

**厦门大学《高等数学A》课程试卷答案**

**主考教师：高数A组 试卷类型：（A卷） 2013.01.24**

**一、求下列极限（每小题4分，共16分）**

1.

解：利用泰勒展式

原式 = 

2. .

解：利用积分中值定理知，，s.t.



由两边夹法则，原式 = 0.

3. .

解：利用定积分定义

原式 = 

4. .

解：利用洛必达法则

原式 = 

**二、计算下列积分（每小题4分，共16分）**

1..

解：令，则

原式 = 

另证：原式 = 

2. .

解：利用分部积分



3. .

解：利用函数奇偶性



4. .

解：分部积分



故

**三、解答题（每题6分，共36分）**

y



1．设的图像为如图所示的二次抛物线，

x

2

o

1

且的极小值为2，极大值为6，试求.

解：由图可设抛物线方程为

故

又由及条件易知

故可解得从而

2. ，求.

解：求导知故

因此

故

3. 求曲线的单调区间、极值、凹凸区间、拐点、渐近线以及在处的曲率半径.

解：计算可得

故其单调增区间为单调减区间为

在处取极大值，在处取极小值。

凹区间为，凸区间为，拐点为点。

又由知函数有两条倾斜渐近线。

在处的曲率半径为

4. 已知为连续函数，且 ，求

在上的最值。

解：求导知

故其导数为有唯一驻点

计算故最大值为12，最小值为

5. 设平面图形A由与所确定，求图形A绕直线旋转一周所得旋转体的体积。

y

x

2

1

O

y

解：如图所示，

上半圆方程为

体积微元为



6. 一个半径为4米，高为8米的倒圆锥形水池，里面有6米深的水，试问要把池内的水全部抽完，需作多少功。

1. 解：以倒圆锥的底圆中心为坐标原点o，原点与圆锥顶点的连线为x轴，方向向下，如下草图所示：锥体母线AB的方程为。

任取水深，与相对应的薄层水

A(0,4)

2

y

O

所受的重力近似为，将这

*x*

薄层水“提到”池口的距离为，则克服重力所作

y= -x/2+4

的功约为 ，于是

B(8,0)

x

.

**四、证明题 （任选4题，共32分）**

1. (8分) 证明，并求其值。

解：令，

故积分

2. (8分)设在上连续且单调减少，若，

证明：.

证明：令则

且由积分中值定理， 

故即不等式得证。

3. (8分) 证明：，.

证明：令

则且

而且。

故从而不等式得证。

4. (8分) 设在区间上有连续导数，且，证明：

(1) ，其中为参数；

(2) , 其中*M*是在上的最大值.

证明：（1）分部积分，得



（2）令（1）中的 得





5．(8分) 设在区间上具有二阶连续导数，，证明至少存在一点，使得。

证法1：令则。

将在0点处做泰勒展开，得





其中两式相减，得



又由的连续性和介值定理知，必然

故而。

证法2：将在0点处做泰勒展开，得



其中在与之间，等式两端从到积分，得

 （\*）

，则 



则有 ，又由的连续性和介值定理知,

使得，即 ，代入（\*）得



**五、附加题（10分）**

设在区间上连续导数，且，若，证明：



证明：首先将点做泰勒展开，得

对该式两边积分，得

其中

故

同理，将点做泰勒展开并积分可证



两式相加，即得。