Politechnika Wrocławska
Wydział Informatyki i Telekomunikacji

Modele systemów dynamicznych

Sprawozdanie z laboratorium 1

Igor Lis

Nr albumu: **284053**

Kierunek: **Inżynieria systemów**

WROCŁAW 2025

1. Wstęp teoretyczny

Model Lotki-Volterry opisuje dynamikę interakcji między populacją drapieżników i ofiar w ekosystemie. Jest to układ dwóch równań różniczkowych pierwszego rzędu:

$$\begin{cases} \frac{dt}{dy} = (a - by)x \\ \frac{dy}{dt} = (cx - d)y \end{cases}$$

gdzie:

x - liczebność populacji ofiar

y - liczebność populacji drapieżników

a – częstość narodzin ofiar

b – częstość umierania ofiar

c – częstość narodzin drapieżników

d – częstość umierania drapieżników

W analizie przyjąłem następujące parametry bazowe:

a = 1.2   **b** = 0.6   **c** = 0.3   d = 0.8

Warunki początkowe:

X_0 = 1 - początkowa liczba ofiar

Y_0 = 2 - początkowa liczba drapieżników

2. Opis rozwiązania:

Do rozwiązania układu równań różniczkowych zastosowana została metoda Eulera, która została zaimplementowana w MATLAB-ie w następująco:

```
% Inicjalizacja wektorów
x = zeros(1, N);      % Liczba ofiar
y = zeros(1, N);      % Liczba drapieżników

% Ustawienie wartości początkowych
x(1) = x_0;
y(1) = y_0;

% Metoda Eulera
for i = 1:N-1
   dx = (a - b*y(i)) * x(i);
   dy = (c * x(i) - d) * y(i);

   x(i+1) = x(i) + dx * dt;
   y(i+1) = y(i) + dy * dt;
end
```

Plik zawierający pełny kod załączony jest razem z tym sprawozdaniem

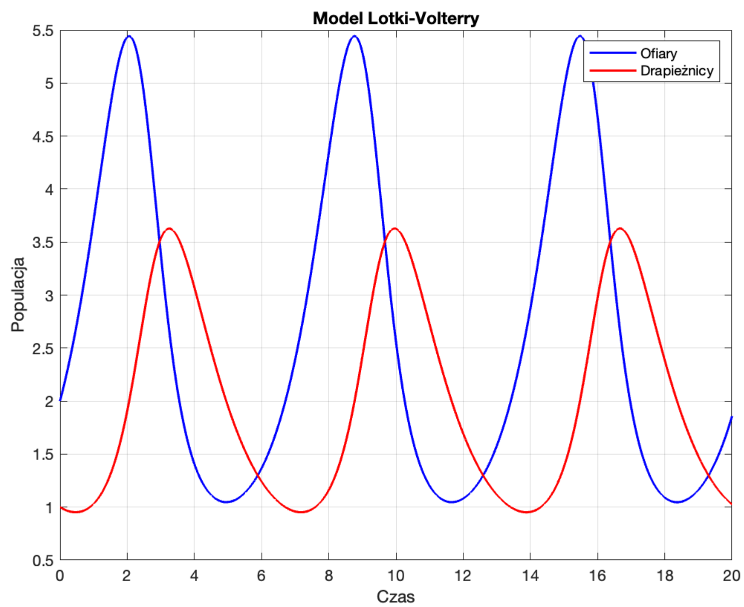
Symulację przeprowadzono dla czasu **T** = 20, z krokiem **dt** = 0.0001, dzięki czemu otrzymujemy wysoką dokładność rozwiązania. Do każdego zestawu parametrów obliczono wartości maksymalne populacji oraz okres oscylacji.

W celu zbadania wpływu poszczególnych parametrów na dynamikę systemu, przeprowadzono symulację dla pięciu zestawów danych:

1. Bazowy: a = 1.2, b = 0.6, c = 0.3, d = 0.8
2. Zwiększone a = 2.0 (pozostałe parametry bazowe)
3. Zmniejszone d = 0.6 (pozostałe parametry bazowe)
4. Zwiększone b = 1.0 (pozostałe parametry bazowe)
5. Zwiększone c = 0.5 (pozostałe parametry bazowe)

3. Wyniki obliczeń:

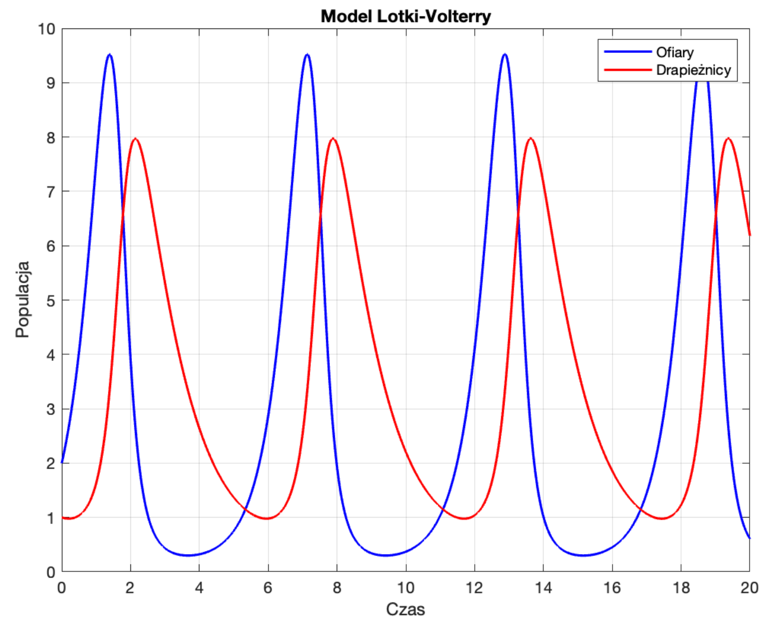
3.1. Symulacja dla parametrów bazowych:



Rysunek 1. Dynamika populacji drapieżników i ofiar dla parametrów bazowych

Na Rysunku 1 widać wyraźne zmiany dynamiki układu w zależności od ustawionych parametrów. Dla parametrów bazowych obserwowano typowe oscylacje populacji ofiar i drapieżników – wzrost liczby ofiar był poprzedzony wzrostem liczebności drapieżników, co skutkowało późniejszym spadkiem obu wartości, a następnie powtarzającym się cyklem.

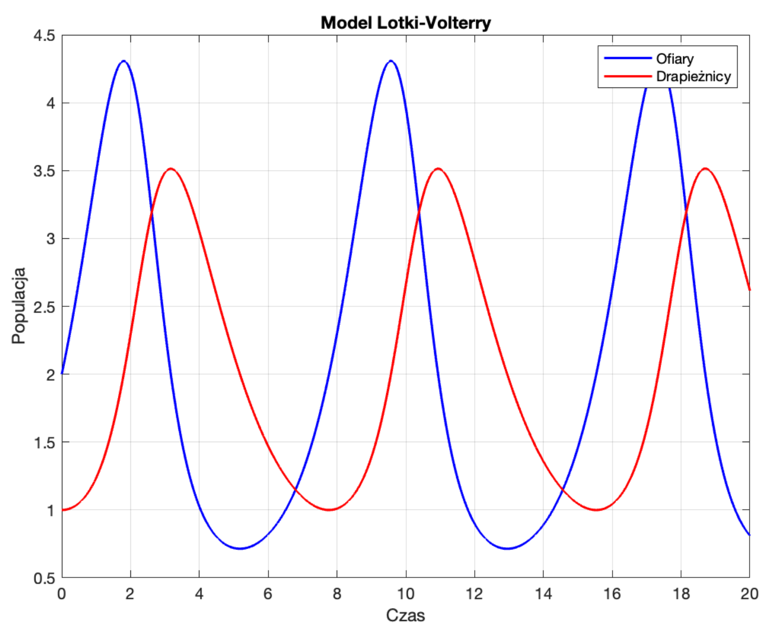
3.2. Wpływ zwiększenia współczynnika rozrodczości ofiar (a)



Rysunek 2. Dynamika populacji przy zwiększonym współczynniku narodzin ofiar (a = 2.0)

Zwiększenie współczynnika rozrodczości ofiar prowadzi do wyraźnego wzrostu wartości maksymalnych obu populacji, jak przedstawiono na Rysunku 2. Szybszy przyrost ofiar umożliwia osiągnięcie większej liczebności, co z kolei może utrzymać większą populację drapieżników.

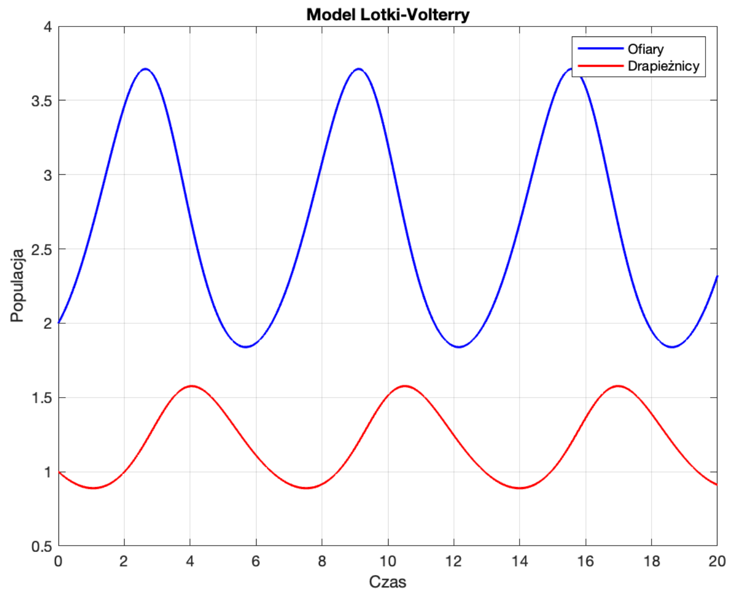
3.3. Wpływ zmniejszenia współczynnika śmiertelności drapieżników (d)



Rysunek 3. Dynamika populacji przy zmniejszonym współczynniku śmiertelności drapieżników (d = 0.6)

Rysunek 3 pokazuje, że zmniejszenie naturalnej śmiertelności drapieżników prowadzi do ich większej liczebności oraz silniejszej presji na populację ofiar. Okres oscylacji uległ także wydłużeniu w porównaniu do parametrów bazowych.

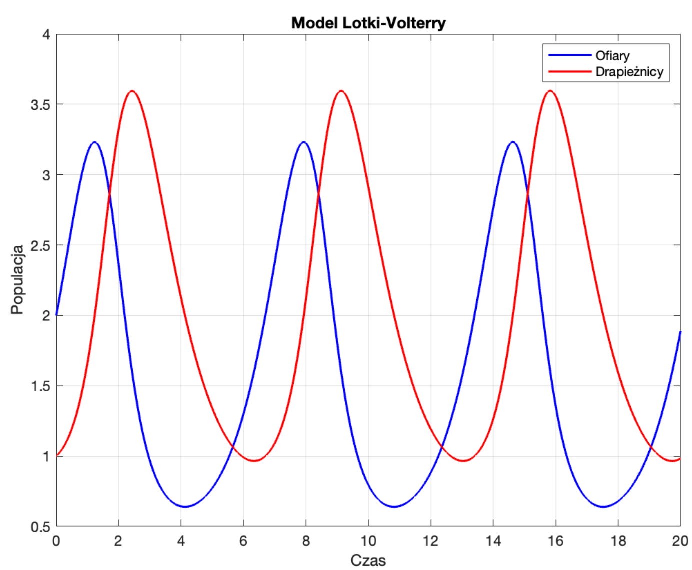
3.4. Wpływ zwiększenia współczynnika drapieżnictwa (b)



Rysunek 4. Dynamika populacji przy zwiększonym współczynniku drapieżnictwa (b = 1.0)

Przypadek pokazany na rysunku 4 gdzie zwiększamy współczynnik umieralności ofiar (drapieżnictwa) (b). Wyższa wartość współczynnika wskazuje na zwiększoną intensywność oddziaływania drapieżników na ofiary. W wyniku bardziej efektywnego polowania populacja ofiar jest szybciej redukowana, co w konsekwencji ogranicza dostępność pożywienia dla drapieżników i prowadzi do obniżenia ich liczebności.

3.5. Wpływ zwiększenia efektywności drapieżnictwa (c)



Rysunek 5. Dynamika populacji przy zwiększonym współczynniku narodzin drapieżników ofiar (c = 0.5)

Zwiększenie współczynnika c z 0.3 do 0.5, jak widać na Rysunku 5, prowadzi do wzrostu maksymalnej liczebności drapieżników przy jednoczesnym niewielkim spadku maksymalnej liczebności ofiar. Parametr ten określa, jak efektywnie drapieżniki przekształcają zjedzone ofiary w przyrost własnej populacji. Wyższa wartość c oznacza, że z tej samej liczby ofiar powstaje więcej drapieżników.

Tabela 1. Porównanie maksymalnych liczebności populacji i okresów oscylacji dla różnych zestawów parametrów

Zestaw parametrów	Maks. Populacji Ofiar	Maks. Populacji Drapieżników	Okres oscylacji
Bazowy	5.44	3.63	6.71
A = 2.0	9.53	7.98	5.74
D = 0.6	4.31	3.51	7.77
B = 1.0	3.71	1.58	6.47
C = 0.5	3.23	3.6	6.7

W Tabeli 1 zestawiono wyniki symulacji dla różnych zestawów parametrów. Widać wyraźne różnice zarówno w maksymalnych liczebnościach populacji, jak i w okresach oscylacji, co potwierdza znaczący wpływ badanych parametrów na dynamikę układu.

4. Wnioski i podsumowanie:

Na podstawie przeprowadzonych symulacji można wyciągnąć następujące wnioski:

1. Model Lotki-Volterry skutecznie odwzorowuje cykliczne zmiany liczebności populacji drapieżników i ofiar. Oscylacje te są wynikiem opóźnionej odpowiedzi jednej populacji na zmiany w drugiej.

2. Zwiększenie współczynnika rozrodczości ofiar (a) prowadzi do większych amplitud oscylacji obu populacji, co jest zgodne z intuicyjnym oczekiwaniem, że większa dostępność ofiar umożliwia rozwój większej populacji drapieżników.

3. Zmniejszenie współczynnika śmiertelności drapieżników (d) skutkuje wydłużeniem okresu oscylacji oraz zwiększeniem maksymalnej liczebności drapieżników, co wskazuje na większą stabilność ich populacji.

4. Zwiększenie współczynnika śmiertelności ofiar (b) daje paradoksalny efekt większej liczebności ofiar i mniejszej drapieżników. Jest to przykład nieintuicyjnego zachowania nieliniowych systemów dynamicznych, gdzie zwiększona efektywność drapieżnictwa prowadzi do szybszego załamania populacji drapieżników.

5. Zwiększenie współczynnika narodzin drapieżników (c) prowadzi do wzrostu maksymalnej liczebności drapieżników przy jednoczesnym spadku maksymalnej liczebności ofiar, co odzwierciedla ich lepszą zdolność do wykorzystania zasobów pokarmowych.

Nawet tak prosty układ równań różniczkowych może generować złożoną dynamikę systemu ekologicznego, co tylko podkreśla znaczenie modelowania matematycznego w ekologii umożliwiającego przewidywanie i zrozumienie procesów zachodzących w rzeczywistych ekosystemach.