离散数学

Discrete Mathematics

吴梅红

厦门大学计算机科学系

E-mail: wmh@xmu.edu.cn



5.2 代数系统 及其子代数 和积代数

- **集合**和集合上的**运算**可以构成**代数系统 (或结构)**。

定义 5.12 一个**代数系统**是一个三元组$V = \langle S, \Omega, K \rangle$,

其中S是一个**非空的对象集合**; Ω是S上一个**非空的运算集合**, 即 $\Omega = \bigcup_{j=1}^{n} f_j$, $f_j = \{\circ \mid \circ$是S上的 j 元运算$\}$;

$K \subseteq S$是**代数常数**的集合。

- 对于任何代数**常数**$k \in K$, 可以把k看成S上的**零元运算,** 即 $k: \ \to S$。这时可将代数系统V写作$\langle S, \Omega \rangle$,

其中 $\Omega = \bigcup_{j=0}^{n} f_j$, $f_0 = K$。 /*验证子代数f_0

- 当Ω中含有r个代数运算时, r为正整数, 常常将V记作

$<S, \circ_1, \circ_2, \ldots, \circ_r>$, 其中$\circ_1, \circ_2, \ldots, \circ_r$是代数运算, 通常从高元运算到低元运算排列。

- 本书所研究的代数系统就是这种含有有限个代数运算的系统。运算是代数系统的决定性因素。

例 $<\mathbf{N}, +, 0>$, $<\mathbf{R}, +, \cdot>$, $<\mathbf{M}_n(\mathbf{R}), +, \cdot>$, $<\mathbf{P}(\mathbf{B}), \cup, \cap, \varnothing>$ 等都是这种代数系统。

- 在不产生误解的情况下, 为了简便起见, 可以不写出代数系统中所有的成分。

例 代数系统 $<\mathbf{N}, +, 0>$ 可以简记为 $<\mathbf{N}, +>$ 或 $\mathbf{N}$。

- 反之, 为了强调常数或运算, 用三元组表示。
- 下面考虑代数系统之间的内在关系。

定义 5.13 设 $V_1 = <A, \circ_1, \circ_2, \ldots, \circ_r>$, $V_2 = <B, *_1, *_2, \ldots, *_r>$ 都是具有r个运算的代数系统, $r \geq 1$。若对于 $i = 1, 2, \ldots, r$, $\circ_i$ 和 $*_i$ 运算具有同样的元数, 则称 V_1 和 V_2 具有相同的构成成分, 也称它们是同类型的代数系统。 ∎

- 设 V_1, V_2, V_3 是代数系统。$V_1 = <R, +, \cdot, -, 0, 1>$, R为实数集, +和 $\cdot$ 为普通的加法和乘法, $-$ 是求相反数运算。
- $V_2 = <M_n(R), +, \cdot, -, \theta, E>$, $M_n(R)$ 为实矩阵集, +和 $\cdot$ 为矩阵加法和乘法, $\forall M = (a_{ij})_{n\times n} \in M_n(R)$, $-M = (-a_{ij})_{n\times n}$, θ 为全0矩阵, E为n阶单位矩阵。
- $V_3 = <P(B), \cup, \cap, \sim, \varnothing, B>$, P(B)为幂集, $\cup$ 和 $\cap$ 为集合的并和交, $\sim$ 为绝对补运算, B为全集。

- 显然V_1, V_2, V_3都是同类型的代数系统, 它们都有着共同的构成成分, 但在运算性质方面却不一定相同。
- V_1, V_2具有共同的运算性质: 加法和乘法都适合交换律和结合律, 乘法对加法适合分配律, –运算为求加法逆元的运算, 0和θ分别为加法的单位元, 1和E分别为乘法的单位元。我们称V_1和V_2是同种的代数系统。
- 但它们和V_3不是同种的, 因为V_3中的∪和∩B运算互相适合分配律和吸收律, 且一元运算~不是关于∪运算的求逆运算。

- 对于代数结构这门课,
它并不是要研究每一个具体的代数系统, 而是通过规定集合及集合上的二元、一元和零元运算, 以及运算所具有的性质来规范每一种代数系统。
- 这个代数系统是许多具有共同构成成分和运算性质的实际代数系统的 模型或者抽象。
- 针对这个模型来研究它的结构和内在特征,
然后应用到每个具体的代数系统,
这种研究方法就是抽象代数的基本方法。
- 后面涉及到的半群、独异点和群, 环和域, 格和布尔代数就是具有广泛应用背景的抽象的代数系统。

- 下面讨论子代数系统。

定义 5.14 设$V = <S, \circ_1, \circ_2, \ldots, \circ_r>$是代数系统, B是S的非空子集, 若B对V中所有的运算封闭, 则称$V' = <B, \circ_1, \circ_2, \ldots, \circ_r>$是V的子代数系统, 简称子代数。当B是S的真子集时, 称V' 是V的真子代数。 ■

例 E是偶数集合, +和 • 是通常的加法和乘法。代数系统$<E, +, \cdot>$就是$<Z, +, \cdot>$的子代数。

- 若O表示奇数集合, 则O和运算+, • 不能构成$<Z, +, \cdot>$的子代数。 /* +不封闭

例 (1) <N, +>是<N, +>, <Z, +>, <Q, +>, <R, +>的子代数。

- <Z, +, 0>是<R, +, 0>, <C, +, 0>的真子代数。

(2) $A = \{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a \in R\}$, 则<A, ·>是<$M_2(R)$, ·>的真子代数, 其中·为矩阵乘法。$M_2(R)$中关于·运算的单位元是 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, 若把乘法单位元看作$M_2(R)$中的零元运算,

那么 $<A, \cdot, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}>$ 不是 $< M_2(R), \cdot, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} >$ 的子代数,

因为A对$<M_2(R), \cdot, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}>$中的零元运算不封闭。

定义 设$V = <S, \circ_1, \circ_2, \ldots, \circ_r>$是代数系统, 其中零元运算的集合是$K \subseteq S$。若K对V中所有的运算封闭,则$<K, \circ_1, \circ_2, \ldots, \circ_r>$是V的最小子代数; V自身是V的最大子代数。称最大和最小子代数是V的平凡子代数。

例 5.8 令$nZ = \{nk \mid k \in Z\}, n \in N$, $<nZ, +, 0>$是$<Z, +, 0>$的子代数。因为$\forall nk_1, nk_2 \in nZ$有

$$nk_1 + nk_2 = n(k_1 + k_2) \in nZ,$$

且$0 \in nZ$, 所以nZ对$<Z, +, 0>$的运算都是封闭的。

- 当$n = 0$时, $nZ = \{0\}$, $<\{0\}, +, 0>$是$<Z, +, 0>$的最小子代数, 平凡的真子代数。

- 当n = 1时, nZ = Z, <Z, +, 0> 是最大(和平凡)的子代数。
- 当n ≠ 0, 1时, <nZ, +, 0>是<Z, +, 0>非平凡的真子代数.
- 不难证明当代数系统V中只含有二元、一元和零元运算时, V中二元运算的性质, 如交换律、结合律、幂等律、消去律、分配律、吸收律等在V中的子代数中都成立。
- 当我们用这些性质和代数常数来定义代数系统时, V的子代数和V不仅是同类型的, 也是同种的代数系统。
- 设V_1和V_2是同类型的代数系统,

  由V_1和V_2可以构成一个新的(更庞大复杂的)代数系统

  --- 积代数, 它是卡氏积概念的推广。

定义 5.15 设$V_1 = \langle A, \circ_1, \circ_2, \ldots, \circ_r \rangle$, $V_2 = \langle B, *_1, *_2, \ldots, *_r \rangle$是同类型的代数系统, 且对于$i = 1, 2, \ldots, r$, $\circ_i$ 和 $*_i$ 是k_i 元运算。V_1 和V_2 的积代数 记作 $V_1 \times V_2 =$

$\langle A \times B, \bullet_1, \bullet_2, \ldots, \bullet_r \rangle$, 其中$\bullet_i$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$是k_i 元运算。

对于任意的$\langle x_1, y_1 \rangle, \langle x_2, y_2 \rangle, \ldots, \langle x_{ki}, y_{ki} \rangle \in A \times B$有

$$\bullet_i (\langle x_1, y_1 \rangle, \langle x_2, y_2 \rangle, \ldots, \langle x_{ki}, y_{ki} \rangle)$$

$$= \langle \circ_i (x_1, x_2, \ldots, x_{ki}), *_i (y_1, y_2, \ldots, y_{ki}) \rangle \qquad \blacksquare$$

- 若V是V_1 与V_2 的积代数, 这时也称V_1 和V_2 是V的因子代数。
- 显然积代数和它的因子代数是同类型的代数系统。

例 设 $V_1 = \langle R, +, \cdot \rangle$, R为实数集, + 和 • 为普通的加法和乘法。$V_2 = \langle M_2(R), +, \cdot \rangle$, + 和 •为矩阵加法和乘法, 则 $V_1 \times V_2 = \langle R \times M_2(R), \oplus, \odot \rangle$, 对于

$\langle 3, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \rangle, \langle 4, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rangle \in R \times M_2(R)$有

$$\langle 3, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \rangle \oplus \langle 4, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rangle = \langle 7, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \rangle,$$

$$\langle 3, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \rangle \odot \langle 4, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rangle = \langle 12, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \rangle。$$

- $\langle 0, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rangle$是积代数$V_1 \times V_2$的代数常数。
- 关于积代数有以下定理。

定理设$V_1 = <A, \circ_1, \circ_2, \ldots, \circ_r>$, $V_2 = <B, *_1, *_2, \ldots, *_r>$是同类型的代数系统, 它们的积代数是V。对任意的二元运算$\circ_i$, $\circ_j$, $*_i$, $*_j$,

(1) 若$\circ_i$, $*_i$在V_1和V_2中是可交换的 (或可结合的, 幂等的), 则$\bullet_i$ 在V中是可交换的 (或可结合的, 幂等的)。

证 任取 $<a_1, b_1>, <a_2, b_2> \in A \times B$,

$$<a_1, b_1> \bullet_i <a_2, b_2> = <a_1 \circ_i a_2, b_1 *_i b_2>$$

$$= <a_2 \circ_i a_1, b_2 *_i b_1> = <a_2, b_2> \bullet_i <a_1, b_1> 。 \blacksquare$$

(2) 若$\circ_i$对$\circ_j$ 在V_1上是可分配的, $*_i$对$*_j$ 在V_2上是可分配的, 则$\bullet_i$对$\bullet_j$在V中也是可分配的。

(3) 若$\circ_i$, $\circ_j$在V_1上是吸收的, 且$*_i$, $*_j$在V_2上也是吸收的, 则$\bullet_i$, $\bullet_j$在V上是吸收的。

(4) 若e_1 (或θ_1) 为V_1中关于$\circ_i$运算的单位元(或零元), e_2 (或θ_2)为V_2中关于$*_i$运算的单位元(或零元), 则$\langle e_1, e_2\rangle$ (或$\langle \theta_1, \theta_2\rangle$)为V中关于$\bullet_i$运算的单位元(或零元)。

证 任取 $\langle a, b\rangle \in A \times B$,

$$\langle a, b\rangle \bullet_i \langle e_1, e_2\rangle = \langle a \circ_i e_1 , b *_i e_2\rangle = \langle a, b\rangle,$$

$$\langle e_1, e_2\rangle \bullet_i \langle a, b\rangle = \langle e_1 \circ_i a, e_2 *_i b \rangle = \langle a, b\rangle。\quad \blacksquare$$

(5) 若$\circ_i$, $*_i$为含有单位元的二元运算, 且$a \in A$, $b \in B$关于$\circ_i$和$*_i$运算的逆元分别为a^{-1}, b^{-1}, 则 $\langle a^{-1}, b^{-1}\rangle$ 是 $\langle a, b\rangle$ 在V中关于$\bullet_i$运算的逆元。

- 可知 积代数和它的因子代数在许多性质是一致的，但消去律是一个例外。

例 $V_1 = \langle Z_2, \otimes_2 \rangle$, $V_2 = \langle Z_3, \otimes_3 \rangle$, 其中$Z_2 = \{0, 1\}$, $Z_3 = \{0, 1, 2\}$, $\otimes_2$ 和$\otimes_3$ 分别为模2乘法和模3乘法。

V_1和V_2的积代数为 $\langle Z_2 \times Z_3, \otimes \rangle$。

$\forall \langle x_1, y_1 \rangle, \langle x_2, y_2 \rangle \in Z_2 \times Z_3$ 有

$$\langle x_1, y_1 \rangle \otimes \langle x_2, y_2 \rangle = \langle x_1 \otimes_2 x_2, y_1 \otimes_3 y_2 \rangle$$

假设 $\otimes$ 运算满足消去律, 必有

$$\langle 0, 1 \rangle \otimes \langle 1, 0 \rangle = \langle 0, 1 \rangle \otimes \langle 0, 0 \rangle$$

$$\Rightarrow \langle 1, 0 \rangle = \langle 0, 0 \rangle。$$

这显然是不对的, 因此$\otimes$运算不满足消去律。

- 可把两个代数系统的积代数概念推广到n个代数系统。

定义 设$V_1, V_2, \ldots, V_n$ 同类型的代数系统。

对于$i = 1, 2, \ldots, n$, $V_i = \langle A_i, \circ_{i1}, \circ_{i2}, \ldots, \circ_{ir} \rangle$。设$\circ_{it}$是$k_t$元运算, $t = 1, 2, \ldots, r$。$V_1, V_2, \ldots, V_n$的积代数记作

$$V_1 \times V_2 \times \ldots \times V_n = \langle A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n, \circ_1, \circ_2, \ldots, \circ_r \rangle$$

其中$\circ_t$是k_t元运算, $t = 1, 2, \ldots, r$。

对于任意的 $\langle x_{1j}, x_{2j}, \ldots, x_{nj} \rangle \in A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$,

$j = 1, 2, \ldots, k_t$ 有

$$\circ_t(\langle x_{11}, x_{21}, \ldots, x_{n1} \rangle, \langle x_{12}, x_{22}, \ldots, x_{n2} \rangle, \ldots, \langle x_{1kt}, x_{2kt}, \ldots, x_{nkt} \rangle)$$

$$= \langle \circ_{1t}(x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1kt}), \circ_{2t}(x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2kt}), \ldots,$$

$$\circ_{nt}(x_{n1}, x_{n2}, \ldots, x_{nkt}) \rangle$$。 /*同分量集合自己计算

例 设$V = \langle N, +\rangle$, 则 $V \times V \times V = \langle N \times N \times N, \oplus\rangle$,

对于任意的$\langle a_1, a_2, a_3\rangle, \langle b_1, b_2, b_3\rangle \in N \times N \times N$ 有

$\langle a_1, a_2, a_3\rangle \oplus \langle b_1, b_2, b_3\rangle$

$= \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3\rangle$。

- 可以证明 前面有关的结论对于 n个代数系统的积代数也成立。