厦门大学《微积分 I-1》课程期末试卷

试卷类型：（理工类 A 卷）　考试日期　2019.01.16

一、求下列的定积分（每小题 6 分，共 18 分）：

1. $\int_{-3}^{1} \frac{x}{1+\sqrt{1-x}} \mathrm{d}x$；

解法一：$\int_{-3}^{1} \frac{x}{1+\sqrt{1-x}} \mathrm{d}x = \int_{-3}^{1} 1-\sqrt{1-x} \ \mathrm{d}x$

$$= 4 + \frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}} \Big|_{-3}^{1}$$

$$= 4 + \frac{2}{3}(0-8) = -\frac{4}{3}$$

解法二：令 $t=\sqrt{1-x}$，则 $x = 1-t^2$，

$$\int_{-3}^{1} \frac{x}{1+\sqrt{1-x}} \mathrm{d}x = \int_{2}^{0} \frac{1-t^2}{1+t} \mathrm{d}(1-t^2)$$

$$= \int_{2}^{0} 2t^2 - 2t \ \mathrm{d}t$$

$$= (\frac{2}{3}t^3 - t^2) \Big|_{2}^{0}$$

$$= 0 - (\frac{2}{3}\cdot 2^3 - 2^2) = -\frac{4}{3}$$

2. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\sin x}{1+\cos x} \mathrm{d}x$；

解法一：$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\sin x}{1+\cos x} \mathrm{d}x = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\cos x} \mathrm{d}x + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\cos x} \mathrm{d}x$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2} \mathrm{d}x + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}(1+\cos x)}{1+\cos x}$$

$$= \tan\frac{x}{2} \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \ln(1+\cos x) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=1-(-1)+0=2$$

解法二：利用奇偶性。

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\sin x}{1+\cos x}\mathrm{d}x=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\cos x}\mathrm{d}x+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+\cos x}\mathrm{d}x$$

$$=2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\cos x}\mathrm{d}x+0$$

$$=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sec^2\frac{x}{2}\mathrm{d}x$$

$$=2\tan\frac{x}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=2$$

3. $\int_0^1 x\cdot\arccos x\,\mathrm{d}x$ 。

解法一：令 $t=\arccos x$，则 $x=\cos t$ ，

$$\int_0^1 x\cdot\arccos x\ \mathrm{d}x=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}t\cdot\cos t\ \mathrm{d}(\cos t)$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\cdot\sin 2t\ \mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{8}(-2t\cdot\cos 2t+\sin 2t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{\pi}{8}$$

解法二： $\int_0^1 x\cdot\arccos x\ \mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^1\arccos x\ \mathrm{d}x^2$

$$=\frac{1}{2}x^2\arccos x\Big|_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1 x^2\ \mathrm{d}(\arccos x)$$

$$=0+\frac{1}{2}\int_0^1\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$$

$$=0-\frac{1}{2}\int_0^1\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$$

$$=0-\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\arcsin x\Big|_0^1$$

$$=-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{8}$$

二、求下列的不定积分（每小题 6 分，共 12 分）：

1. $\int\frac{\mathrm{d}x}{x(1+\ln x)}$；

解：$\int\frac{\mathrm{d}x}{x(1+\ln x)}=\int\frac{\mathrm{d}(\ln x)}{1+\ln x}$

$$=\int\frac{\mathrm{d}(1+\ln x)}{(1+\ln x)}$$

$$=\ln|1+\ln x|+C$$

2. $\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2-1}}$。

解：当 $x>1$ 时，令 $x=\sec t, t\in(0,\frac{\pi}{2})$，则 $\sqrt{x^2-1}=\tan t$，代入

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2-1}}=\int\frac{\mathrm{d}(\sec t)}{\sec^2 t\cdot\tan t}=\int\cos t\,\mathrm{d}t$$

$$=\sin t+C=\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}+C$$

当 $x<-1$ 时，令 $u=-x$，则 $u>1$ 且

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2-1}}=-\int\frac{\mathrm{d}u}{u^2\sqrt{u^2-1}}=-\frac{\sqrt{u^2-1}}{u}+C=\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}+C$$

（或者因为 $\frac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}}$ 是偶函数，所以当 $x<-1$ 时，$\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2-1}}=-\frac{\sqrt{(-x)^2-1}}{-x}+C$ $=\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}+C$）。综上所述，$\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2-1}}=\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}+C$。

三、（8 分）求反常积分$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(x+\sqrt{x})(1+x)}$。

解法一：令$t=\sqrt{x}$，则$x=t^2$

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(x+\sqrt{x})(1+x)}=\int_0^{+\infty}\frac{dt^2}{(t^2+t)(1+t^2)}$$

$$=2\int_0^{+\infty}\frac{dt}{(1+t)(1+t^2)}$$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{1}{t+1}-\frac{t}{t^2+1}+\frac{1}{t^2+1}dt=\frac{1}{2}\ln|\frac{(t+1)^2}{t^2+1}|\Big|_0^{+\infty}+\arctan t\Big|_0^{+\infty}$$

$$=\frac{1}{2}(0-0)+(\frac{\pi}{2}-0)=\frac{\pi}{2}$$

解法二：令$t=\sqrt{x}$，则$x=t^2$

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(x+\sqrt{x})(1+x)}=2\int_0^{+\infty}\frac{dt}{(1+t)(1+t^2)}$$

注意到$2\int_0^{+\infty}\frac{dt}{(1+t)(1+t^2)}\overset{u=\frac{1}{t}}{=}2\int_0^{+\infty}\frac{t}{(1+t)(1+t^2)}dt$

因此$2\int_0^{+\infty}\frac{dt}{(1+t)(1+t^2)}=\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+t)(1+t^2)}+\frac{t}{(1+t)(1+t^2)}dt=\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t^2}dt$

$=\arctan t\Big|_0^{+\infty}=\frac{\pi}{2}$。

四、（8 分）设$f(x)=\int_x^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t}{t}\,dt$，求定积分$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x+1)e^x\cdot f(x)\,dx$。

解：$f(\frac{\pi}{2})=0$，　$f'(x)=-\frac{\sin x}{x}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x+1)e^x\cdot f(x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)d(xe^x)$$

$$=xe^x f(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\sin x dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\sin x dx$$

$\because \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x \mathrm{d}x = e^x(\sin x - \cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x \mathrm{d}x$

$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+1)e^x \cdot f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}(e^{\frac{\pi}{2}} + 1)$

五、（10 分）求函数 $f(x) = 5\sqrt{4+x^2} - 3x$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上的极值和最值，并判定其图形的凹凸性。

解：$f'(x) = \frac{5x}{\sqrt{4+x^2}} - 3$，$f''(x) = \frac{20}{(\sqrt{4+x^2})^3} > 0$

令 $f'(x) = 0$，解得唯一的可疑极值点：$x = \frac{3}{2}$。

因为 $f''(\frac{3}{2}) > 0$，所以 $x = \frac{3}{2}$ 是极小值点，进而是最小值点（此结论也可以通过单调性给出：

因为 $f''(x) > 0$，所以 $f'(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上是单调增加的，因此当 $x < \frac{3}{2}$ 时，$f'(x) < f'(\frac{3}{2}) = 0$，

此时 $f(x)$ 是单调减少的；当 $x > \frac{3}{2}$ 时，$f'(x) > f'(\frac{3}{2}) = 0$，此时 $f(x)$ 是单调增加的。故 $x = \frac{3}{2}$ 是极小值点，也是最小值点）。

又因为 $f(x) = 5\sqrt{4+x^2} - 3x > 2x$，所以 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$，所以 $f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上没有最大值。

综上所述，$f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上在 $x = \frac{3}{2}$ 取得极小值和最小值 $f(\frac{3}{2}) = 8$，无极大值和最大值。

又因为 $f''(x) = \frac{20}{(\sqrt{4+x^2})^3} > 0$，所以其函数图形是凹的。

六、（8 分）试求常数 a,b，使得当 $x \to 0$ 时，函数 $f(x) = x - a\sin x - b\sin 2x$ 是关于 x 的 5 阶无穷小。

解：当 $x \to 0$ 时，

$$f(x) = x - a[x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + o(x^5)] - b[2x - \frac{1}{3!}(2x)^3 + \frac{1}{5!}(2x)^5 + o(x^5)]$$

$$= (1-a-2b)x + \frac{a+8b}{6}x^3 - \frac{a+32b}{5!}x^5 + o(x^5)$$

根据题意，有 $a+2b=1$， $a+8b=0$， $a+32b\neq 0$，解得 $a=\dfrac{4}{3}$， $b=-\dfrac{1}{6}$。

七、（8 分）求心形线 $\rho=1+\cos\theta, 0\le\theta\le 2\pi$ 的长度 s。

解：$\mathrm{d}s=\sqrt{\rho^2+(\rho')^2}\,\mathrm{d}\theta=\sqrt{(1+\cos\theta)^2+(-\sin\theta)^2}\,\mathrm{d}\theta=2\,|\cos\dfrac{\theta}{2}|\mathrm{d}\theta$

由图形对称性， $s=2\int_0^{\pi}2\,|\cos\dfrac{\theta}{2}|\,\mathrm{d}\theta$

$=4\int_0^{\pi}\cos\dfrac{\theta}{2}\,\mathrm{d}\theta=8\sin\dfrac{\theta}{2}\Big|_0^{\pi}=8$

八、（14 分）过坐标原点作曲线 $y=e^x$ 的切线，该切线与曲线 $y=e^x$ 及 y 轴围成平面图形 D，试求：

（1）平面图形 D 的面积 A;

（2）平面图形 D 绕 y 轴旋转一周所形成的旋转体的体积 V。

解：设切点为 (x_0, e^{x_0})，因为此切线过坐标原点，因此其切线斜率满足 $y'|_{x=x_0}=e^{x_0}=\dfrac{e^{x_0}-0}{x_0-0}$，

解得 $x_0=1$，从而此切线方程为 $y=e\cdot x$，切点为 $(1, e)$。

（1） $A=\int_0^1 e^x-e\cdot x\ \mathrm{d}x$

$=(e^x-\dfrac{e}{2}x^2)\Big|_0^1$

$=(e-\dfrac{e}{2})-(1-0)=\dfrac{e}{2}-1$

（2）方法一： $V=\dfrac{\pi}{3}\cdot 1^2\cdot e-\pi\int_1^e(\ln y)^2\ \mathrm{d}y$

$\overset{t=\ln y}{=}\dfrac{\pi}{3}e-\pi\int_0^1 t^2 e^t\ \mathrm{d}t=\dfrac{\pi}{3}e-\pi e^t(t^2-2t+2)\Big|_0^1$

$=\dfrac{\pi}{3}e-\pi(e-2)=2\pi(1-\dfrac{1}{3}e)$

方法二（柱壳法）： $V=2\pi\int_0^1 x\cdot(e^x-e\cdot x)\,\mathrm{d}x$

$=2\pi[(x-1)\cdot e^x-\dfrac{e}{3}x^3]\Big|_0^1$

$$=2\pi(1-\frac{1}{3}e)$$

九、（8 分）设非负函数 $f(x)$ 在区间$[a,b]$上连续，且$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=0$。证明：在区间$[a,b]$上 $f(x)\equiv 0$。

证法一：令 $F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$， $x\in[a,b]$，

则 $F(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可导，且 $F'(x)=f(x)\ge 0$，从而 $F(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上不减，即有 $F(a)\le F(x)\le F(b)$。

又 $F(a)=F(b)=0$，因此 $F(x)\equiv 0$，故有 $f(x)=F'(x)\equiv 0$。

证法二：用反证法。假设 $f(x)\not\equiv 0$，则存在 $x_0\in[a,b]$，使得 $f(x_0)>0$。因为 $f(x)$ 在 x_0 连续，所以 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)>0$，由极限局部保号性，存在区间$[\alpha,\beta]\subset[a,b]$，使得 $f(x)>\frac{1}{2}f(x_0)$，$\forall x\in[\alpha,\beta]$。

从而 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^\alpha f(x)\mathrm{d}x+\int_\alpha^\beta f(x)\mathrm{d}x+\int_\beta^b f(x)\mathrm{d}x$

$$\ge\int_\alpha^\beta f(x)\mathrm{d}x\ge\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta f(x_0)\mathrm{d}x=\frac{f(x_0)}{2}(\beta-\alpha)>0$$

这与已知条件 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=0$ 矛盾，因此 $f(x)\equiv 0$。

十、（本题共 10 分，第一小题 6 分，第二小题 4 分）设函数 $f(x)$ 在区间$[a,b]$上连续，其值域为 I。函数 $\varphi(u)$ 在 I 上二阶可导，且对于 I 上任意的一点 u 都有 $\varphi''(u)\ge 0$。

证明 Jensen 不等式：$\varphi(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x)\le\frac{1}{b-a}\int_a^b\varphi(f(x))\,\mathrm{d}x$。

证明：因为函数 $f(x)$ 在区间$[a,b]$上连续，所以由积分中值定理，存在 $x_0\in(a,b)$，使得 $f(x_0)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x)$。

由泰勒公式，存在 ξ 在 $f(x_0)$ 与 $f(x)$ 之间，使得

$$\varphi(f(x))=\varphi(f(x_0))+\varphi'(f(x_0))\,(f(x)-f(x_0))+\frac{\varphi''(\xi)}{2}(f(x)-f(x_0))^2$$

因为$\varphi''(\xi)\geq 0$，所以有

$$\varphi(f(x_0))+\varphi'(f(x_0))(f(x)-f(x_0))\leq\varphi(f(x))$$

两边从 a 到 b 积分，得

$$\int_a^b\varphi(f(x_0))\,\mathrm{d}x+\varphi'(f(x_0))\int_a^b f(x)-f(x_0)\,\mathrm{d}x\leq\int_a^b\varphi(f(x))\,\mathrm{d}x$$

整理得

$$\varphi(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x)=\varphi(f(x_0))\leq\frac{1}{b-a}\int_a^b\varphi(f(x))\,\mathrm{d}x$$