P289

练习13.4

1.

(1)已知<R,+>是加群

(2)任意a，b∈R

(a · b) · c = 0 · c = 0 = a · 0 = a · (b · c)

满足结合律，<R，·>为半群

(3) 任意a，b∈R

a · c + b · c = 0 + 0 = 0 = (a + b) · c

c · a + c · b = 0 + 0 = 0 = c · (a + b)

· 对 + 可分配

综上，<R, +, ·>是环

3.

任意x,y,z∈Z

(1) 5x+5y = 5(x+y), x+y∈Z, 满足封闭性

(5x+5y)+5z = 5x+(5y+5z), 满足结合律

令e = 0 = 5e

5x+e = 5x = e+5x , 存在幺元，且幺元为e

5x+5(-x) = 5(-x) + 5x = 0 = e，任意x，存在x的逆元等于(-x)∈Z

5x+5y = 5y+5x，满足交换律

<{5x|x∈Z }, +>是交换群

(2)

(5x · 5y) · 5z = 125 x·y·z = 5x · (5y · 5z)，满足结合律

<{5x|x∈Z }, ·>是半群

(3)

5x · (5y · 5z) = 25x·y + 25x·z

(5y · 5z) · 5x = 25y·x + 25z·x

· 对 + 可分配

综上，<{5x|x∈Z },+ ,·>是环

(4)

假设存在k∈Z

5x·5k = 5k·5x = 5x, 5k=1, 不存在k∈Z使得等式成立，无幺元，不是整环

5.

(1) 任意a, b∈R

(a + b)2 = a + b , a2 = a , b2 = b

a+a·b+b·a+b = a+b

a·b+b·a = 0

令a=b，得a + a = a2 + a2 = 0

即a = -a

则有a·b = -(b·a) = b·a

所以，布尔环是交换环

(2) 见(1)

(3) |R|>2时，不妨记<R，+>幺元为1

任意a∈R且a不等于0

a·(1+1) = a + a = 0

存在零因子

7.

不妨记a为生成元，R = {e,a,…,(r-1)a} , (其中|R| = r，ka表示k个a相加)

任意i,j∈Nr

ia · ja = ij(a·a) = ji(a·a) = ja · ia

(ia展开为i个a相加，后进行与ja的·运算，可得ij项a·a，简记为ij(a·a) )

所以R是交换环

(注意！这里循环群要记作ia而不是ai，从而避免混淆。错误方法：ai·aj = aij = aj·ai)

练习13.5

1. 略

附:

抽象代数证明流程：

A证明：<R，+>是代数系统：

(1) R集合非空

(2) +运算封闭

B证明：<R，+>是半群：

(1) <R，+>是代数系统

(2) +运算满足结合律

C证明：<R，+>是群：

(1) <R，+>是半群

(2)存在幺元

(3)每个元素都有唯一逆元

D证明：<R，+>是交换群（阿贝尔群）：

(1) <R，+>是群

(2) +运算满足交换律

E证明：<R，+，\*>是环：

(1) <R，+>是交换群

(2) <R，\*>是半群

(3) \*对+可分配

F证明：<R，+，\*>是交换环：

(1) <R，+，\*>是环

(2) \*运算满足交换律

G证明：<R，+，\*>是整环：

(1) <R，+，\*>是交换环

(2) 无零因子

(3) <R，\*>有幺元

H证明：<R，+，\*>是域：

(1) <R，+，\*>是环

(2) <R-{0}，\*>有幺元，每个元素有逆元

或者

(1) <R，+>是交换群

(2) <R-{0}，\*>是交换群

(3) \*对+可分配