Relazione progetto Fondamenti di Automatica

Francesco Pio Ruffo

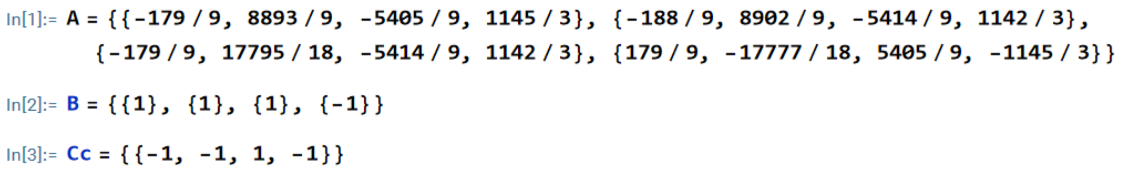
Mat. 240044

Esercizio a: Sistema proprio LTI-TC

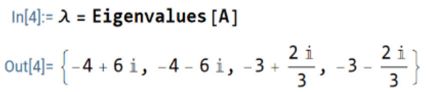
1. Modi naturali del sistema

Al fine di calcolare i modi naturali del sistema, analizzo la matrice A: essa si presenta come una matrice di ordine 4, quadrata, a coefficienti reali.

Dopo aver immesso le matrici A, B, Cc in Mathematica, calcolo gli autovalori della matrice dinamica A:



```
In[1]:= A = {{-179 / 9, 8893 / 9, -5405 / 9, 1145 / 3}, {-188 / 9, 8902 / 9, -5414 / 9, 1142 / 3},
          {-179 / 9, 17795 / 18, -5414 / 9, 1142 / 3}, {179 / 9, -17777 / 18, 5405 / 9, -1145 / 3}}

In[2]:= B = {{1}, {1}, {1}, {-1}}

In[3]:= Cc = {{-1, -1, 1, -1}}
```

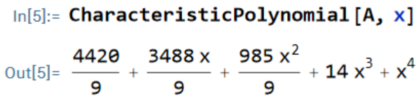


```
In[4]:= λ = Eigenvalues[A]

Out[4]= {-4 + 6 i, -4 - 6 i, -3 + 2 i/3, -3 - 2 i/3}
```

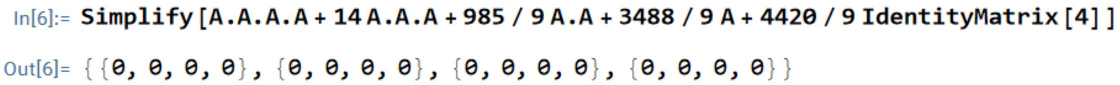
Ottengo due coppie di autovalori complessi e coniugati:

$$\lambda_1 = -4 + 6i \quad \lambda_2 = -4 - 6i \quad \lambda_3 = -3 + \frac{2i}{3} \quad \lambda_4 = -3 - \frac{2i}{3}$$

Verifico la sussistenza del teorema di Cayley-Hamilton: ogni matrice è zero del suo polinomio caratteristico:



```
In[5]:= CharacteristicPolynomial[A, x]

Out[5]= 4420/9 + 3488 x/9 + 985 x^2/9 + 14 x^3 + x^4
```

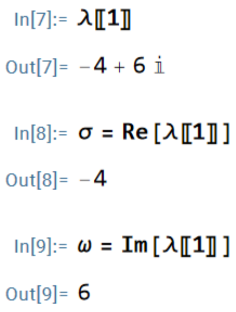


```
In[6]:= Simplify[A.A.A.A + 14 A.A.A + 985 / 9 A.A + 3488 / 9 A + 4420 / 9 IdentityMatrix[4]]

Out[6]= {{0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0}}
```

Poiché gli autovalori sono complessi e coniugati, avrò dei modi naturali nella forma:

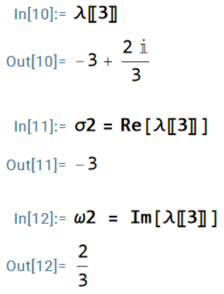
$$e^{\sigma t} cos(\omega t), e^{\sigma t} sin(\omega t)$$

Calcolo quanto valgono σ e ω per $-4 + 6i$:



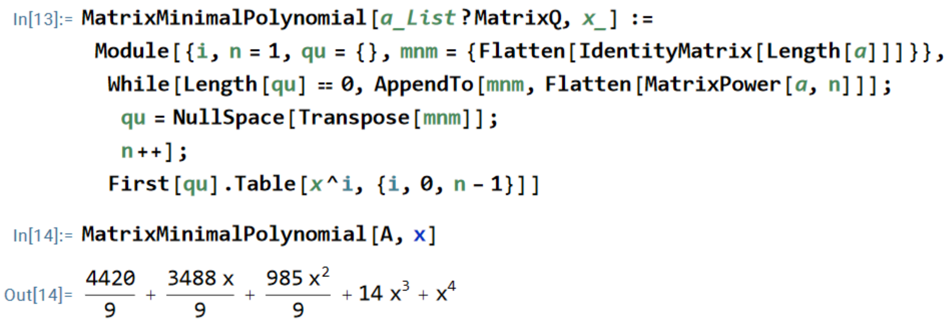
```
In[7]:= λ[[1]]

Out[7]= -4 + 6 i

In[8]:= σ = Re[λ[[1]]]

Out[8]= -4

In[9]:= ω = Im[λ[[1]]]

Out[9]= 6
```

Calcolo σ *e* ω per $-3+\frac{2i}{3}$:



```
In[10]:= λ⟦3⟧
Out[10]= -3 + 2 ⅈ/3

In[11]:= σ2 = Re[λ⟦3⟧]
Out[11]= -3

In[12]:= ω2  =  Im[λ⟦3⟧]
Out[12]= 2/3
```

Verifico la correttezza del numero di modi naturali ottenuto: il grado del polinomio minimo indica il numero di modi del sistema



```
In[13]:= MatrixMinimalPolynomial[a_List?MatrixQ, x_] :=
          Module[{i, n = 1, qu = {}, mnm = {Flatten[IdentityMatrix[Length[a]]]}},
           While[Length[qu] == 0, AppendTo[mnm, Flatten[MatrixPower[a, n]]];
            qu = NullSpace[Transpose[mnm]];
            n++];
           First[qu].Table[x^i, {i, 0, n - 1}]]

In[14]:= MatrixMinimalPolynomial[A, x]

Out[14]= 4420/9 + 3488 x/9 + 985 x^2/9 + 14 x^3 + x^4
```

I **modi naturali** saranno:

- Legati all'autovalore $-4+6i$:

$$e^{-4t}cos(6t)$$

$$e^{-4t}sin(6t)$$

- Legati all'autovalore $-3+\frac{2}{3}i$:

$$e^{-3t}cos\left(\frac{2}{3}t\right)$$

$$e^{-3t}sin\left(\frac{2}{3}t\right)$$

Sono funzioni pseudo-oscillatorie di periodo $T=\frac{2\pi}{\omega}$, dunque:

$$T_1=\frac{2\pi}{6}=\frac{1}{3}\pi$$

$$T_2=\frac{2\pi}{\frac{2}{3}}=3\pi$$

Inoltre, convergono a 0 in quanto σ è strettamente negativo (e la convergenza dipende da $e^{\sigma t}$ e dal segno di σ):

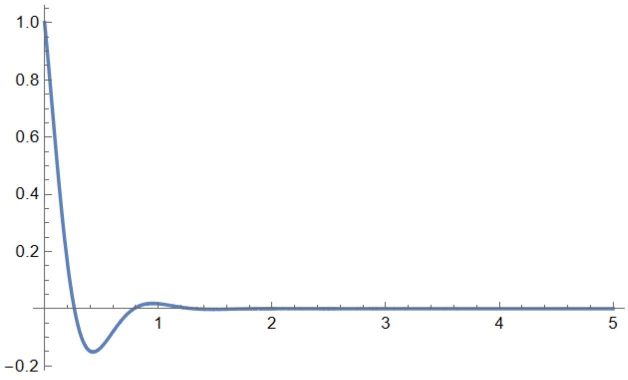
$$\lim_{t\to+\infty} e^{\sigma t}sin(\omega\, t)=0$$

$$\lim_{t\to+\infty} e^{\sigma t}cos(\omega\, t)=0$$

Vado a plottare i modi naturali ottenuti:

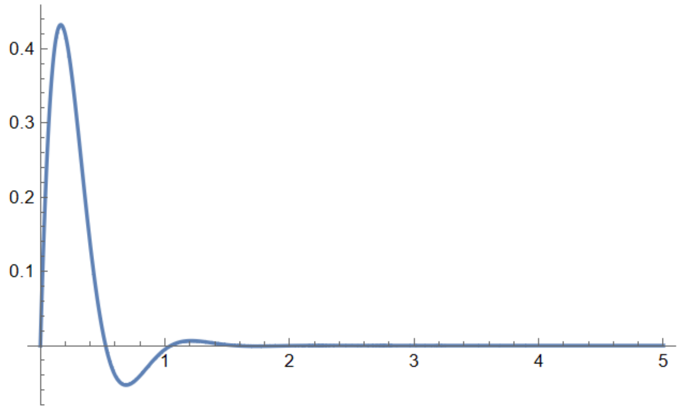
```
In[15]:= Plot[Exp[σ t] × Cos[ω t], {t, 0, 5}, PlotRange → All]
```

Out[15]=



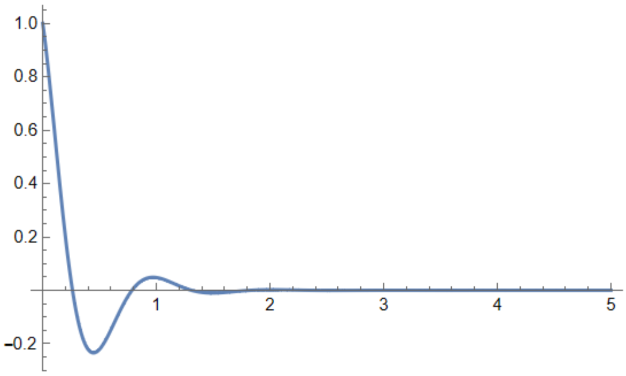
```
In[16]:= Plot[Exp[σ t] × Sin[ω t], {t, 0, 5}, PlotRange → All]
```

Out[16]=



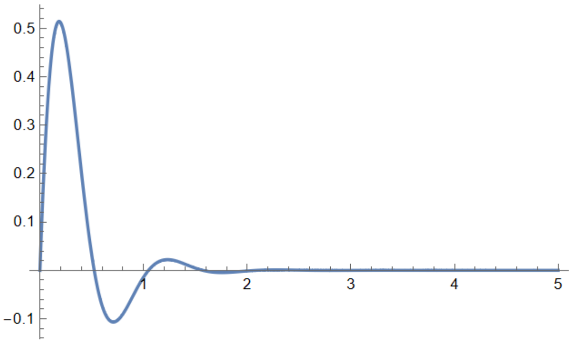
```
In[17]:= Plot[Exp[σ2 t] × Cos[ω t], {t, 0, 5}, PlotRange → All]
```

Out[17]=



```
In[18]:= Plot[Exp[σ2 t] × Sin[ω t], {t, 0, 5}, PlotRange → All]
```

Out[18]=



2. Risposta libera

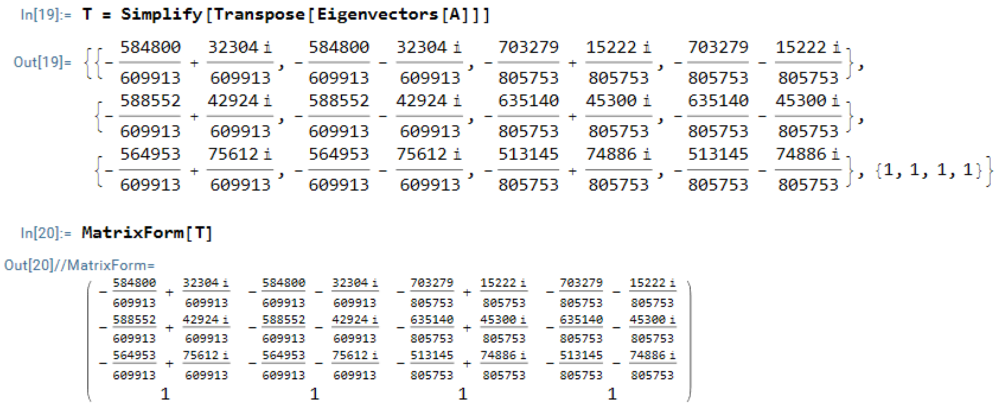
La risposta libera consente di determinare l'andamento di un sistema dinamico nel caso in cui non agisca alcun tipo di ingresso, cioè quando la variabile indipendente u(t) è identicamente nulla, e lo stato iniziale x(0) coincide con quello assegnato x_0.

Partendo dalla relazione:

$$A \cdot \mathrm{T} = \mathrm{T} \cdot \Lambda$$

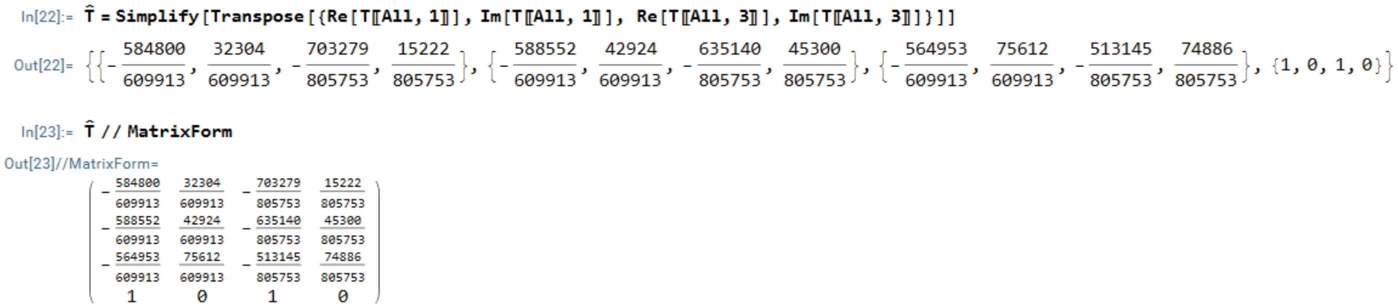
ottengo che le matrici A e Λ sono simili per tramite di T- non singolare. La matrice T sarà composta dagli autovettori destri associati agli autovalori λ_i della matrice a:

$$T = [v1, \overline{v1}, v2, \overline{v2}]$$



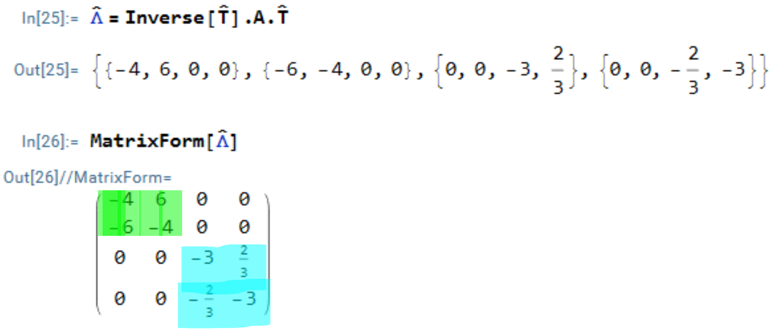
```
In[19]:= T = Simplify[Transpose[Eigenvectors[A]]]

Out[19]= {{-584800/609913 + 32304 i/609913, -584800/609913 - 32304 i/609913, -703279/805753 + 15222 i/805753, -703279/805753 - 15222 i/805753},
  {-588552/609913 + 42924 i/609913, -588552/609913 - 42924 i/609913, -635140/805753 + 45300 i/805753, -635140/805753 - 45300 i/805753},
  {-564953/609913 + 75612 i/609913, -564953/609913 - 75612 i/609913, -513145/805753 + 74886 i/805753, -513145/805753 - 74886 i/805753}, {1, 1, 1, 1}}

In[20]:= MatrixForm[T]

Out[20]//MatrixForm=
( -584800/609913 + 32304 i/609913   -584800/609913 - 32304 i/609913   -703279/805753 + 15222 i/805753   -703279/805753 - 15222 i/805753 )
( -588552/609913 + 42924 i/609913   -588552/609913 - 42924 i/609913   -635140/805753 + 45300 i/805753   -635140/805753 - 45300 i/805753 )
( -564953/609913 + 75612 i/609913   -564953/609913 - 75612 i/609913   -513145/805753 + 74886 i/805753   -513145/805753 - 74886 i/805753 )
(              1                                 1                                 1                                 1               )
```

Calcolo ora la matrice $\hat{T}$ che si ottiene considerando per ogni autovettore la prima colonna come rappresentativa della sua parte reale e la seconda colonna come parte immaginaria. Così facendo, i modi complessi e coniugati vengono "visti" come delle successioni pseudo-trigonometriche:



```
In[22]:= T̂ = Simplify[Transpose[{Re[T[[All, 1]]], Im[T[[All, 1]]], Re[T[[All, 3]]], Im[T[[All, 3]]]}]]

Out[22]= {{-584800/609913, 32304/609913, -703279/805753, 15222/805753}, {-588552/609913, 42924/609913, -635140/805753, 45300/805753}, {-564953/609913, 75612/609913, -513145/805753, 74886/805753}, {1, 0, 1, 0}}

In[23]:= T̂ // MatrixForm

Out[23]//MatrixForm=
( -584800/609913   32304/609913   -703279/805753   15222/805753 )
( -588552/609913   42924/609913   -635140/805753   45300/805753 )
( -564953/609913   75612/609913   -513145/805753   74886/805753 )
(       1                0               1               0      )
```

Utilizzando ora la relazione $A \cdot \hat{T} = \hat{T} \cdot \hat{\Lambda}$ posso calcolare la **matrice di rotation scaling $\hat{\Lambda}$,** data dal prodotto di due matrici che commutano la loro: la matrice di scalatura e la matrice ortonormale (di rotazione di un angolo θ).



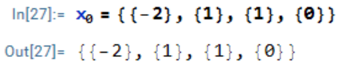
```
In[25]:= Λ̂ = Inverse[T̂].A.T̂

Out[25]= {{-4, 6, 0, 0}, {-6, -4, 0, 0}, {0, 0, -3, 2/3}, {0, 0, -2/3, -3}}

In[26]:= MatrixForm[Λ̂]

Out[26]//MatrixForm=
( -4   6    0     0  )
( -6  -4    0     0  )
(  0   0   -3    2/3 )
(  0   0  -2/3   -3  )
```

La matrice ottenuta è una matrice diagonale a blocchi; il primo blocco fa riferimento alla coppia di autovalori complessi e coniugati $-4+6i$, $-4-6i$ mentre il secondo blocco fa riferimento alla coppia di autovalori $-3+\frac{2i}{3}$, $-3-\frac{2i}{3}$.

In particolare, ogni blocco è composto da:

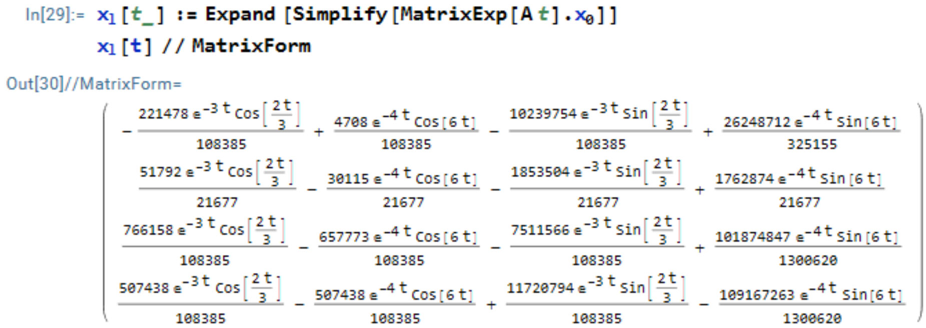
$$\begin{pmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Re(\lambda) & Im(\lambda) \\ -Im(\lambda) & Re(\lambda) \end{pmatrix}$$

Procedo ora al calcolo della risposta libera. Poiché lo stato non è combinazione lineare di nessuna delle colonne della matrice di cambiamento di base, nell'espansione modale della risposta libera mi aspetto che compaiano tutti i modi naturali:



```
In[27]:= x₀ = {{-2}, {1}, {1}, {0}}
Out[27]= {{-2}, {1}, {1}, {0}}
```

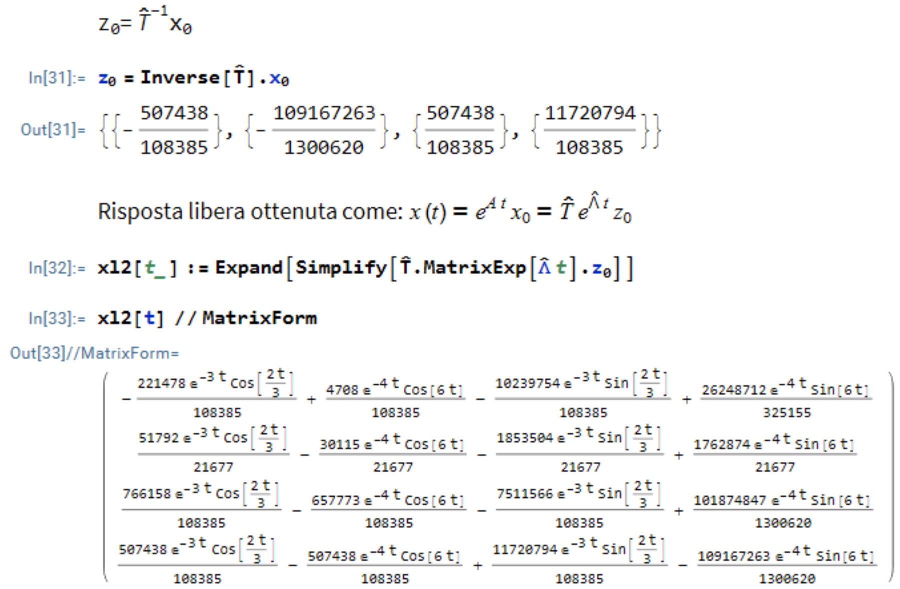
Calcolo la risposta libera del sistema come: $\boldsymbol{x_l(t) = e^{At}x_0}$



```
In[29]:= xₗ[t_] := Expand [Simplify [MatrixExp [A t].x₀]]
         xₗ[t] // MatrixForm
Out[30]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} -\frac{221478\, e^{-3t}\, \mathrm{Cos}\left[\frac{2t}{3}\right]}{108385}+\frac{4708\, e^{-4t}\, \mathrm{Cos}[6t]}{108385}-\frac{10239754\, e^{-3t}\, \mathrm{Sin}\left[\frac{2t}{3}\right]}{108385}+\frac{26248712\, e^{-4t}\, \mathrm{Sin}[6t]}{325155} \\ \frac{51792\, e^{-3t}\, \mathrm{Cos}\left[\frac{2t}{3}\right]}{21677}-\frac{30115\, e^{-4t}\, \mathrm{Cos}[6t]}{21677}-\frac{1853504\, e^{-3t}\, \mathrm{Sin}\left[\frac{2t}{3}\right]}{21677}+\frac{1762874\, e^{-4t}\, \mathrm{Sin}[6t]}{21677} \\ \frac{766158\, e^{-3t}\, \mathrm{Cos}\left[\frac{2t}{3}\right]}{108385}-\frac{657773\, e^{-4t}\, \mathrm{Cos}[6t]}{108385}-\frac{7511566\, e^{-3t}\, \mathrm{Sin}\left[\frac{2t}{3}\right]}{108385}+\frac{101874847\, e^{-4t}\, \mathrm{Sin}[6t]}{1300620} \\ \frac{507438\, e^{-3t}\, \mathrm{Cos}\left[\frac{2t}{3}\right]}{108385}-\frac{507438\, e^{-4t}\, \mathrm{Cos}[6t]}{108385}+\frac{11720794\, e^{-3t}\, \mathrm{Sin}\left[\frac{2t}{3}\right]}{108385}-\frac{109167263\, e^{-4t}\, \mathrm{Sin}[6t]}{1300620} \end{pmatrix}$$

Alternativamente, posso calcolare la risposta libera anche utilizzando z_0, cioè lo stato iniziale x_0 proiettato lungo le colonne di $\hat{T}$:



$Z_0 = \hat{T}^{-1} x_0$

```
In[31]:= z₀ = Inverse[T̂].x₀
Out[31]=
```

$$\left\{\left\{-\frac{507438}{108385}\right\}, \left\{-\frac{109167263}{1300620}\right\}, \left\{\frac{507438}{108385}\right\}, \left\{\frac{11720794}{108385}\right\}\right\}$$

Risposta libera ottenuta come: $x(t) = e^{A\,t}\,x_0 = \hat{T}\, e^{\hat{\Lambda}\,t}\, z_0$

```
In[32]:= xl2[t_] := Expand[Simplify[T̂.MatrixExp[Λ̂ t].z₀]]

In[33]:= xl2[t] // MatrixForm
Out[33]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} -\frac{221478\, e^{-3t}\, \mathrm{Cos}\left[\frac{2t}{3}\right]}{108385}+\frac{4708\, e^{-4t}\, \mathrm{Cos}[6t]}{108385}-\frac{10239754\, e^{-3t}\, \mathrm{Sin}\left[\frac{2t}{3}\right]}{108385}+\frac{26248712\, e^{-4t}\, \mathrm{Sin}[6t]}{325155} \\ \frac{51792\, e^{-3t}\, \mathrm{Cos}\left[\frac{2t}{3}\right]}{21677}-\frac{30115\, e^{-4t}\, \mathrm{Cos}[6t]}{21677}-\frac{1853504\, e^{-3t}\, \mathrm{Sin}\left[\frac{2t}{3}\right]}{21677}+\frac{1762874\, e^{-4t}\, \mathrm{Sin}[6t]}{21677} \\ \frac{766158\, e^{-3t}\, \mathrm{Cos}\left[\frac{2t}{3}\right]}{108385}-\frac{657773\, e^{-4t}\, \mathrm{Cos}[6t]}{108385}-\frac{7511566\, e^{-3t}\, \mathrm{Sin}\left[\frac{2t}{3}\right]}{108385}+\frac{101874847\, e^{-4t}\, \mathrm{Sin}[6t]}{1300620} \\ \frac{507438\, e^{-3t}\, \mathrm{Cos}\left[\frac{2t}{3}\right]}{108385}-\frac{507438\, e^{-4t}\, \mathrm{Cos}[6t]}{108385}+\frac{11720794\, e^{-3t}\, \mathrm{Sin}\left[\frac{2t}{3}\right]}{108385}-\frac{109167263\, e^{-4t}\, \mathrm{Sin}[6t]}{1300620} \end{pmatrix}$$

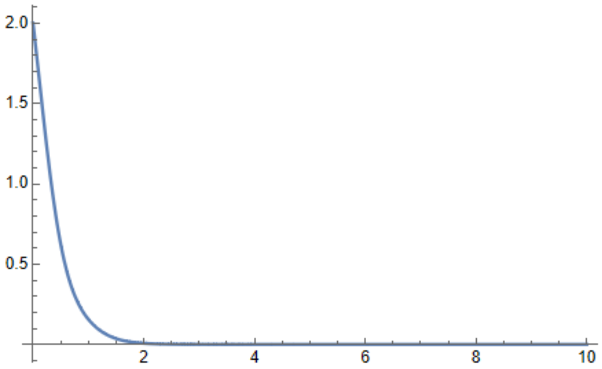
La risposta libera nell'uscita si ottiene come:

```
In[34]:= y1[t_] := Expand[Simplify[Cc.x1[t]]]
In[35]:= y1[t]
```

Out[35]= $$\left\{\left\{\frac{221238\, e^{-3t} \operatorname{Cos}\left[\frac{2t}{3}\right]}{108385}-\frac{4468\, e^{-4t} \operatorname{Cos}[6t]}{108385}+\frac{274914\, e^{-3t} \operatorname{Sin}\left[\frac{2t}{3}\right]}{108385}+\frac{137411\, e^{-4t} \operatorname{Sin}[6t]}{650310}\right\}\right\}$$

```
In[36]:= Plot[y1[t], {t, 0, 10}, PlotRange → All]
```

Out[36]=



3. Configurazioni degli stati iniziali che attivano solo alcuni modi naturali

Scegliendo un particolare stato iniziale che è "allineato" lungo la direzione di un autovalore, sulla risposta libera si accenderanno solo i modi associati a quell'autovalore. Se scegliessi combinazioni lineari dei modi naturali, si accenderebbero ovviamente solo i modi presenti in quella combinazione lineare.

- Accendo i modi corrispondenti alla prima coppia di autovalori complessi e coniugati $-4+6i\,, -4-6i$

Devo prendere: $x_0 = \alpha \begin{pmatrix} -\frac{584800}{609913} \\ -\frac{588552}{609913} \\ -\frac{564953}{609913} \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} \frac{32304}{609913} \\ \frac{42924}{609913} \\ \frac{75612}{609913} \\ 0 \end{pmatrix}$. Scelgo ad esempio $\alpha = 4\,, \beta=5$

In[38]:= $x_0 = 4 \begin{pmatrix} -\frac{584800}{609913} \\ -\frac{588552}{609913} \\ -\frac{564953}{609913} \\ 1 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} \frac{32304}{609913} \\ \frac{42924}{609913} \\ \frac{75612}{609913} \\ 0 \end{pmatrix}$

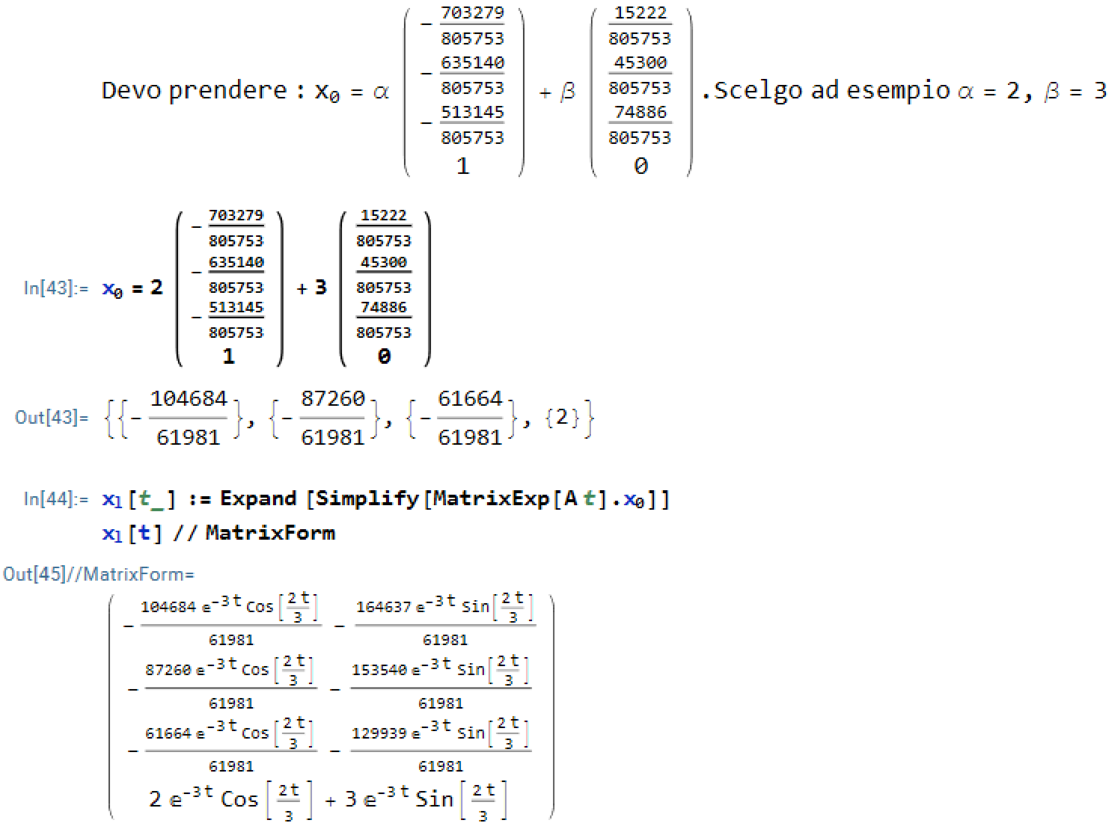
Out[38]= $$\left\{\left\{-\frac{2177680}{609913}\right\}, \left\{-\frac{2139588}{609913}\right\}, \left\{-\frac{1881752}{609913}\right\}, \{4\}\right\}$$

```
In[39]:= x1[t_] := Expand [Simplify[MatrixExp[A t].x0]]
         x1[t] // MatrixForm
```

Out[40]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} -\frac{2177680\, e^{-4t} \operatorname{Cos}[6t]}{609913} - \frac{3053216\, e^{-4t} \operatorname{Sin}[6t]}{609913} \\ -\frac{2139588\, e^{-4t} \operatorname{Cos}[6t]}{609913} - \frac{3114456\, e^{-4t} \operatorname{Sin}[6t]}{609913} \\ -\frac{1881752\, e^{-4t} \operatorname{Cos}[6t]}{609913} - \frac{3127213\, e^{-4t} \operatorname{Sin}[6t]}{609913} \\ 4\, e^{-4t} \operatorname{Cos}[6t] + 5\, e^{-4t} \operatorname{Sin}[6t] \end{pmatrix}$$

- Accendo i modi corrispondenti alla prima coppia di autovalori complessi e coniugati $-3+\frac{2i}{3}, -3-\frac{2i}{3}$



Devo prendere : $x_0 = \alpha \begin{pmatrix} -\frac{703279}{805753} \\ -\frac{635140}{805753} \\ -\frac{513145}{805753} \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} \frac{15222}{805753} \\ \frac{45300}{805753} \\ \frac{74886}{805753} \\ 0 \end{pmatrix}$. Scelgo ad esempio $\alpha = 2$, $\beta = 3$

In[43]:= $x_0 = 2 \begin{pmatrix} -\frac{703279}{805753} \\ -\frac{635140}{805753} \\ -\frac{513145}{805753} \\ 1 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} \frac{15222}{805753} \\ \frac{45300}{805753} \\ \frac{74886}{805753} \\ 0 \end{pmatrix}$

Out[43]= $\left\{\left\{-\frac{104684}{61981}\right\}, \left\{-\frac{87260}{61981}\right\}, \left\{-\frac{61664}{61981}\right\}, \{2\}\right\}$

In[44]:=
```
x1[t_] := Expand[Simplify[MatrixExp[A t].x0]]
x1[t] // MatrixForm
```

Out[45]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} -\frac{104684\, e^{-3t} \operatorname{Cos}\left[\frac{2t}{3}\right]}{61981} - \frac{164637\, e^{-3t} \operatorname{Sin}\left[\frac{2t}{3}\right]}{61981} \\ -\frac{87260\, e^{-3t} \operatorname{Cos}\left[\frac{2t}{3}\right]}{61981} - \frac{153540\, e^{-3t} \operatorname{Sin}\left[\frac{2t}{3}\right]}{61981} \\ -\frac{61664\, e^{-3t} \operatorname{Cos}\left[\frac{2t}{3}\right]}{61981} - \frac{129939\, e^{-3t} \operatorname{Sin}\left[\frac{2t}{3}\right]}{61981} \\ 2\, e^{-3t} \operatorname{Cos}\left[\frac{2t}{3}\right] + 3\, e^{-3t} \operatorname{Sin}\left[\frac{2t}{3}\right] \end{pmatrix}$$

4. Funzione di Trasferimento, poli e zeri

A TC la FdT è quella funzione di variabile complessa s tale che moltiplicata algebricamente per la Trasformata di Laplace dell'ingresso, restituisce la Trasformata di Laplace della risposta forzata:

$$Y_f(s) = G(s) \cdot U(s)$$

da cui:

$$G(s) = \frac{Y_f(s)}{U(s)}$$

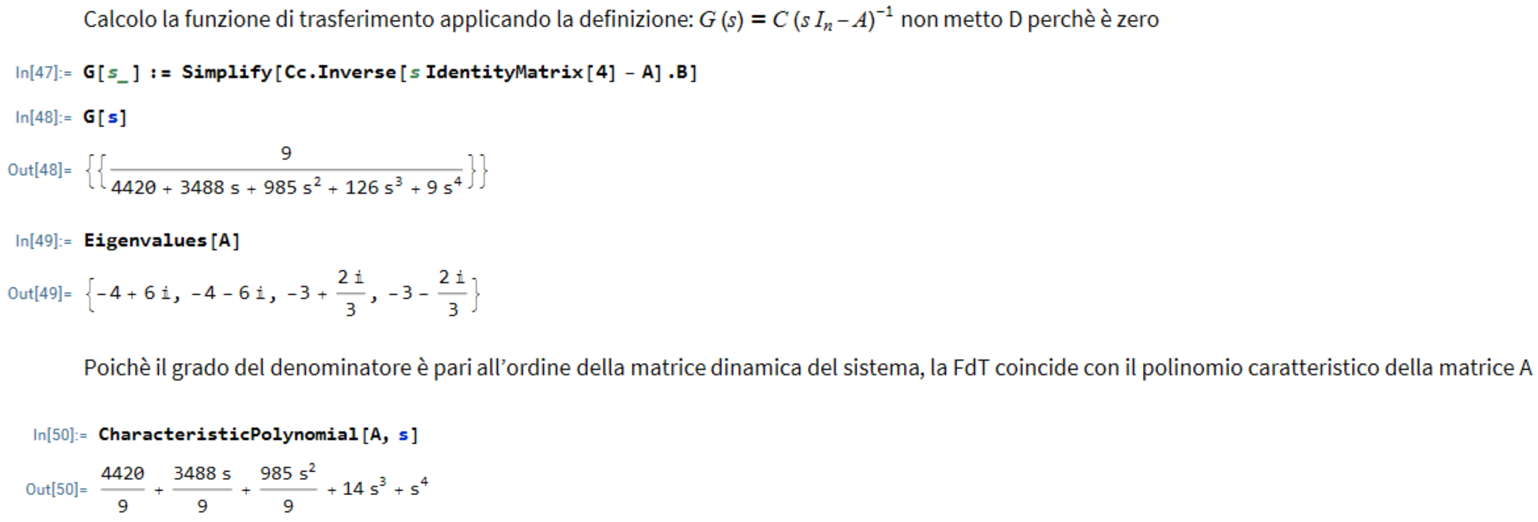
Sfruttando il teorema della derivata e la linearità dell'operatore Trasformata di Laplace ottengo la funzione di trasferimento per come scritta:

$$y(s) = C \cdot X(s) + \mathrm{D} \cdot \mathrm{U(s)} = \mathrm{C}[(\mathrm{s} \cdot \mathrm{I_n} - \mathrm{A})^{-1}\mathrm{x_0} + (\mathrm{sI_n} - \mathrm{A})^{-1}\mathrm{B} \ \cdot \mathrm{U(s)}] + \mathrm{D} \cdot \mathrm{U(s)}$$

$$Y_f(s) = (C(s \cdot \mathrm{I_n} - \mathrm{A})^{-1} \cdot \mathrm{B} + \mathrm{D}) \cdot \mathrm{U(s)}$$

$$Y_f(s) = G(s) \cdot \mathrm{U(s)}$$

FdT



Calcolo la funzione di trasferimento applicando la definizione: $G(s) = C(s I_n - A)^{-1}$ non metto D perchè è zero

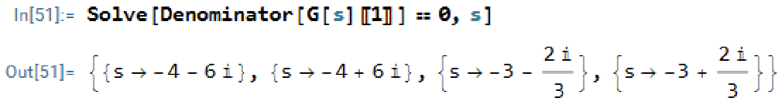
```
In[47]:= G[s_] := Simplify[Cc.Inverse[s IdentityMatrix[4] - A].B]

In[48]:= G[s]

                                  9
Out[48]= {{―――――――――――――――――――――――――――――――――――――――――}}
            4420 + 3488 s + 985 s² + 126 s³ + 9 s⁴

In[49]:= Eigenvalues[A]

                                    2 i        2 i
Out[49]= {-4 + 6 i, -4 - 6 i, -3 + ―――, -3 - ―――}
                                     3          3
```

Poichè il grado del denominatore è pari all'ordine della matrice dinamica del sistema, la FdT coincide con il polinomio caratteristico della matrice A

```
In[50]:= CharacteristicPolynomial[A, s]

          4420   3488 s   985 s²
Out[50]= ―――― + ―――――― + ―――――― + 14 s³ + s⁴
           9       9        9
```

Poli

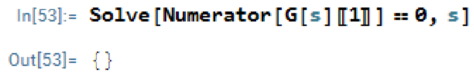
Radici del denominatore della FdT. In questo caso coincidono con gli autovalori di A, ma in generale sono un sottoinsieme



```
In[51]:= Solve[Denominator[G[s][[1]]] == 0, s]

                                                  2 i               2 i
Out[51]= {{s → -4 - 6 i}, {s → -4 + 6 i}, {s → -3 - ―――}, {s → -3 + ―――}}
                                                   3                 3
```

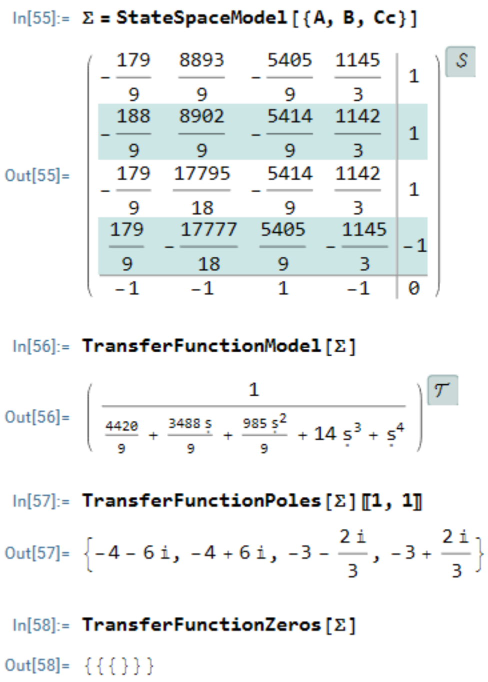
Zeri

Rappresentano le radici del numeratore della FdT. Questa funzione di trasferimento non presenta zeri



```
In[53]:= Solve[Numerator[G[s][[1]]] == 0, s]

Out[53]= {}
```

Per verificare i calcoli posso utilizzare una funzione built-in di Mathematica:



```
In[55]:= Σ = StateSpaceModel[{A, B, Cc}]
```

Out[55]=

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -\frac{179}{9} & \frac{8893}{9} & -\frac{5405}{9} & \frac{1145}{3} & 1 \\ -\frac{188}{9} & \frac{8902}{9} & -\frac{5414}{9} & \frac{1142}{3} & 1 \\ -\frac{179}{9} & \frac{17795}{18} & -\frac{5414}{9} & \frac{1142}{3} & 1 \\ \frac{179}{9} & -\frac{17777}{18} & \frac{5405}{9} & -\frac{1145}{3} & -1 \\ \hline -1 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)^{\mathcal{S}}$$

```
In[56]:= TransferFunctionModel[Σ]
```

Out[56]=

$$\left(\frac{1}{\frac{4420}{9} + \frac{3488\,s}{9} + \frac{985\,s^2}{9} + 14\,s^3 + s^4}\right)^{\mathcal{T}}$$

```
In[57]:= TransferFunctionPoles[Σ][[1, 1]]
```

Out[57]= $\left\{-4 - 6\,i,\ -4 + 6\,i,\ -3 - \frac{2\,i}{3},\ -3 + \frac{2\,i}{3}\right\}$

```
In[58]:= TransferFunctionZeros[Σ]

Out[58]= {{{}}}
```

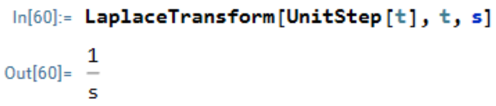
Dove Σ è rappresentata secondo la “forma di Rosenbrock”

5. Risposta al gradino unitario e suo grafico

Il gradino è un segnale di tipo polinomiale, right-sided, definito come:

$$1(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

La L-Trasformata del gradino unitario è $\frac{1}{s}$ e posso verificarlo anche con Mathematica:



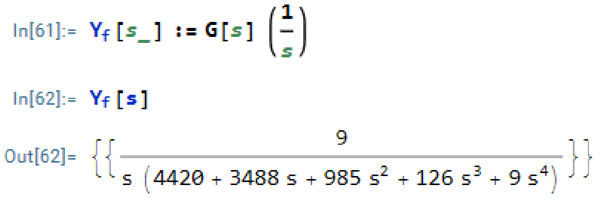
```
In[60]:= LaplaceTransform[UnitStep[t], t, s]
```

Out[60]= $\frac{1}{s}$

Che si ottiene partendo dalla L-Trasformata dell’esponenziale, considerata con a = 0:

$$L[e^{at}] \coloneqq \frac{1}{\mathrm{s} - \mathrm{a}}$$

La risposta forzata, come già visto nel punto precedente, può essere calcolata partendo da $Y_f(s) = G(s) \cdot \mathrm{U}(s)$. La G(s) non è altro che la FdT precedentemente calcolata, mentre U(s) è la L-Trasformata dell’ingresso, cioè la L-Trasformata del gradino unitario



In[61]:= $Y_f[s\_] := G[s]\left(\frac{1}{s}\right)$

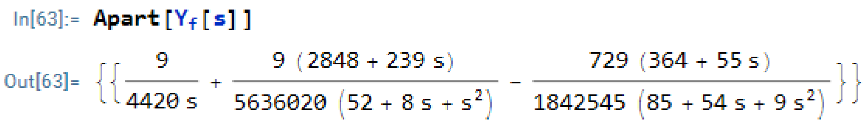
In[62]:= $Y_f[s]$

Out[62]= $\left\{\left\{\frac{9}{s\left(4420+3488\,s+985\,s^2+126\,s^3+9\,s^4\right)}\right\}\right\}$

Si nota che il grado del numeratore è minore di quello del denominatore; questa condizione è sempre rispettata nei sistemi propri con D = 0.

Poiché la risposta forzata così trovata è nel dominio della variabile complessa s, voglio poterla riscrivere nel dominio del tempo. Per farlo devo antitrasformare la funzione appena ottenuta; scelgo di utilizzare la scomposizione in fratti semplici, impiegando la formula di Heaviside. Avendo al denominatore un polinomio di quinto grado, mi aspetto di ottenere 5 fratti semplici.

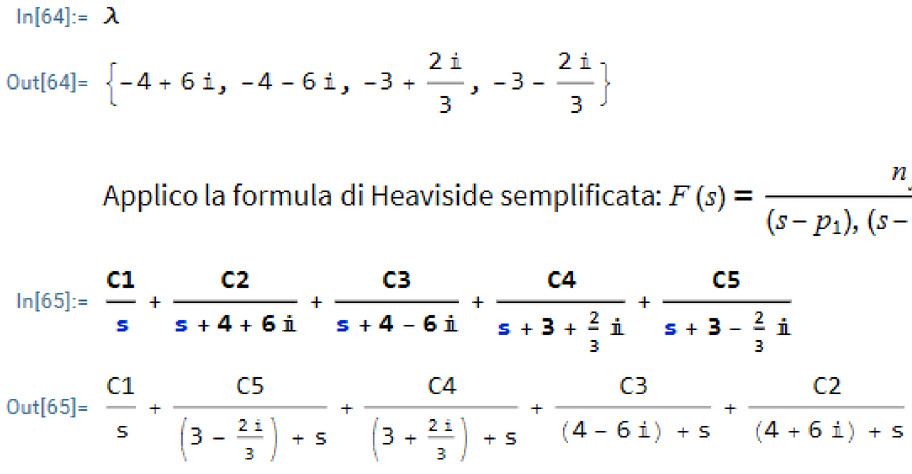
Per ricavare i fratti semplici potrei utilizzare una funzione built-in di Mathematica, Apart, ma essa non scompone in fratti semplici i termini non scomponibili nell'insieme dei reali e avendo poli complessi e coniugati non è utilizzabile. Otterrei infatti:



In[63]:= $\text{Apart}[Y_f[s]]$

Out[63]= $\left\{\left\{\frac{9}{4420\,s}+\frac{9\,(2848+239\,s)}{5636020\left(52+8\,s+s^2\right)}-\frac{729\,(364+55\,s)}{1842545\left(85+54\,s+9\,s^2\right)}\right\}\right\}$

Per scomporre "manualmente" in fratti semplici è necessario considerare i poli della funzione (con l'aggiunta di un nuovo polo portato in dote dall'ingresso, che corrisponde a s = 0). La risposta forzata, infatti, non è altro che la combinazione lineare di due attributi: uno dipendente dall'ingresso (e quindi il gradino) ed uno dipendente dai modi naturali



In[64]:= λ

Out[64]= $\left\{-4+6\,i,\ -4-6\,i,\ -3+\frac{2\,i}{3},\ -3-\frac{2\,i}{3}\right\}$

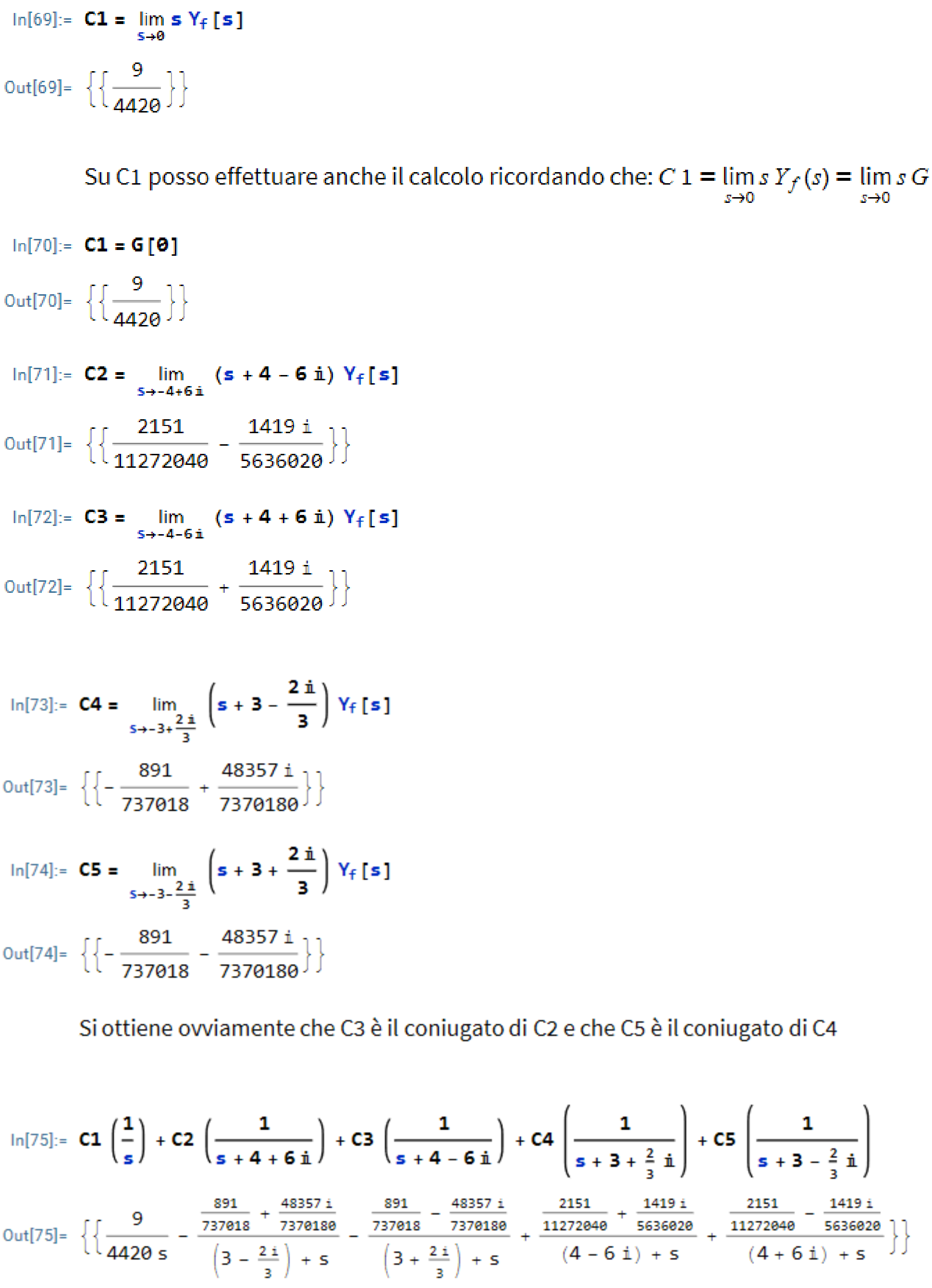
Applico la formula di Heaviside semplificata: $F(s) = \frac{n_f(s)}{(s-p_1),(s-p2)\ldots(s-p_n)}$

In[65]:= $\frac{C1}{s}+\frac{C2}{s+4+6\,i}+\frac{C3}{s+4-6\,i}+\frac{C4}{s+3+\frac{2}{3}\,i}+\frac{C5}{s+3-\frac{2}{3}\,i}$

Out[65]= $\frac{C1}{s}+\frac{C5}{\left(3-\frac{2\,i}{3}\right)+s}+\frac{C4}{\left(3+\frac{2\,i}{3}\right)+s}+\frac{C3}{(4-6\,i)+s}+\frac{C2}{(4+6\,i)+s}$

Calcolo i coefficienti $C1, C2, C3, C4, C5$ come:

$$C_i = \lim_{s\to p_i}(s-p_i)Y(s)$$



In[69]:= $C1 = \lim_{s\to 0} s\, Y_f[s]$

Out[69]= $\left\{\left\{\frac{9}{4420}\right\}\right\}$

Su C1 posso effettuare anche il calcolo ricordando che: $C1 = \lim_{s\to 0} s\, Y_f(s) = \lim_{s\to 0} s\, G(s)\, \frac{1}{s} = G(0)$

In[70]:= $C1 = G[0]$

Out[70]= $\left\{\left\{\frac{9}{4420}\right\}\right\}$

In[71]:= $C2 = \lim_{s\to -4+6 i} (s+4-6 i)\, Y_f[s]$

Out[71]= $\left\{\left\{\frac{2151}{11272040} - \frac{1419\, i}{5636020}\right\}\right\}$

In[72]:= $C3 = \lim_{s\to -4-6 i} (s+4+6 i)\, Y_f[s]$

Out[72]= $\left\{\left\{\frac{2151}{11272040} + \frac{1419\, i}{5636020}\right\}\right\}$

In[73]:= $C4 = \lim_{s\to -3+\frac{2 i}{3}} \left(s+3-\frac{2 i}{3}\right) Y_f[s]$

Out[73]= $\left\{\left\{-\frac{891}{737018} + \frac{48357\, i}{7370180}\right\}\right\}$

In[74]:= $C5 = \lim_{s\to -3-\frac{2 i}{3}} \left(s+3+\frac{2 i}{3}\right) Y_f[s]$

Out[74]= $\left\{\left\{-\frac{891}{737018} - \frac{48357\, i}{7370180}\right\}\right\}$

Si ottiene ovviamente che C3 è il coniugato di C2 e che C5 è il coniugato di C4

In[75]:= $C1\left(\frac{1}{s}\right) + C2\left(\frac{1}{s+4+6 i}\right) + C3\left(\frac{1}{s+4-6 i}\right) + C4\left(\frac{1}{s+3+\frac{2}{3} i}\right) + C5\left(\frac{1}{s+3-\frac{2}{3} i}\right)$

Out[75]= $\left\{\left\{\frac{9}{4420\, s} - \frac{\frac{891}{737018} + \frac{48357\, i}{7370180}}{\left(3-\frac{2 i}{3}\right)+s} - \frac{\frac{891}{737018} - \frac{48357\, i}{7370180}}{\left(3+\frac{2 i}{3}\right)+s} + \frac{\frac{2151}{11272040} + \frac{1419\, i}{5636020}}{(4-6 i)+s} + \frac{\frac{2151}{11272040} - \frac{1419\, i}{5636020}}{(4+6 i)+s}\right\}\right\}$

Partendo dalla Trasformata di Laplace precedentemente considerata per l'esponenziale, riesco a tornare nel dominio del tempo calcolando le antitrasformate dei segnali ottenuti come segue:

$$\frac{1}{s} -> 1(t)$$

$$\frac{1}{s+4+6 i} -> e^{(-4-6 i) t}\, 1(t)$$

$$\frac{1}{s+4-6 i} -> e^{(-4+6 i) t}\, 1(t)$$

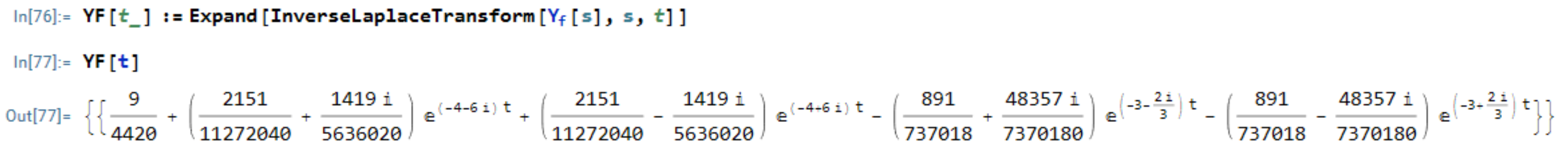
$$\frac{1}{s+3+\frac{2}{3}i} - > e^{\left(-3-\frac{2}{3}i\right)t}1(t)$$

$$\frac{1}{s+3-\frac{2}{3}i} - > e^{\left(-3+\frac{2}{3}i\right)t}1(t)$$

Scrivo dunque la risposta forzata nel dominio del tempo come:

$$Y_f(t) = \frac{9}{4420} + (\frac{2151}{11272040} - \frac{1419i}{5636020})e^{(-4-6i)t} + (\frac{2151}{11272040} + \frac{1419i}{5636020})e^{(-4+6i)t} - (\frac{891}{737018} + \frac{48357i}{7370180})e^{(-3-\frac{2}{3}i)t} - (\frac{891}{737018} - \frac{48357i}{7370180})e^{(-3+\frac{2}{3}i)t}$$

Come verifica dei calcoli effettuati, utilizzo una funzione built-in di Mathematica per il calcolo dell’antitrasformata di Laplace



```
In[76]:= YF[t_] := Expand[InverseLaplaceTransform[Yf[s], s, t]]

In[77]:= YF[t]
```

Out[77]= $\left\{\left\{\frac{9}{4420} + \left(\frac{2151}{11272040} + \frac{1419\,i}{5636020}\right) e^{(-4-6\,i)\,t} + \left(\frac{2151}{11272040} - \frac{1419\,i}{5636020}\right) e^{(-4+6\,i)\,t} - \left(\frac{891}{737018} + \frac{48357\,i}{7370180}\right) e^{\left(-3-\frac{2\,i}{3}\right)t} - \left(\frac{891}{737018} - \frac{48357\,i}{7370180}\right) e^{\left(-3+\frac{2\,i}{3}\right)t}\right\}\right\}$

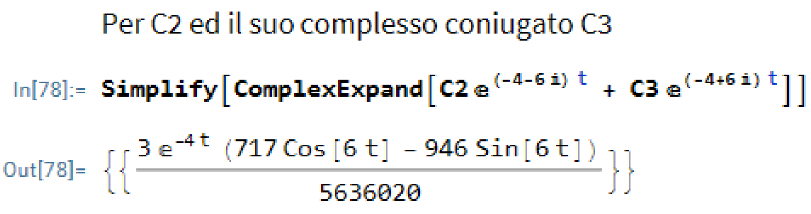
La forma ottenuta deve però essere ulteriormente manipolata: la risposta forzata è combinazione lineare dei termini reali. I termini complessi che sono presenti nella scrittura della risposta forzata nel dominio del tempo devono essere convertiti in reali.

Poiché per ogni numero complesso è presente il suo coniugato, posso scrivere che:

$$z = a + b\,j$$
$$\bar{z} = a - b\,j$$

$$z + \bar{z} = 2Re(z)$$

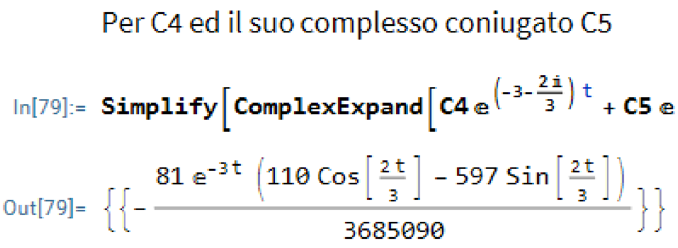
ed utilizzando la relazione di Eulero ottengo:



Per C2 ed il suo complesso coniugato C3

In[78]:= `Simplify[ComplexExpand[C2 e^((-4-6 i) t) + C3 e^((-4+6 i) t)]]`

Out[78]= $\left\{\left\{\frac{3\,e^{-4t}\,(717\,\mathrm{Cos}[6\,t] - 946\,\mathrm{Sin}[6\,t])}{5636020}\right\}\right\}$

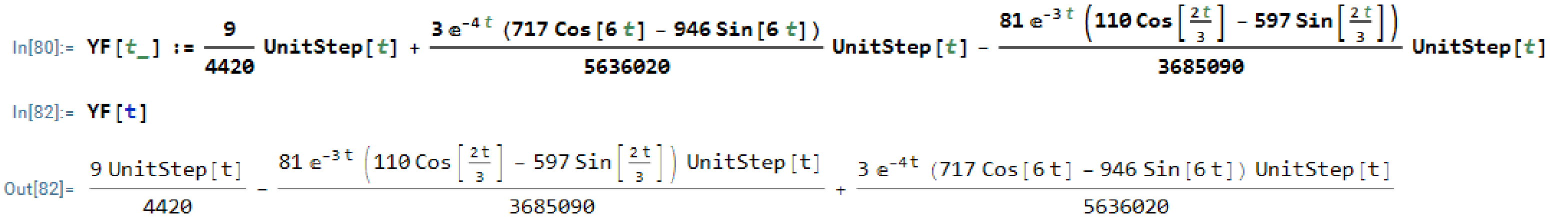


Per C4 ed il suo complesso coniugato C5

In[79]:= `Simplify[ComplexExpand[C4 e^((-3-2 i/3) t) + C5 e^((-3+2 i/3) t)]]`

Out[79]= $\left\{\left\{-\frac{81\,e^{-3t}\left(110\,\mathrm{Cos}\left[\frac{2t}{3}\right] - 597\,\mathrm{Sin}\left[\frac{2t}{3}\right]\right)}{3685090}\right\}\right\}$

La risposta al gradino unitario sarà dunque:



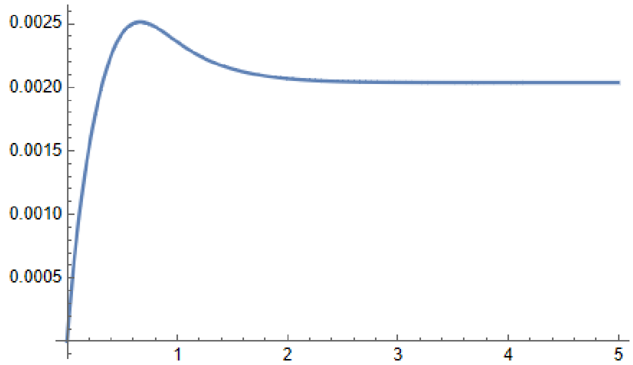
In[80]:= $YF[t\_] := \frac{9}{4420}\,\text{UnitStep}[t] + \frac{3\,e^{-4\,t}\,(717\,\text{Cos}[6\,t] - 946\,\text{Sin}[6\,t])}{5636020}\,\text{UnitStep}[t] - \frac{81\,e^{-3\,t}\left(110\,\text{Cos}\left[\frac{2\,t}{3}\right] - 597\,\text{Sin}\left[\frac{2\,t}{3}\right]\right)}{3685090}\,\text{UnitStep}[t]$

In[82]:= YF[t]

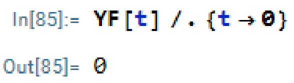
Out[82]= $\frac{9\,\text{UnitStep}[t]}{4420} - \frac{81\,e^{-3\,t}\left(110\,\text{Cos}\left[\frac{2\,t}{3}\right] - 597\,\text{Sin}\left[\frac{2\,t}{3}\right]\right)\text{UnitStep}[t]}{3685090} + \frac{3\,e^{-4\,t}\,(717\,\text{Cos}[6\,t] - 946\,\text{Sin}[6\,t])\,\text{UnitStep}[t]}{5636020}$

In[84]:= $\text{Plot}[YF[t], \{t, 0, 5\}, \text{PlotRange} \to \text{All}]$

Out[84]=



Come verifica dei calcoli, valuto se la risposta forzata calcolata in 0 dia come risultato 0:



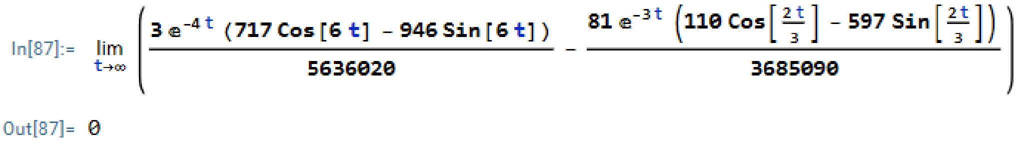
In[85]:= $YF[t]\ /.\ \{t \to 0\}$

Out[85]= 0

La risposta al gradino unitario è scomponibile nella somma di due componenti:

- **Risposta a regime/ Steady state response**
  Parte della risposta che non dipende dai modi naturali ma dall'ingresso (a cui è legata algebricamente). Nel nostro caso è rappresentata da:
  $$\frac{9}{4420}\cdot 1(t)$$
  Va interpretata come una "distorsione"

- **Risposta transitoria**
  Componente della risposta forzata che è data dalla combinazione lineare dei termini che dipendono dai modi naturali. Viene detta transitoria perché si esaurisce nel tempo per t tendente ad infinito. La risposta transitoria è data dagli ultimi quattro termini della risposta a gradino



In[87]:= $\lim_{t\to\infty}\left(\frac{3\,e^{-4\,t}\,(717\,\text{Cos}[6\,t] - 946\,\text{Sin}[6\,t])}{5636020} - \frac{81\,e^{-3\,t}\left(110\,\text{Cos}\left[\frac{2\,t}{3}\right] - 597\,\text{Sin}\left[\frac{2\,t}{3}\right]\right)}{3685090}\right)$

Out[87]= 0

6. Risposta al segnale periodico elementare $u(t) = A sin(\omega t + \psi)1(t)$

La L-Trasformata del segnale periodico elementare seno è data da:

$$L[sin(\omega t)] \coloneqq \frac{\omega}{s^2 + (\omega)^2}$$

Scegliendo come valori della terna **ampiezza**, **pulsazione** e **fase**:

$$A = 1, \omega = 1, \psi = 0$$

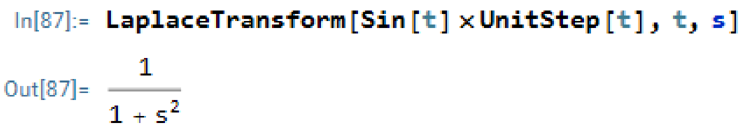
posso ricondurmi ad un ingresso periodico del tipo:

$$u(t) = sin(t)1(t)$$

che consente di avere un'espressione "semplificata" della L-Trasformata:

$$L[sin(t)] \coloneqq \frac{1}{s^2 + 1}$$

Posso verificare quanto detto anche mediante l'ausilio di Mathematica:

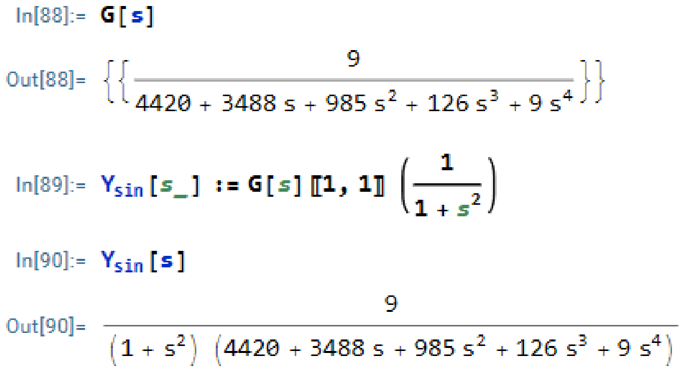


In[87]:= `LaplaceTransform[Sin[t] × UnitStep[t], t, s]`

Out[87]= $\frac{1}{1 + s^2}$

Procedo al calcolo della risposta forzata a questo segnale periodico elementare:

$$Y_{sin}(s) = G(s) \cdot U(s) = G(s) \cdot \frac{1}{s^2 + 1}$$



In[88]:= `G[s]`

Out[88]= $\left\{\left\{\frac{9}{4420 + 3488\, s + 985\, s^2 + 126\, s^3 + 9\, s^4}\right\}\right\}$

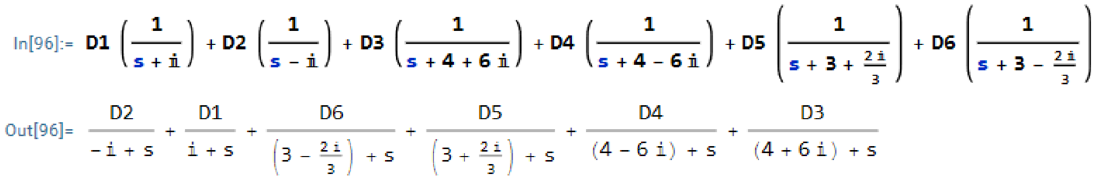
In[89]:= $Y_{sin}[s\_] := G[s][[1, 1]] \left(\frac{1}{1 + s^2}\right)$

In[90]:= $Y_{sin}[s]$

Out[90]= $\frac{9}{(1 + s^2)\,(4420 + 3488\, s + 985\, s^2 + 126\, s^3 + 9\, s^4)}$

$Y_{sin}(s)$ è una funzione di variabile complessa s di tipo real-razionale: tutti i coefficienti dei polinomi sono numeri reali.

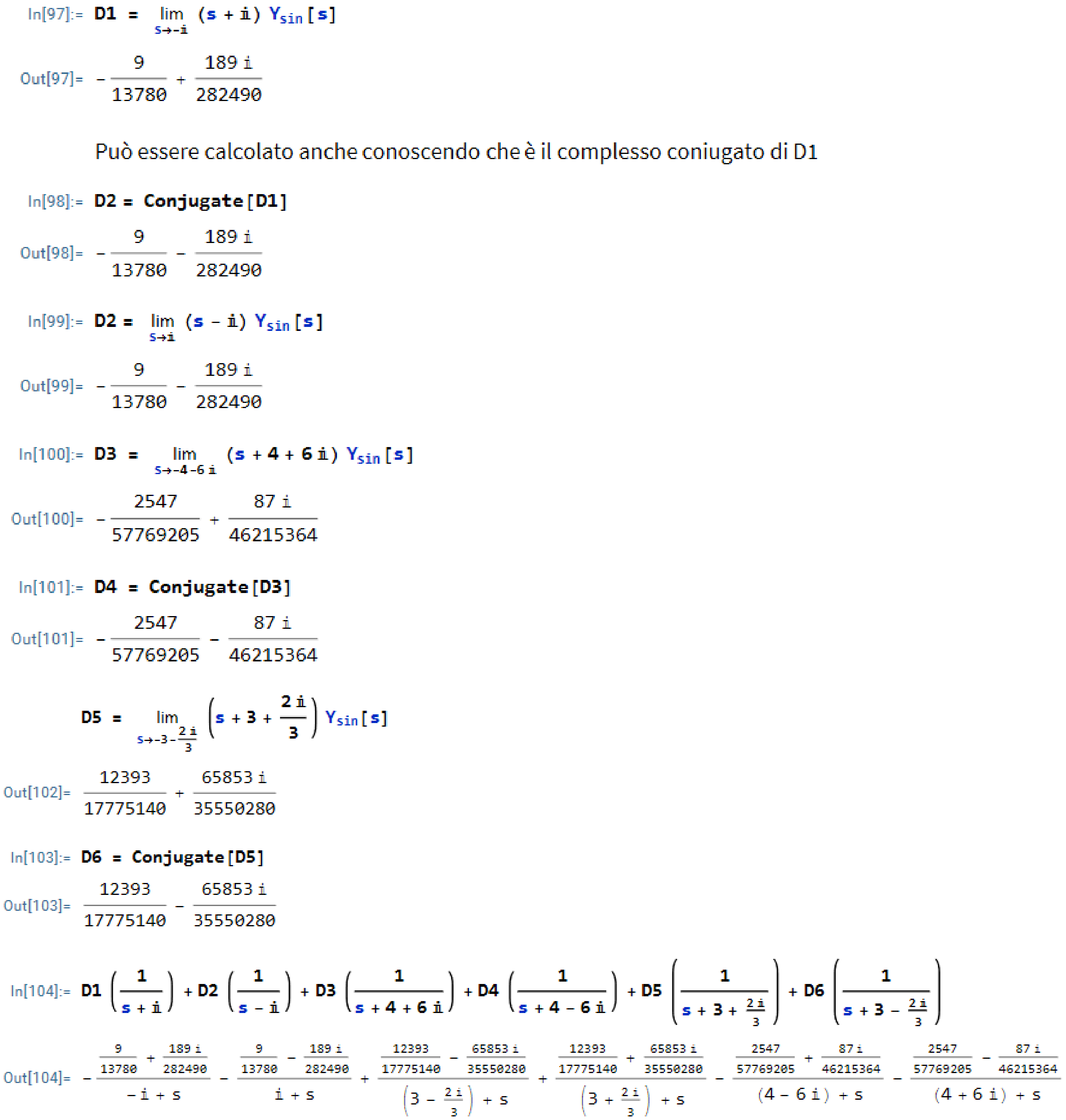
Similmente a quanto fatto per il punto precedente procedo alla scomposizione in fratti semplici per poi applicare la formula di Heaviside semplificata per portare nel dominio del tempo l'espressione appena ottenuta:



In[96]:= $D1\left(\frac{1}{s + i}\right) + D2\left(\frac{1}{s - i}\right) + D3\left(\frac{1}{s + 4 + 6\, i}\right) + D4\left(\frac{1}{s + 4 - 6\, i}\right) + D5\left(\frac{1}{s + 3 + \frac{2\, i}{3}}\right) + D6\left(\frac{1}{s + 3 - \frac{2\, i}{3}}\right)$

Out[96]= $\frac{D2}{-i + s} + \frac{D1}{i + s} + \frac{D6}{\left(3 - \frac{2\, i}{3}\right) + s} + \frac{D5}{\left(3 + \frac{2\, i}{3}\right) + s} + \frac{D4}{(4 - 6\, i) + s} + \frac{D3}{(4 + 6\, i) + s}$

Si generano 6 fratti semplici, di cui 4 legati algebricamente ai modi naturali e 2 legati all'ingresso. Procedo nel calcolo dei coefficienti incogniti:



In[97]:= $D1 = \lim_{s\to -i} (s + i)\, Y_{sin}[s]$

Out[97]= $-\frac{9}{13780} + \frac{189\, i}{282490}$

Può essere calcolato anche conoscendo che è il complesso coniugato di D1

In[98]:= **D2 = Conjugate[D1]**

Out[98]= $-\frac{9}{13780} - \frac{189\, i}{282490}$

In[99]:= $D2 = \lim_{s\to i} (s - i)\, Y_{sin}[s]$

Out[99]= $-\frac{9}{13780} - \frac{189\, i}{282490}$

In[100]:= $D3 = \lim_{s\to -4-6i} (s + 4 + 6\, i)\, Y_{sin}[s]$

Out[100]= $-\frac{2547}{57769205} + \frac{87\, i}{46215364}$

In[101]:= **D4 = Conjugate[D3]**

Out[101]= $-\frac{2547}{57769205} - \frac{87\, i}{46215364}$

$D5 = \lim_{s\to -3-\frac{2i}{3}} \left(s + 3 + \frac{2\, i}{3}\right) Y_{sin}[s]$

Out[102]= $\frac{12393}{17775140} + \frac{65853\, i}{35550280}$

In[103]:= **D6 = Conjugate[D5]**

Out[103]= $\frac{12393}{17775140} - \frac{65853\, i}{35550280}$

In[104]:= $D1\left(\frac{1}{s + i}\right) + D2\left(\frac{1}{s - i}\right) + D3\left(\frac{1}{s + 4 + 6\, i}\right) + D4\left(\frac{1}{s + 4 - 6\, i}\right) + D5\left(\frac{1}{s + 3 + \frac{2\, i}{3}}\right) + D6\left(\frac{1}{s + 3 - \frac{2\, i}{3}}\right)$

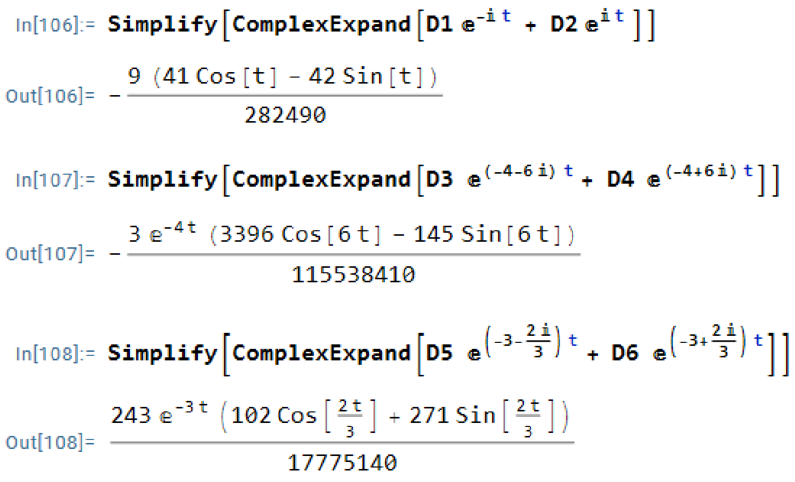
Out[104]= $-\frac{\frac{9}{13780} + \frac{189\, i}{282490}}{-i + s} - \frac{\frac{9}{13780} - \frac{189\, i}{282490}}{i + s} + \frac{\frac{12393}{17775140} - \frac{65853\, i}{35550280}}{\left(3 - \frac{2\, i}{3}\right) + s} + \frac{\frac{12393}{17775140} + \frac{65853\, i}{35550280}}{\left(3 + \frac{2\, i}{3}\right) + s} - \frac{\frac{2547}{57769205} + \frac{87\, i}{46215364}}{(4 - 6\, i) + s} - \frac{\frac{2547}{57769205} - \frac{87\, i}{46215364}}{(4 + 6\, i) + s}$

Ottengo l'espressione della risposta forzata antitrasformando tutti gli elementi così ottenuti utilizzando il risultato noto:

$$e^{at}1(t) := \frac{1}{s - a}$$

$$Y_f(t) = \left(\left(-\frac{9}{13780} + \frac{189i}{282490}\right) e^{-it}\, 1(t) + \left(-\frac{9}{13780} - \frac{189i}{282490}\right) e^{it}\, 1(t) + \left(-\frac{2547}{57769205} + \frac{87i}{46215364}\right) e^{(-4-6i)t}\, 1(t) + \left(-\frac{2547}{57769205} - \frac{87i}{46215364}\right) e^{(-4+6i)t}\, 1(t) + \left(\frac{12393}{17775140} + \frac{65853i}{35550280}\right) e^{-\left(3+\frac{2i}{3}\right)t}\, 1(t) + \left(\frac{12393}{17775140} - \frac{65853i}{35550280}\right) e^{\left(-3+\frac{2i}{3}\right)t}\, 1(t)\right)$$

Calcolo ora la risposta forzata scrivendola come la somma dei soli contributi reali:



In[106]:= `Simplify[ComplexExpand[D1 ⅇ^(-ⅈ t) + D2 ⅇ^(ⅈ t)]]`

Out[106]=
$$-\frac{9\,(41\,\text{Cos}[t]-42\,\text{Sin}[t])}{282490}$$

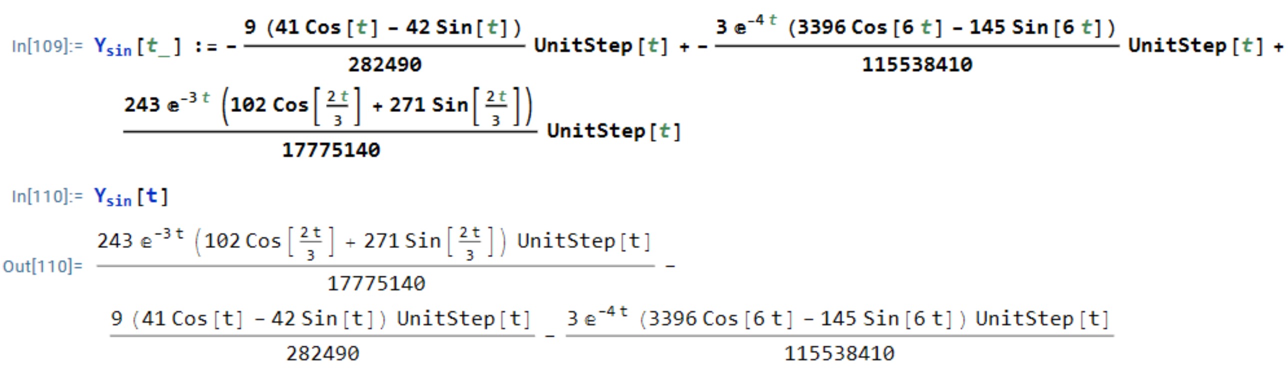
In[107]:= `Simplify[ComplexExpand[D3 ⅇ^((-4-6 ⅈ) t) + D4 ⅇ^((-4+6 ⅈ) t)]]`

Out[107]=
$$-\frac{3\,e^{-4t}\,(3396\,\text{Cos}[6\,t]-145\,\text{Sin}[6\,t])}{115538410}$$

In[108]:= `Simplify[ComplexExpand[D5 ⅇ^((-3-2ⅈ/3) t) + D6 ⅇ^((-3+2ⅈ/3) t)]]`

Out[108]=
$$\frac{243\,e^{-3t}\left(102\,\text{Cos}\left[\frac{2t}{3}\right]+271\,\text{Sin}\left[\frac{2t}{3}\right]\right)}{17775140}$$

Ottenendo:

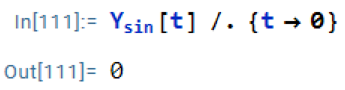


In[109]:=
$$Y_{\text{sin}}[t\_]:=-\frac{9\,(41\,\text{Cos}[t]-42\,\text{Sin}[t])}{282490}\,\text{UnitStep}[t]+-\frac{3\,e^{-4t}\,(3396\,\text{Cos}[6\,t]-145\,\text{Sin}[6\,t])}{115538410}\,\text{UnitStep}[t]+\frac{243\,e^{-3t}\left(102\,\text{Cos}\left[\frac{2t}{3}\right]+271\,\text{Sin}\left[\frac{2t}{3}\right]\right)}{17775140}\,\text{UnitStep}[t]$$

In[110]:= $Y_{\text{sin}}[t]$

Out[110]=
$$\frac{243\,e^{-3t}\left(102\,\text{Cos}\left[\frac{2t}{3}\right]+271\,\text{Sin}\left[\frac{2t}{3}\right]\right)\text{UnitStep}[t]}{17775140}-\frac{9\,(41\,\text{Cos}[t]-42\,\text{Sin}[t])\,\text{UnitStep}[t]}{282490}-\frac{3\,e^{-4t}\,(3396\,\text{Cos}[6\,t]-145\,\text{Sin}[6\,t])\,\text{UnitStep}[t]}{115538410}$$

Come verifica del risultato valuto la risposta forzata in 0



In[111]:= $Y_{\text{sin}}[t]$ `/. {t → 0}`

Out[111]= 0

Risposta a regime del segnale periodico elementare

Avendo in ingresso un segnale periodico elementare, anche in uscita avrò un segnale periodico elementare. Quest'ultima avrà la stessa pulsazione del segnale in ingresso ma con una distorsione su ampiezza e fase.

Volendo valutare la risposta a regime, considero dunque solo ampiezza X e fase φ

$$Y_{ss}(t)=\left(-\frac{9\,Cos[t]}{6890}+\frac{189\,Sin[t]}{141245}\right)=X\sin(\omega\,t+\varphi)$$

Scrittura in forma AMPLITUDE-FASE

Ometto 1(t) perché il transitorio si è esaurito

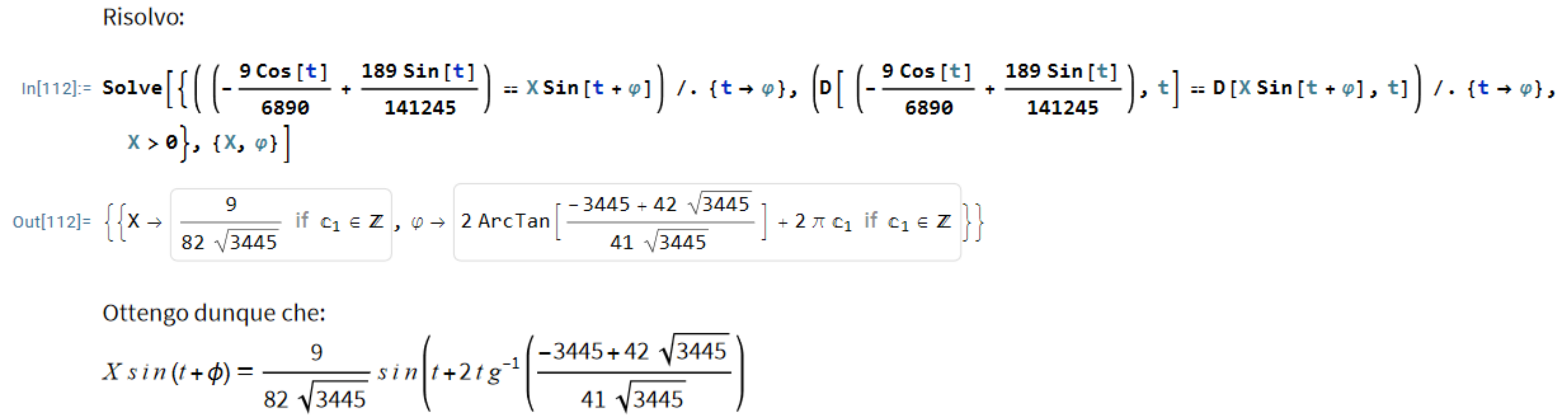
Dovendo trovare il valore di due incognite in una sola equazione, procedo alla valutazione dell'espressione suddividendola in due equazioni:

1. La prima di ottiene valutando in zero in legame

$$-\left(\frac{9\cos(t)}{6890}+\frac{189\sin(t)}{141245}\right)|_{t=0} = X\sin(t+\varphi)\,|_{t=0}$$

2. La seconda valutando in zero le rispettive derivate prime

$$\frac{d}{dt}\left(-\frac{9\cos(t)}{6890}+\frac{189\sin(t)}{141245}\right)|_{t=0} = \frac{d}{dt}(X\sin(t+\varphi))|_{t=0}$$



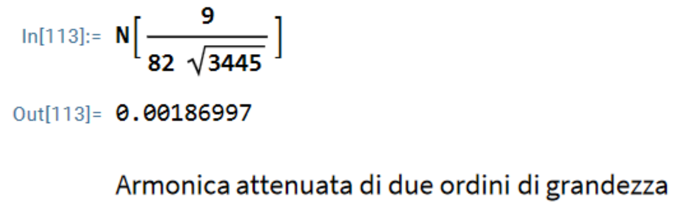
Risolvo:

```
In[112]:= Solve[{((-9 Cos[t]/6890 + 189 Sin[t]/141245) == X Sin[t + φ]) /. {t → φ}, (D[(-9 Cos[t]/6890 + 189 Sin[t]/141245), t] == D[X Sin[t + φ], t]) /. {t → φ},
   X > 0}, {X, φ}]

Out[112]= {{X → 9/(82 √3445) if c₁ ∈ ℤ , φ → 2 ArcTan[(-3445 + 42 √3445)/(41 √3445)] + 2 π c₁ if c₁ ∈ ℤ }}
```

Ottengo dunque che:

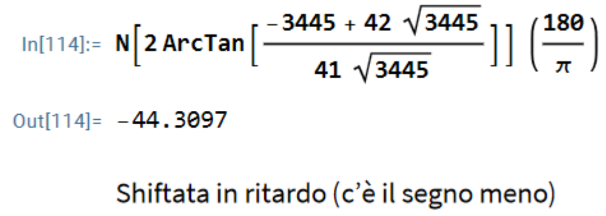
$$X\,sin\,(t+\phi)=\frac{9}{82\sqrt{3445}}\,sin\left(t+2\,tg^{-1}\left(\frac{-3445+42\sqrt{3445}}{41\sqrt{3445}}\right)\right)$$

Utilizzo il comando N[ ] per trasformare quanto ottenuto in numero decimale



```
In[113]:= N[9/(82 √3445)]

Out[113]= 0.00186997
```

Armonica attenuata di due ordini di grandezza



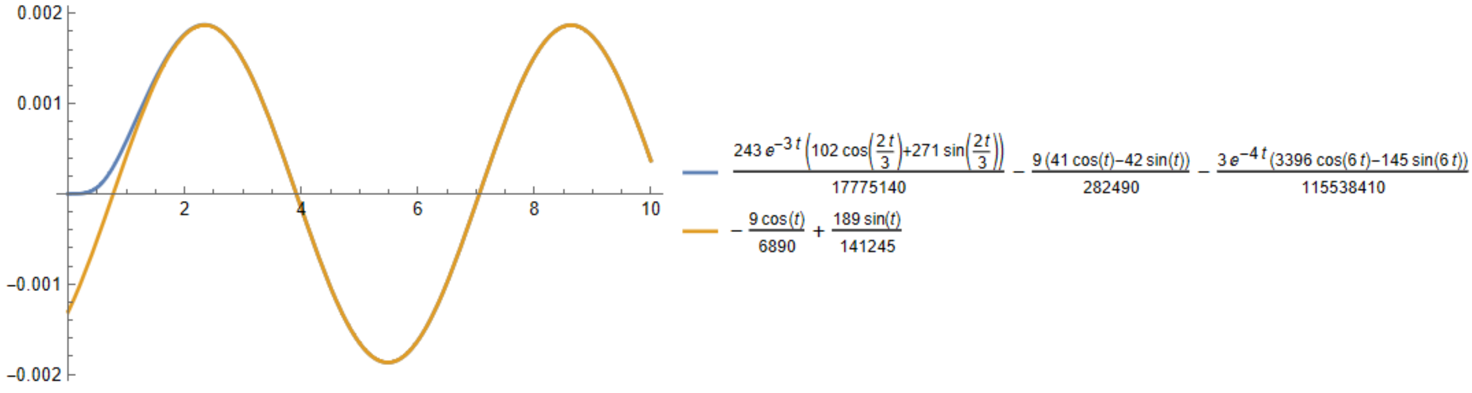
```
In[114]:= N[2 ArcTan[(-3445 + 42 √3445)/(41 √3445)]] (180/π)

Out[114]= -44.3097
```

Shiftata in ritardo (c'è il segno meno)

Grafico la risposta forzata e la risposta a regime:

In[115]:=
$$\text{Plot}\left[\left\{\frac{243\,e^{-3\,t}\left(102\,\text{Cos}\left[\frac{2\,t}{3}\right]+271\,\text{Sin}\left[\frac{2\,t}{3}\right]\right)}{17775140}-\frac{9\,(41\,\text{Cos}[t]-42\,\text{Sin}[t])}{282490}-\frac{3\,e^{-4\,t}\,(3396\,\text{Cos}[6\,t]-145\,\text{Sin}[6\,t])}{115538410},\ -\frac{9\,\text{Cos}[t]}{6890}+\frac{189\,\text{Sin}[t]}{141245}\right\},\ \{t,0,10\},\ \text{PlotLegends}\to\text{"Expressions"}\right]$$

Out[115]=



7. Modello ARMA equivalente e risposta alla rampa unitaria

MODELLO ARMA - AUTO REGRESSING MOVING AVERAGE

Partendo dal sistema SISO LTI-TC scritto nella forma Ingresso-Stato-Uscita (I/S/U) nella forma:

$$\begin{cases} \dot{x} = A \cdot x(t) + B \cdot u(t) \\ \dot{y} = C \cdot x(t) + D \cdot u(t) \end{cases}$$

Determino il suo modello arma equivalente sapendo che:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

Valuto questa relazione come un'identità

$$\frac{9}{4420 + 3488s + 985s^2 + 126s^3 + 9s^4} = \frac{\mathrm{Y_f}(s)}{U(s)}$$

a seguito di alcune manipolazioni algebriche posso scrivere come:

$$4420\mathrm{Y_f}(s) + 3488\mathrm{sY_f}(s) + 985s^2\mathrm{Y_f}(s) + 126s^3\mathrm{Y_f}(s) + 9s^4\mathrm{Y_f}(s) = 9U(s)$$

Ottenuta questa relazione nel dominio della variabile complessa s, voglio riportarla nel dominio del tempo. Per farlo sfrutto l'estensione del teorema della derivata per la L-Trasformata, che consente di valutare la Trasformata di Laplace della derivata di ordine n di una funzione

$$\mathcal{L}\left(\mathcal{F}^{(n)}(t)\right) = s^{\mathrm{n}}\mathrm{F}(s) - s^{n-1}F(0) - s^{n-2}F(0) - \cdots - \mathrm{sF}^{n-2}(0) - F^{n-1}(0)$$

Ottengo:

$$\dot{y} = L^{-1}[s\,Y(s)]$$

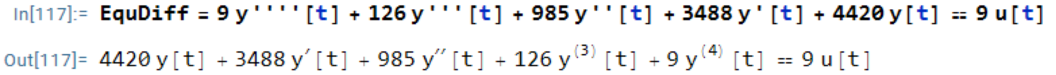
$$\ddot{y} = L^{-1}\left[s^2\,Y(s)\right]$$

$$\dddot{y} = L^{-1}\left[s^3\,Y(s)\right]$$

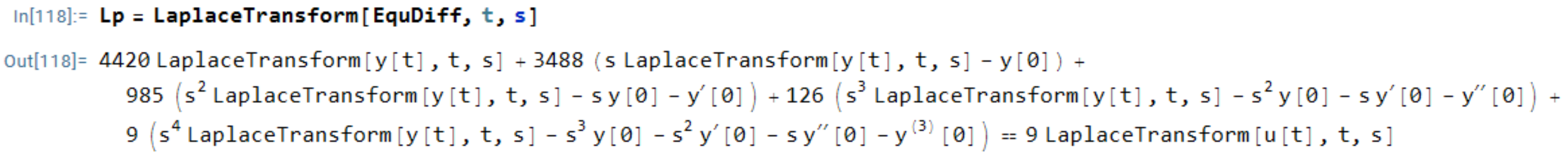
$$\ddddot{y} = L^{-1}\left[s^4\,Y(s)\right]$$

$9\,\ddddot{y}(t) + 126\,\dddot{y}(t) + 985\,\ddot{y}(t) + 3488\,\dot{y}(t) + 4420\,y(t) = 9\,u(t)$ rappresentazione I/U del sistema

Immetto in Mathematica l'equazione differenziale e ne calcolo la L-Trasformata:



```
In[117]:= EquDiff = 9 y''''[t] + 126 y'''[t] + 985 y''[t] + 3488 y'[t] + 4420 y[t] == 9 u[t]
Out[117]= 4420 y[t] + 3488 y′[t] + 985 y″[t] + 126 y(3)[t] + 9 y(4)[t] == 9 u[t]
```



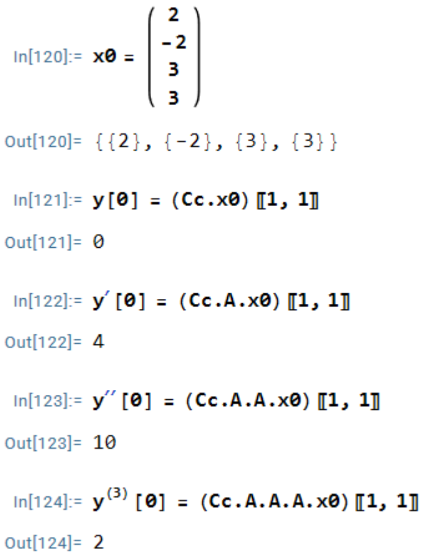
```
In[118]:= Lp = LaplaceTransform[EquDiff, t, s]
Out[118]= 4420 LaplaceTransform[y[t], t, s] + 3488 (s LaplaceTransform[y[t], t, s] - y[0]) +
            985 (s2 LaplaceTransform[y[t], t, s] - s y[0] - y′[0]) + 126 (s3 LaplaceTransform[y[t], t, s] - s2 y[0] - s y′[0] - y″[0]) +
            9 (s4 LaplaceTransform[y[t], t, s] - s3 y[0] - s2 y′[0] - s y″[0] - y(3)[0]) == 9 LaplaceTransform[u[t], t, s]
```

Ottenendo:

$$Lp = 4420Y[s] + 3488(-y[0] + sY[s]) + 985(-sy[0] + s^2Y[s] - y'[0]) + 126(-s^2y[0] + s^3Y[s] - sy'[0] - y''[0]) + 9(-s^3y[0] + s^4Y[s] - s^2y'[0] - sy''[0] - y^{(3)}[0]) == 9U[s]$$

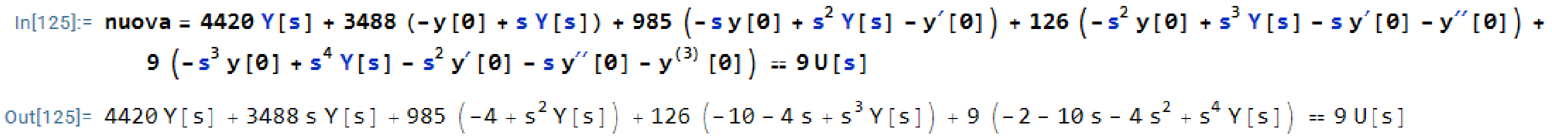
Arrivati a questo punto, devo effettuare un "matching " tra le condizioni iniziali e l'uscita:

$$y(0) = C\,x(t) + D\,u(t)\,|_{t=0} = C\,x_0$$
$$\dot{y}(0) = C\,(A\,x(t) + B\,u(t))\,|_{t=0} = C\,A\,x_0$$
$$\ddot{y}(0) = C\,A^2\,x_0$$
$$\dddot{y}(0) = C\,A^3\,x_0$$

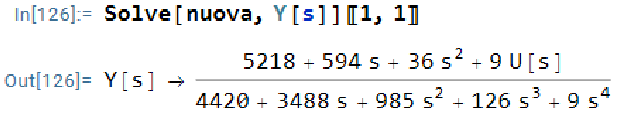


```
In[120]:= x0 = (2
                -2
                 3
                 3)
Out[120]= {{2}, {-2}, {3}, {3}}

In[121]:= y[0] = (Cc.x0)[[1, 1]]
Out[121]= 0

In[122]:= y′[0] = (Cc.A.x0)[[1, 1]]
Out[122]= 4

In[123]:= y″[0] = (Cc.A.A.x0)[[1, 1]]
Out[123]= 10

In[124]:= y(3)[0] = (Cc.A.A.A.x0)[[1, 1]]
Out[124]= 2
```

Ricalcolo Lp sostituendo i termini appena trovati e “isolo” il termine Y(s):



```
In[125]:= nuova = 4420 Y[s] + 3488 (-y[0] + s Y[s]) + 985 (-s y[0] + s^2 Y[s] - y′[0]) + 126 (-s^2 y[0] + s^3 Y[s] - s y′[0] - y″[0]) +
          9 (-s^3 y[0] + s^4 Y[s] - s^2 y′[0] - s y″[0] - y^(3) [0]) == 9 U[s]

Out[125]= 4420 Y[s] + 3488 s Y[s] + 985 (-4 + s^2 Y[s]) + 126 (-10 - 4 s + s^3 Y[s]) + 9 (-2 - 10 s - 4 s^2 + s^4 Y[s]) == 9 U[s]
```

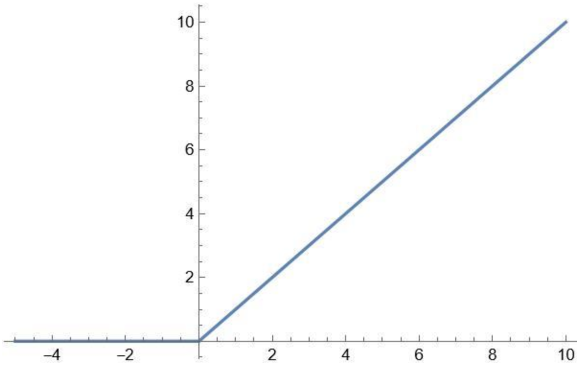


```
In[126]:= Solve[nuova, Y[s]]⟦1, 1⟧

Out[126]= Y[s] → (5218 + 594 s + 36 s^2 + 9 U[s]) / (4420 + 3488 s + 985 s^2 + 126 s^3 + 9 s^4)
```

RISPOSTA ALLA RAMPA UNITARIA

Il segnale polinomiale rampa è definito come:

$$u(t) = \begin{cases} t & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$



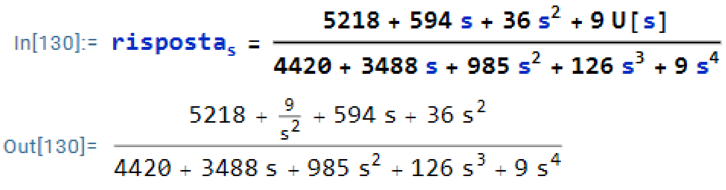
La L-Trasformata della rampa unitaria è determinata come:

$$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{at} 1(t) := \frac{1}{(s-a)^n}$$

Considerando a = 0 e n = 2:

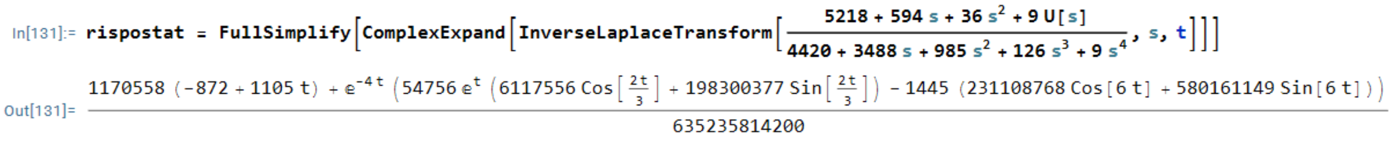
$$t \cdot 1(t) := \frac{1}{s^2}$$

Partendo dalla Y(s) calcolata sopra determino la risposta alla rampa nel dominio della variabile complessa s:



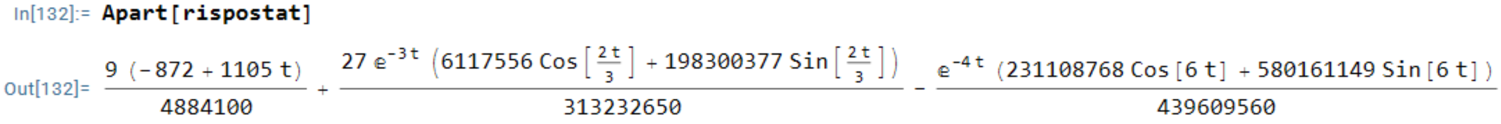
```
In[130]:= risposta_s = (5218 + 594 s + 36 s^2 + 9 U[s]) / (4420 + 3488 s + 985 s^2 + 126 s^3 + 9 s^4)

Out[130]= (5218 + 9/s^2 + 594 s + 36 s^2) / (4420 + 3488 s + 985 s^2 + 126 s^3 + 9 s^4)
```

La riscrivo nel dominio del tempo:



```
In[131]:= rispostat = FullSimplify[ComplexExpand[InverseLaplaceTransform[(5218 + 594 s + 36 s^2 + 9 U[s]) / (4420 + 3488 s + 985 s^2 + 126 s^3 + 9 s^4), s, t]]]

Out[131]= (1170558 (-872 + 1105 t) + e^(-4 t) (54756 e^t (6117556 Cos[2t/3] + 198300377 Sin[2t/3]) - 1445 (231108768 Cos[6 t] + 580161149 Sin[6 t]))) / 635235814200
```

Utilizzando il comando Apart riesco a scrivere l'espressione appena trovata come somma di coefficienti con denominatore minimo. Riesco così a mettere in evidenza la risposta a regime e la risposta transitoria



```
In[132]:= Apart[rispostat]
```

Out[132]=
$$\frac{9\,(-872+1105\,t)}{4884100}+\frac{27\,e^{-3\,t}\left(6117556\,\mathrm{Cos}\left[\frac{2\,t}{3}\right]+198300377\,\mathrm{Sin}\left[\frac{2\,t}{3}\right]\right)}{313232650}-\frac{e^{-4\,t}\,(231108768\,\mathrm{Cos}[6\,t]+580161149\,\mathrm{Sin}[6\,t])}{439609560}$$

- Risposta a regime:

$$\frac{9(-872+1105t)}{4884100}$$

- Risposta transitoria:

$$\frac{27e^{-3t}(6117556\mathrm{Cos}(\frac{2t}{3})+198300377\mathrm{Sin}(\frac{2t}{3}))}{313232650}-\frac{e^{-4t}(231108768\mathrm{Cos}(6t)+580161149\mathrm{Sin}(6t))}{439609560}$$

8. Stato iniziale x_0 tale che la risposta a gradino coincida con il valore di regime

Costruisco la risposta libera per compensare istante per istante la risposta transitoria.

Ricordando che:

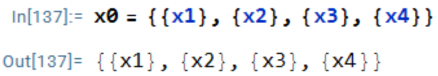
$$Risposta\ =\ risposta\ libera\ +\ risposta\ forzata$$

$$Risposta\ forzata\ =\ risposta\ transitoria\ +\ risposta\ a\ regime$$

Posso "spacchettare" la risposta scrivendola come:

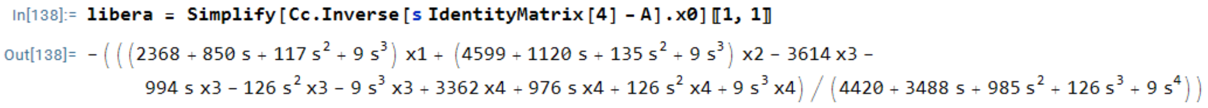
$$Risposta\ =\ risposta\ libera\ +\ risposta\ transitoria\ +\ risposta\ a\ regime$$

Scrivo il vettore incognito dello stato iniziale: x1,x2,x3,x4 rappresentano le incognite da trovare



```
In[137]:= x0 = {{x1}, {x2}, {x3}, {x4}}
Out[137]= {{x1}, {x2}, {x3}, {x4}}
```

Associo la risposta libera in s ad una variabile: $y(s)=C(sI-A)^{-1}x_0$

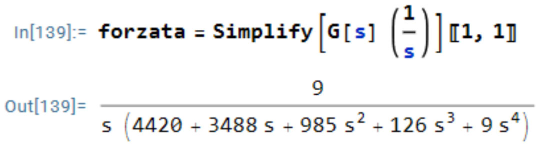


```
In[138]:= libera = Simplify[Cc.Inverse[s IdentityMatrix[4] - A].x0]〚1, 1〛
```

Out[138]=
$$-\left(\left(\left(2368+850\,s+117\,s^2+9\,s^3\right)x1+\left(4599+1120\,s+135\,s^2+9\,s^3\right)x2-3614\,x3-994\,s\,x3-126\,s^2\,x3-9\,s^3\,x3+3362\,x4+976\,s\,x4+126\,s^2\,x4+9\,s^3\,x4\right)\Big/\left(4420+3488\,s+985\,s^2+126\,s^3+9\,s^4\right)\right)$$

Al numeratore ottengo un polinomio al più di terzo grado che dipende dai coefficienti incogniti delle condizioni iniziali. Al denominatore ho esattamente il polinomio caratteristico del sistema/ denominatore della FdT (che in questo caso coincidono).

Associo la risposta forzata al gradino unitario:

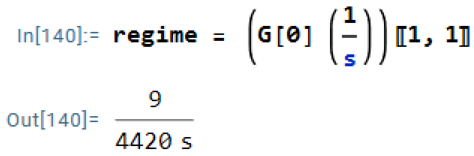


```
In[139]:= forzata = Simplify[G[s] (1/s)][[1, 1]]

Out[139]=            9
          s (4420 + 3488 s + 985 s^2 + 126 s^3 + 9 s^4)
```

Definisco la risposta a regime, come già evidenziato nel calcolo della risposta al gradino:

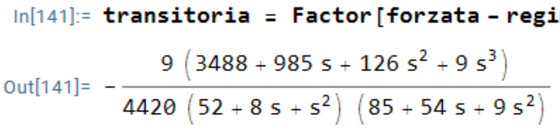
$$\lim_{s\to 0} s \cdot Y_f(s) = \lim_{s\to 0} s \cdot G(s) \cdot \frac{1}{s} = G(0)$$

G(0) viene anche detto **guadagno statico del sistema**: rappresenta il livello su cui si assesta la risposta forzata a transitorio esaurito



```
In[140]:= regime = (G[0] (1/s))[[1, 1]]

Out[140]=   9
          4420 s
```

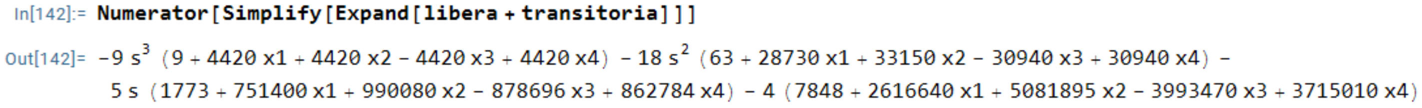
Calcolo ora la risposta transitoria, cioè la componente della risposta forzata che dipende dai modi naturali:



```
In[141]:= transitoria = Factor[forzata - regime]

Out[141]= -        9 (3488 + 985 s + 126 s^2 + 9 s^3)
            4420 (52 + 8 s + s^2) (85 + 54 s + 9 s^2)
```

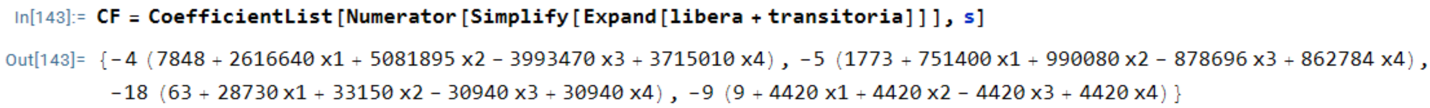
Effettuando questa operazione al denominatore va via il fattore “s”: scompare dunque il polo legato all’ingresso.

Sommo ora libera e transitoria e ne estraggo il numeratore: voglio rendere la frazione identicamente nulla e dunque per farlo devo porre il numeratore uguale a 0



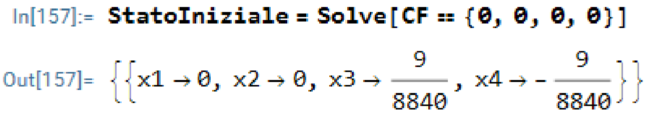
```
In[142]:= Numerator[Simplify[Expand[libera + transitoria]]]

Out[142]= -9 s^3 (9 + 4420 x1 + 4420 x2 - 4420 x3 + 4420 x4) - 18 s^2 (63 + 28730 x1 + 33150 x2 - 30940 x3 + 30940 x4) -
            5 s (1773 + 751400 x1 + 990080 x2 - 878696 x3 + 862784 x4) - 4 (7848 + 2616640 x1 + 5081895 x2 - 3993470 x3 + 3715010 x4)
```

Ottengo un polinomio di terzo grado con 4 coefficienti. Ho dunque 4 incognite in 4 equazioni. Applico il principio di identità dei polinomi:



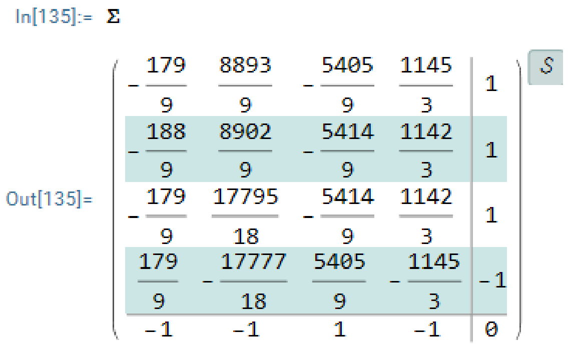
```
In[143]:= CF = CoefficientList[Numerator[Simplify[Expand[libera + transitoria]]], s]

Out[143]= {-4 (7848 + 2616640 x1 + 5081895 x2 - 3993470 x3 + 3715010 x4), -5 (1773 + 751400 x1 + 990080 x2 - 878696 x3 + 862784 x4),
           -18 (63 + 28730 x1 + 33150 x2 - 30940 x3 + 30940 x4), -9 (9 + 4420 x1 + 4420 x2 - 4420 x3 + 4420 x4)}
```

Ottengo un insieme di quattro elementi, che a crescere rappresentano s_0, s, s^2, s^3. Eguaglio il set appena ottenuto (CF) ad {0,0,0,0}:



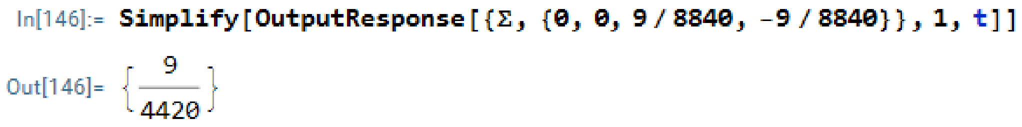
```
In[157]:= StatoIniziale = Solve[CF == {0, 0, 0, 0}]

Out[157]= {{x1 → 0, x2 → 0, x3 → 9/8840, x4 → -9/8840}}
```

Come prova del risultato ottenuto, calcolo la risposta a partire dallo stato iniziale così determinato, valutando se effettivamente viene generata solo la risposta a regime



```
In[135]:= Σ
```

Out[135]=
$$\left(\begin{array}{cccc|c} -\frac{179}{9} & \frac{8893}{9} & -\frac{5405}{9} & \frac{1145}{3} & 1 \\ -\frac{188}{9} & \frac{8902}{9} & -\frac{5414}{9} & \frac{1142}{3} & 1 \\ -\frac{179}{9} & \frac{17795}{18} & -\frac{5414}{9} & \frac{1142}{3} & 1 \\ \frac{179}{9} & -\frac{17777}{18} & \frac{5405}{9} & -\frac{1145}{3} & -1 \\ \hline -1 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)^{\mathcal{S}}$$

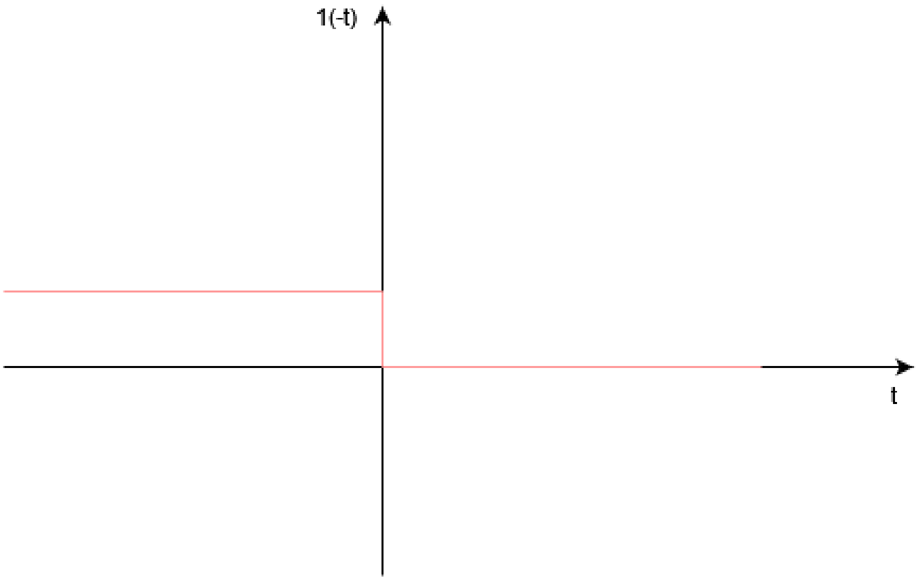


```
In[146]:= Simplify[OutputResponse[{Σ, {0, 0, 9 / 8840, -9 / 8840}}, 1, t]]
```

Out[146]= $\left\{\frac{9}{4420}\right\}$

9. Risposta al segnale $u(t) = 1(-t)$

Il segnale rappresenta un gradino con ascissa “ribaltata”



Ha senso valutare la risposta a questo segnale solo se è garantita l’ipotesi di stazionarietà, con il sistema che deve essere BIBO stabile (o in generale deve essere asintoticamente stabile).

Il comportamento di questo segnale può essere analizzato mediante un costrutto piece-wise del tipo:

$$y(t) = \begin{cases} y_{ss}(t) & t < 0 \\ y_{\text{Libera}}(t) & t \geq 0 \end{cases}$$

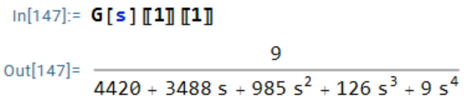
Per t = 0 viene “staccato” l’ingresso dal sistema: si ottiene dunque la risposta senza ingresso, ma sempre a partire dalle condizioni iniziali legate allo switch da 1 a 0.

Per continuità, in 0 valgono queste relazioni:

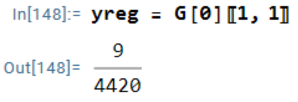
$$\begin{aligned} &y_{ss}(0^-) = y_{libera}(0^+) \\ &\dot{y}_{ss}(0^- = \dot{y}_{libera}(0^+) \\ &. \\ &. \\ &y_{ss}^{(n-1)}(0^-) = y_{libera}^{(n-1)}(0^+) \end{aligned}$$

Sfruttando la definizione piece-wise calcolo separatamente la risposta per $t < 0$ e poi per $t \geq 0$

- **$t < 0$: *risposta a regime***



```
In[147]:= G[s][[1]][[1]]

                            9
Out[147]= ─────────────────────────────────────────
          4420 + 3488 s + 985 s^2 + 126 s^3 + 9 s^4
```



```
In[148]:= yreg = G[0][[1, 1]]

           9
Out[148]= ────
          4420
```

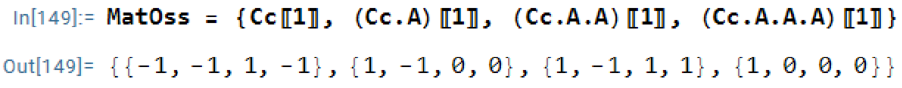
- **$t \geq 0$: *risposta libera in assenza di ingresso***

Effettuo il calcolo ponendo:

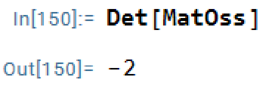
$$\begin{pmatrix} y(0) \\ \dot{y}(0) \\ \ddot{y}(0) \\ \dddot{y}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \end{pmatrix}$$

Dove $\ominus = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \end{pmatrix}$ è detta matrice di osservabilità

Nel caso considerato si arriva alla derivata di ordine 3, in quanto il sistema è del quarto ordine. Così facendo ottengo 4 equazioni in 4 incognite



```
In[149]:= MatOss = {Cc[[1]], (Cc.A)[[1]], (Cc.A.A)[[1]], (Cc.A.A.A)[[1]]}

Out[149]= {{-1, -1, 1, -1}, {1, -1, 0, 0}, {1, -1, 1, 1}, {1, 0, 0, 0}}
```



```
In[150]:= Det[MatOss]

Out[150]= -2
```

Determino lo stato iniziale come:

$$x_0 = \theta^{-1}\begin{pmatrix} \mathtt{G}\ (\mathtt{0}) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La matrice di osservabilità è infatti sempre invertibile se i poli coincidono con gli autovalori del sistema

```
In[151]:= CondIniziali = {{G[0]⟦1⟧⟦1⟧}, {0}, {0}, {0}}
```

$$\text{Out[151]=}\ \left\{\left\{\frac{9}{4420}\right\}, \{0\}, \{0\}, \{0\}\right\}$$

```
In[152]:= x0 = Inverse[MatOss].{{9 / 4420}, {0}, {0}, {0}}
```

$$\text{Out[152]=}\ \left\{\{0\}, \{0\}, \left\{\frac{9}{8840}\right\}, \left\{-\frac{9}{8840}\right\}\right\}$$

Calcolo la risposta libera in s: $y(s) = C(s\,I_n - A)^{-1}x_0$

```
In[153]:= yliberas = Simplify[(Cc.Inverse[s IdentityMatrix[4] - A].x0)⟦1⟧⟦1⟧]
```

$$\text{Out[153]=}\ \frac{9\left(3488+985\,s+126\,s^2+9\,s^3\right)}{4420\left(4420+3488\,s+985\,s^2+126\,s^3+9\,s^4\right)}$$

Questa funzione va ora antitrasformata per riportarla al dominio del tempo:

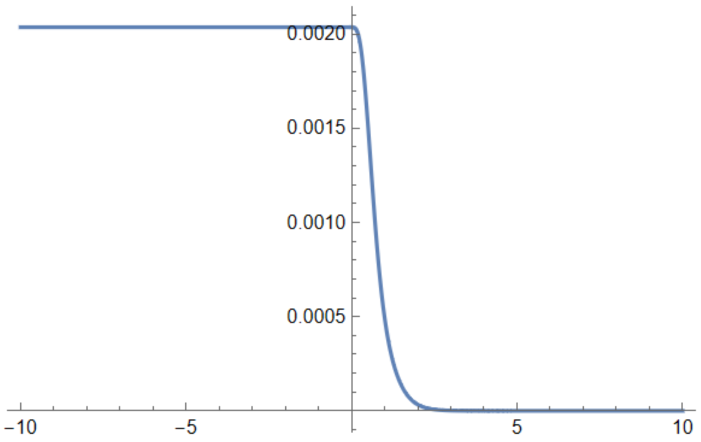
```
In[154]:= yliberat = FullSimplify[ComplexExpand[InverseLaplaceTransform[yliberas, s, t]]]
```

$$\text{Out[154]=}\ \frac{e^{-4t}\left(2106\,e^{t}\left(110\,\mathrm{Cos}\left[\frac{2t}{3}\right]+597\,\mathrm{Sin}\left[\frac{2t}{3}\right]\right)-51\left(717\,\mathrm{Cos}[6t]+946\,\mathrm{Sin}[6t]\right)\right)}{95812340}$$

Combinando le due ottengo infine:

```
In[155]:= y[t_] := { yreg       t < 0
                   { yliberat   t ≥ 0

In[156]:= Plot[y[t], {t, -10, 10}, PlotRange → All]
```

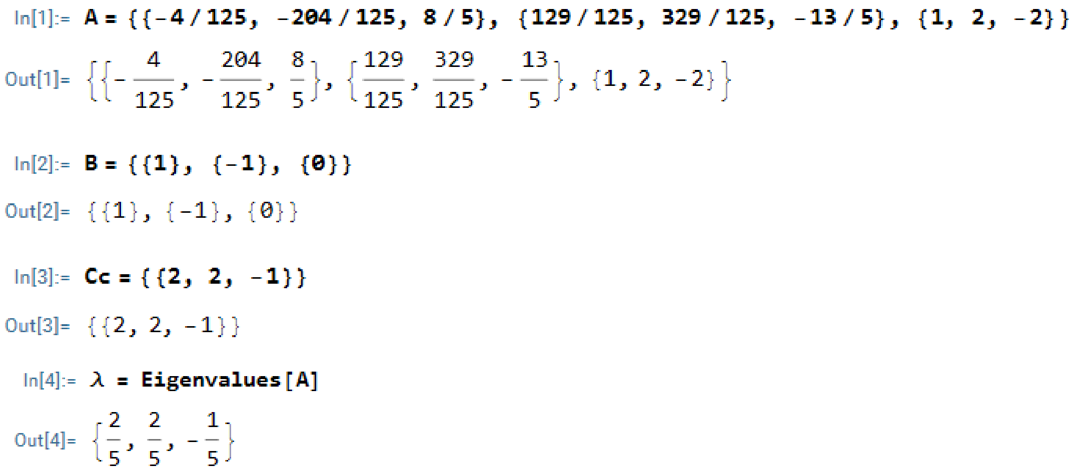
Out[156]=



Esercizio b: Sistema proprio LTI-TD

1. Modi naturali del sistema

Immetto le matrici in Mathematica e ne calcolo gli autovalori:



```
In[1]:= A = {{-4 / 125, -204 / 125, 8 / 5}, {129 / 125, 329 / 125, -13 / 5}, {1, 2, -2}}
Out[1]= {{-4/125, -204/125, 8/5}, {129/125, 329/125, -13/5}, {1, 2, -2}}

In[2]:= B = {{1}, {-1}, {0}}
Out[2]= {{1}, {-1}, {0}}

In[3]:= Cc = {{2, 2, -1}}
Out[3]= {{2, 2, -1}}

In[4]:= λ = Eigenvalues[A]
Out[4]= {2/5, 2/5, -1/5}
```

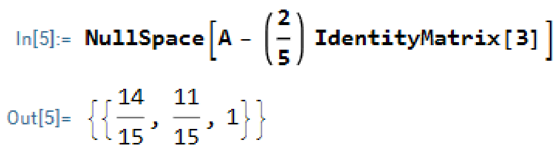
La matrice A presenta i seguenti autovalori:

- $\lambda_1 = \frac{2}{5}$ con molteplicità algebrica pari a 2
- $\lambda_2 = -\frac{1}{5}$ con molteplicità algebrica pari a 1

Poiché nello spettro della matrice A sono presenti autovalori multipli, è necessario verificare la diagonalizzabilità della matrice stessa. Una matrice è diagonalizzabile se per ogni autovalore di A vale che:

$$m.algebrica(\lambda) = m.geometrica(\lambda)$$

Calcolo la molteplicità geometrica. Il calcolo viene eseguito per i soli autovalori che presentano $m.a. > 1$



```
In[5]:= NullSpace[A - (2/5) IdentityMatrix[3]]
Out[5]= {{14/15, 11/15, 1}}
```

Ottenendo:

$$m.a.(\lambda_1) = 2 \neq m.g.(\lambda_1) = 1$$

Considerato che la molteplicità algebrica e geometrica non coincidono, devo utilizzare la forma canonica di Jordan. Utilizzando questa forma ottengo che la matrice $A \in R^{n\times n}$ è simile, per tramite di una opportuna matrice $T \in R^{n\times n}$ non singolare, ad una forma diagonale a blocchi:

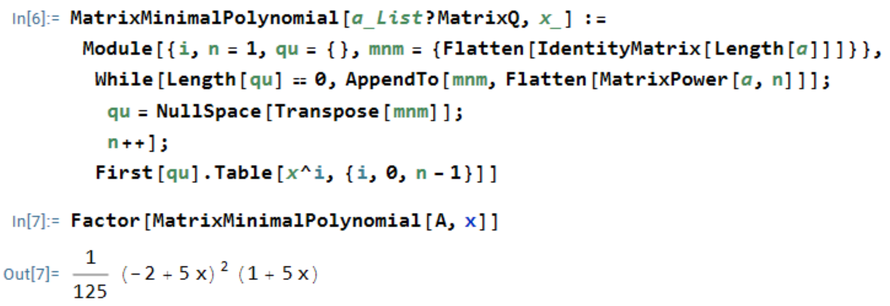
$$A \overset{T}{\sim} \Lambda_i$$

La matrice di Jordan è diagonale a blocchi e presente tanti blocchi quanti sono gli autovalori di A, scartando le molteplicità (due nel nostro caso):

$$\Lambda_j = \begin{pmatrix} \mathrm{j}_{k_1}(\lambda_1) & \dots & 0 \\ \dots & \mathrm{j}_{k_2}(\lambda_2) & \dots \\ 0 & \dots & \mathrm{j}_{k_n}(\lambda_s) \end{pmatrix}$$

e $j_{k_i}(\lambda_i)$ è il blocco di Jordan di dimensione k_i corrispondente all'autovalore λ_i

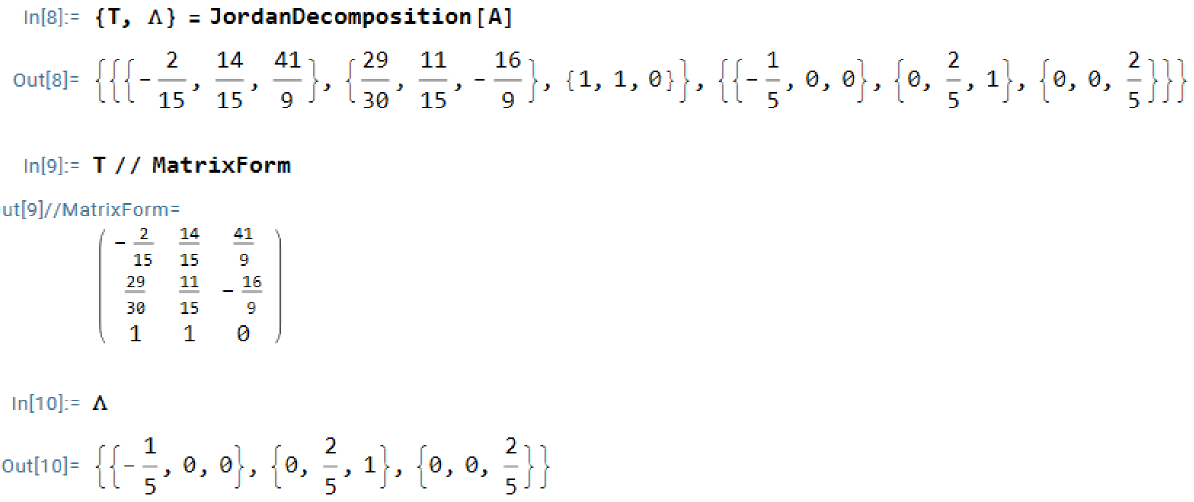
Procedo al calcolo del polinomio minimo per visualizzare il numero dei modi naturali:



```
In[6]:= MatrixMinimalPolynomial[a_List?MatrixQ, x_] :=
         Module[{i, n = 1, qu = {}, mnm = {Flatten[IdentityMatrix[Length[a]]]}},
          While[Length[qu] == 0, AppendTo[mnm, Flatten[MatrixPower[a, n]]];
           qu = NullSpace[Transpose[mnm]];
           n++];
          First[qu].Table[x^i, {i, 0, n - 1}]]

In[7]:= Factor[MatrixMinimalPolynomial[A, x]]

Out[7]= 1/125 (-2 + 5 x)^2 (1 + 5 x)
```

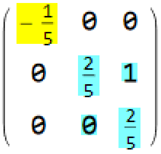
Avrò dunque 3 modi naturali (cioè tanti quanti il grado del polinomio minimo)

Ricavo la matrice di cambiamento di base T e la matrice di Jordan Λ



```
In[8]:= {T, Λ} = JordanDecomposition[A]

Out[8]= {{{-2/15, 14/15, 41/9}, {29/30, 11/15, -16/9}, {1, 1, 0}}, {{-1/5, 0, 0}, {0, 2/5, 1}, {0, 0, 2/5}}}

In[9]:= T // MatrixForm

Out[9]//MatrixForm=
 -2/15  14/15   41/9
 29/30  11/15  -16/9
   1      1      0

In[10]:= Λ

Out[10]= {{-1/5, 0, 0}, {0, 2/5, 1}, {0, 0, 2/5}}
```

Si identificano facilmente i blocchi di jordan sulla matrice:



$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

I modi generati sono successioni polinomial-potenza e possono essere individuati sulla diagonale della matrice $\widehat{\Lambda}$:

In[11]:= $\hat{\Lambda} = \texttt{MatrixPower}[\Lambda, k] \; // \; \texttt{MatrixForm}$

Out[11]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} \left(-\frac{1}{5}\right)^{k} & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{5}{2}\right)^{-k} & \left(\frac{5}{2}\right)^{1-k} k \\ 0 & 0 & \left(\frac{5}{2}\right)^{-k} \end{pmatrix}$$

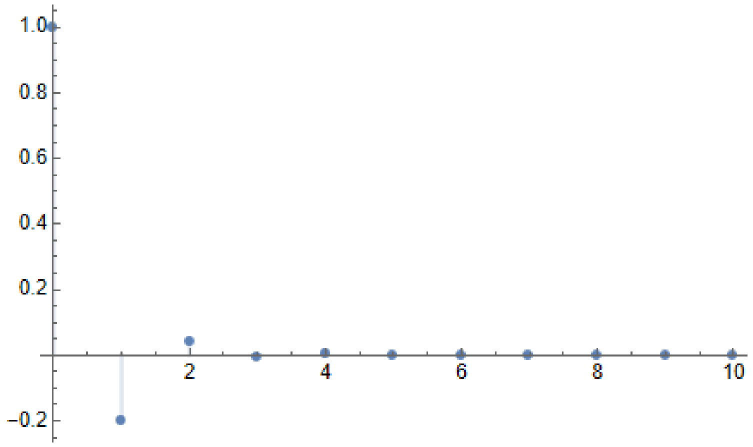
I modi naturali del sistema sanno quindi:

$$\left(-\frac{1}{5}\right)^{k}, \left(\frac{2}{5}\right)^{k}, k\left(\frac{2}{5}\right)^{k-1}$$

Li rappresento graficamente:

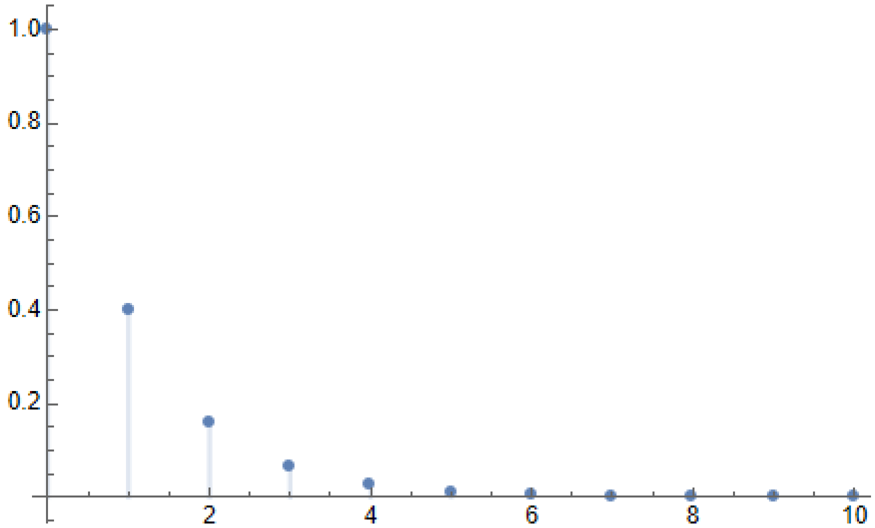
In[12]:= $\texttt{DiscretePlot}\left[\left(-\frac{1}{5}\right)^{k}, \{k, 0, 10\}, \texttt{PlotRange} \to \texttt{All}\right]$

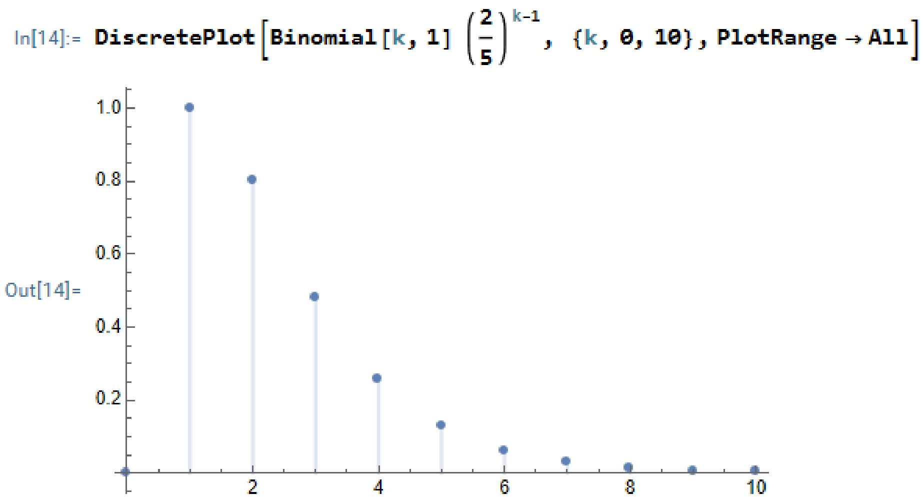
Out[12]=



In[13]:= $\texttt{DiscretePlot}\left[\left(\frac{2}{5}\right)^{k}, \{k, 0, 10\}, \texttt{PlotRange} \to \texttt{All}\right]$

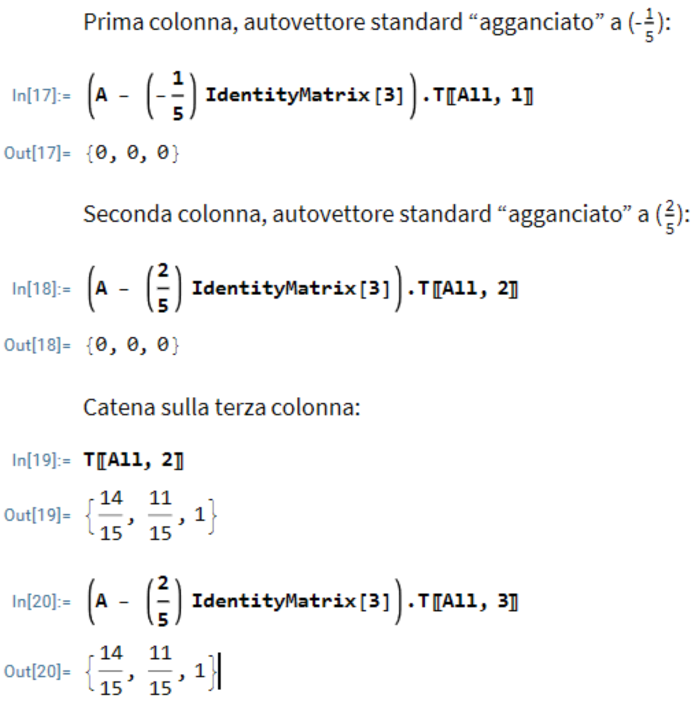
Out[13]=





```
In[14]:= DiscretePlot[Binomial[k, 1] (2/5)^(k-1), {k, 0, 10}, PlotRange → All]

Out[14]=
```

Conduco ulteriori analisi sulla matrice A e la matrice T: verifico che la prima e la seconda colonna di T siano autovettori standard della matrice A



Prima colonna, autovettore standard "agganciato" a ($-\frac{1}{5}$):

```
In[17]:= (A - (-1/5) IdentityMatrix[3]).T[[All, 1]]

Out[17]= {0, 0, 0}
```

Seconda colonna, autovettore standard "agganciato" a ($\frac{2}{5}$):

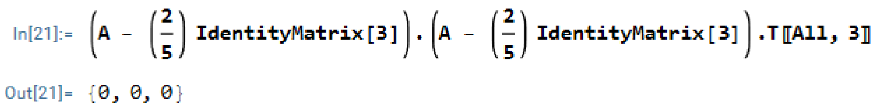
```
In[18]:= (A - (2/5) IdentityMatrix[3]).T[[All, 2]]

Out[18]= {0, 0, 0}
```

Catena sulla terza colonna:

```
In[19]:= T[[All, 2]]

Out[19]= {14/15, 11/15, 1}

In[20]:= (A - (2/5) IdentityMatrix[3]).T[[All, 3]]

Out[20]= {14/15, 11/15, 1}
```

L'ultimo autovettore preso in esame non è un autovettore standard, ma appartiene ad una catena di autovettori generalizzati di lunghezza 2 facenti riferimento all'autovalore $\frac{2}{5}$.

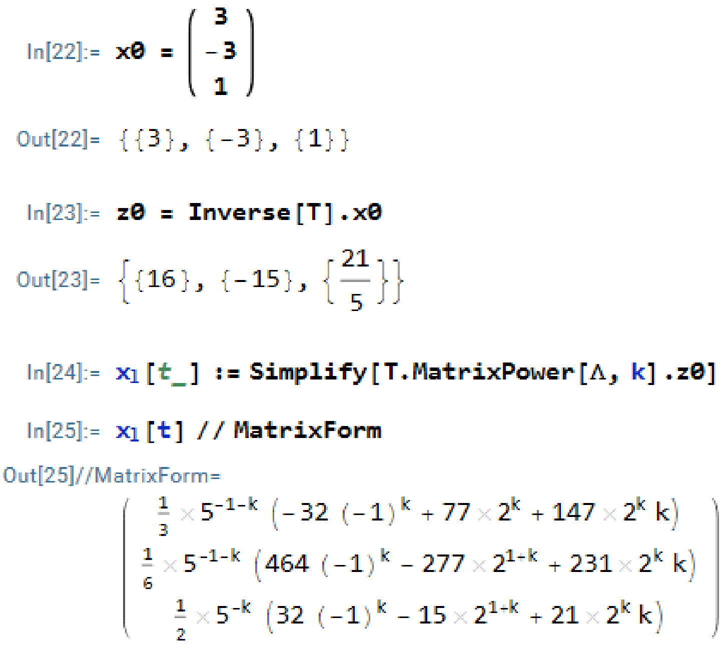
Per verificare quanto detto effettuo l'operazione: $(A - \lambda \cdot I)^k \cdot v_i = 0$, con k lunghezza della catena



```
In[21]:= (A - (2/5) IdentityMatrix[3]).(A - (2/5) IdentityMatrix[3]).T[[All, 3]]

Out[21]= {0, 0, 0}
```

2. Risposta libera

La risposta libera nello stato viene calcolata come: $x_l(k) = T \cdot \Lambda^k \cdot x_0$



In[22]:= x0 = $\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

```
Out[22]= {{3}, {-3}, {1}}
```

```
In[23]:= z0 = Inverse[T].x0
```

Out[23]= $\left\{\{16\}, \{-15\}, \left\{\frac{21}{5}\right\}\right\}$

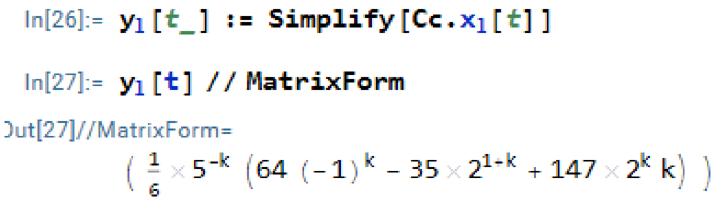
```
In[24]:= x1[t_] := Simplify[T.MatrixPower[Λ, k].z0]

In[25]:= x1[t] // MatrixForm
```

Out[25]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \times 5^{-1-k} \left(-32\ (-1)^k + 77 \times 2^k + 147 \times 2^k\ k\right) \\ \frac{1}{6} \times 5^{-1-k} \left(464\ (-1)^k - 277 \times 2^{1-k} + 231 \times 2^k\ k\right) \\ \frac{1}{2} \times 5^{-k} \left(32\ (-1)^k - 15 \times 2^{1-k} + 21 \times 2^k\ k\right) \end{pmatrix}$$

Anche se parzialmente mascherato dal “Simplify”, l’espansione modale della risposta libera è ottenuta come combinazione lineare dei modi del sistema. Sono presenti tutti i modi perché lo stato iniziale non è allineato lungo la direzione di nessun autovettore e dunque vengono “accesi” tutti i modi naturali.

Risposta libera nell’uscita

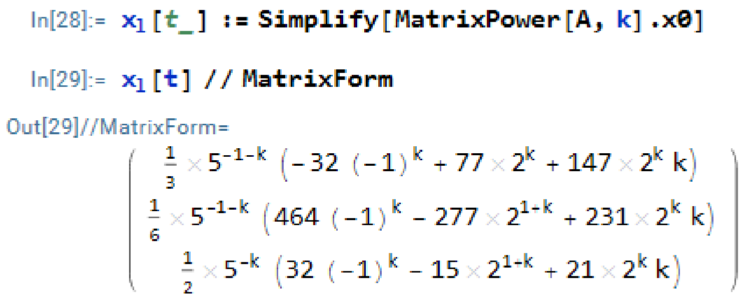


```
In[26]:= y1[t_] := Simplify[Cc.x1[t]]

In[27]:= y1[t] // MatrixForm
```

Out[27]//MatrixForm=

$$\left(\frac{1}{6} \times 5^{-k} \left(64\ (-1)^k - 35 \times 2^{1-k} + 147 \times 2^k\ k\right) \right)$$

La risposta libera nello stato può essere alternativamente calcolata come: $x_l(k) = A^k \cdot x_0$



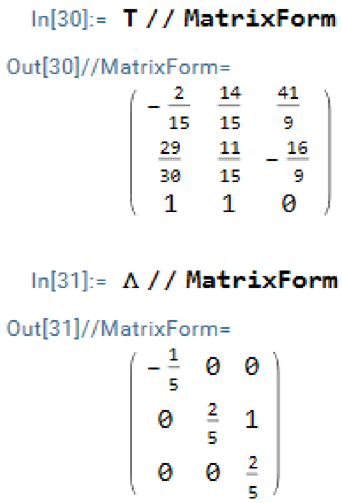
```
In[28]:= x1[t_] := Simplify[MatrixPower[A, k].x0]

In[29]:= x1[t] // MatrixForm
```

Out[29]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \times 5^{-1-k} \left(-32\ (-1)^k + 77 \times 2^k + 147 \times 2^k\ k\right) \\ \frac{1}{6} \times 5^{-1-k} \left(464\ (-1)^k - 277 \times 2^{1-k} + 231 \times 2^k\ k\right) \\ \frac{1}{2} \times 5^{-k} \left(32\ (-1)^k - 15 \times 2^{1-k} + 21 \times 2^k\ k\right) \end{pmatrix}$$

3. Configurazione di stati iniziali che attivano sulla risposta libera alcuni modi naturali

Scegliendo uno stato iniziale che è combinazione lineare di un autovalore, si “accederanno” sulla risposta libera solo i modi naturali associati a quell’autovalore



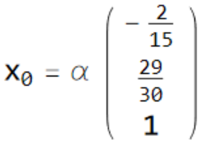
```
In[30]:= T // MatrixForm
Out[30]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} -\frac{2}{15} & \frac{14}{15} & \frac{41}{9} \\ \frac{29}{30} & \frac{11}{15} & -\frac{16}{9} \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

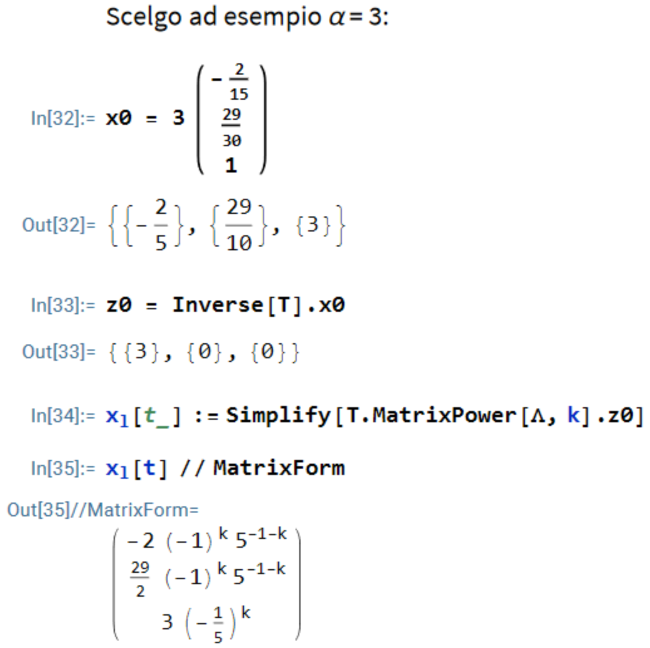
```
In[31]:= Λ // MatrixForm
Out[31]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

Scelgo di visualizzare sulla risposta libera il solo modo naturale associato all’autovalore $\lambda_1 = -\frac{1}{5}$. Considero quindi uno stato iniziale che sia combinazione lineare della prima colonna della matrice T:



$$x_0 = \alpha \begin{pmatrix} -\frac{2}{15} \\ \frac{29}{30} \\ 1 \end{pmatrix}$$



Scelgo ad esempio $\alpha = 3$:

$$\text{In[32]:= } x0 = 3 \begin{pmatrix} -\frac{2}{15} \\ \frac{29}{30} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Out[32]= } \left\{\left\{-\frac{2}{5}\right\}, \left\{\frac{29}{10}\right\}, \{3\}\right\}$$

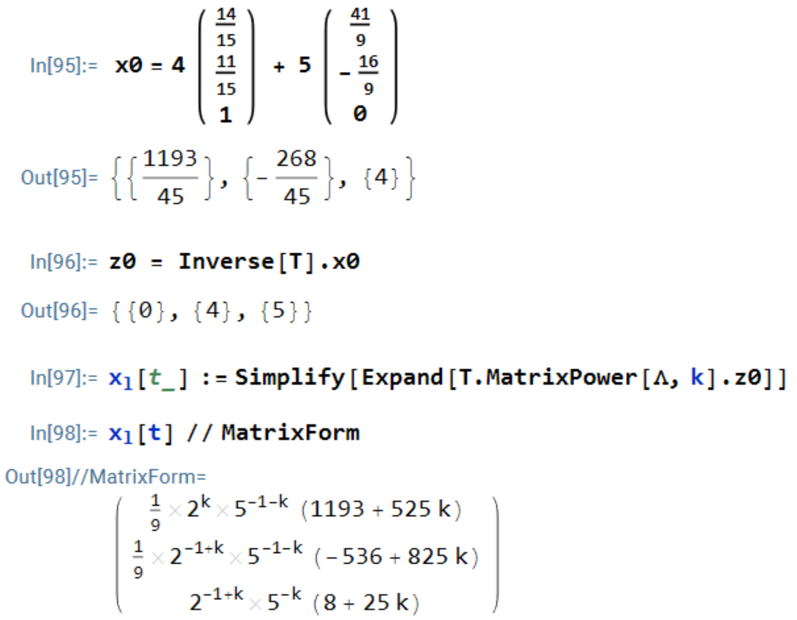
```
In[33]:= z0 = Inverse[T].x0
Out[33]= {{3}, {0}, {0}}
In[34]:= x1[t_] := Simplify[T.MatrixPower[Λ, k].z0]
In[35]:= x1[t] // MatrixForm
Out[35]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} -2\,(-1)^k\,5^{-1-k} \\ \frac{29}{2}\,(-1)^k\,5^{-1-k} \\ 3\left(-\frac{1}{5}\right)^k \end{pmatrix}$$

Scegliendo di far vedere sulla risposta libera i soli modi naturali associati all'autovalore multiplo $\lambda_2 = \frac{2}{5}$

considero uno stato iniziale che sia una combinazione lineare della seconda e terza colonna della matrice T:

$$x_0 = \alpha \begin{pmatrix} \frac{14}{15} \\ \frac{11}{15} \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} \frac{41}{9} \\ -\frac{16}{9} \\ 0 \end{pmatrix}$$. Scelgo ad esempio $\alpha = 4$, β=5



In[95]:= $x0 = 4 \begin{pmatrix} \frac{14}{15} \\ \frac{11}{15} \\ 1 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} \frac{41}{9} \\ -\frac{16}{9} \\ 0 \end{pmatrix}$

Out[95]= $\left\{\left\{\frac{1193}{45}\right\}, \left\{-\frac{268}{45}\right\}, \{4\}\right\}$

In[96]:= `z0 = Inverse[T].x0`

Out[96]= `{{0}, {4}, {5}}`

In[97]:= `x1[t_] := Simplify[Expand[T.MatrixPower[Λ, k].z0]]`

In[98]:= `x1[t] // MatrixForm`

Out[98]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{9} \times 2^{k} \times 5^{-1-k} \, (1193 + 525\,k) \\ \frac{1}{9} \times 2^{-1+k} \times 5^{-1-k} \, (-536 + 825\,k) \\ 2^{-1+k} \times 5^{-k} \, (8 + 25\,k) \end{pmatrix}$$

Per replicare quanto fatto sull’uscita libera, è necessario scegliere una matrice d’uscita che sia ortogonale ad alcune colonne di T; così facendo i modi associati all’autovalore presente su quella colonna scompaiono.

4. FdT, poli e zeri

A TD la FdT è quella funzione di variabile complessa z tale che moltiplicata algebricamente per la Trasformata Zeta dell'ingresso, restituisce la Trasformata Zeta della risposta forzata:

$$y_f(z) = G(z) \cdot U(z)$$

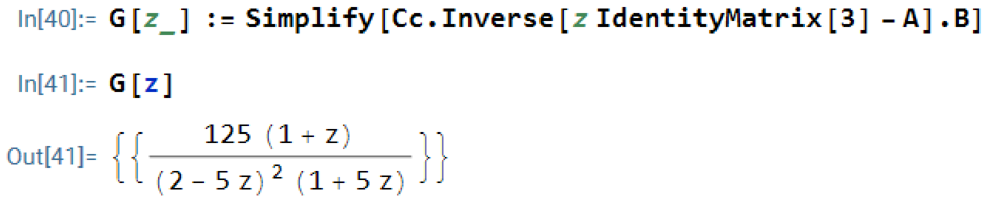
Esprimendo la risposta forzata come:

$$y_f(z) = [C(z \cdot I_n - A)^{-1} \cdot B + D] \cdot U(z)$$

Posso individuare la Funzione di Trasferimento del sistema:

$$G(z) = [C(z \cdot I_n - A)^{-1} \cdot B + D]$$

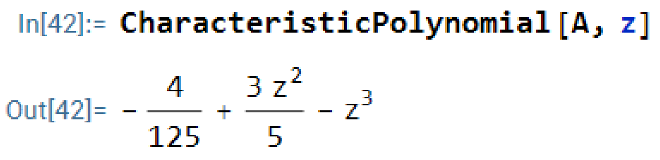
FdT



```
In[40]:= G[z_] := Simplify[Cc.Inverse[z IdentityMatrix[3] - A].B]

In[41]:= G[z]
```

Out[41]= $\left\{\left\{\frac{125\ (1+z)}{(2-5\,z)^2\ (1+5\,z)}\right\}\right\}$

Anche in questo caso, come a tempo continuo, il grado del numeratore è minore di quello del denominatore. Si nota che il denominatore è del tutto equivalente al polinomio caratteristico della matrice A e di conseguenza le radici del denominatore coincideranno con gli autovalori precedentemente trovati.

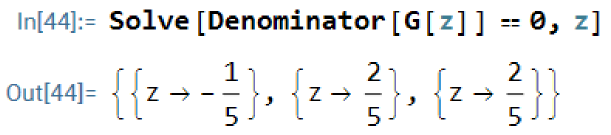


```
In[42]:= CharacteristicPolynomial[A, z]
```

Out[42]= $-\frac{4}{125}+\frac{3\,z^2}{5}-z^3$

Poli

Radici del denominatore della FdT

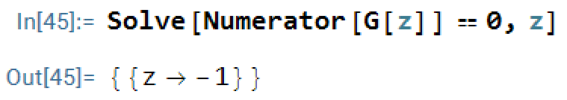


```
In[44]:= Solve[Denominator[G[z]] == 0, z]
```

Out[44]= $\left\{\left\{z\to-\frac{1}{5}\right\},\left\{z\to\frac{2}{5}\right\},\left\{z\to\frac{2}{5}\right\}\right\}$

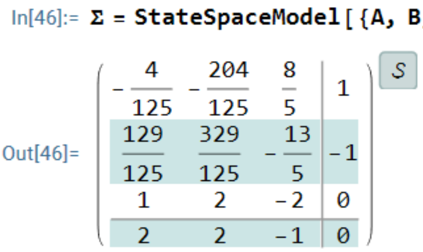
Zeri

Radici del numeratore della FdT



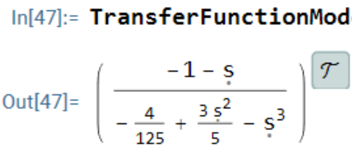
```
In[45]:= Solve[Numerator[G[z]] == 0, z]

Out[45]= {{z → -1}}
```

Verifico i risultati ottenuti mediante il calcolo di FdT, poli e zeri con la funzione StateSpaceModel di Mathematica:



In[46]:= `Σ = StateSpaceModel[{A, B, Cc}]`

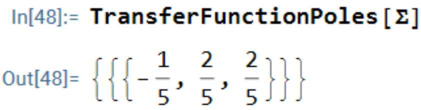
Out[46]=
$$\left(\begin{array}{ccc|c} -\frac{4}{125} & -\frac{204}{125} & \frac{8}{5} & 1 \\ \frac{129}{125} & \frac{329}{125} & -\frac{13}{5} & -1 \\ 1 & 2 & -2 & 0 \\ \hline 2 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right)^{\mathcal{S}}$$



In[47]:= `TransferFunctionModel[Σ]`

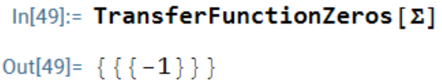
Out[47]=
$$\left(\frac{-1-s}{-\frac{4}{125}+\frac{3\,s^2}{5}-s^3}\right)^{\mathcal{T}}$$

Così scritta si apprezza maggiormente al denominatore l'equivalenza con il polinomio caratteristico



In[48]:= `TransferFunctionPoles[Σ]`

Out[48]= $\left\{\left\{\left\{-\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{2}{5}\right\}\right\}\right\}$



In[49]:= `TransferFunctionZeros[Σ]`

Out[49]= $\{\{\{-1\}\}\}$

5. Risposta al gradino

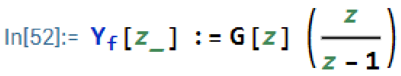
Definito il gradino unitario come:

$$1(k) = \begin{cases} 1 & k \geq 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases}$$

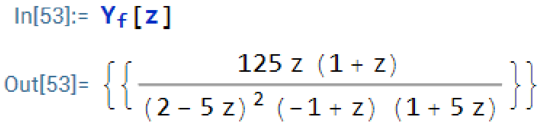
La Z-Trasformata del gradino unitario è data da:

$$Z[1(k)] \coloneqq \frac{z}{z-1}$$

Determino la risposta forzata:



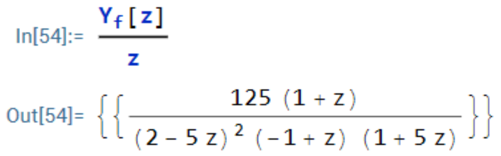
In[52]:= $Y_f[z\_] := G[z]\left(\frac{z}{z-1}\right)$



In[53]:= $Y_f[z]$

Out[53]= $\left\{\left\{\frac{125\,z\,(1+z)}{(2-5\,z)^2\,(-1+z)\,(1+5\,z)}\right\}\right\}$

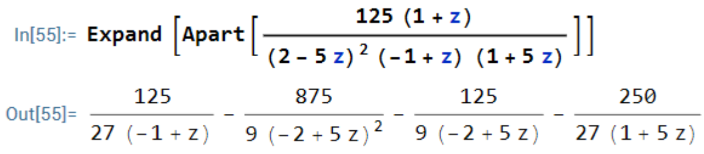
A differenza di quanto accadeva a tempo continuo, l'espressione della $y_f(z)$ non può essere direttamente manipolata per effettuare la scomposizione in fratti semplici. È necessario infatti compiere un'operazione preliminare, che consiste nel dividere la risposta così ottenuta per z: $\frac{Y_f(z)}{z}$



In[54]:= $\frac{Y_f[z]}{z}$

Out[54]= $\left\{\left\{\frac{125\,(1+z)}{(2-5\,z)^2\,(-1+z)\,(1+5\,z)}\right\}\right\}$

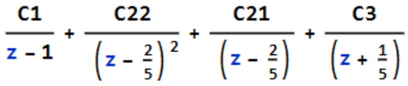
Posso ora determinare i fratti semplici (che saranno 4, poiché il denominatore è di quarto grado):



In[55]:= **Expand** $\left[\text{Apart}\left[\frac{125\,(1+z)}{(2-5\,z)^2\,(-1+z)\,(1+5\,z)}\right]\right]$

Out[55]= $\frac{125}{27\,(-1+z)}-\frac{875}{9\,(-2+5\,z)^2}-\frac{125}{9\,(-2+5\,z)}-\frac{250}{27\,(1+5\,z)}$

Ottenendo dunque:



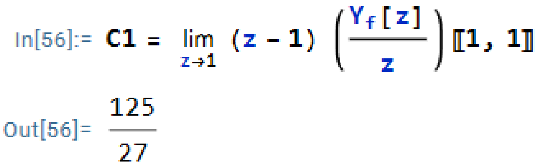
$$\frac{C1}{z-1}+\frac{C22}{\left(z-\frac{2}{5}\right)^2}+\frac{C21}{\left(z-\frac{2}{5}\right)}+\frac{C3}{\left(z+\frac{1}{5}\right)}$$

Utilizzando la formula di Heaviside (non più semplificata) riesco a determinare i coefficienti incogniti:

$$\frac{\mathrm{C}_{11}}{z-\mathrm{p}_1}+\frac{\mathrm{C}_{12}}{z-\mathrm{p}_1}+\cdots+\frac{\mathrm{C}_{1i}}{(z-\mathrm{p}_1)^{\mathrm{v_i}}}$$

$$C_{i_j}=\frac{1}{(\mathrm{v_i}-j)!}\lim_{z->\mathrm{p_i}}\frac{d}{\mathrm{dz}^{\mathrm{v_ij}}}\left((z-\mathrm{p_i})^{\mathrm{v_i}}F(z)\right)$$

Dove v_i rappresenta la molteplicità algebrica e j l'ordine

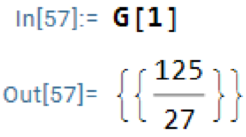


In[56]:= **C1 =** $\lim_{z\to 1}(z-1)\left(\frac{Y_f[z]}{z}\right)[\![1,1]\!]$

Out[56]= $\frac{125}{27}$

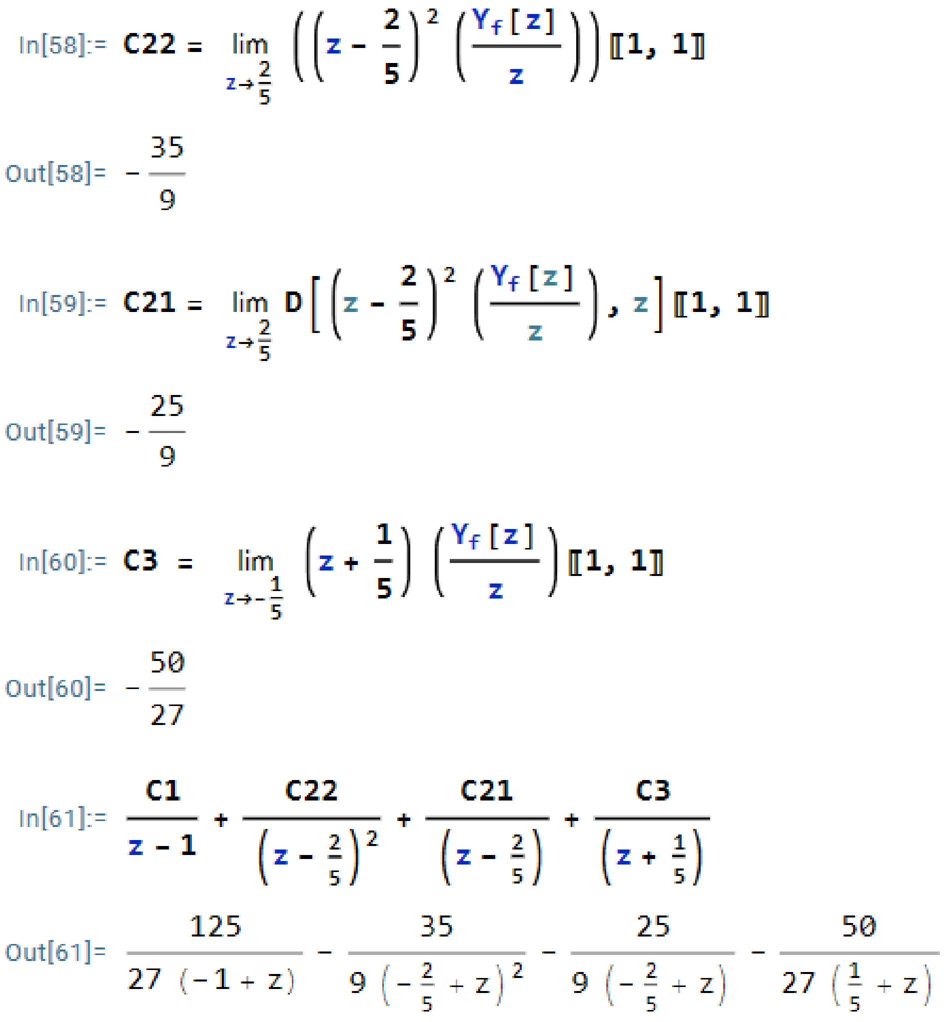
Il termine C1 può essere anche calcolato utilizzando:

$$C1=\lim_{z\to 1}(z-1)\frac{\mathrm{Y_f}(z)}{z}=\lim_{z\to 1}(z-1)\,G(z)\frac{z}{(z-1)}\frac{1}{z}=G(z)=G(1)$$



In[57]:= **G[1]**

Out[57]= $\left\{\left\{\frac{125}{27}\right\}\right\}$



In[58]:= $C22 = \lim_{z \to \frac{2}{5}} \left(\left(z - \frac{2}{5}\right)^2 \left(\frac{Y_f[z]}{z}\right)\right)[[1, 1]]$

Out[58]= $-\frac{35}{9}$

In[59]:= $C21 = \lim_{z \to \frac{2}{5}} D\left[\left(z - \frac{2}{5}\right)^2 \left(\frac{Y_f[z]}{z}\right), z\right][[1, 1]]$

Out[59]= $-\frac{25}{9}$

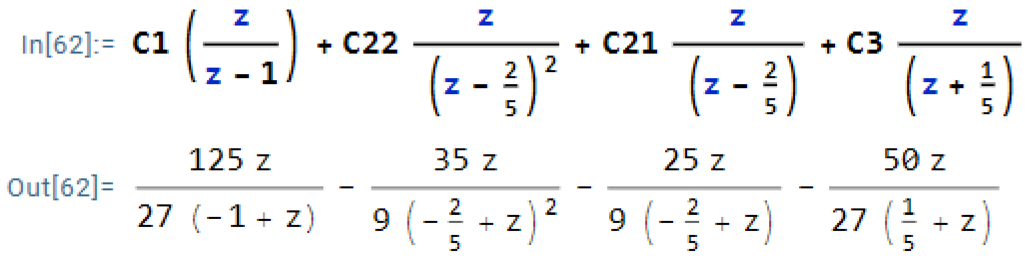
In[60]:= $C3 = \lim_{z \to -\frac{1}{5}} \left(z + \frac{1}{5}\right) \left(\frac{Y_f[z]}{z}\right)[[1, 1]]$

Out[60]= $-\frac{50}{27}$

In[61]:= $\frac{C1}{z - 1} + \frac{C22}{\left(z - \frac{2}{5}\right)^2} + \frac{C21}{\left(z - \frac{2}{5}\right)} + \frac{C3}{\left(z + \frac{1}{5}\right)}$

Out[61]= $\frac{125}{27\,(-1 + z)} - \frac{35}{9\left(-\frac{2}{5} + z\right)^2} - \frac{25}{9\left(-\frac{2}{5} + z\right)} - \frac{50}{27\left(\frac{1}{5} + z\right)}$

Quanto ottenuto deve essere ora moltiplicato per z:



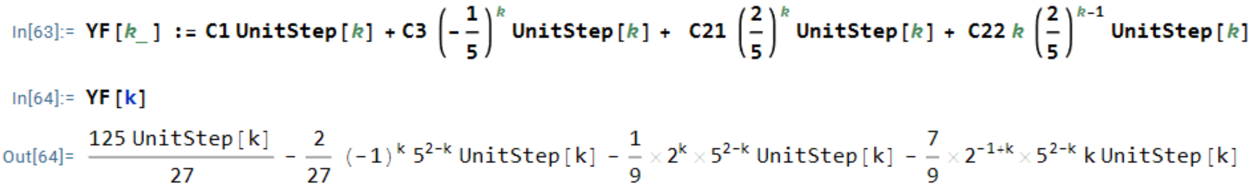
In[62]:= $C1\left(\frac{z}{z - 1}\right) + C22\,\frac{z}{\left(z - \frac{2}{5}\right)^2} + C21\,\frac{z}{\left(z - \frac{2}{5}\right)} + C3\,\frac{z}{\left(z + \frac{1}{5}\right)}$

Out[62]= $\frac{125\,z}{27\,(-1 + z)} - \frac{35\,z}{9\left(-\frac{2}{5} + z\right)^2} - \frac{25\,z}{9\left(-\frac{2}{5} + z\right)} - \frac{50\,z}{27\left(\frac{1}{5} + z\right)}$

Riconducendomi alla forma nota:

$$\mathrm{Z}[a^k 1(k)] := \frac{z}{z - a}$$

Posso scrivere la risposta forzata

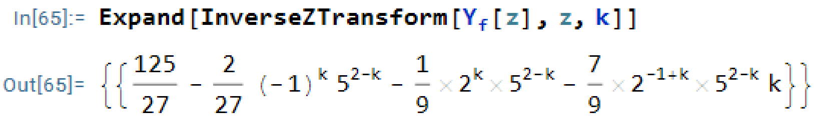


In[63]:= $\mathtt{YF}[k\_] := \mathtt{C1\ UnitStep}[k] + \mathtt{C3}\left(-\frac{1}{5}\right)^{k}\mathtt{UnitStep}[k] + \mathtt{C21}\left(\frac{2}{5}\right)^{k}\mathtt{UnitStep}[k] + \mathtt{C22}\ k\left(\frac{2}{5}\right)^{k-1}\mathtt{UnitStep}[k]$

In[64]:= `YF[k]`

Out[64]= $\frac{125\ \mathtt{UnitStep}[k]}{27} - \frac{2}{27}(-1)^{k}\,5^{2-k}\,\mathtt{UnitStep}[k] - \frac{1}{9}\times 2^{k}\times 5^{2-k}\,\mathtt{UnitStep}[k] - \frac{7}{9}\times 2^{-1+k}\times 5^{2-k}\,k\,\mathtt{UnitStep}[k]$

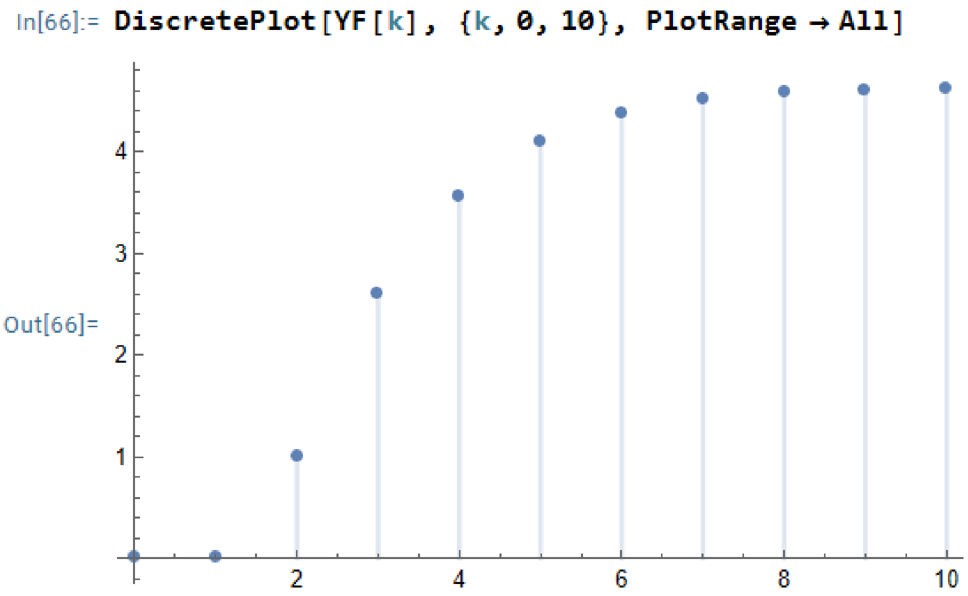
Verifico il risultato ottenuto:



In[65]:= `Expand[InverseZTransform[Y_f[z], z, k]]`

Out[65]= $\left\{\left\{\frac{125}{27} - \frac{2}{27}(-1)^{k}\,5^{2-k} - \frac{1}{9}\times 2^{k}\times 5^{2-k} - \frac{7}{9}\times 2^{-1+k}\times 5^{2-k}\,k\right\}\right\}$

Grafico della risposta a gradino:



In[66]:= `DiscretePlot[YF[k], {k, 0, 10}, PlotRange → All]`

A tempo discreto, la differenza tra numero di poli e numero di zeri restituisce il numero di passi iniziali in cui la risposta al gradino è pari a 0. In questo caso abbiamo 3 poli ed 1 zero: come si evince dal grafico, infatti, la risposta a gradino è nulla per due passi.

Scritta in maniera ornamentale, la risposta ottenuta è quindi:

$$y_f(k) = \frac{125}{27}1(k) - \frac{50}{27}\left(-\frac{1}{5}\right)^{k}1(k) - \frac{25}{9}\left(\frac{2}{5}\right)^{k}1(k) - \frac{35}{9}k\left(\frac{2}{5}\right)^{k-1}1(k)$$

Possiamo evidenziare all'interno della risposta le due componenti che la caratterizzano:

- **Risposta a regime**:

$$\frac{125}{27}1(k)$$

- **Risposta transitoria**:
  Combinazione lineare di tutti i modi naturali ed è data dal secondo, terzo e quarto termine della risposta a gradino. La caratteristica di "transitorietà" è verificabile calcolando il limite per k tendente a infinito. Così facendo, poiché tutti i modi sono strettamente minori dell'unità, l'intera risposta transitoria tenderà a 0:

In[67]:= $\lim_{k\to\infty}\left(-\frac{50}{27}\left(-\frac{1}{5}\right)^{k}-\frac{25}{9}\left(\frac{2}{5}\right)^{k}-\frac{35}{9}\,k\left(\frac{2}{5}\right)^{k-1}\right)$

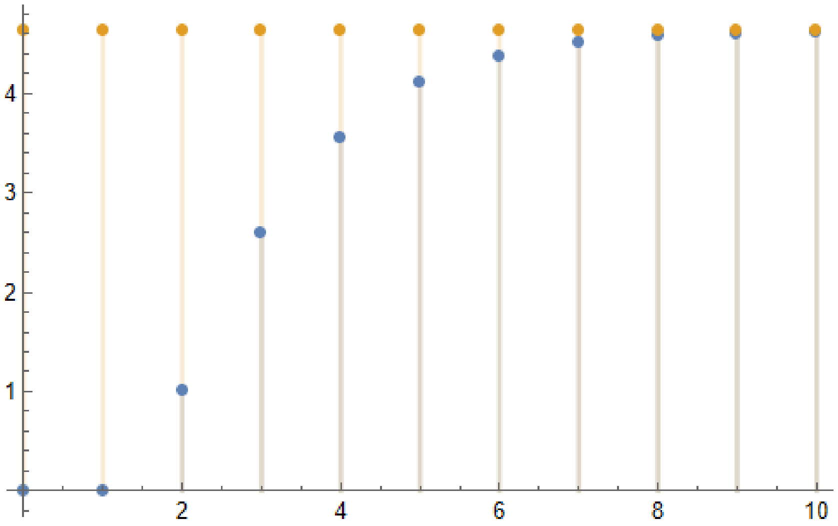
Out[67]= 0

"Simula" la situazione in cui il transitorio si è esaurito, lasciando spazio solo alla componente di regime della risposta

Grafico assieme risposta a gradino e risposta a regime:

In[68]:= $\texttt{DiscretePlot}\left[\left\{\texttt{YF}[k],\ \frac{125}{27}\,\texttt{UnitStep}[k]\right\},\ \{k,\ 0,\ 10\},\ \texttt{PlotRange}\to\texttt{All}\right]$

Out[68]=



La risposta forzata si assesta sulla componente di regime

6. Modello ARMA e risposta all'ingresso u(k)

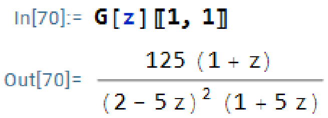
Modello ARMA

Partendo dal sistema SISO LTI-TD scritto in forma I/S/U come:

$$\begin{cases} x(k+1) & = A\,x(k) + B\,u(k) \\ y(k) & = C\,x(k) + D\,u(k) \end{cases}$$

Determino il modello ARMA equivalente sfruttando l'identità:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)}$$



```
In[70]:= G[z][[1, 1]]
Out[70]= 125 (1 + z)/((2 - 5 z)^2 (1 + 5 z))
```

Valutandola come identità algebrica nel dominio della variabile complessa z ottengo:

$$\frac{125(1+z)}{(2-5z)^2(1+5z)} = \frac{Y(z)}{U(z)}$$

Che dopo aver semplificato:

$$[(2-5z)^2(1+5z)]Y(z) = [125(1+z)]U(z)$$

$$4Y(z) - 75z^2Y(z) + 125z^3Y(z) = 125U(z) + 125\mathrm{zU}(z)$$

Sfruttando il teorema dell'anticipo di ordine n sulla Z-Trasformata porto l'identità considerata sopra dal dominio della variabile complessa z al dominio di k.

Grazie ai risultati approfonditi durante il corso:

$$Z[f(k+1)] = \mathrm{zF}(z) - F(0)$$

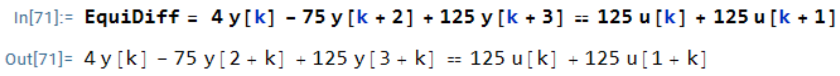
Estendendolo ad n, posso scrivere che:

$$Z[f(k+n)] = z^{\mathrm{n}}\mathrm{F}(z) - z^{\mathrm{n}}\mathrm{F}(0) - z^{n-1}F(1) - \cdots - \mathrm{zF}(n-1)$$

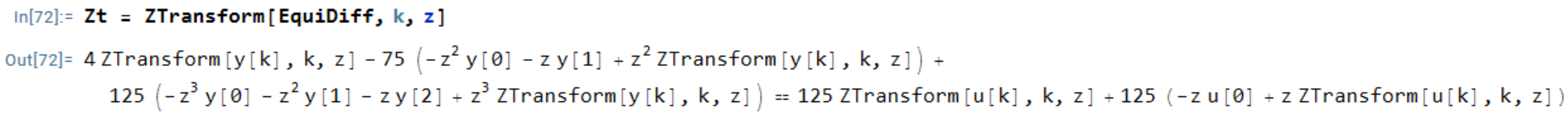
Nel caso considerato :

$$4y(k) - 75y(k+2) + 125y(k+3) = 125u(k) + 125u(k+1) \text{ rapp. I/U del sistema}$$

Scrivo quanto trovato precedentemente in Mathematica:



```
In[71]:= EquiDiff = 4 y[k] - 75 y[k + 2] + 125 y[k + 3] == 125 u[k] + 125 u[k + 1]
Out[71]= 4 y[k] - 75 y[2 + k] + 125 y[3 + k] == 125 u[k] + 125 u[1 + k]
```

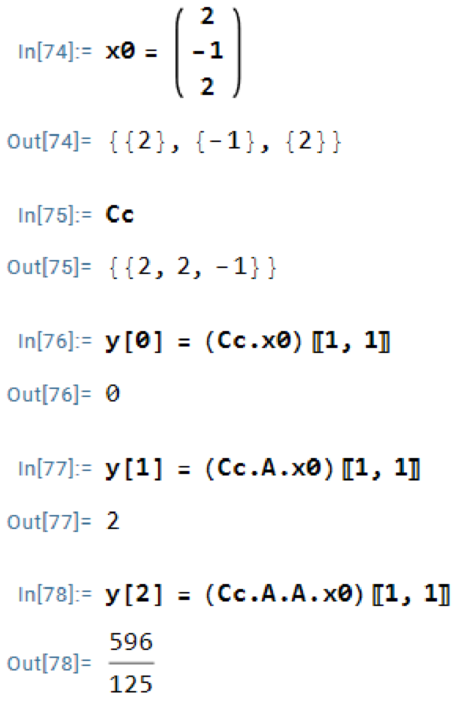


```
In[72]:= Zt = ZTransform[EquiDiff, k, z]
Out[72]= 4 ZTransform[y[k], k, z] - 75 (-z^2 y[0] - z y[1] + z^2 ZTransform[y[k], k, z]) +
   125 (-z^3 y[0] - z^2 y[1] - z y[2] + z^3 ZTransform[y[k], k, z]) == 125 ZTransform[u[k], k, z] + 125 (-z u[0] + z ZTransform[u[k], k, z])
```

Ottenendo:

$$Zt = 4Y[z] - 75(-z^2y[0] - zy[1] + z^2Y[z]) + 125(-z^3y[0] - z^2y[1] - zy[2] + z^3Y[z]) =$$
$$= 125U[z] + 125zU[z]$$

Per risolvere l'equazione differenziale devo imporre le condizioni iniziali:



In[74]:= **x0 =** $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Out[74]= {{2}, {-1}, {2}}

In[75]:= **Cc**

Out[75]= {{2, 2, -1}}

In[76]:= **y[0] = (Cc.x0)〚1, 1〛**

Out[76]= 0

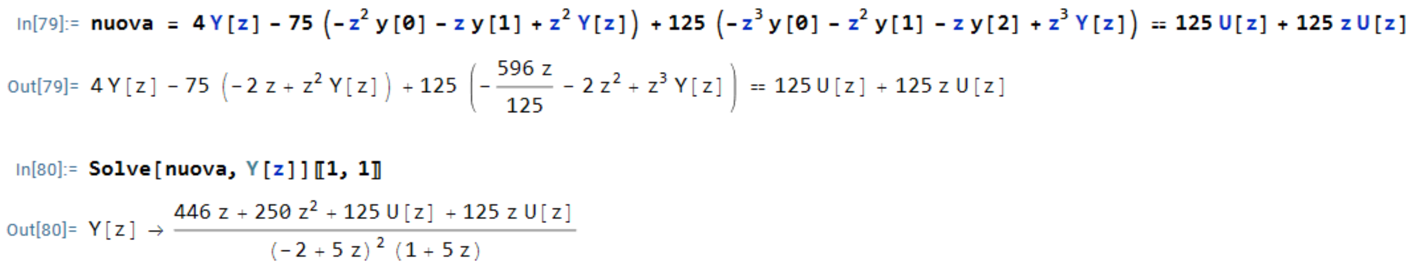
In[77]:= **y[1] = (Cc.A.x0)〚1, 1〛**

Out[77]= 2

In[78]:= **y[2] = (Cc.A.A.x0)〚1, 1〛**

Out[78]= $\frac{596}{125}$

Ricalcolo il termine Zt sostituendo i termini appena trovati:



In[79]:= **nuova = 4 Y[z] - 75 $\left(-z^2\, y[0] - z\, y[1] + z^2\, Y[z]\right)$ + 125 $\left(-z^3\, y[0] - z^2\, y[1] - z\, y[2] + z^3\, Y[z]\right)$ == 125 U[z] + 125 z U[z]**

Out[79]= $4\,Y[z] - 75\left(-2\,z + z^2\,Y[z]\right) + 125\left(-\frac{596\,z}{125} - 2\,z^2 + z^3\,Y[z]\right) = 125\,U[z] + 125\,z\,U[z]$

In[80]:= **Solve[nuova, Y[z]]〚1, 1〛**

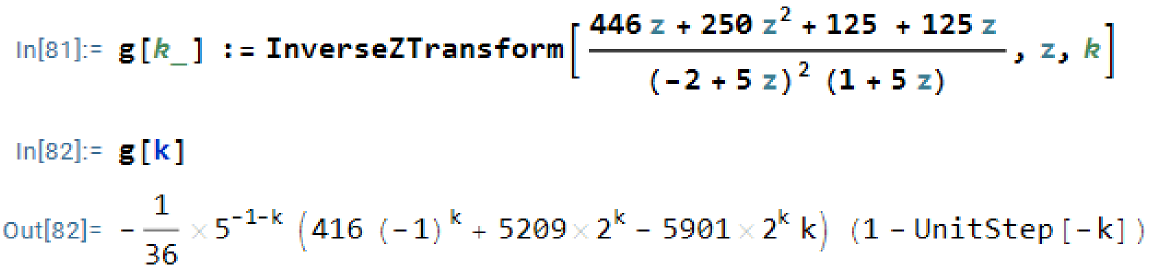
Out[80]= $Y[z] \to \frac{446\,z + 250\,z^2 + 125\,U[z] + 125\,z\,U[z]}{(-2 + 5\,z)^2\,(1 + 5\,z)}$

Ponendo U[z] = 1 ottengo che:

$$Y_f(z) = G(z) \cdot U(z) = G(z) \cdot 1$$

$$Y_f(z) = \mathrm{G(z)} = \frac{446\mathrm{z} + 250\mathrm{z}^2 + 125 + 125\mathrm{z}}{(-2 + 5\mathrm{z})^2(1 + 5\mathrm{z})}$$

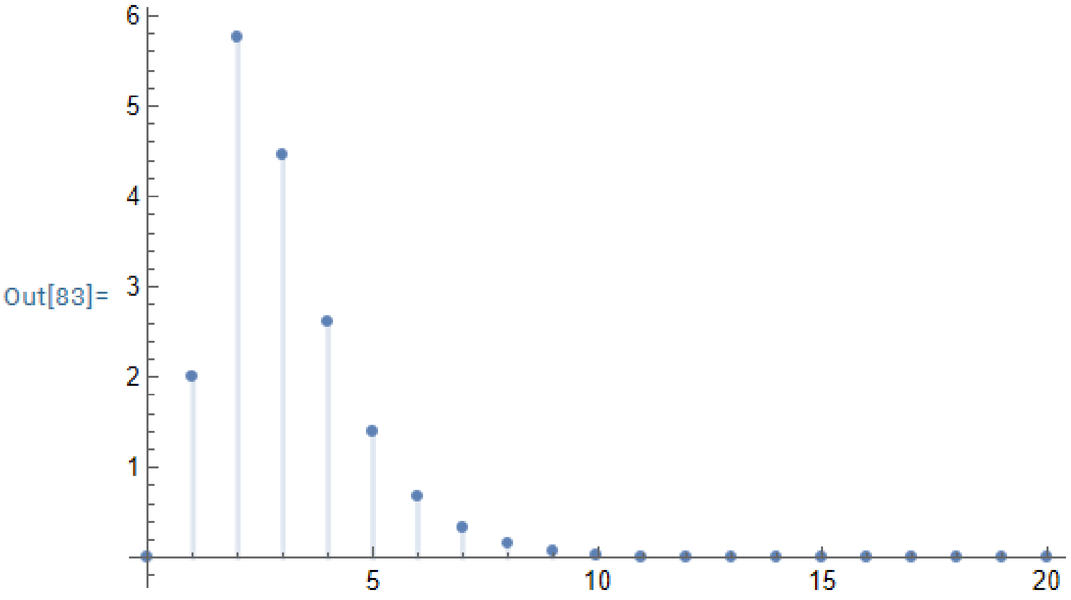
Giunti a questo risultato, calcolando l’antitrasformata Z della FdT così trovata determino la risposta all’impulso, che corrisponde alla funzione di trasferimento del sistema:



```
In[81]:= g[k_] := InverseZTransform[(446 z + 250 z^2 + 125  + 125 z)/((-2 + 5 z)^2 (1 + 5 z)), z, k]

In[82]:= g[k]

Out[82]= -1/36 × 5^(-1-k) (416 (-1)^k + 5209 × 2^k - 5901 × 2^k k) (1 - UnitStep[-k])
```

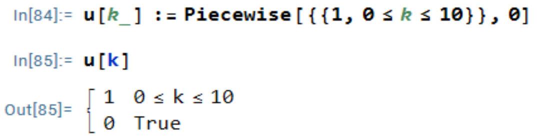
$$\text{Out[82]}= -\frac{1}{36}\times 5^{-1-k}\left(416\ (-1)^{k} + 5209\times 2^{k} - 5901\times 2^{k}\ k\right)\ (1 - \text{UnitStep}[-k])$$

```
In[83]:= DiscretePlot[g[k], {k, 0, 20}, PlotRange → All]
```



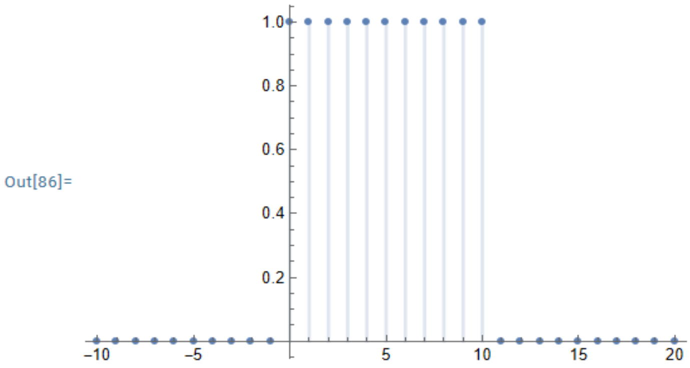
RISPOSTA ALL’INGRESSO u(k)

Il segnale u(k) considerato è il seguente:



```
In[84]:= u[k_] := Piecewise[{{1, 0 ≤ k ≤ 10}}, 0]

In[85]:= u[k]

Out[85]= { 1  0 ≤ k ≤ 10
         { 0  True
```

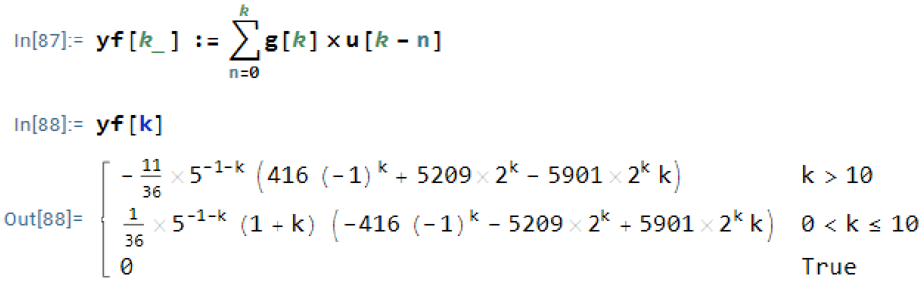
```
In[86]:= DiscretePlot[u[k], {k, -10, 20}, PlotRange → All]
```



Al fine di calcolare la risposta al segnale u(k) considerato, procedo al calcolo della *somma di convoluzione*, definita come:

$$y_f(z) = \sum_{n=0}^{k} g(n) \cdot u[k-n]$$

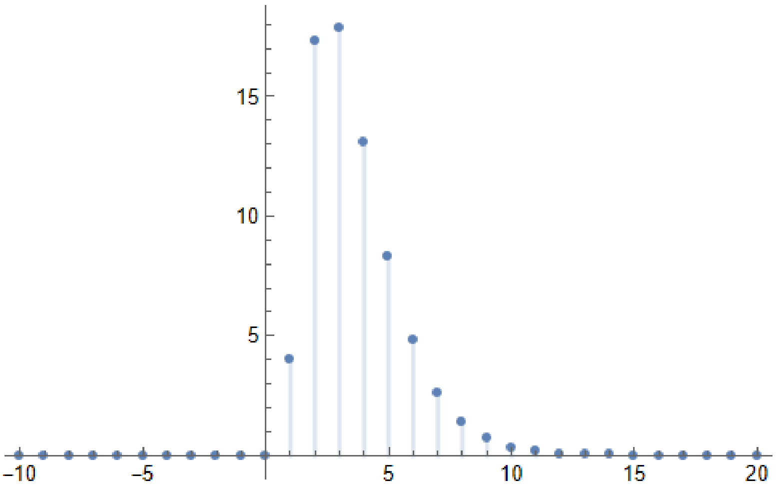
Questo operatore si comporta come una “somma pesata”: il valore presente di u viene processato da g



```
In[87]:= yf[k_] := Σ_{n=0}^{k} g[k] × u[k - n]

In[88]:= yf[k]

Out[88]= ⎧ -11/36 × 5^(-1-k) (416 (-1)^k + 5209 × 2^k - 5901 × 2^k k)        k > 10
         ⎨ 1/36 × 5^(-1-k) (1 + k) (-416 (-1)^k - 5209 × 2^k + 5901 × 2^k k)  0 < k ≤ 10
         ⎩ 0                                                                True
```

```
In[89]:= DiscretePlot[yf[k], {k, -10, 20}, PlotRange → All]
```

Out[89]=

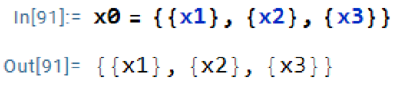


7. Condizioni iniziali tali che la risposta al gradino coincida con il valore di regime

Come nel caso TC considero la risposta scritta come:

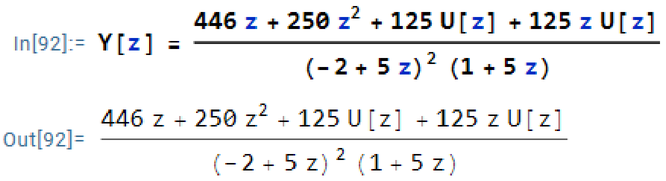
$$Risposta\ =\ risposta\ libera\ +\ risposta\ transitoria\ +\ risposta\ a\ regime$$

Inizializzo in Mathematica uno stato iniziale incognito, che sarà poi composto dallo stato che rende la risposta al gradino coincidente con il valore di regime:



```
In[91]:= x0 = {{x1}, {x2}, {x3}}
Out[91]= {{x1}, {x2}, {x3}}
```

Poiché vogliamo stabilire lo stato iniziale partendo dal modello ARMA, considero l'espressione precedentemente ricavata nel punto 6, isolando il termine Y[z]:



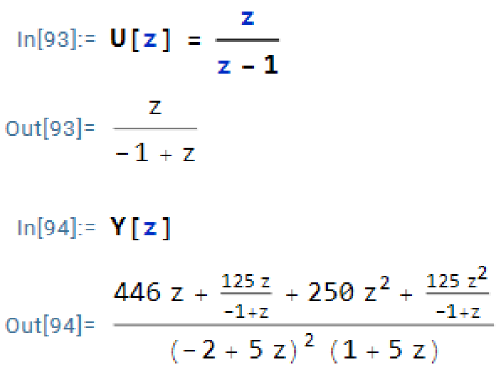
In[92]:=

$$Y[z] = \frac{446\,z + 250\,z^2 + 125\,U[z] + 125\,z\,U[z]}{(-2 + 5\,z)^2\,(1 + 5\,z)}$$

Out[92]=

$$\frac{446\,z + 250\,z^2 + 125\,U[z] + 125\,z\,U[z]}{(-2 + 5\,z)^2\,(1 + 5\,z)}$$

Sostituiamo il generico ingresso U[z] con la Z-Trasformata della risposta a gradino:



In[93]:=

$$U[z] = \frac{z}{z - 1}$$

Out[93]=

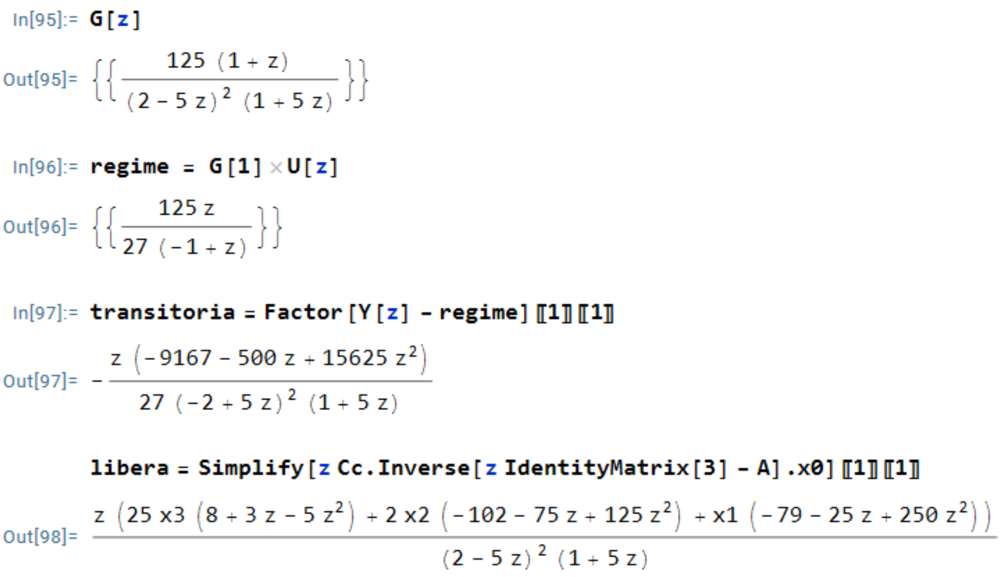
$$\frac{z}{-1 + z}$$

In[94]:= Y[z]

Out[94]=

$$\frac{446\,z + \frac{125\,z}{-1+z} + 250\,z^2 + \frac{125\,z^2}{-1+z}}{(-2 + 5\,z)^2\,(1 + 5\,z)}$$

Determino a questo punto, associandoli a 3 variabili di Mathematica, quanto valgono la risposta a regime, transitoria e libera:



In[95]:= G[z]

Out[95]=

$$\left\{\left\{\frac{125\,(1 + z)}{(2 - 5\,z)^2\,(1 + 5\,z)}\right\}\right\}$$

```
In[96]:= regime = G[1] × U[z]
```

Out[96]=

$$\left\{\left\{\frac{125\,z}{27\,(-1 + z)}\right\}\right\}$$

```
In[97]:= transitoria = Factor[Y[z] - regime]⟦1⟧⟦1⟧
```

Out[97]=

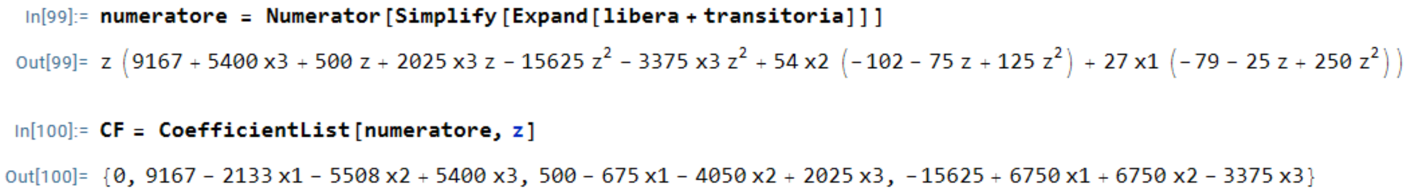
$$-\frac{z\,\left(-9167 - 500\,z + 15625\,z^2\right)}{27\,(-2 + 5\,z)^2\,(1 + 5\,z)}$$

```
libera = Simplify[z Cc.Inverse[z IdentityMatrix[3] - A].x0]⟦1⟧⟦1⟧
```

Out[98]=

$$\frac{z\,\left(25\,x3\,\left(8 + 3\,z - 5\,z^2\right) + 2\,x2\,\left(-102 - 75\,z + 125\,z^2\right) + x1\,\left(-79 - 25\,z + 250\,z^2\right)\right)}{(2 - 5\,z)^2\,(1 + 5\,z)}$$

Estraggo il numeratore dalla somma di libera e transitoria al fine di porlo poi uguale a 0:

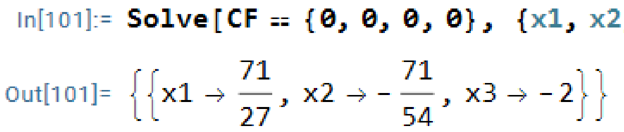


```
In[99]:= numeratore = Numerator[Simplify[Expand[libera + transitoria]]]
```

$$\text{Out[99]=}\; z\left(9167+5400\,x3+500\,z+2025\,x3\,z-15625\,z^2-3375\,x3\,z^2+54\,x2\left(-102-75\,z+125\,z^2\right)+27\,x1\left(-79-25\,z+250\,z^2\right)\right)$$

```
In[100]:= CF = CoefficientList[numeratore, z]

Out[100]= {0, 9167 - 2133 x1 - 5508 x2 + 5400 x3, 500 - 675 x1 - 4050 x2 + 2025 x3, -15625 + 6750 x1 + 6750 x2 - 3375 x3}
```

Eguaglio il set appena ottenuto (CF) ad {0,0,0,0} per determinare le componenti dello stato:



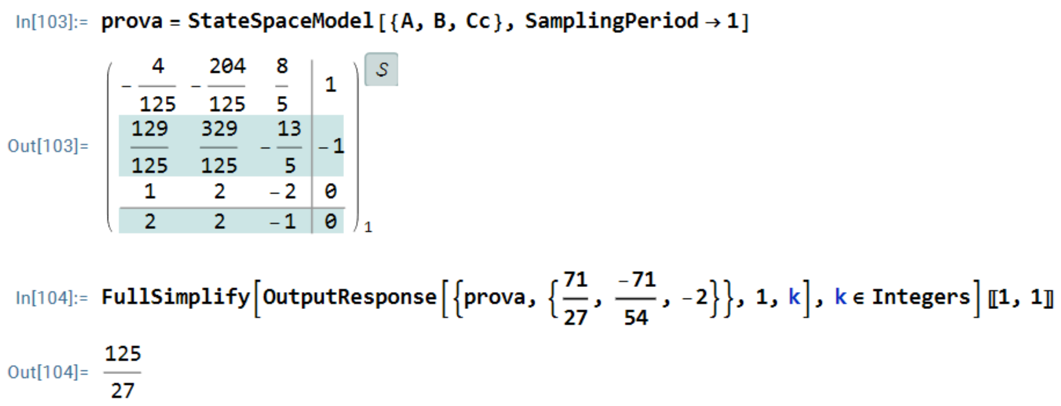
```
In[101]:= Solve[CF == {0, 0, 0, 0}, {x1, x2, x3}]
```

$$\text{Out[101]=}\;\left\{\left\{x1\to\frac{71}{27},\;x2\to-\frac{71}{54},\;x3\to-2\right\}\right\}$$

Lo stato che rende la risposta a gradino uguale alla sua risposta a regime sarà dunque:

$$x_0=\begin{pmatrix}\frac{71}{27}\\ -\frac{71}{54}\\ -2\end{pmatrix}$$

Per verificare che questo stato sia effettivamente quello cercato, utilizzando la struttura StateSpaceModel verifico se la risposta calcolata utilizzando questo stato sia coincidente con il valore di regime



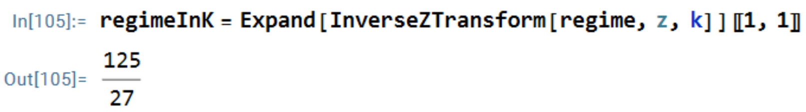
```
In[103]:= prova = StateSpaceModel[{A, B, Cc}, SamplingPeriod → 1]
```

$$\text{Out[103]=}\;\left(\begin{array}{ccc|c}-\frac{4}{125} & -\frac{204}{125} & \frac{8}{5} & 1\\ \frac{129}{125} & \frac{329}{125} & -\frac{13}{5} & -1\\ 1 & 2 & -2 & 0\\ \hline 2 & 2 & -1 & 0\end{array}\right)_1^{\mathcal{S}}$$

$$\text{In[104]:=}\;\texttt{FullSimplify}\left[\texttt{OutputResponse}\left[\left\{\texttt{prova},\left\{\frac{71}{27},\frac{-71}{54},-2\right\}\right\},1,k\right],k\in\texttt{Integers}\right]\llbracket 1,1\rrbracket$$

$$\text{Out[104]=}\;\frac{125}{27}$$

Che coincide con la risposta a regime precedentemente trovata:



```
In[105]:= regimeInK = Expand[InverseZTransform[regime, z, k]][[1, 1]]
```

$$\text{Out[105]=}\;\frac{125}{27}$$

Esercizio c

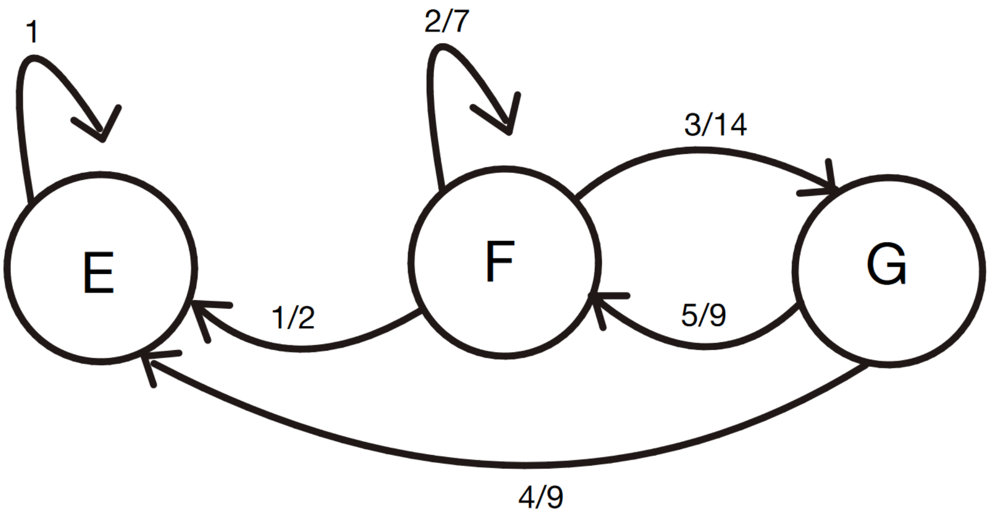
Catena di Markov Tempo Discreto avente numero di stati finiti

$$x(k+1) = \mathrm{A}\,x(k)$$

La cui matrice di transizione è:

$$A = \begin{array}{cccc} \mathrm{E} & \mathrm{F} & \mathrm{G} & \\ \left(\begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}\right. & \begin{matrix} \frac{1}{2} \\ \frac{2}{7} \\ \frac{3}{14} \end{matrix} & \left.\begin{matrix} \frac{4}{9} \\ \frac{5}{9} \\ 0 \end{matrix}\right) & \begin{matrix} \mathrm{E} \\ \mathrm{F} \\ \mathrm{G} \end{matrix} \end{array}$$

1. Grafo di transizione della catena



Il grafo di transizione di una catena di Markov consente di rappresentare le relazioni tra le variabili di stato di tutti i fenomeni il cui stato e tutti i possibili cambiamenti di stato sono di natura probabilistica. I pesi che sono presenti sugli archi del grafo rappresentano la probabilità di rimanere nello stesso stato (nel caso ci sia un auto-anello) o di effettuare una transizione verso il nodo puntato dall'arco.

Poiché la probabilità che una data grandezza presenti un particolare attributo dipende dalla storia passata di tutte le possibili realizzazioni della grandezza stessa, si introduce l'ipotesi (semplificativa) di Markov: la probabilità all'istante di tempo k dipende solamente dallo stato all'istante di tempo k-1, cioè quello subito precedente.

Visto che i nodi presenti nel grafo rappresentano tutte le possibili condizioni del sistema, la somma delle variabili di stato ad ogni passo è pari all'unità. Ciò si riflette ovviamente anche sulla nostra matrice A:

$$1°colonna = (1 + 0 + 0) = 1$$

$$2°colonna = \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{7} + \frac{3}{14}\right) = 1$$

$$3°colonna = \left(\frac{4}{9} + \frac{5}{9} + 0\right) = 1$$

La matrice A viene dunque detta "matrice stocastica per colonne".

1. Stato stazionario della catena a partire da:

(a). Ricorsione numerica a partire da uno stato iniziale stocastico scelto in maniera pseudo casuale

Partendo da uno stato iniziale pseudo-aleatorio, che rispetti i vincoli di essere composto da numeri positivi, reali e la cui somma sia 1, dopo un numero arbitrario di passi la Catena di Markov tende ad un vettore stocastico π, detto "distribuzione di probabilità stazionaria":

$$\pi \in R^3$$

Utilizzando Mathematica è possibile calcolare lo stato stazionario della catena:

Inserisco la matrice di transizione della catena di Markov:

```
In[∘]:= A = {{1, 1 / 2, 4 / 9}, {0, 2 / 7, 5 / 9}, {0, 3 / 14, 0}}
```

Out[∘]= $\left\{\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{4}{9}\right\}, \left\{0, \frac{2}{7}, \frac{5}{9}\right\}, \left\{0, \frac{3}{14}, 0\right\}\right\}$

```
In[∘]:= A // MatrixForm
```

Out[∘]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{4}{9} \\ 0 & \frac{2}{7} & \frac{5}{9} \\ 0 & \frac{3}{14} & 0 \end{pmatrix}$$

Inizializzo uno stato iniziale random sfruttando una funzione built in di Mathematica

```
In[∘]:= x0 = RandomReal[{0, 1}, 3]
Out[∘]= {0.881971, 0.643106, 0.917472}
```

Come si può facilmente notare, così com'è non è stocastico; la somma dei suoi elelementi è infatti diversa da 1

```
In[∘]:= SumElemNonNormalizzato = x0⟦1⟧ + x0⟦2⟧ + x0⟦3⟧
Out[∘]= 2.44255
```

Devo dunque normalizzare lo stato iniziale random affinchè esso risulti stocastico:

```
In[∘]:= x0normalizzato = x0 / SumElemNonNormalizzato
Out[∘]= {0.361086, 0.263293, 0.375621}
```

```
In[∘]:= SumElemNormalizzato = x0normalizzato⟦1⟧ + x0normalizzato⟦2⟧ + x0normalizzato⟦3⟧
Out[∘]= 1.
```

Utilizzo una variabile per tener traccia del numero di passi:

```
In[∘]:= npassi = 50
Out[∘]= 50
```

```
In[∘]:= For[i = 1, i ≤ npassi, i++, x0normalizzato = A.x0normalizzato]
```

Lo stato iniziale dopo npassi si presenta come:

```
In[∘]:= x0normalizzato
Out[∘]= {1., 0., 0.}
```

(b). Calcolo in forma chiusa dell’equilibrio stocastico della catena

Posso determinare lo stato stazionario della catena anche sfruttando la seguente proprietà:

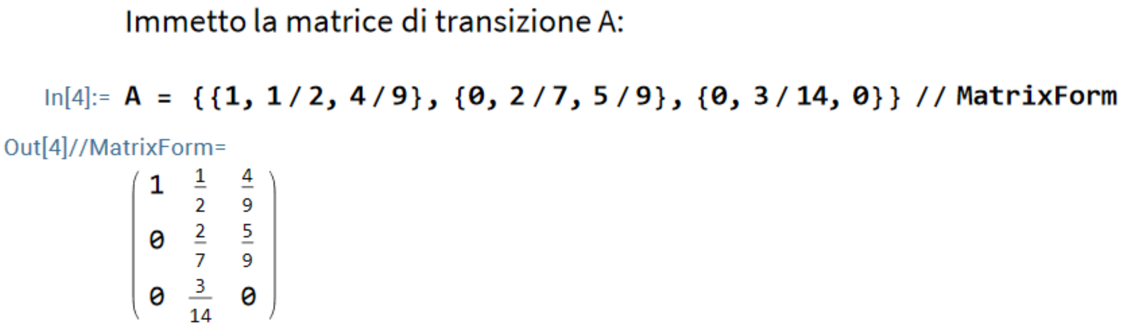
$$\pi = A\pi$$

$$(\pi - A\pi) = 0_{3\times 1}$$

$$(I - A)\pi = 0_{3\times 1}$$

con $\pi \in \ker(I - A)$

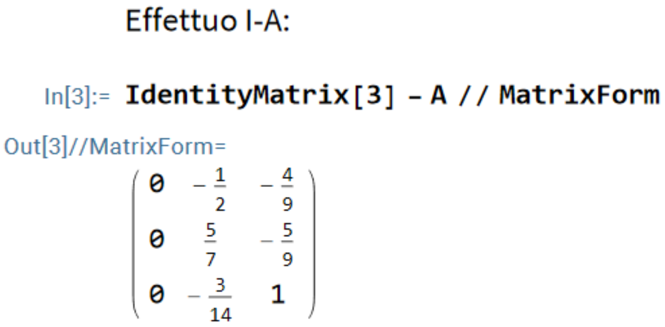
Effettuo questo calcolo utilizzando Mathematica, che servirà anche come verifica dei calcoli precedentemente effettuati:



Immetto la matrice di transizione A:

```
In[4]:= A = {{1, 1/2, 4/9}, {0, 2/7, 5/9}, {0, 3/14, 0}} // MatrixForm
Out[4]//MatrixForm=
```

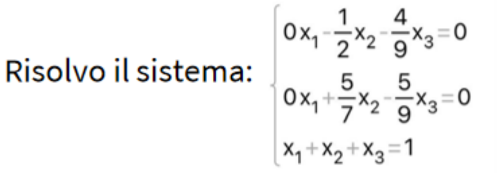
$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{4}{9} \\ 0 & \frac{2}{7} & \frac{5}{9} \\ 0 & \frac{3}{14} & 0 \end{pmatrix}$$



Effettuo I-A:

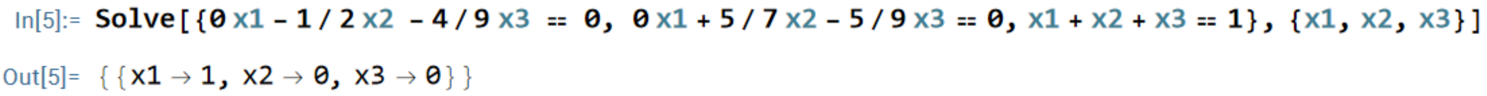
```
In[3]:= IdentityMatrix[3] - A // MatrixForm
Out[3]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{4}{9} \\ 0 & \frac{5}{7} & -\frac{5}{9} \\ 0 & -\frac{3}{14} & 1 \end{pmatrix}$$



Risolvo il sistema:

$$\begin{cases} 0x_1 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{4}{9}x_3 = 0 \\ 0x_1 + \frac{5}{7}x_2 - \frac{5}{9}x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$



```
In[5]:= Solve[{0 x1 - 1/2 x2 - 4/9 x3 == 0, 0 x1 + 5/7 x2 - 5/9 x3 == 0, x1 + x2 + x3 == 1}, {x1, x2, x3}]
Out[5]= {{x1 → 1, x2 → 0, x3 → 0}}
```

2. Evidenziare nel grafo di transizione della catena un possibile spanning tree

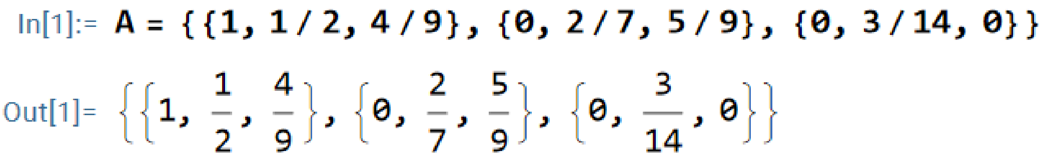
Un possibile spanning tree del grafo di transizione della Catena di Markov si ottiene considerando un sottoinsieme del grafo stesso; ogni grafo ammette infatti più spanning tree.

Per essere uno spanning tree, è necessario che vengano inclusi tutti i nodi del grafo di partenza ed un sottoinsieme di archi, scelti in modo tale da connettere tutti nodi del grafo di partenza, senza creare cicli.

Verifico innanzitutto se è rispetta la condizione di rango, che implica l'esistenza di uno spanning tree:

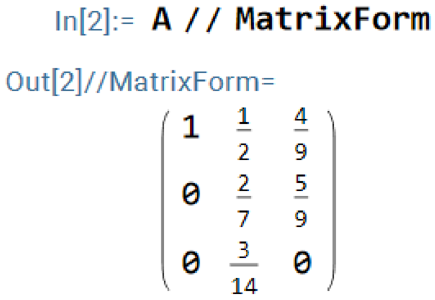
$$rg(I - A) = n - 1$$

Dove n indica il numero di nodi del grafo di transizione



```
In[1]:= A = {{1, 1/2, 4/9}, {0, 2/7, 5/9}, {0, 3/14, 0}}
```

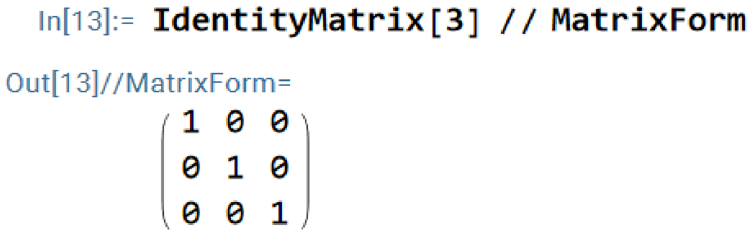
Out[1]= $\left\{\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{4}{9}\right\}, \left\{0, \frac{2}{7}, \frac{5}{9}\right\}, \left\{0, \frac{3}{14}, 0\right\}\right\}$



```
In[2]:= A // MatrixForm
```

Out[2]//MatrixForm=

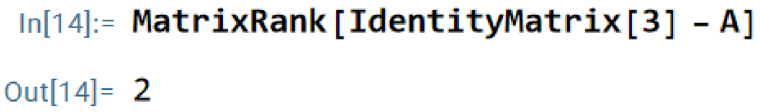
$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{4}{9} \\ 0 & \frac{2}{7} & \frac{5}{9} \\ 0 & \frac{3}{14} & 0 \end{pmatrix}$$



```
In[13]:= IdentityMatrix[3] // MatrixForm
```

Out[13]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



```
In[14]:= MatrixRank[IdentityMatrix[3] - A]

Out[14]= 2
```

Poiché:

$$rg(I - A) = 2 == (n - 1) = 2$$

posso concludere che è rispettata la condizione di rango e quindi il grafo di transizione della catena di Markov ammette spanning tree.

Un possibile spanning tree è dato da: