期中试卷讲评

18191学期《线性代数》

一、单项选择题（每小题2分，共20分）

1. $x=-2$是$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & x^2 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix}=0$ 的(**B**)。

(A) 充分必要条件

(B) 充分而非必要条件

(C) 必要而非充分条件

(D) 既不充分也非必要条件

2. 设 A 是 n 阶矩阵，A 适合下列条件(C)时，E − A必是可逆矩阵。

(A) $A^n = A$

(B) A是可逆矩阵

(C) $A^n = 0$

(D) A主对角线上的元素全为零

3. 设 $F=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&4\\2&3&0\end{pmatrix}$，E[3(2)]是 3 阶初等方阵，则 E[3(2)]F 等于(A)。

(A) $\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&4\\4&6&0\end{pmatrix}$

(B) $\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&0\\0&1&4\end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix}1&3&2\\0&4&1\\2&0&3\end{pmatrix}$

(D) $\begin{pmatrix}1&2&6\\0&1&8\\2&3&0\end{pmatrix}$

4. 设 A 是 n 阶(n>2)可逆矩阵，A^*是 A 的伴随矩阵，则(**B**)

(A) $(A^*)^* = |A|^{n-1}A$ (B) $(A^*)^* = |A|^{n-2}A$

(C) $(A^*)^* = |A|^{n+1}A$ (D) $(A^*)^* = |A|^{n+2}A$

$$AA^* = |A|E$$

$$\Rightarrow (A^*)^{-1} = \frac{A}{|A|}$$

$$\Rightarrow |A^*| = |A|^{n-1}$$

$$(A^*)^* A^* = |A^*|E$$

$$\Rightarrow (A^*)^* = |A^*|E(A^*)^{-1} = |A^*|\frac{A}{|A|}$$

$$= |A|^{n-2}A$$

5. 若$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = m$，则$\begin{vmatrix} a_1 & 2c_1 - 5b_1 & 3b_1 \\ a_2 & 2c_2 - 5b_2 & 3b_2 \\ a_3 & 2c_3 - 5b_3 & 3b_3 \end{vmatrix} = $（ **D** ）。

(A) 30m　　(B) -15m　　(C)6m　　(D)-6m

6. 设 A 为$m \times n$矩阵，C 是 n 阶可逆矩阵，矩阵 A 的秩为 r，矩阵 B=AC 的秩为 r1，则（ C ）。

(A) $r > r1$

(B) $r < r1$

(C) $r = r1$

(D) r 与 r1 的关系依 C 而定

7. 设 A, B 均为 n 阶方阵，下面结论正确的是(**B**)。

(A) 若 A, B 均可逆，则 $A+B$ 可逆

(B) 若 A, B 均可逆，则 AB 可逆

(C) 若 $A+B$ 可逆，则 $A-B$ 可逆

(D) 若 $A+B$ 可逆，则 A, B 均可逆

8. 设$A=\begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ -2 & 5 & 7 \\ x & y & z \end{pmatrix}$，第三行元素的代数余子式分别为$A_{31}, A_{32}, A_{33}$，则$A_{31}+2A_{32}+3A_{33}$的值(**B**)。

(A) -1　　(B) 0　　(C) 1　　(D) 不确定

9. 设 A 为 3 阶矩阵，P 为 3 阶可逆矩阵，且$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$，若$P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$，$Q = (\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2, \alpha_3)$，则$Q^{-1}AQ =$(**B**)。

(A) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(B) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(D) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

10. 设 A 为 n 阶方阵， $r(A) < n-1$，则(D)。

(A) $r(A^*) = n$

(B) $r(A^*) = n-1$

(C) $r(A^*) = 1$

(D) $r(A^*) = 0$

二、填空题（每空格3分，共30分）

1. 计算行列式$\begin{vmatrix} a & & & & & & & b \\ & a & & & & & b & \\ & & \cdots & & & \cdots & & \\ & & & a & b & & & \\ & & & b & a & & & \\ & & \cdots & & & \cdots & & \\ & b & & & & & a & \\ b & & & & & & & a \end{vmatrix}_{2n\times 2n}$的值______。

$(a^2-b^2)^n$

2. 排列 $n(n-1)\cdots\cdots 321$ 的逆序数为 $\underline{\quad\dfrac{n(n-1)}{2}\quad}$。

3. 线性方程组 $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = \lambda - 3 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = -2 \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = -2 \end{cases}$ 有唯一解，λ 应满足____________。

$\lambda \neq 1$或$\lambda \neq -2$

4. 设 $A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}$，则 $(A^{-1})^*=$ $\underline{\quad\dfrac{A}{4}\quad}$。

5. A 为 3 阶矩阵，且满足 $|A|=3$，则 $|3A^*|=$ $\underline{\quad 3^5=243\quad}$。

6. 设 A、EB 均为 2 阶矩阵，A^*，B^*分别为 A、B 的伴随矩阵，若$|A|=2,|B|=3$，则分块矩阵 $\begin{pmatrix}0&A\\B&0\end{pmatrix}$ 的伴随矩阵为 ______。$\begin{pmatrix}0&2B^*\\3A^*&0\end{pmatrix}$

7. 设 $A=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}$，则 $A^{-1}=$ ____A____。

8. 已知 $AB-B=A$，其中 $B=\begin{pmatrix}1&-2&0\\2&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$，则 $A=$ ________。

$$\begin{pmatrix}1&1/2&0\\-1/2&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$$

9. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 \end{pmatrix}$，其中 $a_i\neq 0$，$b_i\neq 0$ $(i=1,2,3)$，则 $r(A)=$ ____1____。

10. 设 A 是 4×3 矩阵，且 $r(A)=2$，而 $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$，则 $r(AB)=$ ____2____。

三、计算题（共32分）

1. 计算行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha+\beta & \alpha\beta \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix}$$

解 按第 1 行展开得

$$D_n = (\alpha+\beta)D_{n-1} - \alpha\beta \begin{vmatrix} 1 & \alpha\beta & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha+\beta & \alpha\beta \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix}_{n-1}$$

$$= (\alpha+\beta)D_{n-1} - \alpha\beta D_{n-2},$$

即

$$D_n - \alpha D_{n-1} = \beta(D_{n-1} - \alpha D_{n-2}) = \beta^2(D_{n-2} - \alpha D_{n-3})$$
$$= \cdots = \beta^{n-2}(D_2 - \alpha D_1),$$

$$D_1 = \alpha + \beta,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta \\ 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix} = (\alpha+\beta)^2 - \alpha\beta = \alpha^2 + \beta^2 + \alpha\beta.$$

所以

$$D_n = \alpha D_{n-1} + \beta^{n-2}[\alpha^2 + \beta^2 + \alpha\beta - \alpha(\alpha+\beta)]$$
$$= \alpha D_{n-1} + \beta^n = \alpha(\alpha D_{n-2} + \beta^{n-1}) + \beta^n$$
$$= \alpha^2 D_{n-2} + \alpha\beta^{n-1} + \beta^n$$
$$\cdots\cdots$$
$$= \alpha^n + \alpha^{n-1}\beta + \alpha^{n-2}\beta^2 + \cdots + \alpha^2\beta^{n-2} + \alpha\beta^{n-1} + \beta^n.$$

注 此类行列式只有主对角线元素及平行于主对角线的两斜排元素不为零，其余元素全为零，因而一般采用递推公式法比较

2. 已知 a 是常数，且矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & a\\ 1 & 3 & 0\\ 2 & 7 & -a\end{pmatrix}$ 可经初等变换化为矩阵 $B=\begin{pmatrix}1 & a & 2\\ 0 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}$，求 a。

解：由题意得，矩阵 可通过初等变换化为矩阵 ， A与B等价，所以r(A)=r(B)。

对矩阵A和矩阵B分别进行初等变换，即

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & \alpha\\ 1 & 3 & 0\\ 2 & 7 & -\alpha\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 2 & \alpha\\ 0 & 1 & -\alpha\\ 0 & 3 & -3\alpha\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 2 & \alpha\\ 0 & 1 & -\alpha\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix}1 & \alpha & 2\\ 0 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & \alpha & 2\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & \alpha+1 & 3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & \alpha & 2\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 2-\alpha\end{pmatrix}$$

显然，r(A)=2，故 =2

3. 设 $AP = PB$，其中$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$，$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，求 A 及 A^{101}。

$$A = PBP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{101} = (A^2)^{50}A = A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

四、证明题（每小题6分，共18分）

1. 证明恒等式 $\begin{vmatrix}1 & a^2 & a^3\\ 1 & b^2 & b^3\\ 1 & c^2 & c^3\end{vmatrix} = (ab+bc+ca)\begin{vmatrix}1 & a & a^2\\ 1 & b & b^2\\ 1 & c & c^2\end{vmatrix}$

根据范德蒙行列式

$$\text{右端} = (ab+bc+ca)\times$$
$$(b-a)(c-a)(c-b).$$

$$\text{左端} = \begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & b^2-a^2 & b^3-ab^2\\ 1 & c^2-a^2 & c^3-ac^2\end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix}(b-a)(b+a) & (b-a)b^2\\ (c-a)(c+a) & (c-a)c^2\end{vmatrix} =$$

$$(b-a)(c-a)\begin{vmatrix}(b+a) & b^2\\ (c+a) & c^2\end{vmatrix} =$$

$$(b-a)(c-a)[(b+a)c^2-(c+a)b^2] =$$

$$(b-a)(c-a)[cb(c-b)+a(c^2-b^2)] =$$

$$(b-a)(c-a)(c-b)(bc+ac+ab).$$

故原式恒等

2. 若 A 为 n 阶矩阵，且$A^2 = E$，证

$$r(A+E)+r(A-E)=n$$

证明:

$$\because A^2 = E \Rightarrow A^2 - E = 0 \Rightarrow (A+E)(A-E) = 0$$

$$\therefore r(A+E)+r(A-E) \le n$$

$$又 \because r(A-E) = r(E-A)$$

$$\therefore r(A+E)+r(A-E) = r(A+E)+\mathrm{r}(E-A) \ge \mathrm{r}(\mathrm{A}+\mathrm{E}+\mathrm{E}-\mathrm{A}) = \mathrm{n}$$

$$\therefore r(A+E)+r(A-E) = n$$

3. 设A是 n 阶方阵，E 是 n 阶单位矩阵，A + E 可逆，且$f(A) = (E - A)(E + A)^{-1}$。证明：

(1) $\big(E + f(A)\big)(E + A) = 2E$

(2) $f\big(f(A)\big) = A$

(1)$\big(E + f(A)\big)(E + A) = [E + (E - A)(E + A)^{-1}](E + A) = (E + A) + (E - A)(E + A)^{-1}(E + A) = 2E$

(2) $f\big(f(A)\big) = [E - f(A)][E + f(A)]^{-1} = [E - (E - A)(E + A)^{-1}]\frac{1}{2}(E + A) = \frac{1}{2}(E + A) - \frac{1}{2}(E - A) = A$