Statystyka dla Inżynierów
Laboratorium 4
Rozkłady Ciągłe

Korzystamy z funkcji np.
dnorm(x,μ, σ) – gęstość rozkładu normalnego
pnorm(x,μ, σ) – p'stwo skumolowane dla rozkładu normalnego (dystrybuanta)
qnorm(p, μ, σ) – p-kwantyl dla rozkładu normalnego
Analogicznie pexp(x, λ), punif(x, a, b) itp.
Należy zrobić pierwsze 2 zadania zarówno „na papierze/tablicy" jak i na komputerze
Uwaga: Gdy X jest zmienną ciągłą: $\boldsymbol{P(X \leq k) = P(X < k)}$

$$\boldsymbol{P(k_1 \leq X \leq k_2) = P(X \leq k_2) - P(X \leq k_1)}$$

1. Zmienna X ma rozkład jednostajny na przedziale [4; 12]. Wyznaczyć
i) $P(X < 7)$
ii) $P(5 < X < 11)$
iii) $P(X > 10)$
iv) Wyznaczyć x taki, że $P(X > x) = 0.6$

2. Telefony przychodzą do pewnej centrali losowo z stałą intensywnością 4 na minutę. Niech T będzie czasem między dwoma telefonami. Wyznaczyć prawdopodobieństwo tego, iż czas między telefonami jest
   i) większy niż 30s. Poisson
   ii) mniejszy niż 20s.
   iii) między 40 a 80s.
   iv) Wyznaczyć czas t taki, że p'stwo, iż czas między telefonami jest większy niż t wynosi 0,2.
   v) (Tylko na komputerze) Narysować wykres gęstości zmiennej T na przedziale $0 \leq t \leq 3$. [funkcja: plot, type="l", wynaczyć gęstość g(x) dla $x \in \{0, 0.01, 0.02, \dots, 2.99, 3\}$].

3. Czas do pierwszej usterki pewnego urządzenia ma rozkład wykładniczy z parametrem intensywności 1/3 (czas jest mierzony w latach). Wyznaczyć prawdopodobieństwo tego, iż czas do pierwszej usterki jest
   i) większy niż 2 lata
   ii) mniejszy niż 4 lata
   iii) między 3 a 5 lat.
   iv) Wyznaczyć czas t taki, że p'stwo, iż czas do usterki jest mniejszy niż t wynosi 0,4.

4. Wzrost studentów X ma rozkład normalny z wartością oczekiwaną 170cm a odchylenie standardowe 12cm. Niech X będzie wzrost losowo wybranego studenta. Wyznaczyć
   i) P(X > 180)
   ii) P(X < 165)
   iii) P(155 < X < 190)
   iv) Narysować wykres gęstości zmiennej X na przedziale $130 \leq x \leq 210$

Funkcja gęstości prawdopodobieństwa

Zmienna losowa o rozkładzie jednostajnym – każda wartość tak samo prawd. wystąpienia.

dyskretny
Skończony zbiór wartości (wynik rzutu uczciwą kostką)

jednostajnie ciągły
przedział liczb rzeczywistych
losowa wartość z przedziału [a,b]

① funkcja gęstości prawdopodobieństwa $f(x) = \frac{1}{b-a} = \frac{1}{12-4} = \frac{1}{8}$

Prawdopodobieństwo wyrażone jako pole pod funkcją gęstości to:

$$P(c < X < d) = \frac{d-c}{b-a}$$

i) $P(X<7)$ $\quad \frac{7-4}{8} = \frac{3}{8}$ ← najmniejsza w przedziale

ii) $P(5<X<11)$ $\quad \frac{11-5}{8} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

iii) $P(X>10)$ $\quad \frac{12-10}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

iv) $P(X>x) = 0.6 = \frac{6}{10}$

$$\frac{12-x}{8} = 0.6$$

$$x = 7.8$$

② Rozkład wykładniczy $(T \sim Exp(\lambda = 4))$ opisuje czas oczekiwania na pierwsze wystąpienie.

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

Prawdopodobieństwo, że czas między tel. wynosi więcej niż t, obliczamy za pomocą funkcji przeżycia.

PDF

funkcji gęstości → $P(T>t) = e^{-\lambda t}$ | Mniejszy / Dystrybuanta (CDF) $1 -$

i) $P(T>0.5) = e^{-4 \cdot 0.5} = e^{-2} \approx 0.135$

ii) $P(T < \frac{1}{3}) = e^{4 \cdot -\frac{1}{3}} = e^{-\frac{4}{3}}$ ← ale ma być mniejsze, więc

$1 - e^{-\frac{4}{3}} \approx 0.7364$

iii) 40 sekund = $\frac{2}{3}$ minuty   80 sekund = $\frac{4}{3}$ minuty

T mniejsze niż 80 = $P(T < \frac{4}{3}) = 1 - e^{-4 \cdot \frac{4}{3}} = 1 - e^{-\frac{16}{3}}$

T mniejsze niż 40 = $P(T < \frac{2}{3}) = 1 - e^{-4 \cdot \frac{2}{3}} = 1 - e^{-\frac{8}{3}}$

Więc jak odejmę jedno od drugiego to wyjdzie mi moje prawdopodobieństwo.

$$P\left(\frac{2}{3} < T < \frac{4}{3}\right) = \left(1 - e^{-\frac{16}{3}}\right) - \left(1 - e^{-8/3}\right) = e^{-\frac{8}{3}} - e^{-\frac{16}{3}} \approx$$

0.0672

iv) $P(T > t) = 0.2 = \frac{2}{10}$

$$e^{-4t} = 0.2$$

$$-4t = \ln 0.2$$

$$t = -\frac{\ln 0.2}{4} \approx 0.4 \text{ minuty} \approx 24 s.$$

3) Wartości oczekiwane: $E(T) = \frac{1}{\lambda}$

$Var(T) = \frac{1}{\lambda^2}$

a) $P(T > 2)$ $e^{-\frac{2}{3}} \approx 0.51$

b) $P(T < 4)$ $1 - e^{-\frac{4}{3}} \approx 0.73$

c) $P(T < 5) = 1 - e^{-\frac{5}{3}}$ $e^{-1} - e^{-\frac{5}{3}} \approx 0.23$

$P(T < 3) = 1 - e^{-1}$

Bez 1

d) $P(T < t) = 0.4$

$$0.4 = 1 - e^{-\frac{1}{3}t}$$

$$t = -3 \ln(0.6) \approx 1.5$$

4) $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

funkcja gęstości

odchylenie

$X \sim N(170, 12^2)$

$Z = \frac{X-170}{12} \sim N(0,1)$

a) $P(X>180) = P\left(Z > \frac{180-170}{12}\right.$