МА-I

СЕМИНАР 12

Листок 6+ (подготовительный)

Правила вычисления производной

I) Общие формулы:

a) $(f \pm g)' = f' \pm g'$

b) $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$ /формула Лейбница/

c) $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$

d) $(f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g'$

II) Конкретные формулы:

a) $(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha - 1}$, где $x > 0$ и $\alpha \in \mathbb{R}$

или

$x \in \mathbb{R}$ и $\alpha \in \mathbb{N}$

например $(x^{1/7})' = \frac{1}{7} \cdot x^{-\frac{6}{7}}$

b) $(a^x)' = \ln(a) \cdot a^x$, где $a > 0$

В частности:

b') $(e^x)' = e^x$.

c) $(\log_a x)' = \dfrac{1}{\ln(a)\cdot x}$, где $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$

В частности:

c') $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

d) $(\cos x)' = -\sin x$

e) $(\sin x)' = \cos x$

f) $(tg\, x)' = \left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)' \overset{I.c)}{=} \dfrac{(\sin x)'\cdot\cos x - \sin x\cdot(\cos x)'}{\cos^2 x}$

$\overset{II.d),\ II.e)}{=} \dfrac{\cos x\cdot\cos x - \sin x\cdot(-\sin x)}{\cos^2 x}$

$= \dfrac{1}{\cos^2 x}$

g) $(ctg\, x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$ // вычисляется аналогично $tg\, x$ //

h) $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

По определению $\arcsin x$, мы имеем.

$\sin \circ \arcsin = x \quad \forall x \in [-1, 1]$

$\Rightarrow$ возьмем производную от обоих частей равенства $\Rightarrow$

$(\sin\circ\arcsin)' \overset{I.d)}{=} (\sin'\circ\arcsin)\cdot(\arcsin)' = (x)' = 1.$

$\sin'\circ\arcsin = \cos\circ\arcsin = \sqrt{1-\sin^2\circ\arcsin} = \sqrt{1-x^2}$

// т.к. $\cos x = \pm\sqrt{1-\sin^2 x}$ и $\arcsin x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \Rightarrow \cos\arcsin x \geq 0$ //

Значит

$$\sqrt{1-x^2}\cdot(\arcsin x)'=1 \Rightarrow (\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \forall x\in(-1,1).$$

к) $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

е) $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

т) $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

н) $(\mathrm{const})' = 0.$

---

⑤ // листок 6+ //

Вычислить производную ф-и $f(x) = x\cdot\arcsin\sqrt{1-2x^3}$

Решение

Заметим, что:

$$f'(x) = \left(x\cdot\arcsin\circ\sqrt{1-2x^3}\right)'$$
$$= x'\cdot\arcsin\circ\sqrt{1-2x^3} + x\cdot\left(\arcsin\circ\sqrt{1-2x^3}\right)'$$
$$= 1\cdot\arcsin\sqrt{1-2x^3} + x\left[(\arcsin)'\circ\sqrt{1-2x^3}\right]\cdot\left(\sqrt{1-2x^3}\right)'$$

$\bullet \left(\sqrt{1-2x^3}\right)' = \left(\sqrt{x}\circ(1-2x^3)\right)' = \left[(\sqrt{x})'\circ(1-2x^3)\right]\cdot(1-2x^3)' =$
$= \left[\frac{1}{2}x^{-1/2}\circ(1-2x^3)\right]\cdot(-6x^2) = -3\cdot\dfrac{x^2}{\sqrt{1-2x^3}}$

$\bullet (\arcsin)'\circ\sqrt{1-2x^3} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\circ\sqrt{1-2x^3} = \dfrac{1}{\sqrt{1-(1-2x^3)}} =$
$= \dfrac{1}{\sqrt{2x^3}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}x^{-3/2}$ //

$$= \operatorname{arcsin}\sqrt{1-2x^3} + x\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}x^{-3/2}\cdot(-3)\cdot\frac{x^2}{\sqrt{1-2x^3}}$$

// в заданиях на взять производную **не** следует пытаться упростить выражение, в котором уже нет производных

⑥ // Листок 6+ //

Вычислить четвертую производную ф-и $f(x) = e^x\cdot\ln x$.

<u>Решение</u> Напомним, что $f^{(n)} \overset{def}{=} \left(f^{(n-1)}\right)'$, $\forall n\geq 2$.

- $f^{(1)} = f' = (e^x\cdot\ln x)' = (e^x)'\cdot\ln x + e^x\cdot(\ln x)'$

$$= \underbrace{e^x\cdot\ln x}_{= f} + e^x\cdot\frac{1}{x}$$

- $f^{(2)} = \left(f^{(1)}\right)' = \left(e^x\ln x + e^x\cdot\frac{1}{x}\right)'$

$$= \left(f + e^x\cdot\frac{1}{x}\right)'$$

$$= f' + \left(e^x\cdot\frac{1}{x}\right)'$$

$$= \underbrace{e^x\cdot\ln x + e^x\cdot\frac{1}{x}}_{= f'} + (e^x)'\cdot\frac{1}{x} + e^x\cdot\left(\frac{1}{x}\right)'$$

$$= e^x\left[\ln x + \frac{1}{x} + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right]$$

$$= e^x\left[\ln x + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}\right]$$

- $f^{(3)} = \left(f^{(2)}\right)' = \left(e^x\left[\ln x + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}\right]\right)'$

$$= (e^x)'\cdot\left(\ln x + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}\right) + e^x\cdot\left(\ln x + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}\right)'$$

$$= e^x\left[\ln x + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{2}{x^3}\right]$$

$$= e^x\left[\ln x + \frac{3}{x} - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3}\right]$$

- $$f^{(4)} = (f^{(3)})' = e^x\left[\ln x + \frac{3}{x} - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x} - \frac{3}{x^2} + \frac{6}{x^3} - \frac{6}{x^4}\right]$$

$$\boxed{= e^x\left[\ln x + \frac{4}{x} - \frac{6}{x^2} + \frac{8}{x^3} - \frac{6}{x^4}\right]}$$

⑦ //Листок 6+//

Пусть функция f дифференцируема в точке α и $f(\alpha) > 0$. Тогда найти $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{f(\alpha+\frac{1}{n})}{f(\alpha)}\right)^n$

Решение Заметим, что:

$$\lim_{n\to+\infty}\left\{\left(\frac{f(\alpha+\frac{1}{n})}{f(\alpha)}\right)^n = e^{\ln\left[\frac{f(\alpha+\frac{1}{n})}{f(\alpha)}\right]\cdot n}\right.$$

$$= e^{(\ln(f(\alpha+1/n)) - \ln f(\alpha))\cdot n}$$ [здесь мы используем $f(\alpha)>0$]

$$\left.= e^{\frac{\ln(f(\alpha+\frac{1}{n})) - \ln(f(\alpha))}{1/n}}\right\} \ominus$$

$$\ominus\ e^{\underbrace{\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\ln(f(\alpha+1/n)) - \ln(f(\alpha))}{1/n}}_{\parallel}} = e^{(\ln f(x))'|_{x=\alpha}} \ominus$$

$(\ln f(x))'\Big|_{x=\alpha}$ по определению производной

$\shortparallel$

$$(\ln\circ f(x))' = [(\ln)'\circ f]\cdot f' = \left[\frac{1}{x}\circ f\right]\cdot f' = \frac{f'}{f}$$

$$\ominus\ e^{\left.\frac{f'(x)}{f(x)}\right|_{x=a}} = \boxed{e^{\frac{f'(a)}{f(a)}}}$$

(1) // Листок 6+ //

Вычислить предел:

$$\lim_{x\to 0} (\cos(3x))^{\frac{1}{\sin x^2}}$$

Решение Заметим, что:

$$\lim_{x\to 0}\left\{\cos(3x)^{\frac{1}{\sin x^2}} = e^{[\ln(\cos(3x))]\cdot\frac{1}{\sin x^2}}\right\} \ominus$$

$$\ominus\ e^{\lim\limits_{x\to 0}\left\{[\ln\cos(3x)]\cdot\frac{1}{\sin x^2}\right\}} \ominus$$

$$\left[\ln\cos(3x)\cdot\frac{1}{\sin x^2} = \frac{\ln\left(1-2\sin^2\left(\frac{3}{2}x\right)\right)\cdot}{\sin x^2} = \right.$$

$$\left.= \underbrace{\frac{\ln\left(1-2\sin^2\left(\frac{3}{2}x\right)\right)}{-2\sin^2\left(\frac{3}{2}x\right)}}_{1} \cdot -2\underbrace{\frac{\sin^2\left(\frac{3}{2}x\right)}{\left(\frac{3}{2}x\right)^2}}_{1^2} \cdot \overbrace{\left(\tfrac{3}{2}x\right)^2}^{\frac{9}{4}} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sin x^2}\cdot\frac{x^2}{x^2}}_{1}\right]$$

т.к. $\frac{\ln(1+x)}{x} \to 1,\ x\to 0$

т.к. $\frac{\sin x}{x} \to 1$, $x\to 0$

т.к. $\frac{\sin x}{x} \to 1$, $x\to 0$

$$\ominus\ e^{1\cdot(-2)\cdot 1^2\cdot\frac{9}{4}\cdot 1} = \boxed{e^{-\frac{9}{2}}}$$

Вычислить предел:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x^3 + 3\ln(1+x^3) + \operatorname{arctg}(x^6)}{e^{x^3} - \cos(x^2)}$$

Решение. Прежде всего вспомним формулы Тейлора:

$$\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \dots + (-1)^{2n-1} \cdot \frac{t^{2n-1}}{(2n-1)!} + \bar{o}(t^{2n})_{t\to 0}$$

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \dots + (-1)^{n+1} \cdot \frac{t^n}{n} + \bar{o}(t^n)_{t\to 0}$$

$$\operatorname{arctg}(t) = t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \dots + (-1)^{n+1} \cdot \frac{t^{2n-1}}{2n-1} + \bar{o}(t^{2n})_{t\to 0}$$

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \dots + \frac{t^n}{n!} + \bar{o}(t^n), \ t\to 0$$

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{t^{2n-2}}{(2n-2)!} + \bar{o}(t^{2n-1}), \ t\to 0.$$

Имеем:

$$\lim_{x\to 0} \left[\frac{\sin x^3 + 3\ln(1+x^3) + \operatorname{arctg}(x^6)}{e^{x^3} - \cos(x^2)} \right.$$

// $\operatorname{arctg}(x^6) = x^6 + \bar{o}(x^6) = \bar{o}(x^3)$ //

$$= \frac{x^3 + \bar{o}(x^4) + 3\cdot\left[x^3 + \bar{o}(x^3)\right] + \bar{o}(x^3)}{\left[1 + x^3 + \bar{o}(x^3)\right] - \left[1 + \bar{o}(x^3)\right]}$$

// $\cos x^2 = 1 - \frac{x^4}{2!} + \bar{o}(x^5) = 1 + \bar{o}(x^3)$ //

$$= \frac{4x^3 + \bar{o}(x^3)}{x^3 + \bar{o}(x^3)} = \left. \frac{4 + \bar{o}(1)}{1 + \bar{o}(1)} \right] = \boxed{4}$$

Вычислите предел:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \operatorname{arctg} x}{\operatorname{tg}\left[\dfrac{x^3+2\operatorname{tg} x^5}{3+x^3+x^6}\right]}$$

Решение Вспомним формулы Тейлора:

$$\operatorname{tg}(t) = t + \frac{1}{3}t^3 + \frac{2}{15}t^5 + \bar{o}(t^6),\quad t\to 0$$

$$(1+t)^\alpha = 1 + \binom{\alpha}{1}t + \binom{\alpha}{2}t^2 + \dots + \binom{\alpha}{n}t^n + \bar{o}(t^n),\quad t\to 0$$

где $\binom{\alpha}{k} = \dfrac{\alpha\cdot(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$

Заметим, что:

$$\frac{x^3+2\operatorname{tg} x^5}{3+x^3+x^6} = \frac{x^3+\overset{2\operatorname{tg} x^5}{\bar{o}(x^3)}}{3+x^3+x^6} = \frac{x^3(1+\bar{o}(1))}{3(1+\bar{o}(1))} \ominus$$

$$\operatorname{tg} x^5 = x^5 + \bar{o}(x^{14}) = \bar{o}(x^3)$$

$$3+x^3+x^6 = 3+\bar{o}(1) = 3(1+\bar{o}(1))$$

$$\ominus\ \frac{x^3}{3}(1+\bar{o}(1))\cdot(1+\bar{o}(1)) = \frac{x^3}{3}(1+\bar{o}(1))$$

$$\frac{1}{1+\bar{o}(1)} = 1+\bar{o}(1) \qquad \text{т.к. } \frac{1}{1+t} = 1-t+t^2-\dots+(-1)^n t^n + \bar{o}(t^n),\ t\to 0$$

Значит $\operatorname{tg}\left[\dfrac{x^3+2\operatorname{tg} x^5}{3+x^3+x^6}\right] = \operatorname{tg}\left[\dfrac{x^3}{3}(1+\bar{o}(1))\right] =$

$$= \frac{x^3}{3}(1+\bar{o}(1)) + \underbrace{\bar{o}\left(\frac{x^3}{3}+\bar{o}(x^3)\right)}_{\bar{o}(x^3)} = \frac{1}{3}x^3 + \bar{o}(x^3)$$

и мы получаем:

$$\lim_{x\to 0}\left\{\frac{\sin x-\operatorname{arctg}x}{\operatorname{tg}\left[\frac{x^3+2\operatorname{tg}x^5}{3+x^3+x^6}\right]}=\frac{\left[x-\frac{x^3}{3!}+\bar{o}(x^4)\right]-\left[t-\frac{x^3}{3}+\bar{o}(x^4)\right]}{\frac{1}{3}x^3+\bar{o}(x^3)}\right.=$$

$$=\frac{\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)x^3+\bar{o}(x^3)}{\frac{1}{3}x^3+\bar{o}(x^3)}=\left.\frac{\frac{1}{3}-\frac{1}{6}+\bar{o}(1)}{\frac{1}{3}+\bar{o}(1)}\right\}=\frac{\frac{1}{3}-\frac{1}{6}+0}{\frac{1}{3}+0}=\boxed{\frac{1}{2}}$$

(4) // Листок 6+ //

Вычислить предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+e^x}-\sqrt{2}-\frac{x}{2\sqrt{2}}}{x^2}$$

<u>Решение</u> Заметим, что

$$\sqrt{1+e^{x}}=\sqrt{1+1+t+\frac{t^2}{2}+\bar{o}(t^2)}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{1+\underbrace{\frac{t}{2}+\frac{t^2}{4}+\bar{o}(t^2)}_{=z}}=\sqrt{2}\cdot\left(1+\frac{1}{2}z-\frac{1}{8}z^2+\bar{o}(z^2)\right)$$

$$\frac{1}{2}=\binom{\frac{1}{2}}{1}$$

(11) $$\frac{1}{8}=\binom{\frac{1}{2}}{2}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}=\frac{1}{8}$$

$$z^2=\left(\frac{t}{2}+\frac{t^2}{4}+\bar{o}(t^2)\right)^2=\frac{t^2}{2}+\bar{o}(t^2)$$

$$\sqrt{2}\left[1+\frac{1}{2}\left[\frac{t}{2}+\frac{t^2}{4}+\bar{\bar{o}}(t^2)\right]-\frac{1}{8}\left[\frac{t^2}{4}+\bar{\bar{o}}(t^2)\right]+\bar{\bar{o}}(t^2)\right]$$

$$\parallel$$

$$\sqrt{2}\left[1+\frac{1}{4}t+\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{32}\right)t^2+\bar{\bar{o}}(t^2)\right]$$

$$\parallel$$

$$\sqrt{2}+\frac{1}{2\sqrt{2}}t+\frac{3}{16\sqrt{2}}t^2+\bar{\bar{o}}(t^2).$$

Значит:

$$\lim_{x\to 0}\left\{\frac{\sqrt{1+e^x}-\sqrt{2}-\frac{x}{2\sqrt{2}}}{x^2}=\frac{\underbrace{\sqrt{2}+\frac{1}{2\sqrt{2}}x+\frac{3}{16\sqrt{2}}x^2+\bar{\bar{o}}(x^2)}_{\sqrt{1+e^x}}\;-\sqrt{2}-\frac{x}{2\sqrt{2}}}{x^2}\right.$$

$$=\frac{\frac{3}{16\sqrt{2}}x^2+\bar{\bar{o}}(x^2)}{x^2}\Bigg\}=\boxed{\frac{3}{16\sqrt{2}}}$$

▲