Лекция 9

1. Свойства непрерывных на отрезке функций.

Определение 1. Функцию, непрерывную в каждой точке множества D (по множеству D), будем называть просто непрерывной на множестве D.

Теорема 2 (Вейерштрасс)**.** *Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$. Тогда она ограничена на $[a, b]$, т.е. существует число такое $C > 0$, что $|f(x)| \leq C$ $\forall x \in [a, b]$. Кроме того, существуют такие точки $x_m, x_M \in [a, b]$, что $f(x_m) = \inf\{f(x) \colon x \in [a, b]\}$ и $f(x_M) = \sup\{f(x) \colon x \in [a, b]\}$.*

Доказательство. Предположим, что f не является ограниченной, т.е. для каждого $n \in \mathbb{N}$ найдется точка $x_n \in [a, b]$, для которой $|f(x_n)| > n$. По теореме Больцано можно найти подпоследовательность x_{n_k}, сходящуюся к некоторой точке x_0. Заметим, что $x_0 \in [a, b]$ в силу свойств перехода к пределу в неравенствах. По непрерывности последовательность $\{f(x_{n_k})\}$ сходится к $f(x_0)$ и, в частности, является ограниченой, что приводит к противоречию.

Рассмотрим последовательность точек $x_n \in [a, b]$, для которых

$$\sup\{f(x) \colon x \in [a, b]\} - \frac{1}{n} \leq f(x_n) \leq \sup\{f(x) \colon x \in [a, b]\}.$$

Опять применяя теорему Больцано, находим подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, сходящуюся к некоторой точке $x_0 \in [a, b]$. По определению непрерывности $f(x_{n_k}) \to f(x_0)$, а по свойству перехода к пределу в неравенствах, $f(x_{n_k}) \to \sup\{f(x) \colon x \in [a, b]\}$. Отсюда получаем, что $f(x_0) = \sup\{f(x) \colon x \in [a, b]\}$. Аналогично поступаем с inf. $\square$

Определение 3. Функция f называется равномерно непрерывной на множестве D, если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ для которого $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$, если $x, y \in D$ и $|x - y| < \delta$.

Пример 4.

1) Функция $f(x) := \sin x$ равномерно непрерывна на $\mathbb{R}$, т.к.

$$|\sin x - \sin y| = \left|2 \cos \frac{x + y}{2} \cdot \sin \frac{x - y}{2}\right| \leq |x - y|.$$

2) Функция $f(x) = 1/x$ не равномерно непрерывна на $(0, 1)$, т.к. $f(1/(2n)) - f(1/n) = n$, а $|1/n - 1/(2n)| = 1/(2n) \to 0$.

Теорема 5 (Кантор)**.** *Если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, то f равномерно непрерывна на $[a, b]$.*

Доказательство. Если f не равномерно непрерывна, то найдется такое число $\varepsilon > 0$, что $\forall n$ $\exists x_n, y_n \in [a, b] \colon |x_n - y_n| < n^{-1}$, $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$. По теореме Больцано у последовательности $\{x_n\}$ есть сходящаяся подпоследовательность $x_{n_k} \to x_0 \in [a, b]$. Заметим, что $y_{n_k} \to x_0$. Но f непрерывна в точке x_0 по условию, что противоречит оценке $|f(x_{n_k}) - f(x_0)| + |f(x_0) - f(y_{n_k})| \geq |f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geq \varepsilon$. $\square$

Теорема 6 (Коши)**.** *Пусть f непрерывна на отрезке $[a, b]$. Если $f(a) = A$, $f(b) = B$, то для каждого значения $C \in [A, B]$ (или $C \in [B, A]$, если $B < A$) найдется точка $c \in [a, b]$, для которой $f(c) = C$.*

Доказательство. Не ограничивая общности, считаем, что $C \neq A$, $C \neq B$ и $A \neq B$. Тогда переходя к функции $g(x) = f(x) - C$, получаем, что $g(a) \cdot g(b) < 0$ и мы ищем точку $c \in [a, b]$ для которой $g(c) = 0$.

Разделим отрезок $[a, b]$ на два подотрезка $[a, \frac{a+b}{2}]$ и $[\frac{a+b}{2}, b]$. Если $f(\frac{a+b}{2}) = 0$, то искомая точка c найдена. Если $f(\frac{a+b}{2}) \neq 0$, то либо $f(\frac{a+b}{2})$ и $f(a)$ разных знаков, либо $f(\frac{a+b}{2})$ и $f(b)$ разных знаков. Пусть $[a_1, b_1]$ тот из отрезков $[a, \frac{a+b}{2}]$ и $[\frac{a+b}{2}, b]$, для которого значение функции f на концах разных знаков. Далее повторяем эти же рассуждения для отрезка $[a_1, b_1]$ и т.д.

Возможны две ситуации. Либо мы на каком-то шаге получим искомую точку c, либо построем последовательность вложенных отрезков $[a_n, b_n]$, длины которых равны $\frac{b-a}{2^n}$ и стремятся к нулю, причем $f(a_n) \cdot f(b_n) < 0$. По теореме о вложенных отрезках найдется единственная общая точка $c \in \cap[a_n, b_n]$. Тогда $a_n \to c$ и $b_n \to c$, откуда в силу непрерывности получаем $f(a_n) \cdot f(b_n) \to (f(c))^2$. Т.е. $(f(c))^2 \le 0$, а значит $f(c) = 0$. $\square$

2. Непрерывность обратной функции.

Теорема 7 (критерий непрерывности монотонной функции)**.**

Монотонная функция $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *непрерывна на* $[a,b]$ *тогда и только тогда, когда* $f([a,b])$ *— отрезок.*

Доказательство. Не ограничивая общности считаем, что f не убывает на $[a,b]$. Тогда при каждом $x \in [a,b]$ выполнено $f(a) \le f(x) \le f(b)$, т.е. $f(x) \in [f(a), f(b)]$. Если функция f непрерывна, то по теореме Коши для каждого $C \in [f(a), f(b)]$ найдется точка $c \in [a,b]$, для которой $f(c) = C$.

Наоборот, пусть f разрывна в некоторой точке $x_0 \in [a,b]$. Если $x_0 \ne a$ и $x_0 \ne b$, то интервал $(\sup\limits_{x<x_0} f(x), \inf\limits_{x>x_0} f(x))$ не пуст, а значит не пуст хотя бы один из интервалов $(\sup\limits_{x<x_0} f(x), f(x_0))$ или $(f(x_0), \inf\limits_{x>x_0} f(x))$. Этот интервал содержится в отрезке $[f(a), f(b)]$ в силу монотонности, но не содержит ни одной точки вида $f(x)$, $x \in [a,b]$.

Если точка разрыва x_0 сопадает с одним из концов, то непустыми будут интервалы $(\sup\limits_{x<x_0} f(x), f(x_0))$ в случае $x_0 = b$ или $(f(x_0), \inf\limits_{x>x_0} f(x))$ в случае $x_0 = a$. Дальнейшее рассуждение аналогично. $\square$

Теорема 8 (теорема об обратной фцнуции)**.** *Пусть* f *непрерывна и строго монотонна на* $[a,b]$ *(т.е.* f *монотонна и* $f(x) \ne f(y)$ *при* $x \ne y$*). Тогда* f *— биекция между отрезками* $I = [a,b]$ *и* J *с концами* $f(a)$ *и* $f(b)$ *и* f^{-1} *непрерывна и строго монотонна на* J*.*