P270

练习13.1

3.

(a \* b) \* c

= a \* (b \* c) (半群满足结合律)

= a \* (c \* b) (b，c可交换)

= (a \* c) \* b (结合律)

= (c \* a) \* b (a，c可交换)

= c \* (a \* b) (结合律)

4.

(1)

a \* a = b

a \* a \* a = b \* a (两边同时右乘a)

a \* (a \* a) = b \* a (结合律)

a \* b = b \* a (a\*a=b)

(2)

反证法：

设b \* b = a

则有 a \* a \* a \* a = a

a的阶等于3，而半群的阶为2，矛盾

所以根据封闭性b \* b = b

8

(1)

反证法：

设存在a\*a = b，其中a不等于b

则有a\*b = a\*a\*a = b\*a，与题设矛盾

所以a\*a=a

(2)

x\*(x\*y\*x) = x\*y\*x = (x\*y\*x)\*x

依题意，(x\*y\*x) = x

P278

练习13.2

1.

1）A

2）

C

D（1为幺元，3的逆元为4，5的逆元为9）

3）D

4）A

5）CD

6）A

7）A

8）C

3.

封闭性：任意x，y∈G，x。y = y \* x ∈G

存在幺元：x。e = e \* x = x \* e = e。x (其中e为<G,\*>的幺元)

存在逆元：x。x-1 = x-1 \* x = x \* x-1 = x-1。x (其中x-1为<G,\*>中x的逆元)

所以<G,。>为群

4.

因为是有限独异点，不妨设有限独异点阶为n

任意元素x则存在xa = xb，其中a不等于b，不妨a>b，令a-b=i

由于可约，则有xi=e

有x \* xi-1 = e = xi-1 \* x

既任意元素存在逆元，且可交换，为阿贝尔群

5.

(1)

因为任意a有a2=e

(a\*b)\*(b\*a)= a\*(b\*b)\*a=a\*e\*a=e

又(a\*b)\* (a\*b)=e，即(a\*b)\*(b\*a)= (a\*b)\* (a\*b)

两边同时左乘(b\*a)，得(b\*a)= (a\*b)

即满足交换律，是阿贝尔群

(2)

(a\*b)2=a2\*b2

a\*b\*a\*b=a\*a\*b\*b

a-1\*a\*b\*a\*b\*b-1= a-1\*a\*a\*b\*b\*b-1

b\*a=a\*b

是阿贝尔群

7.

大于二阶的元素其逆元的阶必定不等于自身

所以大于二阶的元素必定有偶数个

二阶元素个数 = |G|-（一阶元素个数）-（大于二阶元素个数）

为奇数，即存在奇数个二阶元素

14.

(a\*H)-1=H-1\*a-1=H\*(a-1)

18.

不妨设a的阶为x

则有ax=e，e为<G，\*>的幺元

fx (a)=f(e)=e，即f(a)的阶不大于a的阶