离散数学

Discrete Mathematics

吴梅红

厦门大学计算机科学系

E-mail: wmh@xmu.edu.cn

7.2 通路与回路

- 图的最基本性质是它是否是连通的。 /*邻居的邻居

定义 7.10 设G为标定图, G中顶点和边的交替序列

$\Gamma = v_{i0}, e_{j1}, v_{i1}, e_{j2}, \ldots, e_{jl}, v_{il}$ 称为顶点 v_{i0} 到顶点 v_{il} 的

通路, 其中 v_{ir-1}, v_{ir} 为 e_{jr} 的端点, $r = 1, 2, \ldots, l$。

v_{i0}, v_{il} 分别称为通路Γ的始点和终点, Γ中边数 l 称为Γ的

长度。若 $v_{i0} = v_{il}$, 则称通路Γ为回路。

- 若Γ中的所有边互不相同, 则称Γ为简单通路;

此时, 又若 $v_{i0} = v_{il}$, 则称Γ为简单回路。

- 若Γ中的所有顶点(除v_{i0}与v_{il}可能相同外)互不相同(所有边也互不相同), 则称Γ为初级通路, 或称Γ为一条路径。

  此时, 又若$v_{i0} = v_{il}$, 则称Γ为初级回路或圈。

- 若Γ中的有边重复, 则称Γ为复杂通路;

  又若此时$v_{i0} = v_{il}$, 则称Γ为复杂回路。 ∎

- 长度为奇数的圈称为奇圈, 长度为偶数的圈称为偶圈。
- 初级回路(圈)看成初级通路(路径)的特殊情况。
- 在应用中, 初级通路多数是始点与终点不相同。
- 初级通路(回路)是简单通路(回路), 反之不真。

- 注意：对有向图D而言，这里定义的通路与回路，其中各有向边的方向都是一致的。
- 在定义中将通路(回路)表示成顶点和边的交替序列，其实还可以用以下简便方法表示。

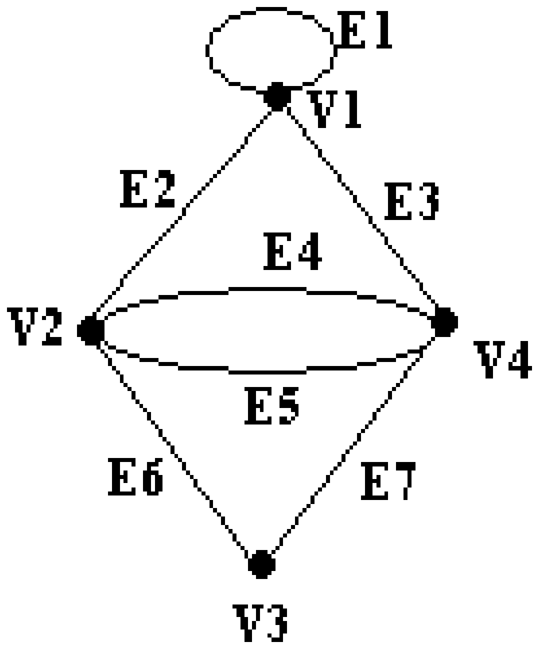
(1) 只用边的序列表示通路(回路)。

$$\Gamma = e_{j1}, e_{j2}, \ldots, e_{jl}$$

(2) 在简单图中用顶点的序列表示通路(回路)。

$$\Gamma = v_{i0}, v_{i1}, \ldots, v_{il}$$

- 长为*l* 的圈在同构意义下表示法是惟一的;
- 在非同构意义, 即定义下, 不同的始点和终点的圈看成是不同的。



例 v_1, e_1, v_1是环loop, 长度为1;

v_2, e_4, v_4, e_5, v_2 长度为2的回路, e_4和 e_5是平行边;

v_2, v_4, v_3, v_2, 长度为3。

- 无向图初级回路长度≥3,
- 有向图初级回路长度≥2。

例 通路walk: $v_1, e_2, v_2, e_5, v_4, e_3, v_l, e_1, v_1, e_2, v_2$

简单通路trail: $v_4, e_5, v_2, e_4, v_4, e_3, v_l, e_1, v_1$

简单回路circuit: $v_1, e_2, v_2, e_4, v_4, e_3, v_l, e_1, v_1$

初级通路path: $v_3, e_6, v_2, e_4, v_4, e_3, v_l$

初级回路cycle: $v_1, e_2, v_2, e_6, v_3, e_7, v_4, e_3, v_1$

定理7.3 在n阶图G中，若从顶点v_i到v_j $(v_i \neq v_j)$存在通路，则从v_i到v_j**存在长度≤n – 1的初级通路(路径)**。

证 设$\Gamma = v_{i0}, e_{j1}, v_{i1}, e_{j2}, \dots, e_{jl}, v_{il}$为G中长度为$l$的通路，若$\Gamma$上无重复出现的顶点，则$\Gamma$为满足要求的通路。否则必存在$t < s$, $v_{is}=v_{it}$，即Γ中存在v_{is}到自身的回路C_{st}，在Γ上删去C_{st}中的一切边及除v_{is}外的所有顶点，形成一条较短的连接v_i到v_j通路Γ_1，即Γ_1长度至少比Γ减少1。

- 若Γ_1上还有重复出现的顶点，就做同样的处理，直到无重复出现的顶点为止。经过有限步后，最后得到v_i到v_j的初级通路，显然它的长度≤n – 1。 ■

- 类似可证定理7.4。

定理 7.4 在n阶图G中，若存在v_i到自身的回路，则存在v_i到自身长度≤n的初级回路(圈)。

定义 7.11 设$G = \langle V, E\rangle$, $\forall u, v \in V$, 若u, v之间存在通路, 则称u, v是连通的, 记作$u \sim v$。$\forall u \in V$, 规定$u \sim u$。■

若G为平凡图, 或 G中任意二顶点都是连通的, 则称G是连通图, 否则称G是非连通图或分离图。 ■

- 无向完全图K_n都是连通connected图, 而零图$N_n(n\geq 2)$均是非连通disconnected图。
- 无向图顶点间的连通关系R是V上的一个等价关系,

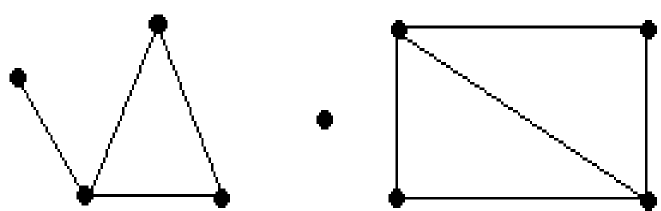
$$R = \{ \langle x, y\rangle \mid x, y \in G \text{ 且 } x\text{与}y\text{连通} \},$$

它的所有等价类构成V的一个划分。任意两个顶点v_i和v_j属于同一个等价类 当且仅当 它们有路相连通。

定义 设$G = \langle V, E\rangle$, V关于顶点之间的**连通关系**的**商集**(划分块), $V/\sim = \{V_1, V_2, \ldots, V_k\}$, 称**导出子图**$G[V_i]$ ($i = 1, 2, \ldots, k$)为G的**连通分支**, **连通分支数**k记作$p(G)$。 ∎

定义 若G的一个连通子图**不**是G的**其他任何连通子图的真子图**, 则称它为G的一个**连通分支**。 ∎

- 若G是 **连通图** $\Leftrightarrow p(G) = 1$。
- 若G是**非连通图** $\Leftrightarrow p(G) \geq 2$。
- 若u和v属于G的不同**连通分支**, 则 $(u, v) \notin E(G)$。



定义 设u, v为图G中任意两个顶点, 若u, v连通, 称u, v之间的最短的通路为u, v之间的短程线geodesic, 短程线的长度称为u, v之间的距离distance, 记作d(u, v)。

当u, v不连通时, 规定$d(u, v) = \infty$。 ■ /*local u, v

- 无向图的距离定义满足欧几里得距离三条公理:

(1) $d(u, v) \geq 0$, $u = v$时, 等号成立 (非负性)

(2) $\forall u, v, w \in V(G)$, 则

$$d(u, v) + d(v, w) \geq d(u, w) \quad \text{(三角不等式)}$$

(3) $d(u, v) = d(v, u)$ (对称性)

- 对无向连通图G来说, 常由删除G中的一些顶点或删除一些边, 而破坏其连通性。
- 设G = <V, E>为一无向图。

(1) 设$e \in E$, 用$G - e$表示从G中去掉边e, 称为删除e 。

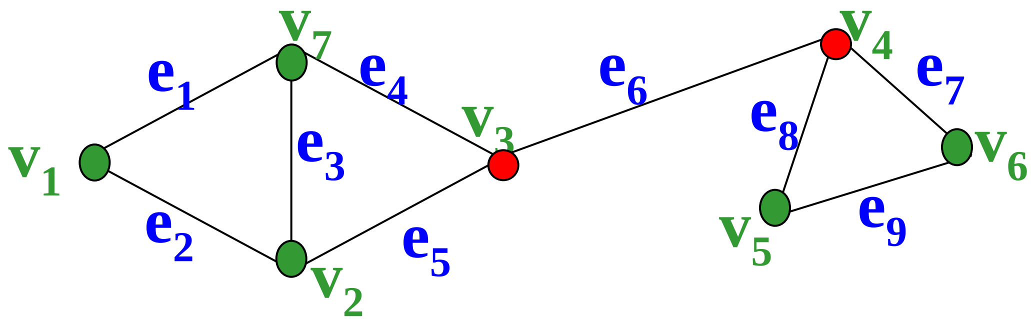
又设$E' \subset E$, 用$G - E'$ 表示从G中删除E' 中的所有边, 称为删除E'。

(2) 设$v \in V$, 用$G - v$表示从G中去掉v及v关联的一切边, 称为删除顶点v。又设$V' \subset V$, 用$G - V'$ 表示从G中删除V' 中的所有顶点, 称为删除V'。

- 连通性是图的最为重要性质之一。图的连通性在计算机网络、交通网和电力网等方面有着重要的应用。
- 实际问题中, 除了考察一个图是否连通外，往往还要研究一个图连通的程度, 作为系统的可靠性度量。
- 对于连通图G, 常由于删除了图中的一些边或一些顶点(要塞) 而影响图的连通性。删除边只需将该边删除, 而删除顶点v是指将v及所关联的边都删除。

/*分割cut运算把一个完整的图分为几个独立的子图。

/*分割是删除, 但删除不一定是分割。

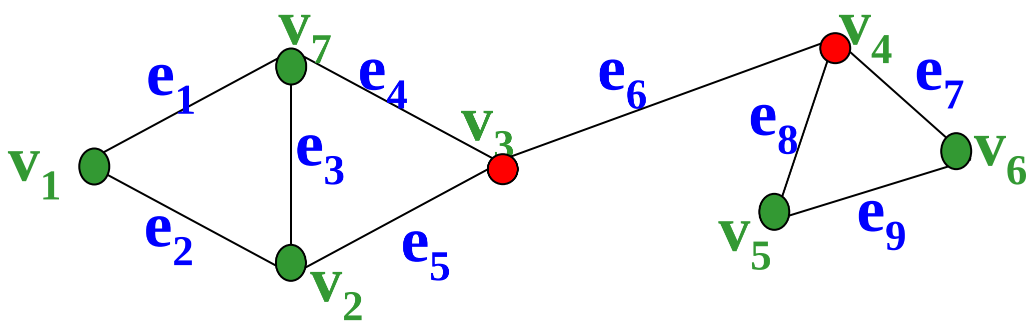


定义 7.12 设$G = \langle V, E\rangle$, 若存在$V' \subset V$且$V' \neq \varnothing$, 使得 $p(G - V') > p(G)$, 而对于$\forall V'' \subset V'$, 均有$p(G - V'') = p(G)$, 则称V'是G的一个点割集。 /*点割集$B \not\subset$ 点割集A

特别地, 单元集$\{v\}$是G的点割集, 则称v是G的割点。 ∎

- 若v是连通图G的一个割点, 那么$G - v$就是不连通图或平凡图N_1。

图7.17中, $\{v_2, v_7\}$, $\{v_3\}$, $\{v_4\}$为点割集(**vertex-cut set**), $\{v_3\}$, $\{v_4\}$均为割点(**cut-vertex**)。 **More?**

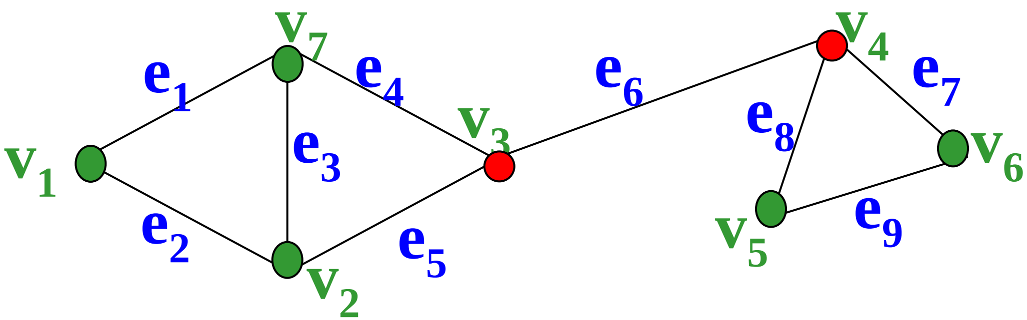


定义 7.12 设G = <V, E>, 若存在$E' \subseteq E$且$E' \neq \varnothing$, 使得$p(G - E') > p(G)$, 而对于任意的$E'' \subset E'$, 均有$p(G - E'') = p(G)$, 则称E'是G的一个边割集。特别地, 当单元集{e}是G的边割集, 则称e是G的割边或桥。■

- $\{e_6\}, \{e_1, e_2\}, \{e_4, e_5\}, \{e_7, e_8\}, \{e_8, e_9\}, \{e_7, e_9\}, \{e_1, e_3, e_4\}, \{e_2, e_3, e_5\}, \{e_1, e_3, e_5\}, \{e_2, e_3, e_4\}$等都是边割集。More?

其中$\{e_6\}$为割边(cut-edge) 。 /*边割集B $\not\subset$ 边割集A

- 非叶的割边(桥bridge)端点必为割点。



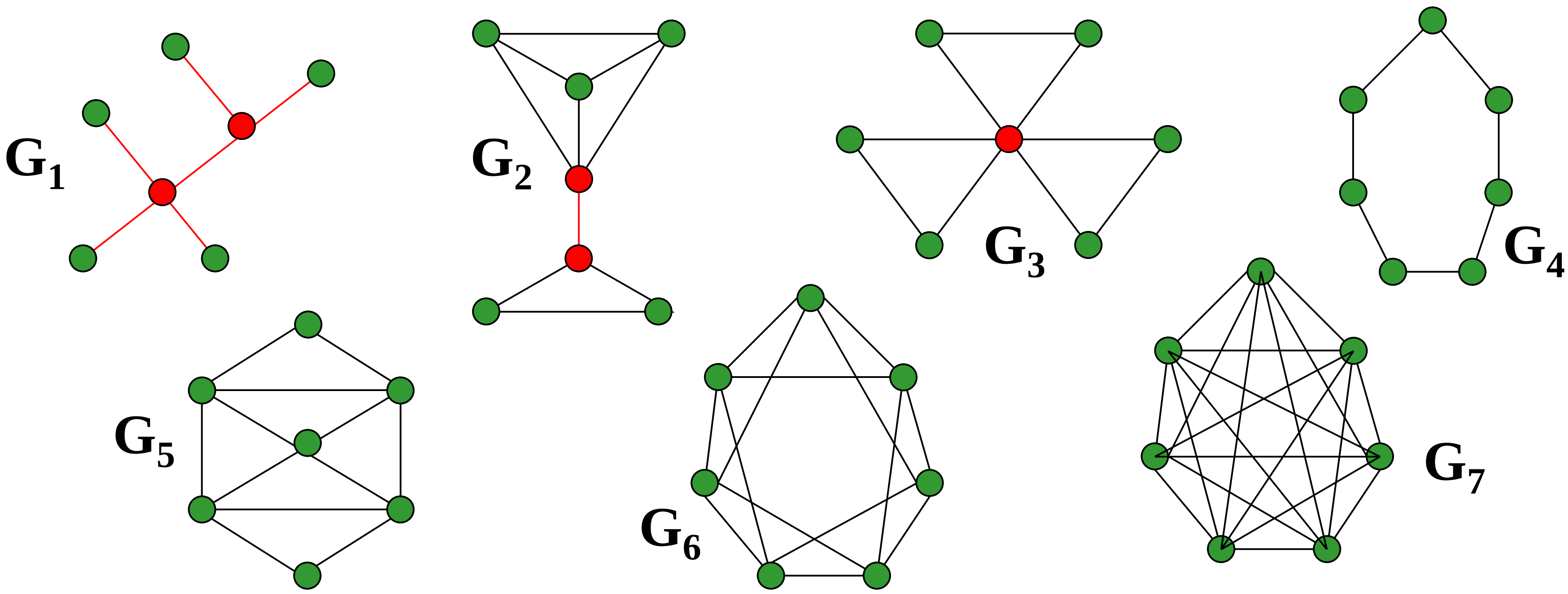
- 从定义可以看出以下几点:

1. 完全图K_n无点割集, 因为从K_n中删除$h(h<n)$个顶点后, 所得图仍然是连通的。

2. n阶零图既无点割集, 也无边割集。

3. 若G是连通图, E'是G的边割集, 则 $p(G - E') = 2$。

4. 若G是连通图, V'是G的点割集, 则 $p(G - V') \geqslant 2$。



阶为7的一些连通图

- 上面有些图的连通性如此“脆弱”，以致于删除一条特定的边(割边)或一个特定的点(割点)就可导致图不连通。
- 某些图看起来比其他图“更为连通(可靠)”。

- 若G不是完全图，那么G包含两个不邻接的顶点，

  删除G的除这两个顶点外的所有顶点, 即可得到一个

  不连通图。

  即 任意一个非完全图都存在点割集。

- 连通图存在点割集 ⇔ G不是完全图。
- 下面从数量观点来描述图的连通性。

定义 7.13 设G是无向连通图且不含K_n为生成子图, 则称 $\kappa(G) = \min\{\,|V'|\mid V'$ 为G的点割集$\}$为G的[点]连通度。

$\lambda(G) = \min\{|E'|\mid E'$是G的边割集$\}$称为G的边连通度。∎

- 图G的点连通度是为了使连通图G成为一个非连通图, 需要删除最少的点数。

  $\kappa(G) \leqslant n-1$

- 图G的边连通度是为了使连通图G成为一个非连通图, 需要删除的边的最少数目。

1. G是非连通图或平凡图 $\Leftrightarrow$ $\kappa(G) = \lambda(G) = 0$ (其点和边割集为$\varnothing$)。

2. G是完全图K_n $\Leftrightarrow$ $\kappa(G) = n-1$。 /*最可靠

3. 连通图G中含有割点 $\Leftrightarrow$ $\kappa(G) = 1$。

若$\kappa(G)\geq k$, 则称G为k连通图(k-connected)。 ∎

- 若连通图$G \neq K_n$, $\kappa(G)\leqslant n-2$。

G是非连通图或平凡图 $\Leftrightarrow$ $\lambda(G) = 0$ (其边割集为$\varnothing$)。

若$\lambda(G) \geq k$, 则称G为**k-边连通图**。 ∎

- 连通图G中存在桥 $\Leftrightarrow$ $\lambda(G) = 1$。

  图7.17(有桥)的边连通度$\lambda = 1$, 该图只是1-边连通。

- 定义平凡图的点连通度是0, 边连通度是0。 ∎
- 一个图的连通度越大, 它的连通性能就越好。

- 若$h_1 \geq h_2 \geq 0$, G是h_1-点连通的, 则G也是h_2-点连通的。
  若$h_1 \geq h_2 \geq 0$, G是h_1-边连通的, 则G也是h_2-边连通的。
- 彼得森图的边连通度$\lambda = 3$, 因而它是1-边连通, 2-边连通, 3-边连通。 但不是$h(\geq 4)$ -边连通。
- 简单连通图至少都是1-点连通的和1-边连通的。
  n阶完全图是$(n-1)$-点连通的和$(n-1)$-边连通的。
  完全图K_n没有割点和桥, 它的连通性能是最好的。
- 对于任何n阶连通图,
  当且仅当没有割点时, 它是2-连通的;
  当且仅当没有桥时, 它是2-边连通的。

定理 7.5 (Whitney) **$\forall G = (n, m)$, 均有下面不等式成立:**

$$0 \le \kappa(G) \le \lambda(G) \le \delta(G) \le \lfloor 2m/n \rfloor$$ **/*准均值**

- 在实际应用中, 人们希望寻找n(n≥3)阶无向连通图, 使G是k-连通的, 且边数越少越好。 /*造价低成本
- 当k = 1时, 这样的图应该为n阶树。 /*定义9.1
- 当k = 2时, 这样的图应该为n阶圈。
- 当n = 6, k = 3时, 这样的图应该为$K_{3,3}$。
- 当k = 4时, 这样的图应为八面体图。
- 一般情况下, 对于给出的n和k, 求n阶无向k-连通简单图, 使其边数达到最小minimum是个难题。

有向图的连通性

定义 7.14 在有向图D中, 若从顶点v_i到v_j存在通路, 则称v_i可达v_j, 记作$v_i \to v_j$; 若$v_i \to v_j$且$v_j \to v_i$, 则称v_i与v_j相互可达, 记作$v_i \leftrightarrow v_j$; 对于$\forall v_i \in V$, 规定$v_i \leftrightarrow v_i$。

- 二元关系相互可达$\leftrightarrow$是V(D)上的一个等价关系。

定义 在有向图D中, 若$v_i \to v_j$, 称v_i到v_j长度最短的通路为v_i到v_j的短程线, 其长度称为v_i到v_j的距离, 记作 $d\langle v_i, v_j \rangle$。 ∎

- 与无向图中顶点v_i与v_j之间的距离$d(v_i, v_j)$相比,

  $d<v_i, v_j>$ 除无对称性外, 具有$d(v_i, v_j)$的一切性质。

- 有向图D两点间的距离一般不满足对称性, 即使

  $d<v_i, v_j>$ 和 $d<v_j, v_i>$都有限, 它们也可能不相等。

- 因为有向图D一般不满足对称性,

  连通性不是有向图的顶点集上的等价关系。

- 有向图D的连通性要复杂些, 共分为三种:

定义 7.15 设D为一个有向图,

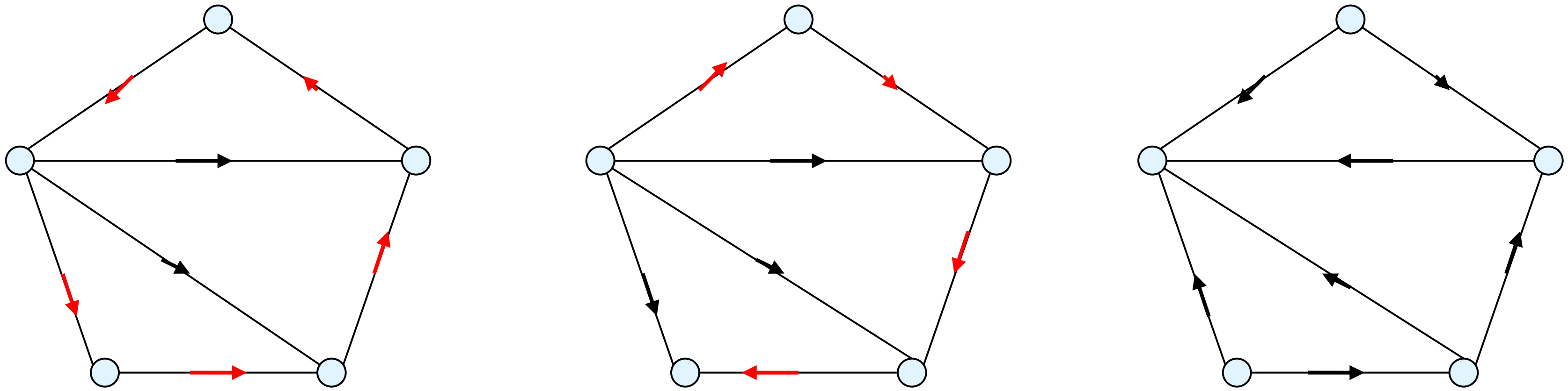
(1)若D的基图是连通图, 则称D是弱连通图或D是连通图;

(2) 对于$\forall v_i, v_j \in V(D)$, 若$v_i \to v_j$, $v_j \to v_i$, 至少成立其一,

则称D是单向连通的;

(3) 对于$\forall v_i, v_j \in V(D)$, 若均有$v_i \leftrightarrow v_j$, 则称D是强连通. $\blacksquare$

- 若图D是强连通的,则它必是单向连通的;
- 若图D是单向连通的,则它必是弱连通的。
- 但这两个命题, 其逆不成立。



(1) (2) (3)

图 7.10

- (1)是强连通的, 当然也是单向连通的和弱连通的。
- (2)是单向连通的, 也是弱连通的, 但不是强连通的。
- (3)是弱连通的, 不是单向连通的, 更不是不是强连通的。

判别定理1 设D为一个n阶有向图，D是强连通的 $\Leftrightarrow$

D中存在经过每个顶点至少一次的回路。

**证 充分性 如果D中有一个回路，它至少包含每个顶点一次，则在该回路上D中任何两个顶点都是相互可达的，即D是强连通图。

- 必要性 设D中的顶点为 $v_1, v_2, \ldots, v_n$。由D的强连通性质可知，$v_i \to v_{i+1}$，$i = 1, 2, \ldots, n-1$，设 Γ_i 为 v_i 到 v_{i+1} 的通路，又 $v_n \to v_1$，设 Γ_n 为 v_n 到 v_1 的通路。

  于是，$\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_{n-1}, \Gamma_n$ 所围回路经过D中每个顶点至少一次。

判别定理2 设D为n阶有向图，D是单向连通图 $\Leftrightarrow$

D中存在经过每个顶点至少一次的通路。

- 由判别定理1可知图7.10中(1)红色箭头是强连通的,
- 由判别定理2可知图7.10中(2)红色箭头是单向连通的。

例 画出具有4个顶点的不同构的简单图。