厦门大学《概率论与数理统计》课程

期中试题 1·答案

考试日期：　　信息学院自律督导部整理

自律督导部

一、(15 分) 甲乙丙三人在同一办公室工作，房间里有三部电话。根据以往经验，打给甲乙丙电话的概率分别为$\frac{2}{5}$，$\frac{2}{5}$，$\frac{1}{5}$，他们三人外出的概率分别为$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{4}$，假设三人行动各自独立。计算下列事件的概率：(1) 无人接听电话；(2) 被呼叫人在办公室；(3) 若某时段打入 3 个电话，这 3 个电话打给不相同的人的概率。

解：用 A、B、C 表示电话打给甲乙丙，用A_1、B_1、C_1表示甲乙丙在办公室

（1）设 D={无人接听电话}，则

$$P(D)=P(\overline{A_1}\ \overline{B_1}\ \overline{C_1})=P(\overline{A_1})P(\overline{B_1})P(\overline{C_1})=\frac{1}{2}*\frac{1}{4}*\frac{1}{4}=\frac{1}{32}$$

（2）设 E={被呼叫人在办公室}，则

$$P(E)=P(AA_1+BB_1+CC_1)=P(AA_1)+P(BB_1)+P(CC_1)=\frac{2}{5}*\frac{1}{2}+\frac{2}{5}*\frac{3}{4}+\frac{1}{5}*\frac{3}{4}=\frac{13}{20}$$

（3）设 F={3 个电话打给不相同的人}，则第一个电话打给甲、第二个电话打给乙、第三个电话打给丙的概率为$P(ABC)=P(A)P(B)P(C)=\frac{4}{125}$，这样的事件有 3!=6 个，所以

$$P(F)=6*\frac{4}{125}=\frac{24}{125}$$

二、(10 分) 炮战中，若在距目标 250 米，200 米，150 米处射击的概率分别为 0.1，0.7，0.2，而在各该处射击时命中目标的概率分别为 0.05，0.1，0.2，现在已知目标被击毁，求击毁目标的炮弹是由距离目标 250 米处射出的概率。

解：用 A、B、C 分别表示炮弹在在距目标 250 米，200 米，150 米处射击，用 D 表示目标被击毁，则

$$P(A)=0.1,\ P(B)=0.7,\ P(C)=0.2;\quad P(D|A)=0.05,\ P(D|B)=0.1,\ P(D|C)=0.2$$

根据 Bayes 公式，

$$P(A|D)=\frac{P(D|A)P(A)}{P(D|A)P(A)+P(D|B)P(B)+P(D|C)P(C)}=\frac{0.05*0.1}{0.05*0.1+0.1*0.7+0.2*0.2}$$
$$=\frac{1}{23}=0.0435,$$

三、(10 分) 甲乙两人各出赌注 a，约定谁先胜三局则赢得全部赌注，现已赌三局，甲两胜一负，这时因故中止赌博，若两人赌技相同，且每局相互独立，问应如何分配赌注才算公平？

解：用 A 表示乙最终获得胜利，用A_i表示第 i 局乙获胜，则

$$P(A_i)=\frac{1}{2},$$

由于甲两胜一负，并且各局相互独立，如果乙最终获胜，则必须连赢两局，所以

$$P(\text{乙最终获胜})=P(A_4)P(A_5)=\frac{1}{4},$$

所以，$P(\text{甲最终获胜})=\frac{3}{4}$，甲乙两人应该以 3:1 的方式分配赌注才公平。

四、(10 分) 假设随机变量 X 服从参数为 (μ，σ^2)的正态分布，计算 $Y=X^{-1}$的密度函数。

解：记 X 的分布函数为$F_X(x)$，Y 的分布函数为$F_Y(y)$。

当 $y<0$ 时，

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(X^{-1}\le y)=P(X^{-1}\le y,X>0)+P(X^{-1}\le y,X<0)$$
$$=0+P\left(\frac{1}{y}<X<0\right)=F_X(0)-F_X\left(\frac{1}{y}\right)$$

当 $y=0$ 时，

$$F_Y(0)=P(Y\le 0)=P(X^{-1}\le 0)=P(X<0)=F_X(0)$$

当 $y>0$ 时，

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(X^{-1}\le y)=P(X^{-1}<0)+P(0\le X^{-1}\le y)$$
$$=P(X<0)+P\left(X>\frac{1}{y}\right)=F_X(0)+1-F_X\left(\frac{1}{y}\right)$$

所以

$$F_Y(y)=\begin{cases}F_X(0)-F_X\left(\frac{1}{y}\right), & y<0\\ F_X(0), & y=0\\ F_X(0)+1-F_X\left(\frac{1}{y}\right), & y>0\end{cases}$$

Y 的密度函数为

$$f_Y(y)=F_Y'(y)=\frac{1}{y^2}\,f_X\left(\frac{1}{y}\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma y^2}*\exp\left\{-\frac{(1\ -\mu y)^2}{2\sigma^2y^2}\right\}$$

五、(15 分) 甲每天收到的电子邮件数服从泊松分布，参数为λ，每封电子邮件被过滤的概率为 0.2，计算

（1）当有 n 封电子邮件发给甲的时候，甲见到其中 k 封的概率p_k；

（2）甲每天见到的电子邮件数的分布；

（3）甲每天见到的电子邮件数和被过滤掉的电子邮件数是否独立。

解：（1）$p_k=C_n^k0.8^k0.2^{n-k}$

（2）用 X 表示甲每天见到的电子邮件数，用 Y 表示甲每天收到的电子邮件数, 则

$$P(X=k)=\sum_{n=k}^{\infty}P(X=k,Y=n)=\sum_{n=k}^{\infty}P(X=k|Y=n)\,P(Y=n)$$
$$=\sum\nolimits_{n=k}^{\infty}\frac{n!}{k!\,(n-k)!}0.8^k0.2^{n-k}\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}=\sum\nolimits_{n=k}^{\infty}\frac{\lambda^n}{k!\,(n-k)!}0.8^k0.2^{n-k}e^{-\lambda}$$

令$t=n-k$, 则

$$P(X=k)=\sum\nolimits_{t=0}^{\infty}\frac{\lambda^t0.2^t}{t!}\frac{(0.8\lambda)^ke^{-\lambda}}{k!}=\frac{(0.8\lambda)^ke^{-\lambda}}{k!}e^{0.2\lambda}=\frac{(0.8\lambda)^k}{k!}e^{-0.8\lambda},\quad k=0，1，2\ldots$$

（3）用 Z 表示被过滤掉的电子邮件数，则（X, Z）的联合分布为

$$P(X=m,Z=n)=P(X=m,Y=m+n)=\frac{(m+n)!}{n!\,m!}0.8^m0.2^n\frac{\lambda^{m+n}}{(m+n)!}e^{-\lambda}$$
$$=\frac{\lambda^{m+n}}{n!\,m!}0.8^m0.2^ne^{-\lambda},\qquad m,n=0，1，2\ldots$$

故 Z 的边缘分布为

$$P(Z=n)=\sum\nolimits_{m=0}^{\infty}\frac{\lambda^{m+n}0.8^m0.2^ne^{-\lambda}}{n!\,m!}=\frac{(0.2\lambda)^ne^{-\lambda}}{n!}\sum\nolimits_{m=0}^{\infty}\frac{(0.8\lambda)^m}{m!}=\frac{(0.2\lambda)^n}{n!}e^{-0.2\lambda},$$

$n=0，1，2\ldots$

由于$P(X=m,Z=n)=P(X=m)P(Z=n)$，所以 X 与 Z 相互独立，即甲每天见到的电子邮件数和被过滤掉的电子邮件数是相互独立的。

六、(10 分)设随机变量 X 在区间(0, 1)上服从均匀分布，在$\mathbf{X} = \mathbf{x}(\mathbf{0} < x < 1)$的条件下，随机变量 Y 在区间(0, x)上服从均匀分布，求（1）Y 的边缘密度；（2）概率 $\mathbf{P}(\mathbf{X} + \mathbf{Y} > 1)$。

解：（1）X 的概率密度为

$$f_X(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

在在$X = x\ (0 < x < 1)$的条件下，随机变量 Y 的条件密度为

$$f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & 0 < y < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

（X，Y）的联合概率密度为$f(x, y) = f_{Y|X}(y|x) * f_X(x)$，所以

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & 0 < y < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

而 Y 的概率密度为$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dx$，因此

$$f_Y(y) = \begin{cases} \displaystyle\int_y^1 \frac{1}{x}\,dx, & 0 < y < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} = \begin{cases} -\ln y, & 0 < y < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

（2）所求概率

$$P(X + Y > 1) = \iint\limits_{x+y>1} f(x, y)\,dxdy = \int_{1/2}^{1} dx \int_{1-x}^{x} \frac{1}{x}\,dy = 1 - \ln 2$$

七、(10 分)假设 X，Y 的联合概率分布为

Y \ X	−1	0	1
−1	a	0	0.2
0	0.1	b	0.1
1	0	0.2	c

且$\mathbf{P}(\mathbf{XY} \neq \mathbf{0}) = \mathbf{0.4}$，$\mathbf{P}(\mathbf{Y} \leq \mathbf{0}|\mathbf{X} \leq \mathbf{0}) = \frac{2}{3}$，求 $\mathbf{X} + \mathbf{Y}$ 的概率分布。

解：由于

$$0.4 = P(XY \neq 0) = a + 0.2 + c,$$

$$\frac{2}{3} = P(Y \le 0|X \le 0) = \frac{a + 0.1 + b}{a + 0.1 + b + 0.2},$$

$$1 = a + 0.2 + 0.1 + b + 0.1 + 0.2 + c$$

解得$a = 0.1$，$b = 0.2$，$c = 0.1$。$X + Y$的可能取值为-2，-1, 0, 1, 2，相应的概率为

$$P(X + Y = -2) = P(X = -1，Y = -1) = 0.1，$$

$$P(X + Y = -1) = P(X = -1，Y = 0) + P(X = 0，Y = -1) = 0.1，$$

$$P(X + Y = 0) = P(X = 0，Y = 0) + P(X = 1，Y = -1) + P(X = -1，Y = 1) = 0.4，$$

$$P(X + Y = 1) = P(X = 1，Y = 0) + P(X = 0，Y = 1) = 0.3，$$

$$P(X + Y = 2) = P(X = 1，Y = 1) = 0.1$$

八、(10 分)设随机变量 X、Y 的联合密度函数为

$$f(x，y) = \begin{cases} \dfrac{3}{2x^3y^2}, & x > 1，1 < xy < x^2 \\ 0, & 其他 \end{cases},$$

求 EY，$E(XY)^{-1}$。

解一：根据二维随机变量函数数学期望的计算

$$E\,Y = \iint y\,f(x,y)dxdy = \int_1^{\infty} dx \int_{\frac{1}{x}}^{x} y\,\frac{3}{2x^3y^2}\,dy = \int_1^{\infty} \frac{3}{2x^3}\left(\int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{1}{y}dy\right)dx = \int_1^{\infty} \frac{3}{x^3}\,\ln x\;dx$$

$$= -\frac{3}{2}\int_1^{\infty} \ln x\;\;d\left(\frac{1}{x^2}\right) = \frac{3}{2}\int_1^{\infty} \frac{1}{x^3}\,d\,x = \frac{3}{4}$$

$$E(XY)^{-1} = \iint (xy)^{-1}\,f(x,y)dxdy = \int_1^{\infty} dx \int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{3}{2x^4y^3}\,dy = -\frac{3}{4}\int_1^{\infty} \frac{1}{x^4}\left(\frac{1}{x^2} - x^2\right)dx$$

$$= -\frac{3}{4} * \frac{1}{5} + \frac{3}{4} = \frac{3}{5}$$

解二：先求 Y 的边缘密度函数，再计算数学期望。

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,\ y)\,dx=\begin{cases}0, & y<0\\ \int_{\frac{1}{y}}^{\infty}\frac{3}{2x^3y^2}dx, & 0<y<1\\ \int_{y}^{\infty}\frac{3}{2x^3y^2}dx, & y>1\end{cases}=\begin{cases}0, & y<0\\ \frac{3}{4}, & 0<y<1,\\ \frac{3}{4y^4}, & y>1\end{cases}$$

$$E\,Y=\int_{-\infty}^{\infty} y\ f_Y(y)\,dy=\int_0^1 \frac{3}{4}\,y\,dy+\int_1^{\infty}\frac{3}{4y^3}\,dy=\frac{3}{4}$$

九、(10 分)假设随机变量 X、Y 均服从参数为 $(\mu,\ \sigma^2)$的正态分布，并且 X、Y 相互独立，计算$Z_1=\alpha X+\beta Y$，$Z_2=\alpha X-\beta Y$ 的相关系数。

解一：由于 X、Y 均服从参数为 $(\mu,\ \sigma^2)$的正态分布，故$E\,X=E\,Y=\mu$，$D\,X=D\,Y=\sigma^2$，

$$\rho=\frac{\mathrm{Cov}(Z_1,\ Z_2)}{\sqrt{DZ_1}\sqrt{DZ_2}}=\frac{E(Z_1Z_2)-EZ_1\,EZ_2}{\sqrt{DZ_1}\sqrt{DZ_2}}$$

由于

$EZ_1=E(\alpha X+\beta Y)=(\alpha+\beta)\mu$，$EZ_2=E(\alpha X-\beta Y)=(\alpha-\beta)\mu$，

$EZ_1Z_2=E(\alpha X+\beta Y)(\alpha X-\beta Y)=E(\alpha^2X^2-\beta^2Y^2)=(\alpha^2-\beta^2)(\sigma^2+\mu^2)$，

$DZ_1=D(\alpha X+\beta Y)=\alpha^2DX+\beta^2DY=(\alpha^2+\beta^2)\sigma^2$，$DZ_2=D(\alpha X+\beta Y)=(\alpha^2+\beta^2)\sigma^2$，

所以，

$$\rho=\frac{(\alpha^2-\beta^2)(\sigma^2+\mu^2)-(\alpha+\beta)\mu(\alpha-\beta)\mu}{(\alpha^2+\beta^2)\sigma^2}=\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}$$

解二：利用协方差的性质，

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(Z_1,\ Z_2)&=\mathrm{Cov}(\alpha X+\beta Y,\ \alpha X-\beta Y)=\alpha^2\mathrm{Cov}(X,\ X)-\beta^2\mathrm{Cov}(Y,\ Y)\\&=\alpha^2DX-\beta^2DY=(\alpha^2-\beta^2)\,\sigma^2\end{aligned}$$

所以，

$$\rho=\frac{\mathrm{Cov}(Z_1,\ Z_2)}{\sqrt{DZ_1}\sqrt{DZ_2}}=\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}$$