离散数学

Discrete Mathematics

吴梅红

厦门大学计算机科学系

E-mail: wmh@xmu.edu.cn



6.6 格Lattice 与 布尔Boolean代数

- 与前面讨论的代数系统之间存在着一个重要区别:
  格与布尔代数的 载体都是有次序集。
- 格与布尔代数在计算机科学中的开关网络、数字电路设计和逻辑证明中有着广泛的应用。
- 在集合代数<S, ∩,∪>中,∩和∪满足交换律、结合律、分配律、吸收律和幂等律等。
- 在命题代数<S, ∧,∨>中,∧和∨满足交换律、结合律、分配律、吸收律和幂等律等。
- 电路代数<{0, 1}; ∧,∨,¬ >中∧, ∨,¬ 分别代表并联、串联、反向运算。

- 布尔代数$(B, \wedge, \vee, \neg)$。
- 上面的$<S,\cap,\cup>$和$<S, \wedge, \vee>$是从客观事物进行第一次抽象而得到的代数系统。
- 现在我们以这类代数系统为对象, 忽略它们的个性, 提取它们的共性, 进行第二次抽象, 得到格的概念。

定义 6.15 设 $<S, \preceq>$ 是偏序集, 若对于$\forall x, y \in S$, $\{x, y\}$都有最小上界和最大下界, 则称S关于偏序$\leq$作成一个格. $\blacksquare$

- 设x, y是格中任意两个元素, 由于{x, y}的 最大下界和最小上界是惟一存在的, 将{x, y}的

  最大下界记作 $x\wedge y$，最小上界记作 $x\vee y$ 。

- 本章中的$\wedge$和$\vee$符号只代表格中求最大下界**greatest lower bound**和最小上界**least upper bound**的运算。
- 对给定的**POSET**, 可以先画出**Hasse**图, 直接由**Hasse**图来判断它是否构成格: 即考虑任何两个元素是否有最小上界和最大下界 同时存在。

例 正整数集合Z^+关于整除关系构成格。因为$\forall a, b \in Z^+$,

$\sup\{a, b\} = lcm\{a, b\} = [a, b]$, $\inf\{a, b\} = \gcd\{a, b\} = (a, b)$

- 并非每个偏序集**POSET**都是格。 /*偏序格
- 例 $A = \{2, 3, 4, 6, 8, 12\}$, $\leq$是整除关系, A不是格。

  对于元素6和8, 其下确界是2, 但8和12没有上确界。

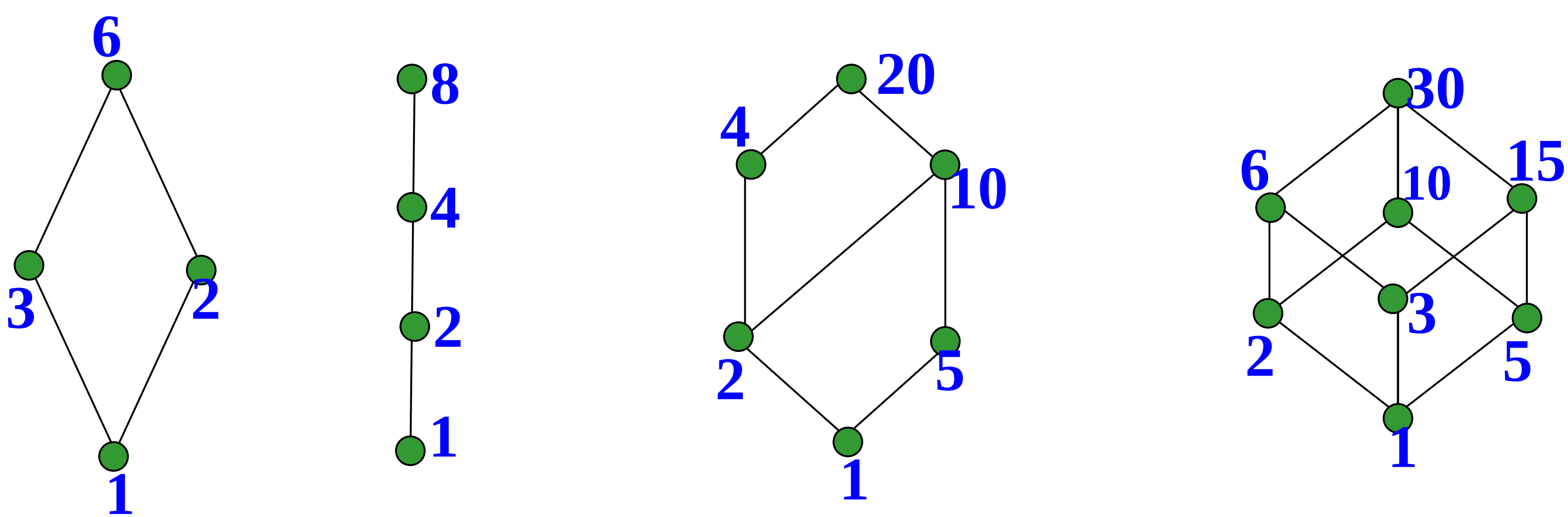
例 6.25 设$n \in Z^+$, S_n为n的正因子的集合, D为整除关系,

则 $<S_n, D>$ 构成格。$\forall$ x, y $\in S_n$,

$x \vee y$ 是 [x, y], x与y的 least common multiple;

$x \wedge y$ 是 (x, y), x与y的 greatest common divisor。

图6.2 所示的偏序集都是格



D_6 D_8 D_{20} D_{30}

例 6.26 (1) $P(B)$是集合B的幂集, $<P(B), \subseteq>$ 构成一个格, 称为幂集格。因为$\forall C, D \in P(B)$, 均有

$$\sup\{C, D\} = C \cup D, \quad \inf\{C, D\} = C \cap D.$$

(2) $\leqslant$为小于等于关系, 则 $<Z, \leqslant>$是格。$\forall x, y \in Z$,

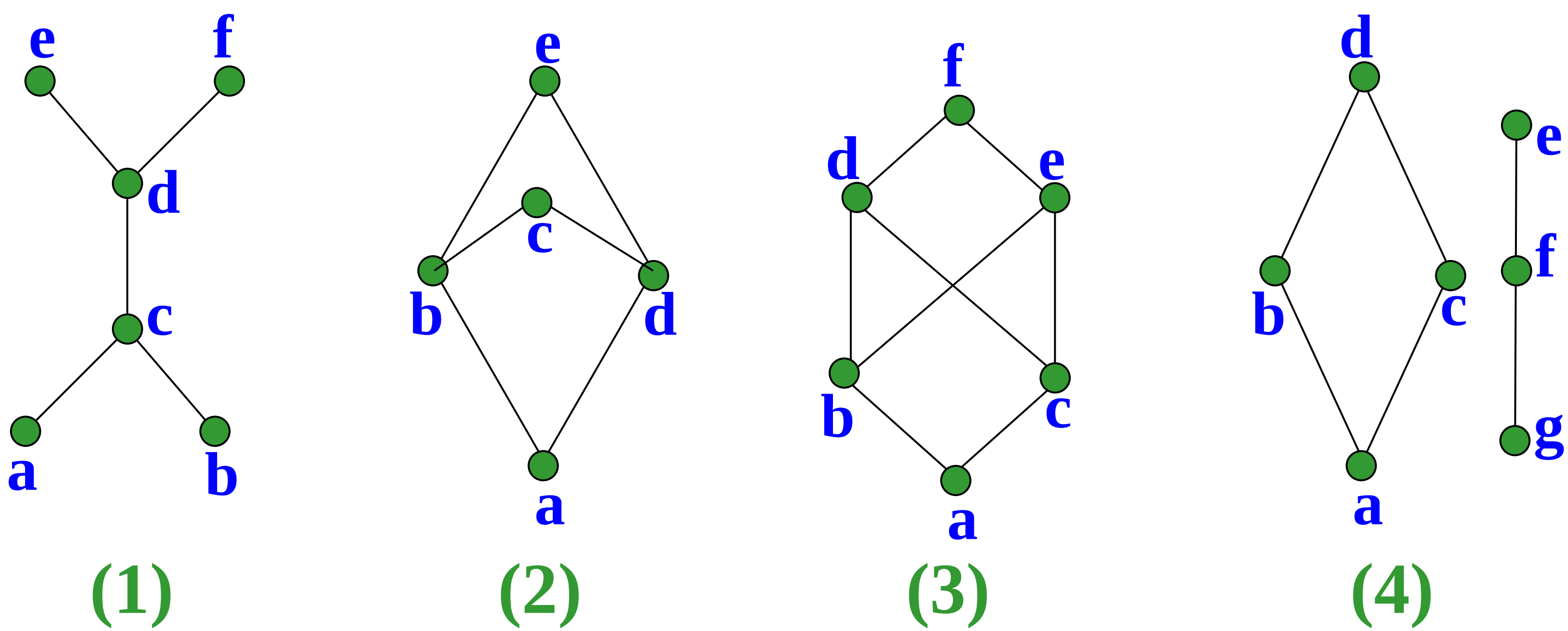
$$\sup\{x, y\} = \max\{x, y\}, \quad \inf\{x, y\} = \min\{x, y\}.$$

例 所有的链 (全序) $<L, \leq>$都是格。

例 设G为群, 令$L(G) = \{H \mid H\text{是}G\text{的子群}\}$, 则$<L(G), \subseteq>$ 构成一个格, 称为群G的子群格。$\forall H_1, H_2 \in L(G)$,

- H_1与H_2的最大下界是其交集$H_1 \cap H_2$, 也是G的子群;

H_1与H_2的最小上界是由$H_1 \cup H_2$生成的子群$<H_1 \cup H_2>$。



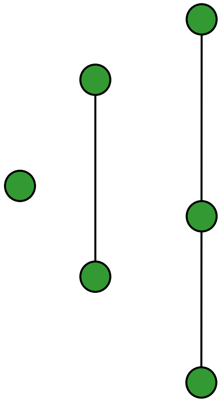
例 6.26 (3) 图6.3 中给出的偏序集都不是格。

(1) 中的{e, f} 没有最小上界。

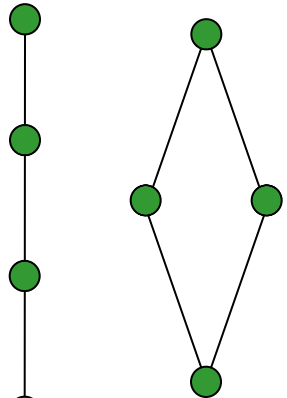
(2) 中的{b, d} 有上界c和e, 但没有最小上界。

(3) 中的{b, c} 没有最小上界。

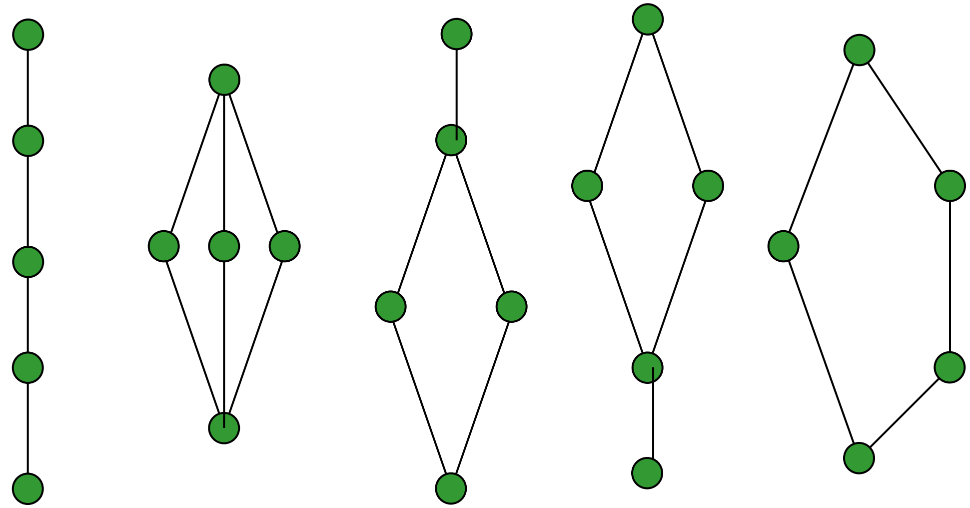
(4) 非连通图中的{a, e} 没有上界, 更没有最小上界。



图A

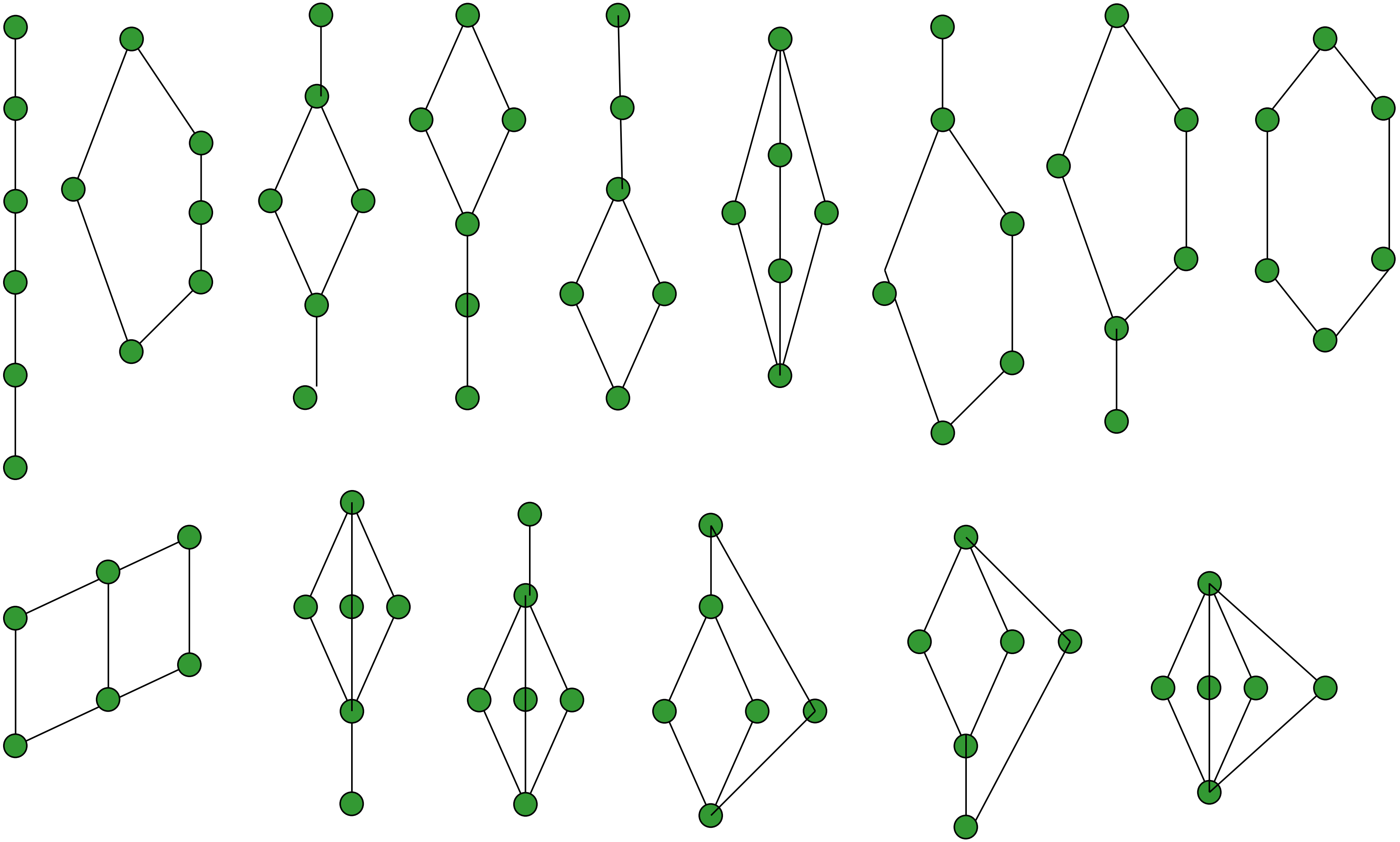


图B



图C

- 具有一个、两个、三个元素的格分别同构于图A中含有一个、两个、三个元素的链。
- 任何四元格必同构于图B所示的2个Hasse图之一所表示的格。
- 任何五元格必同构于图C所示的5个Hasse图之一所表示的格。



- 任何六元格必同构于图D所示的15个Hasse图之一所表示的格。

- 在格中, 公式是包含偏序关系$\leq$, $\geq$, 最小上界$\vee$, 最大下界$\wedge$等的公式。如 $a \wedge b \leq a$。

定义 设$<S, \leq>$是格, f 是由格中元素及$\leq$, $=$, $\geq$, $\wedge$, $\vee$,下界, 上界, inf, sup等符号所表示的公式, 如果将f 中的

$\leq$, $\geq$, $\wedge$, $\vee$,下界, 上界, inf, sup 分别替换成

$\geq$, $\leq$, $\vee$, $\wedge$, 上界,下界, sup, inf 后得到的命题为f*

称f*为f 的**对偶式**, 简称**对偶(dual)**。 ▌

例 若f 是$a \wedge b \leq a$, 那么f 的对偶式f* 是$a \vee b \geq a$。

若f是$a \wedge (a \vee b) = a$, 那么f的对偶式f*是$a \vee (a \wedge b) = a$。

格的对偶原理 如果公式f 对一切格为真，

则f 的对偶式也对一切格为真。

**证 设f*为f的对偶, $\langle S, \preceq\rangle$是任意的格, 只须证明f*对

$\langle S, \preceq\rangle$为真即可。如下定义S上的二元关系$\preceq'$:

$$\forall\, a, b \in S\text{有} \qquad a \preceq' b \;\Leftrightarrow\; a \succeq b,$$

- 易证 $\preceq'$ 也是S上的偏序。
- 设$\forall a, b \in S$, $\{a, b\}$的最大下界和最小上界存在, 分别记作 $a \wedge' b$, $a \vee' b$, 并且 $a \wedge' b = a \vee b$, $a \vee' b = a \wedge b$。
- 所以$\langle S, \preceq'\rangle$也是一个格,
  且 f*在$\langle S, \preceq\rangle$为真 $\Leftrightarrow$ f在$\langle S, \preceq'\rangle$为真。
- 由于命题f 对一切格为真, ∴f*在$\langle S, \preceq\rangle$中也为真。∎

- 许多格的性质都是以 对偶式成对出现。
- 我们只须证明其中的一个公式为真, 根据对偶原理, 其对偶式必然为真。

定理A 设<L, $\leq$>是格, $\forall a, b, c \in L$有 /*$\cap$, $\cup$,$\subseteq$, $\supseteq$

(1) $a \wedge b \leq a$, $a \wedge b \leq b$ (2) $a \vee b \geq a$, $a \vee b \geq b$

(3) $a \leq b$且$a \leq c \Rightarrow a \leq b \wedge c$ (4) $a \geq b$且$a \geq c \Rightarrow a \geq b \vee c$

** 证 易见(2)是(1)的对偶式, (4)是(3)的对偶式。

(2) $\forall a, b \in S$, $a \vee b$是$\{a, b\}$的最小上界。因此$a \vee b$既是a的上界也是b的上界, 故有 $a \vee b \geq a$, $a \vee b \geq b$。

(4) $\forall a, b, c \in S$, 由$a \geq b$和$a \geq c$ 知 a是$\{b, c\}$的上界, 而$b \vee c$ 是$\{b, c\}$的最小上界, 故 $a \geq b \vee c$ 。 $\blacksquare$

定理B 设<S, ≤>是格, $\forall a, b \in S$有

$$a \le b \iff a \wedge b = a \iff a \vee b = b。$$

*证 $\forall a, b \in S$, 设$a \le b$, 由偏序$\le$的自反性又有$a \le a$。由定理A (3)有 $a \le a \wedge b$。

由定理A (1)又有 $a \wedge b \le a$。

根据这两方面结果必有 $a \wedge b = a$。

- 反之, 若 $a \wedge b = a$, 由 $a \wedge b \le b$ 可得 $a \le b$。
- 综合上述就证明了$a \le b \iff a \wedge b = a$。
- 同理可证 $a \le b \iff a \vee b = b$ 。 $\blacksquare$

- 设$<L, \leq>$是格。$\forall a, b \in S$, 都有$a \wedge b, a \vee b \in S$。
- 可以把求 最大下界 与 最小上界 看作是S上的

  两个二元运算, 因此 $<L, \wedge, \vee>$ 构成了代数系统,

  称为格L导出的代数系统。
- 下面讨论这个代数系统的性质。

定理 6.11 设$\langle L, \leq \rangle$为格, 则

(1) $\forall a, b \in L$有 交换律

$$a \wedge b = b \wedge a, \qquad a \vee b = b \vee a;$$

(3) $\forall a \in L$有 幂等律

$$a \wedge a = a, \qquad a \vee a = a;$$

证 根据对偶原理只须证明每条性质的后半部分。

(1) $a \vee b$是$\{a, b\}$的最小上界, $b \vee a$是$\{b, a\}$的最小上界,

由于 $\{a, b\} = \{b, a\}$, 所以 $a \vee b = b \vee a$ 。 ∎

(3) $a \leq a$, a是$\{a, a\}$的上界, 所以 $a \geq a \vee a$。

由定理A (2) $a \vee a \geq a$, 因此 $a \vee a = a$。 ∎

定理 6.11 设$<L, \le>$为格, 则

(2) $\forall a, b, c \in L$有 结合律

$$(a\wedge b)\wedge c = a\wedge(b\wedge c), \quad (a\vee b)\vee c = a\vee(b\vee c);$$

证 (2) $(a\wedge b)\wedge c \le a\wedge b \le a$, ①

$(a\wedge b)\wedge c \le a\wedge b \le b$, ②

$(a\wedge b)\wedge c \le c$。 ③

由②和③得 $(a\wedge b)\wedge c \le b\wedge c$。 ④ /*定理A(3)

由①和④得 $(a\wedge b)\wedge c \le a\wedge(b\wedge c)$。

- 同理可证 $a\wedge(b\wedge c) \le (a\wedge b)\wedge c$。

根据$\le$的 反对称性有

$$(a\wedge b)\wedge c = a\wedge(b\wedge c)。 \quad \blacksquare$$

定理 6.11 设 $<L, \leq>$为格,

(4) $\forall a, b \in L$有 **吸收律**

$$a \wedge (a \vee b) = a, \qquad a \vee (a \wedge b) = a。$$

/*多胜少，$\wedge$,$\vee$运算可交换, a, b的位置灵活

证 (4) 由定理A (1) 有 $a \wedge (a \vee b) \leq a$;

- 又由 $a \leq a$ 和 $a \leq a \vee b$,

  根据定理A (3)有 $a \leq a \wedge (a \vee b)$;

- 根据$\leq$的 反对称性，得 $a \wedge (a \vee b) = a$。 $\blacksquare$

- 定理6.11说明 格中的 运算$\wedge$和$\vee$ 遵从

  交换律、结合律、幂等律和吸收律。

- 考虑一个相反的问题。能不能像群和环一样，

  通过规定集合、集合上的运算及运算所遵从的算律来

  给出格作为代数系统的定义 呢?

- 回答是肯定的。

- 这样定义的格中的偏序是什么?

  而这个偏序格所导出的代数系统 和

  原来的代数系统有什么关系呢?

引理 设 <S, *, o> 是代数系统，* 和 o 是二元运算。

若*和 o 是可交换、可结合、可吸收的, 则

(1) $\forall a \in S$ 有 $a * a = a$, $a \circ a = a$;

证 $a * a = a * (a \circ (a * a)) = a$, /*可吸收

$a \circ a = a \circ (a * (a \circ a)) = a$。 /*可吸收

/*即幂等律可由吸收律导出

(2) $\forall a, b \in S$ 有 $a \circ b = b \Leftrightarrow a * b = a$。 /*∩,∪

证 必要性 $a * b = a * (a \circ b) = a$。 /*可吸收

充分性 $a \circ b = (a * b) \circ b$

$= b \circ (b * a) = b$。 /*可吸收 ▮

定理6.12 设<S, $*$, o>是具有两个二元运算的代数系统。若 $*$和 o 运算遵从交换律、结合律和吸收律, 则可以适当定义S上的偏序≤, 使得 <S, ≤>构成一个格, 且<S, ≤>导出的代数系统<S, $\wedge$, $\vee$ >就是<S, $*$, o>。

证 在S上定义二元关系≤, $\forall a, b \in S$ 有

$a \le b \Leftrightarrow a \circ b = b$, /* o 即 $\vee$, $*$即 $\wedge$

则R为S上的偏序关系。因为根据引理有:

- $\forall a \in S$ 有 $a \circ a = a$, 即$a \le a$成立, ≤是自反的。
- $\forall a, b \in S$ 有 $a \le b$ 且 $b \le a \Rightarrow a \circ b = b$ 且 $b \circ a = a$
  $\Rightarrow a = b \circ a = a \circ b = b$, ≤是反对称的。
- $\forall a, b, c \in S$ 有 $a \le b$且$b \le c \Rightarrow a \circ b = b$且$b \circ c = c$

$\Rightarrow a \circ c = a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c = b \circ c = c$, ≤是传递的

- 下面证明 $\forall a, b \in A$, $\{a, b\}$有最大下界和最小上界。
- $\forall a, b \in S$ 有 $a \circ b \in S$, 且根据引理和已知条件得

  $a \circ (a \circ b) = (a \circ a) \circ b = a \circ b$,

  $b \circ (a \circ b) = b \circ (b \circ a) = (b \circ b) \circ a = b \circ a = a \circ b$,

  所以$a \circ b$是$\{a, b\}$的一个上界。 /* o右边为上界
- 假设$c \in S$也是$\{a, b\}$的上界, 则 $a \circ c = c$, $b \circ c = c$,

  那么就有 $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c) = a \circ c = c$。

  从而证明了$a \circ b \leq c$, $a \circ b$是$\{a, b\}$的最小上界。
- 根据引理的结论(2), 类似可证 $a*b$是$\{a, b\}$的最大下界。

因此$\langle S, \leq \rangle$ 构成一个格, 且这个格所导出的代数系统$\langle S, \wedge, \vee \rangle$ 就是 $\langle S, *, \circ \rangle$。 ■

- 根据 定理 6.12，我们可以从代数系统的角度给出格的另一个等价定义。　　　/*幂等律可由吸收律导出

定义6.16 设$\langle L, \wedge, \vee \rangle$是代数系统，其中$\wedge$和$\vee$是二元运算。若$\wedge$和$\vee$是运算满足 交换律、结合律和吸收律，则称$\langle L, \wedge, \vee \rangle$是一个(代数系统) 格。　■

- 由定理，偏序格和代数系统格是等价的。
- 今后我们不再区分是偏序的格还是代数系统的格，一律统称格L，并根据需要选取方便的形式。
- 下面继续讨论格的性质。

定理 C 设L是格, 则

(1) $\forall a, b, c \in L$有

$a \le b \Rightarrow a \wedge c \le b \wedge c$ 且 $a \vee c \le b \vee c$; /*保序性

**证 由 $a \wedge c \le a$ 和 $a \le b$ 得 $a \wedge c \le b$。 /*≤传递

而 $a \wedge c \le c$,

由这两个结果必有 $a \wedge c \le b \wedge c$。 /*定理A(3)

- 由$a \le b$ 和 $b \le b \vee c$ 得 $a \le b \vee c$ 。 /*≤传递

而 $c \le b \vee c$,

由这两个结果必有 $a \vee c \le b \vee c$ 。 /*定理A(4)

(2) $\forall a, b, c, d \in L$有

$a \le b$且$c \le d \Rightarrow a \wedge c \le b \wedge d$ /*强强联合强

且 $a \vee c \le b \vee d$。

** 证 已知 $a \le b$, 由(1)得 $a \wedge c \le b \wedge c$。

同理由 $c \le d$ 得 $c \wedge b \le d \wedge b$。

- 由于 $b \wedge c = c \wedge b$, $d \wedge b = b \wedge d$,

所以有 $a \wedge c \le b \wedge d$。 /* ≤传递性

- 同理可证 $a \vee c \le b \vee d$。 ∎
- 定理 C说明格运算∧和∨具有保序性。

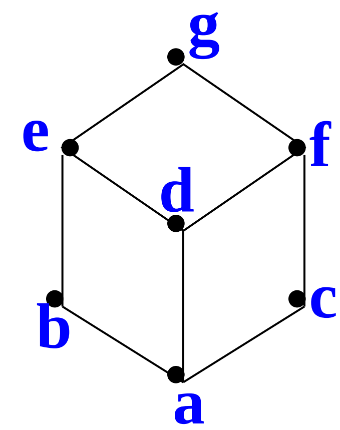
子格和格同态

- 子格就是格的子代数。

定义6.17 设$<L, \wedge, \vee>$是格, S是L的非空子集。若S关于运算$\wedge$和$\vee$是封闭 [即$\forall a, b \in S$, $a \wedge_L b \in S$, $a \vee_L b \in S$], 则称 $<S, \wedge, \vee>$是格L的子格。

- 设$<L, \wedge, \vee>$是格, $\forall a \in L$, $<\{a\}, \wedge, \vee>$为格L的子格。
- 在格L的Hasse图中，经传递边构成的两个元素的集合是格L的子格。
- $\forall n \in Z^+$, $<D_n, lcm, gcd>$为$<Z^+, lcm, gcd>$的子格。

例 6.27 考虑图6.4中的7元格L。它的



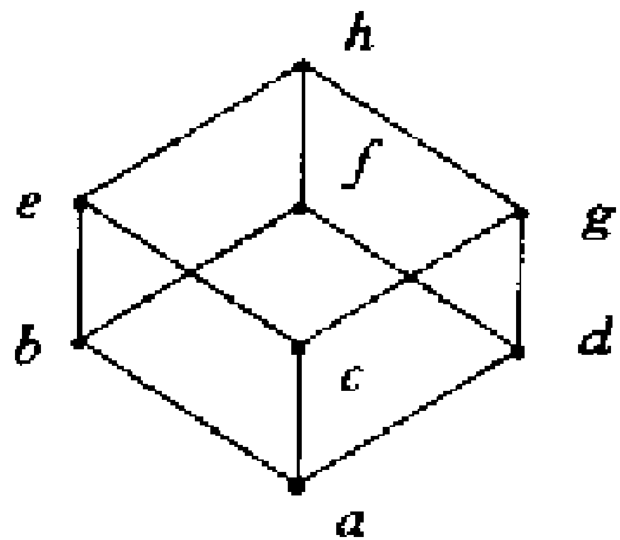
- 1元子格为{a}, {b}, {c}, {d}, {e}, {f}, {g}。
- 2元子格为{a, b}, {a, c}, {a, d}, {a, f}, {a, g}, {b, e}, {b, g}, {c, f}, {c, g}, {d, e}, {d, f}, {d, g}, {e, g}, {f, g}。
- 3元子格为{a, b, e}, {a, b, g}, {a, d, e}, {a, d, f}, {a, d, g}, {a, c, f}, {a, c, g}, {a, e, g}, {a, f, g}, {b, e, g}, {c, f, g}, {d, e, g}, {d, f, g} 。
- 4元子格为{a, b, e, g}, {a, d, e, g}, {a, d, f, g}, {a, c, f, g}, {a, b, d, e}, {a, c, d, f}, {d, e, f, g}, {a, b, f, g}, {a, c, e, g}。
- 5元子格为{a, b, d, e, g}, {a, c, d, f, g}, {a, d, e, f, g}, {a, b, c, f, g}, {a, b, c, e, g}。
- 6元子格为{a, c, d, e, f, g}, {a, b, d, e, f, g}。
- 7元子格只有1个, 就是L本身。其它非空子集都非子格

- 显然, 子格本身是一个格。
- 对于格<L, ∧, ∨>的非空子集S,

  且<S, $\wedge_S$, $\vee_S$>是一个格,

  但是<S, $\wedge_L$, $\vee_L$ >未必是<L, ∧, ∨>的子格。

例 设图是格L的Hasse图。



$S_1 = \{a, e, g, h\}$, S_1是格;

但S_1不是L的子格,

因为 $e \wedge g = c \notin S_1$ 。

$S_2 = \{a, c, e, h\}$是L的子格(链). $\blacksquare$

例 $<D_{30}, | >$, $D_{30} = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$, /*Divisor

$S = \{1, 2, 5, 6, 10, 15, 30\}$, $<S, | >$是格,

但S不是$<D_{30}, | >$的子格, 因为$(6, 15) = 3 \notin S$。 ■

- 子格的交还是格吗? 子格的并还是格吗? 都不一定!

子格的交若非空则还是格。

例 Klein四元群$G = \{e, a, b, c\}$, 则子群格

$$L(G) = \{\{e\}, \{e, a\}, \{e, b\}, \{e, c\}, G\}$$

- $\{e, a\}$和$\{e, b\}$在$P(G)$中的最小上界是$\{e, a, b\} \notin L(G)$。

对幂集格的求并运算就不封闭。 ■

定义 6.18 设L_1, L_2是格, $f: L_1 \to L_2$。若$\forall\, x, y \in L_1$有

$$f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y), \quad f(x \vee y) = f(x) \vee f(y),$$

则称φ是格L_1到L_2的同态映射, 简称同态。

- 若f 是单射, 则称φ是单同态;
- 若f 是满射, 则称φ是满同态,
- 若f 是双射, 则称φ是同构。 ■
- 同构的格的哈斯图一定相同。
- 尽管图6.4格L的4元子格有9个, 在同构意义上只有2个。

*定理D 设φ是格$<L_1, \wedge, \vee>$到$< L_2, \wedge, \vee>$的同态映射，

则 $\forall a, b \in L_1$ 有，if $a \leqslant b \Rightarrow \varphi(a) \leqslant \varphi(b)$。 /*保序性

证 由定理B $a \leqslant b \Leftrightarrow a \wedge b = a$。 /* if a, b不可比，忽略

因为φ是L_1到L_2的同态，

$$\varphi(a) = \varphi(a \wedge b) = \varphi(a) \wedge \varphi(b)。$$

由定理B $\varphi(a) \leqslant \varphi(b)$。 ∎

- 本定理说明 格同态具有保序性，但其 逆不一定真。

  保序映射$(a \le b \Rightarrow \varphi(a) \le \varphi(b))$不一定是同态映射。

*定理E 设L_1，L_2是格，$\varphi: L_1 \to L_2$是双射，

则 φ是同构的 充分必要条件 是:

$$\forall a, b \in L_1, \quad a \le b \Leftrightarrow \varphi(a) \le \varphi(b)。$$