Лекция 11

1. $o - O$ символика: продолжение

Определение 1. Пусть f и g определены на множестве D и a предельная для D точка. Пишут $f = \underline{O}(g)$ при $x \to a$ (f есть о большое от g), если $f(x) = h(x)g(x)$ и для некотрой проколотой окрестности $B'_r(a)$ функция h ограничена на множесвте $D \cap B'_r(a)$.

Пример 2. $(\frac{1}{x} + \sin x) = \underline{O}(x)$ при $x \to \infty$, но $(\frac{1}{x} + \sin x) \neq \underline{O}(x)$ при $x \to 0$.

Определение 3. Пусть f и g определены на множестве D и a предельная для D точка. Говорят, что f **эквивалентна** g при $x \to a$ (и пишут $f \sim g$ при $x \to a$), если выполнено $f(x) = g(x) + \bar{o}(g)$, где $\bar{o}(g)$ при $x \to a$.

Нетрудно видеть, что введено отношение эквивалентности.

Чуть позже, с помощью дифференциального исчисления, мы докажем, что

1) $e^x = \sum\limits_{j=0}^{n} \frac{x^j}{j!} + \bar{o}(x^n)$ при $x \to 0$;

2) $\sin x = \sum\limits_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j x^{2j+1}}{(2j+1)!} + \bar{o}(x^{2n+2})$ при $x \to 0$;

3) $\cos x = \sum\limits_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j x^{2j}}{(2j)!} + \bar{o}(x^{2n+1})$ при $x \to 0$;

4) $\ln(1+x) = \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{(-1)^{j-1} x^j}{j} + \bar{o}(x^n)$ при $x \to 0$;

5) $(1+x)^\alpha = \sum\limits_{j=0}^{n} \frac{\alpha \cdot (\alpha-1) \cdot \ldots \cdot (\alpha-j+1)}{j!} \cdot x^j + \bar{o}(x^n)$ при $x \to 0$.

Приведенные формулы позволяют вычислять более сложные пределы.

Пример 4.

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x - (x - \frac{x^3}{3!} + \bar{o}(x^4))}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{3!} + \bar{o}(x^4)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{3!} + \bar{o}(x)}{1} = \frac{1}{3!}.$$

2. Дифференцируемые функции, дифференциал

Определение 5. **Линейной** называется такая функция $\ell \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, что для произвольных $\lambda, \mu, h_1, h_2 \in \mathbb{R}$ выполнено $\ell(\lambda h_1 + \mu h_2) = \lambda \ell(h_1) + \mu \ell(h_2)$.

Легко видеть, что каждая линейная функция имеет вид $\ell(h) = \ell(1) \cdot h = Ah$, где A — некоторое число. Таким образом, пространство всех линейных функций образует одномерное линейное пространство с базисной функцией ℓ_0, $\ell_0(h) = h$. Т.е. произвольная линейная функция имеет вид $\ell = A \cdot \ell_0$.

Определение 6. Пусть f определена в некоторой окрестности точки a. Говорят, что функция f **дифференцируема** в точке a, если существуют такие линейная функция ℓ и функция α, $\lim\limits_{h\to 0} \alpha(h) = 0$, что при каждом $h \in \mathbb{R}$ выполнено тождество

$$f(a+h) = f(a) + \ell(h) + \alpha(h)h.$$

Линейную функцию ℓ называют **дифференциалом** функции f в точке a и обозначают df или $df\big|_{x=a}$.

Пример 7. Например для функции $f_1(x) = x$ выполнено $f_1(a+h) = f_1(a) + h$, т.е. $df_1(h) = h$ и $df_1 = \ell_0$.

Аналогично для функции $f_2(x) = x^2$ выполнено $f_2(a+h) = f_2(a) + 2ah + h^2$, т.е. $df_2\big|_{x=a}(h) = 2ah = 2adx(h)$, откуда получаем, что $df_2\big|_{x=a} = 2adx$. В этом примере $\alpha(h) = h$.

Определение 8. Пусть f определена в некоторой окрестности точки a. Если существует предел $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$, то его называют **производной** функции f в точке a и обозначают $f'(a)$ или $\frac{df}{dx}(a)$.

Пример 9. Заметим, что

$$\frac{de^x}{dx}\Big|_{x=a}=\lim_{h\to 0}\frac{e^{a+h}-e^a}{h}=e^a\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=e^a;$$

$$\frac{d\sin x}{dx}\Big|_{x=a}=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(a+h)-\sin(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(a)(\cos h-1)+\sin(h)\cos a}{h}=\cos a.$$

Аналогично $(\cos x)'=-\sin x$.

Предложение 10. *Функция f дифференцируема в точке a тогда и только тогда, когда в этой точке существует производная $f'(a)$. Кроме того, в случае дифференцируемости $df\big|_{x=a}(h)=f'(a)h$ или, другими словами, $df\big|_{x=a}=f'(a)dx$.*

Доказательство. Если функция f дифференцируема в точке a, то для некоторой линейной функции $\ell(h)=Ah$ выполнено $f(a+h)-f(a)=Ah+\alpha(h)h$, что равносильно

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=A+\alpha(h)\to A.$$

Т.е. производная $f'(a)$ существует и равна A. Наоборот, если произодная $f'(a)$ существует, то

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)+\alpha(h),$$

где $\lim\limits_{h\to 0}\alpha(h)=0$. $\square$

В частности, дифференциал дифференцируемой в точке a функции определен однозначно.

Пример 11. Функция $f(x)=|x|$ непрерывна в точке $a=0$, но не дифференцируема в этой точке.

3. Свойства дифференцируемых функций.

Предложение 12. *Пусть f и g определены в некоторой окрестности точки a и дифференцируемы в точке a. Тогда*

1) f непрерывна в точке a;

2) функция $\lambda f+\mu g$ дифференцируема в точке a и $(\lambda f+\mu g)'(a)=\lambda f'(a)+\mu g'(a)$;

3) функция fg дифференцируема в точке a и $(fg)'(a)=f'(a)g(a)+f(a)g'(a)$ (Правило Лейбница);

4) если g отлична от нуля в некоторой окрестности точки a, то $\frac{f}{g}$ дифференцируема в точке a и $(\frac{f}{g})'(a)=\frac{f'(a)g(a)-f(a)g'(a)}{(g(a))^2}$.

Доказательство. 1) $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}(f(a)+f'(a)(x-a)+\alpha(x-a)\cdot(x-a))=f(a)$.

3) $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)g(x)-f(a)g(a)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}g(x)+\lim\limits_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}f(a)=f'(a)g(a)+f(a)g'(a)$.

4) $\lim\limits_{x\to a}\frac{\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{f(a)}{g(a)}}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)g(a)-f(a)g(x)}{x-a}\cdot\frac{1}{g(x)g(a)}=$

$=\frac{1}{(g(a))^2}\lim\limits_{x\to a}\frac{(f(x)-f(a))g(a)-f(a)(g(x)-g(a))}{x-a}=\frac{f'(a)g(a)-f(a)g'(a)}{(g(a))^2}$. $\square$

Замечание 13. Предыдущие свойства могут быть записаны в следующем виде:
$d(\lambda f+\mu g)=\lambda df+\mu dg$, $d(fg)=fdg+gdf$, $d\frac{f}{g}=\frac{gdf-fdg}{g^2}$.

Пример 14. $(\operatorname{tg}x)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{\cos^2x+\sin^2x}{\cos^2x}=\frac{1}{\cos^2x}=1+\operatorname{tg}^2x$.