小球盒子模型，大致上是将 n 个球装在 m 个盒子里，每个小球必须要放在一个盒子里，计算方案数。由于球、盒子会有不同的限制条件，因此产生了多样的计数问题。

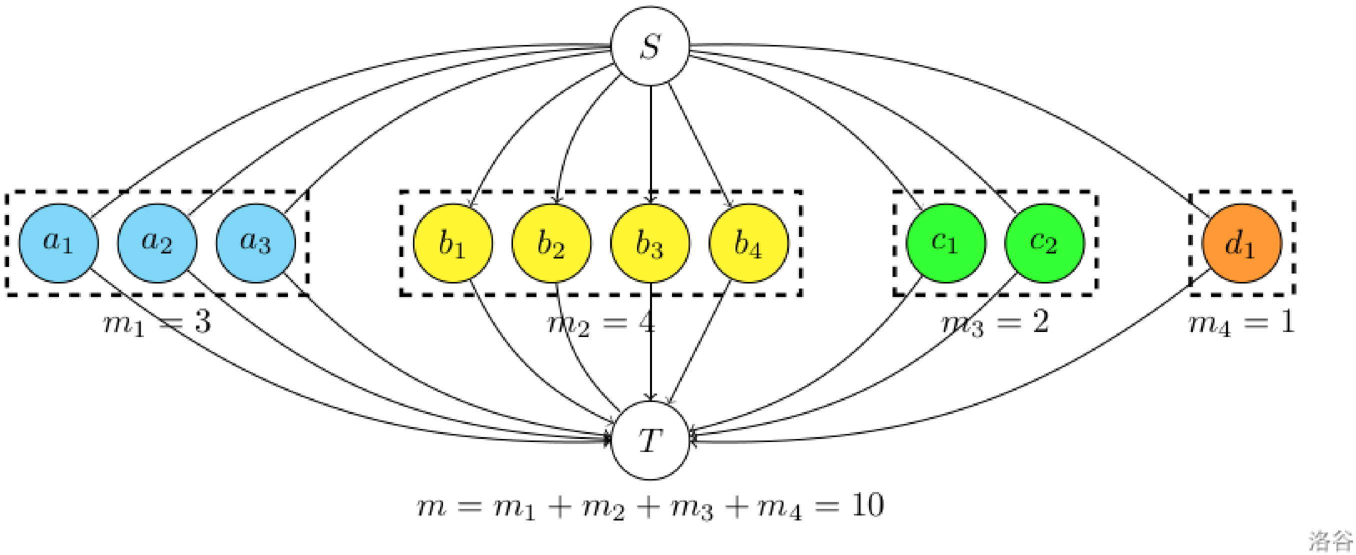
本文中，小球盒子的分类一共有 12 种。分别为**小球是否相同**、**盒子是否相同**、**装球数量无限制/最多一个球/最少一个球**，共 $2\times 2\times 3=12$ 种情况。比早期日报的那篇还多了 4 种。

正文

前置知识

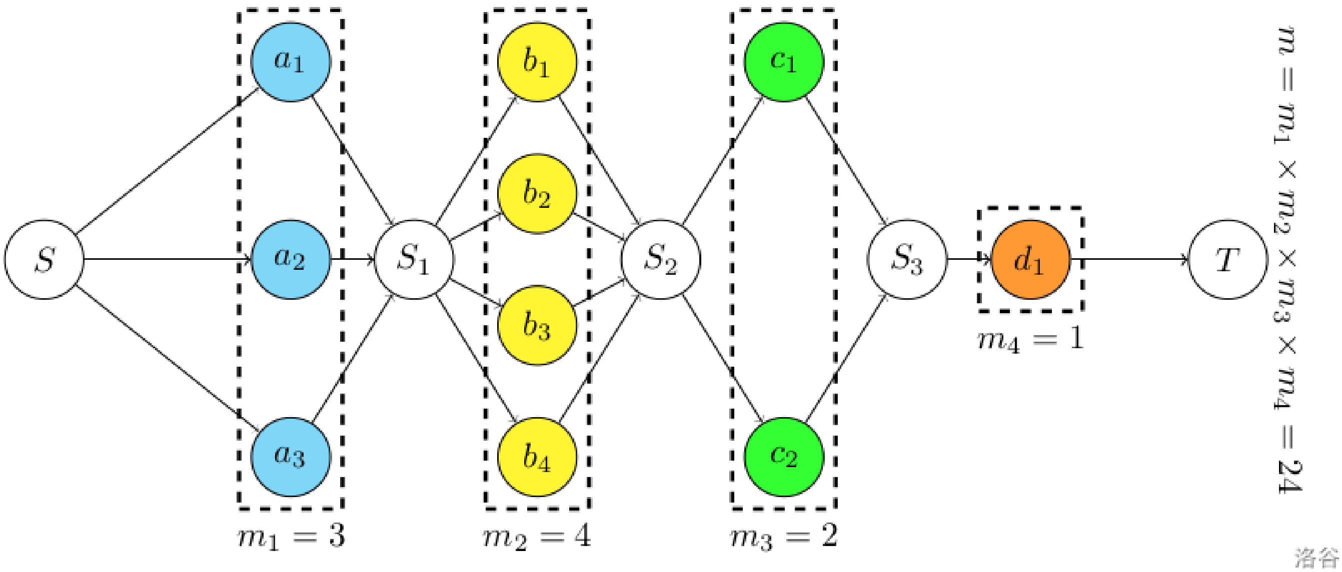
- **加法原理**：

> 做一件事情，完成它有 n 类方式，第一类方式有 m_1 种方法，第二类方式有 m_2 种方法，……，第 n 类方式有 m_n 种方法，那么完成这件事情共有 $m_1+m_2+\cdots m_n=\sum_{i=1}^n m_i$ 种方法。



- **乘法原理**:

> 做一件事，完成它需要分成 n 个步骤，做第一 步有 m_1 种不同的方法，做第二步有 m_2 种不同的方法，……，做第 n 步有 m_n 种不同的方法。那么完成这件事共有 $m_1 \cdot m_2 \cdots m_n = \prod_{i=1}^{n} m_i$ 种不同的方法。



由此可以求出排列数 A_n^m，它表示在 n 个物品中按顺序选出 m 个物品的方案数。显然，选出来的第一个物品有 n 种可能，第二个物品有 $n-1$ 种可能，以此类推，第 m 个物品有 $n-m+1$ 种可能。于是，

$$A_n^m = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-m+1)$$

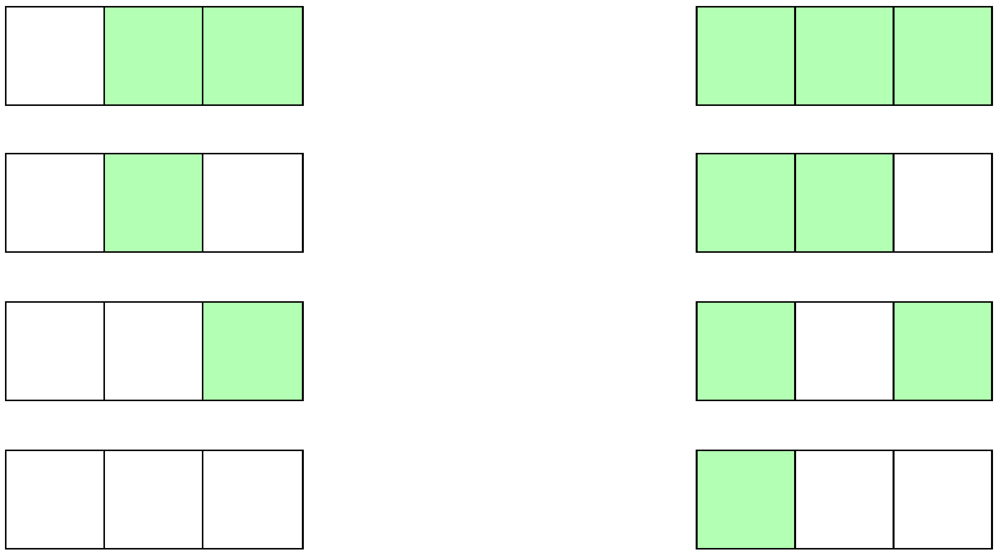
为了简便起见，

- 定义阶乘：$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 1$。
- 定义下降幂：$n^{\underline{m}} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-m+1)$。

因此，

$$A_n^m=\frac{n!}{(n-m)!}=n^{\underline{m}}$$

由此引入组合数 C_n^m。它的定义是，在 n 个不同的物品，选择 m 个数的方案数。要注意的是，这选出来的 m 个物品是没有顺序之别的。



丢个图。这个是在 3 个数中选择若干个数的情况。可以发现，$C_3^0=1,C_3^1=3,C_3^2=3,C_3^3=1$。

组合数的推导也比较简单：它选出来的 m 个物品是没有顺序的，但是用排列数选出来的 m 个物品是有顺序的。显然这 m 个物品形成的排列的数量为 $A_m^m=m!$，而它们都等价于一种情况。因此，

$$C_n^m=\frac{A_n^m}{m!}=\frac{n!}{(n-m)!m!}$$

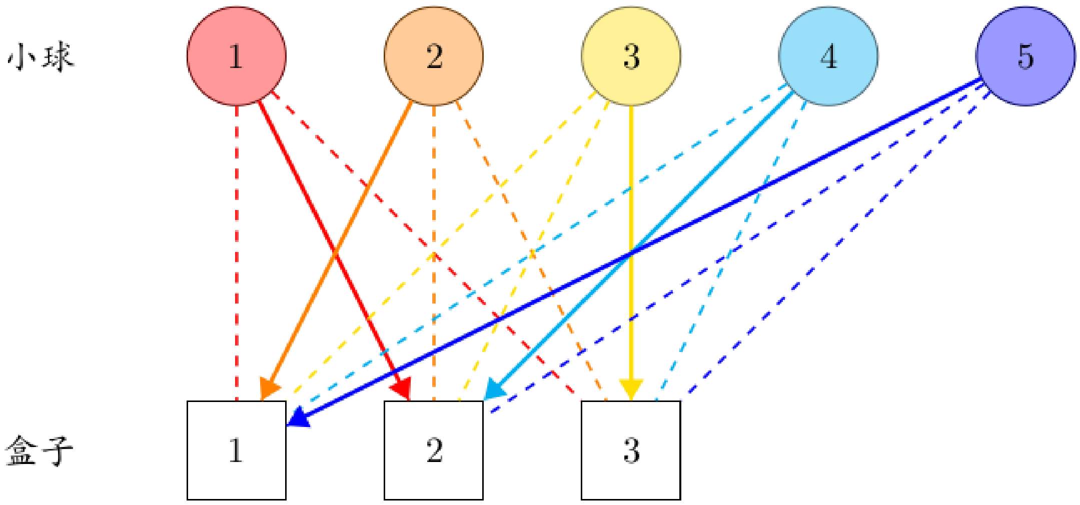
为了美观，组合数还有另外一种写法：

$$\binom{n}{m}=C_n^m$$

剩下来的知识就在十二重计数法里面体现啦。

I. 球不同，盒不同，装球数量无限制

考虑从每个小球出发。每个球都有 m 个地方可以塞，根据乘法原理，n 个球的塞法共有 $\underbrace{m\cdot m\cdot m\cdots m}_{n\text{ 个}}=m^n$。因为每个小球进盒子后，盒子里的小球是没有顺序可言的，所以把每个球塞完后所有情况就已经统计完了。

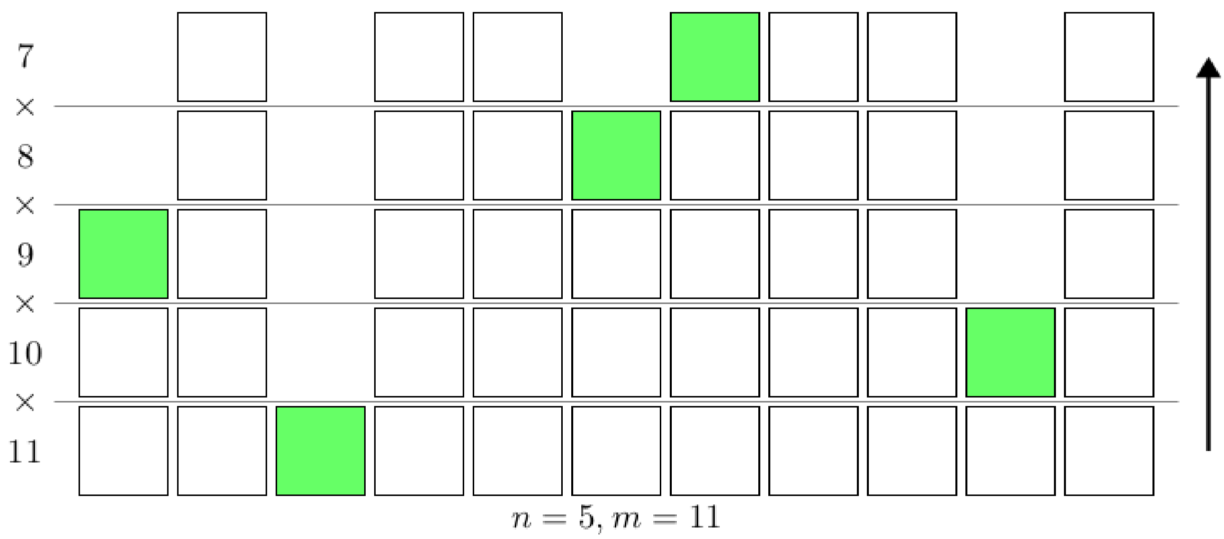


如图所示，是 $n=5, m=3$ 的一种情况。五个小球分别放入了 $2,1,3,2,1$ 号盒子里。每个小球都有 3 中选择，因此总方案数就是 3^5。

使用快速幂，时间复杂度为 $\mathcal{O}(\log n)$。

II. 球不同，盒不同，盒子至多装一球

因为盒子最多只能装 1 个球，所以球和盒子是一一对应的。因此我们要按顺序从 m 个盒子选出 n 个。这就是排列数的定义，答案就是 $m^{\underline{n}}$。



时间复杂度为 $\mathcal{O}(n)$。

III. 球不同，盒不同，盒子至少装一球

这里开始要引入二项式反演。

- 记「把 n 个不同球装入 m 个不同盒子，盒子非空」的方案数为 $f(n,m)$。

- 记「把 n 个不同球装入 m 个不同盒子，盒子可空」的方案数为 $g(n,m)$。

容易发现，$g(n,m)$ 就是十二重计数法的 I，于是 $g(n,m)=m^n$。

但是 $g(n,m)$ 还有另外一种表示方法。考虑枚举有 i 个盒子是非空的，这 i 个盒子得从 m 个盒子里选，所以要乘上系数 $\dbinom{m}{i}$；而 n 个不同小球放入 i 个盒子，由 f 的定义，就是 $f(n,i)$。那么：

$$g(n,m)=\sum_{i=0}^{m}\binom{m}{i}f(n,i)$$

首先给出二项式反演的式子：

$$f(n)=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}g(i)\iff g(n)=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(-1)^{n-i}f(i)$$

在证明之前，我们会频繁用到二项式定理。即：

$$(a+b)^n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^ib^{n-i}$$

二项式定理的证明并不太难。考虑右式由 n 个单项式 $(a+b)$ 相乘得到，那么若 a 的幂数为 i，就说明这 n 个单项式中，有 i 个选择了 a。从 n 个里面选 i 个的方案数就是 $\dbinom{n}{i}$。

$$(a+b)(\colorbox{lightgreen}{a}+b)(\colorbox{lightgreen}{a}+b)(a+b)(a+b)\qquad(a+b)(a+b)(a+b)(\colorbox{lightgreen}{a}+b)(\colorbox{lightgreen}{a}+b)$$

$$(\colorbox{lightgreen}{a}+b)(a+b)(a+b)(a+b)(\colorbox{lightgreen}{a}+b)\qquad(a+b)(a+b)(\colorbox{lightgreen}{a}+b)(a+b)(\colorbox{lightgreen}{a}+b)$$

$$(\colorbox{lightgreen}{a}+b)(a+b)(a+b)(\colorbox{lightgreen}{a}+b)(a+b)\qquad(a+b)(a+b)(\colorbox{lightgreen}{a}+b)(\colorbox{lightgreen}{a}+b)(a+b)$$

$$(\colorbox{lightgreen}{a}+b)(a+b)(\colorbox{lightgreen}{a}+b)(a+b)(a+b)\qquad(a+b)(\colorbox{lightgreen}{a}+b)(a+b)(a+b)(\colorbox{lightgreen}{a}+b)$$

$$(\colorbox{lightgreen}{a}+b)(\colorbox{lightgreen}{a}+b)(a+b)(a+b)(a+b)\qquad(a+b)(\colorbox{lightgreen}{a}+b)(a+b)(\colorbox{lightgreen}{a}+b)(a+b)$$

例如，$n=5$ 时从 5 个单项式里找 2 个单项式选择 a，方案数为 $\dbinom{5}{2}$，那么 a^2 的系数就是 $\dbinom{5}{2}$。

考虑二项式反演的证明：

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(-1)^{n-i}f(i) &= \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(-1)^{n-i}\sum_{j=0}^{i}\binom{i}{j}g(j) \\
&= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i}\binom{n}{i}\binom{i}{j}(-1)^{n-i}g(j) \\
&= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i}\binom{n}{j}\binom{n-j}{i-j}(-1)^{n-i}g(j) \\
&= \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}g(j)\sum_{i=j}^{n}\binom{n-j}{i-j}(-1)^{n-i} \\
&= \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}g(j)\sum_{i=0}^{n-j}\binom{n-j}{i}(-1)^{n-j-i} \\
&= \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}g(j)\cdot 0^{n-j} \\
&= g(n)
\end{aligned}
$$

现在已知：

$$
g(n,m)=\sum_{i=0}^{m}\binom{m}{i}f(n,i)
$$

于是得到，

$$
\begin{aligned}
f(n,m) &= \sum_{i=0}^{m}(-1)^{m-i}\binom{m}{i}g(n,i) \\
&= \sum_{i=0}^{m}(-1)^{m-i}\binom{m}{i}i^{n}
\end{aligned}
$$

直接暴力枚举+快速幂，时间复杂度为 $\mathcal{O}(m\log n)$。但是可以用筛法 $\mathcal{O}(m)$ 求出 $1^n, 2^n, \cdots m^n$，所以可以优化到 $\mathcal{O}(m+n)$。

IV. 球不同，盒相同，装球数量无限制

这里开始要引入第二类斯特林数。

第二类斯特林数 $\begin{Bmatrix} n \\ m \end{Bmatrix}$ 的定义是，将 n 个不同的数划分为 m 个集合，**集合与集合之间没有差别**，的方案数。考察 III 中 f 的定义。可以发现，f 所谓的盒子是互不相同的，而第二类斯特林数的集合是相同的。那么只要让 $f(n,m)$ 除去这 m 个盒子的排序关系即可。于是可以得到：

$$\begin{Bmatrix} n \\ m \end{Bmatrix} = \frac{1}{m!} f(n,m) = \frac{1}{m!} \sum_{i=0}^{m} (-1)^{m-i} \binom{m}{i} i^n$$
$$= \sum_{i=0}^{m} \frac{(-1)^{m-i} \cdot i^n}{i!(m-i)!}$$

回到 IV 上来。我们可以枚举有 i 个盒子至少装了 1 个球，那么这就是第二类斯特林数行的板子：

$$ans = \sum_{i=0}^{m} \begin{Bmatrix} n \\ i \end{Bmatrix}$$

下面问题在于怎么求出 $\begin{Bmatrix} n \\ i \end{Bmatrix}, i = 0, 1, \cdots m$。

考虑多项式乘法。对于两个多项式 $A(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i, B(x) = \sum_{i=0}^{m} b_i x^i$，可以得到：

$$C(x) = A(x) \cdot B(x) = \sum_{i=0}^{n+m} x^i \sum_{j=0}^{i} a_j b_{i-j} = \sum_{i=0}^{n+m} x^i c_i$$

那么只要构造如下多项式：

$$A(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i = \sum_{i=0}^{m} \frac{i^n}{i!} \cdot x^i$$
$$B(x) = \sum_{i=0}^{m} b_i x^i = \sum_{i=0}^{m} \frac{(-1)^i}{i!} \cdot x^i$$

两者相乘，得到：

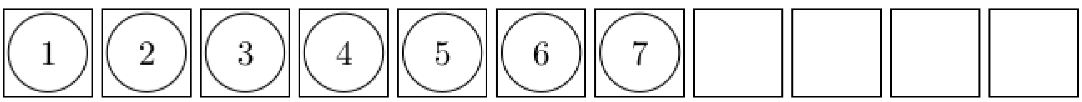
$$c_i = \sum_{j=0}^{i} a_j b_{i-j} = \sum_{j=0}^{i} \frac{(-1)^{i-j} \cdot j^n}{j!(i-j)!} = \begin{Bmatrix} n \\ i \end{Bmatrix}, \quad i = 0, 1, 2 \cdots m$$

- 构造 $A(x)$ 时使用筛法求出 $1^n, 2^n, \cdots m^n$，时间复杂度为 $\mathcal{O}(m)$。
- 使用 NTT 做多项式乘法，时间复杂度为 $\mathcal{O}(m \log m)$。

因此总的时间复杂度为 $\mathcal{O}(m \log m)$。

V. 球不同，盒相同，盒子至多装一球

轻松题。显然如果 $m < n$，无解；$m \geq n$，那么由于盒子相同，答案就是 1。



$n = 7, m = 11$

时间复杂度为 $\mathcal{O}(1)$。

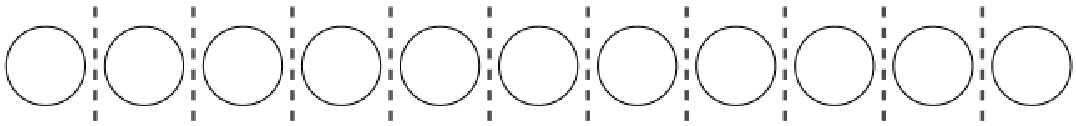
VI. **球不同，盒相同，盒子至少装一球**

轻松题。显然是第二类斯特林数的定义。直接拿第二类斯特林数行的做法求出一整行，再取出其中第 m 列，参照 IV。

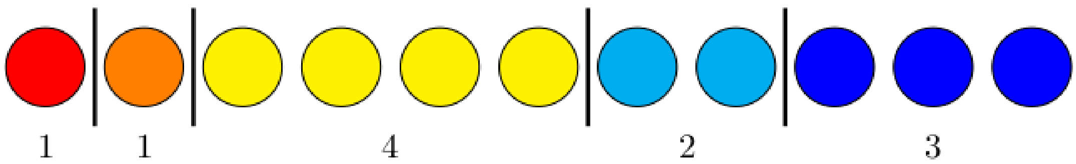
时间复杂度为 $\mathcal{O}(m\log m)$。

VII. **球相同，盒不同，装球数量无限制**

考虑使用隔板法。



将 n 个球依次排开。那么这 n 个球之间有 $n-1$ 个空隙。如果我们在这 $n-1$ 个空隙中选择 $m-1$ 个，那么这 n 个球就会被划分为 m 堆。如下图所示，为 $n=11,m=5$ 的一种情况。此时五个盒子装的小球个数分别为 $1,1,4,2,3$。



从左往右将每堆球丢在一个盒子里，那么我们就做到了「将 n 个相同小球，放入到 m 个不同盒子，盒子至少装一球」。容易发现插板的方案数一共有 $\dbinom{n-1}{m-1}$ 个，因此这个问题的方案数就是它。

但是现在盒子可以为空。做法也很简单：先往每个盒子里塞一个球，最后把这个球拿走就行了。换言之，先求「将 $n+m$ 个相同小球，放入到 m 个不同盒子，盒子至少装一球」的方案数，对于每个这个问题的划分方案，将每个盒子抽掉一个球，就是 VII 的方案。因此该问答案即为 $\dbinom{n+m-1}{m-1}$。

时间复杂度为 $\mathcal{O}(n+m)$。

VIII. **球相同，盒不同，盒子至多装一球**

轻松题。因为每个球只能放到一个盒子里，每个盒子最多装一个球，并且每个球必须要放到一个盒子里，因此考虑 m 个盒子里哪些放了球，答案就是 $\dbinom{m}{n}$。

时间复杂度为 $\mathcal{O}(m)$。

IX. 球相同，盒不同，盒子至少装一球

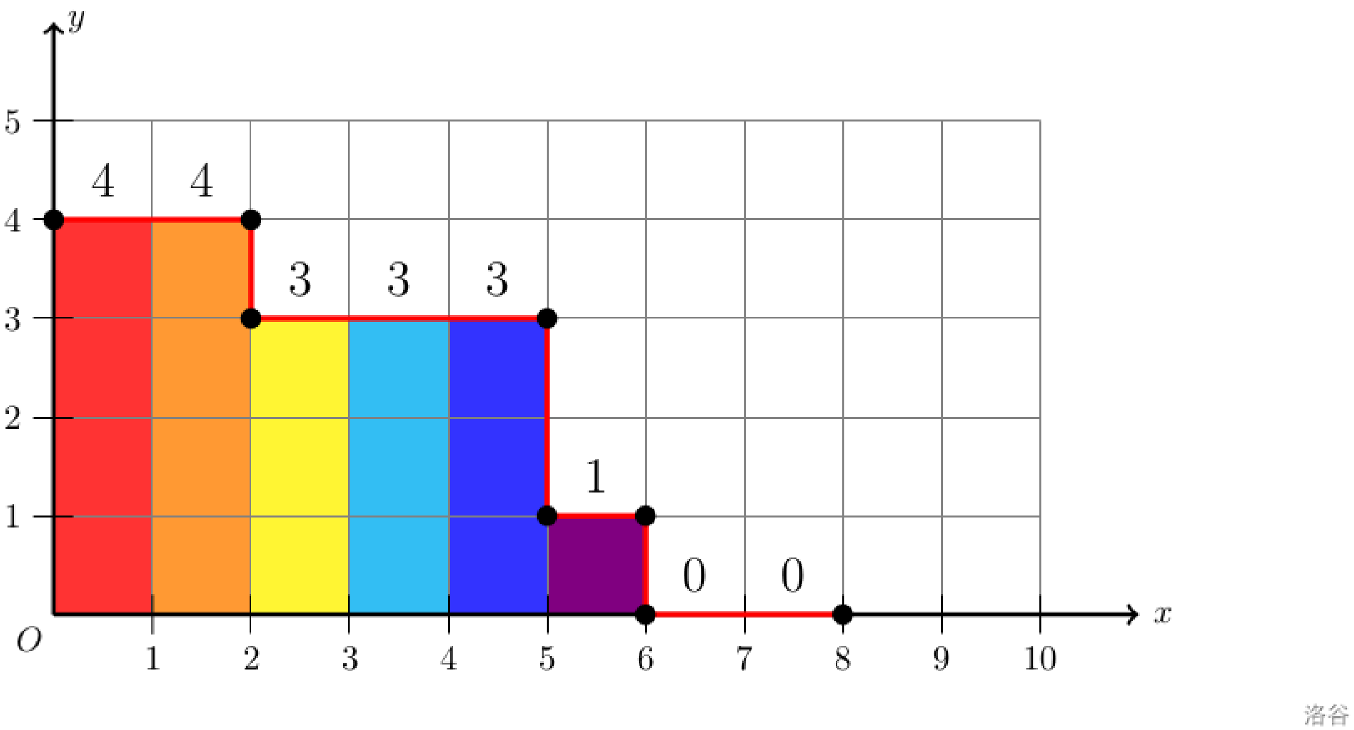
就是插板法的原版，上文已经提及。答案为 $\dbinom{n-1}{m-1}$。

时间复杂度为 $\mathcal{O}(n)$。

X. 球相同，盒相同，装球数量无限制

它 来 了。

记 $f(n,m)$ 为「n 个相同小球，放入到 m 个相同盒子，每个盒子装球数量无限制」的方案数。观察到所有的盒子和球都是相同的，假设一个方案第 i 个盒子装的球的数量为 c_i，那么可以将 c_i 按照从大到小的顺序排序。如果两种方案排完序后的序列完全相同，那么两者就是相同方案，否则必然是不同方案。这是本题的关键。



如图所示，是 $n=18, m=8$ 的一种情形。所有在红色线段下方的面积就是 n，每个彩色线段对应的都是排完序后每个盒子里小球的个数。$f(n,m)$，本质上就是计算从 $(m,0)$ 走到 y 轴，且红色线段下方区域面积恰好为 n 的方案数。因为盒子里小球个数按照从大到小排列，因此从 $(m,0)$ 出发只有两种选择：

- 第一种，向上走一格。此时需要往左边填充 m 个格子，转化为了计算 $f(n-m,m)$。
- 第二种，向左走一格。转化为了计算 $f(n,m-1)$。

容易得到状态转移方程：

$$f(n,m)=f(n,m-1)+f(n-m,m)$$

下面考虑如何加快 $f(n,m)$ 的计算。使用生成函数。

我们记 $F_m(x)=\sum_{i=0}^{+\infty} f(i,m)x^i$，那么根据递推式，我们可以得到：

$$\begin{aligned}
F_m(x) &= \sum_{i=0}^{+\infty} f(i,m)x^i \\
&= \sum_{i=0}^{+\infty}(f(i,m-1)+f(i-m,m))x^i \\
&= F_{m-1}(x)+x^m F_m(x) \\
F_m(x) &= \frac{1}{1-x^m}\cdot F_{m-1}(x)
\end{aligned}$$

考虑到 $f(n,0)=[n=0]$，于是 $F_0(x)=1$，那么可以得到：

$$F_m(x)=\prod_{i=1}^{m}\frac{1}{1-x^i}$$

两边取对数，得到：

$$\ln F_m(x)=\sum_{i=1}^{m}\ln\frac{1}{1-x^i}$$

考虑一个经典结论：

$$\ln(1-x^t)=-\sum_{i=1}\frac{x^{ti}}{i}$$

证明如下：

$$\begin{aligned}
\ln(1-x^t) &= \int \frac{-tx^{t-1}}{1-x^t}\mathrm{d}x \\
\sum_{i=0} x^{ti-1} &= \frac{1}{1-x^t}\cdot\frac{1}{x} \\
\sum_{i=1} x^{ti-1} &= \frac{1}{1-x^t}\cdot x^{t-1} \\
\ln(1-x^t) &= \int\left(-t\cdot\sum_{i=1}x^{ti-1}\right)\mathrm{d}x \\
&= -\sum_{i=1}\frac{x^{ti}}{i}
\end{aligned}$$

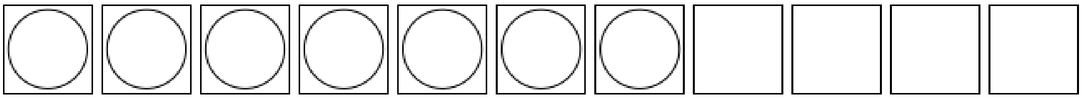
（也就是先求导再积分）

因为我们只需要 $F_m(x)$ 的前 $n+1$ 项系数，所以只要求得 $\ln F_m(x)$ 的前 $n+1$ 项，然后求一次多项式 $\exp$ 即可。容易发现 $-\sum_{i=1}\frac{x^{ti}}{i}$ 对 $\ln F_m(x)$ 前 n 项产生贡献的项数为 $\left\lfloor\frac{n}{i}\right\rfloor$，因此直接枚举 i，再枚举 i 的倍数，计入贡献即可求得 $F_m(x)$ 的前 $n+1$ 项。

算出 $\ln F_m(x)$ 的时间复杂度为 $\mathcal{O}\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{n}{i}\right)=\mathcal{O}(n\log m)$。做一次多项式 exp 的时间复杂度为 $\mathcal{O}(n\log n)$。因此总时间复杂度为 $\mathcal{O}(n\log(nm))$。

XI. 球相同，盒相同，盒子至多装一球

轻松题，与 V 完全相同。显然如果 $m<n$，无解；$m\ge n$，那么由于盒子相同，答案就是 1。



$n=7,m=11$

时间复杂度为 $\mathcal{O}(1)$。

XII. 球相同，盒相同，盒子至少装一球

和 X 类似，只不过钦点了从 $(m,0)$ 出发的点第一步必须向上走。所以答案就是 $f(n-m,m)$。

时间复杂度为 $\mathcal{O}(n\log(nm))$。

参考代码

```
#include<bits/stdc++.h>
#define up(l,r,i) for(int i=l,END##i=r;i<=END##i;++i)
#define dn(r,l,i) for(int i=r,END##i=l;i>=END##i;--i)
using namespace std;
typedef long long LL;
typedef unsigned int       u32;
typedef unsigned long long u64;
const int INF =2147483647;
int qread(){
    int w=1,c,r=0;
    while((c=getchar())> '9'||c< '0') w=(c=='-'?-1:1); r=c-'0';
    while((c=getchar())>='0'&&c<='9') r=r*10+c-'0';
    return r*w;
}
const int MAX_ =(1<<20)+3;
struct cplx{
    double a,b; cplx(double _a=0,double _b=0):a(_a),b(_b){}
    cplx operator +(cplx t){return cplx(a+t.a,b+t.b);}
    cplx operator -(cplx t){return cplx(a-t.a,b-t.b);}
    cplx operator *(cplx t){return cplx(a*t.a-b*t.b,a*t.b+b*t.a);}
    cplx operator *(int t){return cplx(a*t,b*t);}
};
const int MOD =998244353;
struct modint{
    unsigned w;
    modint(u32 _w=0){w=_w;}
    modint pwr(modint x,modint y){
        modint r=1; while(y.w){if(y.w&1) r=r*x; y.w>>=1,x=x*x;}
        return r;
    }
    modint pwr(modint y){
        modint x(w),r=1; while(y.w){if(y.w&1) r=r*x; y.w>>=1,x=x*x;}
        return r;
    }
    modint inv(){return modint(w).pwr(MOD-2);}
    modint dec(){if(w>=MOD) return w-MOD; return w;}
    modint operator +(modint t){return modint(w+t.w    ).dec();}
    modint operator -(modint t){return modint(w-t.w+MOD).dec();}
    modint operator *(modint t){return modint(1ull*w*t.w%MOD);}
    modint operator /(modint t){
        if(w%t.w==0) return modint(w/t.w); return modint(w)*t.inv();
    }
    modint operator -(){return w?MOD-w:0;}
    int to_int(){return w;}
};
struct Minv{
    modint inv(modint x){return x.inv();}
    void inv(int n,modint *T){
        T[1]=1; up(2,n,i) T[i]=modint(MOD-MOD/i)*T[MOD%i];
```

```
    }
    void inv(int n,modint *A,modint *B){
        static modint P[MAX_];
        static modint Q[MAX_];
        P[  0]=    A[  0] ; up(1,n-1,i) P[i]=P[i-1]*A[i  ];
        Q[n-1]=inv(P[n-1]); dn(n-2,0,i) Q[i]=Q[i+1]*A[i+1];
        up(1,n-1,i) B[i]=Q[i]*P[i-1]; B[0]=Q[0];
    }
    void fac(int n,modint *A){
        A[0]=1; up(1,n,i) A[i]=A[i-1]*modint(i);
    }
}minv;
const long double pi=acos(-1);
class Poly{
    public:
    void FFT(int n,cplx *Z){
        static int W[MAX_];
        int l=1; W[0]=0; while(n>>=1)
            up(0,l-1,i) W[l++]=W[i]<<1|1,W[i]<<=1;
        up(0,l-1,i) if(W[i]>i) swap(Z[i],Z[W[i]]);
        for(n=l>>1,l=1;n;n>>=1,l<<=1){
            cplx *S=Z,o(cos(pi/l),sin(pi/l)); up(0,n-1,i){
                cplx s(1,0); up(0,l-1,j){
                    cplx x=S[j]+s*S[j+l],y=S[j]-s*S[j+l];
                    S[j]=x,S[j+l]=y,s=s*o;
                }
                S+=l<<1;
            }
        }
    }
    void IFFT(int n,cplx *Z){
        FFT(n,Z); reverse(Z+1,Z+n);
        up(0,n-1,i) Z[i].a/=1.0*n,Z[i].b/=1.0*n;
    }
    void NTT(int n,modint *Z){
        static int W[MAX_];
        modint g(3); int l=1; W[0]=0; while(n>>=1)
            up(0,l-1,i) W[l++]=W[i]<<1|1,W[i]<<=1;
        up(0,l-1,i) if(W[i]>i) swap(Z[i],Z[W[i]]);
        for(n=l>>1,l=1;n;n>>=1,l<<=1){
            modint *S=Z,o=g.pwr((MOD-1)/l/2); up(0,n-1,i){
                modint s(1); up(0,l-1,j){
                    modint x=S[j]+s*S[j+l],y=S[j]-s*S[j+l];
                    S[j]=x,S[j+l]=y,s=s*o;
                }
                S+=l<<1;
            }
        }
    }
    void INTT(int n,modint *Z){
        NTT(n,Z); reverse(Z+1,Z+n); modint o(n); o=o.pwr(MOD-2);
        up(0,n-1,i) Z[i]=Z[i]*o;
```

```
}
void MUL(int n,modint *A,modint *B){
    NTT(n,A),NTT(n,B); up(0,n-1,i) A[i]=A[i]*B[i]; INTT(n,A);
}
void INV(int n,modint *Z,modint *T){
    static modint A[MAX_];
    up(0,n-1,i) T[i]=0; T[0]=Z[0].pwr(MOD-2).to_int();
    for(int l=1;l<n;l<<=1){
        up(0,2*l-1,i) A[i]=Z[i]; up(2*l,4*l-1,i) A[i]=0;
        NTT(4*l,A),NTT(4*l,T);
        up(0,4*l-1,i) T[i]=modint(2)*T[i]-A[i]*T[i]*T[i];
        INTT(4*l,T);
        up(2*l,4*l-1,i) T[i]=0;
    }
}
void DIF(int n,modint *Z,modint *T){
    up(0,n-2,i) T[i]=Z[i+1]*modint(i+1); T[n-1]=0;
}
void INT(int n,int c,modint *Z,modint *T){
    up(1,n-1,i) T[i]=Z[i-1]*modint(i).pwr(MOD-2);
    T[0]=modint(c);
}
void LN(int n,modint *Z,modint *T){
    static modint A[MAX_];
    static modint B[MAX_];
    up(0,2*n-1,i) A[i]=B[i]=0;
    DIF(n,Z,A),INV(n,Z,B),MUL(2*n,A,B),INT(n,0,A,T);
}
void EXP(int n,modint *Z,modint *T){
    static modint A[MAX_];
    static modint B[MAX_];
    up(1,2*n-1,i) T[i]=0; T[0]=1;
    for(int l=1;l<n;l<<=1){
        LN(2*l,T,A);
        up(0,2*l-1,i) B[i]=-A[i]+Z[i]; B[0]=B[0]+modint(1);
        up(2*l,4*l-1,i) T[i]=B[i]=0;
        MUL(4*l,T,B);
    }
}
void SQT(int n,modint *Z,modint *T){
    static modint A[MAX_];
    static modint B[MAX_];
    up(1,2*n-1,i) T[i]=0; T[0]=1; modint o=modint(2).inv();
    for(int l=1;l<n;l<<=1){
        INV(2*l,T,A);
        up(  0,2*l-1,i) B[i]=Z[i];
        up(2*l,4*l-1,i) A[i]=B[i]=0;
        MUL(4*l,A,B);
        up(  0,2*l-1,i) T[i]=(T[i]+A[i])*o;
    }
}
void SHF(int n,modint c,modint *Z,modint *T){
```

```
    static modint A[MAX_];
    static modint B[MAX_];
    static modint F[MAX_];
    static modint G[MAX_];
    modint o(1);
    minv.fac(n-1,F),minv.inv(n,F,G);
    up(0,n-1,i) A[i]=Z[n-1-i]*F[n-1-i];
    up(0,n-1,i) B[i]=G[i]*o,o=o*c;
    int l=1; while(l<2*n-1) l<<=1;
    up(n,l-1,i) A[i]=B[i]=0; MUL(l,A,B);
    up(0,n-1,i) T[n-1-i]=G[n-1-i]*A[i];
}
void S2L(int n,modint *T){
    static modint F[MAX_];
    static modint G[MAX_];
    static modint H[MAX_];
    static int P[MAX_]; int p=0,l=1;
    up(1,n,i) H[i]=modint(0); H[1]=1;
    up(2,n,i){
        if(H[i].w==0) P[++p]=i,H[i]=modint(i).pwr(n);
        for(int j=1;j<=p&&P[j]<=n/i;++j){
            H[i*P[j]]=H[i]*H[P[j]]; if(i%P[j]==0) break;
        }
    }
    static modint U[MAX_];
    minv.fac(n,F),minv.inv(n+1,F,G);
    up(0,n,i) T[i]=G[i]*H[i];
    up(0,n,i) U[i]=G[i]*modint(i&1?(MOD-1):1);
    while(l<2*n+1) l<<=1;
    MUL(l,T,U);
}
void DEP(int n,modint *T){  //下降幂
    if(n==1){ T[0]=0,T[1]=1; return; }
    int u=n>>1,l=1; while(l<2*u+1) l<<=1;
    modint *A=new modint[l];
    DEP(u,T),  SHF(u+1,modint(MOD-u),T,A);
    up(u+1,l-1,i) T[i]=A[i]=0; MUL(l,T,A);
    if(n%2==1){ //*= x-n+1
        dn(n,1,i) T[i]=T[i]*modint(MOD+1-n)+T[i-1];
        T[0]=T[0]*modint(MOD+1-n);
    }
}
void ASP(int n,modint *T){
    if(n==1){ T[0]=0,T[1]=1; return; }
    int u=n>>1,l=1; while(l<2*u+1) l<<=1;
    modint *A=new modint[l];
    ASP(u,T),  SHF(u+1,u,T,A);
    up(u+1,l-1,i) T[i]=A[i]=0; MUL(l,T,A);
    if(n%2==1){ //*= x+n-1
        dn(n,1,i) T[i]=T[i]*modint(n-1)+T[i-1];
        T[0]=T[0]*modint(n-1);
    }
```

```
    }
    void S2C(int n,int m,modint *T){
        static modint H[MAX_]; int l=1; while(l<n+1) l<<=1;
        up(0,l-1,i) H[i]=0;    DEP(m+1,H);
        up(0,m,i) H[i]=H[i+1]; up(m+1,l-1,i) H[i]=0;
        reverse(H,H+m+1); INV(l,H,T);
    }
    void FDT(int n,modint *T){
        static modint E[MAX_];
        static modint F[MAX_];
        minv.fac(n-1,F),minv.inv(n,F,E);
        up(n,2*n-1,i) E[i]=T[i]=0;
        MUL(2*n,T,E); up(n,2*n-1,i) T[i]=0;
    }
    void IFDT(int n,modint *T){
        static modint E[MAX_];
        static modint F[MAX_];
        minv.fac(n-1,F),minv.inv(n,F,E);
        up(0,n-1,i) if(i&1) E[i]=-E[i];
        up(n,2*n-1,i) E[i]=T[i]=0;
        MUL(2*n,T,E); up(n,2*n-1,i) T[i]=0;
    }
    void PML(int n,modint *A,modint *B){
        static modint F[MAX_]; minv.fac(n-1,F);
        FDT(n,A),FDT(n,B); up(0,n-1,i) A[i]=A[i]*B[i]*F[i];
        IFDT(n,A);
    }
    void S1L(int n,modint *A){
        ASP(n,A);
    }
}poly;
const int MAXN=(1<<20)+3;
modint M[MAXN],N[MAXN],F[MAXN],G[MAXN],O[MAXN],P[MAXN],Q[MAXN];
int main(){
    int n=qread(),m=qread(),t=n+m; modint ans=0;
    poly.S2L(n,N),poly.S2L(m,M);
    minv.fac(t,F),minv.inv(t+1,F,G),minv.inv(t,O);
    ans=modint(m).pwr(n);
    printf("%d\n",ans.to_int()),ans=0;  // I
    ans=(m>=n?F[m]*G[m-n]:0);
    printf("%d\n",ans.to_int()),ans=0;  // II
    ans=(n>=m?N[m]*F[m]:0);
    printf("%d\n",ans.to_int()),ans=0;  // III
    up(0,m,i) if(n>=i) ans=ans+N[i];
    printf("%d\n",ans.to_int()),ans=0;  // IV
    ans=(m>=n);
    printf("%d\n",ans.to_int()),ans=0;  // V
    ans=(n>=m?N[m]:0);
    printf("%d\n",ans.to_int()),ans=0;  // VI
    ans=F[n-1+m]*G[m-1]*G[n];
    printf("%d\n",ans.to_int()),ans=0;  // VII
    ans=(m>=n?F[m]*G[n]*G[m-n]:0);
```

```
    printf("%d\n",ans.to_int()),ans=0;  // VIII
    ans=(n>=m?F[n-1]*G[m-1]*G[n-m]:0);
    printf("%d\n",ans.to_int()),ans=0;  // IX
    up(1,m,i){
        up(1,n/i,j) P[i*j]=P[i*j]-O[j];
    }
    int l=1; while(l<n+1) l<<=1;
    poly.EXP(l,P,Q);
    printf("%d\n",Q[n].to_int());       // X
    printf("%d\n",m>=n);                // XI
    printf("%d\n",n>=m?Q[n-m].to_int():0);  // XII
    return 0;
}
```