Дискретная математика №10

Сармин Павел

20.11.2020

1 Да, т.к. f обратима и слева и справа $\Rightarrow$ биективна

2 Т.к. $g(f(x)) = x$, значит f всюду определена, значит и g всюду определена(Это все на конечном). На бесконечном поле $\mathbb{N}$ можно взять функции $f(x) = x + 1, g(x) = y - 1$ и тут g не всюду определена. В данном случае $g(1)$ не определена, но при $x \geq 2, g(f(x))$ всюду определена

3 Раз $f(f(x)) = x$, значит у нас либо $f(x) = x$, для 1 из элементов множества A, либо $f(x) = y, f(y) = x$. Тогда рассмотрим все случаи. У нас могут 1, 3, 5, 7 элементов переходить сами в себя, а остальные друг в друга. Тогда, у нас 1 способ при переходе само в себя 7-ми элементов. $\binom{7}{5} = 21$ способов выбрать пару при переходе само в себя 5-и элементов. $\binom{7}{3} * 3 = 105$ способов при переходе само в себя 3-х элементов. И $\binom{7}{1}\frac{6!}{2!2!2!3!} = 105$ способов при переходе само в себя 1 элемента. Значит всего таких отображение:
$1 + 21 + 105 + 105 = 232$

4 Пусть $C = A \circ B$, где A, B - отношения эквивалиентности. Тогда C - отношение эквивалиентости тогда и только тогда, когда $A \circ B$ коммутируют. Иначе в C нарушается симметричность и транзитивность.

5 У нас могут быть 1, 2, 3 и 4 класса эквивалиентности. Рассмотрим все возможные разбиения. 1: $\binom{4}{1} = 4$, 2: $\binom{4}{2} = 6$, 3: $\binom{4}{3} = 4$, 4:$\binom{4}{4} = 1$. Итого всего 15 отношений эквивалиентности.

6 а) Да. Всего пар из 6 элментов 36, тут симметричность очевидно есть. Мы можем выкинуть какие то три пары вида $(x, x), (x, y), (y, x), x \in A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ и у нас все еще сохраняется симметричность, т.к. для любого $a, b \in A$ верно $(a, b) \in R, \wedge (b, a) \in R$, где R - бинарное отношение. Например из 36 пар убрать элементы $(1, 1), (1, 2), (2, 1)$
б) Предположим, что найдется такой элемент b, что $(a, b) \wedge (b, c) \in R$. Тогда элементов вида (a, b), которые отсутвуют в отношении у нас не более 3 и элементов вида (b, c) не больше 3. Тогда рассмотрим все такие различные пары. Всего их 6. $(1, a), (2, a), (3, a), (c, 4), (c, 5), (c, 6)$ (числа могут быть в разном порядке, это не сильно важно). Тогда, т.к. мы предполагаем, что все элементы вида (b, a) различны и мы вместо a не можем одновременно поставить и 4, и 5, и 6. Выходит, что элементов, которые отсутствуют в отношении больше 3, а это противоречие. Значит не найдется такого элемента b, что $(a, b) \wedge (b, c) \in R$, а это значит, что транзитивность отсутствует. Ответ: Нет.

7 а) Да, т.к. оно рефлексивно, у одного и того же числа очевидно одна и та же последняя цифра. Оно симметрично, т.к. для любых 2 чисел верно, что если $a = a_1a_2...a_kx$, $b = b_1b_2...b_mx$, то $aPb \wedge bPa$. Ну и выполняется транзитивность, возьмем еще число $c = c_1c_2...cnx$, т.к $aPb \wedge bPc$, то aPc
b) Нет, т.к. не выполняется рефлексивность
c) Рефлексивность выполняется, xRx $=0$. Симметричность тоже, просто меняется знак, но четность сохраняется. Докажем транзитивность, пусть у нас есть числа $a = 2k$, $b = 2m$, $c = 2n$ тогда, если $aRb = 2(k-m) \wedge bRc = 2(n - m)$, то $aRc = 2(k - n)$, аналогично с нечетными a, b, c, только у нас единика при R отнимаются и получается четное число.

8 а) Предположим, что это возможно, тогда при удалении ребра инцидентного 2 вершинам одинаковой степени, мы получим нечетное количество вершин нечетной степени в каждой компоненте связности, а значит таких графов быть не может. Если же ребро соединяло вершины разных степеней, то тут еще проще, 2 графа не будут изоморфны, т.к. только у одной вершины степень будет равна 2
б) Нет. Если удалить ребро между вершинами одинаковой степени мы можем получить 2 изоморфные компоненты связности. Но не можем если удалим ребро между вершинами разных степеней