厦门大学《概率论与数理统计》课程

期中试题·答案

考试日期：2013　　信息学院自律督导部整理

一、 (7 分)设随机变量 $X\sim U[2,5]$，现对 X 进行三次独立观察,试求至少有两次观测值大于 3 的概率。

解: 设事件 A 为"X 的观测值大于 3"，则

$$P(A)=P\{X>3\}=\frac{2}{3}.$$

令 Y 是三次独立观测中观测值大于 3 的次数，则 $Y\sim B\left(3,\frac{2}{3}\right)$,

故所求概率为

$$P\{Y\geq 2\}=P\{Y=2\}+P\{Y=3\}=C_3^2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{20}{27}.$$

二、 （7 分）设事件 A,B 满足 $P(A)=\frac{1}{4}$， $P(A|B)=P(B|A)=\frac{1}{2}$。令

$$X=\begin{cases}1, & \text{若}A\text{发生}，\\ 0, & \text{否则}；\end{cases}\qquad Y=\begin{cases}1, & \text{若}B\text{发生}，\\ 0, & \text{否则}；\end{cases}$$

试求 (X,Y) 的联合分布律。

解：由已知条件可得 $P(AB)=\frac{1}{8}, P(B)=\frac{1}{4}.$

于是

$$P(X=0,Y=0)=P(\overline{A}\overline{B})=1-P(A\cup B)$$

$$=1-P(A)-P(B)+P(AB)$$

$$=1-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{5}{8},$$

$$P(X=0,Y=1)=P(\overline{A}B)=P(B)-P(AB)=\frac{1}{8},$$

$$P(X=1,Y=0)=P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)=\frac{1}{8},$$

$P(X=1,Y=1)=P(AB)=\frac{1}{8}$,

故(*X*, *Y*)的联合分布律为

$X \backslash Y$	0	1
0	$\frac{5}{8}$	$\frac{1}{8}$
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

三、 （7 分）已知事件 A,B 相互独立且互不相容，求 $\min(P(A),P(B))$（注：$\min(x,y)$ 表示 x,y 中小的一个数）。

解：一方面 $P(A),P(B)\geq 0$，另一方面 $P(A)P(B)=P(AB)=0$，即 $P(A),P(B)$ 中至少有一个等于 0，所以 $\min(P(A),P(B))=0$.

四、 （12 分）甲、乙、丙三车间加工同一产品，加工量分别占总量的 25%、35%、40%，次品率分别为 0.03、0.02、0.01。现从所有的产品中抽取一个产品，试求：(1)该产品是次品的概率；(2)若检查结果显示该产品是次品，则该产品是乙车间生产的概率是多少？

解：设 A_1，A_2，A_3 表示甲乙丙三车间加工的产品，B 表示此产品是次品.

(1) 所求事件的概率为

$$P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+P(A_3)P(B|A_3)$$
$$=0.25\times0.03+0.35\times0.02+0.4\times0.01=0.0185$$

(2) $P(A_2|B)=\dfrac{P(A_2)P(B|A_2)}{P(B)}=\dfrac{0.35\times0.02}{0.0185}\approx0.38$

所以可知这件产品是次品的概率为 0.0185，若此件产品是次品，则该产品是乙车间生产的概率为 0.38.

五、 （15 分）设 (*X*, *Y*) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}x^2+axy\ , 0\le x\le 1,\ \ 0\le y\le 2,\\ 0,\ 其它,\end{cases}$$ ，试求（1）a ；（2）$P\{X+Y\ge 1\}$ ；（3）X 与 Y 是否相互独立？

解: (1) 由归一性得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^2(x^2+axy)\mathrm{d}y=\int_0^1(2x^2+2ax)\mathrm{d}x=\frac{2}{3}+a\overset{令}{=}1,\ 得\ a=\frac{1}{3}\ 。$$

(2) $$P\{X+Y\ge 1\}=\iint\limits_{x+y\ \ge\ 1}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_{1-x}^2(x^2+\frac{xy}{3})\mathrm{d}y\ =\frac{65}{72}$$

(3) $$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y\ =\begin{cases}\int_0^2(x^2+\frac{xy}{3})\mathrm{d}y=2x^2+\frac{2x}{3},\ 0\le x\le 1,\\ 0,\ 其它.\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x\ =\begin{cases}\int_0^1(x^2+\frac{xy}{3})\mathrm{d}x=\frac{1}{3}+\frac{y}{6},\ 0\le y\le 2,\\ 0,\ 其它.\end{cases}$$

在 $f(x,y)$ 的非零区域内 $f(x,y)\ne f_X(x)f_Y(y)$，故 X 与 Y 不独立。

六、 （7 分）已知随机变量 $X\sim N(0，1)$，求 $Y=|X|$的密度函数。

解: 当 $y\le 0$ 时，$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(|X|\le y)=0$；
当 $y>0$ 时，$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(|X|\le y)=P(-y\le X\le y)$

$$=\int_{-y}^{y}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}dx=2\int_0^y\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}dx$$

因此，$f_Y(y)=\dfrac{d}{dy}F_Y(y)=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}e^{-y^2/2} & y>0,\\ 0, & y\le 0.\end{cases}$

七、 （15 分）某种商品一周的需求量 X 是一个随机变量，其概率密度为

$f(x)=\begin{cases} xe^{-x}, & x>0, \\ 0, & 其它。\end{cases}$ 假设各周的需求量相互独立，以 U_k 表示 k 周的总需求量。

（1）求 U_2、U_3 的概率密度；

（2）求接连三周中的最大需求量的概率密度

解 利用卷积公式. 设 Xi 表示第 i 周的需求量, i=1,2,3, Z 表示三周中的周最大需求量.于是

$U_2=X_1+X_2$，$U_3=X_1+X_2+X_3=U_2+X_3$,

$Z=\max\{X_1,X_2,X_3\}$, 且 X_1,X_2,X_3 与 X 同分布.

(1)由卷积公式, U_2 的密度为

$$f_{U_2}(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_{X_1}(t)f_{X_2}(x-t)dt=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)f(x-t)dt$$

$$=\begin{cases}\int_0^x te^{-t}(x-t)e^{-(x-t)}dt, & x>0, \\ 0, & x\le 0,\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{6}x^3e^{-x}, & x>0, \\ 0, & x\le 0.\end{cases}$$

$$f_{U_3}(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_{U_2}(t)f_{X_3}(x-t)dt$$

$$=\begin{cases}\int_0^x \frac{1}{6}x^3e^{-x}(x-t)e^{-(x-t)}dt, & x>0, \\ 0, & x\le 0,\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{120}x^5e^{-x}, & x>0, \\ 0, & x\le 0.\end{cases}$$

(2)因为 Z 的分布函数为

$$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(\max\{X_1,X_2,X_3\}\le z)$$

$$=P(X_1\le z,X_2\le z,X_3\le z)=P(X_1\le z)P(X_2\le z)P(X_3\le z)$$

$$=\left[\int_{-\infty}^{z} f(x)dx\right]^3=\begin{cases}\left[\int_{-\infty}^{z} xe^{-x}dx\right]^3, & z>0,\\ 0, & z\le 0,\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\left[1-(1+z)e^{-z}\right]^3, & z>0,\\ 0, & z\le 0,\end{cases}$$ 故 Z 的密度函数为

$$f_Z(z)=F_Z'(z)=\begin{cases}3ze^{-z}(1-e^{-z}-ze^{-z})^2, & z>0,\\ 0, & z\le 0,\end{cases}$$

八、 （15 分） 某流水生产线上每个产品不合格的概率为 p（$0<p<1$），各产品合格与否相互独立，当出现一个不合格产品时，即停机检修。设开机后第一次停机时已生产了的产品个数为 X，求 $E(X)$和 $D(X)$。

解: 记 $q=1-p$, X 的概率分布为 $P\{X=k\}=q^{k-1}p$, $k=1,2,\ldots$,

故 $E(X)=\sum_{k=1}^{\infty}kq^{k-1}p=p(\sum_{k=1}^{\infty}q^k)'=p\left(\frac{q}{1-q}\right)'=\frac{p}{(1-q)^2}=\frac{1}{p}.$

又 $E(X^2)=\sum_{k=1}^{\infty}k^2q^{k-1}p=p\sum_{k=1}^{\infty}(kq^k)'=p\sum_{k=1}^{\infty}\left[(k+1)q^k-q^k\right]'$

$$=p\left[\sum_{k=1}^{\infty}\left(q^{k+1}\right)''-\sum_{k=1}^{\infty}\left(q^k\right)'\right]=p\left[\sum_{i=2}^{\infty}\left(q^i\right)''-\sum_{k=0}^{\infty}\left(q^k\right)'\right]$$

$$=p\left[\sum_{i=0}^{\infty}\left(q^i\right)''-\sum_{k=0}^{\infty}\left(q^k\right)'\right]=p\left[\left(\frac{1}{1-q}\right)''-\left(\frac{1}{1-q}\right)'\right]$$

$$=p\left[\frac{2}{(1-q)^3}-\frac{2}{(1-q)^2}\right]=\frac{2-p}{p^2}$$

于是

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{2-p}{p^2}-\frac{1}{p^2}=\frac{1-p}{p^2}.$$

九、 （15 分）设 X 的密度函数为 $f(x)=\frac{3}{2}e^{-3|x|}$，$-\infty<x<+\infty$， $Y=|X|$，

（1）求协方差$\mathrm{cov}(X,Y)$；（2）问：X,Y是否相关？是否独立？为什么？

解：（1） $\boldsymbol{E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}x\frac{3}{2}e^{-3|x|}dx=0}$ **(被积函数是奇函数)**

$\boldsymbol{E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}x|x|\frac{3}{2}e^{-3|x|}dx=0}$ **(被积函数是奇函数)**

于是$\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0$

（2）由于 $\rho_{XY}=\dfrac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=0$，所以 **X** 与 **Y** 不相关。

由于$\forall a\in\mathbb{R}$，有

$$F(a,a)=P(X\le a,Y\le a)=P\{(X\le a)(|X|\le a)\}$$
$$=P(|X|\le a)>P(X\le a)P(|X|\le a)=F_X(a)F_Y(a)$$

所以 **X** 与 **Y** 不相互独立。