厦门大学《微积分 I-2》课程
期中试题

考试日期：2016.4　　信息学院自律督导部整理

得　分	
阅卷人	

一、计算下列各题：（每小题 4 分，共 8 分）

（1）设 $\vec{a}=(2,1,-1)$，$\vec{b}=(1,2,2)$，求 $\text{Prj}_{\vec{b}}(2\vec{a}-\vec{b})$ 和 $(2\vec{a}-\vec{b})$ 与 $\vec{a}$ 的夹角 θ.

（2）求以 $A(4,7,-1)$、$B(5,5,1)$ 和 $C(3,7,-2)$ 为顶点的三角形的面积.

二、计算下列各题：（每小题 4 分，共 8 分）

得　分	
阅卷人	

（1）设 $u = y^x \ln z$，求 $\dfrac{\partial u}{\partial z}$，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial z \partial x}$.

（2）设 $u = xyz^2$，点 $P(1,1,1)$，求 u 在点 P 处的最大的方向导数和它的方向（以单位向量表示）.

三、计算下列各题：（共 10 分）

得　分	
阅卷人	

（1）求曲线段 $L:\begin{cases} x = \dfrac{4}{3}t^{\frac{3}{2}}, \\ y = t - \dfrac{1}{2}t^2, \end{cases}$ $t \in [0,1]$ 的弧长. （4 分）

（2）求曲线$\rho = 2 + \sin\theta$所围成的图形的面积.（6 分）

四、计算下列各题：（每小题 4 分，共 8 分）

得　分	
阅卷人	

（1）求极限$\lim\limits_{(x,y)\to(3,0)} \dfrac{\mathrm{e}^{xy}-1}{y\sqrt{x^2+y^2}}$.

（2）求曲线$\begin{cases} x^2+2y^2+z-1=0, \\ x^2+y^2-z^2=0 \end{cases}$在$yoz$坐标面上的投影柱面和投影曲线方程.

五、设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{(x-1)y}{(x-1)^2+y^2}, & (x-1)^2+y^2\neq 0,\\ 0, & (x-1)^2+y^2=0,\end{cases}$ ，

得　分	
阅卷人	

① 计算 $f_x(1,0)$ 和 $f_y(1,0)$. ② 问 $f(x,y)$ 在点 $(1,0)$ 处是否可微？请说明理由.（8 分）

六、设 $z=f\left(y,\dfrac{y}{x}\right)$, 其中 f 具有二阶连续偏导数，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$、$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.（8 分）

得　分	
阅卷人	

七、求过点$(1,3,1)$，且平行于平面$2x+y-2z+6=0$，又与直线$\frac{x}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2}{1}$相交的直线的方程.（8 分）

得　分	
阅卷人	

八、求曲线$\begin{cases} x^2+2y^2+z^2-x-1=0, \\ 2x+6y+z-3=0 \end{cases}$在点$(1,0,1)$处的切线方程和法平面方程.（8 分）

得　分	
阅卷人	

九、求曲线$\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = \sin t, \end{cases}$ $t \in [0, \pi]$与x轴围成的图形绕直线$x = 2$旋转所产生的旋转体的体积.（8 分）

得　分	
阅卷人	

十、设$x = f(u,t,y)$， $g(u,t,y) = 0$，其中$f(u,t,y)$，$g(u,t,y)$在R^3具有一阶连续偏导数，且在点(u_0,t_0,y_0)处有$g(u_0,t_0,y_0) = 0$，$\left.\dfrac{\partial(f,g)}{\partial(u,t)}\right|_{(u_0,t_0,y_0)} \neq 0$，① 证明：方程组$x = f(u,t,y)$，$g(u,t,y) = 0$可以确定一对具有连续偏导数的隐函数$u = u(x,y), t = t(x,y)$。② 设$z = \varphi(x^2,u,t)$（函数$\varphi$具有一阶连续偏导数），而$u = u(x,y), t = t(x,y)$为①中由方程组所确定的隐函数，求$\dfrac{\partial z}{\partial x}$.（10 分）

得　分	
阅卷人	

十一、 ① 证明：旋转抛物面$\Sigma: x^2+y^2-2z=0$的任意切平面与该抛物面只有一个交点（即切点）. ② 求通过直线$L:\begin{cases} x-y-1=0, \\ 4y-8z-9=0 \end{cases}$的旋转抛物面$\Sigma$的切平面方程. （8 分）

得　分	
阅卷人	

十二、求函数 $f(x,y,z)=\ln x+\ln y+3\ln z$ 在部分球面 $\Sigma: x^2+y^2+z^2=5r^2\quad (x>0,y>0,z>0)$ 上的最大值，并利用此结果证明：当 $a>0,b>0,c>0$ 时，有

$$abc^3\le 27\left(\frac{a+b+c}{5}\right)^5.$$（8 分）

得　分	
阅卷人	