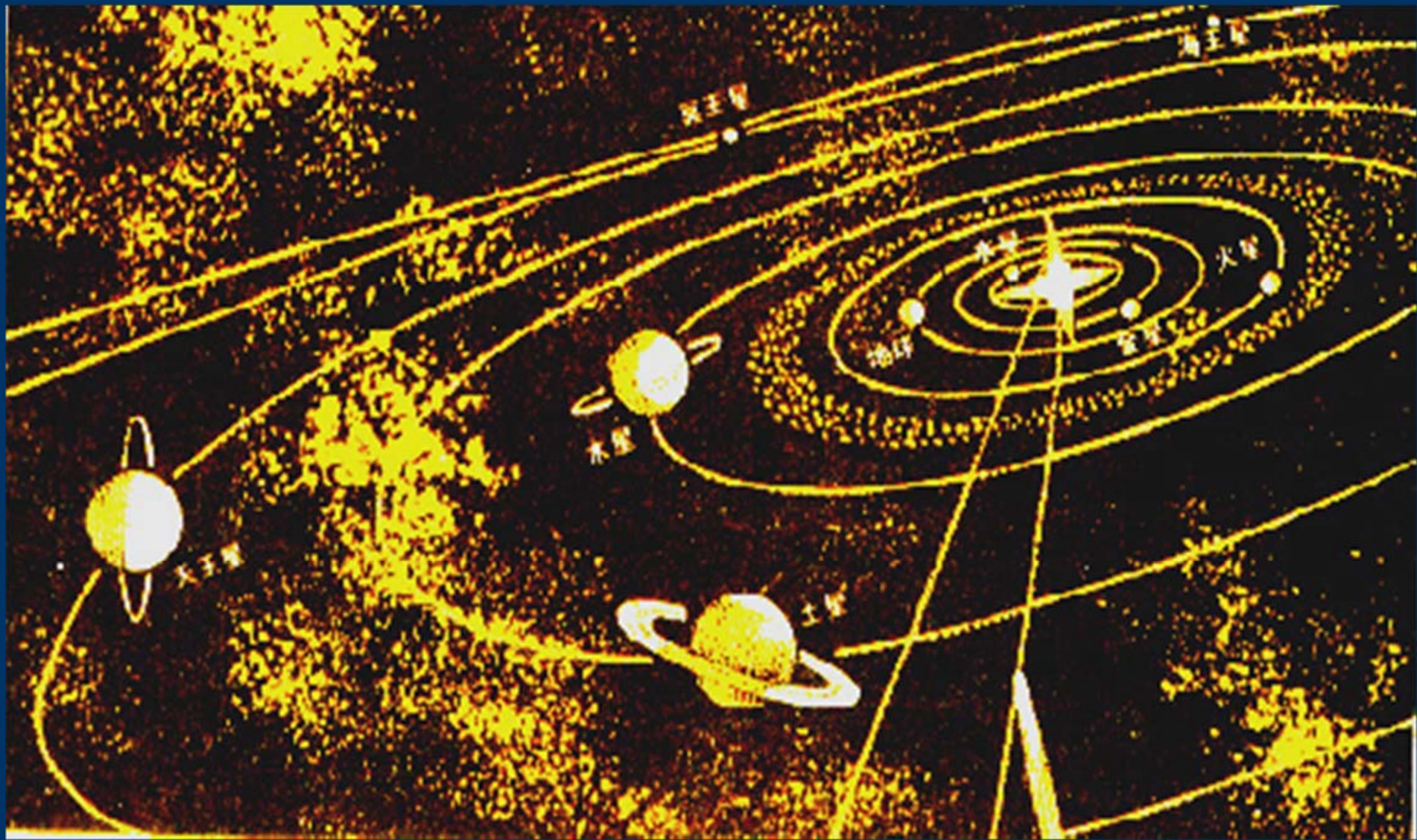
三、角动量守恒定律

若合外力矩为零，则系统的角动量守恒。

$$\vec{M} = 0\ ,\quad \frac{d\vec{L}}{dt} = 0\ ,\quad \vec{L} = \mathrm{const.}$$

$$J_2\vec{\omega}_2 = J_1\vec{\omega}_1$$

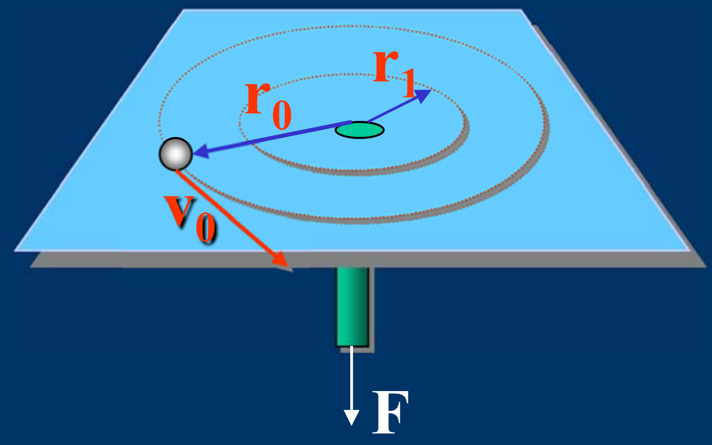
角动量守恒现象举例


海王星
火星
土星

直线运动与定轴转动规律对照

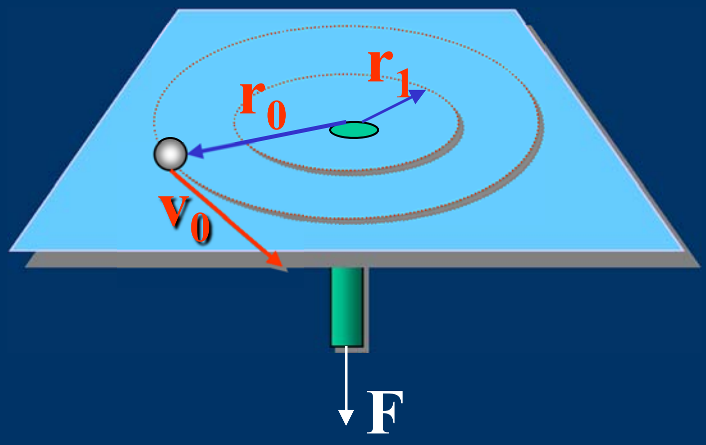
质点的直线运动	刚体的定轴转动
$v=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ $\quad a=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$	$\omega=\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$ $\quad \beta=\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$
$P=mv$ $\quad E_K=\dfrac{1}{2}mv^2$	$L=J\omega$ $\quad E_K=\dfrac{1}{2}J\omega^2$
F $\quad m$	M $\quad J$
$\mathrm{d}A=F\,\mathrm{d}x$ $\quad F\,\mathrm{d}t$	$\mathrm{d}A=M\,\mathrm{d}\theta$ $\quad M\,\mathrm{d}t$
$F=ma$	$M=J\beta$
$\int F\,\mathrm{d}t=P-P_0$	$\int M\,\mathrm{d}t=L-L_0$
$\int F\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}mv^2-\dfrac{1}{2}mv_0^2$	$\int M\,\mathrm{d}\theta=\dfrac{1}{2}J\omega^2-\dfrac{1}{2}J\omega_0^2$

例6、 质量为 m 小球系在绳子的一端，绳穿过铅直套管，使小球限制在一光滑水平面上运动。先使小球一速度 v_0 绕管心作半径为 r_0 的圆周运动，然后向下拉绳子，使小球运动半径变为 r_1 。求小球的速度以及外力所作的功。



解：

例6、 质量为 m 小球系在绳子的一端，绳穿过铅直套管，使小球限制在一光滑水平面上运动。先使小球一速度 v_0 绕管心作半径为 r_0 的圆周运动，然后向下拉绳子，使小球运动半径变为 r_1。求小球的速度以及外力所作的功。



解：角动量守恒

$$mv_0r_0 = mv_1r_1$$

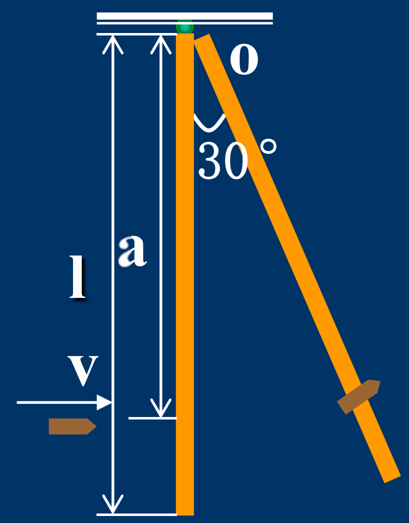
$$v_1 = v_0 \cdot \frac{r_0}{r_1}$$

动能定理：

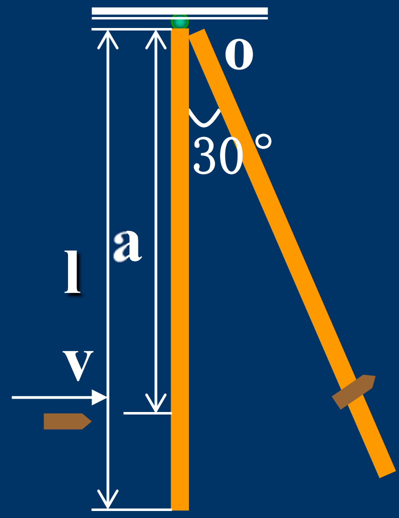
$$A = \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$$

例7、一长为 l，质量为 M 的杆可绕支点O自由转动。一质量为 m，速度为 v 的子弹射入距支点为 a 的棒内,若棒偏转角为 30°,问子弹的初速度为多少?

解:



例7、一长为 l ，质量为 M 的杆可绕支点O自由转动。一质量为 m ，速度为 v 的子弹射入距支点为 a 的棒内,若棒偏转角为 30°,问子弹的初速度为多少?



解：

角动量守恒（过程1）

$$mva = \left(\frac{1}{3} M l^2 + ma^2 \right) \omega$$

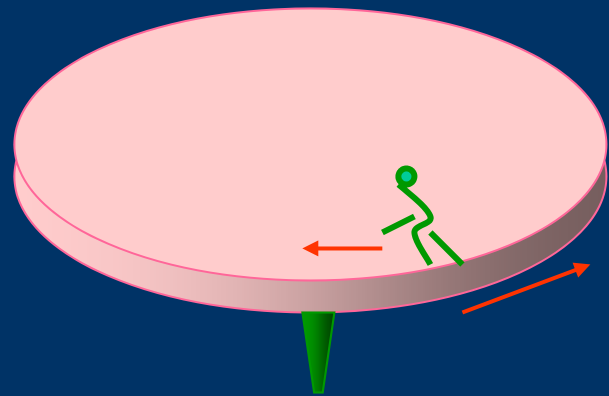
机械能守恒（过程2）

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} M l^2 + ma^2 \right) \omega^2$$

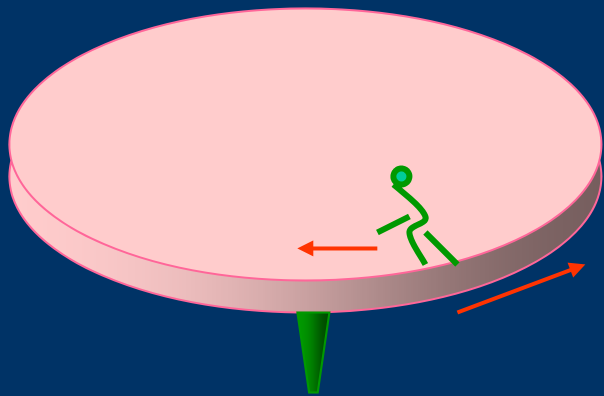
$$= mga(1 - \cos 30^\circ) + Mg \frac{l}{2}(1 - \cos 30^\circ)$$

例8： 质量为 M，半径为 R 的转台，可绕中心轴转动。设质量为 m 的人站在台的边缘上，初始时人、台都静止。如果人相对于台沿边缘奔跑一周，问：相对于地面而言，人和台各转过了多少角度？

解：



例8： 质量为 M ，半径为 R 的转台，可绕中心轴转动。设质量为 m 的人站在台的边缘上，初始时人、台都静止。如果人相对于台沿边缘奔跑一周，问：相对于地面而言，人和台各转过了多少角度？



解：　　角动量守恒：

$$\begin{cases} J_{台}\omega_{台地} + J_{人}\omega_{人地} = 0 \\ \omega_{人地} = \omega_{人台} + \omega_{台地} \end{cases}$$

$$\omega_{台地} = -\frac{J_{人}}{J_{人} + J_{台}}\omega_{人台}$$

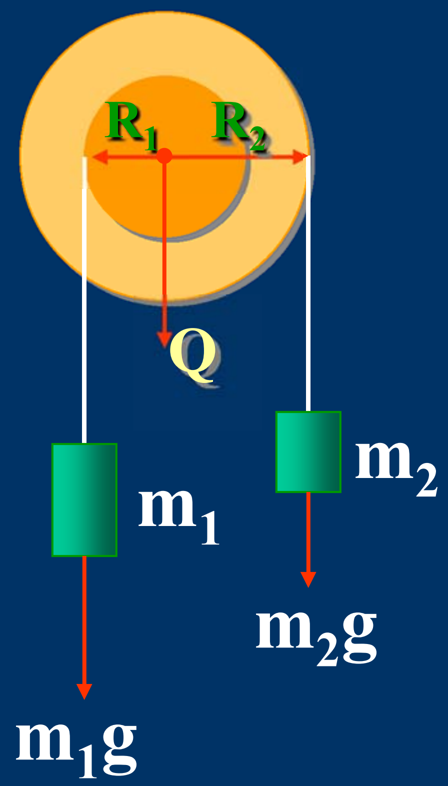
$$\int \omega_{台地} dt = -\frac{J_{人}}{J_{人} + J_{台}} \int \omega_{人台} dt$$

$$\Delta\theta_{台地} = -\frac{J_{人}}{J_{人} + J_{台}} 2\pi = -\frac{4\pi m}{2m + M}$$

$$\Delta\theta_{人地} = \Delta\theta_{人台} + \Delta\theta_{台地} = \frac{2\pi M}{2m + M}$$

例9、质量为 m_1 和 m_2 的两物体，分别挂在两条绳上，绳绕在鼓轮上（如图所示）。已知鼓轮的转动惯量为J，求两物体的加速度。

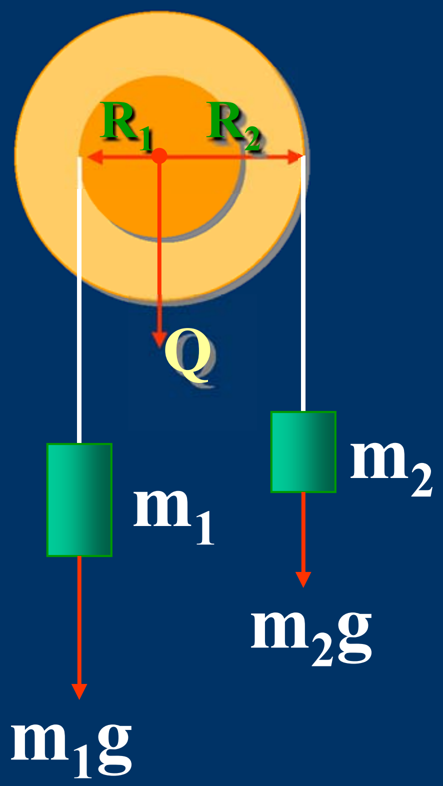
解：



例9、质量为 m_1 和 m_2 的两物体，分别挂在两条绳上，绳绕在鼓轮上（如图所示）。已知鼓轮的转动惯量为J，求两物体的加速度。

解：

系统角动量为：



$$L = m_1 R_1^2 \omega + m_2 R_2^2 \omega + J\omega$$

$$M = \frac{dL}{dt}$$

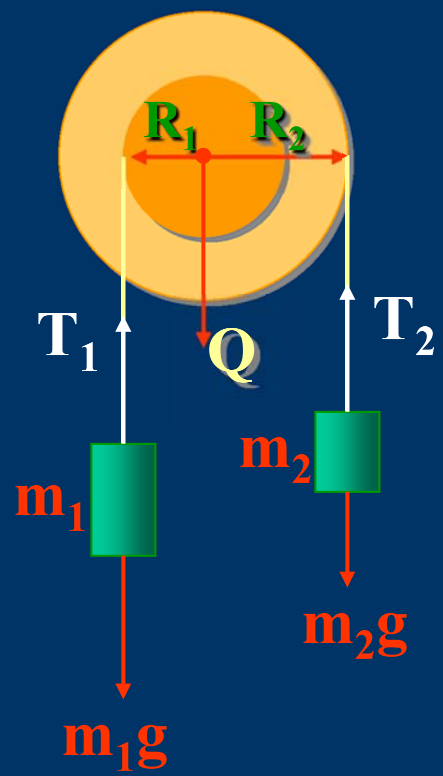
$$m_1 g R_1 - m_2 g R_2 = \left(m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2 + J\right) \frac{d\omega}{dt}$$

$$\beta = \frac{d\omega}{dt} = \frac{m_1 R_1 - m_2 R_2}{m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2 + J} g$$

$$a_1 = \beta R_1 = \frac{m_1 R_1 - m_2 R_2}{m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2 + J} g R_1$$

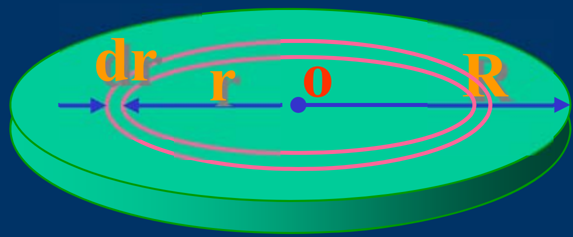
$$a_2 = \beta R_2 = \frac{m_1 R_1 - m_2 R_2}{m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2 + J} g R_2$$

$$\begin{cases} m_1 g - T_1 = m_1 a_1 \\ T_2 - m_2 g = m_2 a_2 \\ T_1 R_1 - T_2 R_2 = J\beta \\ a_1 = R_1 \beta \\ a_2 = R_2 \beta \end{cases}$$



例10、一半径为 R 、质量为 m 的均匀圆盘平放在粗糙的水平面上。若它的初速度为 ω_0，绕中心O旋转，问经过多长时间圆盘才停止。（设摩擦系数为 μ ）

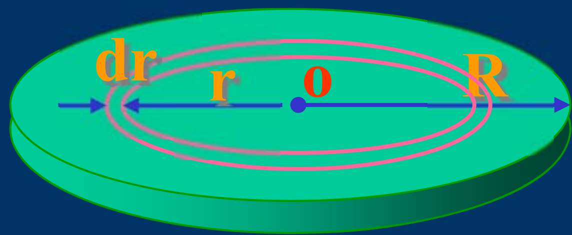
解：



例10、一半径为 R 、质量为 m 的均匀圆盘平放在粗糙的水平面上。若它的初速度为 ω_0，绕中心O旋转，问经过多长时间圆盘才停止。（设摩擦系数为 μ ）

解：

$$dM = dF \cdot r = -\mu\, dmg \cdot r$$

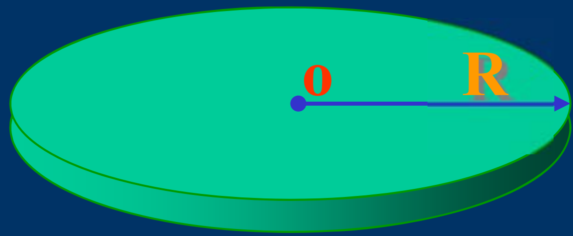


$$dm = \frac{m}{\pi R^2} \cdot 2\pi r \cdot dr = \frac{2mrdr}{R^2}$$

$$dM = -\frac{2m\mu g r^2 dr}{R^2}$$

$$M = \int dM = -\int_0^R \frac{2\mu m g r^2 dr}{R^2} = -\frac{2}{3}\mu m g R$$

用角动量定理



$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{M} dt = \vec{L}_2 - \vec{L}_1$$

$$\int_0^t -\frac{2}{3}\mu mgR dt = 0 - J\omega_0$$

$$t = \frac{3R\omega_0}{4\mu g}$$

例11、一个人站在有光滑固定转轴的转动平台上,双臂伸直水平地举起二哑铃,在该人把此二哑铃水平收缩到胸前的过程中,人、哑铃与转动平台组成的系统的

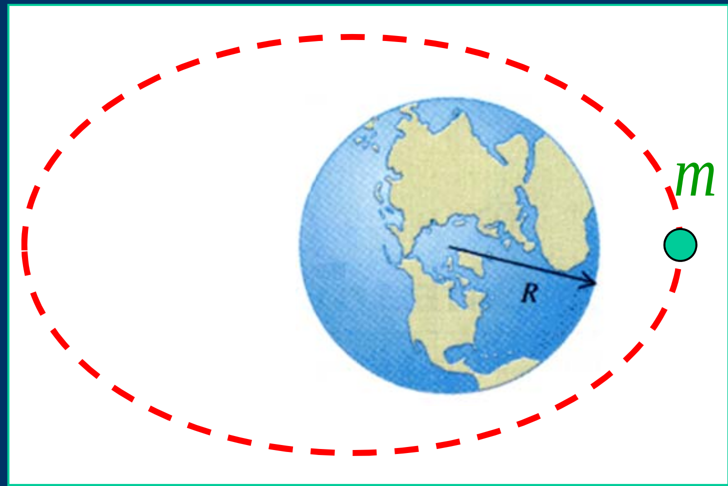
（A）机械能守恒，角动量守恒;

（B）机械能守恒，角动量不守恒,

（C）机械能不守恒，角动量守恒;

（D）机械能不守恒，角动量不守恒.

例12、人造地球卫星，绕地球作椭圆轨道运动，地球在椭圆的一个焦点上，则卫星的



(A) 动量不守恒，动能守恒；

(B) 动量守恒，动能不守恒；

(C) 角动量守恒，动能不守恒；

(D) 角动量不守恒，动能守恒。

作业：

3－6， 3－7， 3－15， 3－16．