厦门大学《概率统计》课程

期末试题·答案

考试日期:2016 （B） 信息学院自律督导部整理

一、 选择题（共 5 小题，每小题 3 分，总计 15 分）

1. C

$$E(X_i)=\frac{1}{\lambda},\ D(X_i)=\frac{1}{\lambda^2},\ E(\sum_{i=1}^{n}X_i)=\frac{n}{\lambda},D(\sum_{i=1}^{n}X_i)=\frac{n}{\lambda^2}$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i-\frac{n}{\lambda}}{\sqrt{\frac{n}{\lambda^2}}}=\frac{\lambda\sum_{i=1}^{n}X_i-n}{\sqrt{n}}\sim N(0,1)$$

2. C

3. A

$$E(X_1-X_2)=E(X_1)-E(X_2)=0$$
$$D(X_1-X_2)=D(X_1)+\mathrm{D}(\mathrm{X}_2)=2$$
$$X_1-X_2\sim N(0,2),\frac{X_1-X_2}{\sqrt{2}}\sim N(0,1)$$
$$\mathrm{X}_3^2+X_4^2\sim\chi^2(2)$$
$$故T=\frac{\frac{X_1-X_2}{\sqrt{2}}}{\sqrt{\frac{\mathrm{X}_3^2+X_4^2}{2}}}\sim t(2)$$

4. C

当总体均值 u 已知，而方差 σ^2 未知的时候

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-u)^2}{\sigma^2}=\sum_{i=1}^{n}(\frac{X_i-u}{\sigma})^2\sim\chi^2(\mathrm{n})$$，（在 H_0 为真时），对于给定的 a，

$$P\left\{\chi^2_{1-\frac{a}{2}}(n)<\frac{\sum_{i=1}^{n}(\mathrm{X}_i-\mathrm{u})^2}{\sigma_0^2}<\chi^2_{\frac{a}{2}}(n)\right\}=1-a$$，应该选 C。

5. D

二、 填空题（共 5 小题，每小题 3 分，总计 15 分）

6. 1/9

7.

$$D(X^2)=E(X^4)-(E(X^2))^2=\frac{99}{4}-(\frac{15}{4})^2=\frac{171}{16}$$

8.

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$$

9.

相合估计量.

10.

$$T=\frac{\overline{X}-u_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}，\text{这里}\overline{X}=\frac{1}{\mathrm{n}}\sum_{i=1}^{n}X_i, S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2, \text{T 服从 t 分布，自由度为 } n-1。$$

三、 计算题（共 5 小题，每小题 12 分，总计 60 分）

11. 解：（1）

$$E(T_1)=\frac{1}{6}(\theta+\theta)+\frac{1}{3}(\theta+\theta)=\theta$$

$$E(T_2)=\frac{1}{5}(\theta+2\theta+3\theta+4\theta)=2\theta \qquad （6 分）$$

$$E(T_3)=\frac{1}{4}(\theta+\theta+\theta+\theta)=\theta$$

故 T_1 和 T_3 是 θ 的无偏估计量。

（2）

$$D(T_1)=\frac{1}{36}(\theta^2+\theta^2)+\frac{1}{9}(\theta^2+\theta^2)=\frac{5}{18}\theta^2$$

$$D(T_3)=\frac{1}{16}(\theta^2+\theta^2+\theta^2+\theta^2)=\frac{1}{4}\theta^2 \qquad （6 分）$$

因为 $D(T_1)>D(T_3)$，故 T_3 较 T_1 更为有效。

12.

解：

（1）矩估计量. 总体 X 的数学期望

$$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x;\theta)dx=\int_0^1(\theta+1)x^{\theta+1}dx=\frac{\theta+1}{\theta+2}.$$

用样本均值 $\bar{X}$ 估计总体 X 的数学期望，得关于未知参数 θ 的方程式

$$\bar{X}=\frac{\theta+1}{\theta+2},$$

其解就是 θ 的矩估计量：

$$\hat{\theta}=\frac{2\bar{X}-1}{1-\bar{X}}.\qquad（6 分）$$

（2）最大似然估计量．未知参数 θ 的似然函数和似然方程为

$$L(\theta)=(\theta+1)^n\left[\prod_{i=1}^n X_i\right]^\theta\quad(0<X_1,X_2,\cdots X_n<1),$$

$$\ln L(\theta)=n\ln(\theta+1)+\theta\sum_{i=1}^n\ln X_i;$$

$$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\frac{n}{\theta+1}+\sum_{i=1}^n\ln X_i=0.\qquad（6 分）$$

似然方程的唯一解 $\hat{\theta}$ 即未知参数 θ 的最大似然估计

$$\bar{\theta}=-1-\frac{n}{\sum_{i=1}^n\ln X_i}.$$

13.

解：（1）以 $X_k(k=1,2,\cdots,400)$ 记第 k 个学生来参加会议的家长人数，则 X_k 的分布律为

X_k	0	1	2
p_k	0. 05	0. 8	0. 15

易知 $E(X_k)=1.1$，$D(X_k)=0.19$，$k=1,2,\cdots,400$. 而 $X=\sum_{k=1}^{400}X_k$. 由定理一，随机变量

$$\frac{\sum_{k=1}^{400}X_k-400\times1.1}{\sqrt{400}\sqrt{0.19}}=\frac{X-400\times1.1}{\sqrt{400}\sqrt{0.19}}$$

近似服从正态分布 $N(0,1)$，于是

$$P\{X>450\}=P\left\{\frac{X-400\times 1.1}{\sqrt{400}\sqrt{0.19}}>\frac{450-400\times 1.1}{\sqrt{400}\sqrt{0.19}}\right\}$$

$$=1-P\left\{\frac{450-400\times 1.1}{\sqrt{400}\sqrt{0.19}}\le 1.147\right\} \qquad \text{（6 分）}$$

$$\approx 1-\Phi(1.147)=0.1251.$$

（2）以 Y 记有一名家长参加会议的学生人数，则 $Y\sim b(400,0.8)$，由定理三

$$P\{Y\le 340\}=P\left\{\frac{Y-400\times 0.8}{\sqrt{400\times 0.8\times 0.2}}\le\frac{340-400\times 0.8}{\sqrt{400\times 0.8\times 0.2}}\right\}$$

$$=P\left\{\frac{Y-400\times 0.8}{\sqrt{400\times 0.8\times 0.2}}\le 2.5\right\} \qquad \text{（6 分）}$$

$$\approx\Phi(2.5)=0.9938.$$

14.

解：按题意需检验

$$H_0:\mu\le\mu_0=225,\quad H_1:\mu>225.$$

取 $\alpha=0.05$. 由表 8.1 知此检验问题的拒绝域为

$$t=\frac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}\ge t_\alpha(n-1). \qquad \text{（6 分）}$$

现在 $n=16$，$t_{0.05}(15)=1.7531$ 又算得 $\bar{x}=241.5, s=98.7259$，即有

$$t=\frac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}=0.6685<1.7531.$$

t 没有落在拒绝域中，故接受 H_0，即认为元件的平均寿命不大于 225h。（6 分）

15.

解：（1）因 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立，且有 $X_i\sim b(1,p), i=1,2,\cdots,n$，即 X_i 具有分布律 $P\{X_i=x_i\}=p^{x_i}(1-p)^{1-x_i}, x_i=0,1$，因此 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 的分布律为

$$
\begin{aligned}
&P\{X_1=x_1,X_2=x_2,\cdots,X_n=x_n\}\\
&=\prod_{i=1}^{n}P\{X_i=x_i\} \qquad (4分)\\
&=\prod_{i=1}^{n}\left[p^{x_i}(1-p)^{1-x_i}\right]=p^{\sum_{i=1}^{n}x_i}(1-p)^{n-\sum_{i=1}^{n}x_i}.
\end{aligned}
$$

（2）因 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立，且有 $X_i\sim b(1,p),i=1,2,\cdots,n$，故 $\sum_{i=1}^{n}X_i\sim b(n,p)$，

其分布律为

$$P\left\{\sum_{i=1}^{n}X_i=k\right\}=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k},\quad k=0,1,2,\cdots,n. \qquad (4分)$$

（3）由于总体 $X\sim b(1,p)$，$E(X)=p,D(X)=p(1-p)$，故有

$$E\left(\bar{X}\right)=p,D\left(\bar{X}\right)=\frac{p(1-p)}{n},E\left(S^2\right)=D(X)=p(1-p). \qquad (4分)$$

四、 证明题

16.

证明：设事件 A 发生的概率为 P，u_n 为 n 次伯努利试验中 A 出现的次数，则

$$E(u_n)=np,D(u_n)=npq$$

从而 $P(|\frac{u_n}{n}-p|<\varepsilon)=P(|u_n-np|<n\varepsilon)=P(|\frac{u_n-np}{npq}|<\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}})$ （5分）

设 $\Phi(X)$ 为标准正态分布的分布函数，由棣莫弗—拉普拉斯定理知

$$\lim_{n\to\infty}P(|\frac{u_n}{n}-p|<\varepsilon)=\lim_{n\to\infty}P(|\frac{u_n-np}{npq}|<\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}})=\lim_{n\to\infty}\left[2\Phi(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}})-1\right]$$

$$=2\Phi(+\infty)-1=2\times1-1=1 \qquad (5分)$$