厦门大学《概率统计》课程试卷答案

________学院________系________年级________专业

主考教师：________试卷类型：（B卷）

以下解题过程可能需要用到以下数据：

$\Phi(1.65)=0.9500$， $\Phi(1.67)=0.9525$， $\Phi(1.96)=0.9750$， $\Phi(2.326)=0.99$， $\Phi(3)=0.9987$

$\chi^2_{0.025}(3)=9.348$， $\chi^2_{0.025}(4)=11.143$， $\chi^2_{0.05}(3)=7.815$， $\chi^2_{0.05}(4)=9.488$

$t_{0.025}(3)=3.182$， $t_{0.05}(3)=2.353$， $t_{0.025}(4)=2.776$， $t_{0.05}(4)=2.132$， $t_{0.025}(5)=2.571$，

$t_{0.05}(5)=2.015$， $t_{0.025}(9)=2.2622$， $t_{0.05}(9)=1.8331$， $t_{0.025}(10)=2.2281$， $t_{0.05}(10)=1.8125$，

$t_{0.025}(11)=2.2010$， $t_{0.05}(11)=1.7959$， $t_{0.025}(12)=2.1788$， $t_{0.05}(12)=1.7823$，

$F_{0.05}(5,5)=5.05$， $F_{0.025}(5,5)=7.15$， $F_{0.05}(6,6)=4.28$， $F_{0.025}(6,6)=5.82$

分数	阅卷人

1、（13 分）设随机向量（X,Y）的概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}2-x-y, & 0<x<1,0<y<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

求 X 与 Y 的相关系数。

解：$EX=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xf(x,y)dxdy=\int_0^1\int_0^1 x(2-x-y)dxdy=\frac{5}{12}$ （2分）

$E(X^2)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x^2f(x,y)dxdy=\int_0^1\int_0^1 x^2(2-x-y)dxdy=\frac{1}{4}$

$DX=E(X^2)-(EX)^2=\frac{11}{144}$ （2分）

由对称性可得：$EY=\frac{5}{12}$，$DY=\frac{11}{144}$ （2分）

（2分）

$E(XY)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xyf(x,y)dxdy=\int_0^1\int_0^1 xy(x+y)dxdy=\frac{11}{144}$

（2分）

$\mathrm{cov}(X,Y)=E(XY)-EX\cdot EY=-\frac{1}{144}$ （1分）

$\rho=\frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sqrt{DX\cdot DY}}=-\frac{1}{11}$ （2分）

分数	阅卷人

2、 (8 分) 已知生男孩的概率为 0.515，试求在 10000 个新生婴儿中男孩不多于女孩的概率 P.

解：设男婴的数量为 X，则 $X \sim b(10000, 0.515)$ (2分)

$EX = 10000 \times 0.515 = 5150$，$DX = 10000 \times 0.515 \times 0.485 \approx 50^2$

由中心极限定理：

$$\frac{X - 5150}{50} \sim N(0,1)$$ (3分)

故男孩不超过女孩的概率为

$$P(X \le 10000 - X) = P(X \le 5000)$$ (1分)

$$= P\left(\frac{X-5150}{50} \le -3\right)$$

$$\approx \Phi(-3)$$ (1分)

$$= 1 - \Phi(3) = 0.0013$$

(1分)

分数	阅卷人

3、（8 分） 设总体 $X \sim N(0,2^2)$，而 $(X_1,X_2,\cdots,X_5)$ 是来自总体 X 的简单随机样本。令

$$Y = aX_1^2 + b(2X_2+3X_3)^2 + c(4X_4-5X_5)^2.$$

问常数 a,b,c 取何值时随机变量 Y 服从 χ^2 分布？自由度如何？

解：$X_1 \sim N(0,2^2)$，$2X_2+3X_3 \sim N(0,52)$，$4X_4-5X_5 \sim N(0,164)$

故 $\frac{X_1}{2} \sim N(0,1)$，（1分） $\frac{1}{\sqrt{52}}(2X_2+3X_3) \sim N(0,1)$，（1分）

$\frac{1}{\sqrt{164}}(4X_4-5X_5) \sim N(0,1)$，（1分）

而且上述随机变量相互独立，（1分）于是

$$\frac{1}{4}X_1^2 + \frac{1}{52}(2X_2+3X_3)^2 + \frac{1}{164}(4X_4-5X_5)^2 \sim \chi^2(3)$$

故 $a=\frac{1}{4}$（1分），$b=\frac{1}{52}$（1分），$c=\frac{1}{164}$（1分）

自由度为 3（1分）

分数	阅卷人

4、 (11 分) 已知总体 X 的概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{\theta^2}e^{-\frac{x}{\theta}}, & x>0\\ 0, & 其它\end{cases},$$

其中 $\theta(\theta>0)$ 为未知参数。设 $X_1,X_2,\dots,X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本。求 θ 的矩估计量和最大似然估计量。

解: $EX=\int_0^{\infty} x\cdot\frac{x}{\theta^2}e^{-\frac{x}{\theta}}dx=2\theta$ (2分)

$\theta=\frac{1}{2}EX$，故矩估计量为 $\hat{\theta}=\frac{1}{2}\overline{X}$. (2分)

设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 分别为样本观测值，则

$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{\theta^2}e^{-\frac{x_i}{\theta}}\right)=\frac{1}{\theta^{2n}}\cdot\left(\prod_{i=1}^{n}x_i\right)\cdot e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{\theta}}$ (2分)

$\ln L(\theta)=-2n\ln\theta+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i-\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{\theta}$ (1分)

由 $(\ln L(\theta))'=-\frac{2n}{\theta}+\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{\theta^2}=0$ 得 (2分)

最大似然估计值为

$\hat{\theta}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{2n}=\frac{\bar{x}}{2}$

故最大似然估计量为

$\hat{\theta}=\frac{\overline{X}}{2}$. (2分)

分数	阅卷人

5、（12 分）某车间生产的螺杆直径服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，今随机抽取 5 只测得直径（单位：mm）为：22.5, 21.5, 22.0, 21.8, 21.4。

（1） 已知 $\sigma=0.3$，求 μ 的水平为 0.95 的置信区间；

/62

（2）σ 未知，求 μ 的水平为 0.95 的置信区间

/64

解：由样本数据得 $\bar{x}=21.84$（1分），$S^2=0.193=0.44^2$（1分），$n=5$

(1) $\alpha=0.05$，$Z_{\alpha/2}=1.96$（1分）

μ 的置信区间为：（2分）

$$\left(\bar{x}\pm Z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=(21.84\pm0.26)=(21.58,\ 22.1)$$（2分）

(2) $\alpha=0.05$，$t_{\alpha/2}(n-1)=t_{0.025}(4)=2.776$（1分）

μ 的置信区间为：

$$\left(\bar{x}\pm t_{\alpha/2}(n-1)\cdot\frac{S}{\sqrt{n}}\right)=(21.84\pm0.54)$$（2分）

$$=(21.3\ ,22.38)$$（2分）

分数	阅卷人

6、(16 分) 由一台机床加工的零件中随机抽取 6 件，测得直径(cm)样本均值 $\bar{x}=20.08$，样本均值 $s_1^2=0.26$，对机床改造后再抽查 6 件测得直径(cm)样本均值 $\bar{y}=20.13$，样本方差 $s_2^2=0.49$。设改造前后零件直径都服从正态分布，问

(1) 可否认为机床改造后加工精度不变？（显著性水平 $\alpha=0.05$）；

(2) 在（1）所做结论的基础上，检验机床改造前后加工零件直径是否相同？（显著性水平 $\alpha=0.05$）。

解：设改造前后零件总体分布分别为 $N(\mu_i,\sigma_i^2)$，$i=1,2$.

(1) 检验 $H_0: \sigma_1^2=\sigma_2^2$，$H_1: \sigma_1^2\neq\sigma_2^2$ (1分)

检验统计量 $F=\dfrac{S_1^2}{S_2^2}$ (1分)，拒绝域为

$$F<F_{0.975}(5,5)=\frac{1}{F_{0.025}(5,5)}=\frac{1}{7.15}\approx 0.14$$

或 $F>F_{0.025}(5,5)=7.15$ (4分)

计算 $F=0.53$ (1分) 不落入拒绝域，故接受 H_0，即认为改造前后精度相同。(1分)

(2) 由(1)知 $\sigma_1^2=\sigma_2^2$，$n_1=n_2=6$

检验 $H_0: \mu_1=\mu_2$，$H_1: \mu_1\neq\mu_2$ (1分)

检验统计量 $t=\dfrac{\bar{x}-\bar{y}}{S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}$，其中

$$S_w=\sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}$$ (2分)

拒绝域为 $|t|>t_{0.025}(10)=2.2281$ (2分)

计算：$t=0.041$ (2分) 未落入拒绝域

故接受 H_0，即认为改造前后直径相同。(1分)

分数	阅卷人

7、(16 分) 随机地抽取了十一个城市居民家庭关于收入 x 与食品支出 y 的数据，计算得

$$\sum_{i=1}^{11} x_i = 2105,\quad \sum_{i=1}^{11} x_i^2 = 495273,\ \sum_{i=1}^{11} y_i = 1545,\ \sum_{i=1}^{11} y_i^2 = 246159,\ \sum_{i=1}^{11} x_i y_i = 346569.$$

（1）试求食品支出与收入之间的线性回归方程;

（2）检验回归效果是否显著（显著性水平 $\alpha = 0.05$ ）。

解: $\bar{x} = 191.36$（1分），$\bar{y} = 140.45$（1分）.

$S_{xx} = 92467.85$（1分），$S_{xy} = 50927.37$（1分），$S_{yy} = 29170.77$（1分）

(1) $\hat{b} = \frac{S_{xy}}{S_{xx}} = 0.55$（1分），$\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x} = 35.2$（1分）

$\hat{y} = 35.2 + 0.55x$（1分）

(2) $Q_e = S_{yy} - \hat{b} S_{xy} = 1160.72$（1分）

$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{Q_e}{n-2}} = \sqrt{\frac{Q_e}{9}} = 11.36$（1分）

检验统计量 $t = \frac{\hat{b}}{\hat{\sigma}} \cdot \sqrt{S_{xx}}$（1分）

拒绝域: $|t| > t_{\frac{\alpha}{2}}(n-2) = t_{0.025}(9) = 2.2622$（2分）

计算 $t = 14.72$（2分）落入拒绝域，故

认为回归效果显著。（1分）