厦门大学《大学物理》C 类

课程期中试卷

一、　　（15 分）

一赛车沿半径为 R 的圆形轨道作圆周运动，其行驶路程与时间的关系为 $s = at + bt^2$，式中 a、b 均为常量。求该赛车：

（1）　任意时刻的速度 $\vec{v}(t)$；

（2）　任意时刻的加速度 $\vec{a}(t)$；

（3）　任意时刻的角速度 $\omega(t)$ 和角加速度 $\alpha(t)$；

解：（1）$\vec{v}(t) = \dfrac{ds}{dt}\vec{\tau} = (a+2bt)\vec{\tau}$　；　　　　（5 分）

（2）$$\begin{aligned}\vec{a}(t) &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + \frac{v^2}{R}\vec{n} \\ &= 2b\vec{\tau} + \frac{(a+2bt)^2}{R}\vec{n}\end{aligned}$$　；　　　　（3+3=6 分）

（3）$\omega(t) = \dfrac{v}{R} = \dfrac{(a+2bt)}{R}$　；　　　　（2 分）

$\alpha(t) = \dfrac{a_\tau}{R} = \dfrac{2b}{R}$　；　　　　（2 分）

二、　　（14 分）

当物体在空气中高速度飞行时，由空气阻力产生的反向加速度大小与物体速度的平方成正比，即 $a = -kv^2$，其中 k 为常量。若物体仅受空气阻力作用沿 x 轴方向作直线运动，且通过原点时的速度为 v_0，求在此后：

（1）　物体的速度为 v 时，物体所在的位置 $x(v)$；

（2）　若物体经历时间 $2s$ 时，其速度变为 $\dfrac{v_0}{2}$，求常数 k。

解：（1）$\because a=-kv^2=\dfrac{dv}{dt}\cdot\dfrac{dx}{dx}=\dfrac{vdv}{dx}$ ，（3 分）

$$\therefore\int_0^x -kdx=\int_{v_0}^{v}\frac{dv}{v}$$ （2 分）

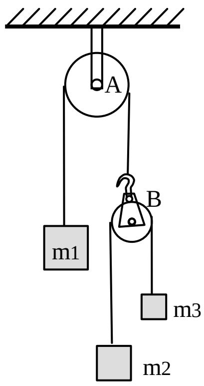
解得：$x(v)=\dfrac{1}{k}\ln\dfrac{v_0}{v}$ ；（2 分）

（2）$\because a=-kv^2=\dfrac{dv}{dt}$ ，（3 分）

$$\therefore\int_0^2 -kdt=\int_{v_0}^{v_0/2}\frac{dv}{v^2}$$ （2 分）

解得：$k=\dfrac{1}{2v_0}$ （2 分）

三、（15 分）



如图所示，图中 A 为定滑轮，B 为动滑轮，3 个物体质量分别为 $m_3=m$，$m_2=2m$，$m_1=4m$。设不计滑轮和绳的质量，且忽略滑轮轴处的摩擦力，绳子与滑轮无相对滑动，求：

（1） B 相对 A 的加速度；

（2） 各物体相对地面的加速度。

解：以竖直向下为参考方向，B 相对 A 的加速度为 a'，则：

m_1： $m_1g-T_1=m_1a_1$ ；

m_2： $m_2g-T_2=m_2a_2=m_2(a'-a_1)$ ；

m_3： $m_3g-T_2=m_3a_3=-m_3(a'+a_1)$ ；

又 $T_1=2T_2$ （2+2+2+1=7 分）

即：$$\begin{cases}4mg-T_1=4ma_1\\2mg-T_2=2m(a'-a_1)\\mg-T_2=-m(a'+a_1)\end{cases}$$ ，

解得：$a'=\dfrac{2g}{5}$ ——方向向下；

$a_1 = \frac{g}{5}$ ——方向向下；

$a_2 = \frac{g}{5}$ ——方向向下 ；

$a_3 = -\frac{3g}{5}$ ——方向向上 ； （2*4=8 分）

四、 （15 分）

一质量为 $m = 2kg$ 的质点在合力 $\vec{F} = 3\vec{i} - 2t\vec{j}$(N) 的作用下，在 xoy 平面内运动，$t = 0$ 时质点的初速为 $\vec{v}_0 = \vec{i} - \vec{j}$ (m/s) 。求：

（1）$t = 1\ (s)$ 时质点的动量 $\vec{P}$；

（2）$t = 1\ (s)$ 时质点相对坐标原点的角动量 $\vec{L}_0$；

（3）在 $t = 0$ 至 $t = 1\ (s)$ 时间内合外力对质点的冲量 $\vec{I}$；

解：质点加速度：$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{3}{2}\vec{i} - t\vec{j}$ ， （2 分）

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{3}{2}\vec{i} - t\vec{j} \quad \Rightarrow$$

$$\int_{\vec{v}_0}^{\vec{v}} d\vec{v} = \int_0^t (\frac{3}{2}\vec{i} - t\vec{j})dt \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = (1 + \frac{3}{2}t)\vec{i} - (1 + \frac{t^2}{2})\vec{j} \quad ; \quad \text{（2 分）}$$

$$\int_0^{\vec{r}} d\vec{r} = \int_0^t [(1 + \frac{3}{2}t)\vec{i} - (1 + \frac{t^2}{2})\vec{j})]dt \quad \Rightarrow \quad \vec{r} = (t + \frac{3}{4}t^2)\vec{i} - (t + \frac{t^3}{6})\vec{j} \quad ; \quad \text{（2 分）}$$

（1）当 $t = 1\ (s)$ 时，$\vec{v}_1 = \frac{5}{2}\vec{i} - \frac{3}{2}\vec{j}$ ，

$\Rightarrow$质点的动量：$\vec{P}_1 = m\vec{v}_1 = 5\vec{i} - 3\vec{j}, (kg \cdot m/s)$； （3 分）

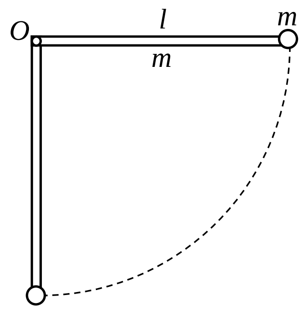
（2）当 $t = 1\ (s)$ 时，$\vec{r}_1 = \frac{7}{4}\vec{i} - \frac{7}{6}\vec{j}$ ，

$\Rightarrow$质点的角动量：$\vec{L}_1 = \vec{r}_1 \times \vec{P}_1 = (\frac{7}{4}\vec{i} - \frac{7}{6}\vec{j}) \times (5\vec{i} - 3\vec{j}) = \frac{7}{12}\vec{k}, (kg \cdot m^2/s)$； （3 分）

（3）当 $t = 0$ 时，质点的动量：$\vec{P}_0 = m\vec{v}_0 = 2\vec{i} - 2\vec{j}, (kg \cdot m/s)$；

合外力对质点的冲量：$\vec{I} = \vec{P}_1 - \vec{P}_0 = 3\vec{i} - \vec{j}, (kg \cdot m/s)$ （3 分）

五、　　（15 分）



如图，长为 l、质量 m 的均匀细杆一端固连着一质量为 m 的小球，另一端可绕过 O 点的水平轴在竖直面内无摩擦地转动，系统自水平位置以零初速开始释放。求：

（1）　细杆在水平位置时的角加速度 α；

（2）　当细杆摆动到竖直位置时的角速度 ω；

（3）　细杆由水平位置摆动到竖直位置的过程重力矩所做的功。

解：杆与小球相对转轴的转动惯量：$J = J_1 + J_2 = \frac{1}{3}ml^2 + ml^2 = \frac{4}{3}ml^2$

（1）　根据定轴转动定律有：

$$M_0 = J\alpha = mg\cdot\frac{l}{2} + mgl = \frac{4}{3}ml^2\cdot\alpha \quad ,$$

解得：$\alpha = \frac{9g}{8l}, rad/s^2$　；　　　　　　　（3+2=5 分）

（2）　细杆下摆过程机械能守恒：

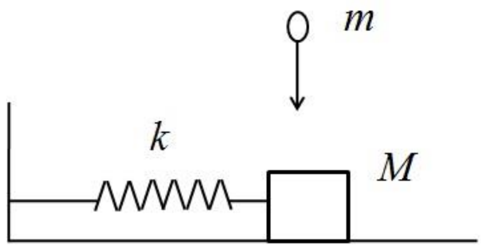
$$mg\cdot\frac{l}{2} + mgl = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}ml^2\omega^2 - 0 \quad ,$$

解得：$\omega = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{g}{l}}, rad/s$　　　　　　　　（3+2=5 分）

（3）　重力矩所做的功：

$$W_G = -\Delta E_p = E_1 - E_2 = (mg\cdot\frac{l}{2} + mgl) - 0 = \frac{3}{2}mgl, (J)$$　　　　　（3+2=5 分）

六、　　（12 分）



如右图所示，光滑的水平桌面上，一根弹性系数为 k 的轻弹簧，一端连着质量为 M 的滑块，滑块做振幅为 A 的简谐振动。有一块质量为 m 的粘土自由下落，正好落在滑块 M 上，与 M 一起运动。求：

（1）系统的振动周期；

（2）如果粘土落在滑块上时，滑块正好通过平衡位置，求系统的振动振幅 A'。

解：（1）粘土落到滑块 M 上，系统的振动周期：

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{M+m}{k}}$$ （4 分）

（2）当粘土还没落到滑块上时，滑块在平衡位置的速度大小为：

$$v = A\omega = A\sqrt{\frac{k}{M}}$$ （2 分）

粘土落下与滑块作完全非弹性碰撞，由动量守恒有：

$$Mv = (M+m)v'\,,$$

可得滑块 M 的速度大小： $v' = \dfrac{Mv}{M+m} = \dfrac{\sqrt{kM}}{M+m}A$ （2 分）

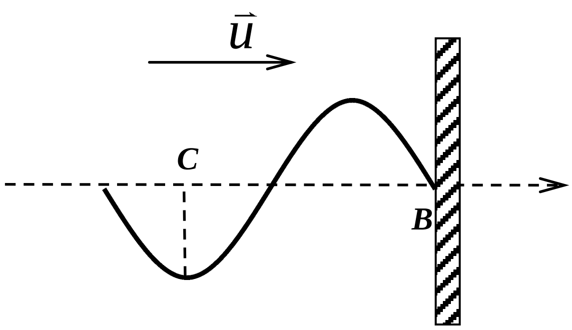
粘土和滑块一起振动时，由机械能守恒有：

$$\frac{1}{2}(M+m)v'^2 = \frac{1}{2}kA'^2$$

可得： $A' = \sqrt{\dfrac{M}{M+m}}A$ （4 分）

七、 （14 分）

一平面简谐波沿 x 轴正方向传播， $t=0$ 时刻的波形图如图所示，设波的振幅为 A，频率为 ν，波速为 u，



（1）以 C 为坐标原点，写出该列波的波函数；

（2）若波在 B 处被波密介质反射，且 B 点为波节，以 B 为坐标原点，分别写出入射波和反射波波函数；

（3）以 B 为原点，求合成波波节与波腹的位置。

解：（1）C 处的振动初条件： $\begin{cases}\cos\varphi_0 = -1\\ -\omega A\sin\varphi_0 = 0\end{cases}$

可得出 C 点振动初相： $\varphi_{C0} = \pi$

所以波动方程为：

$$y(x,t) = A\cos[2\pi\nu(t-\frac{x}{u})+\pi]$$ （4 分）

（2）由波动方程可得入射波在 B 点的振动方程：

$$y_{入B}(t)=A\cos[2\pi\nu(t-\frac{\frac{3\lambda}{4}}{u})+\pi]=A\cos(2\pi\nu t-\frac{\pi}{2})$$

而反射波在 B 点的振动方程：

$$y_{反B}(t)=A\cos(2\pi\nu t-\frac{\pi}{2}+\pi)=A\cos(2\pi\nu t+\frac{\pi}{2})$$

以 B 为坐标原点，沿 x 轴正向的入射波波函数：

$$y_{入}(x,t)=A\cos[2\pi\nu(t-\frac{x}{u})-\frac{\pi}{2}]$$ （3 分）

以 B 为坐标原点，沿 x 轴负向的反射波波函数：

$$y_{反}(x,t)=A\cos[2\pi\nu(t+\frac{x}{u})+\frac{\pi}{2}]$$ （3 分）

（3）合成波的波函数：

$$y(x,t)=y_{入}+y_{反}=2A\cos(2\pi\nu\frac{x}{u}+\frac{\pi}{2})\cos 2\pi\nu t$$

$$=-2A\sin(2\pi\nu\frac{x}{u})\cos(2\pi\nu t)$$

波腹：$\left|\sin 2\pi\nu\frac{x}{u}\right|=1 \;\Rightarrow\; 2\pi\nu\frac{x}{u}=(2k+1)\frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow\; x=\frac{2k+1}{4}\cdot\frac{u}{\nu}=\frac{2k+1}{4}\lambda \quad ,k=0,-1,-2,-3\cdots$$ （2 分）

波节：$\left|\sin 2\pi\nu\frac{x}{u}\right|=0 \;\Rightarrow\; 2\pi\nu\frac{x}{u}=k\pi$

$$\Rightarrow\; x=\frac{k}{2}\cdot\frac{u}{\nu}=\frac{k}{2}\lambda,\quad k=0,-1,-2,-3\cdots$$ （2 分）