第三章　多维随机变量及其分布

1. 在一箱子中装有 12 只开关，其中 2 只是次品，在其中取两次，每次任取一只，考虑两种试验：(1) 放回抽样；(2) 不放回抽样. 我们定义随机变量 X,Y 如下：

$$X=\begin{cases}0, & \text{若第一次取出的是正品,}\\ 1, & \text{若第一次取出的是次品;}\end{cases}$$

$$Y=\begin{cases}0, & \text{若第二次取出的是正品;}\\ 1, & \text{若第二次取出的是次品.}\end{cases}$$

试分别就(1)、(2) 两种情况，写出 X 和 Y 的联合分布律.

解　(1) 放回抽样. 由教材第一章知第一次第二次取到正品(或次品)的概率相同，且两次所得的结果相互独立，即有

$$P\{X=0\}=P\{Y=0\}=\frac{5}{6},$$

$$P\{X=1\}=P\{Y=1\}=\frac{1}{6},$$

且 $P\{X=i,Y=j\}=P\{X=i\}P\{Y=j\},i,j=0,1$，于是得 X 和 Y 的联合分布律为

$$P\{X=0,Y=0\}=P\{X=0\}P\{Y=0\}=\frac{4}{36},$$

$$P\{X=0,Y=1\}=P\{X=0\}P\{Y=1\}=\frac{5}{36},$$

$$P\{X=1,Y=0\}=P\{X=1\}P\{Y=0\}=\frac{5}{36},$$

$$P\{X=1,Y=1\}=P\{X=1\}P\{Y=1\}=\frac{1}{36}.$$

(2) 不放回抽样. 由乘法公式

$$P\{X=i,Y=j\}=P\{Y=j\mid X=i\}P\{X=i\},i,j=0,1,$$

知 X 和 Y 的联合分布律为

$$P\{X=0,Y=0\}=\frac{9}{11}\times\frac{10}{12}=\frac{45}{66},$$

$$P\{X=0,Y=1\}=\frac{2}{11}\times\frac{10}{12}=\frac{10}{66},$$

$$P\{X=1,Y=0\}=\frac{10}{11}\times\frac{2}{12}=\frac{10}{66},$$

$$P\{X=1,Y=1\}=\frac{1}{11}\times\frac{2}{12}=\frac{1}{66}.$$

(1)、(2) 两种情况下的 X 和 Y 的联合分布律的表格形式分别为

$Y \backslash X$	0	1
0	$\frac{25}{36}$	$\frac{5}{36}$
1	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{36}$

$Y \backslash X$	0	1
0	$\frac{45}{66}$	$\frac{10}{66}$
1	$\frac{10}{66}$	$\frac{1}{66}$

2. (1) 盒子里装有 3 只黑球、2 只红球、2 只白球，在其中任取4 只球. 以 X 表示取到黑球的只数，以 Y 表示取到红球的只数. 求 X 和 Y 的联合分布律.

(2) 在(1) 中求 $P\{X>Y\}$, $P\{Y=2X\}$, $P\{X+Y=3\}$, $P\{X<3-Y\}$.

解 (1) 按古典概型计算. 自 7 只球中取 4 只，共有 $\binom{7}{4}=35$ 种取法. 在 4 只球中，黑球有 i 只，红球有 j 只(剩下 $4-i-j$ 只为白球) 的取法数为:

$$N\{X=i,Y=j\}=\binom{3}{i}\binom{2}{j}\binom{2}{4-i-j},$$
$$i=0,1,2,3,\ j=0,1,2,\ i+j\leqslant 4.$$

于是

$$P\{X=0,Y=2\}=\binom{3}{0}\binom{2}{2}\binom{2}{2}\Big/35=\frac{1}{35}.$$

$$P\{X=1,Y=1\}=\binom{3}{1}\binom{2}{1}\binom{2}{2}\Big/35=\frac{6}{35}.$$

$$P\{X=1,Y=2\}=\binom{3}{1}\binom{2}{2}\binom{2}{1}\Big/35=\frac{6}{35}.$$

$$P\{X=2,Y=0\}=\binom{3}{2}\binom{2}{0}\binom{2}{2}\Big/35=\frac{3}{35}.$$

$$P\{X=2,Y=1\}=\binom{3}{2}\binom{2}{1}\binom{2}{1}\Big/35=\frac{12}{35}.$$

$$P\{X=2,Y=2\}=\binom{3}{2}\binom{2}{2}\binom{2}{0}\Big/35=\frac{3}{35}.$$

$$P\{X=3,Y=0\}=\binom{3}{3}\binom{2}{0}\binom{2}{1}\Big/35=\frac{2}{35}.$$

$$P\{X=3,Y=1\}=\binom{3}{3}\binom{2}{1}\binom{2}{0}\Big/35=\frac{2}{35}.$$

$$P\{X=0,Y=0\}=P\{X=0,Y=1\}=P\{X=1,Y=0\}$$
$$=P\{X=3,Y=2\}=0.$$

分布律为

Y \ X	0	1	2	3
0	0	0	$\frac{3}{35}$	$\frac{2}{35}$
1	0	$\frac{6}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{2}{35}$
2	$\frac{1}{35}$	$\frac{6}{35}$	$\frac{3}{35}$	0

(2) $P\{X>Y\}=P\{X=2,Y=0\}+P\{X=2,Y=1\}$
$$+P\{X=3,Y=0\}+P\{X=3,Y=1\}$$
$$=\frac{3}{35}+\frac{12}{35}+\frac{2}{35}+\frac{2}{35}=\frac{19}{35}.$$

$$P\{Y=2X\}=P\{X=1,Y=2\}=\frac{6}{35}.$$

$$P\{X+Y=3\}=P\{X=1,Y=2\}+P\{X=2,Y=1\}+P\{X=3,Y=0\}$$
$$=\frac{6}{35}+\frac{12}{35}+\frac{2}{35}=\frac{20}{35}.$$

$$P\{X<3-Y\}=P\{X+Y<3\}$$
$$=P\{X=0,Y=2\}+P\{X=1,Y=1\}+P\{X=2,Y=0\}$$
$$=\frac{1}{35}+\frac{6}{35}+\frac{3}{35}=\frac{10}{35}.$$

3. 设随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}k(6-x-y), & 0<x<2,2<y<4,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(1) 确定常数 k.

(2) 求 $P\{X<1,Y<3\}$.

(3) 求 $P\{X<1.5\}$.

(4) 求 $P\{X+Y\leqslant 4\}$.

解 (1) 由$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1$,得

$$1=\int_2^4 dy\int_0^2 k(6-x-y)dx=k\int_2^4\left[(6-y)x-\frac{1}{2}x^2\right]\Big|_{x=0}^{x=2}dy$$
$$=k\int_2^4(12-2y-2)dy=k(10y-y^2)\Big|_2^4=8k,$$

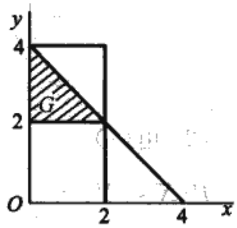
所以 $k=\frac{1}{8}$.

(2) $$P\{X<1,Y<3\}=\int_2^3 dy\int_0^1\frac{1}{8}(6-x-y)dx$$
$$=\frac{1}{8}\int_2^3\left[(6-y)x-\frac{1}{2}x^2\right]\Big|_{x=0}^{x=1}dy$$
$$=\frac{1}{8}\int_2^3\left(\frac{11}{2}-y\right)dy=\frac{3}{8}.$$

(3) $$P\{X<1.5\}=\int_2^4 dy\int_0^{1.5}\frac{1}{8}(6-x-y)dx$$
$$=\frac{1}{8}\int_2^4\left[(6-y)x-\frac{1}{2}x^2\right]\Big|_{x=0}^{x=1.5}dy$$
$$=\frac{1}{8}\int_2^4\left(\frac{63}{8}-\frac{3}{2}y\right)dy=\frac{27}{32}.$$

(4) 在 $f(x,y)\neq 0$ 的区域 $R:0\leqslant x\leqslant 2,2\leqslant y\leqslant 4$ 上作直线 $x+y=4$（如题 3.3 图），并记

$$G:\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 2,\ 2\leqslant y\leqslant 4-x\},$$



题 3.3 图

则

$$P\{X+Y\leqslant 4\}=P\{(X,Y)\in G\}$$
$$=\iint_G f(x,y)dxdy$$
$$=\int_2^4 dy\int_0^{4-y}\frac{1}{8}(6-x-y)dx$$
$$=\frac{1}{8}\int_2^4\left[(6-y)x-\frac{1}{2}x^2\right]\Big|_{x=0}^{x=4-y}dy$$
$$=\frac{1}{8}\int_2^4\left[(6-y)(4-y)-\frac{1}{2}(4-y)^2\right]dy$$
$$=\frac{1}{8}\int_2^4\left[2(4-y)+\frac{1}{2}(4-y)^2\right]dy$$
$$=\frac{1}{8}\left[-(4-y)^2-\frac{1}{6}(4-y)^3\right]\Big|_2^4=\frac{2}{3}.$$

4. 设 X,Y 都是非负的连续型随机变量，它们相互独立.

(1) 证明　$P\{X<Y\}=\int_0^\infty F_X(x)f_Y(x)dx.$

其中 $F_X(x)$ 是 X 的分布函数，$f_Y(y)$ 是 Y 的概率密度.

(2) 设 X,Y 相互独立,其概率密度分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}\lambda_1 e^{-\lambda_1 x}, & x>0,\\ 0, & 其他,\end{cases}\quad f_Y(y)=\begin{cases}\lambda_2 e^{-\lambda_2 y}, & y>0,\\ 0, & 其他,\end{cases}$$

求 $P\{X<Y\}$.

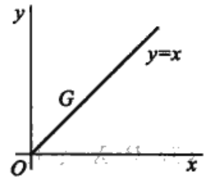
解 (1) 因 X,Y 为非负的相互独立的随机变量,故其概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}f_X(x)f_Y(y), & x>0,y>0,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

从而

$$P\{X<Y\}=\iint\limits_G f_X(x)f_Y(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 G 为 $x\geqslant 0, y\geqslant x$ 界定的区域,从而



题 3.4 图

$$\begin{aligned}P\{X<Y\}&=\int_0^{\infty}\int_0^{y}f_X(x)f_Y(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\int_0^{\infty}f_Y(y)\left[\int_0^{y}f_X(x)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y\\&=\int_0^{\infty}f_Y(y)F_X(y)\mathrm{d}y\\&=\int_0^{\infty}F_X(y)f_Y(y)\mathrm{d}y\\&=\int_0^{\infty}F_X(x)f_Y(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

(2) 由(1)

$$\begin{aligned}P\{X<Y\}&=\int_0^{\infty}(1-e^{-\lambda_1 x})(\lambda_2 e^{-\lambda_2 x})\mathrm{d}x=\int_0^{\infty}[\lambda_2 e^{-\lambda_2 x}-\lambda_2 e^{-(\lambda_1+\lambda_2)x}]\mathrm{d}x\\&=\left[-e^{-\lambda_2 x}+\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)x}\right]_0^{\infty}=1-\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}=\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}.\end{aligned}$$

5. 设随机变量(X,Y)具有分布函数

$$F(x,y)=\begin{cases}1-e^{-x}-e^{-y}+e^{-x-y}, & x>0,y>0,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

求边缘分布函数.

解 $F_X(x)=F(x,\infty)=\begin{cases}1-e^{-x}, & x>0,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

$$F_Y(y)=F(\infty,y)=\begin{cases}1-e^{-y}, & y>0,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

6. 将一枚硬币掷 3 次,以 X 表示前 2 次中出现 H 的次数,以 Y 表示 3 次中出现 H 的次数. 求 X,Y 的联合分布律以及(X,Y)的边缘分布律.

解法(i) 将试验的样本空间及 X,Y 取值的情况列表如下:

样本点	HHH	HHT	HTH	THH	HTT	THT	TTH	TTT
X 的值	2	2	1	1	1	1	0	0
Y 的值	3	2	2	2	1	1	1	0

X 所有可能取的值为 0,1,2;Y 所有可能取的值为 0,1,2,3,由于试验属等可能概型,容易得到(X,Y) 取(i,j),$i=0,1,2$;$j=0,1,2,3$ 的概率.例如

$$P\{X=1,Y=2\}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4},P\{X=2,Y=3\}=\frac{1}{8},$$

$$P\{X=1,Y=3\}=0.$$

可得 X 和 Y 的联合分布律和(X,Y) 的边缘分布律如下表所示.

Y \ X	0	1	2	$P\{Y=j\}$
0	$\frac{1}{8}$	0	0	$\frac{1}{8}$
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	0	$\frac{3}{8}$
2	0	$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$
3	0	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
$P\{X=i\}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

解法(ii)　$X\sim b(2,\frac{1}{2})$,Y 所有可能取的值为 0,1,2,3.而当 $X=i$ $(i=0,1,2)$ 时,Y 取 i 的概率为$\frac{1}{2}$,Y 取 $i+1$ 的概率也是$\frac{1}{2}$,而取 $i,i+1$ 以外的值是不可能的(因第三次投掷不是出现 H 就是出现 T),知 $P\{X=i\}=\binom{2}{i}\frac{1}{4}$,$i=0,1,2$,故知

$$P\{X=0,Y=0\}=P\{Y=0\mid X=0\}P\{X=0\}$$
$$=\frac{1}{2}P\{X=0\}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{8},$$
$$P\{X=0,Y=1\}=P\{Y=1\mid X=0\}P\{X=0\}$$
$$=\frac{1}{2}P\{X=0\}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{8},$$
$$P\{X=1,Y=1\}=P\{Y=1\mid X=1\}P\{X=1\}$$
$$=\frac{1}{2}P\{X=1\}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4},$$

$$P\{X=1,Y=2\}=P\{Y=2|X=1\}P\{X=1\}$$
$$=\frac{1}{2}P\{X=1\}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4},$$
$$P\{X=2,Y=2\}=P\{Y=2|X=2\}P\{X=2\}$$
$$=\frac{1}{2}P\{X=2\}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{8},$$
$$P\{X=2,Y=3\}=P\{Y=3|X=2\}P\{X=2\}$$
$$=\frac{1}{2}P\{X=2\}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{8},$$
$$P\{X=0,Y=2\}=P\{X=0,Y=3\}$$
$$=P\{X=1,Y=0\}=P\{X=1,Y=3\}$$
$$=P\{X=2,Y=0\}=P\{X=2,Y=1\}=0.$$

所得 X 和 Y 的联合分布律与解法(i) 相同,即为上表所示.

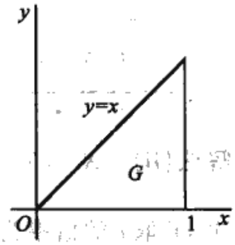
7. 设二维随机变量(X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}4.8y(2-x), & 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant x,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求边缘概率密度.

解 (X,Y) 的概率密度 $f(x,y)$ 在区域 $G:\{(x,y)|0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant x\}$ 外取零值.如题 3.7 图有

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\mathrm{d}y$$
$$=\begin{cases}\int_0^x 4.8y(2-x)\mathrm{d}y, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$
$$=\begin{cases}2.4(2-x)x^2, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$



题 3.7 图

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\mathrm{d}x$$
$$=\begin{cases}\int_y^1 4.8y(2-x)\mathrm{d}x, & 0\leqslant y\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$
$$=\begin{cases}2.4y(3-4y+y^2), & 0\leqslant y\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

注:在求边缘概率密度时,需画出(X,Y) 的概率密度$f(x,y)\neq 0$ 的区域,这对于正确写出所需求的积分的上下限是很有帮助的.

8. 设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}e^{-y}, & 0<x<y,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

求边缘概率密度.

解 $$f_X(x)=\begin{cases}\int_x^{\infty} e^{-y}\mathrm{d}y=-e^{-y}\Big|_x^{\infty}=e^{-x}, & x>0,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}\int_0^{y} e^{-y}\mathrm{d}x=ye^{-y}, & y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

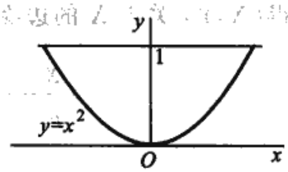
9. 设二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}cx^2y, & x^2\leqslant y\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(1) 确定常数 c.

(2) 求边缘概率密度.

解 (1) 由于(如题 3.9 图)



题 3.9 图

$$1=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{x^2\leqslant y\leqslant 1}cx^2y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=c\int_{-1}^{1}x^2\mathrm{d}x\int_{x^2}^{1}y\mathrm{d}y=c\int_{-1}^{1}x^2\frac{y^2}{2}\Big|_{x^2}^{1}\mathrm{d}x$$

$$=c\int_0^1 x^2(1-x^4)\mathrm{d}x=\frac{4c}{21},$$

得 $c=\dfrac{21}{4}$.

(2) $$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\begin{cases}\int_{x^2}^{1}\frac{21}{4}x^2y\mathrm{d}y, & -1\leqslant x\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\frac{21}{8}x^2y^2\Big|_{x^2}^{1}=\frac{21}{8}x^2(1-x^4), & -1\leqslant x\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\mathrm{d}x=\begin{cases}\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}\frac{21}{4}x^2y\mathrm{d}x, & 0\leqslant y\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\frac{7}{4}x^3y\Big|_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}=\frac{7}{2}y^{5/2}, & 0\leqslant y\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

10. 将某一医药公司 8 月份和 9 月份收到的青霉素针剂的订货单数分别记为 X 和 Y. 据以往积累的资料知 X 和 Y 的联合分布律为

Y \ X	51	52	53	54	55
51	0.06	0.05	0.05	0.01	0.01
52	0.07	0.05	0.01	0.01	0.01
53	0.05	0.10	0.10	0.05	0.05
54	0.05	0.02	0.01	0.01	0.03
55	0.05	0.06	0.05	0.01	0.03

(1) 求边缘分布律.

(2) 求 8 月份的订单数为 51 时,9 月份订单数的条件分布律.

解 (1) (X,Y) 关于 X 的边缘分布律为

$$P\{X=i\}=\sum_{j=51}^{55}P\{X=i,Y=j\},i=51,52,53,54,55.$$

将表中 $X=i$ 那一列的各数字相加,就得到概率 $P\{X=i\}$,例如

$$P\{X=52\}=0.05+0.05+0.10+0.02+0.06=0.28.$$

可得(X,Y) 关于 X 的边缘分布律为

X	51	52	53	54	55
p_k	0.28	0.28	0.22	0.09	0.13

(X,Y) 关于 Y 的边缘分布律为

$$P\{Y=j\}=\sum_{i=51}^{55}P\{X=i,Y=j\},\quad j=51,52,53,54,55.$$

将表中 $Y=j$ 那一行的各数字相加,就得到概率 $P\{Y=j\}$,例如

$$P\{Y=53\}=0.05+0.10+0.10+0.05+0.05=0.35.$$

可得(X,Y) 关于 Y 的边缘分布律为

Y	51	52	53	54	55
p_k	0.18	0.15	0.35	0.12	0.20

(2) 所需求的是条件分布律:

$$P\{Y=j\mid X=51\},\quad j=51,52,53,54,55.$$

由 $P\{Y=j\mid X=51\}=\dfrac{P\{X=51,Y=j\}}{P\{X=51\}}$ 知,只要将原表中第一行各数除以 $P\{X=51\}=0.28$,即得所求的条件分布律:

$Y=j$	51	52	53	54	55
$P\{Y=j\mid X=51\}$	$\frac{6}{28}$	$\frac{7}{28}$	$\frac{5}{28}$	$\frac{5}{28}$	$\frac{5}{28}$

11. 以 X 记某医院一天出生的婴儿的个数，Y 记其中男婴的个数，设 X 和 Y 的联合分布律为

$$P\{X=n,Y=m\}=\frac{e^{-14}(7.14)^m(6.86)^{n-m}}{m!(n-m)!},$$
$$m=0,1,2,\cdots,n;\quad n=0,1,2,\cdots.$$

(1) 求边缘分布律.

(2) 求条件分布律.

(3) 特别，写出当 $X=20$ 时，Y 的条件分布律.

解　(1) $P\{X=n\}=\sum\limits_{m=0}^{n}P\{X=n,Y=m\}$

$$=\sum_{m=0}^{n}\frac{e^{-14}(7.14)^m(6.86)^{n-m}}{m!(n-m)!}$$
$$=\frac{e^{-14}}{n!}\sum_{m=0}^{n}\frac{n!}{m!(n-m)!}(7.14)^m(6.86)^{n-m}$$
$$=\frac{e^{-14}}{n!}(7.14+6.86)^n=\frac{14^n e^{-14}}{n!},n=0,1,2,\cdots.$$

$$P\{Y=m\}=\sum_{n=m}^{\infty}P\{X=n,Y=m\}$$
$$=\sum_{n=m}^{\infty}\frac{e^{-14}(7.14)^m(6.86)^{n-m}}{m!(n-m)!}$$
$$=\frac{e^{-14}}{m!}(7.14)^m\sum_{n=m}^{\infty}\frac{(6.86)^{n-m}}{(n-m)!}=\frac{e^{-14}}{m!}(7.14)^m\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(6.86)^k}{k!}$$
$$=\frac{e^{-14}}{m!}(7.14)^m e^{6.86}=\frac{(7.14)^m e^{-7.14}}{m!},\quad m=0,1,2,\cdots.$$

亦即 $X\sim\pi(14)$，$Y\sim\pi(7.14)$.

(2) 对于 $m=0,1,2,\cdots$，

$$P\{X=n|Y=m\}=\frac{P\{X=n,Y=m\}}{P\{Y=m\}}$$
$$=\frac{e^{-14}(7.14)^m(6.86)^{n-m}}{m!(n-m)!}\bigg/\frac{(7.14)^m}{m!}e^{-7.14}$$
$$=\frac{(6.86)^{n-m}}{(n-m)!}e^{-6.86},\quad n=m,m+1,\cdots.$$

对于 $n=0,1,2,\cdots$，

$$P\{Y=m|X=n\}=\frac{P\{X=n,Y=m\}}{P\{X=n\}}$$
$$=\frac{e^{-14}(7.14)^m(6.86)^{n-m}}{m!(n-m)!}\bigg/\frac{14^n e^{-14}}{n!}$$

$$= \binom{n}{m}\left(\frac{7.14}{14}\right)^m\left(\frac{6.86}{14}\right)^{n-m}$$

$$= \binom{n}{m}(0.51)^m(0.49)^{n-m}, \quad m = 0,1,\cdots,n.$$

(3) $X = 20$ 时，

$$P\{Y = m \mid X = 20\} = \binom{20}{m}(0.51)^m(0.49)^{20-m}, \quad m = 0,1,\cdots,20.$$

12. 求 §1 例 1 中的条件分布律：$P\{Y = k \mid X = i\}$.

解 在 §1 例 1 中，在 X 取为定值 i 之后，Y 是在 $1,2,\cdots,i$ 这 i 个数中等可能地取一个数，因此，条件分布律为

$$P\{Y = k \mid X = i\} = \frac{1}{i}, \quad k = 1,2,\cdots,i.$$

当 $i = 1$ 时，条件分布律为

$Y = k$	1
$P\{Y = k \mid X = 1\}$	1

当 $i = 2$ 时，条件分布律为

$Y = k$	1	2
$P\{Y = k \mid X = 2\}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

当 $i = 3$ 时，条件分布律为

$Y = k$	1	2	3
$P\{Y = k \mid X = 3\}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

当 $i = 4$ 时，条件分布律为

$Y = k$	1	2	3	4
$P\{Y = k \mid X = 4\}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

13. 在第 9 题中

(1) 求条件概率密度 $f_{X|Y}(x \mid y)$，特别，写出当 $Y = \frac{1}{2}$ 时 X 的条件概率密度.

(2) 求条件概率密度 $f_{Y|X}(y|x)$，特别，分别写出当 $X=\frac{1}{3}, X=\frac{1}{2}$ 时 Y 的条件概率密度.

(3) 求条件概率

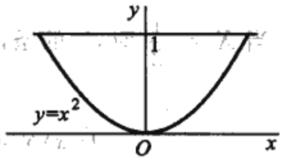
$$P\left\{Y \geqslant \frac{1}{4} \middle| X=\frac{1}{2}\right\}, \quad P\left\{Y \geqslant \frac{3}{4} \middle| X=\frac{1}{2}\right\}.$$

解 在第 9 题中，有(如题 3.9 图)

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{21}{4}x^2 y, & x^2<y<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

$$f_X(x)=\int_{x^2}^{1}\frac{21}{4}x^2 y\mathrm{d}y=\frac{21}{8}x^2 y^2\Big|_{y=x^2}^{y=1}$$

$$=\frac{21}{8}x^2(1-x^4), \quad -1 \leqslant x \leqslant 1.$$



题 3.9 图

$$f_Y(y)=\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}\frac{21}{4}x^2 y\mathrm{d}x=\frac{7}{4}x^3 y\Big|_{x=-\sqrt{y}}^{x=\sqrt{y}}$$

$$=\frac{7}{2}y^{5/2}, \quad 0 \leqslant y \leqslant 1.$$

边缘概率密度为

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{21}{8}x^2(1-x^4), & -1 \leqslant x \leqslant 1,\\ 0 & 其他.\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{7}{2}y^{5/2}, & 0 \leqslant y \leqslant 1,\\ 0 & 其他.\end{cases}$$

(1) 当 $0<y \leqslant 1$ 时，

$$f_{X|Y}(x|y)=\begin{cases}\frac{(21/4)x^2 y}{(7/2)y^{5/2}}=\frac{3}{2}x^2 y^{-3/2}, & -\sqrt{y}<x<\sqrt{y},\\ 0, & x 取其他值.\end{cases}$$

当 $Y=\frac{1}{2}$ 时的条件概率密度可自上式中令 $y=\frac{1}{2}$ 而得到：

$$f_{X|Y}\left(x \middle| y=\frac{1}{2}\right)=\begin{cases}3\sqrt{2}x^2, & -\frac{\sqrt{2}}{2}<x<\frac{\sqrt{2}}{2},\\ 0, & x 取其他值.\end{cases}$$

(2) 当 $-1<x<1$ 时，

$$f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\dfrac{(21/4)x^2y}{(21/8)x^2(1-x^4)}=\dfrac{2y}{1-x^4}, & x^2<y<1,\\ 0, & y\text{ 取其他值}.\end{cases}$$

当 $X=\dfrac{1}{3}$ 时，Y 的条件概率密度为

$$f_{Y|X}(y|x=\frac{1}{3})=\begin{cases}\dfrac{81}{40}y, & \dfrac{1}{9}<y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

当 $X=\dfrac{1}{2}$ 时，Y 的条件概率密度为

$$f_{Y|X}(y|x=\frac{1}{2})=\begin{cases}\dfrac{32}{15}y, & \dfrac{1}{4}<y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(3) $P\{Y\geqslant\frac{1}{4}\Big|X=\frac{1}{2}\}=\int_{\frac{1}{4}}^{1}f_{Y|X}(y\Big|\frac{1}{2})\mathrm{d}y=1.$

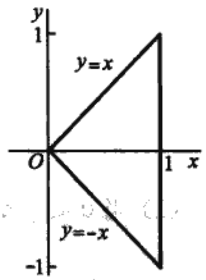
$$P\{Y\geqslant\frac{3}{4}\Big|X=\frac{1}{2}\}=\int_{\frac{3}{4}}^{1}f_{Y|X}(y\Big|\frac{1}{2})\mathrm{d}y=\frac{7}{15}.$$

14. 设随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & |y|<x,0<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求条件概率密度 $f_{Y|X}(y|x)$，$f_{X|Y}(x|y)$.

解 如题 3.14 图，



题 3.14 图

$$f_X(x)=\begin{cases}\int_{-x}^{x}1\mathrm{d}y=2x, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}\int_{y}^{1}1\mathrm{d}x=1-y, & 0<y<1,\\ \int_{-y}^{1}1\mathrm{d}x=1+y, & -1<y\leqslant 0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

当 $0<y<1$ 时，

$$f_{X|Y}(x|y)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-y}, & y<x<1,\\ 0, & x\text{ 取其他值}.\end{cases}$$

当 $-1<y\leqslant 0$ 时，

$$f_{X|Y}(x|y)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+y}, & -y<x<1,\\ 0, & x\text{ 取其他值}.\end{cases}$$

也可写成

$$f_Y(y)=\begin{cases}\int_{|y|}^{1}1\cdot \mathrm{d}x=1-|y|, & |y|<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

因此，当 $|y|<1$ 时，

$$f_{X|Y}(x|y)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-|y|}, & |y|<x<1,\\ 0, & x\text{ 取其他值}.\end{cases}$$

当 $0<x<1$ 时，

$$f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2x}, & |y|<x,\\ 0, & y\text{ 取其他值}.\end{cases}$$

15. 设随机变量 $X\sim U(0,1)$，当给定 $X=x$ 时，随机变量 Y 的条件概率密度为 $f_{Y|X}(y\mid x)=\begin{cases}x, & 0<y<\dfrac{1}{x},\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

(1) 求 X 和 Y 的联合概率密度 $f(x,y)$.

(2) 求边缘密度 $f_Y(y)$，并画出它的图形.

(3) 求 $P\{X>Y\}$.

解　(1) 因 $f(x,y)=f_{Y|X}(y\mid x)f_X(x)$，

今

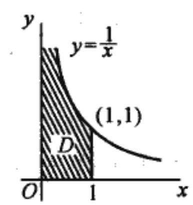
$$f_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

故

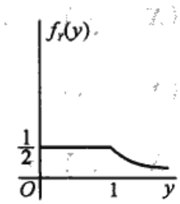
$$f(x,y)=\begin{cases}x, & 0<y<\dfrac{1}{x},0<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

$f(x,y)$ 仅在区域 $D:\{(x,y)\mid 0<x<1,0<y<\dfrac{1}{x}\}$ 上不等于零，如题 3.15 图 1.

(2) 如题 3.15 图 2 有，



题 3.15 图 1



题 3.15 图 2

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\mathrm{d}x$$
$$=\begin{cases}\int_0^1 x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}, & 0<y<1,\\ \int_0^{1/y}x\mathrm{d}x=\frac{1}{2y^2}, & 1\leqslant y<\infty,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

即

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & 0<y<1,\\ \frac{1}{2y^2}, & 1\leqslant y<\infty,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(3) $P\{X>Y\}=\iint\limits_G f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}y\int_y^1 x\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{1}{2}(1-y^2)\mathrm{d}y=\frac{1}{3}.$

16. (1) 问第 1 题中的随机变量 X 和 Y 是否相互独立?

(2) 问第 14 题中的随机变量 X 和 Y 是否相互独立(需说明理由)?

解 (1) 在放回抽样时,X 和 Y 的联合分布律与边缘分布律如下表:

$Y \backslash X$	0	1	$P\{Y=j\}$
0	$\frac{25}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{5}{6}$
1	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{6}$
$P\{X=i\}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

由于

$$P\{X=0,Y=0\}=\frac{25}{36}=P\{X=0\}P\{Y=0\},$$
$$P\{X=0,Y=1\}=\frac{5}{36}=P\{X=0\}P\{Y=1\},$$
$$P\{X=1,Y=0\}=\frac{5}{36}=P\{X=1\}P\{Y=0\},$$
$$P\{X=1,Y=1\}=\frac{1}{36}=P\{X=1\}P\{Y=1\},$$

故 X 与 Y 相互独立.

不放回抽样时,X 和 Y 的联合分布律与边缘分布律如下表:

$Y \backslash X$	0	1	$P\{Y=j\}$
0	$\frac{45}{66}$	$\frac{10}{66}$	$\frac{5}{6}$
1	$\frac{10}{66}$	$\frac{1}{66}$	$\frac{1}{6}$
$P\{X=i\}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

由于 $P\{X=0,Y=0\}=\frac{15}{22}\neq P\{X=0\}P\{Y=0\}$，即知 X 和 Y 不是相互独立的.

(2) 在第 14 题中有(见第 14 题解答)：

$$f_X(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}1-|y|, & |y|<1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

而
$$f(x,y)=\begin{cases}1, & |y|<x,0<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

在区域 G：$\{(x,y)\mid |y|<x,0<x<1\}$ 上 $f(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y)$，故 X 与 Y 不是相互独立的.

17. (1) 设随机变量 (X,Y) 具有分布函数

$$F(x,y)=\begin{cases}(1-e^{-\alpha x})y, & x\geqslant 0,0\leqslant y\leqslant 1,\\ 1-e^{-\alpha x}, & x\geqslant 0,y>1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}\quad \alpha>0,$$

证明 X,Y 相互独立.

(2) 设随机变量 (X,Y) 具有分布律

$P\{X=x,Y=y\}=p^2(1-p)^{x+y-2}$，$0<p<1$，$x,y$ 均为正整数，

问 X,Y 是否相互独立.

解 (1) $F_X(x)=F(x,\infty)=\begin{cases}1-e^{-\alpha x}, & x\geqslant 0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

$$F_Y(y)=F(\infty,y)=\begin{cases}y, & 0\leqslant y\leqslant 1,\\ 1, & y>1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

因为对于所有的 x,y 都有 $F(x,y)=F_X(x)F_Y(y)$，故 X,Y 相互独立.

(2) $P\{X=x\}=\sum_{y=1}^{\infty}p^2(1-p)^{x+y-2}=p^2(1-p)^{x-1}\sum_{y=1}^{\infty}(1-p)^{y-1}$

$$= p^2(1-p)^{x-1}\frac{1}{1-(1-p)}$$

$$= p(1-p)^{x-1}, x=1,2,\cdots, \text{其中 } 0<p<1.$$

同理

$$P\{Y=y\}=p(1-p)^{y-1}, y=1,2,\cdots, \text{其中 } 0<p<1.$$

因为对于所有正整数 x,y 都有

$$P\{X=x,Y=y\}=P\{X=x\}P\{Y=y\},$$

故 X,Y 相互独立.

18. 设 X 和 Y 是两个相互独立的随机变量，X 在区间 $(0,1)$ 上服从均匀分布，Y 的概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-y/2}, & y>0,\\ 0, & y\leqslant 0.\end{cases}$$

(1) 求 X 和 Y 的联合概率密度.

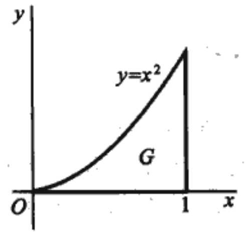
(2) 设含有 a 的二次方程为 $a^2+2Xa+Y=0$，试求 a 有实根的概率.

解 (1) 因 X 的概率密度为

$$f_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

且 X 和 Y 相互独立，故 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-y/2}, & 0<x<1, y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$



题 3.18 图

(2) a 的二次方程 $a^2+2Xa+Y=0$ 有实根的充要条件为判别式 $\Delta=4X^2-4Y\geqslant 0$，亦即

$$X^2\geqslant Y.$$

而

$$P\{X^2\geqslant Y\}=P\{(X,Y)\in G\},$$

其中 G 由曲线 $y=x^2, y=0, x=1$ 所围成(如题 3.18 图)，即有

$$P\{X^2\geqslant Y\}=\iint_G f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{x^2}\frac{1}{2}e^{-y/2}\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1[-e^{-y/2}]_0^{x^2}\mathrm{d}x=\int_0^1[1-e^{-x^2/2}]\mathrm{d}x$$

$$=1-\int_0^1 e^{-x^2/2}\mathrm{d}x=1-\sqrt{2\pi}[\Phi(1)-\Phi(0)]$$

$$=1-\sqrt{2\pi}(0.8413-0.5)=0.1445.$$

19. 进行打靶，设弹着点 $A(X,Y)$ 的坐标 X 和 Y 相互独立，且都服从 $N(0,1)$ 分布，规定

点 A 落在区域 $D_1=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$ 得 2 分;

点 A 落在 $D_2=\{(x,y)\mid 1<x^2+y^2\leqslant 4\}$ 得 1 分;

点 A 落在 $D_3=\{(x,y)\mid x^2+y^2>4\}$ 得 0 分.

以 Z 记打靶的得分.写出 X,Y 的联合概率密度,并求 Z 的分布律.

解　由题设知 X,Y 的概率密度为

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2},\quad -\infty<x<\infty,$$

$$f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-y^2/2},\quad -\infty<y<\infty,$$

且知 X 和 Y 相互独立,故 X 和 Y 的联合概率密度为

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)},-\infty<x<\infty,-\infty<y<\infty.$$

$$\begin{aligned}P\{(X,Y)\in D_1\}&=\iint_{D_1}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&\xlongequal{\text{用极坐标}}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\frac{1}{2\pi}e^{-r^2/2}r\mathrm{d}r\\&=2\pi\times\frac{1}{2\pi}[-e^{-r^2/2}]\Big|_0^1=1-e^{-1/2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P\{(X,Y)\in D_2\}&=\iint_{D_2}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_1^2\frac{1}{2\pi}e^{-r^2/2}r\mathrm{d}r\\&=-e^{-r^2/2}\Big|_1^2=e^{-1/2}-e^{-2},\end{aligned}$$

$$P\{(X,Y)\in D_3\}=1-(1-e^{-1/2})-(e^{-1/2}-e^{-2})=e^{-2},$$

故 Z 的分布律为

Z	0	1	2
p_k	e^{-2}	$e^{-1/2}-e^{-2}$	$1-e^{-1/2}$

20. 设 X 和 Y 是相互独立的随机变量,其概率密度分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0,\\0, & x\leqslant 0,\end{cases}\quad f_Y(y)=\begin{cases}\mu e^{-\mu y}, & y>0,\\0, & y\leqslant 0,\end{cases}$$

其中 $\lambda>0,\mu>0$ 是常数.引入随机变量

$$Z=\begin{cases}1, & \text{当 } X\leqslant Y,\\0, & \text{当 } X>Y.\end{cases}$$

(1) 求条件概率密度 $f_{X|Y}(x\mid y)$.

(2) 求 Z 的分布律和分布函数.

解　由于 X 和 Y 相互独立，(X,Y) 的概率密度 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$，即有

$$f(x,y)=\begin{cases}\lambda\mu e^{-\lambda x-\mu y}, & x>0,y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(1) 当 $y>0$ 时，有

$$f_{X|Y}(x|y)=f_X(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(2) $$P\{X\leqslant Y\}=\iint\limits_{G:x\leqslant y}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\infty}\mathrm{d}x\int_x^{\infty}\lambda\mu e^{-\lambda x-\mu y}\mathrm{d}y$$
$$=\int_0^{\infty}\left[-\lambda e^{-\lambda x-\mu y}\right]\Big|_{y=x}^{y=\infty}\mathrm{d}x$$
$$=\int_0^{\infty}\lambda e^{-(\lambda+\mu)x}\mathrm{d}x=\frac{\lambda}{\lambda+\mu},$$

而 $$P\{X>Y\}=1-P\{X\leqslant Y\}=\frac{\mu}{\lambda+\mu}.$$

故 Z 的分布律为

Z	0	1
p_k	$\frac{\mu}{\lambda+\mu}$	$\frac{\lambda}{\lambda+\mu}$

Z 的分布函数为

$$F_Z(z)=\begin{cases}0, & z<0,\\ \dfrac{\mu}{\lambda+\mu}, & 0\leqslant z<1,\\ 1, & z\geqslant 1.\end{cases}$$

21. 设随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}x+y, & 0<x<1,0<y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

分别求(1) $Z=X+Y$，(2) $Z=XY$ 的概率密度.

解　记所需求的概率密度函数为 $f_Z(z)$.

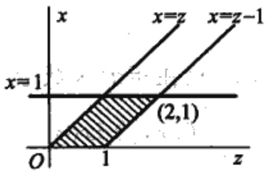
$$f(x,y)=\begin{cases}x+y, & 0<x<1,\quad 0<y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(1) $Z=X+Y$

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,z-x)\mathrm{d}x. \tag{$*_1$}$$

仅当被积函数 $f(x,z-x)\neq 0$ 时，$f_Z(z)\neq 0$. 我们先找出使 $f(x,z-x)\neq 0$ 的 x,z 的变化范围. 从而可定出($*_1$)中积分(相对于不同 z 的值)的积分限，算出这一积分就可以了.

易知，仅当 $\begin{cases}0<x<1,\\0<z-x<1,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}0<x<1,\\z-1<x<z,\end{cases}$ 时，($*_1$)的被积函数不等于零，参考题 3.21 图 1，即得



题 3.21 图 1

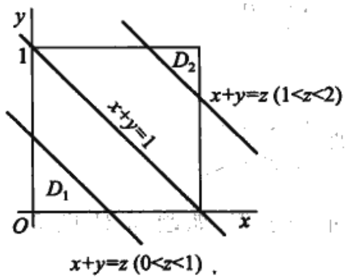
$$
\begin{aligned}
f_Z(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x,z-x)\mathrm{d}x \\
&= \begin{cases}\displaystyle\int_0^z [x+(z-x)]\mathrm{d}x, & 0<z<1,\\ \displaystyle\int_{z-1}^1 [x+(z-x)]\mathrm{d}x, & 1\leqslant z<2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}
\end{aligned}
$$

即

$$
f_Z(z)=\begin{cases}z^2, & 0<z<1,\\ 2z-z^2, & 1\leqslant z<2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}
$$

本题也可利用分布函数来求 $f_Z(z)$，如下所示.

记 $Z=X+Y$ 的分布函数为 $F_Z(z)$，参考题 3.21 图 2 知



题 3.21 图 2

当 $z \leqslant 0$ 时，$F_Z(z) = 0$.

当 $0 < z < 1$ 时，

$$F_Z(z) = P\{Z \leqslant z\} = P\{X+Y \leqslant z\}$$
$$= \iint\limits_{D_1} (x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$= \int_0^z \mathrm{d}y \int_0^{z-y} (x+y)\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{3}z^3.$$

当 $1 \leqslant z < 2$ 时，因 $f(x,y)$ 只在矩形区域上 $\neq 0$，故

$$F_Z(z) = P\{Z \leqslant z\} = 1 - \iint\limits_{D_2} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$= 1 - \int_{z-1}^1 \mathrm{d}y \int_{z-y}^1 (x+y)\mathrm{d}x = -\frac{1}{3} + z^2 - \frac{1}{3}z^3.$$

当 $z \geqslant 2$ 时，$F_Z(z) = 1$.

故 $Z = X+Y$ 的分布函数为

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z < 0, \\ \frac{1}{3}z^3, & 0 < z < 1, \\ -\frac{1}{3} + z^2 - \frac{1}{3}z^3, & 1 \leqslant z < 2, \\ 1, & z \geqslant 2. \end{cases}$$

由此知 $Z = X+Y$ 的概率密度函数为

$$f_Z(z) = \begin{cases} z^2, & 0 < z < 1, \\ 2z - z^2, & 1 \leqslant z < 2, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

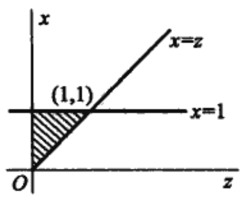
(2) $Z = XY$

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|x|} f\left(x, \frac{z}{x}\right)\mathrm{d}x.$$

易知仅当

$$\begin{cases} 0 < x < 1, \\ 0 < \frac{z}{x} < 1, \end{cases} \quad \text{即} \begin{cases} 0 < x < 1, \\ 0 < z < x, \end{cases}$$

时，上述积分的被积函数不等于零，如题 3.21 图 3，即得



题 3.21 图 3

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|x|} f\left(x, \frac{z}{x}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\begin{cases}\int_z^1 \frac{1}{x}(x+\frac{z}{x})\mathrm{d}x, & 0<z<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

得

$$f_Z(z)=\begin{cases}2(1-z), & 0<z<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

22. 设 X 和 Y 是两个相互独立的随机变量,其概率密度分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-y}, & y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求随机变量 $Z=X+Y$ 的概率密度.

解法(i)　利用公式

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-y)f_Y(y)\mathrm{d}y,$$

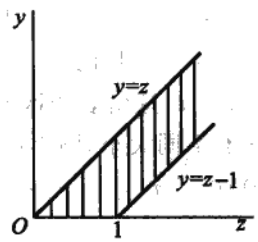
按函数 f_X,f_Y 的定义知,仅当

$$\begin{cases}0\leqslant z-y\leqslant 1,\\ y>0,\end{cases}$$

即

$$z-1\leqslant y\leqslant z, y>0$$

时,上述积分的被积函数才不等于 0,如题 3.22 图 1 知



题 3.22 图 1

$$f_Z(z)=\begin{cases}\int_0^z f_X(z-y)f_Y(y)\mathrm{d}y=\int_0^z 1\cdot \mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y, & 0<z<1,\\ \int_{z-1}^z f_X(z-y)f_Y(y)\mathrm{d}y=\int_{z-1}^z 1\cdot \mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y, & z\geqslant 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

即有

$$f_Z(z)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-z}, & 0<z<1,\\ (\mathrm{e}-1)\mathrm{e}^{-z}, & z\geqslant 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

若利用公式

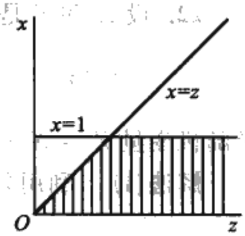
$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty}f_X(x)f_Y(z-x)\mathrm{d}x,$$

知仅当

$$\begin{cases}0\leqslant x\leqslant 1,\\ z-x>0,\end{cases}\quad \text{即}\quad \begin{cases}0\leqslant x\leqslant 1,\\ x<z\end{cases}$$

时，上述积分的被积函数才不会等于0，如题3.22图2知

$$f_Z(z)=\begin{cases}\int_0^z f_X(x)f_Y(z-x)\mathrm{d}x=\int_0^z \mathrm{e}^{-(z-x)}\mathrm{d}x, & 0<z<1,\\ \int_0^1 f_X(x)f_Y(z-x)\mathrm{d}x=\int_0^1 \mathrm{e}^{-(z-x)}\mathrm{d}x, & z\geqslant 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$



题3.22图2

即有

$$f_Z(z)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-z}, & 0<z<1,\\ (\mathrm{e}-1)\mathrm{e}^{-z}, & z\geqslant 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

解法(ii) 先求出 $Z=X+Y$ 的分布函数 $F_Z(z)$，然后将 $F_Z(z)$ 关于 z 求导从而得到 $f_Z(z)$.

X 和 Y 的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-y}, & 0\leqslant x\leqslant 1, y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

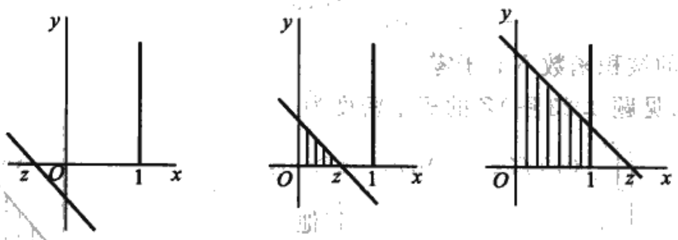
如果 $x+y\leqslant z$，那么 $y\leqslant z-x$，这就表明区域 $G:\{(x,y)\mid x+y\leqslant z\}$ 位于直线 $x+y=z$ 的下方. 现就 z 的不同大小，画出区域 $G:\{(x,y)\mid x+y\leqslant z\}$ 与 $f(x,y)\neq 0$ 的区域 $D:\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1, y>0\}$ 的公共部分（有阴影线的部分）如题3.22图3所示.

当 $z\leqslant 0$ 时，如题3.22图3(1)，有

$$\begin{aligned}F_Z(z)&=P\{Z\leqslant z\}=P\{X+Y\leqslant z\}\\ &=\iint\limits_{x+y\leqslant z}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{x+y\leqslant z}0\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0,\end{aligned}$$

当 $0<z<1$ 时，如题3.22图3(2)，有

$$\begin{aligned}F_Z(z)&=P\{Z\leqslant z\}=P\{X+Y\leqslant z\}=\iint\limits_{x+y\leqslant z}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &=\int_0^z\mathrm{d}x\int_0^{z-x}\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y=\int_0^z[1-\mathrm{e}^{-(z-x)}]\mathrm{d}x=z-1+\mathrm{e}^{-z},\end{aligned}$$



(1) $x+y=z\leqslant 0$　　(2) $x+y=z,0<z<1$　　(3) $x+y=z\geqslant 1$

题 3.22 图 3

当 $z\geqslant 1$ 时,如题 3.22 图 3(3),有

$$F_Z(z)=P\{Z\leqslant z\}=P\{X+Y\leqslant z\}=\iint\limits_{x+y\leqslant z} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{z-x}\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y=\int_0^1[1-\mathrm{e}^{-(z-x)}]\mathrm{d}x=1-\mathrm{e}^{-z+1}+\mathrm{e}^{-z},$$

得

$$F_Z(z)=\begin{cases}0, & z\leqslant 0,\\ z-1+\mathrm{e}^{-z}, & 0<z<1,\\ 1-\mathrm{e}^{-z+1}+\mathrm{e}^{-z}, & z\geqslant 1.\end{cases}$$

将 $F_Z(z)$ 关于 z 求导数,得到 Z 的概率密度为

$$f_Z(z)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-z}, & 0<z<1,\\ (\mathrm{e}-1)\mathrm{e}^{-z}, & z\geqslant 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

23. 某种商品一周的需求量是一个随机变量,其概率密度为

$$f(t)=\begin{cases}t\mathrm{e}^{-t}, & t>0,\\ 0, & t\leqslant 0.\end{cases}$$

设各周的需求量是相互独立的.求(1) 两周,(2) 三周的需求量的概率密度.

解 设某种商品在第 i 周的需求量为 $X_i(i=1,2,3)$,由题设 X_1,X_2,X_3 相互独立,并且有

$$f_{X_i}(t)=f(t)=\begin{cases}t\mathrm{e}^{-t}, & t>0,\\ 0, & t\leqslant 0.\end{cases}$$

(1) 记两周的需求量为 Z,即 $Z=X_1+X_2$,则 Z 的概率密度为

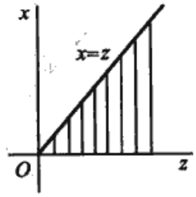
$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)f(z-x)\mathrm{d}x.$$

由 $f(t)$ 的定义,知仅当

$$\begin{cases} x > 0, \\ z - x > 0, \end{cases} \quad \text{亦即} \quad \begin{cases} x > 0, \\ x < z \end{cases}$$

时上述积分的被积函数不等于零，

于是(参见题 3.23 图)Z 的概率密度为



题 3.23 图

$$f_Z(z) = \begin{cases} \int_0^z f(x) f(z-x) \mathrm{d}x, & z > 0, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \int_0^z x\mathrm{e}^{-x} (z-x) \mathrm{e}^{-(z-x)} \mathrm{d}x, & z > 0, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \mathrm{e}^{-z} \int_0^z (xz - x^2) \mathrm{d}x = \dfrac{z^3 \mathrm{e}^{-z}}{3!}, & z > 0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

(2) 记三周的需求量为 W，即 $W = Z + X_3$，因 X_1, X_2, X_3 相互独立，故 $Z = X_1 + X_2$ 与 X_3 相互独立，从而 W 的概率密度为

$$f_W(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f_Z(x) f_{X_3}(u-x) \mathrm{d}x.$$

由上述 $f_Z(z)$ 及 $f(t)$ 的定义，知仅当

$$\begin{cases} x > 0, \\ u - x > 0, \end{cases} \quad \text{亦即} \quad \begin{cases} x > 0, \\ x < u \end{cases}$$

时，上述积分的被积函数不等于零，于是 W 的概率密度为

$$f_W(u) = \begin{cases} \int_0^u f_Z(x) f_{X_3}(u-x) \mathrm{d}x, & u > 0, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \int_0^u \dfrac{x^3 \mathrm{e}^{-x}}{3!} (u-x) \mathrm{e}^{-(u-x)} \mathrm{d}x, & u > 0, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{\mathrm{e}^{-u}}{3!} \int_0^u (x^3 u - x^4) \mathrm{d}x = \dfrac{u^5 \mathrm{e}^{-u}}{5!}, & u > 0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

注：本题中我们假设第一周的需求量为 X_1，第二周的需求量为 X_2. 两周的需求量为 $X_1 + X_2$，注意到，X_1, X_2 是相互独立的随机变量，虽然它们具有相同的分布，但它们的取值是相互独立的，因而两周的需求量不能写成 $2X$，而必须写成 $X_1 + X_2$.

24. 设随机变量(X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}(x+y)\mathrm{e}^{-(x+y)}, & x>0,y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(1) 问 X 和 Y 是否相互独立?

(2) 求 $Z=X+Y$ 的概率密度.

解 (1) $f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\int_0^{\infty}\dfrac{1}{2}(x+y)\mathrm{e}^{-(x+y)}\mathrm{d}y$

$$=\frac{1}{2}(x+y)(-\mathrm{e}^{-(x+y)})\Big|_{y=0}^{y=\infty}+\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-(x+y)}\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2}x\mathrm{e}^{-x}-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-(x+y)}\Big|_{y=0}^{y=\infty}=\frac{x+1}{2}\mathrm{e}^{-x},\quad x>0,$$

故 X 的概率密度为

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{x+1}{2}\mathrm{e}^{-x}, & x>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

同理,Y 的概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{y+1}{2}\mathrm{e}^{-y}, & y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

显然 $f_X(x)f_Y(y)\neq f(x,y)$,所以 X,Y 不相互独立.

(2) 由教材第三章公式(5.1)可得 $Z=X+Y$ 的概率密度 $f_Z(z)$ 为

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty}f(z-y,y)\mathrm{d}y,$$

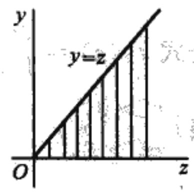
上述被积函数仅当

$$\begin{cases}z-y>0,\\ y>0,\end{cases}\quad\text{即}\quad\begin{cases}y<z,\\ y>0\end{cases}$$

时才不会等于0,由题3.24图得

$$f_Z(z)=\begin{cases}\int_0^z f(z-y,y)\mathrm{d}y, & z>0,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\int_0^z \dfrac{1}{2}(z-y+y)\mathrm{e}^{-(z-y+y)}\mathrm{d}y, & z>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$



题 3.24 图

即有

$$f_Z(z)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\int_0^z z\mathrm{e}^{-z}\mathrm{d}y=\dfrac{1}{2}z^2\mathrm{e}^{-z}, & z>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

25. 设随机变量 X,Y 相互独立，且具有相同的分布，它们概率密度均为

$$f(x)=\begin{cases} e^{1-x}, & x>1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

求 $Z=X+Y$ 的概率密度.

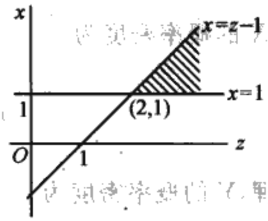
解　由卷积公式

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z-x)\,dx,$$

现在
$$f_X(x)=\begin{cases} e^{1-x}, & x>1, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases} e^{1-y}, & y>1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

仅当 $\begin{cases} x>1, \\ z-x>1, \end{cases}$　即 $\begin{cases} x>1, \\ x<z-1 \end{cases}$ 时，上述积分的被积函数不等于零，由题 3.25 图即得



题 3.25 图

$$f_Z(z)=\begin{cases} \int_1^{z-1} e^{1-x} e^{1-(z-x)}\,dx = \int_1^{z-1} e^{2-z}\,dx, & z>2, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

得
$$f_Z(z)=\begin{cases} e^{2-z}(z-2), & z>2, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

26. 设随机变量 X,Y 相互独立，它们的概率密度均为

$$f(x)=\begin{cases} e^{-x}, & x>0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

求 $Z=\dfrac{Y}{X}$ 的概率密度.

解　$f_X(x)=\begin{cases} e^{-x}, & x>0, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$　　$f_Y(y)=\begin{cases} e^{-y}, & y>0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$

由公式 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty} |x| f_X(x) f_Y(xz)\,dx$，

仅当 $\begin{cases} x>0, \\ xz>0, \end{cases}$　即 $\begin{cases} x>0, \\ z>0 \end{cases}$ 时，上述积分的被积函数不等于零，于是当 $z>0$ 时有

$$f_Z(z)=\int_0^{\infty} x e^{-x} e^{-xz}\,dx=\int_0^{\infty} x e^{-x(z+1)}\,dx=\frac{1}{(z+1)^2}.$$

当 $z\leqslant 0$ 时 $f_Z(z)=0$，即

$$f_Z(z)=\begin{cases} \dfrac{1}{(z+1)^2}, & z>0 \\ 0, & z\leqslant 0. \end{cases}$$

27. 设随机变量 X,Y 相互独立. 它们都在区间 $(0,1)$ 上服从均匀分布. A 是以 X,Y 为边长的矩形的面积,求 A 的概率密度.

解 X,Y 的概率密度分别为

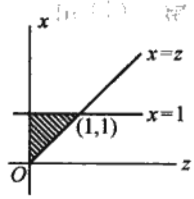
$$f_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}1, & 0<y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

面积 $A=XY$ 的概率密度为

$$\begin{aligned}f_Z(z)&=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{|x|}f\left(x,\frac{z}{x}\right)\mathrm{d}x\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{|x|}f_X(x)f_Y\left(\frac{z}{x}\right)\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

仅当 $\begin{cases}0<x<1,\\ 0<\dfrac{z}{x}<1,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}0<x<1,\\ x>z>0\end{cases}$

时上述积分的被积函数不等于零,由题 3.27 图得



题 3.27 图

$$f_Z(z)=\begin{cases}\displaystyle\int_z^1\frac{1}{x}\mathrm{d}x=-\ln z, & 0<z<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

28. 设 X,Y 是相互独立的随机变量,它们都服从正态分布 $N(0,\sigma^2)$. 试验证随机变量 $Z=\sqrt{X^2+Y^2}$ 的概率密度为

$$f_Z(z)=\begin{cases}\dfrac{z}{\sigma^2}\mathrm{e}^{-z^2/(2\sigma^2)}, & z\geqslant 0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

我们称 Z 服从参数为 $\sigma\ (\sigma>0)$ 的瑞利(Rayleigh)分布.

证 先来求 Z 的分布函数 $F_Z(z)$,由于 $Z=\sqrt{X^2+Y^2}\geqslant 0$,知当 $z<0$ 时,$F_Z(z)=0$. 当 $z\geqslant 0$ 时有

$$\begin{aligned}F_Z(z)&=P\{Z\leqslant z\}=P\{\sqrt{X^2+Y^2}\leqslant z\}\\&=P\{X^2+Y^2\leqslant z^2\}=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant z^2}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant z^2}\frac{1}{2\pi\sigma^2}\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)/(2\sigma^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&\xlongequal{\text{用极坐标}}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^z\frac{1}{2\pi\sigma^2}\mathrm{e}^{-r^2/(2\sigma^2)}r\mathrm{d}r\\&=2\pi\cdot\frac{1}{2\pi}\left[-\mathrm{e}^{-r^2/(2\sigma^2)}\right]\Big|_0^z=1-\mathrm{e}^{-z^2/(2\sigma^2)}.\end{aligned}$$

将 $F_Z(z)$ 关于 z 求导数,得 Z 的概率密度为

$$f_Z(z)=\begin{cases}\dfrac{z}{\sigma^2}e^{-z^2/(2\sigma^2)}, & z>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

29. 设随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}be^{-(x+y)}, & 0<x<1,0<y<\infty,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(1) 试确定常数b.

(2) 求边缘概率密度$f_X(x),f_Y(y)$.

(3) 求函数$U=\max\{X,Y\}$的分布函数.

解 (1) 由

$$1=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\infty}\int_0^1 be^{-(x+y)}\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

$$=b\left[\int_0^{\infty}e^{-y}\mathrm{d}y\right]\left[\int_0^1 e^{-x}\mathrm{d}x\right]=b(1-e^{-1}),$$

得

$$b=\frac{1}{1-e^{-1}}.$$

(2) $$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\begin{cases}\dfrac{1}{1-e^{-1}}\displaystyle\int_0^{\infty}e^{-x}e^{-y}\mathrm{d}y=\dfrac{e^{-x}}{1-e^{-1}}, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\mathrm{d}x=\begin{cases}\dfrac{1}{1-e^{-1}}\displaystyle\int_0^1 e^{-x}e^{-y}\mathrm{d}x=e^{-y}, & y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(3) 由(2)知$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$，故X,Y相互独立. 分别记$U=\max\{X,Y\}$，X和Y的分布函数为$F_U(u),F_X(x)$和$F_Y(y)$，则有

$$F_U(u)=F_X(u)F_Y(u). \tag{A}$$

由(2)知

$$F_X(u)=\int_{-\infty}^{u}f_X(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}0, & u<0,\\ \displaystyle\int_0^u\frac{e^{-x}}{1-e^{-1}}\mathrm{d}x, & 0\leqslant u<1,\\ 1 & u\geqslant 1\end{cases}$$

$$=\begin{cases}0, & u<0,\\ \dfrac{1-e^{-u}}{1-e^{-1}}, & 0\leqslant u<1,\\ 1, & u\geqslant 1.\end{cases}$$

$$F_Y(u)=\int_{-\infty}^{u}f_Y(y)\mathrm{d}y=\begin{cases}0, & u<0,\\ \int_0^u \mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y, & u\geqslant 0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}0, & u<0,\\ 1-\mathrm{e}^{-u}, & u\geqslant 0.\end{cases}$$

将 $F_X(u),F_Y(u)$ 的表达式代入(A)式，得到 $U=\max\{X,Y\}$ 的分布函数为

$$F_U(u)=\begin{cases}0, & u<0,\\ \dfrac{(1-\mathrm{e}^{-u})^2}{1-\mathrm{e}^{-1}}, & 0\leqslant u<1,\\ 1-\mathrm{e}^{-u}, & u\geqslant 1.\end{cases}$$

30. 设某种型号的电子元件的寿命(以小时计)近似地服从正态分布 $N(160,20^2)$，随机地选取 4 只，求其中没有一只寿命小于 180 的概率.

解　以 $X_i(i=1,2,3,4)$ 记所选取的第 i 只元件的寿命，由题设一只元件寿命小于 180 小时的概率为

$$P\{X_i\leqslant 180\}=P\left\{\frac{X_i-160}{20}\leqslant\frac{180-160}{20}\right\}$$

$$=\Phi\left(\frac{180-160}{20}\right)=\Phi(1)=0.841\ 3.$$

可认为 X_1,X_2,X_3,X_4 相互独立，故选取的 4 只元件没有一只寿命小于 180 小时的概率为

$$\prod_{i=1}^{4}[1-P\{X_i\leqslant 180\}]=(1-0.8413)^4=0.000\ 63.$$

31. 对某种电子装置的输出测量了 5 次，得到结果为 X_1,X_2,X_3,X_4,X_5. 设它们是相互独立的随机变量且都服从参数 $\sigma=2$ 的瑞利分布.

(1) 求 $Z=\max\{X_1,X_2,X_3,X_4,X_5\}$ 的分布函数；

(2) 求 $P\{Z>4\}$.

解　参数 $\sigma=2$ 的瑞利分布，其概率密度为

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{4}\mathrm{e}^{-x^2/8}, & x>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

设其分布函数为 $F_X(x)$. 则当 $x<0$ 时，$F_X(x)=0$，当 $x\geqslant 0$ 时有

$$F_X(x)=\int_0^x\frac{x}{4}\mathrm{e}^{-x^2/8}\mathrm{d}x=-\mathrm{e}^{-x^2/8}\Big|_0^x=1-\mathrm{e}^{-x^2/8}.$$

即有

$$F_X(x)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-x^2/8}, & x\geqslant 0,\\ 0, & x<0.\end{cases}$$

(1) 因 X_1,X_2,X_3,X_4,X_5 相互独立，且都服从参数 $\sigma=2$ 的瑞利分布，故 $Z=\max\{X_1,X_2,X_3,X_4,X_5\}$ 的分布函数为

$$F_Z(z)=[F_X(z)]^5=\begin{cases}(1-\mathrm{e}^{-z^2/8})^5, & z\geqslant 0,\\ 0, & z<0.\end{cases}$$

(2) $P\{Z>4\}=1-P\{Z\leqslant 4\}=1-F_Z(4)$

$$=1-(1-\mathrm{e}^{-2})^5=0.516\,7.$$

32. 设随机变量 X,Y 相互独立，且服从同一分布，试证明：

$$P\{a<\min\{X,Y\}\leqslant b\}=[P\{X>a\}]^2-[P\{X>b\}]^2\quad(a\leqslant b).$$

证 由题设 X 和 Y 相互独立，且服从同一分布，以 $F(x)$ 记它们的分布函数，又记 $N=\min\{X,Y\}$ 的分布函数为 $F_N(z)$，则

$$F_N(z)=1-[1-F(z)]^2,$$

于是

$$P\{a<\min\{X,Y\}\leqslant b\}=F_N(b)-F_N(a)=[1-F(a)]^2-[1-F(b)]^2.$$

因

$$P\{X>a\}=1-P\{X\leqslant a\}=1-F(a),$$
$$P\{X>b\}=1-P\{X\leqslant b\}=1-F(b),$$

从而

$$P\{a<\min\{X,Y\}\leqslant b\}=[P\{X>a\}]^2-[P\{X>b\}]^2.$$

33. 设 X,Y 是相互独立的随机变量，其分布律分别为

$$P\{X=k\}=p(k),\quad k=0,1,2,\cdots,$$
$$P\{Y=r\}=q(r),\quad r=0,1,2,\cdots.$$

证明随机变量 $Z=X+Y$ 的分布律为

$$P\{Z=i\}=\sum_{k=0}^{i}p(k)q(i-k),\ i=0,1,2,\cdots.$$

证 随机变量 $Z=X+Y$ 的取值范围为 $0,1,2,\cdots$. 对于非负整数 i，$\{Z=i\}=\{X+Y=i\}$ 可按下列方式分解为若干个两两互不相容的事件之和：

$$\begin{aligned}\{Z=i\}&=\{X+Y=i\}\\&=\{X=0,Y=i\}\cup\{X=1,Y=i-1\}\cup\cdots\\&\quad\cup\{X=k,Y=i-k\}\cup\cdots\cup\{X=i,Y=0\}.\end{aligned}$$

又由 X,Y 的独立性知

$$\begin{aligned}P\{X=k,Y=i-k\}&=P\{X=k\}P\{Y=i-k\}\\&=p(k)q(i-k),\quad k=0,1,2,\cdots,i.\end{aligned}$$

因此

$$P\{Z=i\}=P\Big\{\bigcup_{k=0}^{i}\{X=k,Y=i-k\}\Big\}$$

$$= \sum_{k=0}^{i} P\{X = k, Y = i-k\}$$

$$= \sum_{k=0}^{i} p(k)q(i-k), \quad i = 0,1,2,\cdots.$$

34. 设 X,Y 是相互独立的随机变量，$X \sim \pi(\lambda_1)$，$Y \sim \pi(\lambda_2)$. 证明

$$Z = X+Y \sim \pi(\lambda_1+\lambda_2).$$

证 因 $X \sim \pi(\lambda_1)$，$Y \sim \pi(\lambda_2)$，故

$$p(k) = P\{X = k\} = \frac{\lambda_1^k e^{-\lambda_1}}{k!}, \quad k = 0,1,2,\cdots,$$

$$q(k) = P\{Y = k\} = \frac{\lambda_2^k e^{-\lambda_2}}{k!}, \quad k = 0,1,2,\cdots.$$

而 $Z = X+Y$ 可能取的值为 $0,1,2,\cdots$，且 X,Y 相互独立. 由 33 题得

$$P\{Z = i\} = \sum_{k=0}^{i} \frac{\lambda_1^k \lambda_2^{i-k}}{k!(i-k)!} e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}$$

$$= \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{i!} \sum_{k=0}^{i} \frac{i!}{k!(i-k)!} \lambda_1^k \lambda_2^{i-k}$$

$$= \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{i!} \sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k} \lambda_1^k \lambda_2^{i-k} = \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{i!} (\lambda_1+\lambda_2)^i$$

$$= \frac{(\lambda_1+\lambda_2)^i e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{i!}, \quad i = 0,1,2,\cdots,$$

即 $Z \sim \pi(\lambda_1+\lambda_2)$.

35. 设 X,Y 是相互独立的随机变量，$X \sim b(n_1,p)$，$Y \sim b(n_2,p)$. 证明

$$Z = X+Y \sim b(n_1+n_2,p).$$

证 因 $X \sim b(n_1,p)$，$Y \sim b(n_2,p)$，故

$$p(k) = P\{X = k\} = \binom{n_1}{k} p^k (1-p)^{n_1-k}, \quad k = 0,1,2,\cdots,n_1,$$

$$q(k) = P\{Y = k\} = \binom{n_2}{k} p^k (1-p)^{n_2-k}, \quad k = 0,1,2,\cdots,n_2.$$

而 $Z = X+Y$ 可能取的值为 $0,1,2,\cdots,n_1+n_2$，且 X,Y 相互独立，由 33 题得

$$P\{Z = i\} = \sum_{k=0}^{i} \binom{n_1}{k} p^k (1-p)^{n_1-k} \binom{n_2}{i-k} p^{i-k} (1-p)^{n_2-i+k}$$

$$= \left[\sum_{k=0}^{i} \binom{n_1}{k}\binom{n_2}{i-k}\right] p^i (1-p)^{n_1+n_2-i},$$

$$i = 0,1,2,\cdots,n_1+n_2.$$

又

$$[p+(1-p)]^{n_1+n_2} = [p+(1-p)]^{n_1}[p+(1-p)]^{n_2}$$

$$=\left[\sum_{k=0}^{n_1}\binom{n_1}{k}p^k(1-p)^{n_1-k}\right]\left[\sum_{s=0}^{n_2}\binom{n_2}{s}p^s(1-p)^{n_2-s}\right].$$

比较上式两边展开式中 $p^i(1-p)^{n_1+n_2-i}$ 这一项的系数，知

$$\binom{n_1+n_2}{i}=\sum_{k=0}^{i}\binom{n_1}{k}\binom{n_2}{i-k},$$

从而

$$P\{Z=i\}=\binom{n_1+n_2}{i}p^i(1-p)^{n_1+n_2-i},\quad i=0,1,2,\cdots,n_1+n_2.$$

即

$$Z\sim b(n_1+n_2,p).$$

36. 设随机变量 (X,Y) 的分布律为

$Y \backslash X$	0	1	2	3	4	5
0	0.00	0.01	0.03	0.05	0.07	0.09
1	0.01	0.02	0.04	0.05	0.06	0.08
2	0.01	0.03	0.05	0.05	0.05	0.06
3	0.01	0.02	0.04	0.06	0.06	0.05

(1) 求 $P\{X=2\mid Y=2\}$，$P\{Y=3\mid X=0\}$.

(2) 求 $V=\max\{X,Y\}$ 的分布律.

(3) 求 $U=\min\{X,Y\}$ 的分布律.

(4) 求 $W=X+Y$ 的分布律.

解 (1) $P\{Y=2\}=\sum_{i=0}^{5}P\{X=i,Y=2\}$

$$=0.01+0.03+0.05+0.05+0.05+0.06$$

$$=0.25,$$

$$P\{X=0\}=\sum_{j=0}^{3}P\{X=0,Y=j\}$$

$$=0.00+0.01+0.01+0.01=0.03,$$

故有

$$P\{X=2\mid Y=2\}=\frac{P\{X=2,Y=2\}}{P\{Y=2\}}=\frac{0.05}{0.25}=\frac{1}{5},$$

$$P\{Y=3\mid X=0\}=\frac{P\{X=0,Y=3\}}{P\{X=0\}}=\frac{0.01}{0.03}=\frac{1}{3}.$$

(2) $V=\max\{X,Y\}$ 所有可能的取值为 0,1,2,3,4,5.

$$\{V=i\}=\{\max\{X,Y\}=i\}$$

$$=\{X=i,Y<i\}\cup\{X=i,Y=i\}\cup\{X<i,Y=i\}.$$

上式右边三项两两互不相容,故有

$$\begin{aligned}P\{V=i\} &= P\{\max\{X,Y\}=i\} \\ &= P\{X=i,Y<i\}+P\{X=i,Y=i\}+P\{X<i,Y=i\},\end{aligned}$$

例如

$$\begin{aligned}P\{V=2\} &= P\{X=2,Y=0\}+P\{X=2,Y=1\} \\ &\quad +P\{X=2,Y=2\}+P\{X=0,Y=2\} \\ &\quad +P\{X=1,Y=2\} \\ &= 0.03+0.04+0.05+0.01+0.03=0.16,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P\{V=5\} &= P\{X=5,Y=0\}+P\{X=5,Y=1\} \\ &\quad +P\{X=5,Y=2\}+P\{X=5,Y=3\} \\ &= 0.09+0.08+0.06+0.05=0.28.\end{aligned}$$

即有分布律:

$V=\max\{X,Y\}$	0	1	2	3	4	5
p_k	0	0.04	0.16	0.28	0.24	0.28

(3) $U=\min\{X,Y\}$ 所有可能的取值为 0,1,2,3.

$$\begin{aligned}\{U=i\} &= \{\min\{X,Y\}=i\} \\ &= \{X=i,Y>i\}\cup\{X=i,Y=i\}\cup\{X>i,Y=i\},\end{aligned}$$

$$P\{U=i\}=P\{X=i,Y>i\}+P\{X=i,Y=i\}+P\{X>i,Y=i\}.$$

例如

$$\begin{aligned}P\{U=2\} &= P\{X=2,Y=3\}+P\{X=2,Y=2\} \\ &\quad +P\{X=3,Y=2\}+P\{X=4,Y=2\} \\ &\quad +P\{X=5,Y=2\} \\ &= 0.04+0.05+0.05+0.05+0.06=0.25,\end{aligned}$$

即有

$U=\min\{X,Y\}$	0	1	2	3
p_k	0.28	0.30	0.25	0.17

(4) $W=X+Y$ 所有可能的取值为 0,1,2,3,4,5,6,7,8.

$$\{W=i\}=\{X+Y=i\}=\bigcup_{k=0}^{i}\{X=k,Y=i-k\},$$

$$P\{W=i\}=\sum_{k=0}^{i}P\{X=k,Y=i-k\}.$$

例如

$$P\{W=2\}=P\{X=0,Y=2\}+P\{X=1,Y=1\}+P\{X=2,Y=0\}$$
$$=0.01+0.02+0.03=0.06,$$
$$P\{W=5\}=P\{X=0,Y=5\}+P\{X=1,Y=4\}$$
$$+P\{X=2,Y=3\}+P\{X=3,Y=2\}$$
$$+P\{X=4,Y=1\}+P\{X=5,Y=0\}$$
$$=0+0+0.04+0.05+0.06+0.09=0.24,$$

即有分布律

$W=X+Y$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
p_k	0	0.02	0.06	0.13	0.19	0.24	0.19	0.12	0.05