厦门大学《大学物理》C 类

课程期中试卷

一、　　（14 分）

一质点在 xoy 平面上运动，运动方程为 $x=2t$， $y=19-2t^2$，式中 t 以 s 计， x,y 以 m 计。求：

（1）质点的轨道方程；

（2）在 $t=1s$ 至 $t=2s$ 时间内质点的位移；

（3）任意时刻质点的速度矢量 $\vec{v}(t)$，及加速度矢量 $\vec{a}(t)$；

解：（1）质点的轨道方程： $y=19-\dfrac{x^2}{2}$ ；　　（4分）

（2）$\because \vec{r}_1=2\vec{i}+17\vec{j}$ ， $\vec{r}_2=4\vec{i}+11\vec{j}$ ，$\therefore \Delta\vec{r}=2\vec{i}-6\vec{j}(m)$ ；　　（1+1+2=4分）

（3）$\vec{v}(t)=\dfrac{d\vec{r}}{dt}=2\vec{i}-4t\vec{j}(m/s)$ ；　　（3分）

$$\vec{a}(t)=\frac{d\vec{v}}{dt}=-4\vec{j}(m/s^2)$$ 。　　（3分）

二、　　（14 分）

一质点以初速度 v_0 做直线运动，所受阻力与其速度成正比 $f=-kv$，其中 k 为常量，当质点的速度减为 v_0/n 时（$n>1$），求：

（1）质点速度由 v_0 减为 v_0/n 时所经历的时间；

（2）质点所能经过的最大路程 $x_{\max}$。

解：（1）质点动力学方程：$-kv=m\dfrac{dv}{dt}$ ，　　（3 分）

$\therefore \int_0^t dt=-\dfrac{m}{k}\int_{v_0}^{v_0/n}\dfrac{dv}{v}$ $\Rightarrow$ 　解得：$t=\dfrac{m}{k}\ln n$ ；　　（4 分）

（2）$\because -kv=m\dfrac{dv}{dt}\cdot\dfrac{dx}{dx}=mv\dfrac{dv}{dx}$ ，　　（3 分）

$$\therefore \int_0^x dx = -\frac{m}{k}\int_{v_0}^{v_0/n} dv \quad \Rightarrow \quad \text{解得：} x_{\max} = \frac{mv_0}{k}(1-\frac{1}{n})$$ （4 分）

三、　　（15 分）

一质量为$m = 2kg$的质点在xoy平面内作圆周运动，圆的半径$R = 2m$。在自然坐标系中，质点的轨道方程为$s = 0.5\pi t^2$。求：

（1）$t = 1\ (s)$时质点的动量$\vec{P}$；

（2）$t = 1\ (s)$时质点相对圆心的角动量的大小L_0；

（3）在$t = 0$至$t = \sqrt{2}\ (s)$时间内质点所受合外力的冲量的大小I；

解：（1）$\because \vec{v}(t) = \frac{ds}{dt}\vec{\tau} = \pi t\vec{\tau}(m/s)$ ，

$\therefore \vec{P} = m\vec{v} = 2\pi t\vec{\tau}(kg \cdot m/s)$ ， $\vec{P}_{t=1} = 2\pi\vec{\tau}(kg \cdot m/s)$ ； （2+3=5 分）

（2）$\because \vec{L} = \vec{r} \times \vec{P}$ ， $\therefore L = mRv$ ，

$\therefore L_{t=1} = mRv_{t=1} = 4\pi(kg \cdot m^2/s)$ ；（2+3=5 分）

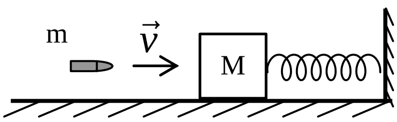
（方向垂直于圆平面，与$\vec{r}, \vec{P}$构成右螺旋关系）

（3）$\because \vec{P}_{t=0} = 0$ ， $\vec{P}_{t=\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}\pi$ ，

$\therefore I = |\Delta\vec{P}| = |\vec{P}_2 - \vec{P}_1| = 2\sqrt{2}\pi(kg \cdot m/s) = 2\sqrt{2}\pi(N \cdot s)$ 。（1+1+3=5 分）

四、　　（14分）

如图所示，放置在光滑水平面上的弹簧振子由质量为M的木块和弹性系数为k的轻弹簧构成。现有一个质量为m，速度为v的子弹射入静止的木块后陷入其中，当子弹与木块一起运动时开始计，



（1）求该系统的振动方程；

（2）请写出该谐振子的动能和势能随时间的函数关系。

解：（1）设水平向右为x轴正方向，弹簧自然长度为坐标原点，

a. $\because$ 子弹入射过程动量守恒： $mv=(m+M)v_0$ ，

$\therefore$ 系统振动初速度： $v_0=\dfrac{m}{m+M}v$ ，且向 x 轴正方向运动；又 $x_0=0$，

$\therefore$ $\varphi_0=-\dfrac{\pi}{2}$ ； （2 分）

b. 系统动力学方程： $-kx=(m+M)\dfrac{d^2x}{dt^2}$ ， $\Rightarrow$ $\dfrac{d^2x}{dt^2}+\dfrac{k}{m+M}x=0$ ，

$\therefore$ $\omega=\sqrt{\dfrac{k}{m+M}}$ ， （2 分）

c. 系统振幅： $A=\sqrt{x_0^2+\dfrac{v_0^2}{\omega^2}}=mv\sqrt{\dfrac{m+M}{k}}$ ， （2 分）

该系统的振动方程： $x=mv\sqrt{\dfrac{m+M}{k}}\cos(\sqrt{\dfrac{k}{m+M}}t-\dfrac{\pi}{2})$ ； （2 分）

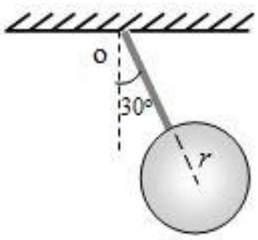
（2） $u=\dfrac{dx}{dt}=-mv\sin(\sqrt{\dfrac{k}{m+M}}t-\dfrac{\pi}{2})$ ，

$\therefore E_k=\dfrac{1}{2}(m+M)u^2=\dfrac{1}{2}(m+M)m^2v^2\sin^2(\sqrt{\dfrac{k}{m+M}}t-\dfrac{\pi}{2})$ ； （3 分）

$E_p=\dfrac{1}{2}kx^2=\dfrac{1}{2}(m+M)m^2v^2\cos^2(\sqrt{\dfrac{k}{m+M}}t-\dfrac{\pi}{2})$ 。 （3 分）

五、 （14 分）

一钟摆可以在竖直平面内摆动。已知摆锤的质量为 m，半径为 r，摆杆的质量也为 m，长度为 $2r$。将钟摆拉离平衡位置至与竖直方向成 30^0 角，后由静止释放。求：



（1） 钟摆相对转轴 O 的转动惯量 J_0；

（2） 钟摆由初始位置摆动到竖直位置的过程中重力矩所做的功。

解：（1）摆杆的转动惯量： $J_1=\dfrac{1}{3}m(2r)^2=\dfrac{4}{3}mr^2$ ， （3 分）

摆锤的转动惯量： $J_2=\dfrac{1}{2}mr^2+m(3r)^2=\dfrac{19}{2}mr^2$ ， （3 分）

$\therefore$ 钟摆的转动惯量：$J = J_1 + J_2 = \dfrac{65}{6}mr^2$ ；（2 分）

（2） 重力矩做功：

$$W = W_1 + W_2 = -\Delta E_{p1} - \Delta E_{p2}$$
$$= mgr(1-\cos 30^0) + 3mgr(1-\cos 30^0) = mgr(2-\sqrt{3})$$ 。

（3+3+1=7 分）

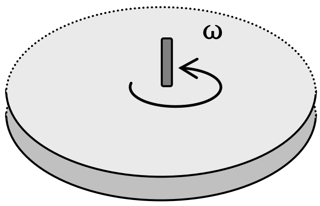
或：$W_1 = -\int_{\frac{\pi}{6}}^{0} mgr\sin\theta d\theta = (1-\dfrac{\sqrt{3}}{2})mgr$ ，

$W_2 = -\int_{\frac{\pi}{6}}^{0} 3mgr\sin\theta d\theta = 3(1-\dfrac{\sqrt{3}}{2})mgr$ ，

$\therefore W = W_1 + W_2 = 2mgr(2-\sqrt{3})$

六、 （14 分）

质量为 m，半径为 R 的均质圆盘放在粗糙的水平面上，圆盘与桌面的摩擦系数为 μ。开始时圆盘以角速度 ω_0 绕竖直轴旋转，



（1） 求桌面对圆盘的摩擦力矩的大小；

（2） 当圆盘静止时，圆盘转过了多少圈？

解：（1）圆盘上取一细圆环，该圆环所受摩擦矩：

$dM = -r\cdot\mu g dm = -2\pi\mu g\sigma r^2 dr$ ，（3 分）

圆盘所受摩擦矩：$M = \int_0^R -2\pi\mu g\sigma r^2 dr = -\dfrac{2}{3}\pi\mu g\sigma R^3 = -\dfrac{2}{3}\mu mgR$ ；（4 分）

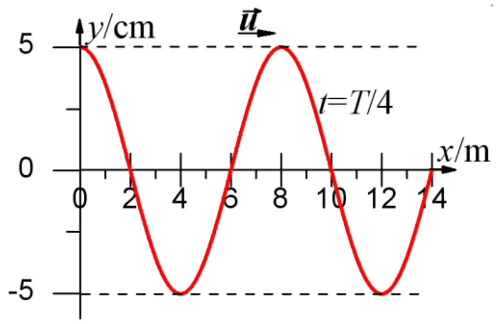
（2）$\because M = J\alpha = J\dfrac{d\omega}{dt}\cdot\dfrac{d\theta}{d\theta} = J\dfrac{\omega d\omega}{d\theta}$ ，（2 分）

$\therefore \int_0^\theta d\theta = \dfrac{J}{M}\int_{\omega_0}^0 \omega d\omega \quad\Rightarrow\quad \therefore \theta = -\dfrac{1}{2}\dfrac{J}{M}\omega_0^2 = -\dfrac{3}{8}\dfrac{R\omega_0^2}{\mu g}$ ，（3 分）

其中：$J = \dfrac{1}{2}mR^2$

圆盘转过的圈数：$N = \dfrac{\theta}{2\pi} = \dfrac{3}{16\pi}\dfrac{R\omega_0^2}{\mu g}$ 。（2 分）

七、　　（15 分）



一平面简谐波以波速 $u=200m/s$ 在均匀介质中沿 x 轴正向传播，在 $t=\dfrac{T}{4}$ 时刻的波形图如图所示。

（1）以 $x=0$ 处为坐标原点，求出此简谐波的波函数；

（2）求出 $x=4.5m$ 处的质点的振动方程，并画出其在 $t=0$ 时刻的旋转矢量图；

（3）以 $x=4.5m$ 处为坐标原点，求出简谐波的波函数；

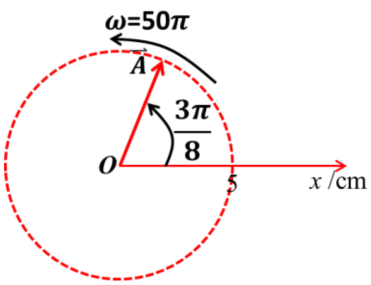
解：（1） $\lambda=8m$ ， $A=0.05m$ ， $\varphi_0=-\dfrac{\pi}{2}$ ，

$$\omega=\frac{2\pi u}{\lambda}=\frac{2\pi\times200}{8}=50\pi$$ ，　　（1+1+1=1=4 分）

所求波函数： $y=0.05\cos[50\pi(t-\dfrac{x}{200})-\dfrac{\pi}{2}](m)$ ；　（2 分）

（2） $$y_{x=4.5}=0.05\cos[50\pi(t-\frac{4.5}{200})-\frac{\pi}{2}]$$
$$=0.05\cos[50\pi t-\frac{13\pi}{8}]=0.05\cos[50\pi t+\frac{3\pi}{8}](m)$$ ；　（3 分）

（2 分）



（3）所求波函数： $y'=0.05\cos[\omega(t-\dfrac{x}{200})+\dfrac{3\pi}{8}](m)$ 　（4 分）