СЕМИНАР 9

Листок 4 (Часть I)

(2)

Вычислить пределы:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$; b) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$; c) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x^2-1}{2\cdot x^2-x-1}$

d) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$

Решение

Если $\lim\limits_{x\to \alpha} f(x) = a$, $\lim\limits_{x\to \alpha} g(x) = b \neq 0$, то $\lim\limits_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}$

a) $\lim\limits_{x\to 0}(x^2-1) = -1$, $\lim\limits_{x\to 0}(2x^2-x-1) = -1$, значит

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1} = \frac{-1}{-1} = \boxed{1.}$$

b) заметим, что: $x^2-1 = (x-1)(x+1)$ и $(2x^2-x-1) = (x-1)(2x+1)$

значит

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{(x-1)}(2x+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{x+1}{2x+1} = \frac{1+1}{2\cdot 1+1} = \boxed{\frac{2}{3}}$$

//Другое решение: сделаем замену $x = t+1$.

Ясно, что если $x\to 1$, то $t\to 0$ и мы имеем.

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1} = \lim_{t\to 0} \frac{(t+1)^2-1}{2(t+1)^2-(t+1)-1} = \lim_{t\to 0} \frac{t^2+2t}{2t^2+3t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{t+2}{2t+3} = \frac{0+2}{0+3} = \frac{2}{3} //$$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \cancel{\dfrac{x^2}{x^2}} \cdot \dfrac{1-\frac{1}{x^2}}{2-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}} \ominus$

$\ominus \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1-\frac{1}{x^2}}{2-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}} = \dfrac{1-0}{2-0-0} = \boxed{\dfrac{1}{2}}$

// другое решение: сделаем замену $x=\frac{1}{t}$.
Ясно, что если $x\to+\infty$, то $t\to 0+0$ и мы имеем:

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1} = \lim\limits_{t\to0+0} \dfrac{\frac{1}{t^2}-1}{2\cdot\frac{1}{t^2}-\frac{1}{t}-1} = \lim\limits_{t\to0+0} \dfrac{t+1}{t+2} = \dfrac{0+1}{0+2} = \dfrac{1}{2}$ //

d) Заметим, что $x^3-3x+2 = (x-1)^2(x+2)$
и
$x^4-4x+3 = (x-1)^2(x^2+2x+3)$.

Значит мы имеем:

$\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3} = \lim\limits_{x\to1} \dfrac{\cancel{(x-1)^2}(x+2)}{\cancel{(x-1)^2}(x^2+2x+3)} \ominus$

$\ominus \lim\limits_{x\to1} \dfrac{x+2}{x^2+2x+3} = \dfrac{1+2}{1^2+2\cdot1+3} = \dfrac{3}{6} = \boxed{\dfrac{1}{2}}$

// как и в пункт b), здесь можно воспользоваться заменой $x=t+1$.//

▲

Вычислить пределы:

a) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$ b) $\lim\limits_{x\to 7} \dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9}-2}$

c) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left\{\sqrt{(x+a)(x+b)}-x\right\}$, d) $\lim\limits_{x\to +\infty} x\left(\sqrt{x^2+2x}-2\sqrt{x^2+x}+x\right)$.

Решение a)

два раза домножили и поделили на сопряженное

$$\lim_{x\to 4}\left\{\frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2} = \frac{\cancel{1+2x-9}^{\,2}}{\sqrt{1+2x}+3}\cdot\frac{\sqrt{x}+2}{\cancel{x-4}} =\right.$$

$$= 2\cdot\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{1+2x}+3}\Bigg\} = 2\cdot\frac{\sqrt{4}+2}{\sqrt{1+2\cdot 4}+3} = \boxed{\frac{4}{3}}$$

$$\text{b)}\ \lim_{x\to 7}\left\{\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9}-2} = \frac{\sqrt{x+2}-3}{\sqrt[4]{x+9}-2} + \frac{3-\sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9}-2} =\right.$$

просто арифметическое преобразование

$$= \frac{\cancel{x+2-9}}{\sqrt{x+2}+3}\cdot\frac{(a+2)(a^2+4)}{\cancel{x+9-16}} + \frac{\cancel{27-(x+20)}^{\,-1}}{9+3d+d^2}\cdot\frac{(a+2)(a^2+4)}{\cancel{x-7}} \ (11)$$

$$a^4-b^4=(a-b)(a+b)(a^2+b^2)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{a-b} = \frac{(a+b)(a^2+b^2)}{a^4-b^4}, \text{ пусть } a=\sqrt[4]{x+9},\ b=2$$

$$c^3-d^3=(c-d)(c^2+cd+d^2)$$

$$\Downarrow$$

$$c-d=\frac{c^3-d^3}{c^2+cd+d^2}, \text{ пусть } c=3,\ d=\sqrt[3]{x+20}$$

$$= \left. \frac{(\alpha+2)(\alpha^2+4)}{\sqrt{x+2}+3} - \frac{(\alpha+2)(\alpha^2+4)}{9+3d+d^2} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\alpha = \sqrt[4]{x+9} \Rightarrow \alpha(7) = \sqrt[4]{7+9} = 2$$

$$d = \sqrt[3]{x+20} \qquad d(7) = \sqrt[3]{7+20} = 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{(2+2)(4+4)}{3+3} - \frac{(2+2)(4+4)}{9+3\cdot 3+3^2} = \boxed{\frac{112}{27}}$$

c) $$\lim_{x \to +\infty} \left\{ \sqrt{(x+\alpha)(x+b)} - x = \frac{(x+a)(x+b)-x^2}{\sqrt{(x+a)(x+b)}+x} \Leftrightarrow \right.$$

$$\Leftrightarrow \frac{(a+b)x+ab}{x\left(\sqrt{1+\frac{a}{x}}\cdot\sqrt{1+\frac{b}{x}}+1\right)} = \left. \frac{a+b+\frac{ab}{x}}{\sqrt{1+\frac{a}{x}}\cdot\sqrt{1+\frac{b}{x}}+1} \right\} =$$

$$= \frac{a+b+0}{\sqrt{1+0}\cdot\sqrt{1+0}+1} = \boxed{\frac{a+b}{2}}$$

d) $$\lim_{x \to +\infty} \left\{ x\left(\sqrt{x^2+2x} - 2\sqrt{x^2+x} + x\right) \right.$$

$$\|$$

$$x\cdot\left[\sqrt{x^2+2x} - \sqrt{x^2+x}\right] + x\cdot\left[x - \sqrt{x^2+x}\right]$$

$$\|$$

$$x\cdot\frac{x^2+2x-(x^2+x)}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2+x}} + x\cdot\frac{x^2-(x^2+x)}{x+\sqrt{x^2+x}}$$

$$\|$$

$$= x \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2+x}} - x \cdot \frac{x}{x+\sqrt{x^2+x}} =$$

$$= x^2 \cdot \frac{x+\cancel{\sqrt{x^2+x}} - \sqrt{x^2+2x} - \cancel{\sqrt{x^2+x}}}{\left(\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2+x}\right)\left(x+\sqrt{x^2+x}\right)} =$$

= домножили и поделили на сопряжен.

$$x^2 \cdot \frac{x^2-(x^2+2x)}{\left(\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2+x}\right)\left(x+\sqrt{x^2+x}\right)\cdot\left(x+\sqrt{x^2+2x}\right)} =$$

= вынесли x из каждой скобки

$$\frac{-2\cancel{x^3}}{\cancel{x\cdot x\cdot x}\cdot\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)\cdot\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)\left(1+\sqrt{1+\frac{2}{x}}\right)} =$$

$$= \frac{-2}{\left(\sqrt{1+0}+\sqrt{1+0}\right)\left(1+\sqrt{1+0}\right)\left(1+\sqrt{1+0}\right)} = \boxed{-\frac{1}{4}}$$

▲

4

Вычислить пределы:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(5x)}{x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$; c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x}$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}$; e) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(\alpha+x)\cdot\sin(\alpha+2x)-\sin^2\alpha}{x}$

f) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x+\sin(2x)+\dots+\sin(nx)}{\sqrt{1+2x}-1}$

Решение a)

$$\lim_{x\to 0}\left\{\frac{\sin(5x)}{x} = \frac{\sin(5x)}{5x}\cdot\frac{5\cancel{x}}{\cancel{x}}\right\} = \underbrace{\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin(5x)}{5x}\right)}_{=}\cdot 5 = 1\cdot 5 = \boxed{5}$$

1 в силу замечательного предела $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

b) $$\lim_{x\to 0}\left\{\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{2\cdot\sin^2\frac{x}{2}}{x^2} = 2\cdot\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2\cdot\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{x^2}\right\} =$$

$\cos x = 1-2\sin^2\frac{x}{2}$

$$= 2\cdot\frac{1}{4}\cdot\underbrace{\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2}_{=} = 2\cdot\frac{1}{4}\cdot 1 = \boxed{\frac{1}{2}}$$

1 в силу замечател-й предел $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

c) $$\lim_{x\to 0}\left\{\frac{\operatorname{tg} x}{x} = \frac{\sin x}{\cos x}\cdot\frac{1}{x} = \frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}\right\} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x} = 1\cdot 1 = \boxed{1}$$

d) $$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x} = \lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{arctg}\operatorname{tg} t}{\operatorname{tg} t} = \lim_{t\to 0}\frac{t}{\operatorname{tg} t} = \boxed{1}$$

$x=\operatorname{tg} t$ – замена.

$\Downarrow$

$x\to 0 \Rightarrow t\to 0.$

в силу пункт c).