# Мат. Анал. - I; Семинар 10

## Листок 4 (Часть III), Листок 5 (Часть I)

### ⑤ [из Листок 4]

Вычислить пределы:

e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x - b^x}{x}$, $a, b > 0$ f) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{e^x - e^2}{(x-4)e^x + x\cdot e^2}$

<u>Решение</u> e) т.к. $e^x = 1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \dots + \dfrac{x^n}{n!} + \bar{o}(x^n)$, то

$$a^x = e^{\ln a\cdot x} = 1 + \frac{\ln a\cdot x}{1!} + \frac{(\ln a\cdot x)^2}{2!} + \dots + \frac{(\ln a\cdot x)^n}{n!} + \underbrace{\bar{o}((\ln a\, x)^n)}_{\bar{o}(x^n)}$$

При $n = 1$ имеем:

$$\lim_{x\to 0}\left\{\frac{a^x - b^x}{x} = \frac{1 + \ln a\cdot x + \bar{o}(x) - (1 + \ln b\cdot x + \bar{o}(x))}{x} = \right.$$

$$= \frac{(\ln a - \ln b)\,x + \bar{o}(x)}{x} = \frac{x(\ln\frac{a}{b} + \bar{o}(1))}{x} \ominus$$

// т.к. $\bar{o}(f) \pm \bar{o}(f) = \bar{o}(f)$ //

// т.к. $\bar{o}(f\cdot g) = f\cdot\bar{o}(g) = f\cdot g\cdot\bar{o}(1)$ //

$\Downarrow$

$\bar{o}(x) = x\cdot\bar{o}(1)$

$$\ominus \left.\ln\frac{a}{b} + \bar{o}(1)\right\} = \ln\frac{a}{b} + 0 = \boxed{\ln\frac{a}{b}}$$

f) сделаем замену переменной $x = t + 2$, тогда исходный предел можно переписать как:

$$\lim_{t\to 0}\left\{\frac{e^t\cdot \cancel{e^2} - \cancel{e^2}}{(t-2)\cdot e^t\cdot\cancel{e^2} + (t+2)\cdot\cancel{e^2}} = \frac{e^t - 1}{(t-2)\cdot e^t + t + 2}\right. \ominus$$

$$= \frac{(1+t+\bar{o}(t))-1}{(t-2)(1+t+\bar{o}(t))+t+2} =$$

// В силу формулы $e^t = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \dots + \frac{t^n}{n!} + \bar{o}(t^n)$

при $n=1$ //

$$= \frac{t+\bar{o}(t)}{[\cancel{t}+t^2+\bar{o}(t^2)-\cancel{2}-\cancel{2t}+\bar{o}(t)]+\cancel{t}+\cancel{2}}$$

Т.к. $f\cdot\bar{o}(g) = \bar{o}(f\cdot g)$ $\quad$ $const\cdot\bar{o}(f) = \bar{o}(f)$

$const \neq 0$

$$\| $$

$$\frac{t+\bar{o}(t)}{t^2+\bar{o}(t^2)+\bar{o}(t)}$$

$$\| $$

$$\frac{t+\bar{o}(t)}{\bar{o}(t)}$$

//Т.к. $\bar{o}(x^n)+\bar{o}(x^k) = \bar{o}(x^{\min(k,n)})$//

$n,k \in \mathbb{N}$

$x \to 0$

$t^2 \in \bar{o}(t)$, $t \to 0$//

$$\| $$

$$\frac{1+\bar{o}(1)}{\bar{o}(1)}$$

$$\Downarrow$$

$\boxed{\text{Предел не существует}}$ (или равен $\pm\infty$, но это требует дополнительного исследование, которое здесь не нужно). ▲

Доказать следующие соотношения: при $x \to a$.

a) $\bar{\bar{o}}(\bar{\bar{o}}(f)) = \bar{\bar{o}}(f)$

b) $\underline{\underline{O}}(\bar{\bar{o}}(f)) = \bar{\bar{o}}(f)$

c) $\underline{\underline{O}}(\underline{\underline{O}}(f)) = \underline{\underline{O}}(f)$

d) $\underline{\underline{O}}(f) + \bar{\bar{o}}(f) = \underline{\underline{O}}(f)$

e) $\bar{\bar{o}}(f) = \underline{\underline{O}}(f)$

Обратите внимание, что во всех этих соотношениях символ $=$ является символом $\subseteq$, это традиция.

[т.е. например
$\bar{\bar{o}}(f) = \underline{\underline{O}}(f)$ - верно
$\underline{\underline{O}}(f) = \bar{\bar{o}}(f)$ - неверно]

Опр. ($g \in \underline{\underline{O}}(f)$ при $x \to a$)
$\Updownarrow$
(∃ функция $\beta(x)$ такая, что
$\begin{cases} g(x) = \beta(x) \cdot f(x) & \text{в некоторой окрестности } U(a) \\ \beta(x) \text{ ограничена в } U(a) \end{cases}$)

Док a)

нужно доказать, что $g \in \bar{\bar{o}}(\bar{\bar{o}}(f)) \Rightarrow g \in \bar{\bar{o}}(f)$.

$g \in \bar{\bar{o}}(\bar{\bar{o}}(f))$ значит, что ∃ ф-и $h$ такая, что:

$\lim\limits_{x\to a} \frac{g}{h} = 0$ и $\lim\limits_{x\to a} \frac{h}{f} = 0$

Но это значит, что:

$$\lim_{x\to a} \frac{g}{f} = \lim_{x\to a}\left(\frac{g}{h}\cdot\frac{h}{f}\right) = \lim_{x\to a}\frac{g}{h}\cdot\lim_{x\to a}\frac{h}{f} = \underset{\Uparrow}{0\cdot 0 = 0}$$
$g \in \bar{\bar{o}}(f)$

b) Нужно доказать, что:

$$g \in \underline{O}(\bar{o}(f)) \Rightarrow g \in \bar{o}(f).$$

$g \in \underline{O}(\bar{o}(f))$ значит, что $\exists$ ф-и $\beta$ и $h$ такие, что:

$$\begin{cases} g(x) = \beta(x) \cdot h(x) \text{ и } \beta(x) \text{ ограничена в окрестности } a \\ \lim\limits_{x \to a} \dfrac{h(x)}{f(x)} = 0 \end{cases}$$

ограничена при $x \to a$

Значит: $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{g(x)}{f(x)} = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{\beta(x) \cdot h(x)}{f(x)} = 0 \Rightarrow g \in \bar{o}(f).$

0

c) $\underline{O}(\underline{O}(f)) = \underline{O}(f).$

Нужно доказать, что $g \in \underline{O}(\underline{O}(f)) \Rightarrow g \in \underline{O}(f).$

$g \in \underline{O}(\underline{O}(f))$ означает, что $\exists$ ф-и $\beta(x)$, $\alpha(x)$, $h(x)$ такие, что:

$$\begin{cases} g(x) = \alpha(x) \cdot h(x) \text{ и } \alpha(x) \text{ ограничена в окрестности т. } a. \\ h(x) = \beta(x) \cdot f(x) \text{ и } \beta(x) \text{ ограничена в окрестности т. } a. \end{cases}$$

Значит $g(x) = \underbrace{\alpha(x) \cdot \beta(x)}_{\text{ограничена в окрестности т. } a} \cdot f(x) \Rightarrow g \in \underline{O}(f).$

d) $\underline{O}(f) + \bar{o}(f) = \underline{O}(f)$

Нужно доказать, что $g \in \underline{O}(f) + \bar{o}(f) \Rightarrow g \in \underline{O}(f)$

$g \in \underline{\underline{O}}(f) + \bar{\bar{o}}(f)$ означает, что

$g(x) = h(x) + s(x)$, где $h \in \underline{\underline{O}}(f)$, $s \in \bar{\bar{o}}(f)$.

- $h \in \underline{\underline{O}}(f) \Rightarrow h(x) = \beta(x) \cdot f(x)$, где $\beta(x)$ огранич. в окрестности т. $a$.
- т.к. $s \in \bar{\bar{o}}(f)$, то $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{s(x)}{f(x)} = 0$, т.е. $s(x) = \alpha(x) \cdot f(x)$, где $\alpha(x) \to 0$, при $x \to a$

$// \ \alpha(x) = \dfrac{s(x)}{g(x)} \ //$

Значит $g(x) = h(x) + s(x)$

$= \beta(x) \cdot f(x) + \alpha(x) \cdot f(x)$

$= \underbrace{(\alpha(x) + \beta(x))} \cdot f(x) \Rightarrow g \in \underline{\underline{O}}(f)$.

обе ф-и ограничены в окрестности т.$a$

e) $\bar{\bar{o}}(f) = \underline{\underline{O}}(f)$

Нужно доказать, что $g \in \bar{\bar{o}}(f) \Rightarrow g \in \underline{\underline{O}}(f)$.

$g \in \bar{\bar{o}}(f) \Rightarrow g(x) = \alpha(x) \cdot f(x)$, где $\alpha(x) \to 0$ при $x \to a$.

т.к. $\alpha(x)$ ограничена в окрестности т. $a$, то $g \in \underline{\underline{O}}(f)$. ▲

Какие из следующих утверждений справедливы при $x \to 0$?

a) $\bar{o}(x^3) = \underline{\underline{O}}(x^3)$

b) $\underline{\underline{O}}(x^3) = \bar{o}(x^3)$

c) $\underline{\underline{O}}(x^3) = \bar{o}(x^2)$

d) $(x + x^2 + \bar{o}(x^2))^2 = x^2 + \bar{o}(x^2)$

e) $(x + x^2 + \bar{o}(x^2))^2 = x^2 + \bar{o}(x^3)$

Док. a) верно, что немедленно следует из пункта e) Задачи 1.

b) не верно, т.к., например $x^3 \in \underline{\underline{O}}(x^3)$ и $x^3 \notin \bar{o}(x^3)$

$x^3 = \underbrace{1}_{\beta(x)} \cdot x^3$ $\quad \lim\limits_{x \to 0} \frac{x^3}{x^3} = 1 \neq 0$

c) верно, действительно, покажем, что

$g \in \underline{\underline{O}}(x^3) \Rightarrow g \in \bar{o}(x^2)$

$g \in \underline{\underline{O}}(x^3) \Rightarrow \exists \beta(x)$ такая, что
$$\begin{cases} g(x) = \beta(x) \cdot x^3 \\ \beta(x) \text{ ограничена в окрестности т. } 0. \end{cases}$$

Значит $\lim\limits_{x \to 0} \frac{g}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\beta(x) \cdot x^3}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \underbrace{\beta(x)}_{\text{ограничено}} \cdot x^{\to 0} = 0$

d) Заметим, что:

$$\left(x+x^2+\bar{\bar{o}}(x^2)\right)^2=\left(x+x^2+\bar{\bar{o}}(x^2)\right)\cdot\left(x+x^2+\bar{\bar{o}}(x^2)\right)$$

$$= x^2+x^3+x\cdot\bar{\bar{o}}(x^2)$$

$$+$$

$$x^3+x^4+x^2\cdot\bar{\bar{o}}(x^2)$$

$$+$$

$$x\cdot\bar{\bar{o}}(x^2)+x^2\cdot\bar{\bar{o}}(x^2)+\bar{\bar{o}}(x^2)\cdot\bar{\bar{o}}(x^2)$$

$$=$$

Сначала покажем, что если $m,n\in\mathbb{N}$ и $m\le n$, то

$$\boxed{\bar{\bar{o}}(x^m)+\bar{\bar{o}}(x^n)=\bar{\bar{o}}(x^m)\quad,\ x\to0.}\quad (*)$$

нужно доказать, что $\left(g\in\bar{\bar{o}}(x^m)+\bar{\bar{o}}(x^n)\right)\Rightarrow\left(g\in\bar{\bar{o}}(x^m)\right)$

$g\in\bar{\bar{o}}(x^m)+\bar{\bar{o}}(x^n)$ означает, что

$$g=h+s,\ \text{где}\ h\in\bar{\bar{o}}(x^m)\ \text{и}\ s\in\bar{\bar{o}}(x^n).$$

Значит

$$\lim_{x\to0}\frac{g}{x^m}=\lim_{x\to0}\frac{h+s}{x^m}=\overbrace{\lim_{x\to0}\frac{h}{x^m}}^{\to 0}+\lim_{x\to0}\frac{s}{x^m}$$

$$\|$$

$$0=0+0=0+\lim_{x\to0}\underbrace{\left(\frac{s}{x^n}\right)}_{\to0\ \text{т.к.}\ s\in\bar{\bar{o}}(x^n)}\cdot\overbrace{x^{n-m}}^{\to0\ \text{т.к.}\ n-m\ge0}$$

$$\Downarrow$$

$$g\in\bar{\bar{o}}(x^m).$$

Из $(*)$ мы имеем $\underbrace{x^n}_{\bar{\bar{o}}(x^m)}+\bar{\bar{o}}(x^m)=\bar{\bar{o}}(x^m),\ x\to0.\quad m,n\in\mathbb{N},\ m\le n.$

Мы уже доказали [см. стр. 10.5 из Семинар 10], что

$$\bar{\bar{o}}(f\cdot g)=f\cdot\bar{\bar{o}}(g)=f\cdot g\cdot\bar{\bar{o}}(1),\quad x\to a.$$

$\ominus\ x^2+2x^3+x^4+\bar{o}(x^3)+\bar{o}(x^4)+\bar{o}(x^3)+\bar{o}(x^4)+$
$+\bar{o}(x^2)\cdot\bar{o}(x^2)$

$= x^2+\bar{o}(x^3)+\bar{o}(x^2)\cdot\bar{o}(x^2)+2x^3 \ \ominus$

$\bar{o}(x^3)+\bar{o}(x^4)=\bar{o}(x^3)$
$x^4+\bar{o}(x^3)=\bar{o}(x^3)$

Заметим, что $\boxed{\bar{o}(f)\cdot\bar{o}(g)=\bar{o}(f\cdot g),\quad x\to a}$

Нужно доказать, что $h\in\bar{o}(f)\cdot\bar{o}(g)$, то $h\in\bar{o}(f\cdot g)$

$h\in\bar{o}(f)\cdot\bar{o}(g)$ означает, что $h=f_1\cdot g_1$, где
$f_1\in\bar{o}(f)$, $g_1\in\bar{o}(g)$

Тогда мы имеем:

$$\lim_{x\to a}\frac{h}{f\cdot g}=\lim_{x\to a}\frac{f_1\cdot g_1}{f\cdot g}=\underbrace{\lim_{x\to a}\frac{f_1}{f}}_{=0}\cdot\underbrace{\lim_{x\to a}\frac{g_1}{g}}_{=0}=0\cdot0=0$$

$\ominus\ x^2+2x^3+\bar{o}(x^3)+\bar{o}(x^4)$

$\bar{o}(x^2)\cdot\bar{o}(x^2)=\bar{o}(x^4)$

$= x^2+\underbrace{2x^3}_{\in\,\bar{o}(x^2)}+\bar{o}(x^3)$ ①

$= x^2+\bar{o}(x^2)$

Значит утверждение верно.

e) Неверно, что немедленно следует из равенства ①.

Вычислить пределы

a) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{1/x^2}$

c) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{\ln(10+e^x)}{x}\right)^{\sqrt{e^{2x+5}}}$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^x-1}{1-\cos x}$

d) $\lim\limits_{x\to 1}\left[\ln(e^x+x-1)\right]^{\frac{1}{\sqrt[3]{x}-1}}$

<u>Решение</u> a) В силу формулы

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\dots+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\bar{o}(x^{2n+1}),\ x\to 0$$

мы имеем
$$\begin{cases}\cos x = 1-\dfrac{x^2}{2}+\bar{o}(x^3)\\ \cos(2x)=1-\dfrac{(2x)^2}{2}+\bar{o}(x^3) = 1-2x^2+\bar{o}(x^3)\end{cases}$$

Значит:

$$\lim_{x\to 0}\left\{\left(\frac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}}\right. = e^{\left\{\ln\frac{\cos x}{\cos 2x}\right\}\cdot\frac{1}{x^2}} = e^{\frac{\ln\cos x-\ln\cos 2x}{x^2}} =$$

$$= e^{\frac{\ln(\overbrace{1-\frac{x^2}{2}+\bar{o}(x^3)}^{//\,t}) - \ln(1\overbrace{-2x^2+\bar{o}(x^3)}^{//\,z})}{x^2}}$$

$$\ln(1+x) = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\dots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+\bar{o}(x^n)$$

$$e^{\frac{t+\bar{o}(t)-(z+\bar{o}(z))}{x^2}}$$

$$e^{\frac{-\frac{x^2}{2}+\bar{\bar{o}}(x^3)+\bar{\bar{o}}\left(-\frac{x^2}{2}+\bar{\bar{o}}(x^3)\right)-\left[-2x^2+\bar{\bar{o}}(x^3)+\bar{\bar{o}}(-2x^2+\bar{\bar{o}}(x^3))\right]}{x^2}}$$

$$\bar{\bar{o}}\left(-\frac{x^2}{2}+\bar{\bar{o}}(x^3)\right)=\bar{\bar{o}}(\underline{\underline{O}}(x^2))\overset{(11)}{=}\bar{\bar{o}}(x^2)$$

$$\boxed{\bar{\bar{o}}(\underline{\underline{O}}(f))=\bar{\bar{o}}(f),\quad x\to a}$$

Нужно доказать, что:

$$g\in\bar{\bar{o}}(\underline{\underline{O}}(f))\Rightarrow g\in\bar{\bar{o}}(f).$$

$g\in\bar{\bar{o}}(\underline{\underline{O}}(f))$ значит, что $\exists$ ф-и $h(x)$ и $\alpha(x)$ такие, что:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to a}\frac{g}{h}=0\\ h(x)=\alpha(x)\cdot f(x),\ \text{где } \alpha(x) \text{ ограничена в окрестности т. } 0.\end{cases}$$

Значит

$$\lim_{x\to a}\frac{g}{f}=\lim_{x\to a}\frac{g}{h}\cdot\frac{h}{f}=\lim_{x\to a}\frac{g}{h}\cdot\frac{\alpha\cdot f}{f}$$

$$\| $$

$$g\in\bar{\bar{o}}(f)\Leftarrow\lim_{x\to a}\underbrace{\left(\frac{g}{h}\right)}_{\to 0}\cdot\underbrace{\alpha}_{\text{огранич.}}=0$$

$$e^{\frac{\frac{3}{2}x^2+\overbrace{\bar{\bar{o}}(x^3)+\bar{\bar{o}}(x^2)+\bar{\bar{o}}(x^3)+\bar{\bar{o}}(x^2)}^{\bar{\bar{o}}(x^2)}}{x^2}}\overset{(11)}{=}e^{\left(\frac{3}{2}x^2+\bar{\bar{o}}(x^2)\right)/x^2}=e^{\frac{3}{2}+\bar{\bar{o}}(1)}=e^{\frac{3}{2}+0}=\boxed{e^{\frac{3}{2}}}$$