《概率统计 I》半期考

答案

1.

分数	阅卷人

(10分)设事件A,B,C满足：
$P(A)=0.5, P(B)=0.8, P(A\cup B)=0.9, P(C)=0.9$;
C与$A\cup B$独立.

(i) 证明A,B独立;

(ii) 求$P(A\cup B\cup C)$.

解：(i) 由 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

则有 $P(AB)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)$

$=0.5+0.8-0.9$

$=0.4$ (4分)

以及 $P(A)P(B)=0.5\cdot 0.8=0.4$

即 $P(AB)=P(A)P(B)$

因此 A. B 独立 (1分)

(ii) $P(A\cup B\cup C)=P(A\cup B)+P(C)-P((A\cup B)\cap C)$

$=0.9+0.9-P(A\cup B)P(C)$

$=0.9+0.9-0.9\cdot 0.9$

$=0.99$ (5分)

2.

分数	阅卷人

(12分)设有一批产品，其中3个不合格品，7个合格品。现在进行产品检测。注意此时的产品检测是破坏性检测，也即检测后，合格品变成不合格品，不合格品仍为不合格品。现从中随机抽取一个产品，进行上述破坏性检测，检测后，将检测后的产品放回去，然后再从中随机抽取一个产品进行检测。

(i) 第二次抽到的产品为合格品的概率为多少？

(ii) 已知第二次抽到的产品为合格品条件下，第一次抽到的产品为合格品的条件概率为多少？

解：设 A_1, A_2 分别表示第一次，第二次抽到合格品.

则有 $P(A_1)=\frac{7}{10}=0.7$， $P(\bar{A}_1)=0.3$

$P(A_2|A_1)=\frac{6}{10}=0.6$， $P(A_2|\bar{A}_1)=\frac{7}{10}=0.7$

(4分)

(i) $P(A_2)=P(A_1)P(A_2|A_1)+P(\bar{A}_1)P(A_2|\bar{A}_1)$

$=0.7\times0.6+0.3\times0.7$

$=0.42+0.21$

$=0.63$

(4分)

(ii) $P(A_1|A_2)=\frac{P(A_1A_2)}{P(A_2)}=\frac{P(A_2|A_1)P(A_1)}{P(A_2)}$

$=\frac{0.6\times0.7}{0.63}$

$=\frac{6}{9}$

$=\frac{2}{3}$

(4分)

3.

分数	阅卷人

(10分)已知某大学的女生体重X（单位：斤）服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$, 并且根据该大学体检数据估计得到$\mu=100$, 以及$P(90\le X\le 100)=34.13\%$, 试求另一个参数$\sigma$.（已知$\Phi(1)=0.8413,\Phi(2)=0.9772,\Phi(3)=0.9987$).

解: $P(90\le X\le 100)=P\left(-\frac{10}{\sigma}\le\frac{X-100}{\sigma}\le 0\right)$

$=\Phi(0)-\Phi\left(-\frac{10}{\sigma}\right)$

$=0.5-\left[1-\Phi\left(\frac{10}{\sigma}\right)\right]$

$=\Phi\left(\frac{10}{\sigma}\right)-0.5$ (7分)

$\Rightarrow \Phi\left(\frac{10}{\sigma}\right)-0.5=0.3413$

$\Rightarrow \Phi\left(\frac{10}{\sigma}\right)=0.8413=\Phi(1)$

$\Rightarrow \frac{10}{\sigma}=1$

$\Rightarrow \sigma=10$ (3分)

4.

分数	阅卷人

(12分)假设随机变量X的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}2xe^{-x^2}, & x>0;\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

(i) 求X的分布函数;

(ii) 求随机变量$Y=X^2$的密度函数;

解: (i) $F_X(x)=P\{X\le x\}$

$$=\begin{cases}\int_0^x 2te^{-t^2}dt, & x>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}1-e^{-x^2}, & x>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

(6分)

(ii) 由 $y=x^2$, $x>0$

$\Rightarrow x=\sqrt{y}$, $y>0$

$$\Rightarrow f_Y(y)=\begin{cases}f(\sqrt{y})\cdot\left|(\sqrt{y})'_y\right|, & y>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}2\sqrt{y}\cdot e^{-y}\cdot\frac{1}{2\sqrt{y}}, & y>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}e^{-y}, & y>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

(6分)

5.

分数	阅卷人

(12分)已知随机变量X服从参数为0.2的（0-1）分布，随机变量Y服从参数为0.3的（0-1）分布，并且X,Y相互独立。

(i) 求二维随机变量(X,Y)的联合分布律;

(ii) 求随机变量$Z=X+Y$的分布律.

解：(i) $X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0.8 & 0.2 \end{pmatrix}$ $Y \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0.7 & 0.3 \end{pmatrix}$

⇒

Y\X	0	1	$P\{Y=j\}$
0	0.8×0.7	0.2×0.7	0.7
1	0.8×0.3	0.2×0.3	0.3
$P\{X=i\}$	0.8	0.2	

⇒ (X,Y)的联合分布律为

Y\X	0	1
0	0.56	0.14
1	0.24	0.06

(6分)

(ii) $Z=X+Y$的取值如下：

Y\X	0	1
0	0	1
1	1	2

$\Rightarrow P\{Z=0\}=P\{X=0,Y=0\}=0.56$

$P\{Z=1\}=P\{X=0,Y=1\}+P\{X=1,Y=0\}$

$=0.24+0.14=0.38$

$P\{Z=2\}=P\{X=1,Y=1\}=0.06$

$\Rightarrow Z \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0.56 & 0.38 & 0.06 \end{pmatrix}$ (6分)

6.

分数	阅卷人

(10分)已知二维连续型随机变量(X,Y)的密度函数如下：

$$f(x,y)=\begin{cases} x, & 1\le x\le 2, \frac{1}{x}\le y\le \frac{2}{x}; \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

求$Z=XY$的密度函数。

解：由 $f_{XY}(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{|x|}f(x,\frac{z}{x})\,dx$ (2分)

被积函数 $\frac{1}{|x|}f(x,\frac{z}{x})$ 不为0的区域如下：

$$\begin{cases} 1\le x\le 2 \\ \frac{1}{x}\le \frac{z}{x}\le \frac{2}{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1\le x\le 2 \\ 1\le z\le 2 \end{cases}$$ (4分)

$$\Rightarrow f_{XY}(z)=\begin{cases} \int_1^2 \frac{1}{x}\cdot x\,dx, & 1\le z\le 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$=\begin{cases} 1, & 1\le z\le 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$ (4分)

7.

分数	阅卷人

(9分)已知随机变量X的密度函数如下：

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}e^{-\frac{1}{3}(x-1)}, & x>1;\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

求期望$E[3e^{-\frac{2}{3}(x-1)}]$.

解：$E[3e^{-\frac{2}{3}(x-1)}]$

$$=\int_1^{+\infty}3e^{-\frac{2}{3}(x-1)}\cdot\frac{1}{3}e^{-\frac{1}{3}(x-1)}\,dx$$

(6分)

$$=\int_1^{+\infty}e^{-(x-1)}\,dx$$

$$=-e^{-(x-1)}\Big|_1^{+\infty}$$

$$=0-(-1)$$

(3分)

$$=1$$

8.

分数	阅卷人

(10分)已知随机变量X服从参数为1的泊松分布，随机变量Y服从区间$(0,2)$的均匀分布，并且X,Y相互独立。

(i) 求$E(X^2),E(Y^2),E[(X-Y)^2]$;

(ii) 求$D(X-Y)$.

解：(i) $E(X^2)=DX+(EX)^2=1+1^2=2$ (2分)

$E(Y^2)=DY+(EY)^2=\frac{(2-0)^2}{12}+\left(\frac{0+2}{2}\right)^2$

$=1\frac{1}{3}$ (2分)

$E[(X-Y)^2]=E(X^2+Y^2-2XY)$

$=E(X^2)+E(Y^2)-2EXEY$

$=2+1\frac{1}{3}-2\cdot1\cdot1 \quad =1\frac{1}{3}$ (3分)

(ii) $D(X-Y)=DX+DY$

$=1+\frac{1}{3}$ (3分)

$=1\frac{1}{3}$

9.

分数	阅卷人

(15分)已知二维随机变量(X,Y)的概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{A}, & -1\le x\le 1, 0\le y\le x^2;\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

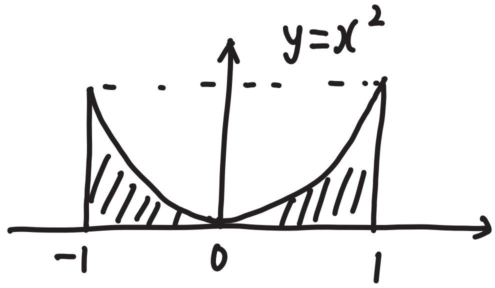
其中A为常数.

(i) 试求常数A;

(ii) 求边缘概率密度$f_Y(y)$;

(iii) 求条件概率密度$f_{X|Y}(x|y)$.

解:



(i) A为上述阴影部分面积，即

$$A=2\int_0^1 x^2\,dx = 2\cdot\frac{1}{3}x^3\Big|_{x=0}^{1}$$

$$=\frac{2}{3}$$

(5分)

$$\Rightarrow f(x,y)=\begin{cases}\frac{3}{2}, & -1\le x\le 1,\ 0\le y\le x^2\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

(ii) 该阴影部分的 y-型区域如下

$$\{(x,y)\,|\,0\le y\le 1, -1\le x\le -\sqrt{y}\}$$

$$\cup\{(x,y)\,|\,0\le y\le 1, \sqrt{y}\le x\le 1\}$$

(2分)

$$\Rightarrow f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx$$

$$=\begin{cases}\int_{-1}^{-\sqrt{y}} dx+\int_{\sqrt{y}}^{1} dx, & 0\le y\le 1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}2-2\sqrt{y}, & 0\le y\le 1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

(3分)

(iii) $f_{X|Y}(x,y)=\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}$

当 $0<y<1$ 时，

$$f_{X|Y}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2-2\sqrt{y}}, & -1<x<-\sqrt{y},\ \text{或}\ \sqrt{y}<x<1\ \text{时} \\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

(5分)