厦门大学《微积分 I-1》课程期中试卷

试卷类型：（理工类 A 卷）　　考试日期　2017.12.2

一、计算下列各题（每小题 5 分，共 30 分）：

得　分	
评阅人	

1. 求 $\lim\limits_{x\to 0}(1+2\tan^2 x)^{\frac{1}{x\sin x}}$.

得　分	
评阅人	

2. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{2n^3+1}}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{2n^3+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt[3]{2n^3+n}}\right)$.

得　分	
评阅人	

3. 写出函数 $f(x)=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{x+\mathrm{e}^{tx}}{1+x\mathrm{e}^{tx}}$ 的表达式.

4. 求函数 $y=\ln(\mathrm{e}^x+\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}})$ 的导数 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

得　分	
评阅人	

5. 求函数 $y=\sqrt[3]{\dfrac{(x+1)(x+2)}{(1+x^2)(2+x^2)}}$ 在 $x=0$ 处的导数 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}$.

得　分	
评阅人	

6. 求函数 $y=\arctan\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$ 的微分 $\mathrm{d}y$ 和 $\mathrm{d}y\big|_{x=1}$.

得　分	
评阅人	

二、计算下列各题（每小题 8 分, 共 48 分）：

得　分	
评阅人	

1．试求函数 $f(x)=\dfrac{x-x^2}{|x|(x^2-1)}$ 的间断点，并说明间断点的类型. 如果是第一类间断点，说明是可去间断点还是跳跃间断点.

得　分	
评阅人	

2. 求曲线 $\begin{cases} x=\dfrac{t}{1+t^2} \\ y=\dfrac{t^2}{1+t^2} \end{cases}$ 在 $t=2$ 所对应点处的切线方程和法线方程.

3. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\frac{1}{3}x^2-\sqrt[3]{1+x^2}}{\mathrm{e}^{-x^2}-1+x\sin x}$.

得　分	
评阅人	

4. 求由方程 $y=\tan(x+y)$ 所确定的隐函数 $y=y(x)$ 的导数 $y'(x)$ 和 $y''(x)$.

得　分	
评阅人	

5. 设 $f(x)=\begin{cases}\varphi(x)\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$，其中 $\varphi(0)=\varphi'(0)=0$，求 $f'(0)$.

得　分	
评阅人	

6. 已知 $y = x^2\cos^2 x + \dfrac{1}{1+x}$，求 $y^{(n)}(0)\ \ (n \geq 3)$.

得　分	
评阅人	

三、设 $-1 < x_1 < 0$， $x_{n+1} = x_n^2 + 2x_n$，$n = 1, 2, \cdots$. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在，并求出 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.（本题 **10** 分）

得　分	
评阅人	

四、证明下列各题（每小题 6 分，共 12 分）：

得　分	
评阅人	

1. 设函数 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 上连续，在 $(1,2)$ 内可导，且 $f(2)=2f(1)$. 证明：存在 $\xi\in(1,2)$，使得 $\xi f'(\xi)-f(\xi)=0$.

得　分	
评阅人	

2. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内具有连续的二阶导数. 证明：存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(b)-2f(\frac{a+b}{2})+f(a)=\frac{(b-a)^2}{4}f''(\xi)$.