第四章　随机变量的数字特征

1. (1) 在下列句子中随机地取一个单词，以 X 表示取到的单词所包含的字母个数，写出 X 的分布律并求 $E(X)$.

"THE GIRL PUT ON HER BEAUTIFUL RED HAT".

(2) 在上述句子的 30 个字母中随机地取一个字母，以 Y 表示取到的字母所在单词所包含的字母数，写出 Y 的分布律并求 $E(Y)$.

(3) 一人掷骰子，如得 6 点则掷第 2 次，此时得分为 6＋第二次得到的点数；否则得分为他第一次掷得的点数，且不能再掷，求得分 X 的分布律及 $E(X)$.

解　(1) 随机试验属等可能概型. 所给句子共 8 个单词，其中含 2 个字母，含 4 个字母，含 9 个字母的各有一个单词，另有 5 个单词含 3 个字母，所以 X 的分布律为

X	2	3	4	9
p_k	$\frac{1}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

数学期望

$$E(X) = 2 \times \frac{1}{8} + 3 \times \frac{5}{8} + 4 \times \frac{1}{8} + 9 \times \frac{1}{8} = \frac{15}{4}.$$

(2) 随机试验属等可能概型，Y 的可能值也是 2,3,4,9. 样本空间 S 由各个字母组成，共有 30 个样本点，其中样本点属于 $Y=2$ 的有 2 个，属于 $Y=3$ 的有 15 个，属于 $Y=4$ 的有 4 个，属于 $Y=9$ 的有 9 个，所以 Y 的分布律为

Y	2	3	4	9
p_k	$\frac{2}{30}$	$\frac{15}{30}$	$\frac{4}{30}$	$\frac{9}{30}$

数学期望　$E(Y) = 2 \times \frac{2}{30} + 3 \times \frac{15}{30} + 4 \times \frac{4}{30} + 9 \times \frac{9}{30} = \frac{73}{15}.$

(3) 分布律为

X	1	2	3	4	5	7	8	9	10	11	12
p_k	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$

$$E(X)=1\times\frac{1}{6}+2\times\frac{1}{6}+3\times\frac{1}{6}+4\times\frac{1}{6}+5\times\frac{1}{6}+7\times\frac{1}{36}+8\times\frac{1}{36}+9\times\frac{1}{36}$$
$$+10\times\frac{1}{36}+11\times\frac{1}{36}+12\times\frac{1}{36}$$
$$=\frac{49}{12}.$$

2. 某产品的次品率为0.1，检验员每天检验4次. 每次随机地取10件产品进行检验，如发现其中的次品数多于1，就去调整设备. 以 X 表示一天中调整设备的次数，试求 $E(X)$.（设诸产品是否为次品是相互独立的.）

解　先求检验一次，决定需要调整设备的概率. 设抽检出次品件数为 Y，则 $Y\sim b(10,0.1)$. 记需调整设备一次的概率为 p，则

$$p=P\{Y>1\}=1-P\{Y=0\}-P\{Y=1\}$$
$$=1-0.9^{10}-\binom{10}{1}\cdot 0.9^{9}\cdot 0.1=0.263\,9.$$

又因各次检验结果相互独立，故

$$X\sim b(4,0.263\,9).$$

X 的分布律为

X	0	1	2	3	4
p_k	$(1-p)^4$	$4p(1-p)^3$	$6p^2(1-p)^2$	$4p^3(1-p)$	p^4

于是

$$E(X)=1\times 4p(1-p)^3+2\times 6p^2(1-p)^2+3\times 4p^3(1-p)+4\times p^4$$
$$=4p=4\times 0.263\,9=1.055\,6.$$

以后将会知道若 $X\sim b(n,p)$，则 $E(X)=np$.

3. 有3只球，4个盒子，盒子的编号为1,2,3,4. 将球逐个独立地，随机地放入4个盒子中去. 以 X 表示其中至少有一只球的盒子的最小号码（例如 $X=3$ 表示第1号，第2号盒子是空的，第3个盒子至少有一只球），试求 $E(X)$.

解法(i)　由于每只球都有4种放法，由乘法原理共有 $4^3=64$ 种放法. 其中3只球都放在4号盒中的放置法仅有1种，从而

$$P\{X=4\}=\frac{1}{64}.$$

又 $\{X=3\}$ 表示事件“1,2号盒子都是空的，而3号盒子不空”. 因1,2号盒子都空，球只能放置在3,4号两个盒子中，共有 2^3 种放置法，但其中有一种是3只球都放在4号盒子中，即3号盒子是空的，这不符合 $X=3$ 的要求需除去，故有

$$P\{X=3\}=\frac{2^3-1}{64}=\frac{7}{64}.$$

同理可得
$$P\{X=2\}=\frac{3^3-2^3}{64}=\frac{19}{64},$$
$$P\{X=1\}=\frac{4^3-3^3}{64}=\frac{37}{64}.$$
因此
$$E(X)=\sum_{k=1}^{4}kP\{X=k\}=\frac{25}{16}.$$
注：$P\{X=1\}$ 也可由 $1-(P\{X=4\}+P\{X=3\}+P\{X=2\})$ 求得.

解法(ii)　以 $A_i(i=1,2,3,4)$ 记事件"第 i 个盒子是空盒". $\{X=1\}$ 表示事件"第一个盒子中至少有一只球",因此 $\{X=1\}=\bar{A}_1$,故
$$P\{X=1\}=P(\bar{A}_1)=1-P(A_1)=1-\left(\frac{3}{4}\right)^3=\frac{37}{64}.$$
(因第一个盒子为空盒,3 只球的每一只都只有 3 个盒子可以放,故 $P(A_1)=(3/4)^3$.)

$\{X=2\}$ 表示事件"第一个盒子为空盒且第二个盒子中至少有一只球",因此 $\{X=2\}=A_1\bar{A}_2$. 故
$$\begin{aligned}P\{X=2\}&=P(A_1\bar{A}_2)=P(\bar{A}_2\mid A_1)P(A_1)\\&=(1-P(A_2\mid A_1))P(A_1)\\&=\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^3\right]\left(\frac{3}{4}\right)^3=\frac{19}{64}.\end{aligned}$$
(因在第一个盒子是空盒的条件下,第二个盒子也是空盒,则 3 只球都只有 2 个盒子可以放,故 $P(A_2\mid A_1)=\left(\frac{2}{3}\right)^3$.)

类似地,
$$\begin{aligned}P\{X=3\}&=P(A_1A_2\bar{A}_3)\\&=P(\bar{A}_3\mid A_1A_2)P(A_2\mid A_1)P(A_1)\\&=\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^3\right]\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^3=\frac{7}{64},\end{aligned}$$
$$P\{X=4\}=1-\frac{37}{64}-\frac{19}{64}-\frac{7}{64}=\frac{1}{64},$$
因此, $E(X)=\sum_{k=1}^{4}kP\{X=k\}=\frac{25}{16}$.

解法(iii)　将球编号. 以 X_1,X_2,X_3 分别记 1 号,2 号,3 号球所落入的盒子的号码数. 则 X_1,X_2,X_3 都是随机变量,记 $X=\min\{X_1,X_2,X_3\}$,按题意,本题需要求的是

$$E(X)=E[\min\{X_1,X_2,X_3\}].$$

因 X_1,X_2,X_3 具有相同的分布律

X_j	1	2	3	4
p_k	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

因而 X_1,X_2,X_3 具有相同的分布函数

$$F(z)=\begin{cases}0, & z<1,\\ \frac{1}{4}, & 1\leqslant z<2,\\ \frac{2}{4}, & 2\leqslant z<3,\\ \frac{3}{4}, & 3\leqslant z<4,\\ 1, & z\geqslant 4.\end{cases}$$

于是 $X=\min\{X_1,X_2,X_3\}$ 的分布函数为:

$$F_{\min}(z)=1-[1-F(z)]^3$$

$$=\begin{cases}1-(1-0)^3=0, & z<1,\\ 1-\left(1-\frac{1}{4}\right)^3=\frac{37}{64}, & 1\leqslant z<2,\\ 1-\left(1-\frac{2}{4}\right)^3=\frac{56}{64}, & 2\leqslant z<3,\\ 1-\left(1-\frac{3}{4}\right)^3=\frac{63}{64}, & 3\leqslant z<4,\\ 1-(1-1)^3=1, & z\geqslant 4.\end{cases}$$

$X=\min\{X_1,X_2,X_3\}$ 的分布律为

X	1	2	3	4
p_k	$\frac{37}{64}$	$\frac{19}{64}$	$\frac{7}{64}$	$\frac{1}{64}$

得
$$E(X)=\frac{25}{16}.$$

4. (1) 设随机变量 X 的分布律为 $P\left\{X=(-1)^{j+1}\frac{3^j}{j}\right\}=\frac{2}{3^j}, j=1,2,\cdots$, 说明 X 的数学期望不存在.

(2) 一盒中装有一只黑球,一只白球,作摸球游戏,规则如下:一次从盒中随机摸一只球,若摸到白球,则游戏结束;若摸到黑球放回再放入一只黑球,然后再

从盒中随机地摸一只球.试说明要游戏结束的摸球次数 X 的数学期望不存在.

解　(1) 因级数

$$\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^{j+1}\frac{3^j}{j}P\left\{X=(-1)^{j+1}\frac{3^j}{j}\right\}$$
$$=\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^{j+1}\frac{3^j}{j}\cdot\frac{2}{3^j}=2\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^{j+1}}{j}$$

不绝对收敛,按定义 X 的数学期望不存在.

(2) 以 A_k 记事件"第 k 次摸球摸到黑球",以 $\overline{A}_k$ 记事件"第 k 次摸球摸到白球",以 C_k 表示事件"游戏在第 k 次摸球时结束",$k=1,2,\cdots$. 按题意

$$C_k=A_1A_2\cdots A_{k-1}\overline{A}_k,$$

$$P(C_k)=P(\overline{A}_k\mid A_1A_2\cdots A_{k-1})P(A_{k-1}\mid A_1A_2\cdots A_{k-2})\cdots P(A_2\mid A_1)P(A_1).$$

$$P\{X=1\}=P(\overline{A}_1)=\frac{1}{2},$$

$$P\{X=2\}=P(A_1\overline{A}_2)=P(\overline{A}_2\mid A_1)P(A_1)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2},$$

$$P\{X=3\}=P(A_1A_2\overline{A}_3)=P(\overline{A}_3\mid A_1A_2)P(A_2\mid A_1)P(A_1)$$
$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3},$$

$X=k$ 时,盒中共 $k+1$ 只球,其中只有一只是白球,故

$$P\{X=k\}=P(A_1\cdots A_{k-1}\overline{A}_k)$$
$$=P(\overline{A}_k|A_1A_2\cdots A_{k-1})P(A_{k-1}|A_1A_2\cdots A_{k-2})\cdots P(A_2|A_1)P(A_1)$$
$$=\frac{1}{k+1}\cdot\frac{k-1}{k}\cdot\frac{k-2}{k-1}\cdot\cdots\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{k+1}\cdot\frac{1}{k}.$$

若 $E(X)$ 存在,则它应等于 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}kP\{X=k\}$. 但

$$\sum_{k=1}^{\infty}kP\{X=k\}=\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot\frac{1}{k+1}\cdot\frac{1}{k}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k+1}=\infty,$$

故 X 的数学期望不存在.

5. 设在某一规定的时间间隔里,某电气设备用于最大负荷的时间 X(以 min 计)是一个随机变量,其概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1\,500^2}x, & 0\leqslant x\leqslant 1\,500,\\[2mm] \dfrac{-1}{1\,500^2}(x-3\,000), & 1\,500<x\leqslant 3\,000,\\[2mm] 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求 $E(X)$.

解 按连续型随机变量的数学期望的定义,有

$$\begin{aligned}
E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{0} xf(x)\mathrm{d}x + \int_{0}^{1\,500} xf(x)\mathrm{d}x \\
&\quad + \int_{1\,500}^{3\,000} xf(x)\mathrm{d}x + \int_{3\,000}^{\infty} xf(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{0} x\cdot 0\mathrm{d}x + \int_{0}^{1\,500} x\cdot\frac{x}{1\,500^2}\mathrm{d}x \\
&\quad + \int_{1\,500}^{3\,000} x\cdot\frac{-(x-3\,000)}{1\,500^2}\mathrm{d}x + \int_{3\,000}^{\infty} x\cdot 0\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{1\,500^2}\frac{x^3}{3}\Big|_{0}^{1\,500} + \frac{1}{1\,500^2}\left(3\,000\times\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{1\,500}^{3\,000} \\
&= 1\,500(\mathrm{min}).
\end{aligned}$$

6. (1) 设随机变量 X 的分布律为

X	-2	0	2
p_k	0.4	0.3	0.3

求 $E(X), E(X^2), E(3X^2+5)$.

(2) 设 $X \sim \pi(\lambda)$,求 $E\left(\frac{1}{X+1}\right)$.

解 (1) X 的分布律为

X	-2	0	2
p_k	0.4	0.3	0.3

$$E(X) = (-2)\times 0.4 + 0\times 0.3 + 2\times 0.3 = -0.2.$$

由关于随机变量函数的数学期望的定理,知

$$E(X^2) = (-2)^2\times 0.4 + 0^2\times 0.3 + 2^2\times 0.3 = 2.8,$$

$$\begin{aligned}
E(3X^2+5) &= [3(-2)^2+5]\times 0.4 + [3(0)^2+5]\times 0.3 + [3(2^2)+5]\times 0.3 \\
&= 13.4.
\end{aligned}$$

如利用数学期望的性质,则有

$$E(3X^2+5) = 3E(X^2)+5 = 3\times 2.8+5 = 13.4.$$

(2) 因 $X\sim\pi(\lambda)$,故 $P\{X=k\} = \frac{\lambda^k \mathrm{e}^{-\lambda}}{k!}$.

$$E\left(\frac{1}{X+1}\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k+1}P\{X=k\}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k+1}\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{(k+1)!}$$

$$=\frac{e^{-\lambda}}{\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!}=\frac{e^{-\lambda}}{\lambda}\left(\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\lambda^j}{j!}\right)=\frac{e^{-\lambda}}{\lambda}\left(\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\lambda^j}{j!}-1\right)$$

$$=\frac{e^{-\lambda}}{\lambda}(e^{\lambda}-1)=\frac{1}{\lambda}(1-e^{-\lambda}).$$

7. (1) 设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0.\end{cases}$$

求(i)$Y=2X$;(ii)$Y=e^{-2X}$ 的数学期望.

(2) 设随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立，且都服从(0,1) 上的均匀分布 (i) 求$U=\max\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$ 的数学期望，(ii) 求 $V=\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$ 的数学期望.

解　(1) 由关于随机变量函数的数学期望的定理，知

(i) $E(Y)=E(2X)=\int_{-\infty}^{\infty}2xf(x)\mathrm{d}x$

$$=2\left(\int_{-\infty}^{0}x\cdot 0\mathrm{d}x+\int_{0}^{\infty}xe^{-x}\mathrm{d}x\right)$$

$$=2\left(-xe^{-x}\Big|_0^{\infty}+\int_0^{\infty}e^{-x}\mathrm{d}x\right)=-2e^{-x}\Big|_0^{\infty}=2;$$

(ii) $E(Y)=E(e^{-2X})=\int_0^{\infty}e^{-2x}\cdot e^{-x}\mathrm{d}x=\int_0^{\infty}e^{-3x}\mathrm{d}x$

$$=\frac{-1}{3}e^{-3x}\Big|_0^{\infty}=\frac{1}{3}.$$

(2) 因 $X_i\sim U(0,1),i=1,2,\cdots,n,X_i$ 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ x, & 0\leqslant x<1,\\ 1, & x\geqslant 1.\end{cases}$$

因 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立，故 $U=\max\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$ 的分布函数为

$$F_U(u)=\begin{cases}0, & u<0,\\ u^n, & 0\leqslant u<1,\\ 1, & u\geqslant 1.\end{cases}$$

U 的概率密度为

$$f_U(u)=\begin{cases}nu^{n-1}, & 0<u<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

$$E(U)=\int_{-\infty}^{\infty}uf_U(u)\mathrm{d}u=\int_0^1 u\cdot nu^{n-1}\mathrm{d}u=n\int_0^1 u^n\mathrm{d}u=\frac{n}{n+1}.$$

$V=\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$ 的分布函数为

$$F_V(v)=\begin{cases}0, & v<0,\\ 1-(1-v)^n, & 0\leqslant v<1,\\ 1, & v\geqslant 1.\end{cases}$$

V 的概率密度为

$$f_V(v)=\begin{cases}n(1-v)^{n-1}, & 0<v<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

$$\begin{aligned}E(V)&=\int_{-\infty}^{\infty}vf_V(v)\mathrm{d}v=\int_0^1 vn(1-v)^{n-1}\mathrm{d}v\\&=-v(1-v)^n\Big|_0^1+\int_0^1(1-v)^n\mathrm{d}v\\&=-\frac{(1-v)^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1=\frac{1}{n+1}.\end{aligned}$$

8. 设随机变量(X,Y)的分布律为

Y \ X	1	2	3
-1	0.2	0.1	0.0
0	0.1	0.0	0.3
1	0.1	0.1	0.1

(1) 求 $E(X),E(Y)$.

(2) 设 $Z=\dfrac{Y}{X}$,求 $E(Z)$.

(3) 设$Z=(X-Y)^2$,求 $E(Z)$.

解 由关于随机变量函数的数学期望 $E[g(X,Y)]$ 的定理,得

(1) $$\begin{aligned}E(X)&=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}x_ip_{ij}\\&=1\cdot(0.2+0.1+0.1)+2\cdot(0.1+0+0.1)+3\cdot(0+0.3+0.1)\\&=2.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}E(Y)&=\sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{3}y_jp_{ij}\\&=(-1)\cdot(0.2+0.1+0)+0\cdot(0.1+0+0.3)+1\cdot(0.1+0.1+0.1)\\&=0.\end{aligned}$$

(2) $$\begin{aligned}E(Z)&=E\left(\frac{Y}{X}\right)\\&=\frac{-1}{1}P\{X=1,Y=-1\}+\frac{-1}{2}P\{X=2,Y=-1\}\\&\quad+\frac{-1}{3}P\{X=3,Y=-1\}\end{aligned}$$

$$+\frac{0}{1}P\{X=1,Y=0\}+\frac{0}{2}P\{X=2,Y=0\}$$

$$+\frac{0}{3}P\{X=3,Y=0\}+\frac{1}{1}P\{X=1,Y=1\}$$

$$+\frac{1}{2}P\{X=2,Y=1\}+\frac{1}{3}P\{X=3,Y=1\}$$

$$=-0.2-0.05+0.1+0.05+\frac{0.1}{3}=-\frac{1}{15}.$$

(3) $E(Z)=E[(X-Y)^2]=\sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{3}(x_i-y_j)^2 p_{ij}$

$$=2^2\times 0.2+3^2\times 0.1+4^2\times 0+1^2\times 0.1+2^2\times 0$$
$$+3^2\times 0.3+0^2\times 0.1+1^2\times 0.1+2^2\times 0.1$$
$$=5.$$

注：(i) 可先求出边缘分布律，然后求出 $E(X)$，$E(Y)$.

(ii) 在(3)中可先算出 $Z=(X-Y)^2$ 的分布律

Z	0	1	4	9
p_k	0.1	0.2	0.3	0.4

然后求得 $E(Z)=\sum_{k=1}^{4}z_k p_k=5$.

9. (1) 设随机变量 (X,Y) 的概率密度为

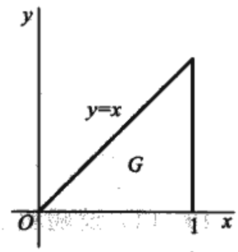
$$f(x,y)=\begin{cases}12y^2, & 0\leqslant y\leqslant x\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求 $E(X)$，$E(Y)$，$E(XY)$，$E(X^2+Y^2)$.

(2) 设随机变量 X,Y 的联合密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{y}\mathrm{e}^{-(y+x/y)}, & x>0,y>0,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

求 $E(X)$，$E(Y)$，$E(XY)$.



题 4.9 图

解　(1) 各数学期望均可按照 $E[g(X,Y)]=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}g(x,y)f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 计算. 因 $f(x,y)$ 仅在有限区域 $G:\{(x,y)\mid 0\leqslant y\leqslant x\leqslant 1\}$ 内不为零，故各数学期望均化为 G（如题 4.9 图）上相应积分的计算.

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_G x\cdot 12y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x 12xy^2\mathrm{d}y=\frac{4}{5}.$$

$$E(Y)=\iint_G y\cdot 12y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x 12y^3\mathrm{d}y=\frac{3}{5}.$$

$$E(XY)=\iint_G xy\cdot 12y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x 12xy^3\mathrm{d}y=\frac{1}{2}.$$

$$E(X^2+Y^2)=\iint_G (x^2+y^2)12y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x 12(x^2y^2+y^4)\mathrm{d}y=\frac{16}{15}.$$

(2) $$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{x}{y}\mathrm{e}^{-(y+\frac{x}{y})}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=-\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-y}\left[\int_0^{\infty}x\mathrm{e}^{-x/y}\mathrm{d}\left(\frac{-x}{y}\right)\right]\mathrm{d}y$$

$$=-\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-y}\left[x\mathrm{e}^{-x/y}\Big|_0^{\infty}-\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-x/y}\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-y}y\mathrm{d}y=1.$$

$$E(Y)=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-(y+x/y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-y}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-x/y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-y}[-y\mathrm{e}^{-x/y}]_0^{\infty}\mathrm{d}y=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-y}y\mathrm{d}y=1.$$

$$E(XY)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xyf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}x\mathrm{e}^{-(y+x/y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-y}\left[\int_0^{\infty}x\mathrm{e}^{-x/y}\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y.$$

而　$$\int_0^{\infty}x\mathrm{e}^{-x/y}\mathrm{d}x=-y\int_0^{\infty}x\mathrm{e}^{-x/y}\mathrm{d}\left(-\frac{x}{y}\right)=y^2,$$

故　$$E(XY)=\int_0^{\infty}y^2\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y=\Gamma(3)^{①}=2.$$

10. (1) 设随机变量 $X\sim N(0,1),Y\sim N(0,1)$ 且 X,Y 相互独立. 求 $E\left(\dfrac{X^2}{X^2+Y^2}\right)$.

(2) 一飞机进行空投物资作业，设目标点为原点 $O(0,0)$，物资着陆点为 (X,Y)，X,Y 相互独立，且设 $X\sim N(0,\sigma^2),Y\sim N(0,\sigma^2)$，求原点到点 (X,Y) 间距离的数学期望.

解　(1) 由对称性知

$$E\left(\frac{X^2}{X^2+Y^2}\right)=E\left(\frac{Y^2}{X^2+Y^2}\right).$$

---

① Γ函数：$\Gamma(\alpha)=\int_0^{\infty}x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x,\alpha>0$，它具有性质：$\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha),\alpha>0,\Gamma(1)=1,\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi},\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)=n!$ (n 为正整数).

而
$$E\left(\frac{X^2}{X^2+Y^2}\right)+E\left(\frac{Y^2}{X^2+Y^2}\right)=E(1)=1,$$
故
$$E\left(\frac{X^2}{X^2+Y^2}\right)=\frac{1}{2}.$$

(2) 记原点到点(X,Y)的距离为R, $R=\sqrt{X^2+Y^2}$,由题设(X,Y)的密度函数为

$$f(x,y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-x^2/(2\sigma^2)}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-y^2/(2\sigma^2)}$$
$$=\frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}},\quad -\infty<x<\infty,\quad -\infty<y<\infty.$$
$$E(R)=E(\sqrt{X^2+Y^2})=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{x^2+y^2}\frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-(x^2+y^2)/(2\sigma^2)}dxdy.$$

采用极坐标

$$E(R)=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\infty}\frac{r}{2\pi\sigma^2}e^{-r^2/(2\sigma^2)}rdr$$
$$=2\pi\int_0^{\infty}\frac{1}{2\pi\sigma^2}r^2e^{-r^2/(2\sigma^2)}dr=\frac{1}{\sigma^2}\int_0^{\infty}r^2e^{-r^2/(2\sigma^2)}dr$$
$$=-\int_0^{\infty}rd(e^{-r^2/(2\sigma^2)})=-re^{-r^2/(2\sigma^2)}\Big|_0^{\infty}+\int_0^{\infty}e^{-r^2/(2\sigma^2)}dr$$
$$=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-r^2/(2\sigma^2)}dr=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-r^2/(2\sigma^2)}dr\right)\sqrt{2\pi}\sigma$$
$$=\frac{1}{2}\times1\times\sqrt{2\pi}\sigma=\sigma\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

11. 一工厂生产的某种设备的寿命X(以年计)服从指数分布,概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{4}e^{-x/4}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant0.\end{cases}$$

工厂规定,出售的设备若在售出一年之内损坏可予以调换.若工厂售出一台设备赢利100元,调换一台设备厂方需花费300元.试求厂方出售一台设备净赢利的数学期望.

解　一台设备在一年内调换的概率为

$$p=P\{X<1\}=\int_0^1\frac{1}{4}e^{-x/4}dx=-e^{-x/4}\Big|_0^1=1-e^{-1/4}.$$

以Y记工厂售出一台设备的净赢利值,则Y具有分布律

Y	100	100－300
p_k	$e^{-1/4}$	$1-e^{-1/4}$

故有

$$E(Y)=100\times e^{-1/4}-200(1-e^{-1/4})$$
$$=300e^{-1/4}-200=33.64(\text{元}).$$

12. 某车间生产的圆盘直径在区间(a,b)服从均匀分布,试求圆盘面积的数学期望.

解 设圆盘直径为X,按题设X具有概率密度

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a<x<b,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

故圆盘面积$A=\dfrac{1}{4}\pi X^2$的数学期望为

$$E\left(\frac{1}{4}\pi X^2\right)=\int_a^b\frac{1}{4}\pi x^2\frac{1}{b-a}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{12(b-a)}x^3\Big|_a^b$$
$$=\frac{\pi}{12}(b^2+ab+a^2).$$

13. 设电压(以 V 计)$X\sim N(0,9)$.将电压施加于一检波器,其输出电压为$Y=5X^2$,求输出电压Y的均值.

解 由$X\sim N(0,9)$,即有$E(X)=0,D(X)=9$.

$$E(Y)=E(5X^2)=5E(X^2)=5\{D(X)+[E(X)]^2\}$$
$$=5(9+0)=45(\text{V}).$$

另法 X的概率密度为

$$f_X(x)=\frac{1}{3\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/18},\quad -\infty<x<\infty.$$

$$E(Y)=E(5X^2)=5E(X^2)=5\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{3\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/18}\mathrm{d}x$$
$$=\frac{5\times 9}{3\sqrt{2\pi}}\left(-xe^{-x^2/18}\Big|_{-\infty}^{\infty}+\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2/18}\mathrm{d}x\right)$$
$$=\frac{45}{3\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2/18}\mathrm{d}x=45\int_{-\infty}^{\infty}f_X(x)\mathrm{d}x$$
$$=45\times 1=45(\text{V}).$$

14. 设随机变量X_1,X_2的概率密度分别为

$$f_1(x)=\begin{cases}2e^{-2x}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0,\end{cases}\quad f_2(x)=\begin{cases}4e^{-4x}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0.\end{cases}$$

(1) 求$E(X_1+X_2),E(2X_1-3X_2^2)$.

(2) 又设X_1,X_2相互独立,求$E(X_1X_2)$.

解 若X服从以θ为参数的指数分布,其概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}e^{-x/\theta}, & x>0,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

则 $E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx=\int_0^{\infty}x\dfrac{1}{\theta}e^{-x/\theta}dx$，令 $u=x/\theta$，得到

$$E(X)=\theta\int_0^{\infty}ue^{-u}du=\theta\Gamma(2)=\theta\Gamma(1)=\theta,$$

$$\begin{aligned}E(X^2)&=\int_{-\infty}^{\infty}x^2f(x)dx=\int_0^{\infty}x^2\ \frac{1}{\theta}e^{-x/\theta}dx\\&=\theta^2\int_0^{\infty}u^2e^{-u}du=\theta^2\Gamma(3)\quad(\text{其中 }u=\frac{x}{\theta})\\&=\theta^2\cdot 2\Gamma(2)=\theta^2\cdot 2\Gamma(1)=2\theta^2,\end{aligned}$$

故 $E(X_1)=\dfrac{1}{2}$，$E(X_2)=\dfrac{1}{4}$，$E(X_2^2)=2(\dfrac{1}{4})^2=\dfrac{1}{8}$，于是

(1) 由数学期望的性质，有

$$E(X_1+X_2)=E(X_1)+E(X_2)=\frac{3}{4},$$

$$E(2X_1-3X_2^2)=2E(X_1)-3E(X_2^2)=\frac{5}{8}.$$

(2) 因 X_1,X_2 相互独立，由数学期望的性质，有

$$E(X_1X_2)=E(X_1)E(X_2)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{8}.$$

15. 将 n 只球($1\sim n$ 号)随机地放进 n 个盒子($1\sim n$ 号)中去，一个盒子装一只球. 若一只球装入与球同号的盒子中，称为一个配对. 记 X 为总的配对数，求 $E(X)$.

解 引入随机变量

$$X_i=\begin{cases}1, & \text{若第 } i \text{ 号球装入第 } i \text{ 号盒子中},\\ 0, & \text{若第 } i \text{ 号球未装入第 } i \text{ 号盒子中},\end{cases}\quad i=1,2,\cdots,n,$$

则总的配对数 X 可表示成

$$X=X_1+X_2+\cdots+X_n.$$

显然
$$P\{X_i=1\}=\frac{1}{n},\quad i=1,2,\cdots,n.$$

X_i 的分布律为

X_i	0	1
p_k	$1-\dfrac{1}{n}$	$\dfrac{1}{n}$

即有 $E(X_i)=\dfrac{1}{n}$，$i=1,2,\cdots,n$，于是

$$E(X)=E(X_1+X_2+\cdots+X_n)$$
$$=E(X_1)+E(X_2)+\cdots+E(X_n)=1.$$

16. 若有 n 把看上去样子相同的钥匙，其中只有一把能打开门上的锁，用它们去试开门上的锁. 设取到每只钥匙是等可能的. 若每把钥匙试开一次后除去，试用下面两种方法求试开次数 X 的数学期望.

(1) 写出 X 的分布律.

(2) 不写出 X 的分布律.

解 (1) 以 $A_k(k=1,2,\cdots,n)$ 表示事件"第 k 次试开是成功的". $\{X=k\}$ 表示前 $k-1$ 次所取的钥匙均未能打开门，而第 k 次所取的钥匙能将门打开. 即有

$$\begin{aligned}P\{X=k\}&=P(\bar{A}_1\bar{A}_2\cdots\bar{A}_{k-1}A_k)\\&=P(\bar{A}_1\bar{A}_2\cdots\bar{A}_{k-1})P(A_k\mid\bar{A}_1\bar{A}_2\cdots\bar{A}_{k-1})\\&=P(\bar{A}_1\bar{A}_2\cdots\bar{A}_{k-2})P(\bar{A}_{k-1}\mid\bar{A}_1\bar{A}_2\cdots\bar{A}_{k-2})P(A_k\mid\bar{A}_1\bar{A}_2\cdots\bar{A}_{k-1})\\&=\cdots\\&=P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2\mid\bar{A}_1)P(\bar{A}_3\mid\bar{A}_1\bar{A}_2)\cdots P(A_k\mid\bar{A}_1\bar{A}_2\cdots\bar{A}_{k-1})\\&=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n-1}\cdot\cdots\cdot\frac{n-k+1}{n-k+2}\cdot\frac{1}{n-k+1}=\frac{1}{n},\end{aligned}$$

X 的分布律为

$$P\{X=k\}=\frac{1}{n},\quad k=1,2,\cdots,n,$$

故
$$\begin{aligned}E(X)&=\sum_{k=1}^{n}kP\{X=k\}=\sum_{k=1}^{n}k\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}k\\&=\frac{1}{n}\cdot\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n+1}{2}.\end{aligned}$$

(2) 引入随机变量 X_k 如下：

$$X_1=1,$$
$$X_k=\begin{cases}1, & \text{前 } k-1 \text{ 次试开均未成功},\\ 0, & \text{前 } k-1 \text{ 次中有一次试开成功}, k=2,3,\cdots,n,\end{cases}$$

则
$$X=X_1+X_2+\cdots+X_n.$$

沿用(1)中的记号，则有

$$E(X_1)=1,$$
$$\begin{aligned}E(X_k)&=1\times P\{X_k=1\}=1\times P(\bar{A}_1\bar{A}_2\cdots\bar{A}_{k-1})\\&=P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2\mid\bar{A}_1)\cdots P(\bar{A}_{k-1}\mid\bar{A}_1\bar{A}_2\cdots\bar{A}_{k-2})\\&=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n-1}\cdot\cdots\cdot\frac{n-(k-1)}{n-(k-2)}=\frac{n-k+1}{n},\end{aligned}$$

$$k = 2,3,\cdots,n.$$

故有

$$E(X) = 1 + \sum_{k=2}^{n} E(X_k) = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{n-k+1}{n} = \frac{n+1}{2}.$$

17. 设 X 为随机变量，C 是常数，证明 $D(X) < E[(X-C)^2]$，对于 $C \neq E(X)$.（由于 $D(X) = E[[X-E(X)]^2]$，上式表明 $E[(X-C)^2]$ 当 $C = E(X)$ 时取到最小值.）

证

$$\begin{aligned} E[(X-C)^2] &= E(X^2 - 2CX + C^2) = E(X^2) - 2CE(X) + C^2 \\ &= E(X^2) - [E(X)]^2 + \{[E(X)]^2 - 2CE(X) + C^2\} \\ &= D(X) + (E(X) - C)^2 \geqslant D(X). \end{aligned}$$

等号仅当 $C = E(X)$ 时成立.

18. 设随机变量 X 服从瑞利分布，其概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\sigma^2} e^{-x^2/(2\sigma^2)}, & x > 0, \\ 0, & x \leqslant 0, \end{cases}$$

其中 $\sigma > 0$ 是常数. 求 $E(X), D(X)$.

解

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_0^{\infty} x \frac{x}{\sigma^2} e^{-x^2/(2\sigma^2)} dx.$$

令 $u = x^2/(2\sigma^2)$，得到

$$\begin{aligned} E(X) &= \sqrt{2}\sigma \int_0^{\infty} u^{1/2} e^{-u} du = \sqrt{2}\sigma \Gamma(\frac{3}{2}) \\ &= \sqrt{2}\sigma \frac{1}{2} \Gamma(\frac{1}{2})^{①} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma. \end{aligned}$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx = \int_0^{\infty} x^2 \frac{x}{\sigma^2} e^{-x^2/(2\sigma^2)} dx.$$

令 $u = x^2/(2\sigma^2)$，得到

$$E(X^2) = 2\sigma^2 \int_0^{\infty} u e^{-u} du = 2\sigma^2 \Gamma(2) = 2\sigma^2,$$

故

$$D(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 2\sigma^2 - \frac{\pi}{2}\sigma^2 = \frac{4-\pi}{2}\sigma^2.$$

19. 设随机变量 X 服从 Γ 分布，其概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}, & x > 0, \\ 0, & x \leqslant 0, \end{cases}$$

---

① 参见 96 页注.

其中 $\alpha>0,\beta>0$ 是常数. 求 $E(X),D(X)$.

解 $E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\infty}\frac{x}{\beta^\alpha\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-x/\beta}\mathrm{d}x$

$$\xlongequal{\text{令 } u=x/\beta}\frac{\beta}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\infty}u^\alpha\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u=\frac{\beta}{\Gamma(\alpha)}\Gamma(\alpha+1)$$

$$=\frac{\beta}{\Gamma(\alpha)}\alpha\Gamma(\alpha)=\alpha\beta.$$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{\infty}x^2f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\infty}\frac{x^2}{\beta^\alpha\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-x/\beta}\mathrm{d}x$$

$$\xlongequal{\text{令 } u=x/\beta}\frac{\beta^2}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\infty}u^{\alpha+1}\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u=\frac{\beta^2}{\Gamma(\alpha)}\Gamma(\alpha+2)$$

$$=\frac{\beta^2}{\Gamma(\alpha)}(\alpha+1)\alpha\Gamma(\alpha)=\alpha(\alpha+1)\beta^2.$$

$$D(X)=\alpha(\alpha+1)\beta^2-(\alpha\beta)^2=\alpha\beta^2.$$

20. 设随机变量 X 服从几何分布,其分布律为

$$P\{X=k\}=p(1-p)^{k-1},\quad k=1,2,\cdots,$$

其中 $0<p<1$ 是常数. 求 $E(X),D(X)$.

解 $E(X)=\sum_{n=1}^{\infty}nP\{X=n\}=\sum_{n=1}^{\infty}np(1-p)^{n-1}$

$$=p\sum_{n=1}^{\infty}n(1-p)^{n-1}=p\frac{1}{[1-(1-p)]^2}=\frac{1}{p}.$$

这是因为

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^k+\cdots,\quad |x|<1,$$

两边对 x 求导,就有

$$\frac{1}{(1-x)^2}=1+2x+3x^2+\cdots+kx^{k-1}+\cdots,|x|<1.\tag{A}$$

又 $E[X(X+1)]=\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)P\{X=n\}=p\sum_{n=1}^{+\infty}n(n+1)(1-p)^{n-1}.$

将上述(A)式两边关于 x 求导,就有

$$\frac{2}{(1-x)^3}=1\cdot2+2\cdot3x+\cdots+(k-1)\cdot kx^{k-2}+\cdots,\qquad |x|<1,$$

由此知

$$E[X(X+1)]=p\frac{2}{[1-(1-p)]^3}=\frac{2}{p^2}$$

故

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=E[X(X+1)-X]-[E(X)]^2$$

$$=E[X(X+1)]-E(X)-[E(X)]^2=\frac{2}{p^2}-\frac{1}{p}-\frac{1}{p^2}=\frac{1-p}{p^2}.$$

21. 设长方形的长(以 m 计)$X\sim U(0,2)$,已知长方形的周长(以 m 计)为 20.求长方形面积 A 的数学期望和方差.

解　长方形的长为 X,周长为 20,所以它的面积 A 为

$$A=X(10-X).$$

现在 $X\sim U(0,2)$,X 的概率密度为

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & 0<x<2,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

所以

$$E(A)=E[X(10-X)]=\int_0^2 x(10-x)\cdot\frac{1}{2}\mathrm{d}x$$

$$=\left(\frac{5}{2}x^2-\frac{1}{6}x^3\right)\Big|_0^2=\frac{26}{3}=8.67,$$

$$E(A^2)=E[X^2(10-X)^2]=\int_0^2 x^2(10-x)^2\cdot\frac{1}{2}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^2(100x^2-20x^3+x^4)\mathrm{d}x=\frac{1\,448}{15}=96.53,$$

$$D(A)=E(A^2)-[E(A)]^2=\frac{1\,448}{15}-\left(\frac{26}{3}\right)^2=21.42.$$

22. (1) 设随机变量 X_1,X_2,X_3,X_4 相互独立,且有 $E(X_i)=i,D(X_i)=5-i,i=1,2,3,4$. 设 $Y=2X_1-X_2+3X_3-\frac{1}{2}X_4$. 求 $E(Y),D(Y)$.

(2) 设随机变量 X,Y 相互独立,且 $X\sim N(720,30^2),Y\sim N(640,25^2)$,求 $Z_1=2X+Y,Z_2=X-Y$ 的分布,并求概率 $P\{X>Y\},P\{X+Y>1\,400\}$.

解　(1) $E(Y)=E\left(2X_1-X_2+3X_3-\frac{1}{2}X_4\right)$

$$=2E(X_1)-E(X_2)+3E(X_3)-\frac{1}{2}E(X_4)$$

$$=2\times1-2+3\times3-\frac{1}{2}\times4=7.$$

因 X_1,X_2,X_3,X_4 相互独立,故有

$$D(Y)=D\left(2X_1-X_2+3X_3-\frac{1}{2}X_4\right)$$

$$=4D(X_1)+D(X_2)+9D(X_3)+\frac{1}{4}D(X_4)$$

$$=4\times4+3+9\times2+\frac{1}{4}\times1=37.25.$$

(2) 因 X,Y 相互独立，且 $X\sim N(720,30^2)$，$Y\sim N(640,25^2)$，故 $Z_1=2X+Y$，$Z_2=X-Y$ 均服从正态分布，且

$$\begin{aligned}E(Z_1)&=E(2X+Y)=2E(X)+E(Y)\\&=2\times720+640=2\,080,\\D(Z_1)&=D(2X+Y)=4D(X)+D(Y)\\&=4\times30^2+25^2=4\,225,\\E(Z_2)&=E(X-Y)=E(X)-E(Y)\\&=720-640=80,\\D(Z_2)&=D(X-Y)=D(X)+D(Y)\\&=30^2+25^2=1\,525,\end{aligned}$$

故有
$$Z_1\sim N(2\,080,4\,225),\quad Z_2\sim N(80,1\,525).$$

$$\begin{aligned}P\{X>Y\}&=P\{X-Y>0\}=P\{Z_2>0\}\\&=1-P\{Z_2\leqslant0\}=1-\Phi\left(\frac{0-80}{\sqrt{1\,525}}\right)\\&=\Phi(2.048\,6)=0.979\,8.\end{aligned}$$

又
$$X+Y\sim N(E(X)+E(Y),D(X)+D(Y)),$$

即
$$X+Y\sim N(1\,360,1\,525).$$

故

$$\begin{aligned}P\{X+Y>1\,400\}&=1-P\{X+Y\leqslant1\,400\}\\&=1-\Phi\left(\frac{1\,400-1\,360}{\sqrt{1\,525}}\right)=1-\Phi(1.02)\\&=1-0.846\,1=0.153\,9.\end{aligned}$$

23. 五家商店联营，它们每两周售出的某种农产品的数量(以 kg 计）分别为 X_1,X_2,X_3,X_4,X_5. 已知 $X_1\sim N(200,225)$，$X_2\sim N(240,240)$，$X_3\sim N(180,225)$，$X_4\sim N(260,265)$，$X_5\sim N(320,270)$，X_1,X_2,X_3,X_4,X_5 相互独立.

(1) 求五家商店两周的总销售量的均值和方差.

(2) 商店每隔两周进货一次，为了使新的供货到达前商店不会脱销的概率大于 0.99，问商店的仓库应至少储存多少千克该产品？

解 以 Y 记五家商店该种产品的总销售量，即 $Y=X_1+X_2+X_3+X_4+X_5$.

(1) 按题设 $X_i\ (i=1,2,3,4,5)$ 相互独立且均服从正态分布，即有

$$E(Y)=\sum_{i=1}^{5}E(X_i)=200+240+180+260+320=1\,200,$$

$$D(Y)=\sum_{i=1}^{5}D(Y_i)=225+240+225+265+270=1\ 225.$$

(2) 设仓库应至少储存 n kg 该产品，才能使该产品不脱销的概率大于0.99，按题意，n 应满足条件

$$P\{Y\leqslant n\}>0.99.$$

由于 $Y\sim N(1\ 200,35^2)$，故有

$$P\{Y\leqslant n\}=P\left\{\frac{Y-1\ 200}{35}\leqslant\frac{n-1\ 200}{35}\right\}=\Phi\left(\frac{n-1\ 200}{35}\right),$$

因而上述不等式即为

$$\Phi\left(\frac{n-1\ 200}{35}\right)>0.99=\Phi(2.33),$$

从而 $\frac{n-1\ 200}{35}>2.33$，故应有

$$n>1\ 200+2.33\times35=1\ 281.55,$$

即需取 $n=1\ 282$ kg.

24. 卡车装运水泥，设每袋水泥重量 X（以 kg 计）服从 $N(50,2.5^2)$，问至多装多少袋水泥使总重量超过 2 000 的概率不大于 0.05.

解　设至多能装运 n 袋水泥，各袋水泥的重量分别为 $X_1,X_2,\cdots,X_n$，则

$$X_i\sim N(50,2.5^2),\quad i=1,2,\cdots,n,$$

故卡车所装运水泥的总重量为

$$W=X_1+X_2+\cdots+X_n.$$

按题意 n 需满足

$$P\{W>2\ 000\}\leqslant0.05.$$

对于像这样的实际问题，认为 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立是适宜的，此时

$$E(W)=50n,\quad D(W)=2.5^2n,$$

于是

$$W\sim N(50n,2.5^2n).$$

从而

$$P\{W>2\ 000\}=1-\Phi\left(\frac{2\ 000-50n}{2.5\sqrt{n}}\right),$$

即 n 应满足

$$\Phi\left(\frac{2\ 000-50n}{2.5\sqrt{n}}\right)\geqslant0.95=\Phi(1.645).$$

故应有

$$\frac{2\ 000-50n}{2.5\sqrt{n}}\geqslant1.645,$$

解得

$$\sqrt{n}\leqslant6.283\ 6,$$

从而

$$n\leqslant39.483.$$

故 n 至多取 39，即该卡车至多能装运 39 袋水泥，方能使超过 2 000 kg 的概率不

大于 0.05.

(在这里我们指出，若设 $W = nX$，其中 $X \sim N(50, 2.5^2)$ 而去求出 $n \approx 37$，那就犯错误了，为什么?)

25. 设随机变量 X,Y 相互独立，且都服从 $(0,1)$ 上的均匀分布.

(1) 求 $E(XY)$，$E(X/Y)$，$E[\ln(XY)]$，$E[|Y-X|]$.

(2) 以 X,Y 为边长作一长方形，以 A,C 分别表示长方形的面积和周长，求 A 和 C 的相关系数.

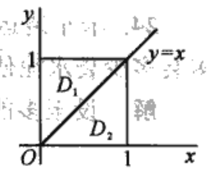
解　(1) X,Y 的概率密度都是

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

$$E(XY) = E(X)E(Y) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

$E\left[\dfrac{X}{Y}\right]$不存在(因$\int_0^1\int_0^1 \dfrac{x}{y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 发散).

$$\begin{aligned} E[\ln(XY)] &= \int_0^1\int_0^1 (\ln x + \ln y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= 2\int_0^1\int_0^1 (\ln x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= -2. \end{aligned}$$



题 4.25 图

$$\begin{aligned} &E(|Y-X|) \\ &= \iint_D |y-x|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \text{ (如题 4.25 图 } D = D_1 \cup D_2) \\ &= 2\iint_{D_1} (y-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\int_0^1\int_x^1 (y-x)\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

(2) $A = XY$，$C = 2(X+Y)$，

$\mathrm{Cov}(A,C) = E(AC) - E(A)E(C)$.

$AC = 2X^2Y + 2XY^2$，

$$E(X^2) = E(Y^2) = D(X) + (E(X))^2 = \frac{1}{12} + \frac{1}{4} = \frac{1}{3}.$$

$$\begin{aligned} E(AC) &= 2E(X^2Y) + 2E(XY^2) \\ &= 2E(X^2)E(Y) + 2E(X)E(Y^2) \\ &= 2 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}(A,C) &= E(AC) - E(A)E(C) \\ &= \frac{2}{3} - [E(X)E(Y) \times 2(E(X)+E(Y))] \end{aligned}$$

$$=\frac{2}{3}-\left[\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)\right]=\frac{1}{6}.$$

$$D(A)=E(X^2Y^2)-[E(X)E(Y)]^2=E(X^2)E(Y^2)-(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2})^2$$

$$=(\frac{1}{3})^2-(\frac{1}{4})^2=\frac{7}{144}.$$

$$D(C)=D(2X+2Y)=D(2X)+D(2Y)=4\times\frac{1}{12}+4\times\frac{1}{12}=\frac{2}{3}.$$

故　$$\rho_{AC}=\frac{\mathrm{Cov}(A,C)}{\sqrt{D(A)D(C)}}=\frac{1}{6}/\sqrt{\frac{7}{144}\times\frac{2}{3}}=\sqrt{\frac{6}{7}}.$$

26. (1) 设随机变量 X_1,X_2,X_3 相互独立，且有 $X_1\sim b\left(4,\frac{1}{2}\right),X_2\sim b\left(6,\frac{1}{3}\right),X_3\sim b\left(6,\frac{1}{3}\right)$，求 $P\{X_1=2,X_2=2,X_3=5\},E(X_1X_2X_3),E(X_1-X_2),E(X_1-2X_2)$.

(2) 设 X,Y 是随机变量，且有 $E(X)=3,E(Y)=1,D(X)=4,D(Y)=9$，令 $Z=5X-Y+15$，分别在下列 3 种情况下求 $E(Z)$ 和 $D(Z)$.

(i) X,Y 相互独立，(ii) X,Y 不相关，(iii) X 与 Y 的相关系数为 0.25.

解　(1) $P\{X_1=2,X_2=2,X_3=5\}$

$$=P\{X_1=2\}P\{X_2=2\}P\{X_3=5\}.$$

因　$$P\{X_1=2\}=\binom{4}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(1-\frac{1}{2}\right)^{4-2}=\binom{4}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^4,$$

$$P\{X_2=2\}=\binom{6}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(1-\frac{1}{3}\right)^{6-2}=\binom{6}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^4,$$

$$P\{X_3=5\}=\binom{6}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^5\left(1-\frac{1}{3}\right)^{6-5}=\binom{6}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^5\left(\frac{2}{3}\right),$$

故　$$P\{X_1=2,X_2=2,X_3=5\}=P\{X_1=2\}\cdot P\{X_2=2\}\cdot P\{X_3=5\}=0.002\,03$$

$$E(X_1X_2X_3)=E(X_1)E(X_2)E(X_3)=(4\times\frac{1}{2})(6\times\frac{1}{3})(6\times\frac{1}{3})=8.$$

$E(X_1-X_2)=E(X_1)-E(X_2)=2-2=0.$

$E(X_1-2X_2)=E(X_1)-2E(X_2)=-2.$

(2) 对于 $E(Z)$，在(i)，(ii)，(iii) 三种情况下都有

$E(Z)=E(5X-Y+15)=5E(X)-E(Y)+15=15-1+15=29.$

对于 $D(Z)$，(i) X,Y 独立，则

$D(5X-Y+15)=D(5X-Y)=D(5X)+D(-Y)=25D(X)+D(Y)$

$$= 25 \times 4 + 9 = 109.$$

(ii) X,Y 不相关，即 $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$，

$$D(Z) = 109.$$

(iii) $\rho_{XY} = 0.25$，则

$\mathrm{Cov}(X,Y) = \sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}\rho_{XY} = 2 \times 3 \times 0.25 = 1.5$，

$$D(5X - Y + 15) = D(5X - Y) = 25D(X) + D(Y) - 10\mathrm{Cov}(X,Y)$$
$$= 100 + 9 - 10 \times 1.5 = 94.$$

27. 下列各对随机变量 X 和 Y，问哪几对是相互独立的？哪几对是不相关的.

(1) $X \sim U(0,1)$，$Y = X^2$.

(2) $X \sim U(-1,1)$，$Y = X^2$.

(3) $X = \cos V$，$Y = \sin V$，$V \sim U(0,2\pi)$.

若 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)$，

(4) $f(x,y) = \begin{cases} x + y & 0 < x < 1, 0 < y < 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$

(5) $f(x,y) = \begin{cases} 2y, & 0 < x < 1, 0 < y < 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$

解 (1) $E(X) = \dfrac{1}{2}$，$E(Y) = E(X^2) = \displaystyle\int_0^1 x^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{3}$，

$$E(XY) = E(X^3) = \int_0^1 x^3 \mathrm{d}x = \frac{1}{4}.$$

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \neq 0.$$

故 X,Y 不相互独立，也不是不相关的.

(2) $E(X) = 0$，$E(Y) = E(X^2) = \displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{2}x^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{3}$，

$$E(XY) = E(X^3) = \int_{-1}^1 \frac{1}{2}x^3 \mathrm{d}x = 0.$$

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0 - 0 = 0.$$

故 X,Y 不相互独立，但不相关.

(3) $E(X) = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi}\cos v \mathrm{d}v = 0$，

$E(Y) = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi}\sin v \mathrm{d}v = 0$，

$E(XY) = E(\sin V \cos V) = \dfrac{1}{2}E(\sin 2V) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi}\sin 2v \mathrm{d}v = 0$，

$\mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(Z)E(Y) = 0 - 0 \times 0 = 0$，

故 X,Y 不相互独立,但不相关.

(4) $f(x,y)=\begin{cases}x+y, & 0<x<1,\quad 0<y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

$$f_X(x)=\begin{cases}\int_0^1(x+y)\mathrm{d}y=x+\frac{1}{2}, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}y+\frac{1}{2}, & 0<y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

$f(x,y)$ 与 $f_X(x)f_Y(y)$ 在平面上不几乎处处相等,X,Y 不相互独立.

$$E(X)=\int_0^1 x\left(x+\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x=\frac{7}{12},\quad E(Y)=\frac{7}{12},$$

$$E(XY)=\int_0^1\int_0^1 xy(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{3}.$$

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)\neq 0.$$

故 X,Y 不是不相关的,因而一定也是不相互独立的.

(5) $f(x,y)=\begin{cases}2y, & 0<x<1,\quad 0<y<1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$

$$f_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}2y, & 0<y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$ 对于任意 x,y 成立.

故 X,Y 相互独立,因此 X,Y 也是不相关的.

28. 设二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{\pi}, & x^2+y^2\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

试验证 X 和 Y 是不相关的,但 X 和 Y 不是相互独立的.

证　$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\frac{x}{\pi}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}x\mathrm{d}x=0.$$

同样　$$E(Y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}yf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\frac{y}{\pi}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0,$$

而　$$E(XY)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xyf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\frac{xy}{\pi}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}y\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}x\mathrm{d}x=0,$$

从而
$$E(XY)=E(X)E(Y),$$
这表明 X,Y 是不相关的. 又

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\begin{cases}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{\pi}\mathrm{d}y=\frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}, & -1<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

同样
$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2}, & -1<y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

显然 $f_X(x)f_Y(y)\neq f(x,y)$，故 X,Y 不是相互独立的.

29. 设随机变量 (X,Y) 的分布律为

Y \ X	-1	0	1
-1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
0	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{8}$
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

验证 X 和 Y 是不相关的，但 X 和 Y 不是相互独立的.

证 先求出边缘分布律如下：

X	-1	0	1
p_k	$\frac{3}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{8}$

Y	-1	0	1
p_k	$\frac{3}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{8}$

易见 $P\{X=0,Y=0\}=0\neq P\{X=0\}P\{Y=0\}$，故 X,Y 不是相互独立的. 又知 X,Y 具有相同的分布律，且有
$$E(X)=E(Y)=(-1)\times\frac{3}{8}+1\times\frac{3}{8}=0.$$

又 $E(XY)$
$$=\sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{3}x_iy_jp_{ij}$$
$$=(-1)(-1)\times\frac{1}{8}+(-1)\times 1\times\frac{1}{8}+1\times(-1)\times\frac{1}{8}+1\times 1\times\frac{1}{8}$$
$$=0,$$
即有 $E(XY)=E(X)E(Y)$，故 X,Y 是不相关的.

30. 设A和B是试验E的两个事件，且$P(A)>0$，$P(B)>0$，并定义随机变量X,Y如下：

$$X=\begin{cases}1, & \text{若 } A \text{ 发生},\\ 0, & \text{若 } A \text{ 不发生},\end{cases}\qquad Y=\begin{cases}1, & \text{若 } B \text{ 发生},\\ 0, & \text{若 } B \text{ 不发生}.\end{cases}$$

证明若$\rho_{XY}=0$，则X和Y必定相互独立.

解　X,Y的分布律分别为

X	0	1
p_k	$P(\bar{A})$	$P(A)$

Y	0	1
p_k	$P(\bar{B})$	$P(B)$

由X,Y的定义，XY只能取0,1两个值，且

$$P\{XY=1\}=P\{X=1,Y=1\}=P(AB),$$

于是得XY的分布律为

XY	0	1
p_k	$1-P(AB)$	$P(AB)$

即得　$E(X)=P(A)$，$E(Y)=P(B)$，$E(XY)=P(AB)$.

由假设$\rho_{XY}=0$，得$E(XY)=E(X)E(Y)$，即

$$P(AB)=P(A)P(B),$$

故知A与B相互独立. 从而知A与$\bar{B}$、$\bar{A}$与B、$\bar{A}$与$\bar{B}$也相互独立，于是

$$P\{X=1,Y=1\}=P(AB)=P(A)P(B)=P\{X=1\}P\{Y=1\},$$

$$P\{X=1,Y=0\}=P(A\bar{B})=P(A)P(\bar{B})=P\{X=1\}P\{Y=0\},$$

$$P\{X=0,Y=1\}=P(\bar{A}B)=P(\bar{A})P(B)=P\{X=0\}P\{Y=1\},$$

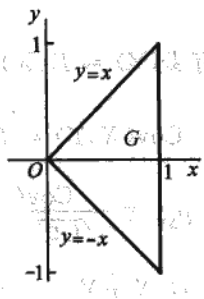
$$P\{X=0,Y=0\}=P(\bar{A}\bar{B})=P(\bar{A})P(\bar{B})=P\{X=0\}P\{Y=0\},$$

故X,Y相互独立.

31. 设随机变量(X,Y)具有概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & |y|<x,\ 0<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求$E(X)$，$E(Y)$，$\mathrm{Cov}(X,Y)$.



题 4.31 图

解　注意到$f(x,y)$只在区域G：$\{(x,y)\mid |y|<x,\ 0<x<1\}$（题4.31图）上不等于零，故有

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_G x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1\mathrm{d}x\int_{-x}^{x}x\,\mathrm{d}y=\int_0^1 2x^2\,\mathrm{d}x=\frac{2}{3},$$

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}yf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{G}y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{0}^{1}\mathrm{d}x\int_{-x}^{x}y\mathrm{d}y=0,$$

$$E(XY)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xyf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{G}xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{0}^{1}\mathrm{d}x\int_{-x}^{x}xy\mathrm{d}y=0,$$

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0.$$

32. 设随机变量(X,Y)具有概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{8}(x+y), & 0\leqslant x\leqslant 2,0\leqslant y\leqslant 2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求$E(X),E(Y),\mathrm{Cov}(X,Y),\rho_{XY},D(X+Y)$.

解　注意到$f(x,y)$只在区域$G:\{(x,y)\mid 0<x<2,0<y<2\}$上不等于零，故有

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{0}^{2}\mathrm{d}x\int_{0}^{2}\frac{x}{8}(x+y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_{0}^{2}\frac{x}{8}\left(xy+\frac{1}{2}y^{2}\right)\Big|_{0}^{2}\mathrm{d}x=\int_{0}^{2}\frac{x}{4}(x+1)\mathrm{d}x=\frac{7}{6},$$

$$E(X^{2})=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x^{2}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{0}^{2}\mathrm{d}x\int_{0}^{2}\frac{x^{2}}{8}(x+y)\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{8}\int_{0}^{2}x^{2}\left(xy+\frac{1}{2}y^{2}\right)\Big|_{0}^{2}\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\int_{0}^{2}(x^{3}+x^{2})\mathrm{d}x=\frac{5}{3},$$

$$E(XY)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xyf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{0}^{2}\mathrm{d}x\int_{0}^{2}\frac{xy}{8}(x+y)\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{4}\int_{0}^{2}\left(x^{2}+\frac{4x}{3}\right)\mathrm{d}x=\frac{4}{3}.$$

由x,y在$f(x,y)$的表达式中的对称性(即在表达式$f(x,y)$中将x和y互换，表达式不变)，得知

$$E(Y)=E(X)=\frac{7}{6},\quad E(Y^{2})=E(X^{2})=\frac{5}{3},$$

且有$D(Y)=D(X)=E(X^{2})-[E(X)]^{2}=\dfrac{5}{3}-\left(\dfrac{7}{6}\right)^{2}=\dfrac{11}{36}$.

而　$\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\dfrac{4}{3}-\dfrac{49}{36}=-\dfrac{1}{36}$,

$$\rho_{XY}=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=\frac{-1}{11},$$

$$D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2\mathrm{Cov}(X,Y)=\frac{5}{9}.$$

33. 设随机变量$X\sim N(\mu,\sigma^{2}),Y\sim N(\mu,\sigma^{2})$，且设$X,Y$相互独立，试求$Z_{1}=\alpha X+\beta Y$和$Z_{2}=\alpha X-\beta Y$的相关系数(其中$\alpha,\beta$是不为零的常数).

解法(i)
$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(Z_1,Z_2) &= \mathrm{Cov}(\alpha X+\beta Y,\alpha X-\beta Y)\\ &= \alpha^2\mathrm{Cov}(X,X)-\alpha\beta\mathrm{Cov}(X,Y)+\alpha\beta\mathrm{Cov}(Y,X)-\\ &\quad\ \beta^2\mathrm{Cov}(Y,Y)\\ &= \alpha^2D(X)-\beta^2D(Y)=(\alpha^2-\beta^2)\sigma^2,\end{aligned}$$

而
$$\begin{aligned}D(Z_1) &= D(\alpha X+\beta Y)\\ &= \alpha^2D(X)+\beta^2D(Y)+2\mathrm{Cov}(\alpha X,\beta Y)=(\alpha^2+\beta^2)\sigma^2,\\ D(Z_2) &= D(\alpha X-\beta Y)\\ &= \alpha^2D(X)+\beta^2D(Y)-2\mathrm{Cov}(\alpha X,\beta Y)=(\alpha^2+\beta^2)\sigma^2,\end{aligned}$$

故
$$\rho_{Z_1Z_2}=\frac{(\alpha^2-\beta^2)\sigma^2}{\sqrt{D(Z_1)D(Z_2)}}=\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}.$$

解法(ii)
$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(Z_1,Z_2) &= E(Z_1Z_2)-E(Z_1)E(Z_2)\\ &= E(\alpha^2X^2-\beta^2Y^2)-[\alpha E(X)+\beta E(Y)][\alpha E(X)-\beta E(Y)]\\ &= \alpha^2E(X^2)-\beta^2E(Y^2)-\{\alpha^2[E(X)]^2-\beta^2[E(Y)]^2\}\\ &= \alpha^2\{E(X^2)-[E(X)]^2\}-\beta^2\{E(Y^2)-[E(Y)]^2\}\\ &= \alpha^2D(X)-\beta^2D(Y)=(\alpha^2-\beta^2)\sigma^2.\end{aligned}$$
$$D(Z_1)=D(\alpha X+\beta Y)=\alpha^2D(X)+\beta^2D(Y)=(\alpha^2+\beta^2)\sigma^2,$$
$$D(Z_2)=D(\alpha X-\beta Y)=\alpha^2D(X)+\beta^2D(Y)=(\alpha^2+\beta^2)\sigma^2,$$

故
$$\rho_{Z_1Z_2}=\frac{(\alpha^2-\beta^2)\sigma^2}{\sqrt{D(Z_1)D(Z_2)}}=\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}.$$

34. (1) 设随机变量$W=(aX+3Y)^2$,$E(X)=E(Y)=0$,$D(X)=4$,$D(Y)=16$,$\rho_{XY}=-0.5$.求常数a使$E(W)$为最小,并求$E(W)$的最小值.

(2) 设随机变量(X,Y)服从二维正态分布,且有$D(X)=\sigma_X^2$,$D(Y)=\sigma_Y^2$.证明当$a^2=\sigma_X^2/\sigma_Y^2$时,随机变量$W=X-aY$与$V=X+aY$相互独立.

解 (1) $E(W)=E[(aX+3Y)^2]=a^2E(X^2)+6aE(XY)+9E(Y^2)$,
$$E(X^2)=D(X)+[E(X)]^2=4,$$
$$E(Y^2)=D(Y)+[E(Y)]^2=16,$$
$$E(XY)=\mathrm{Cov}(X,Y)+E(X)E(Y)=\rho_{XY}\sqrt{D(X)D(Y)}=-4,$$

故
$$E(W)=4a^2-24a+144=4(a-3)^2+108,$$

故当$a=3$时$E(W)$取最小值,$\min\{E(W)\}=108$.

(2) 因为(X,Y)是二维正态变量,而W与V分别是X,Y的线性组合,故由n维正态随机变量的性质3°知(W,V)也是二维正态变量.现在$a^2=\sigma_X^2/\sigma_Y^2$,故知有
$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(W,V) &= \mathrm{Cov}(X-aY,X+aY)\\ &= \mathrm{Cov}(X,X)-a^2\mathrm{Cov}(Y,Y)=\sigma_X^2-a^2\sigma_Y^2=0,\end{aligned}$$

即知 W 与 V 不相关. 又因 (W,V) 是二维正态变量，故知 W 与 V 是相互独立的.

35. 设随机变量 (X,Y) 服从二维正态分布，且 $X \sim N(0,3)$，$Y \sim N(0,4)$，相关系数 $\rho_{XY} = -\frac{1}{4}$，试写出 X 和 Y 的联合概率密度.

解 因 $\mu_1 = \mu_2 = 0$，$\sigma_1 = \sqrt{3}$，$\sigma_2 = 2$，$\rho = -\frac{1}{4}$，故 X 和 Y 的联合概率密度为

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \frac{1}{4\sqrt{3}\pi\sqrt{1-1/16}}\exp\left[\frac{-1}{2(1-1/16)}\left(\frac{x^2}{3}+\frac{xy}{4\sqrt{3}}+\frac{y^2}{4}\right)\right] \\ &= \frac{1}{3\sqrt{5}\pi}\exp\left[\frac{-8}{15}\left(\frac{x^2}{3}+\frac{xy}{4\sqrt{3}}+\frac{y^2}{4}\right)\right]. \end{aligned}$$

36. 已知正常男性成人血液中，每一毫升白细胞数平均是 7 300，均方差是 700. 利用切比雪夫不等式估计每毫升含白细胞数在 5 200 ~ 9 400 之间的概率 p.

解 以 X 表示每毫升含白细胞数，由题设

$$E(X) = \mu = 7\,300, \quad \sqrt{D(X)} = \sigma = 700$$

而概率

$$\begin{aligned} p &= P\{5\,200 < X < 9\,400\} \\ &= P\{-2\,100 < X - 7\,300 < 2\,100\} \\ &= P\{|X - 7\,300| < 2\,100\}. \end{aligned}$$

在切比雪夫不等式

$$P\{|X-\mu| < \varepsilon\} \geqslant 1 - \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

中，取 $\varepsilon = 2\,100$，此时 $1 - \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2} = 1 - \frac{700^2}{2\,100^2} = \frac{8}{9}$，即知

$$p = P\{|X - 7\,300| < 2\,100\} \geqslant \frac{8}{9}.$$

37. 对于两个随机变量 V,W，若 $E(V^2)$，$E(W^2)$ 存在，证明

$$[E(VW)]^2 \leqslant E(V^2)E(W^2). \tag{A}$$

这一不等式称为柯西-施瓦茨(Cauchy-Schwarz)不等式.

证 若 $E(V^2) = 0$，则 $P\{V = 0\} = 1$ (因 $E(V^2) = D(V) + (E(V))^2 = 0$，得 $D(V) = 0$ 且 $E(V) = 0$，由方差性质 4° 即得 $P\{V = 0\} = 1$). 由此 $P\{VW = 0\} = 1$，因此，$E(VW) = 0$，此时不等式(A)得证. 同样对于 $E(W^2) = 0$ 时，不等式(A)也成立. 以下设 $E(V^2) > 0$，$E(W^2) > 0$. 考虑实变量 t 的函数：

$$q(t) = E[(V + tW)^2] = E(V^2) + 2tE(VW) + t^2E(W^2).$$

因为对于任意 t，$E[(V + tW)^2] \geqslant 0$，$E(W^2) > 0$，故二次三项式 $q(t)$ 的判别式：

$$\Delta = 4[E(VW)]^2 - 4E(V^2)E(W^2) \leqslant 0,$$

即有

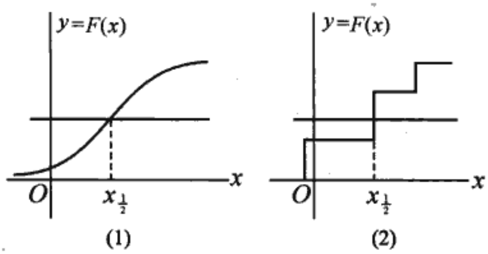
$$[E(VW)]^2 \leqslant E(V^2)E(W^2).$$

38. 中位数.

对于任意随机变量 X，满足以下两式

$$P\{X \leqslant x\} \geqslant \frac{1}{2}, \qquad P\{X \geqslant x\} \leqslant \frac{1}{2}$$

的 x 称为 X 的**中位数**，记为 $x_{\frac{1}{2}}$ 或 M. 它是反映集中位置的一个数字特征. 中位数总是存在，但可以不唯一. 画出 X 的分布函数 $F(x)$ 的图. 如果 $F(x)$ 连续，那么 $x_{\frac{1}{2}}$ 是方程 $F(x) = \frac{1}{2}$ 的解（如题 4.38 图(1)），如果 $F(x)$ 有跳跃点（见题 4.38 图(2)），用垂直于横轴的线段联结后，得一连续曲线，它与直线 $y = \frac{1}{2}$ 的交点的横坐标即为 $x_{\frac{1}{2}}$. 由于交点可以不唯一，故可以有许多 $x_{\frac{1}{2}}$.



题 4.38 图

(1) 设 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} 2e^{-2x}, & x \geqslant 0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

试求 X 的中位数 M.

(2) 设 X 服从柯西分布，其概率密度为

$$f(x) = \frac{b}{\pi[(x-a)^2 + b^2]}, \quad b > 0.$$

试求 X 的中位数 M.

解　设 $F(x)$ 为分布函数.

(1) M 应满足 $F(M) = \frac{1}{2}$.

即　$$\frac{1}{2} = F(M) = P\{X \leqslant M\} = \int_0^M 2e^{-2x}dx = -e^{-2x}\Big|_0^M = 1 - e^{-2M},$$

故　$$e^{-2M} = \frac{1}{2}, \qquad e^{2M} = 2,$$

得 $M = \frac{1}{2}\ln 2.$

此即为所求的中位数.

(2) 由

$$\frac{1}{2} = F(M) = P\{X \leqslant M\} = \int_{-\infty}^{M} \frac{b}{\pi[(x-a)^2+b^2]}\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{\pi}\arctan\frac{x-a}{b}\Big|_{-\infty}^{M} = \frac{1}{\pi}\arctan\frac{M-a}{b} + \frac{1}{2},$$

得 $M-a=0$,即知中位数 $M=a$.

另外,易知 X 的概率密度函数 $f(x)$ 的图形关于直线 $x=a$ 是对称的. 即知

$$P\{X \leqslant a\} = \int_{-\infty}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}.$$

故中位数为 $M=a$.