离散数学

Discrete Mathematics

吴梅红

厦门大学计算机科学系

E-mail: wmh@xmu.edu.cn

4.6 函数(Function)的定义和性质

- 高等数学中, 函数的定义域和值域都是在数集上讨论, 这种函数一般是连续或分段连续的。
- 集合论将函数的概念推广到对离散量的讨论, 将函数看作是一种 特殊的二元关系, 其定义域和值域可以是各类集合。
- 计算机科学把程序的输出看作是输入的函数, 并充分运用数学分析对函数研究的成果, 在高级程序设计语言的标准子程序库中的**Sqrt(x)**、**Sin(x)**、**Log(x)**等就是按**Taylor**级数展开而编成供使用时直接调用。

- 两个集合上的二元关系是一个意义相当广泛的概念，没有对两个集合的元素作任何特殊的限制。
- 函数作为特殊的二元关系，函数概念表明了两个集合元素之间的多对一关系。

定义 4.27 设F为二元关系，若 $\forall x \in \mathrm{dom}\ F$都存在惟一的$y \in \mathrm{ran}\ F$成立，则称F为函数或映射。

记作 $<x, y> \in F \Leftrightarrow xFy \Leftrightarrow y = F(x)$ (单值表示)，

并称y为F在x点的值。 ∎

- 由定义知，$\varnothing$是函数，称其为空函数。

定义 4.29 设A, B为集合, 如果f 为函数, 且 dom f = A,

ran f ⊆ B, 则称f 为从A到B的函数, 记作 $f : A \to B$。 ▌

- 当 A = B, 函数也称变换。
- 例 函数$f : N \to N$, $f(x) = 2x$是从N到N的函数(变换)。

  $g : N \to N$, $g(x) = 2$也是是从N到N的函数(变换) 。

定义 4.30 所有从A到B的函数的集合记作 B^A 或 $A \to B$,

读作 "B上A", 即

$$B^A = A \to B = \{f \mid f: A \to B\}。$$ ▌

- 设集合A = |n| ≥1, 集合B = |m|≥1, 从A到B共有 $2^{n\times m}$ 个不同的二元关系, 但并非每个关系都是函数,

  那么究竟有多少个关系是函数呢?

定理 设A、B均为有限集合, 则从A到B共有 $|B|^{|A|}$个不同的函数。 / $^*B^A$

证 设 $|A| = n$, $|B| = m$。因为

任一函数f 是由A中n 个元素的取值所唯一确定的,

A中的任一元素a, f 在a 处的取值都有m种可能, 所以

A到B可以定义 $\underbrace{m \cdot m \ldots m}_{n} = m^n = |B|^{|A|}$个不同的函数。

- 当$A = \varnothing$, B^A中只有空函数, 即 $B^A = \{\varnothing\}$。
- 当$A \neq \varnothing$而$B = \varnothing$时, $B^A = \varnothing$, 即此时, A到B没有函数。

例 设 $A = \{a, b, c\}$, $B = \{0, 1\}$, $|A| = 3$, $|B| = 2$,

从A到B共有 $2^{3\times 2} = 2^6 = 64$个不同的二元关系。

- 但仅有$|B|^{|A|} = 2^3 = 8$个不同的函数, 它们是:

$f_0 = \{\langle a, 0\rangle, \langle b, 0\rangle, \langle c, 0\rangle\}$;

$f_1 = \{\langle a, 0\rangle, \langle b, 0\rangle, \langle c, 1\rangle\}$;

$f_2 = \{\langle a, 0\rangle, \langle b, 1\rangle, \langle c, 0\rangle\}$;

$f_3 = \{\langle a, 0\rangle, \langle b, 1\rangle, \langle c, 1\rangle\}$;

$f_4 = \{\langle a, 1\rangle, \langle b, 0\rangle, \langle c, 0\rangle\}$;

$f_5 = \{\langle a, 1\rangle, \langle b, 0\rangle, \langle c, 1\rangle\}$;

$f_6 = \{\langle a, 1\rangle, \langle b, 1\rangle, \langle c, 0\rangle\}$;

$f_7 = \{\langle a, 1\rangle, \langle b, 1\rangle, \langle c, 1\rangle\}$。

- 一般地, A到B的一个函数决定A到B的一个关系, 反之却不一定正确。

- 设A和B是集合, 函数与关系之间的区别和联系是:
- A到B函数首先是一种关系, 但它是一种特殊的关系, 而任一从A到B的关系未必函数。
- 从A到B的关系是指A × B的子集, 它只要求序偶中第一元素属于A, 第二元素属于B。
- 函数特殊要求:

(1) 函数的定义域是A, 它必须对A中每个元素都有定义, 即其中 序偶的第一元素取遍了A中所有元素。

(2) 函数要求A中 一个元素 只对应一个象, 单值。

- 关系中序偶第一元素可能只对A的某个真子集有 定义。而关系中一个元素可以对应多个象, 多值。

定义 4.28 设有函数 $f: A \to B$ 和 $g: C \to D$, 如果 $A = C$, $B = D$, 并且 $\forall a \in A$ (或 $a \in C$), 都有 $f(a) = g(a)$, 则称函数 f 和 g 相等, 记作 $f = g$。

定义 设有函数 $f: A \to B$, $g: C \to B$, 如果 $C \subseteq A$, 且对于 $\forall a \in C$, 有 $g(a) = f(a)$, 则称 g 是 f 在 C 上的限制, f 是 g 到 A 的扩充。

- 当对 g 无定义处规定一个值 (补充定义), 可构造出 g 的一个扩充。

例 $f(x) = \sqrt{x}$; $g(x, y) = \frac{x}{y}$ 规定:

若 $x < 0$, $f(x) = 0$; $g(x, 0) = 0$。

定义 4.31 设 $f: A \to B$, $A_1 \subseteq A$, $B_1 \subseteq B$, 则称

$$f(A_1) = \{ f(x) \mid x \in A_1 \}$$

为 A_1在f 下的像, 特别地, 称 $f(A)$为函数的像。

称 $f^{-1}(B_1) = \{x \mid x \in A \wedge f(x) \in B_1\}$为$B_1$的 原象。 ■

- 若f: A B, 则 $f(A) = \mathrm{ran}\, f$, $f^{-1}(\mathrm{ran}\, f) = A$。

例 设 $f: R \to R$, 且$f(x) = x^2$,

- 取 $A_1 = [0, +\infty)$, $A_2 = [1, 3)$, $A_3 = R$,

则 $f(A_1) = [0, +\infty)$, $f(A_2) = [1, 9)$, $f(A_3) = [0, +\infty)$。

- 取 $B_1 = (1, 4)$, $B_2 = [0, 1]$, $B_3 = R$, 则

$f^{-1}(B_1) = (-2, -1) \cup (1, 2)$, $f^{-1}(B_2) = [-1, 1]$, $f^{-1}(B_3) = R$。

- 根据函数的不同对应关系, 可将函数进行分类。

定义 4.32 设 $f: A \to B$

(1) 若 $\mathrm{ran}\, f = B$, 即 $f(A) = B$, 则称f 是**满射(surjection)**的,

也称**映上**的或**到上**的函数。 ▌

- 或定义为 值域B中每个元素都有原象存在,

  即 $\forall y \in B, \exists x \in A$, 使得 $f(x) = y$。 ▌

- 当然, 对于同一个y, 可能有多个x与之对应。

(2) 若 $\forall y \in \mathrm{ran}\, f$ 都存在惟一的 $x \in \mathrm{dom}\, f = A$,

使得 $f(x) = y$, 则称 f是**单射(injection)/内射/入射**的

或称**一对一**映射。 ▌ /* 要求不同元素对应不同的象

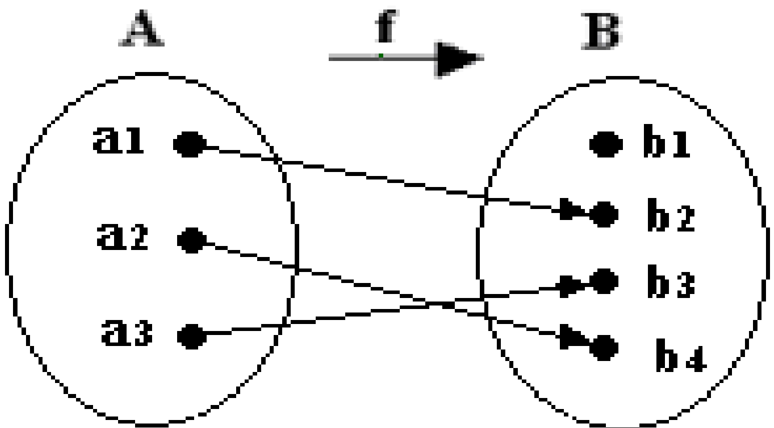
- 即 $\forall x_i, x_j \in A$ 且 $x_i \neq x_j$, 必有 $f(x_i) \neq f(x_j)$ 或逆否
- 等价定义: $\forall x_i, x_j \in A$, 若 $f(x_i) = f(x_j)$ 时, 必有 $x_i = x_j$。

(3) 若f 既是满射又是单射的, 则称f 为双射(bijection)。

双射函数也称一一对应或一一到上的。 ∎

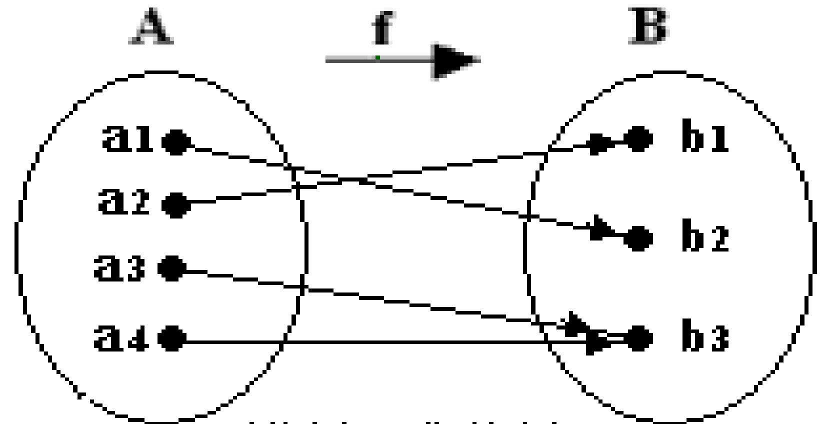
- 要证明某个映射是单射时, 通常使用它的等价定义。
- 要证明某个映射是满射时, 可以直接按定义来求, 或者通过集合的运算得到。
- 要说明一个映射不是单射, 只需找到两个不同的点有相同的象即可。
- 要说明一个映射不是满射, 则需只需在B中找到某个点, 说明它不存在原象。

- 下图可加深对这三种函数区别的理解：



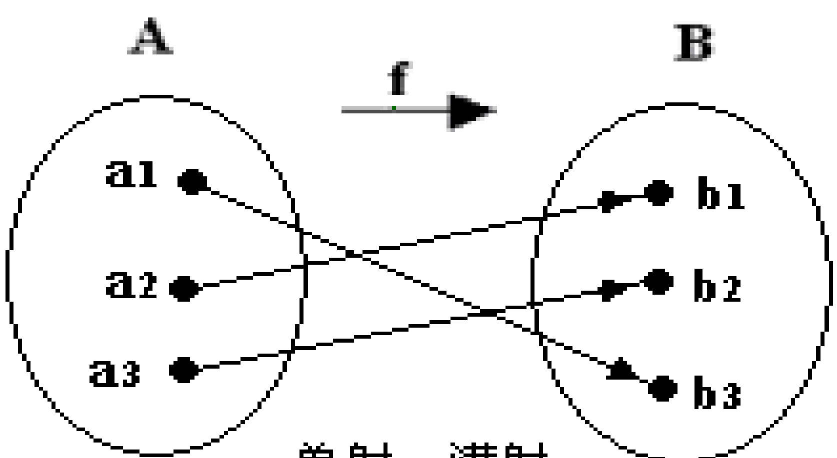
单射，非满射

$D_f = A$, $R_f \subset B$



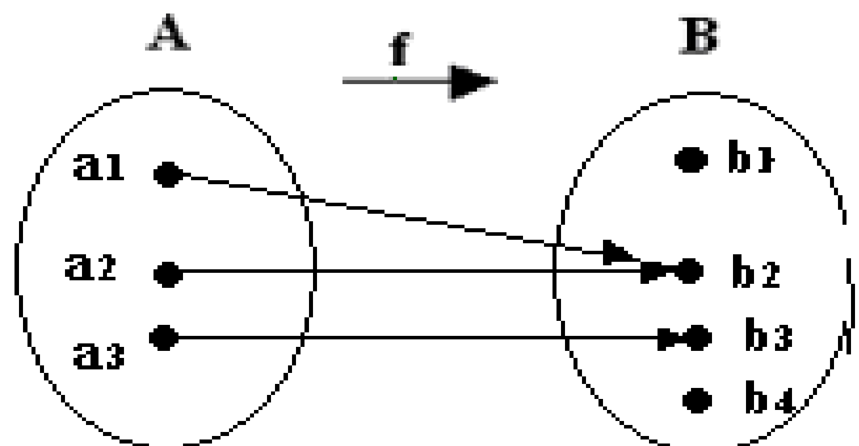
满射，非单射

$D_f = A$, $R_f = B$



单射，满射

$D_f = A$, $R_f = B$



非单射，非满射

$D_f = A$, $R_f \subset B$

- 设 $|A| = n, |B| = m, f : A \to B$,

1. f 为单射的 必要条件是 $|A|\le|B|$;
2. f 为满射的 必要条件是 $|A|\ge|B|$;
3. f 为双射的 必要条件是 $|A| = |B|$。

(1) 当 $n < m$, $A \to B$中共含 $A_m^n =$

$m(m - 1)(m - 2)\ldots(m - n + 1)$个不同的单射函数;

但没有满射函数, 故没有双射函数。

(2) 当 $n = m$, A B中共含n! 个双射函数。

(3) 当 $n > m$, $A \to B$中不含单射函数和双射函数。

不同的满射相当于先把n个不同的球放入m个相同的盒中(分成m堆)去($n\ge m$), 且不允许有空盒的方案数$\left\{ {n \atop m} \right\}$。

再对这m个盒子进行不同的排列(盒子有区别)$m!\left\{ {n \atop m} \right\}$

例 3.2　设 $A_1 = \{a, b\}$,　　$B_1 = \{1, 2, 3\}$;

$A_2 = \{a, b, c\}$,　$B_2 = \{1, 2\}$;

$A_3 = \{a, b, c\}$,　$B_3 = \{1, 2, 3\}$;

分别写出 $A_1 \to B_1$，$A_2 \to B_2$，$A_3 \to B_3$ 中的满射、单射和双射。

解　当 $|A_1| = n = 2 < 3 = m = |B_1|$, $A_1 \to B_1$ 无满射和双射函数,

单射函数共有 $A_m^n = A_3^2 = 6$ 个:

$f_1 = \{\langle a, 1\rangle, \langle b, 2\rangle\}$,　　$f_2 = \{\langle a, 1\rangle, \langle b, 3\rangle\}$,

$f_3 = \{\langle a, 2\rangle, \langle b, 1\rangle\}$,　　$f_4 = \{\langle a, 2\rangle, \langle b, 3\rangle\}$,

$f_5 = \{\langle a, 3\rangle, \langle b, 1\rangle\}$,　　$f_6 = \{\langle a, 3\rangle, \langle b, 2\rangle\}$,

- $A_2 = \{a, b, c\}$, $B_2 = \{1, 2\}$, $|A| = n = 3 > 2 = m = |B|$,

  $A_2 \rightarrow B_2$ 无单射和双射函数，满射函数共有$m!\left\{ n \atop m \right\}$=6个:

  $g_1 = \{\langle a,1\rangle, \langle b,1\rangle, \langle c,2\rangle\}$, $g_2 =\{\langle a,1\rangle, \langle b,2\rangle, \langle c,1\rangle\}$,

  $g_3 = \{\langle a,2\rangle, \langle b,1\rangle, \langle c,1\rangle\}$, $g_4 =\{\langle a,1\rangle, \langle b,2\rangle, \langle c,2\rangle\}$,

  $g_5 = \{\langle a,2\rangle, \langle b,1\rangle, \langle c,2\rangle\}$, $g_6 =\{\langle a,2\rangle, \langle b,2\rangle, \langle c,1\rangle\}$.

- $A_3 =\{a, b, c\}$, $B_3=\{1, 2, 3\}$;

  $|A| = n = 3 = m = |B|$, $A_3 \rightarrow B_3$ 共有3! = 6个双射函数。

  $h_1 = \{\langle a,1\rangle, \langle b,2\rangle, \langle c,3\rangle\}$, $h_2 =\{\langle a,1\rangle, \langle b,3\rangle,$

例 f (n) = $\lfloor\sqrt{n}\rfloor$, $\lfloor\sqrt{n}\rfloor$表示 n 开平方后取算术根的整数部分, 问f 是N到N的什么函数?

解 任给$n \in N$, 则$\lfloor\sqrt{n^2}\rfloor = n$, 而$n^2 \in N$,

即f是N到N的满射。1, 2 $\in$ N, 1 $\neq$ 2,

$f(1) = \lfloor\sqrt{1}\rfloor = 1$, $f(2) = \lfloor\sqrt{2}\rfloor = \lfloor 1.414\ldots\rfloor = 1$,

即f 不是N到N的单射, 因此f 不是N到N的双射。

例 设有函数$f: I \rightarrow Z_6$, f (i) = i mod 6,

这是一个从I到Z_6 的满射, 但不是单射。

例 设有函数$g: N \rightarrow N$, $g(i) = 2^i$,

这是一个从N到N的单射, 但不是满射。

例 设有函数h: R → R, h (x) = 3x + 8,

线性函数是一个从R到R的双射。

例 在64人参加的围棋单淘汰赛, 问要举行多少场次比赛才能定出冠军?

解 除冠军外, 每一选手都只失败一次,

正好与比赛场次(棋谱)成一一对应的双射,

所以要举行63场次的比赛。

定理 设A和B都是有限集, $|A| = |B| = n$,

试证明由A到B 的函数f, f 是单射 $\Leftrightarrow$ f 是满射。

Proof $\Rightarrow$ (反证) 已知 $f: A \to B$是单射, 假设 f 不是满射,

则B中至少有一个元素没有像源, 即A中元素至多只有

$n-1$个像, 但$|A| = n$, 所以A中至少有两个元素对应同

一个像, 这与f 是单射相矛盾。故f 是满射。

- $\Leftarrow$ (反证) 已知 $f: A \to B$是满射, 假设f 不是单射,

则A中至少有两个元素对应同一个像, 即A在B中至多

有$n-1$个像, 这与f 是满射相矛盾。故f 是单射。

例3.3 讨论下列各函数性质(A, B均有穷非空集合),

设$|A| = n$, $|B| = m$。

(1) $f: A \to B$, $g: A \to A \times B$, 且$\forall a \in A$, $g(a) = <a, f(a)>$,

讨论g的性质。

解 当B不是单元集时,

$|g(a)| = |A| = m < |A \times B| = mn$, g为单射但非满射;

- 当B为单元集时, f(A)也为单元集, $|g(a)| = |A|$,

  g也是双射;

例3.3 讨论下列各函数性质(A, B均有穷非空集合)

(2) $f: A\times B \to A$, 且$\forall$$\langle a, b\rangle \in A \times B$, $f(\langle a, b\rangle) = a$。

解 当B不是单元集时, $|A \times B| > |A|$, f 为满射但非单射;

当B为单元集时, $|A \times B| = |A|$, f是双射;

(3) $f: A \times B \to B \times A$, 且$\forall$$\langle a, b\rangle \in A \times B$,

$f(\langle a, b\rangle) = \langle b, a\rangle$。

解 $|A \times B| = |B \times A| = |A| \times |B| = mn$,

f 是单射, 又是满射 $\Leftrightarrow$ f 是双射。

定义 4.33 (1) 设 $f: A \to B$, 如果存在 $b \in B$, 使得 $\forall a \in A$, 均有 $f(a) = b$, 则称 f 是 A 到 B 常值函数。 /* 全对一

(2) A 上 $(A \to A)$ 的恒等关系 I_A: 就是 A 上的恒等函数。

$\forall x \in A$ 都有 $I_A(x) = x$。 ■ /*双射

(3) 设 A, B 为二集合, $<_1$, $\leq_2$ 分别为 A, B 上的全序关系, $f: A \to B$。对于 $\forall x_1, x_2 \in A$,

若 $x_1 <_1 x_2$, 则 $f(x_1) \leq_2 f(x_2)$, 则称 f 是单调递增的;

若 $x_1 <_1 x_2$, 则 $f(x_1) <_2 f(x_2)$, 称 f 是严格单调递增的;

若 $x_1 <_1 x_2$, 则 $f(x_2) \leq_2 f(x_1)$, 则称 f 是单调递减的;

若 $x_1 <_1 x_2$, 则 $f(x_2) <_2 f(x_1)$, 称 f 是严格单调递;

- 严格单调递增和严格单调递减都是单射。

定义4.33(5) 设R是A上的等价关系, 定义函数

$g: A \to A/R$ (商集), 使得 $g(a) = [a]_R$, g 把元素a映射到

a的等价类, 称g是从A到商集A/R的自然(或典型)映射。

∎ /*满射

例 设 $A = \{a, b, c, d\}$, $R = I_A \cup \{<a, b>, <b, a>\}$,

则R为A上的等价关系, $f: A \to A/R$, 则

$f(a) = [a] = \{a, b\} = f(b) = [b] = \{a, b\}$,

$f(c) = [c] = \{c\}$, $f(d) = [d] = \{d\}$。

§4.7 函数的复合和反函数

- 函数的复合本质上就是关系右复合,

  有关关系复合的所有定理都适合于函数的复合。

- 任意两个函数的复合可构造出新的函数。

定理4.7 设F, G是函数, 则$F \circ G$也是函数, 且满足

(1) $\mathrm{dom}(F \circ G) = \{ x \mid x \in \mathrm{dom}\, F \wedge F(x) \in \mathrm{dom}\, G\}$,

(2) $\forall x \in \mathrm{dom}(F \circ G)$ 有 $F \circ G(x) = G(F(x))$。

- 当(1)不满足时, 可利用函数的限制和扩充来弥补。

证明 因为F, G是关系, 所以$F \circ G$也是关系。

证明 (0) 若对某个$x \in dom(F \circ G)$有 $xF \circ Gy_1$和$xF \circ Gy_2$, 则

$$xF \circ Gy_1 \wedge xF \circ Gy_2$$

$$\Rightarrow \exists t_1 (xFt_1 \wedge t_1Gy_1) \wedge \exists t_2 (xFt_2 \wedge t_2Gy_2)$$

$$\Rightarrow \exists t_1 \exists t_2 (t_1 = t_2 \wedge t_1Gy_1 \wedge t_2Gy_2) \quad (F\text{为函数})$$

$$\Rightarrow y_1 = y_2 \quad (G\text{为函数})。$$

所以 $F \circ G$是函数。

- **(1)** $\forall x, \ x \in dom(F \circ G)$

$$\Rightarrow \exists t \exists y (xFt \wedge tGy)$$

$$\Rightarrow \exists t (x \in domF \wedge t = F(x) \wedge t \in domG)$$

$$\Rightarrow x \in \{x \mid x \in domF \wedge F(x) \in domG)$$

- (2) $\forall x, x \in \mathrm{dom}F \land F(x) \in \mathrm{dom}G$

  $\Rightarrow \langle x, F(x)\rangle \in F \land \langle F(x), G(F(x))\rangle \in G$

  $\Rightarrow \langle x, G(F(x))\rangle \in F\circ G$

  $\Rightarrow x \in \mathrm{dom}(F\circ G) \land F\circ G(x) = G(F(x))$

所以(1)和(2)得证。

推论1 设$F: A \to B$, $G: B \to C$, 则 $F \circ G : A \to C$,

且 $\forall x \in A$ 有 $F\circ G(x) = G(F(x))$。

推论2设F, G, H为函数, 则$(F\circ G)\circ H$和$F\circ (G\circ H)$都是函数,

且 $(F\circ G)\circ H = F\circ (G\circ H)$ 。

- 因为复合函数满足结合律,

  所以通常省略括号而写成 FGH 。

- 归纳地, 设有n个函数$f_1: A_1 \to A_2$, $f_2: A_2 \to A_3$, … ,

  $f_n: A_n \to A_{n+1}$, 则不加括号的表达式 $f_n f_{n-1} \ldots f_1$

  唯一地表示一个 从A_1 到A_{n+1} 的函数。

- 特别地, 当 $f: A \to A$, 则f 可与自身合成任意次。

归纳定义为:

1. $f^0(a) = a$, $f^0 = I_A$;

2. $f^n(a) = f(f^{n-1}(a)) = f^{n-1}(f(a))$。 $\blacksquare$

例 设$f(x) = 1 + x^2$, $g(x) = 2 + x$, 则

$$f \circ g(x) = f(2 + x) = 1 + (2 + x)^2 = 5 + 4x + x^2$$

$$g \circ f(x) = g(1 + x^2) = 2 + 1 + x^2 = 3 + x^2$$

$f \circ g \neq g \circ f$, 可见合成函数 “$\circ$”不满足交换律。

定理 4.8 设有函数 $f: A \to B$ 和 $g: B \to C$,

(1) 如果f 和g都是满射的, 则 $f \circ g: A \to C$ 也是满射的。

证 $\forall c \in C$, 因为 $g: B \to C$是满射的,

所以 $\exists b \in B$, 使 $g(b) = c$。

- 对于这个b, 由于 $f: A \to B$也是满射的,

所以 $\exists a \in A$, 使 $f(a) = b$。

- 由定理4.7有 $f \circ g(a) = g(f(a)) = g(b) = c$。

所以, $f \circ g: A \to C$ 是满射的。

定理 4.8 设有函数 $f: A \to B$ 和 $g: B \to C$,

(2) 如果f 和g都是单射的, 则 $f \circ g: A \to C$也是单射的;

证 假设存在$z \in C$, $\exists x_1, x_2 \in A$使得

$f \circ g(x_1) = f \circ g(x_2)$ 由定理4.7有 $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$。

- 因为$g: B \to C$是单射的, 故 $f(x_1) = f(x_2)$。
- 又由于$f: A \to B$是单射的, 所以 $x_1 = x_2$ 。
- 所以 $f \circ g: A \to C$是单射的。

(3) 如果f 和g都是双射的, 则 $g \circ f: A \to C$也是双射的。

证 由(1)和(2) 得证。 ∎

- 定理4.8说明函数的复合运算能够保持函数单射、满射、双射的性质。但逆不真，但有如下“部分可逆”的结论。

定理 4.8.2 设有函数g: A → B和f : B → C, 那么

(1) 如果 $f\circ g$ 是满射, 则 f 是满射; /*后作用满

证 $\forall z \in C$,

$\Rightarrow \exists x\ (x \in A \wedge x(f\ g)z)$

$\Rightarrow \exists x\ \exists y\ (x \in A \wedge y \in \text{ran}\ g \subseteq B \wedge xgy \wedge yfz)$

$\Rightarrow \exists x\ \exists y\ (x \in A \wedge y \in B \wedge y = g(x) \wedge z = f(y))$

$\Rightarrow \exists y\ (y \in B \wedge z = f(y))$

所以f 是满射的。

(2) 如果 $f \circ g$ 是单射, 则 g是单射;　　　　/*先作用单

证 若存在$y \in \operatorname{ran} g \subseteq B$, 又存在$x_1, x_2 \in A$, 使得

$x_1 g y \wedge x_2 g y$

$\Rightarrow \exists z\,(z \in \operatorname{ran} f \subseteq C \wedge y f z \wedge x_1 g y \wedge x_2 g y)$

$\Rightarrow \exists z\,(z \in C \wedge x_1 f\, g z \wedge x_2 f\, g z)$　　　　/*$f \circ g$ 是单射

$\Rightarrow x_1 = x_2$,

所以 g 是单射的。

(3) 如果 $f \circ g$是双射, 则 g是单射而 f 是满射。

证 由(1)和(2)立即可得。　　　　∎

定理 4.9 设$f : A \to B$, 则 $f = f \circ I_B = I_A \circ f$ 。

其中 I_A, I_B分别为A上和B上的恒等函数。

证 由定理4.7推论1知, $f \circ I_B : A \to B$, $I_A \circ f : A \to B$。

- $\forall <x, y> \in f$,

  $\Rightarrow <x, y> \in f \wedge y \in B$

  $\Rightarrow <x, y> \in f \wedge <y, y> \in I_B$

  $\Rightarrow <x, y> \in f \circ I_B$， 所以 $f \subseteq f \circ I_B$。
- 反之, $\forall <x, y> \in f \circ I_B$,

  $\Rightarrow \exists t\ (<x, t> \in f \wedge <t, y> \in I_B)$

  $\Rightarrow <x, t> \in f \wedge t = y$

  $\Rightarrow <x, y> \in f$, 所以 $f \circ I_B \subseteq f$。 即 $f = f \circ I_B$
- 同理可证 $I_A \circ f = f$ 。 因而 $f = f \circ I_A = I_B \circ f$,

定理 设$f: R \to R$, $g: R \to R$, 已知f 和g按实数集上"$\le$"的关系都是单调增加的, 则 $f \circ g$也是单调增加。

证 由定理4.7知, $f \circ g \in (R \to R)$,

$\forall x, y \in R$,

$x < y$

$\Rightarrow g(x) \le g(y)$

$\Rightarrow f(g(x)) \le f(g(y))$

$\Leftrightarrow f \circ g(x) \le f \circ g(y)$.

所以, $f \circ g$是单调增加。

- 任给二元关系R均存在逆关系 R^{-1},

  只要颠倒R的所有序偶就得到R^{-1}。

- 任给一个函数F, F的逆F^{-1}不一定是函数。

例 $F = \{<x, z>, <y, z>\}$, 则有$F^{-1} = \{<z, x>, <z, y>\}$非函数

  。

- 任给一个单射函数$f: A\to B$, 则f^{-1}是函数,

  且满足$f^{-1}: \text{ran } f \to A$, 它是单射和满射, 因此是双射。

- 对于什么样的函数$f: A \to B$,

  它的逆f^{-1}是从B到A的函数$f^{-1}: B \to A$呢？

- 在数学分析中, 当函数在区间可求导,

  判别严格单调性很简便, 从而可判别反函数。

- 离散数学处理的是一般函数, 定义域是一般集合,

  不考虑元素的次序。即使可按线性排列,

  它们是离散型的, 谈不上有导函数。

- 关于反函数的定义, 就只能根据双射作出。

定理4.10 设$f: A \to B$是双射的, 则$f^{-1}: B \to A$也是双射的。

Proof 因为f是函数, 所以f^{-1}是关系, 且由定理4.1有

$$\mathrm{dom}\, f^{-1} = \mathrm{ran}\, f = B, \quad \mathrm{ran}\, f^{-1} = \mathrm{dom}\, f = A。$$

对于任意的$y \in B$, 假设有$x_1, x_2 \in A$使得

$$y f^{-1} x_1 \wedge y f^{-1} x_2$$

成立, 则由逆的定义有 $x_1 f^{-1} y \wedge x_2 f^{-1} y$

成立。由f的单射性可得 $x_1 = x_2$。

f^{-1}满足单值性。综上所述有$f^{-1}: B \to A$是满射的。

- 假设对某$x_1, x_2 \in B$, 有$f^{-1}(x_1) = f^{-1}(x_2)$, 即存在$y \in A$, 有$f^{-1}(x_1) = f^{-1}(x_2) = y$。根据逆的定义有$y f x_1$和$y f x_2$。
- 因f为函数, 所以$x_1 = x_2$。这就证明$f^{-1}: B \to A$是单射的。

例 下列函数中, 哪些具有反函数? 有反函数的, 请写出反函数。

(1) 设f_1: $Z_+ \to Z_+$, $Z_+ = \{x \mid x \in Z \wedge x > 0\}$, 且$f_1(x) = x+1$。

单射, 非满射, 非双射

(2) 设f_2: $Z_+ \to Z_+$, Z_+同(1), 且

$$f_2(x) = \begin{cases} 1, & x=1, \\ x-1 & x>1 \end{cases}$$

满射, 非单射, 非双射

(3) 设f_3: $R \to R$, 且$f_3(x) = x^3$。双射, 存在反函数。

f_3^{-1}: $R \to R$, 且 $f_3^{-1}(x) = x^{\frac{1}{3}}$;

(4) 设f_4: $R \to B$, 且$f_4(x) = e^x$, $B = \{x \mid x \in R \wedge x \geq 0\}$。

双射, 存在反函数。f_4^{-1}: $B \to R$, 且 $f_4^{-1}(x) = \ln x$

(5) 设f_5: $A \to R$, 且$f_5(x) = \sqrt{x}$, $A = \{x \mid x \in R \wedge x \geq 1\}$。

单射, 非满射, 非双射

- 从以上的计算, 发现下面事实, 即

  $f \circ f^{-1}(x) = f(f^{-1}(x)) = x,$

  $f^{-1} \circ f(\langle x, y\rangle) = f^{-1}(f(\langle x, y\rangle)) = \langle x, y\rangle$

- 一般情况下, 设$f: A \to B$且为双射, 由定理4.10可知,

  $f^{-1}: B \to A$也为双射函数, 并且

  $f^{-1} \circ f = I_A : A \to A,$ $f \circ f^{-1} = I_B : B \to B$。

- 注意: 只要$A \neq B$, $f^{-1}f$ 与 $f f^{-1}$有不同的定义域,

  $f \circ f^{-1} \neq I_A,$ $f \circ f^{-1} \neq f^{-1} f$ 。

定理 设有函数 $f: A \to B$ 和 $g: B \to C$, 且f 和g 都是可逆的, 则 $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$。

证 因为f 和g 都可逆, 所以有 $f^{-1}: B \to A$, $g^{-1}: C \to B$,

因而有合成函数$f^{-1} \circ g^{-1}: C \to A$。

又因为 f 和 g 都是双射, 由定理3.4,

$g \circ f$ 也是双射: $A \to C$, 存在逆函数$(g \circ f)^{-1}: C \to A$。

- $\forall c \in C$, 设 $g^{-1}(c) = b$, $f^{-1}(b) = a$,

  则 $f^{-1} \circ g^{-1}(c) = f^{-1}(b) = a$

- $g \circ f(a) = g(f(a)) = g(b) = c$, 即 $(g \circ f)^{-1}(c) = a$,
- 所以 $f^{-1} \circ g^{-1}(c) = (g \circ f)^{-1}(c)$。

由c的任意性, $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$。 ∎

- 用特征函数来研究集合的方法有时用起来很方便。

定义 4.33 (4) 全集U → {0, 1}的函数统称为特征函数。

设A是U的任一子集, 则如下定义的函数

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{当 } x \in A \\ 0 & \text{当 } x \notin A \end{cases}$$

称为子集A的特征函数。 ■ /*P61

例 设U = {a, b, c, d}, A = {a, d},

解 $\chi_A(a) = \chi_A(d) = 1$, $\chi_A(b) = \chi_A(c) = 0$。 ■

- A的每一个子集S都对应于一个特征函数,

不同的子集对应于不同的特征函数。

- 由于A的子集与特征函数存在着这样的对应关系，因此可以用特征函数来标识A的不同的子集。
- 特征函数建立了函数与集合之间的一一对应关系，因此可以通过函数的计算去研究集合上的命题。

定理 设A和B是全集U的两个子集，$\forall x \in U$，特征函数具有下列性质：

(1) $A = \varnothing$ 当且仅当 $\chi_A(x) = 0$

(2) $A = U$ 当且仅当 $\chi_A(x) = 1$

(3) $A \subseteq B$ 当且仅当 $\chi_A(x) \le \chi_B(x)$

(4) $A = B$ 当且仅当 $\chi_A(x) = \chi_B(x)$

(5) $[\chi_A(x)]^n = \chi_A(x) \quad (n\geq 1)$ /*幂等函数

(6) $\chi_{A'}(x) = 1 - \chi_A(x)$

(7) $\psi_{A\cap B}(x) = \chi_A(x)\cdot \chi_B(x)$

$= \min(\chi_A(x), \chi_B(x))$

(8) $\chi_{A\cup B}(x) = \chi_A(x) + \chi_B(x) - \psi_A(x)\cdot\psi_B(x)$

$= \chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_{A\cap B}(x)$

$= \max(\chi_A(x), \chi_B(x))$

(9) $\chi_{A-B}(x) = \chi_A(x) - \chi_{A\cap B}(x)$

(3) $A \subseteq B$ 当且仅当 $\psi_A(x) \le \psi_B(x)$

Proof 设$\psi_A(x) \le \psi_B(x)$, 对所有$x \in A$, $\psi_A(x) = 1$。

因为$\psi_A(x) \le \psi_B(x)$, 故$\psi_B(x) = 1$,

得$x \in B$, 所以$A \subseteq B$。

反之, 若$A \subseteq B$, 考虑x的各种情况:

1. $x \in A$, 则 $x \in B$, $\psi_A(x) = \psi_B(x) = 1$, $\psi_A(x) \le \psi_B(x)$

2. $x \notin A$, $\psi_A(x) = 0$

2.1 $x \in B$, $\psi_B(x) = 1$, $\psi_A(x) \le \psi_B(x)$

2.2 $x \notin B$, $\psi_B(x) = 0$, $\psi_A(x) \le \psi_B(x)$。

证明 (6) $\chi_{A'}(x) = 1 - \chi_A(x)$ 只有二种情况：

若$x \in A \Leftrightarrow x \notin A'$, $\chi_{A'}(x) = 0 = 1 - 1 = 1 - \chi_A(x)$。

若$x \notin A \Leftrightarrow x \in A'$, $\chi_{A'}(x) = 1 = 1 - 0 = 1 - \chi_A(x)$。

(7) $\forall x \in U$, 若$x \in A \cap B$, 则 $x \in A$且$x \in B$, 因此有

$\chi_{A \cap B}(x) = \chi_A(x) = \chi_B(x) = 1$, 所以

$\chi_{A \cap B}(x) = \chi_A(x) \cdot \chi_B(x) = 1$。

- 若$x \notin A \cap B$, 则 $x \notin A$或 $x \notin B$, 因此有

$\chi_{A \cap B}(x) = 0$ 且($\chi_A(x) = 0$ 或$\chi_B(x) = 0$),

所以 $\chi_{A \cap B}(x) = \chi_A(x) \cdot \chi_B(x) = 0$。 ∎

(8) $\psi_{A\cup B}(x) = \psi_A(x) + \psi_B(x) - \psi_A(x)\cdot\psi_B(x)$

$= \psi_A(x) + \psi_B(x) - \psi_{A\cap B}(x) = \max(\psi_A(x), \psi_B(x))$

Proof 设$x\in A\cup B$, $\psi_{A\cup B}(x) = 1$, 有三种可能的情况:

- $x\notin A$, $x\in B$, 此时$x\notin A\cap B$, 因而

  $\psi_A(x) = 0$, $\psi_B(x) = 1$, $\psi_{A\cap B}(x) = 0$, 等式成立;

- $x\notin B$, $x\in A$, 此时$x\notin A\cap B$, 因而

  $\psi_A(x) = 1$, $\psi_B(x) = 0$, $\psi_{A\cap B}(x) = 0$, 等式成立;

- 若$x\in A\cap B$, 则 $x\in A$, $x\in B$, 因而

  $\psi_A(x) = 1$, $\psi_B(x) = 1$, $\psi_{A\cap B}(x) = 1$, 等式成立。

设$x\notin A\cup B$, 则$x\notin A$, $x\notin B$, $x\notin A\cap B$, 因而

$\psi_{A\cup B}(x) =0$, $\psi_A(x) =0$, $\psi_B(x) =0$, $\psi_{A\cap B}(x) =0$, 等式成立

(9) $\psi_{A-B}(x) = \psi_A(x) - \psi_{A\cap B}(x)$

Proof $\psi_{A-B}(x) = \psi_{A\cap B'}(x)$

$= \psi_A(x)\, \psi_{B'}(x)$

$= \psi_A(x)\, (1 - \psi_B(x))$

$= \psi_A(x) - \psi_A(x)\psi_B(x)$

$= \psi_A(x) - \psi_{A\cap B}(x)$

- 特征函数把集合和函数联系起来, 用它来规定集合,

  就有可能用二进制数表达关于集合的命题, 并在计算

  机上进行计算。应用特征函数上述性质,

  对集合间的关系, 可以用特征函数的值作比较。

- 集合成员表是表达集合的特征函数的重要手段。

  对集合间的运算, 可以对特征函数的值作算术运算,

  并可以用特征函数证明许多集合恒等式。

例 证明集合分配律$A\cup(B\cap C) = (A\cup B)\cap(A\cup C)$

证 $\chi_{A\cup(B\cap C)}(x) = \chi_A(x) + \chi_{B\cap C}(x) - \chi_{A\cap B\cap C}(x)$

$= \chi_A(x) + \chi_B(x)\,\chi_C(x) - \chi_A(x)\chi_B(x)\chi_C(x)$;

- 而 $\chi_{(A\cup B)\cap(A\cup C)}(x) = \chi_{A\cup B}(x)\cdot \chi_{A\cup C}(x)$

$= (\chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_A(x)\chi_B(x))$

$(\chi_A(x) + \chi_C(x) - \chi_A(x)\chi_C(x))$

$= \chi_A(x)\chi_A(x) + \chi_A(x)\chi_c(x) - \chi_A(x)\chi_A(x)\chi_C(x)$

$+ \chi_B(x)\chi_A(x) + \chi_B(x)\chi_C(x) - \chi_B(x)\chi_A(x)\chi_C(x)$

$- \chi_A(x)\chi_B(x)\chi_A(x) - \chi_A(x)\chi_B(x)\chi_C(x)$

$+ \chi_A(x)\chi_B(x)\chi_A(x)\chi_C(x)$

$= \chi_A(x) + \chi_B(x)\chi_C(x) - \chi_A(x)\chi_B(x)\chi_C(x)$。

所以 $A\cup(B\cap C) = (A\cup B)\cap(A\cup C)$。 ∎

- 集合A的幂集P(A)是集合族，由外延公理，幂集的元素没有次序。

但在计算机上存储，按相对位置来看，是有次序的。

- 用特征函数概念可解决此问题，而且可节省存储单元
- 下标表示法本质上就是应用了集合的特征函数。

二、模糊 (fuzzy) 集合

- 长期以来，人们在处理特别复杂的系统，如生物系统和经济系统时，往往感到用经典数学给系统建立的数学模型太粗糙，不切合实际。

- 经典数学只能给出粗糙的定性描述，无法进行定量处理。其原因就在于经典数学的精确性和现实世界的不精确性之间存在着很大的矛盾。
- 经典集合论是以二值逻辑为基础的。

  从集合和特征函数定义看，某个事物只能属于或不属于某集合，不可能有第三种可能。

  这就是经典集合的二值性，也是它的局限性。
- 经典集合论把现实世界活生生的内容丰富的事物，抽象成仅对某集合有属于或不属于的关系，

  事物之间的差异也仅在于此。

- 经典集合论对现实世界简化得太大，其反映是粗糙的。
- 在自然界和人类生活中遇到的许多事物，在多数情形下是难于清楚明确地判断作为对象的事物是否属于或不属于集合。

例 老年和中年、美和丑、高和矮、大雨、充分大的数等概念是模糊的，没有绝对分明的界限。

- 美国数学家扎德 **(L.A.Zadeh) 1965**年提出模糊集合的概念，近年来已形成模糊数学的新学科，
- 已经在气象、地震、遥感遥测、模式识别、人工智能、环境科学、经济学、社会学等方面有广泛实际的应用和研究，并 大有发展潜力。

- 如果对特征函数的概念和取值范围由{0, 1}加以扩展到闭区间[0, 1], 便可讨论模糊集合的概念。

定义 设U为全集, A为一概念 (未必是确定的),

称 ψ_A: U $\rightarrow$[0, 1]为A所描述的概念的一致性(隶属)函数, ψ_A(x)称为x与概念A的一致性测度, 也称A为U的一个模糊子集。 ∎

例 设U为人类年龄的集合{0, 1, 2, … , 120}, A为模糊概念“老年人”, 通常认为70岁以上的人为老年人, 60~69岁的人基本上是老年人, 而40岁以下的人决不会被称为老年人。因此可认为

$$P = \begin{cases} 1 & 70 \le x \le 120 \\ 0.9 & 60 \le x \le 69 \\ 0.6 & 50 \le x \le 59 \\ 0.2 & 40 \le x \le 49 \\ 0 & 0 \le x \le 39 \end{cases}$$

- 由于一致性函数与模糊概念、模糊子集之间的这种一一对应关系，可以用一致性函数的研究来代替对难以捉摸的模糊概念、模糊子集的研究，这导致了模糊集合理论的产生。
- 从本质看，模糊集合论的函数理论是集合函数理论的一个应用。

  反之，经典集合概念只是模糊集合的一个特例 (经典集合的一致性函数只取0和1两值)。
- 两种理论的这种互相嵌入表明，它们在本质上是相互等价的。