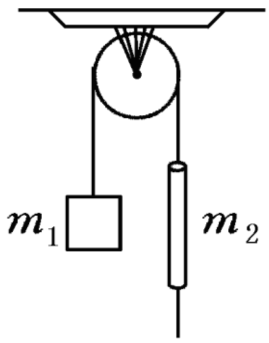
厦门大学《大学物理 C》课程期中试卷

2012-2013 第二学期

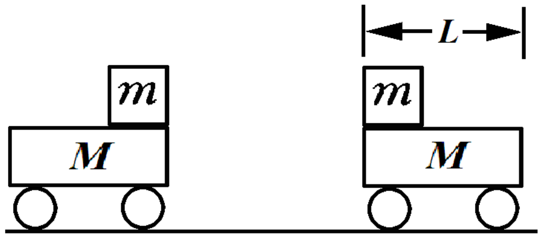
2013.4

1.（10 分）一质点沿 x 轴正向运动，其加速度与位置的关系为 $a=3+2x$，若在 $x=0$ 处，其速度 $v_0=5\mathrm{m\cdot s^{-1}}$，求质点运动到 $x=4\mathrm{m}$ 处时所具有的速度 v。

2.（15 分）一细绳跨过一定滑轮，绳的一边悬有一质量为 m_1 的物体，另一边穿在质量为 m_2 的圆柱体的竖直细孔中，圆柱可沿绳子滑动。今看到绳子从圆柱细孔中加速上升，柱体相对于绳子以匀加速度 a' 下滑，求 m_1，m_2 相对于地面的加速度、绳的张力及柱体与绳子间的摩擦力(绳轻且不可伸长，滑轮的质量及轮与轴间的摩擦不计)。



3.（10 分）如图示，一质量为 M 的平板小车，在光滑的水平轨道上以速度 v 作直线运动。今在车顶前缘放上一质量为 m 的物体，物体相对于地面的初速度为 0。设物体与车顶之间的摩擦系数为 μ，为使物体不致从车顶跌下去，问车顶的长度 L 最短应为多少？



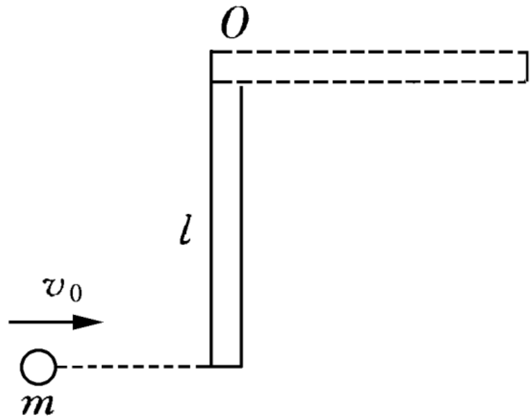
4.（10 分）物体质量为 $3\mathrm{kg}$，$t=0$ 时位于 $\vec{r}=4\vec{i}\,\mathrm{m}$，$\vec{v}=\vec{i}+6\vec{j}\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$，如一恒力 $\vec{f}=\vec{i}+5\vec{j}\,\mathrm{N}$ 作用在物体上，求 $3\mathrm{s}$ 后，（1）物体动量的变化；（2）物体相对 z 轴角动量的变化。

5.（15 分）如图所示，质量为 M，长为 l 的均匀直棒，可绕垂直于棒一端的水平轴 O 无摩擦地转动，它原来静止在平衡位置上。现有一质量为 m 的弹性小球飞来，正好在棒的下端与棒

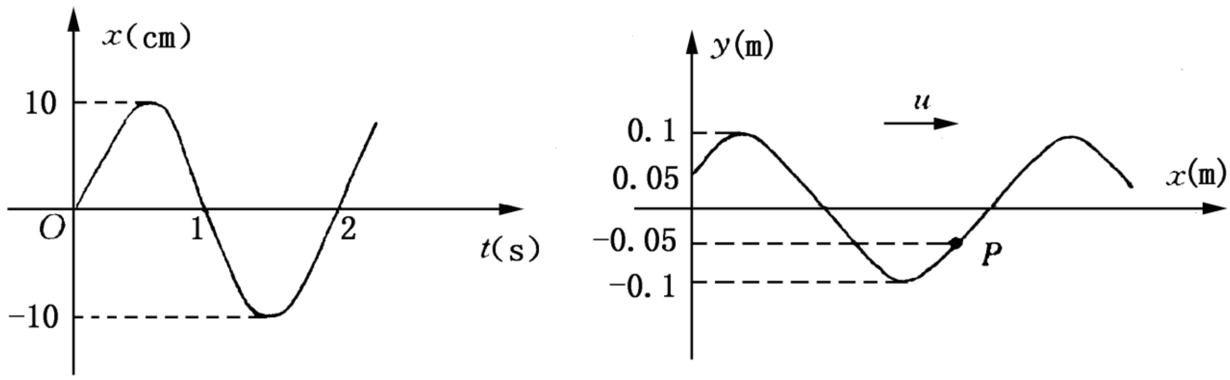
垂直地相撞。相撞后，棒刚好可以从平衡位置处摆动到水平位置。

（1）设这碰撞为弹性碰撞，试计算小球初速 v_0 的值；

（2）相撞时小球受到多大的冲量? ■



6.（20 分）如图:（a）为一谐振动的 $x-t$ 曲线，试写出其振动方程；（b）为一列沿 x 轴正向传播的机械波在 $t=0$ 时的波形图，已知波速为 $u=10\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$，波长为 $2\mathrm{m}$，试写出其波动方程及 P 点的振动方程。



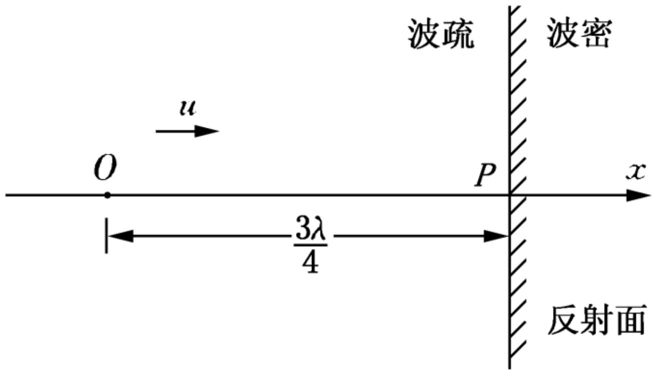
（a）　　　　　　　　　　（b）

7.（20 分）如图所示，一平面简谐波沿 x 轴正向传播。已知振幅为 A，频率为 ν，波速为 u。

（1）若 $t=0$ 时，原点 O 处的质元正好在 $x=A$ 处，写出此波的波动方程；

（2）若从分界面反射的波的振幅与入射波振幅相等，试写出反射波的波动方程；

（3）求驻波方程，并给出 x 轴上因入射波与反射波干涉而静止的各点的位置。



1.（10 分）

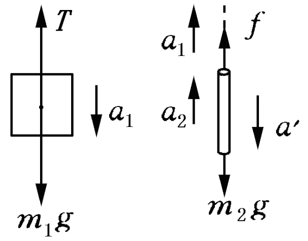
解：$\frac{dv}{dt}=a=3+2x \quad \frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt}=v\frac{dv}{dx}$

故有：$v\frac{dv}{dx}=3+2x \quad vdv=(3+2x)dx$

作定积分，有：$\int_5^V vdv=\int_0^4(3+2x)dx$

$\frac{1}{2}v^2|_5^V=(3x+x^2)|_0^4$ 　因而有$V=9m/s$，方向沿x轴正向。

2. （15 分）课本习题 2.1



解：因绳不可伸长，故滑轮两边绳子的加速度均为a_1，其对于m_2则为牵连加速度，又知m_2对绳子的相对加速度为a'，故m_2对地加速度，有

$$a_2=a_1-a' \qquad ① \quad （3 分）$$

又因绳的质量不计，所以圆柱体受到的摩擦力f在数值上等于绳的张力T，由牛顿定律，有

$$m_1g-T=m_1a_1 \qquad ② \quad （4 分）$$

$$T-m_2g=m_2a_2 \qquad ③ \quad （4 分）$$

联立①、②、③式，得

$$a_1=\frac{(m_1-m_2)g+m_2a'}{m_1+m_2}$$

$$a_2=\frac{(m_1-m_2)g-m_1a'}{m_1+m_2} \qquad （4 分）$$

$$f=T=\frac{m_1m_2(2g-a')}{m_1+m_2}$$

3. （10 分）课本例题 2.14

解：物体不从车顶跌下去，至少其相对小车静止，即具有相同的速度。

在这一过程中，以物体和小车为一系统，水平方向满足动量守恒条件，所以 $Mv=(m+M)V$ （4 分）

又由题意，m 相对 M 的位移为 L，由动能定理可知，此过程中系统动能的变化等于摩擦力所做的功：

$$\frac{1}{2}(m+M)V^2-\frac{1}{2}Mv^2=-\mu mgL \qquad （4 分）$$

联立以上两式可得车顶的最小长度：$L=\frac{Mv^2}{2\mu g(M+m)}$ （2 分）

4. （10 分）课本习题 2.23 $\vec{f}=5\vec{j}\mathrm{N}\ ->\ \vec{f}=\vec{i}+5\vec{j}\mathrm{N}$

解：(1) $\Delta\vec{p}=\int\vec{f}\mathrm{d}t=\int_0^3(\vec{i}+5\vec{j})\mathrm{d}t=3\vec{i}+15\vec{j}\ \mathrm{kg\cdot m\cdot s^{-1}}$ （4 分）

(2) $a_x=\dfrac{dv_x}{dt}=\dfrac{f_x}{m}=\dfrac{1}{3}\quad\therefore dv_x=\dfrac{1}{3}dt\quad\therefore v_x=v_{x0}+\dfrac{1}{3}t=1+\dfrac{1}{3}t$

$$a_y=\frac{dv_y}{dt}=\frac{f_y}{m}=\frac{5}{3}\quad\therefore dv_y=\frac{5}{3}dt\quad\therefore v_y=v_{y0}+\frac{5}{3}t=6+\frac{5}{3}t$$

$$\therefore\ \vec{v}=(1+\frac{1}{3}t)\vec{i}+(6+\frac{5}{3}t)\vec{j}\mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

$$v_x=\frac{dx}{dt}=1+\frac{1}{3}t\quad\therefore dx=(1+\frac{1}{3}t)dt\quad\therefore x=x_0+t+\frac{1}{6}t^2=4+t+\frac{1}{6}t^2$$

$$v_y=\frac{dy}{dt}=6+\frac{5}{3}t\quad\therefore dy=(6+\frac{5}{3}t)dt\quad\therefore y=y_0+6t+\frac{5}{6}t^2=6t+\frac{5}{6}t^2$$

$\therefore\ \vec{r}=(4+t+\dfrac{1}{6}t^2)\vec{i}+(6t+\dfrac{5}{6}t^2)\vec{j}\mathrm{m}$ （2 分）

解(一) $\vec{L}_1=\vec{r}_1\times m\vec{v}_1=4\vec{i}\times3(\vec{i}+6\vec{j})=72\vec{k}$

$$\vec{L}_2=\vec{r}_2\times m\vec{v}_2=(8.5\vec{i}+25.5\vec{j})\times3(2\vec{i}+11\vec{j})=127.5\vec{k}$$

$\therefore\Delta\vec{L}=\vec{L}_2-\vec{L}_1=55.5\vec{k}\ \mathrm{kg\cdot m^2\cdot s^{-1}}$ （4 分）

解(二) 相对 z 轴角动量的变化等于 z 方向上的冲量矩的大小：

$$\Delta\vec{L}=\int_0^t\vec{M}\cdot\mathrm{d}t=\int_0^t(\vec{r}\times\vec{F})\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^3\left[(4+t+\frac{1}{6}t^2)\vec{i}+(6t+\frac{5}{6}t^2)\vec{j}\right]\times(\vec{i}+5\vec{j})\mathrm{d}t$$

$$=55.5\vec{k}\ \mathrm{kg\cdot m^2\cdot s^{-1}}$$

5. （15 分）课本习题 2.29 $\theta=30°$ ->水平位置

解： (1)设小球的初速度为v_0，棒经小球碰撞后得到的初角速度为ω，而小球的速度变为v，按题意，小球和棒作弹性碰撞，所以碰撞时遵从角动量守恒定律和机械能守恒定律，可列式：

$mv_0l=I\omega+mvl$ ① （3 分）

$$\frac{1}{2}mv_0^2=\frac{1}{2}I\omega^2+\frac{1}{2}mv^2 \qquad ②$$ （3 分）

上两式中 $I=\frac{1}{3}Ml^2$，碰撞过程极为短暂，可认为棒没有显著的角位移；碰撞后，棒从竖直位置上刚好摆到水平位置，按机械能守恒定律可列式：

$$\frac{1}{2}I\omega^2=Mg\frac{l}{2}(1-\cos 90°) \qquad ③$$ （3 分）

由③式得

$$\omega=\left(\frac{Mgl}{I}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{3g}{l}\right)^{\frac{1}{2}}$$

由①式

$$v=v_0-\frac{I\omega}{ml} \qquad ④$$

由②式

$$v^2=v_0^2-\frac{I\omega^2}{m} \qquad ⑤$$

所以

$$(v_0-\frac{I\omega}{ml})^2=v_0^2-\frac{1}{m}\omega^2$$

求得

$$v_0=\frac{l\omega}{2}(1+\frac{I}{ml^2})=\frac{l}{2}(1+\frac{1}{3}\frac{M}{m})\omega$$
$$=(1+\frac{1}{3}\frac{M}{m})\frac{\sqrt{3gl}}{2}$$ （2 分）

(2)相碰时小球受到的冲量为

$$\int F\mathrm{d}t=\Delta mv=mv-mv_0$$ （2 分）

由①式求得 $$\int F\mathrm{d}t=mv-mv_0=-\frac{I\omega}{l}=-\frac{1}{3}Ml\omega=-\frac{M\sqrt{3gl}}{3}$$ （2 分）

负号说明所受冲量的方向与初速度方向相反.

6. （20分）课本习题4.8(a) + 5.13

解：（1）由图(a)，$\because t=0$ 时，$x_0=0, v_0>0, \therefore \phi_0=\frac{3}{2}\pi$, 又, $A=10\text{cm}, T=2\text{s}$

即 $$\omega=\frac{2\pi}{T}=\pi \quad \text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$$

故 $$x_a=0.1\cos(\pi t+\frac{3}{2}\pi)\text{m}$$ （10分）

（2）由图(b)知 $A=0.1$ m，$t=0$ 时，$y_0=\frac{A}{2}, v_0<0$，$\therefore \phi_0=\frac{\pi}{3}$，由题知 $\lambda=2$ m，

$u = 10\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$，则 $\upsilon = \dfrac{u}{\lambda} = \dfrac{10}{2} = 5\ \mathrm{Hz}$

∴ $\omega = 2\pi\upsilon = 10\pi$

∴ 波动方程为 $y = 0.1\cos[10\pi(t - \dfrac{x}{10}) + \dfrac{\pi}{3}]\ \mathrm{m}$ （5 分）

又在 $t = 0$ 时，$y_P = -\dfrac{A}{2}, v_P < 0$，∴ $\phi_P = \dfrac{-4\pi}{3}$ （P 点的位相应落后于坐标原点，故取负值）

∴ P 点振动方程为 $y_p = 0.1\cos(10\pi t - \dfrac{4}{3}\pi)\mathrm{m}$ （5 分）

7. （20分）课本习题5.20 由平衡位置向位移正方向运动 －>在 $x = A$ 处

解：(1) ∵ $t = 0$ 时，$y_0 = A, v_0 = 0$，∴ $\phi_0 = 0$ 故波动方程为

$$y = A\cos[2\pi v(t - \frac{x}{u})]$$ （4 分）

(2) 仍以 O 点为原点，再考虑到波由波疏入射而在波密界面上反射，存在半波损失，故反射波的波动方程为

$$y_{反} = A\cos[2\pi\upsilon(t - \frac{2*\frac{3}{4}\lambda}{u} + \frac{x}{u}) + \pi]$$

$$= A\cos[2\pi v(t + \frac{x}{u}) - 2\pi\frac{\frac{3}{2}\lambda}{\lambda} + \pi]$$

$$= A\cos[2\pi v(t + \frac{x}{u})]$$

（6 分）

(3) 驻波方程为

$$y = A\cos[2\pi\upsilon(t - \frac{x}{u})] + A\cos[2\pi\upsilon(t + \frac{x}{u})]$$

$$= 2A\cos\frac{2\pi\upsilon x}{u}\cos(2\pi\upsilon t)$$ （4 分）

故波节位置为

$$\frac{2\pi\upsilon x}{u} = \frac{2\pi}{\lambda}x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$$

故 $x = (2k+1)\dfrac{\lambda}{4}$ （$k = 0, \pm1, \pm2, \cdots$） （4 分）

根据题意，k 只能取 0,1，即 $x = \dfrac{1}{4}\lambda, \dfrac{3}{4}\lambda$ （2 分）