**厦门大学2013-2014学年《一元微积分》期末试卷解答**

**(理工A类)**

**一、计算下列各题（共70分）**

1、计算下列积分（每题6分，共24分）：

（1）；

**解：**令，则，于是，







.

（2）；

**解一：**



.

**解二：**



.

（3）；

**解：**





.

（4）.

**解：**

.

2、求解下列微分方程：（每小题6分，共12分）

（1）求微分方程的通解；

**解：**原方程化为，其通解为

，

即 ，其中为任意常数.

（2）求微分方程满足的特解.

**解一：**令，则原方程化为，即.

两边积分，得 ，于是，，即.

由可得，所求方程的特解为.

**解二：**原方程改写为，即，于是，原方程的通解为



即，其中为任意常数。

由可得，所求方程的特解为.

3、求下列极限（每小题5分，共10分）

（1）；

**解：**



.

（2）设，求极限

**解：**.

4、(8分) 求微分方程满足，的特解.

**解：**令，则原方程化为，即 ，

两边积分，可得，即.

由，，可得，故，移项后可得



两边积分，可得，即

由可得，从而原方程的特解为.

5、(8分)若，对，求.

**解：**当时，

.

当时，

.

6、（8分）设，求.

**解：**令，，则

，

式子两端乘，并从到积分，则有



即 ，

所以，.

同理，式子两端乘，并从到积分，则有



即 



，

所以，.

故 .

**二、应用题（第一小题12分，第二题6分，共18分）**

1．过坐标原点作曲线的切线，该切线与曲线及轴围成平面图形.

（1）求的面积；(2) 求绕直线 旋转一周所得旋转体的体积.

**解：**设切点坐标为，于是曲线过点的切线方程为

，即，

由于切线过原点，则有，于是切点坐标为，切线方程为.

（1）平面图形D的面积为

.

（2）绕直线 旋转一周所得旋转体的体积





.

2．一物体按规律作直线运动，介质的阻力与速度的平方成正比，即，其中为物体的运动速度，为比例常数。计算物体由移至时，克服介质阻力所作的功.（注：题目中的和均为正的常数）.

**解一：**速度，故，于是所求的物体克服介质阻力所做的功为

.

**解二：**时，，因此，

.

**三、证明题（每小题6分，共12分）**

1．设函数在上连续，证明：.

**证明：**做辅助函数，因为



，

故单调不增，因此，当时，我们有，即

.

取可得

.

2．设函数是上的连续, 在内可导，且有，试证：必有，使.

**证明：**设，由知，存在，使得，即

. 由罗尔中值定理，存在，使得，

而，则.

**四、附加题（10分）**

设是上的连续函数，证明：存在，使得.

**证明：**令，则







