第二章　随机变量及其分布

1. 考虑为期一年的一张保险单，若投保人在投保后一年内因意外死亡，则公司赔付 20 万元，若投保人因其他原因死亡，则公司赔付 5 万元，若投保人在投保期末生存，则公司无需付给任何费用. 若投保人在一年内因意外死亡的概率为 0.000 2，因其他原因死亡的概率为 0.001 0，求公司赔付金额的分布律.

解　设赔付金额为 X（以万元计），由条件知 X 取值为 20，5，0，且已知 $P\{X=20\}=0.0002$，$P\{X=5\}=0.0010$，故 $P\{X=0\}=1-P\{X=20\}-P\{X=5\}=0.9988$，即有分布律

X	20	5	0
p	0.000 2	0.001 0	0.998 8

2. (1) 一袋中装有 5 只球，编号为 1，2，3，4，5. 在袋中同时取 3 只，以 X 表示取出的 3 只球中的最大号码，写出随机变量 X 的分布律.

(2) 将一颗骰子抛掷两次，以 X 表示两次中得到的小的点数，试求 X 的分布律.

解　(1) 从 1～5 五个正整数中随机取 3 个，以 X 表示 3 个数中的最大值. X 的可能值为 3，4，5. 在五个数中任取 3 个共有 $\binom{5}{3}=10$ 种取法.

$\{X=3\}$ 表示取出的 3 个数以 3 为最大值，其余两个数是 1，2，仅有这一种情况，故 $P\{X=3\}=1\Big/\binom{5}{3}=\frac{1}{10}$.

$\{X=4\}$ 表示取出的 3 个数以 4 为最大值，其余两个数可在 1，2，3 中任取 2 个，共有 $\binom{3}{2}$ 种取法，故 $P\{X=4\}=\binom{3}{2}\Big/\binom{5}{3}=\frac{3}{10}$.

$\{X=5\}$ 表示取出的 3 个数以 5 为最大值，其余两个数可在 1，2，3，4 中任取 2 个，共有 $\binom{4}{2}$ 种取法，故 $P\{X=5\}=\binom{4}{2}\Big/\binom{5}{3}=\frac{3}{5}$. $P\{X=5\}$ 也可由 $1-P\{X=3\}-P\{X=4\}$ 得到.

X 的分布律为

X	3	4	5
p_k	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{6}{10}$

(2) **解法(i)**　以 Y_1,Y_2 分别记第一次、第二次投掷时骰子出现的点数，样本空间为

$$S=\{(y_1,y_2)\mid y_1=1,2,\cdots,6;y_2=1,2,\cdots,6\},$$

共有 $6\times6=36$ 个样本点.

$X=\min\{Y_1,Y_2\}$所有可能取的值为 1,2,3,4,5,6 这 6 个数，当且仅当以下三种情况之一发生时事件$\{X=k\}$ $(k=1,2,3,4,5,6)$发生：

(i) $Y_1=k$ 且 $Y_2=k+1,k+2,\cdots,6$ (共有 $6-k$ 个点)；

(ii) $Y_2=k$ 且 $Y_1=k+1,k+2,\cdots,6$ (共有 $6-k$ 个点)；

(iii) $Y_1=k$ 且 $Y_2=k$(仅有一个点).

因此事件"$X=k$"共包含$(6-k)+(6-k)+1=13-2k$ 个样本点，于是 X 的分布律为

$$P\{X=k\}=\frac{13-2k}{36},\quad k=1,2,3,4,5,6,$$

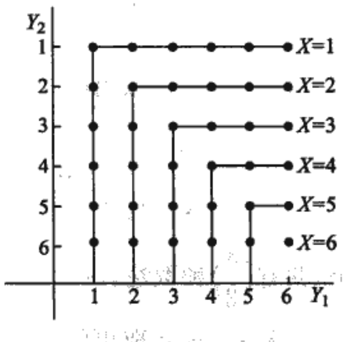
或写成表格形式：

X	1	2	3	4	5	6
p_k	$\frac{11}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{1}{36}$

解法(ii)　共有 $6\times6=36$ 个样本点，每个样本点发生的概率为 1/36，用以下示意图中的黑点表示各样本点. $X=\min\{Y_1,Y_2\}$所有可能取的值为 1,2,3,4,5,6. $P\{X=k\}$等于图中相应折线上各个黑点所对应的概率之和. 即有

X	1	2	3	4	5	6
p_k	$\frac{11}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{1}{36}$

亦即　$P\{X=k\}=\dfrac{13-2k}{36},k=1,2,3,4,5,6.$



题 2.2 图

3. 设在 15 只同类型的零件中有 2 只是次品，在其中取 3 次，每次任取 1 只，作不放回抽样. 以 X 表示取出的次品的只数.

(1) 求 X 的分布律.

(2) 画出分布律的图形.

解　(1) 在 15 只零件(其中有 2 只次品)中抽样 3 次，每次任取 1 只作不放回抽样，以 X 表示所得的次品数，X 所有可能取的值为 0,1,2，且有

$$P\{X=0\}=\frac{13}{15}\cdot\frac{12}{14}\cdot\frac{11}{13}=\frac{22}{35},$$

$$P\{X=1\}=\frac{2}{15}\cdot\frac{13}{14}\cdot\frac{12}{13}+\frac{13}{15}\cdot\frac{2}{14}\cdot\frac{12}{13}+\frac{13}{15}\cdot\frac{12}{14}\cdot\frac{2}{13}$$

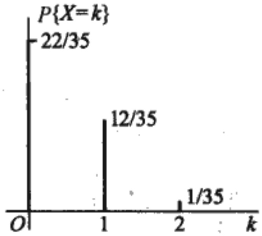
$$=3(\frac{2}{15}\cdot\frac{13}{14}\cdot\frac{12}{13})=\frac{12}{35},$$

$$P\{X=2\}=1-P\{X=0\}-P\{X=1\}=\frac{1}{35}.$$

分布律为

X	0	1	2
p_k	$\frac{22}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{1}{35}$

(2) 分布律的图形如题 2.3 图.



题 2.3 图

4. 进行重复独立试验,设每次试验成功的概率为 p,失败的概率为

$$q=1-p\ (0<p<1).$$

(1) 将试验进行到出现一次成功为止,以 X 表示所需的试验次数,求 X 的分布律.(此时称 X 服从以 p 为参数的**几何分布**.)

(2) 将试验进行到出现 r 次成功为止,以 Y 表示所需的试验次数,求 Y 的分布律.(此时称 Y 服从以 r,p 为参数的**巴斯卡分布或负二项分布**.)

(3) 一篮球运动员的投篮命中率为 45%.以 X 表示他首次投中时累计已投篮的次数,写出 X 的分布律,并计算 X 取偶数的概率.

解　(1) 此试验至少做 1 次,此即 X 可能值的最小值.若需做 k 次,则前 $k-1$次试验均失败最后一次成功,由于各次试验是相互独立的,故分布律为

$$P\{X=k\}=q^{k-1}p=(1-p)^{k-1}p,\quad k=1,2,3,\cdots.$$

(2) 此试验至少做 r 次,若需做 k 次,则第 k 次必为成功,而前 $k-1$ 次中有 $r-1$ 次成功,由于各次试验是相互独立的,故分布律为

$$P\{X=k\}=\binom{k-1}{r-1}p^rq^{k-r},\quad k=r,r+1,\cdots.$$

(3) 先写出 X 的分布律.它是题(1)中 $p=0.45$ 的情形.所求分布律为

$$P\{X=k\}=0.45(0.55)^{k-1},\quad k=1,2,\cdots.$$

因 $\{X=j\}\cap\{X=k\}=\varnothing\ (j\neq k)$,故 X 取偶数的概率为

$$P\left\{\bigcup_{k=1}^{\infty}(X=2k)\right\}=\sum_{k=1}^{\infty}P\{X=2k\}$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}0.45(0.55)^{2k-1}=\frac{0.45\times0.55}{1-0.55^2}=\frac{11}{31}.$$

5. 一房间有 3 扇同样大小的窗子，其中只有一扇是打开的. 有一只鸟自开着的窗子飞入了房间，它只能从开着的窗子飞出去. 鸟在房子里飞来飞去，试图飞出房间. 假定鸟是没有记忆的，它飞向各扇窗子是随机的.

(1) 以 X 表示鸟为了飞出房间试飞的次数，求 X 的分布律.

(2) 户主声称，他养的一只鸟是有记忆的，它飞向任一窗子的尝试不多于一次. 以 Y 表示这只聪明的鸟为了飞出房间试飞的次数. 如户主所说是确实的，试求 Y 的分布律.

(3) 求试飞次数 X 小于 Y 的概率和试飞次数 Y 小于 X 的概率.

解 (1) 本题的试飞次数是指记录鸟儿飞向窗子的次数加上最后飞离房间的一次，其分布律为(参见第 4 题(1)).

$$P\{X=k\}=\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}\left(\frac{1}{3}\right),\quad k=1,2,\cdots.$$

(2) 由题意 Y 的可能值为 1,2,3.

$\{Y=1\}$表明鸟儿从 3 扇窗子中选对了一扇，因对鸟儿而言，3 扇窗是等可能被选取的，故 $P\{Y=1\}=\frac{1}{3}$.

$\{Y=2\}$表明第一次试飞失败(选错了窗子)，失败方式有 2，故第一次失败概率为$\frac{2}{3}$，第二次，鸟儿舍弃已飞过的那扇窗，而从余下的一开一关的两窗选一，成功机会为$\frac{1}{2}$，故 $P\{Y=2\}=\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{3}$.

对有记忆鸟儿来说，$\sum_{i=1}^{3}P\{Y=i\}=1$，故 $P\{Y=3\}=\frac{1}{3}$.

即 Y 的分布律为

$$P\{Y=i\}=\frac{1}{3},\quad i=1,2,3.$$

(3) (i) $\{X<Y\}$可分解为下列 3 个两两不相容的事件之和，即

$$\{X<Y\}=\{(X=1)\cap(Y=2)\}\cup\{(X=1)\cap(Y=3)\}\cup\{(X=2)\cap(Y=3)\},$$

故

$$P\{X<Y\}=P\{(X=1)\cap(Y=2)\}+P\{(X=1)\cap(Y=3)\}+P\{(X=2)\cap(Y=3)\}.$$

因为两只鸟儿的行动是相互独立的，从而

$P\{X<Y\}=P\{X=1\}P\{Y=2\}$

$$+P\{X=1\}P\{Y=3\}+P\{X=2\}P\{Y=3\}$$
$$=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{2}{9}\times\frac{1}{3}=\frac{8}{27}.$$

(ii) $P\{Y<X\}=1-P\{X<Y\}-P\{X=Y\}$

$$=1-\frac{8}{27}-\sum_{k=1}^{3}P\{(X=k)\cap(Y=k)\}$$
$$=1-\frac{8}{27}-\sum_{k=1}^{3}P\{X=k\}P\{Y=k\}$$
$$=1-\frac{8}{27}-\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}-\frac{2}{9}\times\frac{1}{3}-\frac{4}{27}\times\frac{1}{3}$$
$$=\frac{38}{81}.$$

6. 一大楼装有 5 台同类型的供水设备.设每台设备是否被使用相互独立.调查表明在任一时刻 t 每台设备被使用的概率为 0.1.问在同一时刻，

(1) 恰有 2 台设备被使用的概率是多少?

(2) 至少有 3 台设备被使用的概率是多少?

(3) 至多有 3 台设备被使用的概率是多少?

(4) 至少有 1 台设备被使用的概率是多少?

解　以 X 表示同一时刻被使用的设备的个数，则

$$X\sim b(5,0.1).$$

(1) 所求的概率为

$$P\{X=2\}=\binom{5}{2}0.1^2(1-0.1)^3=0.0729.$$

(2) 所求的概率为

$$P\{X\geqslant 3\}=P\{X=3\}+P\{X=4\}+P\{X=5\}$$
$$=\binom{5}{3}0.1^3(1-0.1)^2+\binom{5}{4}0.1^4(1-0.1)+0.1^5$$
$$=0.0081+0.00045+0.00001=0.00856.$$

(3) 所求的概率为

$$P\{X\leqslant 3\}=1-P\{X=4\}-P\{X=5\}$$
$$=1-0.00045-0.00001=0.99954.$$

(4) 所求概率为

$$P\{X\geqslant 1\}=1-P\{X=0\}=1-(1-0.1)^5=0.40951.$$

7. 设事件 A 在每次试验发生的概率为 0.3. A 发生不少于 3 次时，指示灯发出信号.

(1) 进行了 5 次重复独立试验，求指示灯发出信号的概率.

(2) 进行了 7 次重复独立试验,求指示灯发出信号的概率.

解 (1) 以 X 表示在 5 次试验中事件 A 发生的次数,则 $X\sim b(5,0.3)$. 指示灯发出信号这一事件可表为$\{X\geqslant 3\}$,故所求的概率为

$$P\{X\geqslant 3\}=\binom{5}{3}0.3^3(1-0.3)^2+\binom{5}{4}0.3^4(1-0.3)+0.3^5=0.163.$$

(2) 以 Y 记在 7 次试验中事件 A 发生的次数,则 $Y\sim b(7,0.3)$. 故指示灯发出信号的概率为

$$\begin{aligned}P\{Y\geqslant 3\}&=1-P\{Y=0\}-P\{Y=1\}-P\{Y=2\}\\&=1-(1-0.3)^7-\binom{7}{1}(1-0.3)^6 0.3-\binom{7}{2}(1-0.3)^5 0.3^2\\&=0.353.\end{aligned}$$

8. 甲、乙两人投篮,投中的概率分别为 0.6,0.7. 今各投 3 次. 求

(1) 两人投中次数相等的概率.

(2) 甲比乙投中次数多的概率.

解 以 X,Y 分别表示甲、乙投中的次数,则

$$X\sim b(3,0.6),\quad Y\sim b(3,0.7).$$

(1) 按题意需求事件$\{X=Y\}$的概率,而事件$\{X=Y\}$是下列 4 个两两互不相容的事件之和:

$$(X=0)\cap(Y=0),\quad (X=1)\cap(Y=1),$$
$$(X=2)\cap(Y=2),\quad (X=3)\cap(Y=3).$$

自然,甲、乙投中与否被认为是相互独立的,从而

$$\begin{aligned}P\{X=Y\}&=\sum_{i=0}^{3}P\{(X=i)\cap(Y=i)\}=\sum_{i=0}^{3}P\{X=i\}P\{Y=i\}\\&=(1-0.6)^3(1-0.7)^3+\binom{3}{1}0.6(1-0.6)^2\binom{3}{1}0.7(1-0.7)^2\\&\quad+\binom{3}{2}0.6^2(1-0.6)\binom{3}{2}0.7^2(1-0.7)+0.6^3\times 0.7^3\\&=0.001\,728+0.054\,432+0.190\,512+0.074\,088=0.321.\end{aligned}$$

(2) 按题意需求事件$\{X>Y\}$的概率,而事件$\{X>Y\}$可表示为下列两两互不相容的事件之和,即

$$\begin{aligned}\{X>Y\}=&\{(X=1)\cap(Y=0)\}\cup\{(X=2)\cap(Y\leqslant 1)\}\\&\cup\{(X=3)\cap(Y\leqslant 2)\}.\end{aligned}$$

由于甲、乙投中与否相互独立,所以

$$\begin{aligned}P\{X>Y\}=&P\{(X=1)\cap(Y=0)\}\\&+P\{(X=2)\cap(Y\leqslant 1)\}+P\{(X=3)\cap(Y\leqslant 2)\}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= P\{X=1\}P\{Y=0\}+P\{X=2\}P\{Y\leqslant 1\}+P\{X=3\}P\{Y\leqslant 2\} \\
&= P\{X=1\}P\{Y=0\}+P\{X=2\}[P\{Y=0\}+P\{Y=1\}] \\
&\quad +P\{X=3\}[1-P\{Y=3\}] \\
&= \binom{3}{1}0.6(1-0.6)^2(1-0.7)^3+\binom{3}{2}0.6^2(1-0.6) \\
&\quad \times\left[(1-0.7)^3+\binom{3}{1}0.7(1-0.7)^2\right]+0.6^3(1-0.7^3) \\
&= 0.007\,776+0.093\,312+0.141\,912=0.243.
\end{aligned}
$$

9. 有一大批产品，其验收方案如下，先作第一次检验：从中任取 10 件，经检验无次品接受这批产品，次品数大于 2 拒收；否则作第二次检验，其做法是从中再任取 5 件，仅当 5 件中无次品时接受这批产品. 若产品的次品率为 10%，求

(1) 这批产品经第一次检验就能接受的概率.

(2) 需作第二次检验的概率.

(3) 这批产品按第二次检验的标准被接受的概率.

(4) 这批产品在第一次检验未能作决定且第二次检验时被通过的概率.

(5) 这批产品被接受的概率.

解　由教材第二章 §2 例 2 的说明知，若以 X 表示所抽得的 10 件产品中所含的次品数，则

$$X\sim b(10,0.1),$$

又若以 Y 表示第二次抽检中出现的次品数，则

$$Y\sim b(5,0.1).$$

(1) 按题意所求概率为

$$P\{X=0\}=(1-0.1)^{10}=0.349.$$

(2) 需作第二次检验的概率为

$$P\{1\leqslant X\leqslant 2\}=\binom{10}{1}(0.1)(0.9)^9+\binom{10}{2}(0.1)^2(0.9)^8=0.581.$$

(3) 按第二次检验标准接受这批产品的概率为

$$P\{Y=0\}=(0.9)^5=0.590.$$

(4) 所求概率为

$$P\{(1\leqslant X\leqslant 2)\cap(Y=0)\}.$$

因为 X,Y 的取值被认为是放回抽样的结果，即都是独立试验的结果，因此，事件 $\{1\leqslant X\leqslant 2\}$ 与 $\{Y=0\}$ 是相互独立的，从而

$$
\begin{aligned}
P\{(1\leqslant X\leqslant 2)\cap(Y=0)\}&=P\{1\leqslant X\leqslant 2\}P\{Y=0\} \\
&=0.581\times 0.590=0.343.
\end{aligned}
$$

(5) 这批产品被接受的概率为

$$\begin{aligned}
&P\{(X=0)\cup[(1\leqslant X\leqslant 2)\cap(Y=0)]\}\\
&\quad=P\{X=0\}+P\{(1\leqslant X\leqslant 2)\cap(Y=0)\}\\
&\quad=0.349+0.343=0.692.
\end{aligned}$$

10. 有甲、乙两种味道和颜色都极为相似的名酒各 4 杯. 如果从中挑 4 杯，能将甲种酒全部挑出来，算是试验成功一次.

(1) 某人随机地去猜，问他试验成功一次的概率是多少？

(2) 某人声称他通过品尝能区分两种酒. 他连续试验 10 次，成功 3 次. 试推断他是猜对的，还是他确有区分的能力(设各次试验是相互独立的).

解 (1) 某人随机去猜，从 8 杯中挑取 4 杯共有 $\binom{8}{4}=70$ 种取法，其中只有一种是正确的. 故若某人随机去猜，试验成功一次的概率是 $p=\frac{1}{70}$.

(2) 为判断某人是否有区分能力，先假设："某人无区分能力". 由(1)他猜对一次的概率为 $\frac{1}{70}$，连续试验 10 次，则猜对次数 $X\sim b(10,\frac{1}{70})$. 今

$$P\{X=3\}=\binom{10}{3}\left(\frac{1}{70}\right)^3\left(1-\frac{1}{70}\right)^7=3.16\times 10^{-4}.$$

不仅如此，

$$\begin{aligned}
P\{X\geqslant 3\}&=1-\sum_{k=0}^{2}P\{X=k\}=1-\sum_{k=0}^{2}\binom{10}{k}\left(\frac{1}{70}\right)^k\left(1-\frac{1}{70}\right)^{10-k}\\
&=3.24\times 10^{-4}.
\end{aligned}$$

即试验 10 次，他猜对次数 $\geqslant 3$ 的概率也仅为万分之三. 今事件 $\{X\geqslant 3\}$ 竟然发生了，按实际推断原理，应否定原假设"某人无区分能力"，而认为他确有区分能力.

11. 尽管在几何教科书中已经讲过仅用圆规和直尺三等分一个任意角是不可能的，但每一年总是有一些"发明者"撰写关于仅用圆规和直尺将角三等分的文章. 设某地区每年撰写此类文章的篇数 X 服从参数为 6 的泊松分布. 求明年没有此类文章的概率.

解 由题设某地每年撰写此类文章的篇数 $X\sim\pi(6)$，因此，明年无此类文章的概率为

$$P\{X=0\}=\mathrm{e}^{-6}=2.5\times 10^{-3}.$$

12. 一电话总机每分钟收到呼唤的次数服从参数为 4 的泊松分布. 求

(1) 某一分钟恰有 8 次呼唤的概率.

(2) 某一分钟的呼唤次数大于 3 的概率.

解 以 X 记电话总机一分钟收到呼唤的次数，则有

$$X\sim\pi(4),\quad P\{X=k\}=\frac{4^k\mathrm{e}^{-4}}{k!},k=0,1,2,\cdots$$

(1) 所求概率为

$$P\{X=8\}=\frac{4^8 e^{-4}}{8!}=0.029\ 8.$$

(2) 所求概率为

$$p=\sum_{k=4}^{\infty}P\{X=k\}=1-\sum_{k=0}^{3}P\{X=k\}$$

$$=1-\sum_{k=0}^{3}\frac{4^k e^{-4}}{k!}=0.566\ 5.$$

13. 某一公安局在长度为 t 的时间间隔内收到的紧急呼救的次数 X 服从参数为 $\frac{t}{2}$ 的泊松分布，而与时间间隔的起点无关（时间以小时计）.

(1) 求某一天中午 12 时至下午 3 时未收到紧急呼救的概率.

(2) 求某一天中午 12 时至下午 5 时至少收到 1 次紧急呼救的概率.

解　已知

$$X\sim \pi\left(\frac{t}{2}\right).$$

(1) $t=3$，所求概率为

$$P\{X=0\}=e^{-3/2}=0.223\ 1.$$

(2) $t=5$，所求概率为

$$P\{X\geqslant 1\}=1-P\{X=0\}=1-e^{-5/2}=0.917\ 9.$$

14. 某人家中，在时间间隔 t（以小时计）内接到电话的次数 X 服从参数为 $2t$ 的泊松分布.

(1) 若他外出计划用时 10 分钟，问其间电话铃响一次的概率是多少？

(2) 若他希望外出时没有电话的概率至少为 0.5，问他外出应控制最长时间是多少？

解　以 X 表示此人外出时电话铃响的次数，则 $X\sim\pi(2t)$，其中 t 表示外出的总时间，即 X 的分布律为 $P\{X=k\}=\frac{(2t)^k e^{-2t}}{k!}, k=0,1,2,\cdots$.

(1) $t=10/60=1/6$ 时，$X\sim\pi(2\times\frac{1}{6})$，故所求概率为

$$P\{X=1\}=\frac{1}{3}e^{-1/3}=0.238\ 8.$$

(2) 设外出最长时间为 t（小时），因 $X\sim\pi(2t)$，无电话打进的概率为

$$P\{X=0\}=e^{-2t},$$

要使 $P\{X=0\}=e^{-2t}\geqslant 0.5$，即要使 $e^{2t}\leqslant 2$，由此得

$$t\leqslant\frac{1}{2}\ln 2=0.346\ 6(\text{小时}),$$

即外出时间应控制小于 20.79 分.

15. 保险公司在一天内承保了 5 000 张相同年龄，为期一年的寿险保单，每人一份. 在合同有效期内若投保人死亡，则公司需赔付 3 万元. 设在一年内，该年龄段的死亡率为 0.001 5，且各投保人是否死亡相互独立. 求该公司对于这批投保人的赔付总额不超过 30 万元的概率(利用泊松定理计算).

解 设这批投保人在一年内死亡人数为 X，则 $X \sim b(5\,000, 0.001\,5)$，因每死亡一人公司需赔付 3 万元，故公司赔付不超过 30 万元意味着在投保期内死亡人数不超过 30/3=10(人)，从而所求概率为

$$P\{X \leqslant 10\} = \sum_{k=0}^{10} \binom{5\,000}{k} (0.001\,5)^k (1-0.001\,5)^{5\,000-k}.$$

若用泊松近似可以认为 $X \sim \pi(7.5)$，于是

$$P\{X \leqslant 10\} \approx \sum_{k=0}^{10} \frac{7.5^k \mathrm{e}^{-7.5}}{k!} \xlongequal{\text{查表}} 0.862\,2.$$

16. 有一繁忙的汽车站，每天有大量汽车通过，设一辆汽车在一天的某段时间内出事故的概率为 0.000 1. 在某天的该时间段内有 1 000 辆汽车通过. 问出事故的车辆数不小于 2 的概率是多少？(利用泊松定理计算)

解 以 X 表示汽车站某天该时间段内汽车出事故的辆数，由题设 $X \sim b(1\,000, 0.000\,1)$，因 $n=1\,000>100$，且 $np=0.1<10$，故可利用泊松定理计算 $P\{X \geqslant 2\}$，即令 $\lambda=np=0.1$，有

$$P\{X=k\}=\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \approx \frac{\lambda^k \mathrm{e}^{-\lambda}}{k!},$$

其中 $\lambda=np=0.1$，从而

$$\begin{aligned} P\{X \geqslant 2\} &= 1-P\{X=0\}-P\{X=1\} \\ &\approx 1-\mathrm{e}^{-0.1}-\mathrm{e}^{-0.1} \times 0.1 = 0.004\,7. \end{aligned}$$

17. (1) 设 X 服从(0－1)分布，其分布律为 $P\{X=k\}=p^k(1-p)^{1-k}, k=0,1$，求 X 的分布函数，并作出其图形.

(2) 求第 2 题(1)中的随机变量的分布函数.

解 (1) X 服从(0－1)分布，分布律为

X	0	1
p_k	$1-p$	p

当 $x<0$ 时，$F(x)=P\{X \leqslant x\}=0$，

当 $0 \leqslant x<1$ 时，

$$F(x) = P\{X \leqslant x\}$$

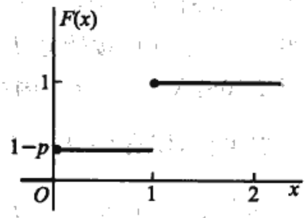
$$=P\{X=0\}=1-p,$$

当 $x\geqslant 1$ 时，

$$\begin{aligned}F(x)&=P\{X\leqslant x\}\\&=P\{X=0\}+P\{X=1\}\\&=(1-p)+p=1,\end{aligned}$$

即有(如题 2.17 图)

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 1-p, & 0\leqslant x<1,\\ 1, & x\geqslant 1.\end{cases}$$



题 2.17 图

(2) X 的分布律为

X	3	4	5
p_k	0.1	0.3	0.6

X 的分布函数为 $F(x)=P\{X\leqslant x\}$，即有

当 $x<3$ 时，

$$F(x)=P\{X\leqslant x\}=0,$$

当 $3\leqslant x<4$ 时，

$$F(x)=P\{X\leqslant x\}=P\{X=3\}=0.1,$$

当 $4\leqslant x<5$ 时，

$$\begin{aligned}F(x)&=P\{X\leqslant x\}=P\{X=3\}+P\{X=4\}\\&=0.1+0.3=0.4,\end{aligned}$$

当 $x\geqslant 5$ 时，

$$F(x)=P\{X\leqslant x\}=P\{X=3\}+P\{X=4\}+P\{X=5\}=1,$$

故知

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<3,\\ 0.1, & 3\leqslant x<4,\\ 0.4, & 4\leqslant x<5,\\ 1, & x\geqslant 5.\end{cases}$$

注意，$F(x)$ 的定义域总是 $(-\infty,\infty)$，它是一个右连续函数，且有 $F(\infty)=1$，核对一下是否做对了.

18. 在区间 $[0,a]$ 上任意投掷一个质点，以 X 表示这个质点的坐标. 设这个质点落在 $[0,a]$ 中任意小区间内的概率与这个小区间的长度成正比例. 试求 X 的分布函数.

解 X 的分布函数为

$$F(x) = P\{X \leqslant x\}.$$

当 $x<0$ 时，$F(x)=P\{X\leqslant x\}=P\{\varnothing\}=0$，

当 $0\leqslant x\leqslant a$ 时，按题意 $P\{0\leqslant X\leqslant x\}=kx$，$k$ 是某一常数，为了确定 k，取 $x=a$，得 $P\{0\leqslant X\leqslant a\}=ka$. 因我们只是在区间 $[0,a]$ 上投掷质点，所以 $\{0\leqslant X\leqslant a\}$ 为必然事件，即有 $1=P\{0\leqslant X\leqslant a\}=ka$，$k=\dfrac{1}{a}$，因此

当 $0\leqslant x<a$ 时，$F(x)=P\{X\leqslant x\}=\dfrac{x}{a}$，

当 $x\geqslant a$ 时，按题意 $P\{X\leqslant x\}$ 为必然事件，即有

$$F(x) = P\{X \leqslant x\} = 1,$$

故知

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \dfrac{x}{a}, & 0 \leqslant x < a, \\ 1, & x \geqslant a. \end{cases}$$

19. 以 X 表示某商店从早晨开始营业起直到第一个顾客到达的等待时间（以分计），X 的分布函数是

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-0.4x}, & x > 0, \\ 0, & x \leqslant 0. \end{cases}$$

求下述概率：

(1) $P\{$至多 3 分钟$\}$.

(2) $P\{$至少 4 分钟$\}$.

(3) $P\{$3 分钟至 4 分钟之间$\}$.

(4) $P\{$至多 3 分钟或至少 4 分钟$\}$.

(5) $P\{$恰好 2.5 分钟$\}$.

解 (1) $P\{$至多 3 分钟$\}=P\{X\leqslant 3\}=F_X(3)=1-\mathrm{e}^{-1.2}$.

(2) $P\{$至少 4 分钟$\}=P\{X\geqslant 4\}=1-P\{X<4\}$

$$=1-P\{X\leqslant 4\}=1-F_X(4)=\mathrm{e}^{-1.6}.$$

（因为 $F_X(x)$ 是指数分布随机变量 X 的分布函数，X 是连续型随机变量，故 $P\{X=4\}=0$，$P\{X<4\}=P\{X\leqslant 4\}$.）

(3) $P\{$3 分钟至 4 分钟之间$\}=P\{3\leqslant X\leqslant 4\}=P\{3<X\leqslant 4\}$

$$=F_X(4)-F_X(3)=\mathrm{e}^{-1.2}-\mathrm{e}^{-1.6}.$$

(4) $P\{$至多 3 分钟或至少 4 分钟$\}=P\{(X\leqslant 3)\cup(X\geqslant 4)\}$

$$=P\{X\leqslant 3\}+P\{X\geqslant 4\}$$

$$=1-\mathrm{e}^{-1.2}+\mathrm{e}^{-1.6}.$$

(5) $P\{$恰好 2.5 分钟$\}=P\{X=2.5\}=0$.

20. 设随机变量 X 的分布函数为

$$F_X(x)=\begin{cases}0, & x<1,\\ \ln x, & 1\leqslant x<\mathrm{e},\\ 1, & x\geqslant \mathrm{e}.\end{cases}$$

(1) 求 $P\{X<2\}$，$P\{0<X\leqslant 3\}$，$P\left\{2<X<\frac{5}{2}\right\}$.

(2) 求概率密度 $f_X(x)$.

解　(1) 对应任意指定的实数 a，只要随机变量 X（不管什么类型）的分布函数在点 a 处连续，则 $P\{X=a\}=0$（参见教材第二章 §4 关于 $P\{X=a\}=0$ 的证明），故有

$$P\{X<2\}=P\{X\leqslant 2\}=F_X(2)=\ln 2,$$

$$P\{0<X\leqslant 3\}=F_X(3)-F_X(0)=1-0=1.$$

$$P\left\{2<X<\frac{5}{2}\right\}=P\left\{2<X\leqslant\frac{5}{2}\right\}=F_X\left(\frac{5}{2}\right)-F_X(2)$$

$$=\ln\frac{5}{2}-\ln 2=\ln\frac{5}{4}.$$

(2) 由于在 $f_X(x)$ 的连续点处有 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_X(x)=f_X(x)$，即有

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}, & 1<x<\mathrm{e},\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

因 $f_X(x)$ 在个别点的函数值可以是随意指定的有限值（参见教材第二章 §4 页下注），这里我们指定 $f_X(1)=0$，$f_X(\mathrm{e})=0$.

21. 设随机变量 X 的概率密度为

(1) $f(x)=\begin{cases}2\left(1-\frac{1}{x^2}\right), & 1\leqslant x\leqslant 2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

(2) $f(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x<1,\\ 2-x, & 1\leqslant x<2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

求 X 的分布函数 $F(x)$，并画出(2)中的 $f(x)$ 及 $F(x)$ 的图形.

解　(1) 因概率密度 $f(x)$ 在 $x<1$，$x>2$ 处都等于零，即知

当 $x<1$ 时，$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{x}0\mathrm{d}x=0$，

当 $x>2$ 时，$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(x)\mathrm{d}x=1-\int_{x}^{\infty}f(x)\mathrm{d}x=1-\int_{x}^{\infty}0\mathrm{d}x=1.$

当 $1\leqslant x\leqslant 2$ 时，$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{1} 0\mathrm{d}x+\int_{1}^{x} 2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x$

$$=2\left(x+\frac{1}{x}\right)\Big|_1^x=2\left(x+\frac{1}{x}-2\right).$$

故所求分布函数是

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<1,\\ 2\left(x+\dfrac{1}{x}-2\right), & 1\leqslant x<2,\\ 1, & x\geqslant 2.\end{cases}$$

(2) 概率密度 $f(x)$ 在 $x<0,x\geqslant 2$ 处都等于零，即知

当 $x<0$ 时，$F(x)=0$；$x\geqslant 2$ 时，$F(x)=1$，又

当 $0\leqslant x<1$ 时，

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{0} 0\mathrm{d}x+\int_{0}^{x} x\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}.$$

当 $1\leqslant x<2$ 时，

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{0} 0\mathrm{d}x+\int_{0}^{1} x\mathrm{d}x+\int_{1}^{x}(2-x)\mathrm{d}x$$

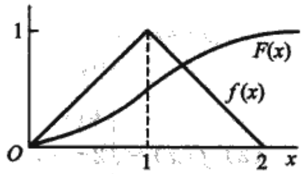
$$=\frac{1}{2}+\left(2x-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_1^x=2x-\frac{x^2}{2}-1.$$

故所求分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \dfrac{x^2}{2}, & 0\leqslant x<1,\\ 2x-\dfrac{x^2}{2}-1, & 1\leqslant x<2,\\ 1, & x\geqslant 2.\end{cases}$$

$f(x)$，$F(x)$ 的图形如题 2.21 图.

注：分段定义的连续型随机变量的分布函数 $F(x)$，由于 $F(x)$ 连续，它的定义域中各子区间的端点，只要求表达清楚，属于哪一个区间无关紧要，也没必要与 $f(x)$ 一致.



2-1
题 2.21 图

22. (1) 分子运动速度的绝对值 X 服从麦克斯韦(Maxwell)分布，其概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}Ax^2\mathrm{e}^{-x^2/b}, & x>0,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

其中 $b=m/(2kT)$，k 为玻耳兹曼(Boltzmann)常数，T 为绝对温度，m 是分子的

质量,试确定常数 A.

(2) 研究了英格兰在 1875—1951 年期间,在矿山发生导致不少于 10 人死亡的事故的频繁程度,得知相继两次事故之间的时间 T(以日计)服从指数分布,其概率密度为

$$f_T(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{241}\mathrm{e}^{-t/241}, & t>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求分布函数 $F_T(t)$,并求概率 $P\{50<T<100\}$.

解 (1) 因 X 的概率密度函数 $f(x)$ 具有性质

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\mathrm{d}x=1,$$

故由

$$\begin{aligned}1&=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{0}0\mathrm{d}x+\int_{0}^{\infty}Ax^2\mathrm{e}^{-x^2/b}\mathrm{d}x\\&=-A\frac{b}{2}x\mathrm{e}^{-x^2/b}\Big|_0^{\infty}+\frac{Ab}{2}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-x^2/b}\mathrm{d}x\\&\xlongequal{令 x/\sqrt{b}=u}\frac{Ab\sqrt{b}}{2}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u=\frac{Ab\sqrt{b}}{4}\sqrt{\pi}\end{aligned}$$

(由 $\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-t^2/2}\mathrm{d}t=\sqrt{2\pi}$,知 $\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$),得到

$$A=\frac{4}{b\sqrt{b\pi}}.$$

(2) 当 $t<0$ 时,$F_T(t)=\int_{-\infty}^{t}f_T(t)\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{t}0\mathrm{d}t=0$,

当 $t>0$ 时,

$$F_T(t)=\int_{-\infty}^{t}f_T(t)\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{0}0\mathrm{d}t+\int_0^t\frac{1}{241}\mathrm{e}^{-t/241}\mathrm{d}t=1-\mathrm{e}^{-t/241},$$

故所求的分布函数为

$$F_T(t)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-t/241}, & t>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

而 $P\{50<T<100\}=F_T(100)-F_T(50)=\mathrm{e}^{-50/241}-\mathrm{e}^{-100/241}$.

23. 某种型号器件的寿命 X(以 h 计)具有概率密度:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1\,000}{x^2}, & x>1\,000,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

现有一大批此种器件(设各器件损坏与否相互独立),任取 5 只,问其中至少有 2 只寿命大于 1 500 小时的概率是多少?

解 任取一只该种器件,其寿命大于 1 500 h 的概率为

$$p=\int_{1\,500}^{\infty}\frac{1\,000}{x^2}\mathrm{d}x=-\frac{1\,000}{x}\bigg|_{1\,500}^{\infty}=\frac{2}{3}.$$

任取 5 只这种器件,其中寿命大于 1 500 小时的只数记为 X,则 $X\sim b(5,2/3)$(理由参见教材第二章 § 2 例 2). 故所求概率为

$$\begin{aligned}P\{X\geqslant 2\}&=1-P\{X=0\}-P\{X=1\}\\&=1-\left(1-\frac{2}{3}\right)^5-\binom{5}{1}\frac{2}{3}\left(1-\frac{2}{3}\right)^4=\frac{232}{243}.\end{aligned}$$

24. 设顾客在某银行的窗口等待服务的时间 X(min)服从指数分布,其概率密度为

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{5}\mathrm{e}^{-x/5}, & x>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

某顾客在窗口等待服务,若超过 10 min 他就离开. 他一个月要到银行 5 次. 以 Y 表示一个月内他未等到服务而离开窗口的次数. 写出 Y 的分布律,并求 $P\{Y\geqslant 1\}$.

解 顾客在窗口等待服务超过 10 min 的概率为

$$p=\int_{10}^{\infty}f_X(x)\mathrm{d}x=\int_{10}^{\infty}\frac{1}{5}\mathrm{e}^{-x/5}\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{-2},$$

故顾客去银行一次因未等到服务而离开的概率为 e^{-2}. 从而 $Y\sim b(5,\mathrm{e}^{-2})$. Y 的分布律为

$$P\{Y=k\}=\binom{5}{k}(\mathrm{e}^{-2})^k(1-\mathrm{e}^{-2})^{5-k},\quad k=0,1,2,3,4,5.$$

$$P\{Y\geqslant 1\}=1-P\{Y=0\}=1-(1-\mathrm{e}^{-2})^5=0.5167.$$

25. 设 K 在(0,5)服从均匀分布,求 x 的方程

$$4x^2+4Kx+K+2=0$$

有实根的概率.

解 x 的二次方程 $4x^2+4Kx+K+2=0$ 有实根的充要条件是它的判别式

$$\Delta=(4K)^2-4\times 4(K+2)\geqslant 0,$$

即

$$16(K+1)(K-2)\geqslant 0,$$

解得

$$K\geqslant 2,\text{或 }K\leqslant -1.$$

由假设 K 在区间(0,5)上服从均匀分布,其概率密度为

$$f_K(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{5}, & 0<x<5,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

故这个二次方程有实根的概率为

$$p = P\{(K \geqslant 2) \cup (K \leqslant -1)\} = P\{K \geqslant 2\} + P\{K \leqslant -1\}$$
$$= \int_2^{\infty} f_K(x)\mathrm{d}x + \int_{-\infty}^{-1} f_K(x)\mathrm{d}x = \int_2^5 \frac{1}{5}\mathrm{d}x + \int_{-\infty}^{-1} 0\mathrm{d}x = \frac{3}{5}.$$

26. 设 $X \sim N(3,2^2)$.

(1) 求 $P\{2<X\leqslant 5\}, P\{-4<X\leqslant 10\}, P\{|X|>2\}, P\{X>3\}$.

(2) 确定 c，使得 $P\{X>c\}=P\{X\leqslant c\}$.

(3) 设 d 满足 $P\{X>d\}\geqslant 0.9$，问 d 至多为多少？

解 (1) 因 $X \sim N(3,2^2)$，故有

$$P\{a < X \leqslant b\} = P\left\{\frac{a-3}{2} < \frac{X-3}{2} \leqslant \frac{b-3}{2}\right\} = \Phi\left(\frac{b-3}{2}\right) - \Phi\left(\frac{a-3}{2}\right).$$

$$P\{2 < X \leqslant 5\} = \Phi\left(\frac{5-3}{2}\right) - \Phi\left(\frac{2-3}{2}\right) = \Phi(1) - \Phi(-0.5)$$
$$= \Phi(1) - (1 - \Phi(0.5)) = 0.841\,3 - 1 + 0.691\,5$$
$$= 0.532\,8.$$

$$P\{-4 < X \leqslant 10\} = \Phi\left(\frac{10-3}{2}\right) - \Phi\left(\frac{-4-3}{2}\right)$$
$$= \Phi(3.5) - \Phi(-3.5) = 2\Phi(3.5) - 1$$
$$= 2 \times 0.999\,8 - 1 = 0.999\,6.$$

$$P\{|X| > 2\} = 1 - P\{|X| \leqslant 2\} = 1 - P\{-2 \leqslant X \leqslant 2\}$$
$$= 1 - \left[\Phi\left(\frac{2-3}{2}\right) - \Phi\left(\frac{-2-3}{2}\right)\right]$$
$$= 1 - \Phi(-0.5) + \Phi(-2.5)$$
$$= \Phi(0.5) + 1 - \Phi(2.5)$$
$$= 0.691\,5 + 1 - 0.993\,8 = 0.697\,7.$$

$$P\{X > 3\} = 1 - P(X \leqslant 3) = 1 - \Phi\left(\frac{3-3}{2}\right)$$
$$= 1 - \Phi(0) = 1 - 0.5 = 0.5.$$

(2) 由 $P\{X>c\}=P\{X\leqslant c\}$，得

$$1 - P\{X \leqslant c\} = P\{X \leqslant c\}, P\{X \leqslant c\} = \frac{1}{2},$$

即有 $\Phi\left(\frac{c-3}{2}\right) = \frac{1}{2} = \Phi(0)$，于是 $\frac{c-3}{2} = 0, c = 3$.

(3) $P\{X>d\}\geqslant 0.9$，即

$$1 - \Phi\left(\frac{d-3}{2}\right) \geqslant 0.9,$$

$$\Phi\left(-\frac{d-3}{2}\right) \geqslant 0.9 = \Phi(1.282),$$

因分布函数 $\Phi(x)$ 是一个不减函数，故有

$$-\frac{d-3}{2}\geqslant 1.282,$$

因此
$$d\leqslant 3+2\times(-1.282)=0.436.$$

27. 某地区 18 岁的女青年的血压（收缩压，以 mmHg 计，1 mmHg = 133.322 4 Pa）服从 $N(110,12^2)$ 分布．在该地区任选一 18 岁的女青年，测量她的血压 X．求

(1) $P\{X\leqslant 105\}$，$P\{100<X\leqslant 120\}$．

(2) 确定最小的 x，使 $P\{X>x\}\leqslant 0.05$．

解　(1) 因为 $X\sim N(110,12^2)$，故有

$$P\{X\leqslant 105\}=\Phi\left(\frac{105-110}{12}\right)=\Phi\left(\frac{-5}{12}\right)$$
$$=1-\Phi(0.417)=1-0.661\,7=0.338\,3.$$

$$P\{100<X\leqslant 120\}=\Phi\left(\frac{120-110}{12}\right)-\Phi\left(\frac{100-110}{12}\right)$$
$$=2\Phi\left(\frac{10}{12}\right)-1=2\Phi(0.833)-1$$
$$=2\times 0.797\,6-1=0.595\,2.$$

(2) 要求 $P\{X>x\}\leqslant 0.05$．因 $P\{X>x\}=1-P\{X\leqslant x\}=1-\Phi\left(\frac{x-110}{12}\right)$，即要求

$$1-\Phi\left(\frac{x-110}{12}\right)\leqslant 0.05,$$

即需
$$\Phi\left(\frac{x-110}{12}\right)\geqslant 0.95=\Phi(1.645).$$

由此得
$$\frac{x-110}{12}\geqslant 1.645,\quad x\geqslant 129.74.$$

故 x 的最小值为 129.74．

28. 由某机器生产的螺栓的长度(cm)服从参数 $\mu=10.05$，$\sigma=0.06$ 的正态分布．规定长度在范围 10.05 ± 0.12 内为合格品，求一螺栓为不合格品的概率．

解　记螺栓的长度为 X，$X\sim N(10.05,0.06^2)$，螺栓不合格的概率为

$$1-P\{10.05-0.12<X<10.05+0.12\}$$
$$=1-\left[\Phi\left(\frac{10.05+0.12-10.05}{0.06}\right)-\Phi\left(\frac{10.05-0.12-10.05}{0.06}\right)\right]$$
$$=1-\Phi(2)+\Phi(-2)=0.045\,6.$$

29. 一工厂生产的某种元件的寿命 X（以小时计）服从参数为 $\mu=160$，$\sigma(\sigma>0)$ 的正态分布．若要求 $P\{120<X\leqslant 200\}\geqslant 0.80$，允许 σ 最大为多少？

解 $X \sim N(160,\sigma^2)$，今要求

$$P\{120 < X \leqslant 200\} = \Phi\left(\frac{40}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{-40}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{40}{\sigma}\right) - 1 \geqslant 0.80,$$

即要求
$$\Phi\left(\frac{40}{\sigma}\right) \geqslant 0.9 = \Phi(1.282),$$

应有
$$\frac{40}{\sigma} \geqslant 1.282,\quad \sigma \leqslant \frac{40}{1.282} = 31.20,$$

即允许 σ 最大为 31.20.

30. 设在一电路中，电阻两端的电压(伏)服从 $N(120,2^2)$，今独立测量了 5 次，试确定有 2 次测定值落在区间[118,122]之外的概率.

解 设第 i 次测定值为 X_i，$i=1,2,3,4,5$，则 $X_i \sim N(120,4)$.

$$P\{118 \leqslant X_i \leqslant 122\} = \Phi\left(\frac{122-120}{2}\right) - \Phi\left(\frac{118-120}{2}\right)$$
$$= \Phi(1) - \Phi(-1) = 2\Phi(1) - 1 = 0.682\,6.$$

$P\{X_i \notin [118,122]\} = 1 - P\{118 \leqslant X \leqslant 122\} = 0.317\,4$，$i=1,2,3,4,5$.
因诸 X_i 相互独立，故若以 Y 表示 5 次测量其测定值 X_i 落在[118,120]之外的个数，则 $Y \sim b(5,0.317\,4)$，故所求概率为

$$P\{Y=2\} = \binom{5}{2}(0.317\,4)^2(0.682\,6)^3 = 0.320\,4.$$

31. 某人上班，自家里去办公楼要经过一交通指示灯，这一指示灯有 80%时间亮红灯，此时他在指示灯旁等待直至绿灯亮. 等待时间在区间[0,30](以秒计)服从均匀分布. 以 X 表示他的等待时间，求 X 的分布函数 $F(x)$. 画出 $F(x)$ 的图形，并问 X 是否为连续型随机变量，是否为离散型的？(要说明理由)

解 当他到达交通指示灯处时，若是亮绿灯，则等待时间 X 为零，亮红灯则等待时间 X 服从均匀分布. 记 A 为事件"指示灯亮绿灯"，对于固定的 $x \geqslant 0$，由全概率公式有

$$P\{X \leqslant x\} = P\{X \leqslant x \mid A\}P(A) + P\{X \leqslant x \mid \overline{A}\}P(\overline{A}),$$

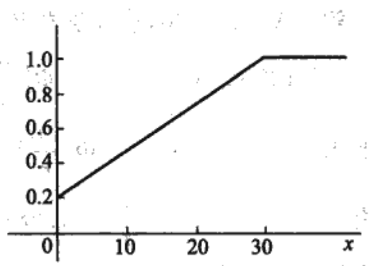
其中 $P\{X \leqslant x \mid A\} = 1$，$P\{X \leqslant x \mid \overline{A}\} = \frac{x}{30}$ (当 $0 \leqslant x \leqslant 30$)，$P(X \leqslant x \mid \overline{A}) = 1$ (当 $x > 30$). 由 $P(A) = 0.2$ 得到

$$P\{X \leqslant x\} = 1 \times 0.2 + \frac{x}{30} \times 0.8 = 0.2 + \frac{0.8x}{30} \quad (\text{当 } 0 \leqslant x \leqslant 30);$$
$$P\{X \leqslant x\} = 1 \times 0.2 + 1 \times 0.8 = 1 \quad (\text{当 } x > 30).$$

于是得 X 的分布函数为

$$F(x) = P\{X \leqslant x\} = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 0.2 + \dfrac{0.8x}{30}, & 0 \leqslant x < 30, \\ 1, & x \geqslant 30. \end{cases}$$

因 $F(x)$ 在 $x=0$ 处有不连续点，故随机变量 X 不是连续型的，又因不存在一个可列的点集，使得在这个点集上 X 取值的概率为 1，故随机变量 X 也不是离散型的，X 是混合型随机变量.



题 2.31 图

32. 设 $f(x)$，$g(x)$ 都是概率密度函数，求证

$$h(x)=\alpha f(x)+(1-\alpha)g(x),\quad 0\leqslant\alpha\leqslant 1$$

也是一个概率密度函数.

解 因 f,g 都是概率密度函数，故有

$$f(x)\geqslant 0,\quad g(x)\geqslant 0,\tag{$*_1$}$$

且
$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\mathrm{d}x=1,\qquad \int_{-\infty}^{\infty}g(x)\mathrm{d}x=1.\tag{$*_2$}$$

现在 $0\leqslant\alpha\leqslant 1$，故 $1-\alpha\geqslant 0$，由 $(*_1)$ 有

$$\alpha f(x)\geqslant 0,\qquad (1-\alpha)g(x)\geqslant 0,$$

于是
$$h(x)\geqslant 0.$$

又由 $(*_2)$ 知

$$\int_{-\infty}^{\infty}h(x)\mathrm{d}x=\alpha\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\mathrm{d}x+(1-\alpha)\int_{-\infty}^{\infty}g(x)\mathrm{d}x=\alpha+(1-\alpha)=1,$$

所以 $h(x)$ 是一个概率密度函数.

33. 设随机变量 X 的分布律为

X	-2	-1	0	1	3
p_k	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{11}{30}$

求 $Y=X^2$ 的分布律.

解 $Y=X^2$ 所有可能取值为 0,1,4,9.

$$P\{Y=0\}=P\{X=0\}=\frac{1}{5},$$

$$\begin{aligned}P\{Y=1\}&=P\{X^2=1\}=P\{(X=1)\cup(X=-1)\}\\&=P\{X=1\}+P\{X=-1\}=\frac{1}{15}+\frac{1}{6}=\frac{7}{30},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P\{Y=4\}&=P\{X^2=4\}=P\{(X=2)\cup(X=-2)\}\\&=P\{X=2\}+P\{X=-2\}=0+\frac{1}{5}=\frac{1}{5},\end{aligned}$$

$$P\{Y=9\}=P\{X^2=9\}=P\{(X=3)\cup(X=-3)\}$$

$$=P\{X=3\}+P\{X=-3\}=\frac{11}{30}+0=\frac{11}{30},$$

故 X 的分布律为

Y	0	1	4	9
p_k	$\frac{1}{5}$	$\frac{7}{30}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{11}{30}$

34. 设随机变量 X 在区间$(0,1)$服从均匀分布.

(1) 求 $Y=e^X$ 的概率密度.

(2) 求 $Y=-2\ln X$ 的概率密度.

解 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

分别记 X,Y 的分布函数为 $F_X(x),F_Y(y)$.

(1) 先来求 Y 的分布函数 $F_Y(y)$,因 $Y=e^X>0$,故当 $y\leqslant 0$ 时,$F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=0$,从而 $f_Y(y)=0$. 当 $y>0$ 时,

$$\begin{aligned}F_Y(y)&=P\{Y\leqslant y\}=P\{e^X\leqslant y\}\\&=P\{X\leqslant \ln y\}=F_X(\ln y).\end{aligned}$$

将上式关于 y 求导,得

$$f_Y(y)=f_X(\ln y)\cdot\frac{1}{y}=\begin{cases}1\cdot\dfrac{1}{y}, & 0<\ln y<1,\\ 0, & \ln y<0 \text{ 或 } \ln y>1\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{y}, & 1<y<e,\\ 0, & 0<y<1 \text{ 或 } y>e,\end{cases}$$

故有

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{y}, & 1<y<e,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(2) 先来求 $F_Y(y)$. 当 X 在$(0,1)$取值时 $Y>0$,故当 $y\leqslant 0$ 时,$F_Y(y)=0$,从而 $f_Y(y)=0$. 当 $y>0$ 时,

$$\begin{aligned}F_Y(y)&=P\{Y\leqslant y\}=P\{-2\ln X\leqslant y\}=P\{X\geqslant e^{-y/2}\}\\&=1-P\{X<e^{-y/2}\}=1-F_X(e^{-y/2}),\end{aligned}$$

于是

$$f_Y(y)=-f_X(e^{-y/2})\left(-\frac{1}{2}e^{-y/2}\right)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}e^{-y/2}, & y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

本题也可以利用教材第二章§5定理的结果直接解得：

(1) $Y=\mathrm{e}^X$，即有 $y=g(x)=\mathrm{e}^x$，在区间(0,1)上恒有 $g'(x)=\mathrm{e}^x>0$，因此 $g(x)$严格单调增加，且 $g(x)$具有反函数 $x=h(y)=\ln y$，又 $h'(y)=\dfrac{1}{y}$，$g(0)=1$，$g(1)=\mathrm{e}$，由教材第二章(5.2)式，得 $Y=\mathrm{e}^X$ 的概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases} f_X(\ln y)\left|\dfrac{1}{y}\right|, & 1<y<\mathrm{e}, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}=\begin{cases} \dfrac{1}{y}, & 1<y<\mathrm{e}, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

(2) $Y=-2\ln X$，即有 $y=g(x)=-2\ln x$，在区间(0,1)上恒有 $g'(x)=-\dfrac{2}{x}<0$，且 $g(x)$具有反函数 $x=h(y)=\mathrm{e}^{-y/2}$，又 $h'(y)=-\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-y/2}$，$g(0)=\infty$，$g(1)=0$. 由教材第二章(5.2)式得 $Y=-2\ln X$ 的概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases} f_X(\mathrm{e}^{-y/2})\left|-\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-y/2}\right|, & 0<y<\infty, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

即

$$f_Y(y)=\begin{cases} \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-y/2}, & y>0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

注：利用教材第二章(5.2)式直接写出 $Y=g(X)$ 的概率密度时，应注意两点：

(1) 首先要检验函数 $y=g(x)$是否是严格单调的(一般可利用 $g'(x)$来检验)，如果不是严格单调的，那就不能采用这一公式. (2) 在公式中的 $h'(y)$要取绝对值，如忘记取绝对值，就可能犯严重的错误，例如在本题(2)中若忘记了将 $h'(y)$取绝对值，那么所得的概率密度就成为

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-y/2}, & y>0, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

就有 $f_Y(y)\leqslant 0$ 了.

35. 设 $X\sim N(0,1)$.

(1) 求 $Y=\mathrm{e}^X$ 的概率密度.

(2) 求$Y=2X^2+1$的概率密度.

(3) 求 $Y=|X|$的概率密度.

解 (1) 因为 $Y=\mathrm{e}^X$，故 Y 不取负值. 从而，若 $y<0$，则 $f_Y(y)=0$；若 $y>0$，注意到 $X\sim N(0,1)$，故 Y 的分布函数为

$$\begin{aligned} F_Y(y)&=P\{Y\leqslant y\}=P\{0<Y\leqslant y\}=P\{0<\mathrm{e}^X\leqslant y\} \\ &=P\{-\infty<X\leqslant \ln y\}=\Phi(\ln y). \end{aligned}$$

从而，$y>0$ 时，

$$f_Y(y)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}F_Y(y)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Phi(x)\Big|_{x=\ln y}\cdot\frac{1}{y}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(\ln y)^2}\cdot\frac{1}{y}.$$

于是，$Y=\mathrm{e}^X$ 的概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}y}\mathrm{e}^{-(\ln y)^2/2}, & y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(2) 因 $Y=2X^2+1$，故 Y 在 $[1,+\infty)$ 取值，从而 $y<1$ 时 $f_Y(y)=0$；若 $y\geqslant 1$，注意到 $X\sim N(0,1)$，故 Y 的分布函数为

$$\begin{aligned}F_Y(y)&=P\{Y\leqslant y\}=P\{2X^2+1\leqslant y\}\\&=P\left\{-\sqrt{\frac{y-1}{2}}\leqslant X\leqslant\sqrt{\frac{y-1}{2}}\right\}\\&=\Phi\left(\sqrt{\frac{y-1}{2}}\right)-\Phi\left(-\sqrt{\frac{y-1}{2}}\right)=2\Phi\left(\sqrt{\frac{y-1}{2}}\right)-1.\end{aligned}$$

故 $y>1$ 时，

$$\begin{aligned}f_Y(y)&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left[2\Phi\left(\sqrt{\frac{y-1}{2}}\right)-1\right]\\&=2\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-(y-1)/4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2(y-1)}}\\&=\frac{1}{2\sqrt{\pi(y-1)}}\mathrm{e}^{-(y-1)/4}.\end{aligned}$$

于是 $Y=2X^2+1$ 的概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{\pi(y-1)}}\mathrm{e}^{-(y-1)/4}, & y>1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(3) 对于 $Y=|X|$，显然，当 $y<0$ 时，$f_Y(y)=0$，当 $y\geqslant 0$ 时，注意到 $X\sim N(0,1)$，就有

$$\begin{aligned}F_Y(y)&=P\{0\leqslant Y\leqslant y\}=P\{|X|\leqslant y\}\\&=P\{-y\leqslant X\leqslant y\}=\Phi(y)-\Phi(-y)\\&=2\Phi(y)-1.\end{aligned}$$

因此，$y>0$ 时，

$$f_Y(y)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}F_Y(y)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}[2\Phi(y)-1]=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-y^2/2}.$$

故 $Y=|X|$ 的概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}, & y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

36. (1) 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x),-\infty<x<\infty$. 求 $Y=X^3$ 的概率密度.

(2) 设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求 $Y=X^2$ 的概率密度.

解 (1) $Y=X^3$,即有 $y=g(x)=x^3$,它严格单调增加,解得 $x=h(y)=y^{1/3}$,且有 $h'(y)=\dfrac{1}{3}y^{-2/3}$,由教材第二章(5.2)式得 $Y=X^3$ 的概率密度为

$$f_Y(y)=\frac{1}{3}y^{-2/3}f(y^{1/3}),\quad y\neq 0.$$

(2) $Y=X^2$,即有 $y=g(x)=x^2$,在 $x>0$ 时,$g(x)$ 严格单调增加,具有反函数 $x=h(y)=\sqrt{y}$,又有 $h'(y)=\dfrac{1}{2}y^{-1/2}$,由教材第二章(5.2)式得 $Y=X^2$ 的概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{y}}e^{-\sqrt{y}}, & y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

37. 设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x}{\pi^2}, & 0<x<\pi,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求 $Y=\sin X$ 的概率密度.

解 X 在 $(0,\pi)$ 取值时 $Y=\sin X$ 在 $(0,1)$ 取值,故若 $y<0$ 或 $y>1$ 时 $f_Y(y)=0$. 若 $0\leqslant y\leqslant 1$,Y 的分布函数为

$$\begin{aligned}F_Y(y)&=P\{Y\leqslant y\}=P\{0\leqslant Y\leqslant y\}=P\{0\leqslant\sin X\leqslant y\}\\&=P\{(0\leqslant X\leqslant\arcsin y)\cup(\pi-\arcsin y\leqslant X\leqslant\pi)\}\\&=P\{0\leqslant X\leqslant\arcsin y\}+P\{\pi-\arcsin y\leqslant X\leqslant\pi\}\\&=\int_0^{\arcsin y}\frac{2x}{\pi^2}dx+\int_{\pi-\arcsin y}^{\pi}\frac{2x}{\pi^2}dx\\&=\frac{1}{\pi^2}(\arcsin y)^2+1-\frac{1}{\pi^2}(\pi-\arcsin y)^2=\frac{2}{\pi}\arcsin y.\end{aligned}$$

所以当 $0<y<1$ 时,

$$f_Y(y)=\frac{d}{dy}F_Y(y)=\frac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}}.$$

因此,所求的概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}}, & 0<y<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

38. 设电流 I 是一个随机变量，它均匀分布在 9 A～11 A 之间. 若此电流通过 2 Ω 的电阻，在其上消耗的功率 $W=2I^2$. 求 W 的概率密度.

解　电流 I 的概率密度为

$$f_I(i)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & 9<i<11,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

$W=2I^2$，即有 $w=g(i)=2i^2$，在 $i>0$ 时，$g(i)$ 严格单调增加，且有反函数 $i=h(w)=\left(\dfrac{w}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$，而 $h'(w)=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}w^{-\frac{1}{2}}$，$g(9)=162, g(11)=242$. 由教材第二章(5.2)式得 $W=2I^2$ 的概率密度为

$$f_W(w)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2\sqrt{2}}w^{-\frac{1}{2}}\right), & 162<w<242,\\ 0, & 其他,\end{cases}$$

即

$$f_W(w)=\begin{cases}\dfrac{1}{4}\,\dfrac{1}{\sqrt{2w}}, & 162<w<242,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

39. 某物体的温度 $T(°F)$ 是随机变量，且有 $T\sim N(98.6,2)$，已知 $\Theta=\dfrac{5}{9}(T-32)$，试求 $\Theta(℃)$ 的概率密度.

解　T 的概率密度为

$$f_T(t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{(t-98.6)^2}{4}},\quad -\infty<t<\infty.$$

将 Θ 的分布函数记为 $F_\Theta(y)$，则有

$$\begin{aligned}F_\Theta(y)&=P\{\Theta\leqslant y\}=P\left\{\frac{5}{9}(T-32)\leqslant y\right\}\\&=P\left\{T\leqslant\frac{9}{5}y+32\right\}=\int_{-\infty}^{\frac{9}{5}y+32}f_T(t)\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

将上式关于 y 求导得到 Θ 的概率密度为

$$f_\Theta(y)=f_T\left(\frac{9}{5}y+32\right)\times\frac{9}{5}=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\times\frac{9}{5}e^{-\frac{1}{4}\left(\frac{9}{5}y+32-98.6\right)^2},$$

即有

$$f_\Theta(y)=\frac{9}{10\sqrt{\pi}}e^{-\frac{81(y-37)^2}{100}}.$$