第三章

刚体和流体

§3-1　刚体及其运动规律

刚体：物体上任意两点之间的距离保持不变

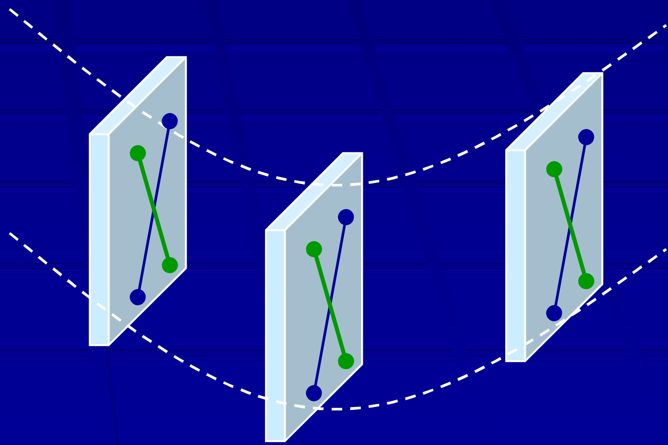
在力的作用下不发生形变的物体

3-1-1 刚体的运动

平动和转动

平动： 刚体在运动过程中，其上任意两点的连线始终保持平行。

注： 可以用质点动力学的方法来处理刚体的平动问题。



转动：刚体上所有质点都绕同一直线做圆周运动。这种运动称为刚体的**转动**。这条直线称为**转轴**。

定轴转动：

转轴固定不动的转动。

3-1-2　刚体对定轴的角动量

质元：组成物体的微颗粒元

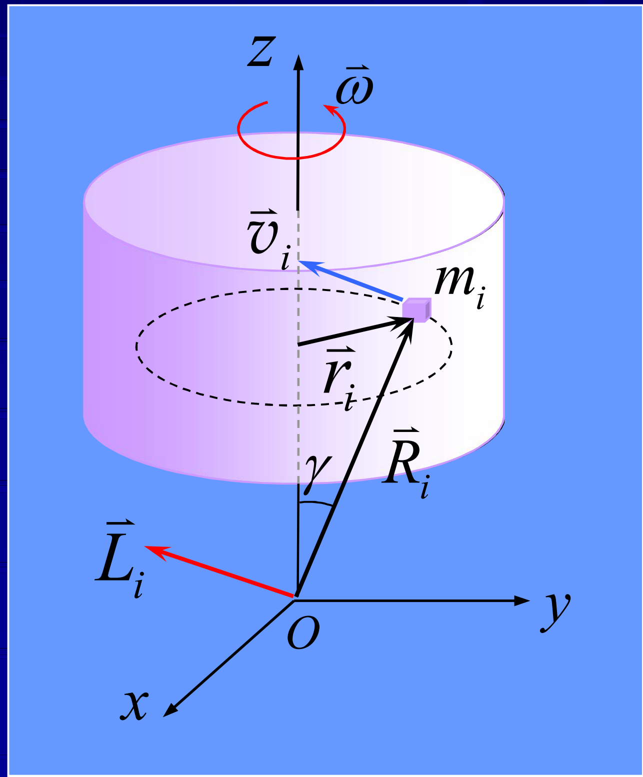
质元对点的角动量为

$$\vec{L}_i = \vec{R}_i \times \left(m_i \vec{v}_i\right)$$

$$L_i = m_i R_i v_i$$

$\vec{L}_i$沿转轴**Oz**的投影为

$$L_{iz} = L_i \cos(\frac{\pi}{2} - \gamma) = m_i R_i v_i \sin\gamma$$



$$\vec{L}_{iz} = m_i r_i v_i = m_i r_i^2 \omega$$

刚体对*Oz*轴的角动量为

$$L_z = \sum_i L_{iz} = \sum_i m_i r_i^2 \omega = (\sum_i m_i r_i^2)\omega$$

令 $\boxed{J_z = \sum_i m_i r_i^2}$ 单位： $\mathrm{kg \cdot m^2}$

J_z为刚体对 *Oz* 轴的**转动惯量**。

$$\boxed{L_z = J_z \omega}$$

结论： 刚体的转动惯量与刚体的形状、大小、质量的分布以及转轴的位置有关。

对于质量连续分布的刚体：

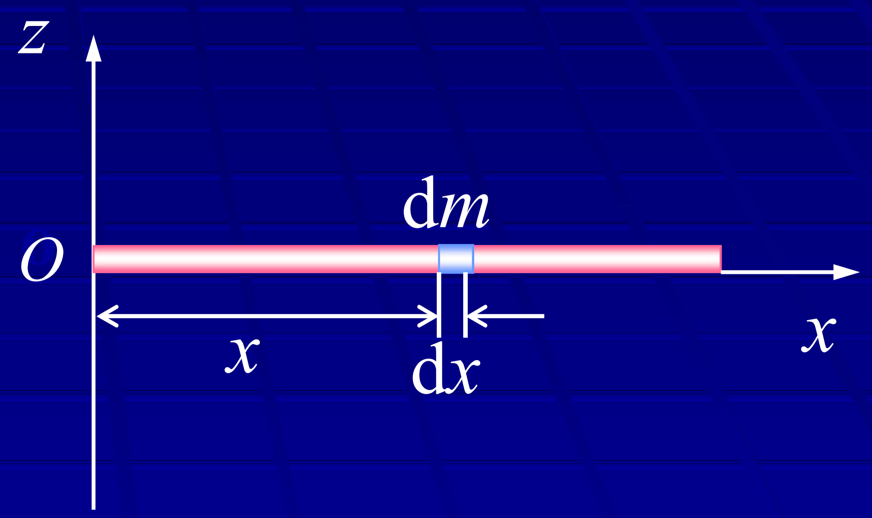
$$J=\int_V r^2\mathrm{d}m=\int_V r^2\rho\mathrm{d}V$$

$$J=\int_S r^2\mathrm{d}m=\int_S r^2\sigma\mathrm{d}S \qquad \text{（面质量分布）}$$

$$J=\int_L r^2\mathrm{d}m=\int_L r^2\lambda\mathrm{d}l \qquad \text{（线质量分布）}$$

例1 计算质量为m，长为l 的细棒绕一端的转动惯量。

解： $$J=\int r^2\mathrm{d}m$$



$$\mathrm{d}m=\rho\,\mathrm{d}x=\frac{m}{l}\mathrm{d}x$$

$$r^2=x^2$$

$$J=\int_0^l x^2\cdot\frac{m}{l}\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\frac{m}{l}x^3\Big|_0^l$$

$$J=\frac{1}{3}ml^2$$

例2 一质量为m，半径为R的均匀圆盘，求对通过盘中心并与盘面垂直的轴的转动惯量。

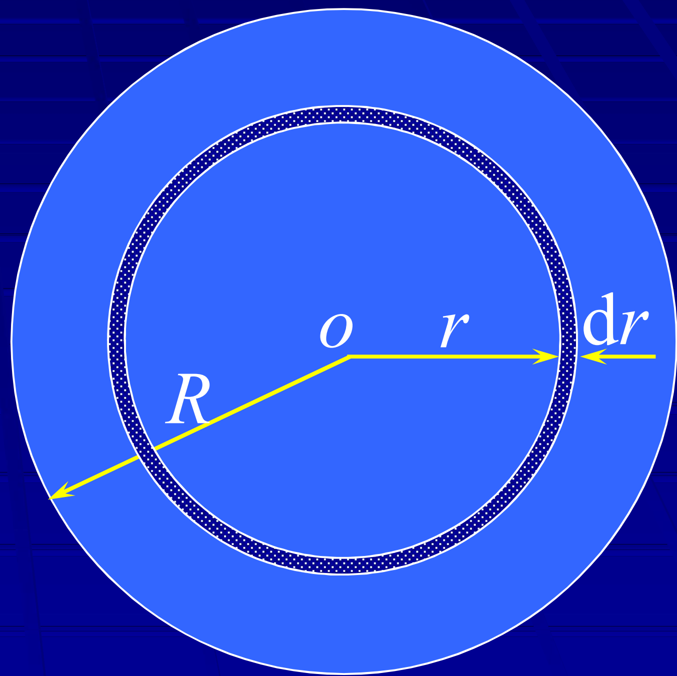
解：

$$\mathrm{d}m = \sigma 2\pi r\mathrm{d}r$$

$$J = \int r^2 \mathrm{d}m = 2\pi\sigma \int r^3 \mathrm{d}r$$

$$J = 2\pi\sigma \int_0^R r^3 \mathrm{d}r$$

$$= \frac{\pi\sigma R^4}{2} = \frac{1}{2} mR^2$$



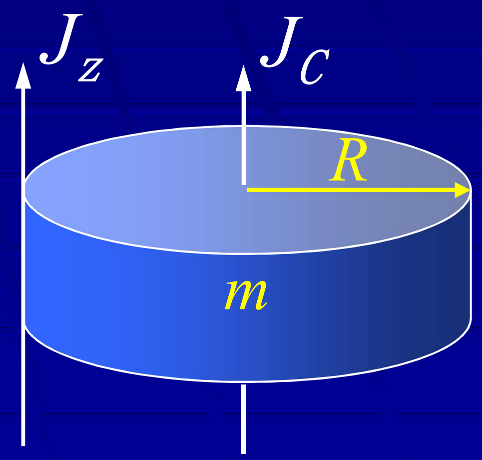
平行轴定理

若刚体对过质心的轴的转动惯量为J_C，则刚体对与该轴相距为d的平行轴z的转动惯量J_z是

$$J_z = J_C + md^2$$

$$J_C = \frac{1}{2}mR^2$$

$$J_z = \frac{1}{2}mR^2 + mR^2 = \frac{3}{2}mR^2$$

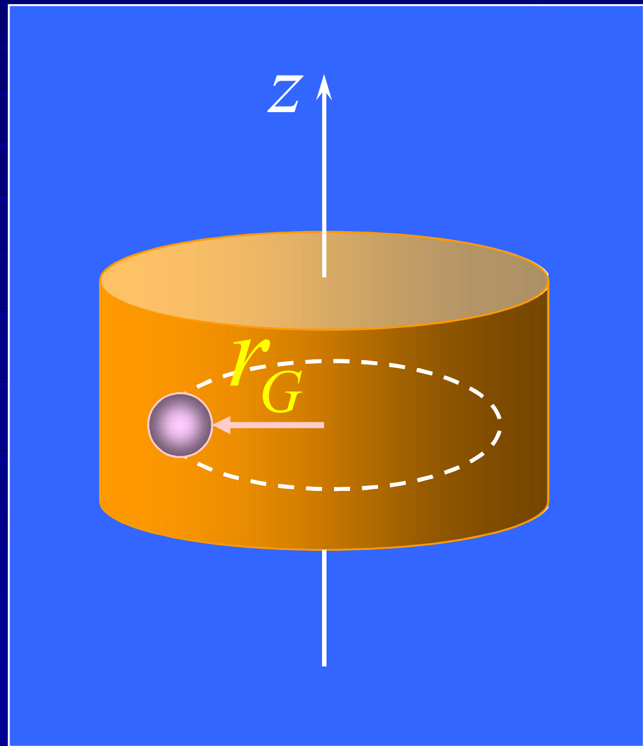


回转半径

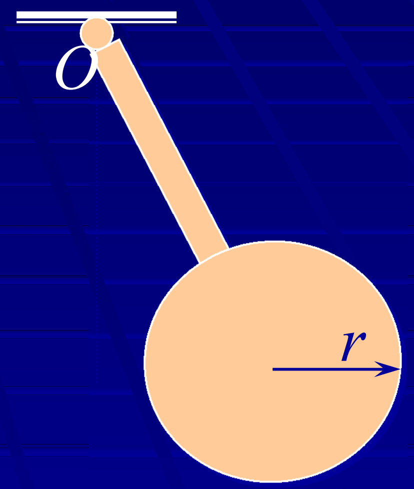
设物体的总质量为m，刚体对给定轴的转动惯量为J，则定义物体对该转轴的回转半径r_G为：

$$r_G = \sqrt{\frac{J}{m}}$$

$$J = m r_G^2$$



例3　计算钟摆的转动惯量。（已知：摆锤质量为m，半径为r，摆杆质量也为m，长度为$2r$。）



解：　摆杆转动惯量：

$$J_1=\frac{1}{3}m(2r)^2=\frac{4}{3}mr^2$$

摆锤转动惯量：

$$J_2=J_C+md^2=\frac{1}{2}mr^2+m(3r)^2=\frac{19}{2}mr^2$$

$$J=J_1+J_2=\frac{4}{3}mr^2+\frac{19}{2}mr^2=\frac{65}{6}mr^2$$

3-1-3　刚体对定轴的角动量定理和转动定律

由质点系对轴的角动量定理，可得

$$M_z = \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(J\omega)}{\mathrm{d}t}$$

两边乘以$\mathbf{d}\boldsymbol{t}$，并积分

$$\int_{t_1}^{t_2} M_z \,\mathrm{d}t = L_2 - L_1$$

刚体对定轴的角动量定理：在某一时间段内，作用在刚体上的外力之冲量矩等于刚体的角动量增量。

当 J 转动惯量是一个恒量时，有

$$M = J\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$$

或

$$M = J\alpha$$

转动定律： 刚体在做定轴转动时，刚体的角加速度与它所受到的合外力矩成正比，与刚体的转动惯量成反比。

转动惯量J是刚体转动惯性的量度

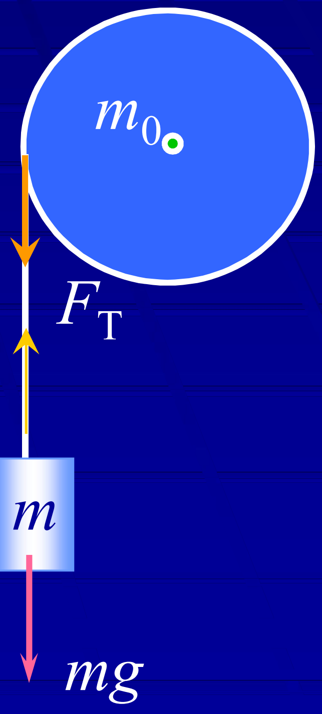
例4　质量为m_0 =16 kg的实心滑轮，半径为R = 0.15 m。一根细绳绕在滑轮上，一端挂一质量为m的物体。求：（1）由静止开始1秒钟后，物体下降的距离；（2）绳子的张力。

解：$F_T R = \frac{1}{2} m_0 R^2 \cdot \frac{a}{R}$　$F_T = \frac{1}{2} m_0 a$　$mg - F_T = ma$

$$a = \frac{mg}{m + m_0/2} = \frac{8\times 10}{8+8}\,\mathrm{m\cdot s^{-2}} = 5\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$$

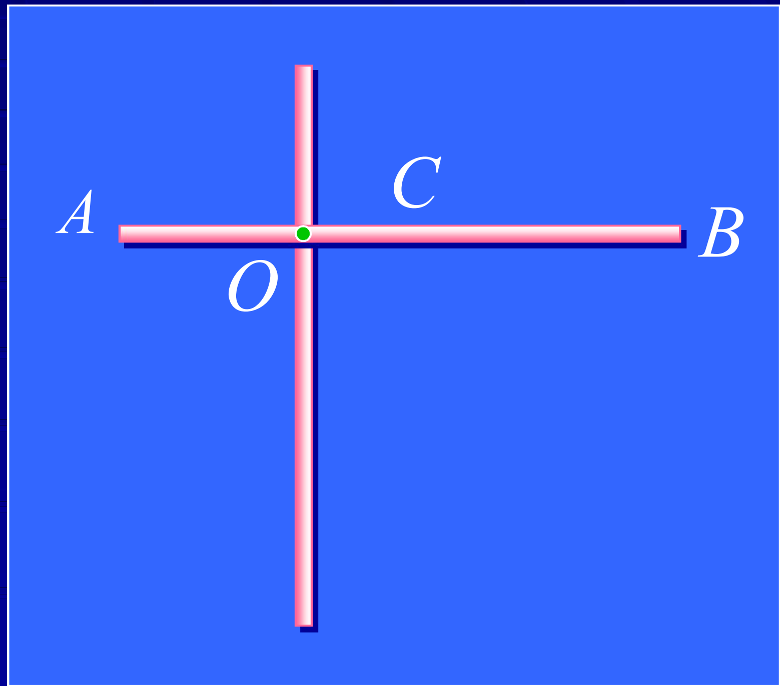
$$h = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}\times 5\times 1^2\,\mathrm{m} = 2.5\,\mathrm{m}$$

$$F_T = \frac{1}{2}\times 16\times 5 = 40\,\mathrm{N}$$



例5 一质量为m，长为l 的均质细杆，转轴在O点，距A端 $l/3$ 处。今使棒从静止开始由水平位置绕O点转动，求：（1）水平位置的角速度和角加速度；（2）垂直位置时的角速度和角加速度。

解： $$J_O = J_C + md^2$$



$$J_O = \frac{1}{12}ml^2 + m\left(\frac{l}{6}\right)^2 = \frac{1}{9}ml^2$$

（1） $$\omega_O = 0$$

$$\alpha = \frac{M}{J_O} = \frac{mgl/6}{ml^2/9} = \frac{3g}{2l}$$

（2）

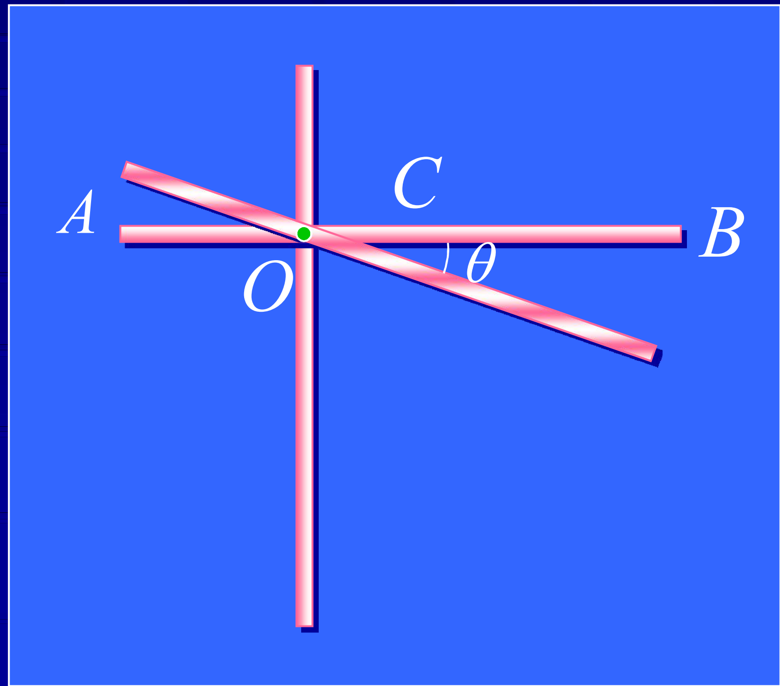
$$M = J\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} \qquad mg\frac{l}{6}\cos\theta = \frac{1}{9}ml^2\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{9}ml^2\omega\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\theta}$$

$$\omega\,\mathrm{d}\omega = \frac{3g}{2l}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta$$

$$\int_0^{\omega}\omega\,\mathrm{d}\omega = \int_0^{\pi/2}\frac{3g}{2l}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta$$

$$\frac{1}{2}\omega^2 = \frac{3g}{2l}\sin\theta\Big|_0^{\pi/2} = \frac{3g}{2l}$$

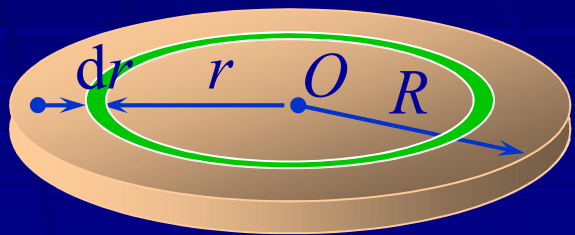
$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{l}} \qquad \alpha = 0$$



例6 一半径为R，质量为m的均匀圆盘平放在粗糙的水平面上。若它的初速度为ω_0，绕中O心旋转，问经过多长时间圆盘才停止。（设摩擦系数为μ）

解：

$$\mathrm{d}M = \mathrm{d}F \cdot r = \mu\,\mathrm{d}mg \cdot r$$

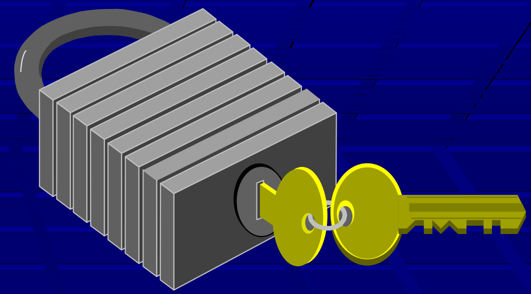


$$\mathrm{d}m = \frac{m}{\pi R^2} \cdot 2\pi r \cdot \mathrm{d}r = \frac{2mr\mathrm{d}r}{R^2}$$

$$\mathrm{d}M = \frac{2m\mu g r^2 \mathrm{d}r}{R^2}$$

$$M = \int \mathrm{d}M = \int_0^r \frac{2\mu m g r^2 \mathrm{d}r}{R^2} = \frac{2}{3}\mu m g R$$

$$-M = J\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$$



$$-\frac{2}{3}\mu mgR = \frac{1}{2}mR^2\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$$

$$\mathrm{d}t = \frac{3R}{4\mu g}\mathrm{d}\omega \qquad \int_0^t \mathrm{d}t = -\int_{\omega_0}^0 \frac{3R}{4\mu g}\mathrm{d}\omega$$

$$t = \frac{3R\omega_0}{4\mu g}$$

3-1-4 刚体对定轴的角动量守恒定律

刚体对定轴的角动量定理 $\int_{t_1}^{t_2} M_z \, \mathrm{d}t = L_2 - L_1$

当 $M_z = 0$ 时 $\boxed{L_z = J\omega = \text{恒量}}$

刚体对定轴的角动量守恒定律：

当刚体所受的外力对转轴的力矩之代数和为零时，刚体对该转轴的角动量保持不变。

注意： 该定律不但适用于刚体，同样也适用于绕定轴转动的任意物体系统。

说明：

1. 物体绕定轴转动时角动量守恒是指转动惯量和角速度的乘积不变。

2. 几个物体组成的系统，绕一公共轴转动，则对该公共转轴的合外力矩为零时，该系统对此轴的总角动量守恒

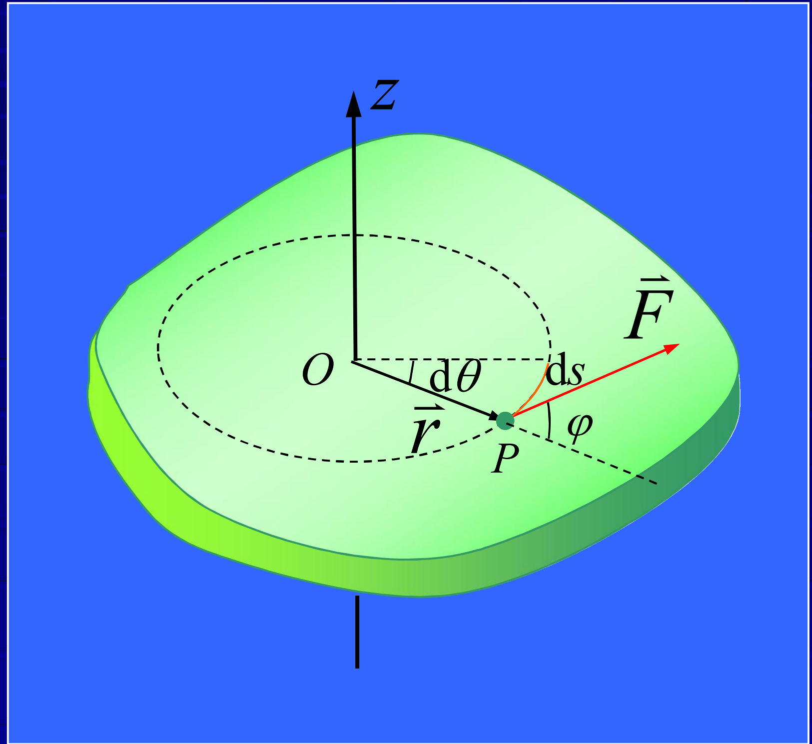
$$\sum_i J_i \omega_i = \text{恒量}$$

3-1-5　力矩的功

$$\mathrm{d}W = \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{s} = F\sin\varphi\, r\mathrm{d}\theta$$

力矩： $M = Fr\sin\varphi$

$$\mathrm{d}W = M\mathrm{d}\theta$$



力矩对刚体所作的功：

$$W = \int_0^{\theta} M\mathrm{d}\theta$$

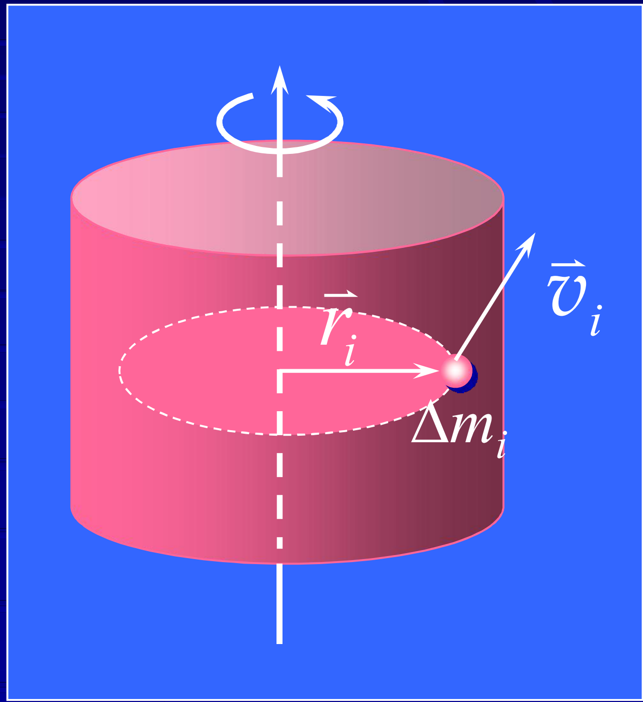
功率： $P = \dfrac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = M\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = M\omega$

力矩对刚体的瞬时功率等于力矩和角速度的乘积。

3-1-6 刚体的定轴转动动能和动能定理

第i个质元的动能：

$$\Delta E_{ki}=\frac{1}{2}\Delta m_i v_i^2=\frac{1}{2}\Delta m_i r_i^2\omega^2$$



整个刚体的转动动能：

$$E_k=\sum\Delta E_{ki}=\sum\frac{1}{2}\Delta m_i r_i^2\omega^2$$

$$=\frac{1}{2}(\sum\Delta m_i r_i^2)\omega^2$$

$$\boxed{E_k=\frac{1}{2}J\omega^2}$$

设在外力矩 M 的作用下，刚体绕定轴发生角位移 $\mathrm{d}\theta$

元功：　$\mathrm{d}W = M\mathrm{d}\theta$

由转动定律　$M = J\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$

有　$\mathrm{d}W = J\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}\theta = J\omega\mathrm{d}\omega$

$$\boxed{W = \int_{\omega_1}^{\omega_2} J\omega\mathrm{d}\omega = \frac{1}{2}J\omega_2^2 - \frac{1}{2}J\omega_1^2}$$

刚体绕定轴转动的动能定理：合外力矩对刚体所做的功等于刚体转动动能的增量。

例7 质量为m_0，长为$2l$的均质细棒，在竖直平面内可绕中心轴转动。开始棒处于水平位置，一质量为m的小球以速度u垂直落到棒的一端上。设为弹性碰撞。求碰后小球的回跳速度v以及棒的角速度。

解： 由系统角动量守恒

$$-mul = -J\omega + mvl$$

机械能守恒 $$\frac{1}{2}mu^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2$$

$$v = \frac{u(m_0 - 3m)}{m_0 + 3m} \qquad \omega = \frac{6mu}{(m_0 + 3m)l}$$

设碰撞时间为Δt

$$\overline{F}\Delta t = mv - (-mu)$$

$$-\overline{F}l\Delta t = -J\omega - 0$$

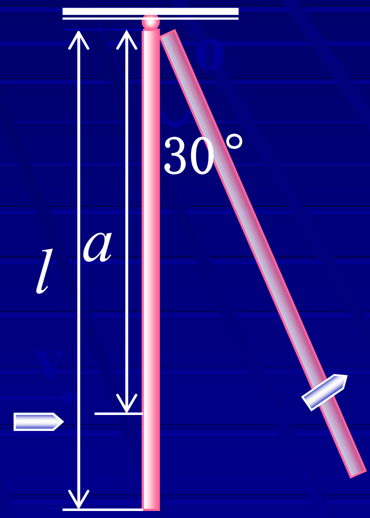
消去Δt

$$-mul = -J\omega + mvl$$

$$\frac{1}{2}mu^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2$$

$$v = \frac{u(m_0 - 3m)}{m_0 + 3m} \qquad \omega = \frac{6mu}{(m_0 + 3m)l}$$

例8 一长为l，质量为m_0的杆可绕支点O自由转动。一质量为m，速度为v的子弹射入距支点为a的棒内。若棒偏转角为30°。问子弹的初速度为多少。



解： 角动量守恒：

$$mva = \left(\frac{1}{3}m_0 l^2 + ma^2\right)\omega$$

机械能守恒：

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}m_0 l^2 + ma^2\right)\omega^2 = mga\left(1-\cos 30°\right)+m_0 g\frac{l}{2}\left(1-\cos 30°\right)$$

$$v = \frac{1}{ma}\sqrt{\frac{g}{6}\left(2-\sqrt{3}\right)\left(m_0 l + 2ma\right)\left(m_0 l^2 + 3ma^2\right)}$$

例9 一质量为m_0，半径R的圆盘，盘上绕由细绳，一端挂有质量为m的物体。问物体由静止下落高度h时，其速度为多大？

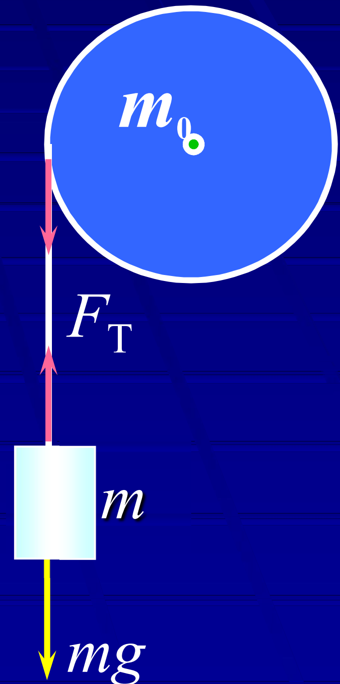
解：

$$F_T R\Delta\varphi = \frac{1}{2}J\omega^2 - \frac{1}{2}J\omega_0^2$$

$$mgh - F_T h = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$$

$$h = R\Delta\varphi \qquad v = R\omega$$

$$v_0 = 0 \quad ,\omega_0 = 0 \quad , \quad J = m_0 R^2/2$$



解得 $$v = 2\sqrt{\frac{mgh}{m_0 + 2m}}$$

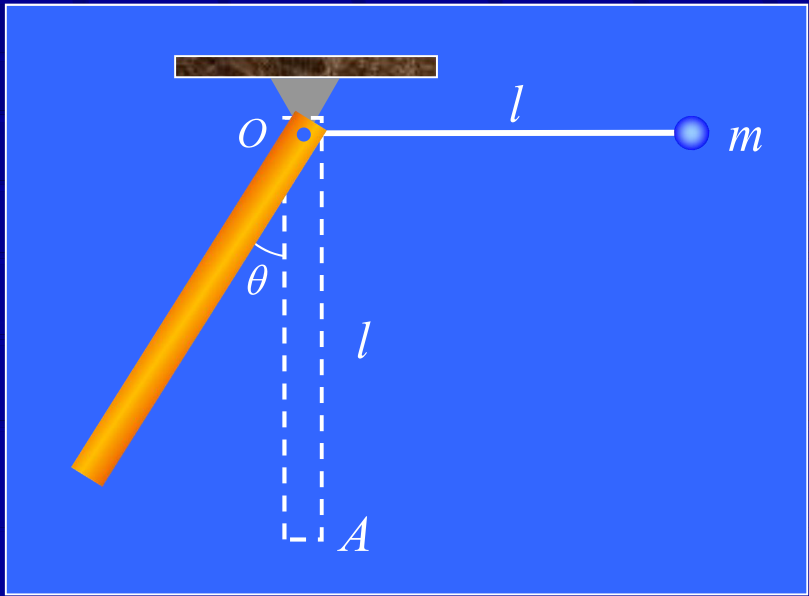
例10 长为 l 的均质细直杆OA，一端悬于O点铅直下垂，如图所示。一单摆也悬于O点，摆线长也为l，摆球质量为m。现将单摆拉到水平位置后由静止释放，摆球在 A 处与直杆作完全弹性碰撞后恰好静止。试求：(1) 细直杆的质量m_0；(2) 碰撞后细直杆摆动的最大角度θ。（忽略一切阻力）

解: (1) 按角动量守恒定律

$$J_m\omega_m = J_{m_0}\omega_{m_0}$$

系统的动能守恒

$$\frac{1}{2}J_m\omega_m{}^2 = \frac{1}{2}J_{m_0}\omega_{m_0}^2$$



解得 $J_m = J_{m_0} \quad \rightarrow \quad ml^2 = \frac{1}{3} m_0 l^2$

系统的机械能守恒，有

$$mgl = m_0 g \frac{l}{2}(1-\cos\theta)$$

$$\cos\theta = \frac{1}{3}$$

$$\theta = \arccos\frac{1}{3} = 70.5^\circ$$