第 1 章 组合分析

1.1 引 言

首先，我们提出一个与概率论有关的有趣的经典问题：一个通信系统含 n 个天线，顺序地排成一排，只要没有两个连续的天线都失效，那么这个系统就可以接收到信号，此时称这个通信系统是有效的．已经探明这 n 个天线里，恰好有 m 个天线是失效的，问此通信系统仍然有效的概率是多大？举例来说，设 $n = 4, m = 2$，通信系统是否有效取决于这 n 个天线的设置方式（它们的排列次序）．这 4 个天线一共有 6 种可能的设置方式

$$\begin{array}{ccc} 0\;1\;1\;0 & 1\;0\;1\;0 & 1\;0\;0\;1 \\ 0\;1\;0\;1 & 0\;0\;1\;1 & 1\;1\;0\;0 \end{array}$$

其中，1 表示天线有效，0 表示天线失效．可以看出前 3 种情况整个通信系统仍然有效，而后 3 种情况系统将失效，因此，若天线的设置方式是随机排列的，所求的概率应该是 $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$．对于一般的 n 和 m 来说，用类似上述方法可以计算出所求概率．也即，先计算使得系统仍有效的设置方式有多少种，再计算总共有多少种设置方式，两者相除即为所求概率．

从上所述可看出，一个有效地计算事件发生结果数目的方法是非常有用的．事实上，概率论里的很多问题只要通过计算一个事件发生结果的数目就能得以解决．关于计数的数学理论通常称为组合分析(combinatorial analysis)． 1

1.2 计数基本法则

对我们的整个讨论来说，以下关于计数的法则是基本的．粗浅地说，若一个试验有 m 个可能结果，而另一个试验又有 n 个可能结果，则两个试验一共有 mn 个结果．

> **计数基本法则**
> 有两个试验，其中试验 1 有 m 种可能发生的结果，对应于试验 1 的每一个结果，试验 2 有 n 种可能发生的结果，则对这两个试验来说，一共有 mn 种可能结果．

基本法则的证明 通过列举两个试验所有可能的结果来证明这个问题，结果

如下：

$$\begin{array}{cccc}(1,1) & (1,2) & \cdots & (1,n)\\ (2,1) & (2,2) & \cdots & (2,n)\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ (m,1) & (m,2) & \cdots & (m,n)\end{array}$$

其中, (i,j) 表示第一个试验结果是第 i 种、第二个试验结果是第 j 种. 因此, 所有可能结果组成一个矩阵, 共有 m 行 n 列, 结果的总数为 $m\times n$, 这样就完成了证明.

例 2a 一个小团体由 10 位妇女组成, 每位妇女又有 3 个孩子. 现在要从其中选取一位妇女和她的一个孩子评为“年度母亲和年度儿童”, 问一共有多少种可能的选取方式?

解：将选择妇女看成第一个试验, 而接下来选择这位母亲的一个孩子看作第二个试验, 那么根据计数基本法则可知, 一共有 $10\times 3=30$ 种选择方式. ■

当有 2 个以上的试验时, 基本法则可以推广如下：

2 **推广计数法则**

一共有 r 个试验. 第一个试验有 n_1 种可能结果; 对应于第一个试验的每一种试验结果, 第二个试验有 n_2 种可能结果; 对应于头两个试验的每一种试验结果, 第三个试验有 n_3 种可能结果; 等等. 那么, 这 r 个试验一共有 $n_1\cdot n_2\cdots n_r$ 种可能结果.

例 2b 一个大学计划委员会由 3 名新生、4 名二年级学生、5 名三年级学生、2 名毕业班学生组成, 现在要从中选 4 个人组成一个分委员会, 要求来自不同的年级, 一共有多少种选择方式?

解：可以把它理解为从每个年级选取一个代表, 从而有 4 个试验, 根据推广计数法则, 一共有 $3\times 4\times 5\times 2=120$ 种可能的选择结果. ■

例 2c 车牌号是 7 位的, 如果要求前 3 个位置必须是字母, 后 4 个必须是数字, 一共有多少种编排车牌号的方式?

解：根据推广计数法则, 可知道答案为：$26\times 26\times 26\times 10\times 10\times 10\times 10=175\ 760\ 000$. ■

例 2d 对于只定义在 n 个点上的函数, 如果函数取值只能为 0 或 1, 这样的函数有多少?

解：设这 n 个点为 $1,2,\cdots,n$, 既然对每个点来说, $f(i)$ 的取值只能为 0 或者 1, 那么一共有 2^n 个这样的函数. ■

例 2e 在例 2c 中, 如果不允许字母或数字重复, 一共有多少种可能的车牌号?

解：这种情况下, 一共有 $26\times 25\times 24\times 10\times 9\times 8\times 7=78\ 624\ 000$ 种可能的车牌号. ■

1.3 排 列

按随意顺序来排列字母 a, b, c, 一共有多少种排列方式? 通过直接列举, 可知一共有 6 种: abc, acb, bac, bca, cab 以及 cba. 每一种都可以称为一个排列 (permutation). 因此, 3 个元素一共有 6 种可能排列方式. 这个结果能通过计数基本法则得到: 在排列中第一个位置可供选择的元素有 3 个, 第二个位置可供选择的元素是剩下的两个之一, 第三个位置只能选择剩下的 1 个元素, 因此一共有 $3 \times 2 \times 1 = 6$ 种可能的排列. 3

假设有 n 个元素, 那么用上述类似的方法, 可知一共有 $n(n-1)(n-2)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$ 种不同的排列方式.

例 3a 一个垒球队一共有 9 名队员, 问一共有多少种击球顺序?

解: 一共有 $9! = 362\ 880$ 种可能的击球顺序. ■

例 3b 某概率论班共有 6 名男生、4 名女生, 有次测验是根据他们的表现来排名次, 假设没有两个学生成绩一样.

(a) 一共有多少种排名次的方式?

(b) 如限定男生、女生分开排名次, 一共有多少种排名次的方式?

解:

(a) 每种排名方法都对应着一个 10 人的排列方式, 故答案是: $10! = 3\ 628\ 800$.

(b) 男生一起排名次有 $6!$ 种可能, 女生一起排名次有 $4!$ 种, 根据计数基本法则, 一共有 $6! \times 4! = 720 \times 24 = 17\ 280$ 种可能结果. ■

例 3c 把 10 本书放到书架上, 其中有 4 本数学书、3 本化学书、2 本历史书和 1 本语文书. 现在要求相同类别的书必须紧挨着放, 问一共有多少种放法?

解: 如果数学书放在最前面, 接下来放化学书, 再下来放历史书, 最后放语文书, 那么一共有 $4!3!2!1!$ 种排列方式. 而这 4 种书的顺序一共又是 $4!$ 种, 因此, 所求答案是 $4!4!3!2!1! = 6912$. ■

接下来讨论如果有 n 个元素, 其中有些是不可区分的, 这种排列数如何计算? 看下面的例子. 4

例 3d 用 PEPPER 的 6 个字母进行排列, 一共有几种不同的排列方式?

解: 如果3个字母 P 和 2 个字母 E 都是可以区分的 (标上号), 也即 $P_1E_1P_2P_3E_2R$, 一共有 $6!$ 种排列方式. 然而, 考察其中任一个排列, 比如 $P_1P_2E_1P_3E_2R$, 如果分别将 3 个字母 P 和 2 个字母 E 重排, 那么得到的结果仍然是 PPEPER, 也就是说, 总共有 $3!2!$ 种排列

$$\begin{array}{llll} P_1P_2E_1P_3E_2R & P_1P_2E_2P_3E_1R & P_1P_3E_1P_2E_2R & P_1P_3E_2P_2E_1R \\ P_2P_1E_1P_3E_2R & P_2P_1E_2P_3E_1R & P_2P_3E_1P_1E_2R & P_2P_3E_2P_1E_1R \\ P_3P_1E_1P_2E_2R & P_3P_1E_2P_2E_1R & P_3P_2E_1P_1E_2R & P_3P_2E_2P_1E_1R \end{array}$$

这些排列都是同一种形式: PPEPER. 因此一共有 $6!/(3!2!) = 60$ 种不同的排列方

式. ■

一般来说, 利用上述同样的方法可知: n 个元素, 如果其中 n_1 个元素彼此相同, 另 n_2 个彼此相同, $\cdots$, n_r 个也彼此相同, 那么一共有 $\dfrac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_r!}$ 种排列方式.

例 3e 一个棋类比赛一共有 10 个选手, 其中 4 个来自俄罗斯, 3 个来自美国, 2 个来自英国, 另 1 个来自巴西. 如果比赛结果只记录选手的国籍, 那么一共有多少种可能结果?

解: 一共有 $\dfrac{10!}{4!3!2!1!} = 12\,600$ 种可能结果. ■

例 3f 有 9 面小旗排列在一条直线上, 其中 4 面白色、3 面红色和 2 面蓝色, 颜色相同的旗是一样的. 如果不同的排列方式代表不同的信号, 那么一共有多少种可能的信号?

5 **解**: 一共有 $\dfrac{9!}{4!3!2!} = 1260$ 种不同的信号. ■

1.4 组　合

从 n 个元素当中取 r 个, 一共有多少种取法? 这也是一个有趣的问题. 比如, 从 A,B,C,D 和 E 这 5 个元素中选取 3 个组成一组, 一共有多少种取法? 解答如下: 取第一个有 5 种取法, 取第 2 个有 4 种取法, 取第三个有 3 种取法, 所以, 如果考虑选择顺序的话, 那么一共有 $5\times4\times3$ 种取法. 但是, 每一个包含 3 个元素的组 (比如包含 A,B,C 的组) 都被计算了 6 次, (也即, 如果考虑顺序的话, 所有的排列 ABC,ACB, BAC,BCA,CAB,CBA 都被算了一次.) 所以, 组成方法数为:

$$\frac{5\times4\times3}{3\times2\times1} = 10$$

一般来说, 如果考虑顺序的话, 从 n 个元素中选择 r 个组成一组一共有 $n(n-1)\cdots(n-r+1)$ 种方式, 而每个含 r 个元素的小组都被重复计算了共 $r!$ 次. 所以, 能组成不同的组的数目为:

$$\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

记号与术语

对 $r \leqslant n$, 我们定义 $\binom{n}{r}$ 如下:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$$

并且说 $\binom{n}{r}$ 表示了从 n 个元素中一次取 r 个的可能组合数. [1]

1. 为了方便, $0!$ 被定义为 1, 因此, $\binom{n}{0}=\binom{n}{n}=1$. 当 $i<0$ 或者 $i>n$ 时, 有时也认为 $\binom{n}{i}$ 等于 0.

因此, $\binom{n}{r}$ 就表示了从 n 个元素中一次取 r 个元素的可能取法的数目, 如果不考虑抽取顺序的话.

例 4a 从 20 人当中选择 3 人组成委员会, 一共有多少种选法? 6

解: 一共有 $\binom{20}{3}=\dfrac{20\times 19\times 18}{3\times 2\times 1}=1140$ 种选法. ■

例 4b 有个 12 人组成的团体, 其中 5 位女士, 7 位男士, 现从中选取 2 位女士, 3 位男士组成一个委员会, 问有多少种取法? 另外, 如果其中有 2 位男士之间有矛盾, 并且坚决拒绝一起工作, 那又有多少种取法?

解: 有 $\binom{5}{2}$ 种方法选取女士, 有 $\binom{7}{3}$ 种方法选取男士, 根据基本计数法则一共有 $\binom{5}{2}\binom{7}{3}=\dfrac{5\times 4}{2\times 1}\times\dfrac{7\times 6\times 5}{3\times 2\times 1}=350$ 种方式选取 2 位女士 3 位男士.

现在来看如果有两位男士拒绝一起工作, 那么选取 3 位男士的 $\binom{7}{3}=35$ 种方法中, 有 $\binom{2}{2}\binom{5}{1}=5$ 种同时包含了该两位男士, 所以, 一共有 $35-5=30$ 种选取方法不同时包含那两位有矛盾的男士; 另外, 选取女士的方法仍是 $\binom{5}{2}=10$ 种, 所以, 一共有 $30\times 10=300$ 种选取方式. ■

例 4c 假设一排 n 个天线中, 有 m 个是失效的, 另 $n-m$ 个是有效的, 并且假设所有有效的天线之间不可区分, 同样, 所有失效的天线之间也不可区分. 问有多少种排列方式, 使得没有两个连续的天线是失效的?

解: 先将 $n-m$ 个有效天线排成一排, 既然没有连续两个失效的, 那么两个有效天线之间, 必然至多放置一个失效的. 也即, 在 $n-m+1$ 个可能位置中 (如图 1.1 中的星号), 选择 m 个来放置失效天线. 因此有 $\binom{n-m+1}{m}$ 种可能方式确保在两个失效天线之间至少存在一个有效天线.

$$*\ 1\ *\ 1\ *\ 1\ \cdots\ *\ 1\ *\ 1\ *$$

1: 有效天线 7

*: 放最多一个失效天线

图 1.1 天线的排列

以下是一个非常有用的组合恒等式:

$$\binom{n}{r}=\binom{n-1}{r-1}+\binom{n-1}{r}\qquad 1\leqslant r\leqslant n \tag{4.1}$$

上述恒等式可用分析的方法证明，也可从组合的角度来证明. 设想从 n 个元素中取 r 个，一共有 $\binom{n}{r}$ 种取法. 从另一个角度来考虑，不妨设这 n 个元素里有一个特殊的，记为元素 1，那么取 r 个元素就有两种结果，取元素 1 或者不取元素 1. 取元素 1 的方法一共有 $\binom{n-1}{r-1}$ 种 (从 $n-1$ 个元素里面取 $r-1$ 个)；不取元素 1 的方法一共有 $\binom{n-1}{r}$ 种 (从去掉元素 1 的剩下 $n-1$ 个元素中取 r 个). 两者之和就是从 n 个元素里取 r 个的方法之和，所以恒等式成立.

值 $\binom{n}{r}$ 经常也称为*二项式系数*(binomial coefficient)，这是因为它们是以下的二项式定理中重要的系数.

二项式定理

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \tag{4.2}$$

以下提供二项式定理的两个证明方法，其一是数学归纳法，其二是基于组合考虑的证明.

二项式定理的归纳法证明 $n=1$ 时，(4.2) 式化为 $x+y = \binom{1}{0}x^0y^1 + \binom{1}{1}x^1y^0 = y+x$ 假设 (4.2) 式对于 $n-1$ 成立，那么对于 n

$$(x+y)^n = (x+y)(x+y)^{n-1} = (x+y)\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}x^k y^{n-1-k}$$

8

$$= \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}x^{k+1}y^{n-1-k} + \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}x^k y^{n-k}$$

在前面的求和公式里令 $i=k+1$，后面的求和公式里令 $i=k$，那么

$$\begin{aligned}
(x+y)^n &= \sum_{i=1}^{n}\binom{n-1}{i-1}x^i y^{n-i} + \sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}x^i y^{n-i} \\
&= x^n + \sum_{i=1}^{n-1}\left[\binom{n-1}{i-1} + \binom{n-1}{i}\right] x^i y^{n-i} + y^n \\
&= x^n + \sum_{i=1}^{n-1}\binom{n}{i}x^i y^{n-i} + y^n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^i y^{n-i}
\end{aligned}$$

这样就证明了等式. ■

二项式定理的组合法证明 考虑乘积 $(x_1+y_1)(x_2+y_2)\cdots(x_n+y_n)$ 展开后一

共包含 2^n 项,每一项都是 n 个因子的乘积,而且每一项都包含因子 x_i 或 y_i,例如:

$$(x_1+y_1)(x_2+y_2)=x_1x_2+x_1y_2+y_1x_2+y_1y_2$$

这 2^n 项和里面,一共有多少项含有 k 个 x_i 和 $n-k$ 个 y_i?

含有 k 个 x_i 和 $n-k$ 个 y_i 的每一项对应了从 n 个元素 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 里取 k 个元素的取法. 因此一共有 $\binom{n}{k}$ 个这样的项. 这样,令 $x_i=x,y_i=y,i=1,\cdots,n$,可以看出

$$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^ky^{n-k}$$ ■

例 4d 展开 $(x+y)^3$.

解:

$$(x+y)^3=\binom{3}{0}x^0y^3+\binom{3}{1}x^1y^2+\binom{3}{2}x^2y+\binom{3}{3}x^3y^0$$

$$=y^3+3xy^2+3x^2y+x^3$$ ■ 9

例 4e 一个有 n 个元素的集合共有多少子集?

解: 含有 k 个元素的子集一共有 $\binom{n}{k}$ 个,因此所求答案为:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=(1+1)^n=2^n.$$

该结果还可以这样得到:给该集合里的每个元素都标上 1 或 0,每种标法都一一对应了一个子集,例如,当把所有元素都标为 1 时候,就对应着一个含有所有元素的子集. 因为一共有 2^n 种标法,所以一共有 2^n 个子集.

上述结论包含了一个元素都没有的子集 (也即空集),所以至少有一个元素的子集一共有 2^n-1 个. ■

1.5 多项式系数

本节考虑如下问题:有 n 个不同的元素,分成 r 组,每组分别有 $n_1,n_2,\cdots,n_r$ 个元素,其中 $\sum_{i=1}^{r}n_i=n$,一共有多少种分法? 注意到,第一组成员有 $\binom{n}{n_1}$ 种选取方法,接下来,选定第一组成员后,选第二组成员时只能从剩下的 $n-n_1$ 个元素中选,一共有 $\binom{n-n_1}{n_2}$ 种取法,接下来第三组有 $\binom{n-n_1-n_2}{n_3}$ 种取法,等等. 因此,根据推广计数法则,将 n 个元素分成 r 组的分法总数一共是:

$$\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\cdots\binom{n-n_1-n_2-\cdots-n_{r-1}}{n_r}$$

$$=\frac{n!}{(n-n_1)!n_1!}\cdot\frac{(n-n_1)!}{(n-n_1-n_2)!n_2!}\cdots\frac{(n-n_1-n_2-\cdots-n_{r-1})!}{0!n_r!}$$
$$=\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_r!}$$

用另一个方法也可以得到此结果：有 n 个球, 其中 n_1 个标有记号 1, n_2 个标有记号 2, $\cdots$, n_r 个标有记号 r. 具有相同标号的球之间是不可分辨的. 现在设有 n 个对象, 记为 $1,2,\cdots,n$. 设想一个球里也只可放一个对象. 把 n 个对象放到 r 个球里边, 等价于将 n 个对象分成 r 个组, 因为每个球有一个标号, 这个标号就是这个对象的组号. 现在问一共有多少不同的分组方式呢? 先把这些对象排成一个固定的顺序, 然后将这些球进行排列. 当球的排列确定以后, 每一个对象就对应一个球的编号. 这就等价于将 n 个对象分成 r 个组, 每个对象的组号就是这个对象所对应的球号. 这些排列数就是这 n 个对象的分组数. 在 1.3 节里讨论了 n 个对象的排列数的
10 计数方法, 其中具有相同球号的球之间是不可分辨的. 在这种情况下, n 个球的排列数为 $\frac{n!}{n_1!\cdots n_r!}$.

记号

如果 $n_1+n_2+\cdots+n_r=n$, 定义 $\binom{n}{n_1,n_2,\cdots,n_r}$ 为：

$$\binom{n}{n_1,n_2,\cdots,n_r}=\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_r!}$$

因此, $\binom{n}{n_1,n_2,\cdots,n_r}$ 表示了 n 个不同的元素分成大小分别为 $n_1,n_2,\cdots,n_r$ 的 r 组的方法数.

例 5a 某小城市的警察局有 10 名警察, 其中需要 5 名警察在街道巡逻, 2 名警察在局里值班, 另 3 名留在局里待命. 问把 10 名警察分成这样的 3 组共有多少种不同分法?

解：一共有 $10!/(5!2!3!)=2520$ 种分法. ■

例 5b 10 个小孩要分成 A,B 两队, 每队 5 人. A 队去参加一场比赛, B 队则去参加另一场比赛, 一共有多少种分法?

解：一共有 $10!/(5!5!)=252$ 种分法. ■

例 5c 10 个孩子分成两组, 每组 5 人进行篮球比赛, 一共有多少种分法?

解：这个问题与例 5b 不同的是, 分成的两组是不用考虑顺序的. 也就是说, 这儿没有 A,B 两组之分, 仅仅分成各自为 5 人的两组, 故所求答案为：

$$\frac{10!/(5!5!)}{2!}=126$$ ■

下面的定理是二项式定理的推广，其证明留作习题. 11

多项式定理

$$(x_1+x_2+\cdots+x_r)^n=\sum_{\substack{(n_1,\cdots,n_r):\\ n_1+\cdots+n_r=n}}\binom{n}{n_1,n_2,\cdots,n_r}x_1^{n_1}x_2^{n_2}\cdots x_r^{n_r}$$

上式的求和号是对一切满足 $n_1+n_2+\cdots+n_r=n$ 的所有非负整向量 $(n_1,n_2,\cdots,n_r)$ 求和.

$\binom{n}{n_1,n_2,\cdots,n_r}$ 也称为*多项式系数*(multinomial coefficient).

例 5d

$$\begin{aligned}(x_1+x_2+x_3)^2&=\binom{2}{2,0,0}x_1^2x_2^0x_3^0+\binom{2}{0,2,0}x_1^0x_2^2x_3^0+\binom{2}{0,0,2}x_1^0x_2^0x_3^2\\&\quad+\binom{2}{1,1,0}x_1^1x_2^1x_3^0+\binom{2}{1,0,1}x_1^1x_2^0x_3^1+\binom{2}{0,1,1}x_1^0x_2^1x_3^1\\&=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3\end{aligned}$$ ■

*1.6 方程的整数解个数[1]

把 n 个可分辨的球分到 r 个可分辨的坛子里，一共有 r^n 种方式. 这是因为任一个球都有可能放到 r 个坛子中的任一个. 现在假设这 n 个球是不可分辨的，这种情况下一共有多少种可能结果呢？由于球是不可分辨的，将 n 个球分到 r 个坛子里的结果可以描述为向量 $(x_1,x_2,\cdots,x_r)$，其中 x_i 表示分到第 i 个坛子里球的数量. 因此，此问题也等同于求出满足 $x_1+x_2+\cdots+x_r=n$ 的非负整数向量 $(x_1,x_2,\cdots,x_r)$ 的个数. 为了计算它，先考虑该方程的整数解个数：设想有 n 个不可分辨的球排成一排，现把它们分成 r 组，每组都不空. 要做到这一点，我们可在 n 个球之间的 $n-1$ 个空隙里选取 $r-1$ 个（如图 1.2 所示). 其证明留作习题. 12

$0 * 0 * 0 * \cdots * 0 * 0$

n 个对象0

在*处选择 $r-1$个

图 1.2 n 个球之间的 $n-1$ 个空隙里选取 $r-1$ 个

1. 此处或以后打 * 号表示这些材料是可以选读的，或是选作的题目.

例如, $n=8, r=3$ 时, 可以选两个就能隔开:

$$000|000|00$$

代表向量 $x_1=3, x_2=3, x_3=2$. 由于一共有 $\binom{n-1}{r-1}$ 种选择可能, 因此就可以得到以下命题:

命题 6.1 共有 $\binom{n-1}{r-1}$ 个不同的正整数向量 $(x_1, x_2, \cdots, x_r)$ 满足

$$x_1+x_2+\cdots+x_r=n \qquad x_i>0, i=1,\cdots,r$$

为了得到非负整数解 (而不是正整数解) 个数, 注意到 $x_1+x_2+\cdots+x_r=n$ 的非负整数解个数与 $y_1+y_2+\cdots+y_r=n+r$ 的正整数解个数是相同的 (令 $y_i=x_i+1, i=1,\cdots,r$). 因此, 利用命题 6.1, 可得到如下命题:

命题 6.2 共有 $\binom{n+r-1}{r-1}$ 个不同的非负整数向量 $(x_1, x_2, \cdots, x_r)$ 满足

$$x_1+x_2+\cdots+x_r=n \tag{6.1}$$

例 6a 方程 $x_1+x_2=3$ 共有多少组不同的非负整数解?

解: 一共有 $\binom{3+2-1}{2-1}=4$ 组解: $(0,3),(1,2),(2,1),(3,0)$. ■

13 **例 6b** 有 2 万美元可投资到 4 个项目上, 每份投资必须是 1000 美元的整数倍. 如果要求 2 万美元全部投资, 一共有多少种可行的投资方法? 如果不要求将钱全部投资呢? 其证明留作习题.

解: 令 $x_i, i=1,2,3,4$ 分别表示 4 个项目的投资额, 因此, 4 个项目的投资额就是方程 $x_1+x_2+x_3+x_4=20 \quad x_i \geqslant 0$ 的非负整数解. 因此, 根据命题 6.2, 一共有 $\binom{23}{3}=1771$ 种可能的投资方式. 如果并不需要将钱全部投资, 那么假设 x_5 表示剩余资金, 那么一个投资策略就对应了如下方程的一个非负整数解:

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=20 \qquad x_i \geqslant 0$$

因此, 根据命题 6.2, 存在 $\binom{24}{4}=10\,626$ 种投资策略. ■

例 6c 在 $(x_1+x_2+\cdots+x_r)^n$ 的展开式中, 一共有多少项?

解:

$$(x_1+x_2+\cdots+x_r)^n=\sum\binom{n}{n_1,\cdots,n_r}x_1^{n_1}\cdots x_r^{n_r}$$

其中, 求和针对所有满足 $n_1+\cdots+n_r=n$ 的非负整数 $(n_1,\cdots,n_r)$. 因此, 根据命