厦门大学《微积分I-1》期中试卷参考答案

1. 求下列极限：（每小题5分，总10分）

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^2+x^{\frac{2}{3}}\right)\left(e^{\frac{2}{x^2}}-e^{\frac{1}{x^2+x+1}}\right)$；

解：应用Lagrange中值定理，

原式$=\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^2+x^{\frac{2}{3}}\right)\left(\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^2+x+1}\right)e^{\xi}=1$。 $\xi\in\left(\frac{1}{x^2+x+1},\frac{2}{x^2}\right)$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+2n}}\right)$。

解：由夹逼准则，

$$\frac{2n}{\sqrt{n^2+2n}}\le\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}\le\frac{2n}{\sqrt{n^2+1}},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{\sqrt{n^2+2n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{\sqrt{n^2+1}}=2,$$

所以，原式=2。

2. 求下列极限：（每小题5分，总20分）

(1) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{2^x+3^x+4^x+5^x}{4}\right)^{\frac{1}{x}}$；

解：原式$=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}\ln\frac{2^x+3^x+4^x+5^x}{4}}:=e^I$，其中

$$\begin{aligned}I&=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2^x+3^x+4^x+5^x}\left(2^x\ln2+3^x\ln3+4^x\ln4+5^x\ln5\right)}{1}\\&=\frac{1}{4}(\ln2+\ln3+\ln4+\ln5)=\frac{1}{4}\ln120.\end{aligned}$$

或者

$$\begin{aligned}I&=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{2^x-1+3^x-1+4^x-1+5^x-1}{4}\right)\\&=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\frac{2^x-1+3^x-1+4^x-1+5^x-1}{4}\\&=\lim_{x\to0}\frac{1}{4x}(x\ln2+x\ln3+x\ln4+x\ln5)=\frac{1}{4}\ln120.\end{aligned}$$

所以，原式$=\sqrt[4]{120}$。

(2) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x-x^x}{1-x+\ln x}$；

解：

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\lim_{x\to1}\frac{1-x^x(\ln x+1)}{-1+\frac{1}{x}}=\lim_{x\to1}x\frac{1-x^x(\ln x+1)}{1-x}\\&=\lim_{x\to1}\frac{1-x^x(\ln x+1)}{1-x}=\lim_{x\to1}\frac{-x^x(\ln x+1)^2-x^x\frac{1}{x}}{-1}=2.\end{aligned}$$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\sin x-x)(x^2+\ln(1-x^2))}{x^3\left(e^{-\frac{x^2}{2}}-\cos x\right)}$；

解：

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{x\to 0}\frac{(x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)-x)(x^2+(-x^2-\frac{x^4}{2}+o(x^4)))}{x^3(1+(-\frac{x^2}{2})+\frac{1}{2}\frac{x^4}{4}+o(x^4)-(1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+o(x^4)))} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{6}x^3\cdot(-\frac{x^4}{2})}{x^3\cdot\frac{1}{12}x^4}=1
\end{aligned}$$

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[e^{\frac{1}{x}}(x^2-x+1)-\sqrt{1+x^4}\right]$。

解：

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{t\to 0}\left[e^t\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{t}+1\right)-\sqrt{1+\frac{1}{t^4}}\right] \\
&= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t^2}\left[e^t(1-t+t^2)-\sqrt{1+t^4}\right] \\
&= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t^2}\left[\left(1+t+\frac{t^2}{2}+o(t^2)\right)(1-t+t^2)-(1+o(t^2))\right] \\
&= \lim_{t\to 0}\frac{1+\frac{t^2}{2}+o(t^2)-1-o(t^2)}{t^2}=\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

3. （10分）设函数 $f(x)=\begin{cases} x^k\sin\frac{1}{x}, & x<0, \\ x^2+a, & x\geq 0, \end{cases}$ 要使 $f(x)$在$\mathbb{R}$上一阶导数连续，数 k, a应如何取值。

解：可导必连续，知道$f(0^-)=f(0^+)=f(0)$，所以$k>0$, $a=0$。先考虑函数在$x=0$处的导数。由

$$\begin{cases} f'_+(0)=0 \\ f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{x^k\sin\frac{1}{x}-0}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}x^{k-1}\sin\frac{1}{x} \\ f'(0)=f'_+(0)=f'_-(0) \end{cases},$$

可得$k>1$, $f'(0)=0$，所以

$$f'(x)=\begin{cases} kx^{k-1}\sin\frac{1}{x}-x^{k-2}\cos\frac{1}{x}, & x<0, \\ 2x, & x\geq 0 \end{cases}.$$

已知 $f(x)$在$\mathbb{R}$上一阶导数连续，所以

$$0=f'(0^+)=f'(0^-)=\lim_{x\to 0^-}\left(kx^{k-1}\sin\frac{1}{x}-x^{k-2}\cos\frac{1}{x}\right),$$

因此, $k\geq 2$。

4. （10分）证明数列$x_1 = 2, x_{n+1} = \sqrt{3x_n}, n = 1, 2, 3, \dots$极限存在，并求出极限。

解：归纳法证明数列有上界。若$x_n \le 3$，则$x_{n+1} = \sqrt{3x_n} \le \sqrt{3 \cdot 3} = 3$，从而数列有上界3。又

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\sqrt{3x_n}}{x_n} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{x_n}} \ge \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 1,$$

所以数列单调增。由数列单调有界必收敛，知$\{x_n\}$收敛。

记$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，我们有$a = \sqrt{3a}$，解得$a = 3$或者$a = 0$（舍去，因为$x_n \ge x_1 = 2$）。

5. （10分）求星形线$\left\{\begin{array}{l} x = a\cos^3\theta \\ y = a\sin^3\theta \end{array}\right.$ 在$\theta = \frac{\pi}{4}$处的二阶导数$\frac{d^2y}{dx^2}$的值。

解：

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{d\theta}\frac{d\theta}{dx} = \frac{3a\sin^2\theta\cos\theta}{3a\cos^2\theta(-\sin\theta)} = -\tan\theta \\
\frac{dy^2}{dx^2} &= \frac{d}{dx}(\frac{dy}{dx}) = \frac{d}{dx}(-\tan\theta) = \frac{d}{d\theta}(-\tan\theta)\frac{d\theta}{dx} \\
&= -\sec^2\theta\frac{1}{3a\cos^2\theta(-\sin\theta)},
\end{aligned}$$

所以，$\frac{dy^2}{dx^2}|_{\theta=\frac{\pi}{4}} = \frac{(\sqrt{2})^5}{3a}$。

6. （10分）设函数$f(x)$在$[0, 2]$上连续，在$(0, 2)$内可导，且$f(0)\cdot f(2) > 0$, $f(0)\cdot f(1) < 0$。证明存在$\xi \in (0, 2)$，使得$f'(\xi) = 2f(\xi)$。

证明：已知$f \in C[0, 1]$，$f(0)f(1) < 0$，由零点定理，知$\exists x_1 \in (0, 1)$，使得$f(x_1) = 0$。又$f(0)f(2) > 0$，结合$f(0)f(1) < 0$，有$f(1)f(2) < 0$，已知$f \in C[1, 2]$，再利用零点定理，知$\exists x_2 \in (1, 2)$，使得$f(x_2) = 0$。记$F(x) = e^{-2x}f(x)$，$F(x)$在(x_1, x_2)上满足Rolle定理的条件，从而$\exists \xi \in (x_1, x_2) \subset (0, 2)$，使得$F'(\xi) = 0$，进而$f'(\xi) - 2f(\xi) = 0$。

7. （10分）设函数$f(x)$在$[0, n]$上连续（n为自然数，$n \ge 2$），$f(0) = f(n)$。证明存在$\xi, \xi + 1 \in [0, n]$，使得$f(\xi) = f(\xi + 1)$。

证明：记$F(x) = f(x) - f(x + 1)$。显然$F(x) \in C[0, n - 1]$，从而达到最大值M和最小值m。因为

$$m \le \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} F(k) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(f(x) - f(x + 1)) = f(0) - f(n) = 0 \le M,$$

由介值定理，知$\exists \xi \in [0, n - 1]$，使得$F(\xi) = 0$，即$f(\xi) = f(\xi + 1)$。

8. （10分）已知函数$f(x) = \arctan x + \sin x$，求$f^{(11)}(0)$。

解：记$u(x) = \arctan x$，$v(x) = \sin x$，则$f^{(11)}(x) = u^{(11)}(x) + v^{(11)}(x)$。

$u'(x)=\frac{1}{1+x^2}$，$u''(x)=-\frac{2x}{(1+x^2)^2}$，代入$x=0$，得$u'(0)=1$，$u''(0)=0$。由$u'(x)=\frac{1}{1+x^2}$，我们有

$$u'(x)(1+x^2)=1.$$

上式左右两边同时对x求n次导数，得

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k+1)}(x)(1+x^2)^{(k)}=0,$$

考虑到$(1+x^2)^{(k)}=0,\ k\geq 3$，有

$$u^{(n+1)}(x)(1+x^2)+nu^{(n)}(x)(2x)+\frac{n(n-1)}{2}u^{(n-1)}(x)\cdot 2=0.$$

上式代入$x=0$，得到递推式

$$u^{(n+1)}(0)=-n(n-1)u^{(n-1)}(0).$$

结合$u'(0)=1$，$u''(0)=0$，我们有

$$u^{(n)}(0)=\begin{cases}(-1)^{\frac{n-1}{2}}(n-1)!, & \text{n为奇数}\\ 0, & \text{n为偶数}\end{cases}.$$

又$v^{(n)}(x)=\sin(x+\frac{\pi}{2}n)$，有$v^{(11)}(0)=-1$。所以

$$f^{(11)}(0)=u^{(11)}(0)+v^{(11)}(0)=-10!-1.$$

9. （10分）设函数$f(x)$在$\mathbb{R}$上三阶可导，并且满足$\forall x\in\mathbb{R},\ |f(x)|\leq 1,\ |f'''(x)|\leq 1$。证明：$\forall x\in\mathbb{R},\ |f'(x)|^3\leq\frac{9}{8}$。

证明：已知$f(x)$在$\mathbb{R}$上三阶可导，$\forall h>0$，我们有Taylor展式

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\frac{1}{2}f''(x)h^2+\frac{1}{6}f'''(x_1)h^3$$
$$f(x-h)=f(x)-f'(x)h+\frac{1}{2}f''(x)h^2-\frac{1}{6}f'''(x_2)h^3.$$

两式相减，结合条件$\forall x\in\mathbb{R},\ |f(x)|\leq 1,\ |f'''(x)|\leq 1$，得

$$|f'(x)|\leq\frac{1}{2h}|f(x+h)-f(x-h)|+\frac{1}{12}h^2|f'''(x_1)-f'''(x_2)|\leq\frac{1}{h}+\frac{1}{6}h^2.$$

令$\frac{1}{2h}=\frac{1}{6}h^2$，（或者求$\frac{1}{h}+\frac{1}{6}h^2$的驻点），有$h=\sqrt[3]{3}$，代入上式即得结论。