厦门大学《线性代数 I》课程期中考试卷

学院______年级______姓名________学号________

主考教师：　试卷类型：（A 卷）　2016.11.12

一（10 分）假设矩阵 A 和矩阵 B 可交换，其中 $A=\begin{bmatrix}2&1\\0&2\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}x&y\\z&w\end{bmatrix}$，求所有满足交换条件的矩阵 B.

解　$AB=\begin{bmatrix}2&1\\0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x&y\\z&w\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2x+z&2y+w\\2z&2w\end{bmatrix}$，　$BA=\begin{bmatrix}x&y\\z&w\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1\\0&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2x&x+2y\\2z&z+2w\end{bmatrix}$,

由矩阵 A 和矩阵 B 可交换，即 $AB=BA$ 可得 $z=0,x=w$.因此满足条件的矩阵 B 为

$B=\begin{bmatrix}x&y\\0&x\end{bmatrix}$, x,y 为任意常数.

二（10 分）. 设 $|A|=\begin{vmatrix}3&-5&2&1\\1&1&0&-5\\-1&3&1&3\\2&-4&-1&-3\end{vmatrix}$ 的第 i 行第 j 列元素 a_{ij} 的代数余子式为 A_{ij}，计算

$A_{11}+A_{12}+A_{13}+A_{14}$.

解　$A_{11}+A_{12}+A_{13}+A_{14}=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&1&0&-5\\-1&3&1&3\\2&-4&-1&-3\end{vmatrix}=4$

三（10 分）. 已知 $A=\begin{bmatrix}1&2&3&0\\2&2&1&0\\3&4&3&0\\0&0&0&8\end{bmatrix}$,求 A^{-1}. 　答案：$A^{-1}=\begin{bmatrix}1&3&-2&0\\-\frac{3}{2}&-3&\frac{5}{2}&0\\1&1&-1&0\\0&0&0&\frac{1}{8}\end{bmatrix}$.

四（10 分）. 当参数 a,b 满足什么条件时，线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=-1,\\4x_1+3x_2+5x_3-x_4=-1,\\ax_1+x_2+3x_3+bx_4=3\end{cases}$ 无解.

解　线性方程组 $Ax=\beta$ 无解的充分必要条件是 $R(A)\neq R(A,\beta)$.

$$[A,\beta]=\begin{bmatrix}1&1&1&1&-1\\4&3&5&-1&-1\\a&1&3&b&3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1&1&-1\\0&-1&1&-5&3\\0&0&4-2a&b+4a-5&6-2a\end{bmatrix},$$

当 $4-2a=b+4a-5=0$ 且 $6-2a\neq 0$ 即 $a=2,b=-3$ 时，$R(A)=2,R(A,\beta)=3$，线性方程组无解.

五（10 分）. 设行列式 $D_n=\begin{vmatrix}2a&1&&&&\\a^2&2a&1&&&\\&a^2&2a&1&&\\&&\ddots&\ddots&\ddots&\\&&&a^2&2a&1\\&&&&a^2&2a\end{vmatrix}$，证明 $D_n=(n+1)a^n$.

证 用归纳法，当 $n=1$ 时，$D_1=2a$，命题正确；当 $n=2$ 时，$D_2=\begin{vmatrix}2a&1\\a^2&2a\end{vmatrix}=3a^2$，命题正确.设 $n<k$ 时，$D_n=(n+1)a^n$ 命题正确.

当 n=k 时，按第一列展开，则有

$$D_k=2a\begin{vmatrix}2a&1&&&&\\a^2&2a&1&&&\\&a^2&2a&1&&\\&&\ddots&\ddots&\ddots&\\&&&a^2&2a&1\\&&&&a^2&2a\end{vmatrix}_{k-1}+a^2(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}1&0&&&&\\a^2&2a&1&&&\\&a^2&2a&1&&\\&&\ddots&\ddots&\ddots&\\&&&a^2&2a&1\\&&&&a^2&2a\end{vmatrix}_{k-1}$$

$=2aD_{k-1}-a^2D_{k-2}=2a\left(ka^{k-1}\right)-a^2\left((k-1)a^{k-2}\right)=(k+1)a^k$.所以 $D_n=(n+1)a^n$.

六（10 分）已知 A 和 B 均为三阶矩阵，将 A 的第三行的-2 倍加至第 2 行得到矩阵 A_1，将 B 中第 2 列加至第 1 列得到矩阵 B_1，又知 $A_1B_1=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&2&2\\0&0&3\end{bmatrix}$，求 AB.

解 由已知可得 $PA=A_1,\ BQ=B_1,$ 其中 $P=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&-2\\0&0&1\end{bmatrix},Q=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$.

显然 P,Q 均为可逆的且 $P^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&2\\0&0&1\end{bmatrix},Q^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$.

进一步，由 $PABQ=A_1B_1$ 可得

$$AB = P^{-1}A_1B_1Q^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

七（15 分）. 设 $A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 1 & 1 & \lambda \end{bmatrix}, \beta = \begin{bmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$，已知线性方程组 $Ax=\beta$ 有无穷多解.（1）求 λ，a 的值；（2）求线性方程组 $Ax=\beta$ 通解.

解 对方程组的增广矩阵作初等行变

$$B = [A,\beta] = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 1 & a \\ 0 & \lambda\text{-}1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda^2 & a-\lambda+1 \end{bmatrix}$$

（1）当 λ=1时， $B = [A,\beta] \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,

可知 $R(B)=2$，$R(A)=1$，故线性方程组有无解；

（2）当 λ=-1 时，$B = [A,\beta] \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & \text{-}1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a+2 \end{bmatrix}$

当 a=-2 时，$R(B)=R(A)=2$，故线性方程组有无穷多解，故满足条件的 λ，a 为 λ=-1，a=-2；将矩阵 B 化为行最简形矩阵有 $B \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & \text{-}1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \text{-}\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，由此得方程组的同解方程为

$\begin{cases} x_1 - x_3 = \dfrac{3}{2} \\ x_2 = \text{-}\dfrac{1}{2} \end{cases}$，通解为 $\begin{cases} x_1 = k + \dfrac{3}{2} \\ x_2 = \text{-}\dfrac{1}{2} \\ x_3 = k \end{cases}$，或 $x = k[1,0,1]^T + \left[\dfrac{3}{2},\text{-}\dfrac{1}{2},0\right]^T$ 其中 k 为任意常数.

八（15 分）. 已知 A，B 为三阶矩阵，且满足 $2A^{-1}B = B-4E$，其中 E 是 3 阶单位矩阵.

（1） 证明矩阵 $A-2E$ 可逆；（2）若 $B=\begin{bmatrix}1 & -2 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$，求矩阵 A.

解 （1）由 $2A^{-1}B=B-4E$ 知 $AB-2B-4A=0$，从而

$$(A-2E)(B-4E)=8E，或(A-2E)\cdot\frac{1}{8}(B-4E)=E$$

故 $A-2E$ 可逆，且 $(A-2E)^{-1}=\frac{1}{8}(B-4E)$.

（2）由（1）知 $A=2E+8(B-4E)^{-1}$，

$$(B-4E)^{-1}=\begin{bmatrix}-3 & -2 & 0\\ 1 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0\\ -\frac{1}{8} & -\frac{3}{8} & 0\\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}\end{bmatrix},$$

故 $$A=2E+8(B-4E)^{-1}=\begin{bmatrix}0 & 2 & 0\\ -1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}.$$

九．（10 分）（1）设 $A=\left[a_{ij}\right]_{3\times 3}$ 是 3 阶非零矩阵，若 $a_{ij}+A_{ij}=0,i,j=1,2,3$，求 $|A|$.

（2）设 A 为 $m\times n$ 矩阵，证明 $R(A)=1$ 的充分必要条件是存在非零 m 维列向量 α 和非零的 n 维列向量 β，使得 $A=\alpha\beta^T$.

证明 (1)由 $a_{ij}+A_{ij}=0,i,j=1,2,3$ 可得 $A^*=-A^T$.

由伴随矩阵的性质 $AA^*=|A|E$ 可得 $AA^*=-AA^T=|A|E$，

因此 $$\left|-AA^T\right|=\left||A|E\right|,$$

即 $(-1)^3|A|^2=|A|^3$ ， $|A|^2(|A|+1)=0$.

由 $A=\left[a_{ij}\right]_{3\times 3}$ 是 3 阶非零矩阵，不妨设 $a_{11}\neq 0$，则

$$|A|=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}=-a_{11}^2-a_{12}^2-a_{13}^2<0$$

故 $|A|+1=0$，即 $|A|=-1$.

(2) 充分性 由 $A=\alpha\beta^T$，其中 α 是非零 m 维列向量和 β 是非零的 n 维列向量，故

$A\neq 0$，因此 $R\left(A\right)\geq 1$.另一方面，由矩阵秩的性质有

$$R\left(A\right)\leq R\left(\alpha\right)=1,$$

因此 $R\left(A\right)=1$.

必要性 如果 $R\left(A\right)=1$，则存在可逆矩阵 P,Q，使得

$$A=P\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}Q=P\begin{bmatrix}1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1, & 0, & \cdots & 0\end{bmatrix}Q,$$

令 $\alpha=P\begin{bmatrix}1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}$，$\beta=Q^T\begin{bmatrix}1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}$，因为 P,Q 可逆，因此 $\alpha\neq 0$，$\beta\neq 0$，且 $A=\alpha\beta^T$.