Коллоквиум по Дискретной математике

Содержание

1. Определения

1.1. Логические значения и логические связки

Мы считаем, что высказывание обязательно либо истинно, либо ложно (в противном случае фраза не является высказыванием). Из высказываний можно строить составные высказывания, используя *логические связки.*
Значения составных высказываний определяются в зависимости от связки по таблицам истинности. Приведём таблицы истинности самых употребительных связок: конъюнкции $\wedge$ «A и B», дизъюнкции $\vee$ «A или B», импликации (логическое следование: «если A, то B», «из A следует B», обозначение $\to$) и равносильности $\equiv$ «A равносильно B».

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \to B$	$A \equiv B$
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

1.2. Законы де Моргана.

Важным примером тавтологий являются *законы де Моргана.* Они позволяют строить высказывания, равносильные отрицанию конъюнкции или дизъюнкции:

$$\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B; \quad \neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B. \tag{1}$$

Доказательство тождеств (1)
Первое. Отрицание конъюнкции ложно тогда и только тогда, когда конъюнкция истинна, то есть $A = B = 1$. *Дизъюнкция ложна тогда и только тогда, когда каждый её член ложен, то есть* $\neg A = \neg B = 0$. *Эти условия равносильны.*
Второе. Отрицание дизъюнкции истинно тогда и только тогда, когда дизъюнкция

ложна, то есть $A = B = 0$. Конъюнкция истинна тогда и только тогда, когда каждый её член истинен, то есть $\neg A = \neg B = 1$. Эти условия равносильны.

1.3. Принцип контрапозиции.

Ещё один важный приём доказательств основан на тавтологии, которая называется *законом контрапозиции*:

$$A \to B \equiv \neg B \to \neg A. \tag{2}$$

Доказательство тождества 2.
Левая часть ложна тогда и только тогда, когда $A = 1$, $B = 0$. Правая часть ложна тогда и только тогда, когда $\neg B = 1$, $\neg A = 0$. Но это равносильно первым двум условиям. Поэтому значения левой и правой части всегда одинаковы.

1.4. Свойства дизъюнкции и конъюнкции.

Для конъюнкции и дизъюнкции выполняется много тавтологий, напоминающих свойства обычных арифметических операций. Все они легко доказываются аналогично рассмотренным выше тавтологиям.
Коммутативность конъюнкции, дизъюнкции:

$$A \wedge B \equiv B \wedge A, \quad A \vee B \equiv B \wedge A.$$

Ассоциативность тех же связок:

$$(A \wedge B) \wedge C \equiv A \wedge (B \wedge C), \quad (A \vee B) \vee C \equiv A \vee (B \vee C).$$

Дистрибутивность (тут даже лучше, чем с числами — есть две тавтологии):

$$(A \wedge B) \vee C \equiv (A \vee C) \wedge (B \vee C), \quad (A \vee B) \wedge C \equiv (A \wedge C) \vee (B \wedge C).$$

1.5. Множества и теоретико-множественные операции.

Множество — это совокупность каких-то *элементов*. Природа элементов неважна. Никакие взаимоотношения между элементами не важны. Единственное, что существенно — какие элементы в входят в множество, а какие — нет.
Множество полностью определяется своими элементами. Два множества A и B называются *равными*, если каждый элемент множества A является элементом множества B, а каждый элемент множества B является элементом множества A. Множество A является *подмножеством* множества B, если каждый элемент множества A принадлежит множеству B (обозначение $A \subseteq B$). Высказывание «элемент x *принадлежит* множеству A» (обозначение $x \in A$) истинно, если в A есть элемент x, и ложно в противном случае. Перечислим основные операции с множествами.

Объединение множеств. Обозначение $A \cup B$. Это множество, состоящее в точности из тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств A и B. В формальной записи это определение выглядит так:

$$A \cup B = \{x : (x \in A) \vee (x \in B)\}. \tag{3}$$

Пересечение множеств. Обозначение $A \cap B$. Это множество, состоящее в точности из тех элементов, которые принадлежат обоим множествам A и B. В формальной записи это определение выглядит так:

$$A \cap B = \{x : (x \in A) \wedge (x \in B)\}. \tag{4}$$

Разность множеств. Обозначение $A \backslash B$. Это множество, состоящее в точности из тех элементов, которые принадлежат множеству A, но не принадлежат множеству B. В формальной записи это определение выглядит так:

$$A \backslash B = \{x : (x \in A) \wedge \neg(x \in B)\}. \tag{5}$$

Симметрическая разность множеств. Обозначение $A \triangle B$. Это множество, состоящее в точности из тех элементов, которые принадлежат ровно одному из множеств: либо A, либо B. В формальной записи это определение выглядит так:

$$A \triangle B = \Big\{x : \big((x \in A) \wedge \neg(x \in B)\big) \vee \big(\neg(x \in A) \wedge (x \in B)\big)\Big\}. \tag{6}$$

Есть ещё одна часто используемая операция с множествами — дополнение к множеству (обозначение $\bar{A}$) определяют обычно как те элементы, которые не входят в множество A. Однако буквально такое определение несодержательно. Операция дополнения всегда используется в рассуждениях о подмножествах одного множества U, которое будем называть универсумом*. В таком контексте дополнение $\bar{A}$ даёт сокращённую запись для разности $U \backslash A$.*

1.6. Взаимосвязь множеств и булевой логики.

Между операциями с множествами и логическими связками есть соответствие. Предположим, что все рассматриваемые множества являются подножествами универсума U. Каждому множеству A и каждому элементу U сопоставляется высказывание $x \in A$. Это высказывание истинно для элементов A и ложно для остальных элементов универсума. Из формальных определений операций с множествами (3), (4), (5) получаем такие эквивалентности

$$\begin{aligned}
&(x \in A \cup B) \equiv (x \in A) \vee (x \in B),\\
&(x \in A \cap B) \equiv (x \in A) \wedge (x \in B),\\
&(x \in A \backslash B) \equiv (x \in A) \wedge \neg(x \in B),\\
&(x \in \bar{A}) \equiv \neg(x \in A).
\end{aligned}$$

Равенство множеств A и B, как уже говорилось, равносильно эквивалентности высказываний $x \in A$ и $x \in B$. Поэтому любой тавтологии взаимно однозначно отвечает некоторое теоретико-множественное тождество, то есть утверждение о том, что применение теоретико-множественных операций в разном порядке даёт одно и то же множество.

1.7. Принцип математической индукции. Принцип полной математической индукции.

Принцип математической индукции. Пусть для последовательности утверждений

$$A_1, A_2, A_3, \dots, A_n, \dots,$$

занумерованных целыми положительными числами, верны утверждения

База индукции: A_1 истинно.

Шаг индукции: $A_n \to A_{n+1}$ истинно для любого n. Посылку импликации A_n называют *индуктивным предположением.*

Тогда A_n истинно для любого n.

Принцип полной математической индукции. Пусть для последовательности утверждений

$$A_1, A_2, A_3, \dots, A_n, \dots,$$

занумерованных целыми положительными числами, истинны утверждения

База индукции: A_1 истинно.

Шаг индукции: $(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n) \to A_{n+1}$ истинно для любого n.

Тогда A_n истинно для любого n.

Разница с обычным принципом математической индукции в том, что на шаге индукции предполагается, что все предыдущие утверждения истинны, а не только самое последнее.

Справедливость принципа полной математической индукции вытекает из справедливости обычного принципа математической индукции. Аккуратное доказательство этого факта оставляется в качестве упражнения. Удобно при этом использовать ещё одну равносильную формулировку принципа математической индукции.

1.8. Правила суммы и произведения. Подсчет числа монотонных путей на прямой.

Правило произведения. Для конечных множеств A, B выполняется равенство $|A \times B| = |A| \cdot |B|$.

Доказать правило произведения можно индукцией по мощности A.

База: $|A| = 0$, то есть $A = \emptyset$. По определению $\emptyset \times B = \emptyset$ (нет ни одной пары, первый член которой был бы элементом пустого множества). Поэтому $|\emptyset \times B| = |\emptyset| = 0 = |\emptyset| \cdot |B|$ — верное равенство.

Шаг индукции: пусть правило произведения справедливо для множеств мощности n. Рассмотрим пару A, B, где $|A| = n + 1$. Выделим в A какой-нибудь элемент a_{n+1} и обозначим через $A' = A \setminus \{a_{n+1}\}$ множество остальных элементов. Из каких пар состоит декартово произведение $A \times B$? Это либо пары вида (a, b), $a \in A'$, $b \in B$, либо пары (a_{n+1}, b), $b \in B$. Первых по предположению индукции $n \cdot |B|$ штук, а вторых — $|B|$ штук. Значит, всего в $A \times B$ входит $n \cdot |B| + |B| = (n + 1) \cdot |B| = |A| \cdot |B|$ пар.

Шаг индукции доказан. По принципу математической индукции правило произведения выполняется для всех (конечных) множеств A, B.

Правило суммы. Для конечных *непересекающихся* множеств A, B (то есть $A \cap B = \emptyset$) выполняется равенство $|A \cup B| = |A| + |B|$. Рассмотрим такую общую ситуацию. Есть клетчатая лента, по которой можно двигать фишку. Клетки пронумерованы целыми числами. В начале фишка находится в клетке 0. Далее её можно сдвигать вправо. Нужно подсчитать, сколько есть различных способов попасть в клетку с номером n.

Монотонные пути по прямой. Ответ зависит от того, какие ходы разрешены. Например, если разрешено сдвигать фишку только на одну клетку, то способ единственный. Для каждого набора разрешённых ходов получается своя задача подсчёта. Такие задачи в большинстве своём решаются однотипно. Правило суммы приводит к рекуррентному соотношению. Если угадать ответ, то доказать его можно методом математической индукции.

Пусть разрешены ходы на одну и на две клетки.

Задачу можно переформулировать на языке последовательностей целых чисел. А именно, нужно подсчитать количество монотонно возрастающих последовательностей целых чисел, первый член которых равен 0, последний равен n, а разность между двумя соседними принимает только значения 1 или 2. Действительно, такие последовательности — это протоколы движения фишки по клеточкам. Каждому способу движения отвечает ровно одна последовательность и по ней этот способ движения так же однозначно определяется.

Обозначим количество таких последовательностей F_n. Заметим, что $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. Действительно, все последовательности, заканчивающиеся на $n+2$, разделяются на две непересекающиеся группы:

$$0, \ldots, n, n+2;$$
$$0, \ldots, n+1, n+2$$

(в клетку $n + 2$ можно попасть либо с клетки n, либо с клетки $n + 1$, на месте многоточий возможно вставить любую последовательность чисел, в которой разности между соседними числами равны 1 или 2).

Нетрудно подсчитать количество таких последовательностей при небольших n.

$\boldsymbol{n = 0}$**.** Единственная монотонная последовательность, начинающаяся и заканчивающаяся на 0: это 0. Поэтому $F_0 = 1$.

***n* = 1.** Единственная монотонная последовательность, начинающаяся на 0 и заканчивающаяся на 1: это 0,1. Поэтому $F_1 = 1$.

***n* = 2.** Монотонных последовательностей, начинающихся на 0 и заканчивающаяся на 2 уже две: это 0,1, 2 и 0, 2. Поэтому $F_2 = 2$.

Теперь становится понятно обозначение: мы получили рекурренту и начальные условия для чисел Фибоначчи. Для любого n количество способов попасть в n ходами длины 1 или 2 равно F_n.

Пусть разрешены ходы на любое количество клеток.

На языке последовательностей целых чисел мы хотим найти количество всех монотонно возрастающих последовательностей целых чисел, первый член которых равен 0, а последний равен n. Обозначим это количество $T(n)$.

Количество таких последовательностей при $n \leq 2$ такое же, как и в предыдущем примере: $T(0) = 1$; $T(1) = 1$; $T(1) = 2$. (Ограничения на длину шага выполняются в этих случаях для любой последовательности.)

При росте n количество вариантов растёт и уже легко ошибиться в подсчёте. Однако можно доказать общий факт:

$$T(n) = T(n-1) + T(n-2) + \cdots + T(0) \tag{7}$$

для любого n.

Обозначим множество всех последовательностей длины n через X. Разделим последовательности на группы, в зависимости от последнего хода. То есть группу X_i образуют те монотонные последовательности, которые имеют вид

$$0, \ldots, i, n.$$

Ясно, что каждая последовательность попала ровно в одну группу и группы не пересекаются (смотрим на последний ход или на предпоследний член последовательности). По правилу суммы получаем

$$|X| = |X_0| + |X_2| + \cdots + |X_{n-1}|.$$

Но, с другой стороны, $|X_i| = T(i)$ (монотонные последовательности, начинающиеся в 0 и заканчивающиеся в i). Отсюда и получается формула (18).

Используя формулу (18), докажем индукцией по n явную формулу для $T(n)$:

$$T(n) = 2^{n-1} \qquad \text{при } n \geq 1. \tag{8}$$

База уже доказана.

Индуктивный переход. Если равенство $T(n) = 2^{n-1}$ верно, то

$$\begin{aligned} T(n+1) &= T(n) + T(n-1) + T(n-2) + \cdots + T(0) = \\ &= T(n) + T(n) = 2^{n-1} + 2^{n-1} = 2^n = \\ &= 2^{(n+1)-1}. \end{aligned}$$

В первом равенстве использована формула (18), которая верна для всех n.

1.9. Конечные слова в алфавите. Соответствие между двоичными словами и подмножествами множеств.

Важнейший для дискретной математики пример последовательностей: *слова в алфавите* A. Это произвольные последовательности конечной длины, члены которых принадлежат множеству A.

Всё множество слов в алфавите A обозначается A^*, а множество слов длины n обозначается A^n. В любом алфавите есть одно особое слово длины 0 — *пустое слово*, оно обычно обозначается $\emptyset$. Это последовательность, в которой нет ни одного члена.

Количество слов длины n в конечном алфавите A равно $|A|^n$.

Каждому списку без повторений длины k соответствует подмножество — те объекты, которые вошли в список. А сколько списков отвечают одному и тому же подмножеству? Это в точности количество способов упорядочить k элементов. Таким образом, количество подмножеств в k! раз меньше количества списков. Взаимно одднозначное соответствие между двоичными словами и подмножествами сразу дает решение такой задачи. Количество k-элементных подмножеств n-элементного множества равно $\frac{n!}{k!(n-k)!}$. Для этого установим взаимно однозначное соответствие между словами и подмножествами. Составим по подмножеству двоичное слово, у которого в позициях из подмножества стоят единицы, а в остальных позициях нули. Ясно, что это соответствие однозначно и, более того, по слову однозначно восстанавливается соответствующее ему подмножество. Итак, всего двоичных слов длины k ровно 2^k штук. Оказывается, столько же есть подмножеств в k-элементном множестве. Это число является решением такой задачи.

1.10. Формула включений-исключений.

Формулы для двух и трёх множеств подсказывают общий вид формулы включений-исключений. Нужно взять сумму мощностей всех множеств. Некоторые элементы при этом посчитаны более одного раза. Поэтому нужно вычесть мощности попарных пересечений множеств, после чего некоторые элементы объединения вообще не будут посчитаны. Далее нужно последовательно прибавлять и вычитать мощности тройных, четверных и т.д. пересечений, включая их в итоговую сумму с чередующимися знаками.

Формула включений–исключений

$$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = {} & |A_1| + \ldots + |A_n| - \\ & - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - \ldots \\ & + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| + \ldots \\ & \ldots \\ & + (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n| \end{aligned} \tag{9}$$

В первой строчке правой части равенства выписаны мощности всех множеств. Во второй — мощности всех попарных пересечений множеств (со знаком минус). Далее выписываем пересечения троек, четвёрок и т.д. множеств с чередующимися знаками

1.11. Размещения и сочетания, перестановки.

Для перечислительной комбинаторики особенно важен случай, когда степени вершин в каждой доле одинаковы. Пусть в левой доле L вершин, в правой — R; степень каждой вершины в левой доле равна d_1, а в правой — d_2. Тогда выполняется равенство

$$Ld_1 = Rd_2, \tag{10}$$

которое мы образно будем называть «правилом деления». С помощью этого правила можно найти R, если известны все три величины: $R = Ld_1/d_2$ (вот оно, деление). Мы использовали частный случай этого правила для паросочетаний ($d_1 = d_2 = 1$).

Теперь рассмотрим примеры, когда одна из степеней отлична от 1.

Те слова длины k в n-символьном алфавите, в которых все символы разные, называют *упорядоченными выборками* или *размещениями* из n по k. (Представьте, что в лототроне лежат шары, помеченные всеми символами B, мы по очереди достаём шары из лототрона и фиксируем порядок их появления.)

Количество размещений из n по k обозначим $A_{n,k}$. Для краткости обозначений используем то же обозначение и для самого множества размещений. Из контекста нужно понимать, идёт ли речь о множестве или о его мощности.

Ясно, что $A_{n,k} = 0$, если $k > n$ (принцип кроликов, сейчас мы «сажаем» позиции слова в клетки, которые являются символами алфавита). В общем случае выполняется рекуррентное соотношение.

$A_{n,k} = (n-k+1)A_{n,k-1}$, $1 \leq k \leq n$. Формулу из теоремы 2.6 можно записать через факториалы. По определению $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$, $0! = 1$ (последнее не вполне очевидно из общего случая). Поэтому

$$A_{n,k} = n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}\,.$$

Важный частный случай размещений получается при $k = n$. Получаем последовательности чисел из $[n]$ длины n. Такие последовательности называются *перестановками.* Количество перестановок находится по теореме 2.6, оно равно

$$A_{n,n} = \frac{n!}{0!} = n!\,.$$

Теперь рассмотрим *сочетания* или *неупорядоченные выборки.* В примере с лототроном это означает, что нас интересует лишь то, какие шары были вытащены, а не порядок их появления.

На обычном математическом языке это означает, что нас интересует *подмножество* вытащенных шаров. Вот и будем называть сочетанием из n элементов по k подмножество n-элементного множества, в котором ровно k элементов. Количество сочетаний из n по k будем обозначать C_n^k (обратите внимание на порядок индексов).

$C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$. Используя формулу для размещений, перепишем это равенство в другом виде:

$$C_n^k \cdot k! = A_{n,k}\,. \tag{11}$$

1.12. Числа Фибоначчи. Их комбинаторный смысл.

Последовательность чисел Фибоначчи определяется рекуррентно: $F_1 = F_2 = 1; F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. Начало последовательности выглядит так:
$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...$
Через числа Фибоначчи выражаются решения многих комбинаторных задач. Рассмотрим пример.
Сколько двоичных слов длины n, в которых нет двух нулей подряд?
Ответ: F_{n+2}. Легко видеть, что для $n = 1$ получается $2 = F_3$ таких слова, а для $n = 2$ получается $3 = F_4$ таких слова (запрещено только слово 00). Далее мы покажем справедливость того же рекуррентного соотношения для ответа в задаче. Отсюда по индукции будет следовать справедливость указанного ответа. Чтобы вывести рекуррентное соотношение, обозначим через an количество слов длины n без двух нулей подряд, которые заканчиваются на 0, а через b_n — количество таких слов, которые заканчиваются на 1. Слово без двух нулей подряд, которое заканчивается на нуль, можно получить дописыванием нуля только к слову без двух нулей подряд, которое заканчивается на 1, т.е. $a_{n+1} = b_n$. А слово без двух нулей подряд, которое заканчивается на единицу, можно получить приписыванием единицы к любому слову без двух нулей подряд, т.е. $b_{n+1} = a_n + b_n$. Теперь запишем рекуррентное соотношение для суммы an + bn: $(a_{n+2} + b_{n+2}) = b_{n+1} + a_{n+1} + b_{n+1} = (a_{n+2}+b_{n+2}) = (a_{n+1}+b_{n+1})+(a_n+b_n)$. Это и есть соотношение для чисел Фибоначчи.

1.13. Биноминальные коэффициенты.

Рассмотрим *бином* $(x + y)^n$. Как известно из алгебры, целое алгебраическое выражение можно записать в виде многочлена. Поэтому

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k}y^k = x^n + \binom{n}{1} x^{n-1}y + \dots + \binom{n}{n-1} xy^{n-1} + y^n. \tag{12}$$

Здесь $\binom{n}{k}$ — числа, которые называются *биномиальными коэффициентами.* (Обратите внимание на порядок индексов.) Оказывается, это в точности числа сочетаний из n по k.
$\dbinom{n}{k} = C_n^k$. Биномиальные коэффициенты часто записывают в виде *треугольника*

Паскаля

$$\begin{array}{ccccccccccc} &&&&& 1 &&&&& \\ &&&& 1 && 1 &&&& \\ &&& 1 && 2 && 1 &&& \\ && 1 && 3 && 3 && 1 && \\ & 1 && 4 && 6 && 4 && 1 & \\ 1 && 5 && 10 && 10 && 5 && 1 \end{array}$$

Легко увидеть, что это те же числа, что мы писали для точек квадранта, только теперь квадрант повёрнут вверх ногами (точнее, на угол 135°). У нас появилось несколько равносильных способов определять биномиальные коэффициенты (они же числа сочетаний, они же — количество монотонных путей в квадранте). Это даёт возможность доказывать свойства биномиальных коэффициентов разными способами: привлекая комбинаторику, алгебру и даже анализ.

1.14. Мультиноминальные коэффициенты. Их комбинаторный смысл.

Вместо бинома рассмотрим n-ю степень суммы нескольких переменных. Она также раскладывается в сумму мономов. Но теперь это мономы от нескольких переменных. Записывать такие мономы сложнее. Мы используем следующую запись: моном $x_1^{a_1}x_2^{a_2}\dots x_k^{a_k}$ однозначно определяется последовательностью показателей $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_k)$, мы будем обозначать такой моном сокращённо как x^α. Разложение

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_k)^n = \sum_\alpha \binom{n}{\alpha} x^\alpha \tag{13}$$

приводит сразу к двум интересным задачам перечислительной комбинаторики.

Первая состоит в нахождении формулы для *мультиномиальных коэффициентов*, т.е. коэффициентов в разложении 13. Приведём сразу ответ, а потом дадим два разных доказательства этой формулы.

$\binom{n}{a_1, a_2, \dots, a_k} = \dfrac{n!}{a_1!a_2!\dots a_k!}$ У мультиномиальных коэффициентов есть внятный комбинаторный смысл. Вспомним, как мы находили формулу для биномиальных коэффициентов. Мы раскладывали бином в два шага: сначала раскрывали скобки, а затем приводили подобные.

Что даёт раскрытие скобок в выражении (13)? Получаются слагаемые, каждое из которых имеет вид $x_1x_2x_2\dots$. Это слово ξ в алфавите $\{x_1, \dots, x_k\}$, в котором n букв. После перестановок переменных из этого слова получается моном $x_1^{a_1}x_2^{a_2}\dots x_k^{a_k}$, где a_i — количество букв x_i в слове ξ.

Значит, мультиномиальный коэффициент $\binom{n}{a_1,\dots,a_n}$ равен количеству слов в алфавите $\{x_1, \dots, x_k\}$, длина которых равна n, а количество вхождений каждого символа задаётся числами $a_1, \dots, a_n$.

1.15. Задача о подсчете монотонных путей на плоскости. Треугольник Паскаля. Реккурентное соотношение.

Задача становится интереснее, если рассматривать монотонные пути на плоскости. Теперь мы двигаем фишку по точкам плоскости с целыми координатами. За один шаг можно увеличить абсциссу на 1 или ординату на 1. Сколько есть различных монотонных путей из точки $(0,0)$ в точку (a,b)? Обозначим это количество $T(a,b)$. Из правила суммы следует рекуррентное соотношение

$$T(a,b) = T(a-1,b) + T(a,b-1). \tag{14}$$

Действительно, все пути в (a,b) разбиваются на две группы: те, в которых на последнем шаге увеличивалась абсцисса, и те, в которых на последнем шаге увеличивалась ордината. Это первое и второе слагаемое в (14) соответственно.

Одной формулы (14) недостаточно для вычисления числа монотонных путей. Нужны ещё «граничные условия»:

$$T(0,b) = T(a,0) = 1 \tag{15}$$

(если возможно изменять лишь одну координату, путь единственный).

Пользуясь (14) и (15), можно посчитать количество монотонных путей для заданной пары (a,b) (при этом придётся решить ту же задачу и для всех пар (x,y), $x \le a$, $y \le b$). Вот несколько первых значений:

1	5	15	35	70
1	4	10	20	35
1	3	6	10	15
1	2	3	4	5
1	1	1	1	1

Есть и обычная, нереккуррентная формула для $T(a,b)$.

$T(a,b) = \binom{a+b}{a} = \dfrac{(a+b)!}{a!b!}$.

Построим, как мы уже не раз делали, двудольный граф. Вершины левой доли — двоичные слова в алфавите $\{x,y\}$ длины $a+b$, а вершины правой доли — монотонные пути из $(0,0)$ в (a,b). Рёбра графа соединяют слово с путём, в котором на i-м шаге увеличивается та координата, которая записана в слове на i-м месте.

Этот граф — паросочетание: слово однозначно определяет путь, путь однозначно определяет слово. Количество слов в двоичном алфавите длины $a+b$, в которых a букв одного вида (и b букв другого) мы уже подсчитали: это как раз биномиальный коэффициент из $a+b$ по a.

Биномиальные коэффициенты часто записывают в виде *треугольника Паскаля*

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}$$

Легко увидеть, что это те же числа, что мы писали для точек квадранта, только теперь квадрант повёрнут вверх ногами (точнее, на угол 135°).

1.16. Сочетания с повторениями.

Вторая перечислительная задача, связанная с разложением степени суммы (13) состоит в подсчёте числа различных мономов в этом разложении. Степень монома — это сумма степеней переменных, в него входящих. Степень монома $x_1x_2x_3$ равна 3, степень монома $x_1^2x_2$ также равна 3. А сколько всего мономов от трёх переменных степени 3? На такой вопрос нетрудно ответить, выписав все нужные мономы:

$$x_1^3,\ x_2^3,\ x_3^3,\ x_1^2x_2,\ x_1^2x_3,\ x_1x_2^2,\ x_2^2x_3,\ x_1x_3^2,\ x_2x_3^2,\ x_1x_2x_3.$$

Но даже в этом случае нужно проверить, что мы ничего не пропустили и эти 10 мономов и есть все возможные варианты.

Сформулируем задачу точно. Моном $x_1^{a_1}x_2^{a_2}\dots x_k^{a_k}$ имеет степень $a_1+\dots+a_k$ и мономы совпадают тогда и только тогда, когда соответствующие последовательности показателей равны. Поэтому нам нужно найти количество решений уравнения

$$a_1+\dots+a_k=n \tag{16}$$

в неотрицательных целых числах. Это число традиционно называется *числом сочетаний с повторениями* из n по k. Обозначим его

$$\left(\!\binom{n}{k}\!\right).$$

Название можно объяснить примером с лототроном, который рассматривался выше. Теперь мы каждый раз возвращаем выпавший шар в лототрон, поэтому шары могут повторяться. Но нам неважно, как и раньше, в каком порядке выпадали эти шары.

Ещё одно популярное представление чисел с повторениями даётся в формулировке следующей задачи.

Сколько есть вариантов разделить n одинаковых монет между k людьми?

Это то же самое число сочетаний с повторениями из n по k. Действительно, каждый вариант делёжки задаётся указанием числа a_1 монет, которые получает первый человек, числа a_2 монет, которые получает второй и т.д.

$\left(\!\binom{n}{k}\!\right)=\dbinom{n+k-1}{k-1}.$

Установим взаимно однозначное соответствие между решениями уравнения (25) и $(k-1)$-элементными подмножествами $(n+k-1)$-элементного множества. Будем делать это, используя терминологию задачи о разделе монет.

Выстроим монеты в ряд и разделим их перегородками, чтобы указать, кому какие монеты отходят. Первый получает монеты, которые расположены до первой перегородки, второй — те, которые лежат между первой и второй, и т.д.

Последний человек получает монеты, которые лежат после последней перегородки. Поэтому для 7 людей нужно всего 6 перегородок. А в общем случае, когда людей k, нужна $k-1$ перегородка.

Итак, у нас есть позиции, на каждую из которых можно поставить либо монету, либо перегородку. Всего позиций $n+k-1$, а перегородок — $k-1$. Любой выбор $(k-1)$-элементного подмножества позиций, на котором стоят перегородки, возможен, и каждому такому выбору отвечает ровно одно решение уравнения (25). Получаем искомое соответствие.

1.17. Ориентированные и неориентированные графы. Степени вершин.

Простой неориентированный граф — это множество вершин V и множество рёбер E. Рёбрами являются 2-элементные подмножества множества V. Если $e = \{u, v\} \in E$, то вершины u, v называются концами ребра e. Концы ребра называются смежными вершинами или соседями. Говорят также, что ребро e инциндентно вершине u (как и вершине v). Ребра с общим концом также называются инцидентными. Количество соседей вершины v (оно же количество инцидентных её рёбер) называется степенью вершины, обозначать будем d(v) Сумма степеней всех вершин графа равна удвоенному числу его рёбер. *Простой ориентированный граф* (орграф) — это множество вершин V и множество рёбер E. Рёбрами являются упорядоченные пары вершин.

Если $e = (u, v) \in E$, то вершина u называется *началом* ребра e, а вершина v — *концом.* Говорят также, что ребро $e = (u, v)$ орграфа *выходит* из вершины u и *входит* в вершину v.

1.18. Циклы и пути в графе. Независимые множества.

Путь по графу — это такая последовательность вершин $v_1, v_2, v_3, \dots, v_k$, в которой стоящие рядом члены (вершины v_i и v_{i+1} при всех i) соединены ребром. Вершина v_1 называется *началом* пути, вершина v_k — его *концом. Длиной* пути называется число рёбер, то есть $k-1$. Мы будем разрешать также и пути длины 0, то есть последовательности из одной вершины. У такого пути начало совпадает с концом. Рёбер в таком пути нет, но вершина (одна) есть. В частности, слово «цикл» в разных книгах может означать три разных понятия. Единственный выход: помнить об этом и внимательно следить за определениями, которые даются в книжках.

Мы называем *циклом* замкнутый путь по графу, то есть такой путь, у которого начало совпадает с концом. При таком определении сформулированное выше свойство неверно. Например, в левом графе на рисунке **??** есть цикл

$$(0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0).$$

То понятие, которое нужно для описания свойств деревьев, мы будем называть *простым циклом.* Это такой цикл, в котором все вершины различны (за исключением начала и конца, которые совпадают по определению цикла).

Однако и простые циклы бывают во всех графах, которые содержат хотя бы одно ребро. Если в графе G есть ребро $\{u, v\}$, то в этом графе есть цикл (u, v, u).

Мы докажем чуть позже, что в деревьях нет простых циклов длины больше 2.

Нам также будет нужно понятие *простого пути*: это такой путь, в котором все вершины различны. Когда мы говорим о связанности вершин, достаточно рассматривать только простые пути. Неформально это означает очень простое наблюдение: если вы едете из города A в город B, то можно так проехать, чтобы побывать в каждом промежуточном городе ровно один раз.

Если две вершины x, y связаны в графе G, то в этом графе существует простой путь с началом x и концом y.

Подмножество I множества вершин графа называется независимым, если ни одна пара вершин в этом множестве не связана ребром

1.19. Отношения достижимости и компоненты связности графа.

Вершины v и v' называются *связанными*, если существует путь с началом в v и концом v'. Граф называется *связным*, если любые две его вершины связаны. Для вершины v обозначим через $C(v)$ множество вершин, связанных с v. Будем называть это множество *областью достижимости вершины* v. Если граф связный, то для каждой вершины $C(v)$ совпадает со всем множеством вершин графа. В общем случае это не так. Но всегда выполняется несколько простых свойств для областей достижимости.

Для любого графа и любых его вершин v_1, v_2, v_3 выполняются следующие свойства:

1) $v_1 \in C(v_1)$ (вершина достижима из себя самой);

2) $v_1 \in C(v_2)$ равносильно $v_2 \in C(v_1)$ (если v_1 достижима из v_2, то v_2 достижима из v_1);

3) если $v_1 \in C(v_2)$ и $v_2 \in C(v_3)$, то $v_1 \in C(v_3)$.

Эти свойства вполне очевидны из неформального представления о достижимости. Формальные их доказательства также очень просты.

v_1 — путь в любом графе, поэтому v_1 связанная с самой собой.

Если $v_1 u_1 \ldots u_s v_2$ — путь в графе, то $v_2 u_s \ldots u_1 v_1$ — также путь. Поэтому достижимость v_2 из v_1 равносильная достижимости v_1 из v_2.

Наконец, если в графе есть пути $v_3 u_1 \ldots u_s v_2$ и $v_2 w_1 \ldots w_t v_1$ (то есть $v_1 \in C(v_2)$ и $v_2 \in C(v_3)$), то в это графе есть также и путь $v_3 u_1 \ldots u_s v_2 w_1 \ldots w_t v_1$, то есть v_1 достижима из v_3.

На этой очевидной лемме основан важный способ доказательства связности графа. А именно, достаточно доказать, что из какой-то вершины достижимы все. Это эквивалентно в силу свойства 2 леммы 2.12, что из любой вершины достижима какая-то выделенная. А свойство 3 гарантирует, что года из каждой вершины достижима любая. Лемма **??** говорит, что области достижимости не пересекаются или совпадают. Таким образом, мы получаем *разбиение* множества вершин графа на подмножества. Каждое такое подмножество может быть представлено как область достижимости любого элемента из этого множества.

Удобно не упоминать этот случайно выбранный элемент. Поэтому используется такая терминология. *Компонента связности* графа — это область достижимости некоторой вершины этого графа. У связного графа одна компонента связности. Как мы обсудили выше, вершины графа разбиваются на компоненты связности.

У компонент связности есть другое описание. Для него нам потребуется новое понятие: *индуцированный подграф* графа. Пусть $U \subseteq V$ — подмножество вершин графа $G(V, E)$. Тогда $<U>$ — это граф с множеством вершин U и множеством рёбер

$$E(<U>) = \big\{\{x, y\} : \{x, y\} \in E(G),\ x, y \in U\big\}.$$

Компоненты связности — это в точности максимальные по включению множества вершин, индуцирующие связный граф.

Условие теоремы означает фактически два утверждения: (а) любое множество, строго содержащее компоненту связности (все вершины компоненты и ещё какие-то, хотя бы одну), индуцирует несвязный граф; (б) любое множество, индуцирующее связный граф, содержится в какой-то компоненте связности.

1.20. Деревья и леса. Критерия деревьев.

Сегодня рассмотрим *минимальные по включению рёбер* связные графы. Они называются *деревьями. Дерево* — такой связный граф, что выбрасывание любого ребра даёт несвязный граф. Можно переформулировать это определение, используя понятие *моста.* Мост — это такое ребро в графе, что его удаление увеличивает количество компонент связности. Поэтому деревья — это связные графы, каждое ребро которых мост. А произвольные графы, у которых каждое ребро является мостом, называются *лесами.*
То понятие, которое нужно для описания свойств деревьев, мы будем называть *простым циклом.* Это такой цикл, в котором все вершины различны (за исключением начала и конца, которые совпадают по определению цикла).

Однако и простые циклы бывают во всех графах, которые содержат хотя бы одно ребро. Если в графе G есть ребро $\{u, v\}$, то в этом графе есть цикл (u, v, u).

Мы докажем чуть позже, что в деревьях нет простых циклов длины больше 2.

Нам также будет нужно понятие *простого пути*: это такой путь, в котором все вершины различны. Когда мы говорим о связанности вершин, достаточно рассматривать только простые пути. Неформально это означает очень простое наблюдение:

если вы едете из города A в город B, то можно так проехать, чтобы побывать в каждом промежуточном городе ровно один раз. Для деревьев и лесов есть несколько критериев (свойств, равносильных определению дерева). Два из них связаны с простыми циклами и простыми путями в графе.

Равносильны следующие свойства простых неориентированных графов:

(1) каждое ребро — мост;

(2) для любых связанных вершин u, v существует единственный простой путь из u в v;

(3) нет простых циклов длины больше 2.

Свойства для деревьев получатся из этой теоремы, если потребовать связности графа.

Равносильны следующие свойства связных простых неориентированных графов:

(1) граф — дерево;

(2) для любых двух вершин u, v существует единственный простой путь из u в v;

(3) нет простых циклов длины больше 2.

Обозначим количество вершина графа G через n, количество рёбер через m, а количество компонент связности через c. *Размерностью* графа называется величина $\dim G = m - n + c$. Это и впрямь размерность некоторого векторного пространства. Мы ограничимся лишь комбинаторными свойствами этой размерности.

Графы, у которых размерность равна 0, — это в точности леса, то есть графы без мостов.

Отсюда получаем ещё один критерий дерева:

Связный граф является деревом тогда и только тогда, когда число рёбер в нём на единицу меньше числа вершин.

1.21. Двудольные графы, булев куб.

Двудольным графом называется неориентированный граф, в котором вершины заранее разделены на две *доли* — *левую* и *правую*, и все рёбра соединяют вершины из разных долей (нет рёбер, соединяющих вершины одной доли). Другими словами, чтобы задать двудольный граф, надо указать два конечных множества L (левую долю) и R (правую долю) и указать, какие вершины левой доли соединены с какими вершинами правой доли.

Разделение вершин на левые и правые задаёт правильную раскраску двудольного графа. Таким образом, граф можно представить как двудольный, если в нём нет циклов нечётной длины.
Докажем, что булев куб 2-раскрашиваемый. Вершинами булева куба Q_n являются двоичные слова длины n. Покрасим вершины с чётным количеством единиц в цвет 0; вершины с нечётным количеством единиц в цвет 1.

Ребро булева куба связывает вершины, которые отличаются ровно в одной позиции. Одна вершина на этой позиции содержит 0, другая — 1. Чётность количества единиц в таких вершинах разная, то есть они покрашены в разные цвета.

Эта теорема обосновывает простой и эффективный алгоритм проверки 2-раскрашиваемости графа. Закрасим какую-нибудь вершину в цвет 0. Далее действуем так.

Если есть непокрашенная вершина u, соединённая с уже покрашенной v, красим u в цвет, противоположный v.

Если все непокрашенные вершины несмежны уже покрашенным, красим какую-нибудь из непокрашенных в цвет 0.

Если в процессе такой раскраски встретилась вершина, которая смежна с вершинами двух противоположных цветов, то объявляем, что граф не является 2-раскрашиваемым. В противном случае получаем правильную 2-раскраску.

Корректность алгоритма доказывается так: нужно индукцией по числу действий проверить, что в 0 красятся вершины, которые соединены с начальной путями чётной длины, а в 1 — те, которые соединены путями нечётной длины.

Вопрос о существовании правильной раскраски в 3 и более цветов гораздо сложнее. Простого способа проверить 3-раскрашиваемость нет и не предвидится.

Вершины булева куба Q_n (булев куб размерности n) — двоичные слова длины n. Два слова u и v соседние в булевом кубе, если и только если одно можно получить из другого инвертированием бита ровно в одной позиции.

Скажем, 00010 и 01010 соседние в Q_5, а 00010 и 10000 — нет.

Как мы уже знаем, количество вершин в булевом кубе Q_n равно 2^n.

Степень каждой вершины равна n: есть ровно n позиций, инвертирование бита в каждой даёт соседа.

Подмножество I множества вершин графа называется *независимым*, если ни одна пара вершин в этом множестве не связана ребром.

В булевом кубе Q_n есть независимое множество размера 2^{n-1} (половина всех вершин).

Количество единиц в слове называется *(хэммингововым) весом* слова. При инвертировании бита в одной позиции количество единиц в слове изменяется ровно на 1. Поэтому концами каждого ребра являются слова, у которых чётность веса разная — у одного вес чётный, у другого — нечётный.

Значит, между словами чётного веса рёбер нет (как и между словами нечётного веса).

Как посчитать количество слов чётного и количество слов нечётного веса? Для этого опять применим двойной подсчёт. У каждого ребра один конец имеет чётный вес, а другой — нечётный. Значит, сумма степеней вершин чётного веса равна количеству рёбер и сумма степеней вершин нечётного веса равна количеству рёбер. Поскольку степени всех вершин булева куба одинаковы и равны n, получаем равенство $nV_{\mathrm{odd}} = nV_{\mathrm{even}}$. Поэтому $V_{\mathrm{odd}} = V_{\mathrm{even}} = 2^{n-1}$.

1.22. Паросочетания.

Паросочетанием называется двудольный граф, у которого степени всех вершин не больше 1. Будем говорить, что вершина u *сильно связана* с вершиной v, если v достижима из u и наоборот, то есть если есть путь из u в v, а также путь из v в u. Такой граф устанавливает взаимно однозначное соответствие между частью вершин левой доли и частью вершин правой доли. В частности, если паросочетание *совершенное* (нет изолированных вершин, то есть вершин степени 0), то рёбра паросочетания устанавливают взаимно однозначное соответствие между вершинами левой и правой долей. Такое возможно, если размеры долей одинаковы. Для решения задачи о максимальном паросочетании есть эффективные алгоритмы. Нас больше интересуют теоремы, а не алгоритмы. Поэтому сформулируем и докажем критерий того, что размер максимального паросочетания достигает верхней границы, то есть совпадает с размером (меньшей) доли.

Без ограничения общности считаем, что в левой (нижней) доле вершин не больше, чем в правой (верхней). Для множества вершин $X \subseteq L$ левой доли обозначим $G(X) \subseteq R$ множество всех соседей этих вершин (они все лежат в правой доле, так как мы рассматриваем двудольные графы).

1.23. Компоненты сильной связности.

Через $C(u)$ обозначим множество тех вершин v, которые сильно связаны с u. Эти множества обладают теми же свойствами, что и компоненты связности обычного ориентированного графа и называются *компонентами сильной связности*.

Для любого графа и любых его вершин v_1, v_2, v_3 выполняются следующие свойства:

(1) $v_1 \in C(v_1)$ (вершина сильно связана сама с собой);

(2) $v_1 \in C(v_2)$ равносильно $v_2 \in C(v_1)$;

(3) если $v_1 \in C(v_2)$ и $v_2 \in C(v_3)$, то $v_1 \in C(v_3)$.

v_1 — путь в любом графе, поэтому v_1 сильно связана с самой собой.

Определение сильной связанности симметрично, отсюда свойство 2.19.

Наконец, если в графе есть пути из v_3 в v_2, из v_2 в v_3, из v_2 в v_1, из v_1 в v_2, то обязательно есть и пути из v_1 в v_3 (соединяем путь из v_1 в v_2 с путём из v_2 в v_3), а также из v_3 в v_1 (соединяем путь из v_3 в v_2 с путём из v_2 в v_1). Это доказывает свойство 2.19.

Если $w \in C(v_1) \cap C(v_2)$, то $C(v_1) = C(v_2)$. Компоненты сильной связности не пересекаются или совпадают.

1.24. Ациклические графы.

Орграф называется *ациклическим*, если каждая компонента сильной связности состоит из одной вершины. Другими словами, никакие две различные вершины не являются сильно связанными. Название объясняется следующей теоремой. В ней мы требуем отсутствия петель в орграфе.

Следующие свойства ориентированного графа без петель равносильны:
Каждая сильно связная компонента состоит из одной вершины.
В орграфе нет циклов длины больше 0.
Вершины орграфа можно пронумеровать натуральными числами таким образом, чтобы все рёбра вели «вверх»: из вершины с меньшим номером в вершину с большим.

1.25. Эйлеровы графы.

Цикл (в неориентированном или ориентированном графе) называется *эйлеровым*, если он проходит по всем рёбрам графа по ровно одному разу (любое ребро входит в цикл, и никакое ребро не входит дважды).

Граф называется *эйлеровым*, если в нём есть эйлеров цикл.

Есть простой критерий эйлеровости графов и орграфов. Прежде всего заметим, что добавление и удаление *изолированных вершин*, т.е. тех вершин, из которых не входит и в которые не выходит ни одно ребра, не изменяет свойство эйлеровости графа.

В ориентированном орграф без изолоированных вершин существует эйлеров цикл тогда и только тогда, когда граф сильно связен и у любой вершины входящая степень равна исходящей.

Для неориентированных графов критерий аналогичен.

Неориентированный граф без вершин нулевой степени содержит эйлеров цикл тогда и только тогда, когда он связен и степени всех вершин чётны.

1.26. k-раскрашиваемые графы.

Правильной раскраской вершин неориентированного графа $G(V, E)$ в k цветов называется такое присваивание вершинам графа чисел (цветов) от 1 до k, что присвоенные смежным вершинам числа различны. Если для графа существует хотя бы одна правильная раскраска в k цветов, граф называется *k-раскрашиваемым.*

Очень легко понять, какие графы 1-раскрашиваемые. Это в точности графы без рёбер. Действительно, если вершинам графа без рёбер присвоить одно и то же число (цвет), то условие правильной раскраски выполняется. И наоборот: если в графе есть ребро $\{u, v\}$, то в правильной раскраске вершинам u, v присвоены разные цвета, поэтому количество цветов хотя бы 2.

Случай правильных раскрасок в 2 цвета интереснее.

2-раскрашиваемые графы это в точности графы, в которых длины всех циклов чётные.

2. Доказательства

2.1. Формула для чисел Фибоначчи.

Рассмотрим *последовательность Фибоначчи*

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34, \dots,$$

в которой первые два числа равны единице, а каждое следующее равно сумме двух предыдущих. Обычный способ задания таких *рекуррентных* последовательностей выглядит так: $F_0 = 1$; $F_1 = 1$; $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ для всех $n \geq 2$.

Докажем для чисел Фибоначчи формулу:

$$F_n = \frac{\varphi^{n+1} - \psi^{n+1}}{\sqrt{5}}, \quad \text{где} \quad \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad \psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}. \tag{17}$$

Эта формула верна для $n = 0$:

$$1 = F_0 = \frac{\varphi^{0+1} - \psi^{0+1}}{\sqrt{5}} = \frac{(1+\sqrt{5}) - (1-\sqrt{5})}{2\sqrt{5}}\,.$$

Верна она и для $n = 1$:

$$1 = F_1 = \frac{\varphi^{0+2} - \psi^{0+2}}{\sqrt{5}} = \frac{(\varphi - \psi)(\varphi + \psi)}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5} \cdot 1}{\sqrt{5}}\,.$$

Как доказать формулу (17) для всех n? Давайте для любого значения n докажем такое условное утверждение: если (17) верна для n и для $n+1$, то (17) верна для $n+2$.

Для этого заметим, что φ, ψ — корни квадратного уравнения $x^2 - x - 1 = 0$, то есть $\varphi^2 = \varphi + 1$ и $\psi^2 = \psi + 1$. Используя это наблюдение, получаем:

$$\begin{aligned}
F_{n+2} = F_{n+1} + F_n = \frac{\varphi^{n+2} - \psi^{n+2}}{\sqrt{5}} + \frac{\varphi^{n+1} - \psi^{n+1}}{\sqrt{5}} = \\
= \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\varphi^{n+2} + \varphi^{n+1} - \psi^{n+2} - \psi^{n+1}\Big) = \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\varphi^{n+1}(\varphi+1) - \psi^{n+1}(\psi+1)\Big) = \\
= \frac{1}{\sqrt{5}}\big(\varphi^{n+3} - \psi^{n+3}\big).
\end{aligned}$$

Как теперь закончить рассуждение? Буквально принцип математической индукции не говорит о такой ситуации. Чтобы закончить рассуждение, обозначим через A_n высказывание «(17) верна для n» и рассмотрим серию составных высказываний $B_n = A_n \wedge A_{n+1} \to A_{n+2}$. Мы доказали истинность B_1 и для любого n истинность импликации $B_n \to A_{n+2}$. Но последняя равносильна импликации $B_n \to B_{n+1}$ (проверьте!). Значит, по принципу математической индукции все B_n истинные. Но тогда и все A_n истинные. То есть формула (17) верна для всех n.

2.2. Число слов из n букв в алфавите размера k.

Важнейший для дискретной математики пример последовательностей: *слова в алфавите* A. Это произвольные последовательности конечной длины, члены которых принадлежат множеству A.

Всё множество слов в алфавите A обозначается A^*, а множество слов длины n обозначается A^n. В любом алфавите есть одно особое слово длины 0 — *пустое слово*, оно обычно обозначается $\emptyset$. Это последовательность, в которой нет ни одного члена.

Количество слов длины n в конечном алфавите A равно $|A|^n$. Индукция по n.

База: $n = 0$. Пустое слово одно, $|A^0| = 1 = |A|^0$.

Шаг индукции. Пусть уже доказано, что $|A^n| = |A|^n$.

Рассмотрим слова длины $n+1$ и докажем, что они по сути совпадают с декартовым произведением $A \times A^n$.

Для любого слова α однозначно определены «голова» — первый член α_1 и «хвост» — остальные члены последовательности, они образуют последовательность длины на единицу меньше. Скажем, у слова 1012 головой является 1, а хвостом — 012.

И наоборот: по символу $a \in A$ и слову α однозначно получается слово $a\alpha$, длина которого на единицу больше: запишем слово α после символа a, то есть составим последовательность, первый член которой равен a, второй равен первому члену слова α и т.д.

Значит, мы можем представить слова длины $n+1$ как клеточки прямоугольника, строкам которого отвечают символы алфавита, а столбцам — слова длины n. Поэтому $|A^{n+1}| = |A \times A^n|$.

Применяя правило произведения и индуктивное предположение, получаем

$$|A^{n+1}| = |A| \cdot |A^n| = |A| \cdot |A|^n = |A|^{n+1},$$

что и требовалось доказать для шага индукции.

По принципу математической индукции количество слов длины n равно $|A|^n$ для любого n.

2.3. Движение прямой. Движение на 1, 2.

Задачу можно переформулировать на языке последовательностей целых чисел. А именно, нужно подсчитать количество монотонно возрастающих последовательностей целых чисел, первый член которых равен 0, последний равен n, а разность между двумя соседними принимает только значения 1 или 2. Действительно, такие последовательности — это протоколы движения фишки по клеточкам. Каждому способу движения отвечает ровно одна последовательность и по ней этот способ движения так же однозначно определяется.

Обозначим количество таких последовательностей F_n. Заметим, что $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. Действительно, все последовательности, заканчивающиеся на $n+2$, разделяются на две непересекающиеся группы:

$$0, \dots, n, n+2;$$
$$0, \dots, n+1, n+2$$

(в клетку $n+2$ можно попасть либо с клетки n, либо с клетки $n+1$, на месте многоточий возможно вставить любую последовательность чисел, в которой разности между соседними числами равны 1 или 2).

Нетрудно подсчитать количество таких последовательностей при небольших n.

$\boldsymbol{n = 0}$**.** Единственная монотонная последовательность, начинающаяся и заканчивающаяся на 0: это 0. Поэтому $F_0 = 1$.

$\boldsymbol{n = 1}$**.** Единственная монотонная последовательность, начинающаяся на 0 и заканчивающаяся на 1: это 0,1. Поэтому $F_1 = 1$.

$\boldsymbol{n = 2}$**.** Монотонных последовательностей, начинающихся на 0 и заканчивающаяся на 2 уже две: это 0,1, 2 и 0, 2. Поэтому $F_2 = 2$.

Теперь становится понятно обозначение: мы получили рекурренту и начальные условия для чисел Фибоначчи. Для любого n количество способов попасть в n ходами длины 1 или 2 равно F_n.

2.4. Движение по прямой, шаги любой длины.

На языке последовательностей целых чисел мы хотим найти количество всех монотонно возрастающих последовательностей целых чисел, первый член которых равен 0, а последний равен n. Обозначим это количество $T(n)$.

Количество таких последовательностей при $n \leq 2$ такое же, как и в предыдущем примере: $T(0) = 1$; $T(1) = 1$; $T(1) = 2$. (Ограничения на длину шага выполняются в этих случаях для любой последовательности.)

При росте n количество вариантов растёт и уже легко ошибиться в подсчёте. Однако можно доказать общий факт:

$$T(n) = T(n-1) + T(n-2) + \dots + T(0) \tag{18}$$

для любого n.

Обозначим множество всех последовательностей длины n через X. Разделим последовательности на группы, в зависимости от последнего хода. То есть группу X_i образуют те монотонные последовательности, которые имеют вид

$$0, \dots, i, n.$$

Ясно, что каждая последовательность попала ровно в одну группу и группы не пересекаются (смотрим на последний ход или на предпоследний член последовательности). По правилу суммы получаем

$$|X| = |X_0| + |X_2| + \dots + |X_{n-1}|.$$

Но, с другой стороны, $|X_i| = T(i)$ (монотонные последовательности, начинающиеся в 0 и заканчивающиеся в i). Отсюда и получается формула (18).

Используя формулу (18), докажем индукцией по n явную формулу для $T(n)$:

$$T(n) = 2^{n-1} \qquad \text{при } n \geq 1. \tag{19}$$

База уже доказана.

Индуктивный переход. Если равенство $T(n) = 2^{n-1}$ верно, то

$$\begin{aligned} T(n+1) &= T(n) + T(n-1) + T(n-2) + \cdots + T(0) = \\ &= T(n) + T(n) = 2^{n-1} + 2^{n-1} = 2^n = \\ &= 2^{(n+1)-1}. \end{aligned}$$

В первом равенстве использована формула (18), которая верна для всех n.

2.5. Формула включений-исключений.

Индукция по количеству множеств. База: формула для двух множеств (да и для одного годится).

Шаг индукции в точности следует доказательству формулы для трёх множеств (и использует формулу для объединения двух множеств). Предполагаем, что (9) верна для любых n множеств. Рассмотрим набор из $n+1$ множеств: $A_1, \ldots, A_{n+1}$. Нам нужно доказать для этого набора равенство (9), что означает

$$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \cup A_{n+1}| = {} & |A_1| + \ldots + |A_n| + |A_{n+1}| - \\ & - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - \ldots - |A_n \cap A_{n+1}| \\ & + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| + \ldots \\ & \ldots \\ & (-1)^{n+2} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n \cap A_{n+1}|. \end{aligned} \tag{20}$$

Запишем формулу для объединения двух множеств:

$$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{n+1}| &= |(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) \cup A_{n+1}| = \\ =& |(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n)| + |A_{n+1}| - |(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) \cap A_{n+1}|. \end{aligned} \tag{21}$$

Применим формулу для объединения n множеств к первому слагаемому в (21). Получим те слагаемые из (20), в которые входят только множества $A_1, \ldots, A_n$.

Второе слагаемое в (21) равно $|A_{n+1}|$, такое же слагаемое есть и в (20).

Остальные слагаемые в (20) равны мощностям пересечения A_{n+1} с какими-то из множеств $A_1, \ldots, A_n$. Нужно убедиться, что третье слагаемое в (21) содержит те же слагаемые с теми же знаками.

В силу дистрибутивности пересечения и объединения множество в третьем слагаемом записывается как

$$(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) \cap A_{n+1} = (A_1 \cap A_{n+1}) \cup (A_2 \cap A_{n+1}) \cup \cdots \cup (A_n \cup A_{n+1}).$$

Обозначим $B_i = A_i \cap A_{n+1}$. Тогда третье слагаемое в (21) равно $-|B_1 \cup \dots \cup B_n|$. Применим индуктивное предположение (с учётом перемены знака) и получим

$$\begin{aligned}-|B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n| = &-|B_1| - \ldots - |B_n| + \\ &+ |B_1 \cap B_2| + |B_1 \cap B_3| + \ldots + |B_{n-1} \cap B_n| - \\ &- |B_1 \cap B_2 \cap B_3| - |B_1 \cap B_2 \cap B_4| - \ldots \\ &\ldots \\ &- (-1)^{n+1}|B_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap B_n|.\end{aligned} \tag{22}$$

Нам нужно ещё одно теоретико-множественное тождество

$$(A_1 \cap A_k) \cap (A_2 \cap A_k) \cap \dots \cap (A_{k-1} \cup A_k) = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k,$$

которое легко проверяется раскрытием скобок и применением очевидного из определения равенства $A \cap A = A$.

В силу этого тождества в правой части (22) написаны пересечения каких-то множеств $A_1, \ldots, A_n$ и (обязательно) множества A_{n+1}. Это в точности те слагаемые, которых нам недоставало в равенстве (20).

Проверим, что они входят с правильными знаками.

Так как $B_{i_1} \cup \dots \cup B_{i_s} = A_{i_1} \cup \dots \cup A_{i_s} \cup A_{n+1}$, то мощность этого множества входит в (22) со знаком $-(-1)^{s+1}$, а в (20) — со знаком $(-1)^{(s+1)+1} = -(-1)^{s+1}$. Знаки совпадают.

2.6. Формула для размещений из n по k.

Те слова длины k в n-символьном алфавите, в которых все символы разные, называют *упорядоченными выборками* или *размещениями* из n по k. (Представьте, что в лототроне лежат шары, помеченные всеми символами B, мы по очереди достаём шары из лототрона и фиксируем порядок их появления.)

Количество размещений из n по k обозначим $A_{n,k}$. Для краткости обозначений используем то же обозначение и для самого множества размещений. Из контекста нужно понимать, идёт ли речь о множестве или о его мощности.

Ясно, что $A_{n,k} = 0$, если $k > n$ (принцип кроликов, сейчас мы «сажаем» позиции слова в клетки, которые являются символами алфавита). В общем случае выполняется рекуррентное соотношение.

$A_{n,k} = (n - k + 1)A_{n,k-1}$, $1 \le k \le n$. Построим двудольный граф с долями $A_{n,k}$ и $A_{n,k-1}$, рёбра этого графа имеют вид

$$(b_1 b_2 \ldots b_{k-1} b_k,\ b_1 b_2 \ldots b_{k-1}).$$

Другими словами, мы соединяем ребром размещение длины k с его началом длины $k - 1$. Поэтому степень любой вершины левой доли равна 1.

Степень любой вершины правой доли равна $n - k + 1$: продолжить размещение можно любым из ещё неиспользованных $n - k + 1$ символов алфавита.

Равенство утверждения теперь становится частным случаем равенства (10). $A_{n,k} = n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)$.

Применяя последовательно утверждение 2.6, получаем

$$\begin{aligned} A_{n,k} &= (n-k+1)A_{n,k-1} = (n-k+1)(n-k+2)A_{n,k-2} = \ldots \\ &= (n-k+1)\cdot\ldots\cdot(n-1)nA_{n,0}. \end{aligned}$$

А размещение длины 0 ровно одно.

Формулу из теоремы 2.6 можно записать через факториалы. По определению $n! = 1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n$, $0! = 1$ (последнее не вполне очевидно из общего случая). Поэтому

$$A_{n,k} = n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}\,.$$

Важный частный случай размещений получается при $k = n$. Получаем последовательности чисел из $[n]$ длины n. Такие последовательности называются *перестановками*. Количество перестановок находится по теореме 2.6, оно равно

$$A_{n,n} = \frac{n!}{0!} = n!\,.$$

2.7. Сочетания из n по k.

Теперь рассмотрим *сочетания* или *неупорядоченные выборки*. В примере с лототроном это означает, что нас интересует лишь то, какие шары были вытащены, а не порядок их появления.

На обычном математическом языке это означает, что нас интересует *подмножество* вытащенных шаров. Вот и будем называть сочетанием из n элементов по k подмножество n-элементного множества, в котором ровно k элементов. Количество сочетаний из n по k будем обозначать C_n^k (обратите внимание на порядок индексов).

$C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}\,.$

Как нетрудно догадаться, чтобы доказать равенство, в котором используется деление, нужно применить комбинаторное правило деления.

Используя формулу для размещений, перепишем это равенство в другом виде:

$$C_n^k \cdot k! = A_{n,k}\,. \tag{23}$$

Построим двудольный граф. Вершины левой доли — сочетания из n по k, то есть k-элементные подмножества множества $[n]$; вершины правой доли — размещения $A_{n,k}$. Рёбра графа соединяют пары (S, w), где S — это множество символов, которые встречаются в размещении w.

Из определения ясно, что степени вершин правой доли равны 1 (по размещению множество символов определяется однозначно).

Найдём степень вершины левой доли. Сколько есть размещений длины k, которые используют ровно k заданных символов? Это $A_{k,k} = k!$, то есть количество перестановок k символов.

Подставляя полученные значения в (10), получаем (23).

2.8. Бином Ньютона. Сумма биноминальных коэффициентов. Знакопеременная сумма их.

Рассмотрим *бином* $(x + y)^n$. Как известно из алгебры, целое алгебраическое выражение можно записать в виде многочлена. Поэтому

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k = x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} y + \cdots + \binom{n}{n-1} x y^{n-1} + y^n. \qquad (24)$$

Здесь $\binom{n}{k}$ — числа, которые называются *биномиальными коэффициентами.* (Обратите внимание на порядок индексов.) Оказывается, это в точности числа сочетаний из n по k. У нас появилось несколько равносильных способов определять биномиальные коэффициенты (они же числа сочетаний, они же — количество монотонных путей в квадранте). Это даёт возможность доказывать свойства биномиальных коэффициентов разными способами: привлекая комбинаторику, алгебру и даже анализ.

Рассмотрим начальную серию таких примеров.

Каждая строка треугольника Паскаля симметрична относительно середины.

В n-й строке треугольника Паскаля записаны биномиальные коэффициенты $\binom{n}{0}$, $\binom{n}{1}$, ..., $\binom{n}{n}$.

Симметрия относительно середины означает равенство

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Проще всего это равенство увидеть из формулы для числа сочетаний

$$\binom{n}{k} = C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{n-k}$$

(переставим сомножители в знаменателе).

Не сложнее «натуральное доказательство» этого утверждения, которое сопоставляет k-элементному подмножеству n-элементного множества его дополнение, в котором как раз $n - k$ элементов.

В первой половине строки треугольника Паскаля числа возрастают.

И здесь нетрудно воспользоваться формулой для числа сочетаний. Но даже легче использовать двойной подсчёт.

Построим двудольный граф. Вершины левой доли — k-элементные подмножества n-элементного множества $[n]$; вершины правой доли — $(k+1)$-элементные подмножества того же множества. Рёбра — это пары (A, B), для которых $A \subset B$.

Каждое k-элементное подмножество A возможно расширить до $(k+1)$-элементного подмножества $n-k$ способами (столько элементов не входят в A). Поэтому степени вершин левой доли равны $n-k$.

В каждом $(k+1)$-элементном подмножестве B есть $k+1$ подмножество размера k (чтобы получить такое нужно удалить один из элементов подмножества B, а их $k+1$). Значит,

$$\binom{n}{k} \cdot (n-k) = \binom{n}{k+1} \cdot (k+1),$$

что равносильно

$$\binom{n}{k} \Big/ \binom{n}{k+1} = \frac{k+1}{n-k} < 1$$

при $2k < n-1$.

Таким образом, биномиальные коэффициенты растут до тех пор, пока не выполнится неравенство $k \geq (n-1)/2$, а это случится как раз в середине строки треугольника Паскаля.

Каждое число в треугольнике Паскаля по крайней мере в 2 раза меньше, чем число, которое стоит под ним.

Тут полезно представление биномиальных коэффициентов как числа монотонных путей в квадранте и рекуррентная формула для этого числа.

Под числом $\binom{n}{k}$ стоит число в $(n+2)$-й строке треугольника Паскаля, это биномиальный коэффициент $\binom{n+2}{k+1}$.

Первое число — $\binom{n}{k}$ — это количество монотонных путей из $(0,0)$ в $A = (k, n-k)$; второе — $\binom{n+2}{k+1}$ — из $(0,0)$ в $B = (k+1, n-k+1)$. Из точки A в точку B ведёт два монотонных пути (увеличиваем сначала абсциссу, а потом ординату или наоборот). Поэтому каждый путь в A продолжается двумя способами до пути в B (а есть ещё, конечно, пути в B, которые вообще не проходят через A).

Количество подмножеств n-элементного множества с нечётным количеством элементов равно количеству подмножеств n-элементного множества с чётным количеством элементов.

Поскольку количество k-элементных подмножеств n-элементного множества равно биномиальному коэффициенту, по сути речь идёт о том, что знакочередующаяся сумма чисел в строке треугольника Паскаля равна 0.

Запишем формулу бинома

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

и подставим в неё $1 = x = -y$. В левой части получится 0. А в правой

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k}(-1)^k = \sum_{k \text{ чётное}} \binom{n}{k} - \sum_{k \text{ нечётное}} \binom{n}{k},$$

т.е. как раз знакопеременная сумма чисел в строке треугольника Паскаля.

$\binom{n}{k} = C_n^k.$

Давайте переходить от левой части (24) к правой в два этапа. Сначала раскроем скобки. Получим сумму выражений вида $xyyx\ldots$, где всего сомножителей n, а каждый из них — это x или y. Количество таких сомножителей равно количеству слов длины n в алфавите $\{x, y\}$, то есть равно 2^n (от замены символов $0, 1$ на x, y количество слов не изменяется).

Теперь «приведём подобные». Мы знаем, что сложение коммутативно и ассоциативно. Поэтому все слагаемые с одинаковым количеством x и y равны $x^{n-k}y^k$, где k — количество символов y (а количество символов x равно $n-k$, потому что других символов в этих выражениях нет).

Итак, $\binom{n}{k}$ равен количеству слагаемых с k символами y и $n-k$ символами x, а это количество равно количеству двоичных слов с k единицами, то есть C_n^k (см. пример **??**).

2.9. Мультноминальные коэффициенты.

Первая состоит в нахождении формулы для *мультиномиальных коэффициентов*, т.е. коэффициентов в разложении 13. Приведём сразу ответ, а потом дадим два разных доказательства этой формулы.

$\binom{n}{a_1, a_2, \ldots, a_k} = \dfrac{n!}{a_1!a_2!\ldots a_k!}$

Эту теорему можно доказать двумя способами: алгебраическим и комбинаторным. Приведём сначала комбинаторное доказательство.

У мультиномиальных коэффициентов есть внятный комбинаторный смысл. Вспомним, как мы находили формулу для биномиальных коэффициентов. Мы раскладывали бином в два шага: сначала раскрывали скобки, а затем приводили подобные.

Что даёт раскрытие скобок в выражении (13)? Получаются слагаемые, каждое из которых имеет вид $x_1x_2x_2\ldots$. Это слово ξ в алфавите $\{x_1, \ldots, x_k\}$, в котором n букв. После перестановок переменных из этого слова получается моном $x_1^{a_1}x_2^{a_2}\ldots x_k^{a_k}$, где a_i — количество букв x_i в слове ξ.

Значит, мультиномиальный коэффициент $\binom{n}{a_1,\ldots,a_n}$ равен количеству слов в алфавите $\{x_1, \ldots, x_k\}$, длина которых равна n, а количество вхождений каждого символа задаётся числами $a_1, \ldots, a_n$.

Комбинаторное доказательство теоремы 1.14. Построим двудольный граф. Вершины левой доли — слова в алфавите $\{x_1, \ldots, x_k\}$, в которых a_1 букв x_1, a_2 букв x_2, и т.д., $a_1 + \cdots + a_k = n$. Вершины правой доли — перестановки чисел от 1 до n.

Чтобы определить рёбра этого графа, разделим числа от 1 до n на k групп так, чтобы в j-й группе было ровно a_j чисел. Пусть первая группа состоит из чисел от 1 до a_1; вторая — от $a_1 + 1$ до $a_1 + a_2$; …; k-я группа — числа от $a_1 + \cdots + a_{k-1} + 1$ до n.

Рёбрами в нашем графе будут пары (ξ, π), где слово ξ получается из перестановки $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_n)$ заменой каждого числа π_i на x_j, где j — номер группы, в которую входит это число.

Степень каждой вершины в правой доле этого графа равна 1 (по перестановке однозначно определяется смежное с ней слово).

Чтобы найти степень слова (вершины левой доли), обратим внимание на то, что если (ξ, π) — ребро графа, то вхождения буквы x_j в слово ξ заменяются в перестановке π на числа из j-й группы. Порядок этих чисел произвольный и каждое число должно быть использовано ровно один раз.

Всего есть $a_j!$ перестановок a_j чисел j-й группы, сохраняющих их места в перестановке π. По правилу произведения общее количество перестановок, связанных ребром со словом ξ равно $a_1!a_2! \dots a_k!$. Подсчитывая число рёбер в построенном графе двумя способами, получаем равенство

$$\binom{n}{a_1 \dots a_k}\big(a_1! \dots a_k!\big) = n!\,,$$

что и требовалось.

Теперь приведём доказательство, основанное на индукции по числу слагаемых в формуле 1.14.

Алгебраическое доказательство теоремы 1.14 Индукция по числу переменных k.

База индукции: $k = 2$. Это обычная формула для биномиальных коэффициентов, см. теорему 2.7. Поскольку $a_1 + a_2 = n$, то

$$\binom{n}{a_1, a_2} = C_n^{a_1} = \frac{n!}{a_1!(n-a_1)!} = \frac{n!}{a_1!a_2!}\ .$$

Шаг индукции. Предполагаем, что формула из теоремы 1.14 доказана для k. Представим $x_1 + \dots + x_k + x_{k+1}$ как $(x_1 + \dots + x_k) + x_{k+1}$ и запишем разложение n-й степени суммы $k+1$ переменной как бинома от этих двух слагаемых:

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_k + x_{k+1})^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (x_1 + x_2 + \dots + x_k)^j x_{k+1}^{n-j}.$$

Теперь раскрываем скобки в множителях вида $(x_1 + x_2 + \dots + x_k)^j$ и из индуктивного предположения получаем равенство

$$\begin{aligned}\binom{n}{a_1, \dots, a_k, a_{k+1}} &= \binom{n}{j}\binom{j}{a_1, \dots, a_k} = \\ =&\frac{n!}{j!(n-j)!} \cdot \frac{j!}{a_1!a_2! \dots a_k!} = \frac{n!}{a_1!a_2! \dots a_k!(n-j)!}\ .\end{aligned}$$

Осталось заметить, что $n - j = n - a_1 - \dots - a_k = a_{k+1}$.

2.10. Сочетания с повторениями.

Вторая перечислительная задача, связанная с разложением степени суммы (13) состоит в подсчёте числа различных мономов в этом разложении. Степень монома —

это сумма степеней переменных, в него входящих. Степень монома $x_1x_2x_3$ равна 3, степень монома $x_1^2x_2$ также равна 3. А сколько всего мономов от трёх переменных степени 3? На такой вопрос нетрудно ответить, выписав все нужные мономы:

$$x_1^3,\ x_2^3,\ x_3^3,\ x_1^2x_2,\ x_1^2x_3,\ x_1x_2^2,\ x_2^2x_3,\ x_1x_3^2,\ x_2x_3^2,\ x_1x_2x_3.$$

Но даже в этом случае нужно проверить, что мы ничего не пропустили и эти 10 мономов и есть все возможные варианты.

Сформулируем задачу точно. Моном $x_1^{a_1}x_2^{a_2}\dots x_k^{a_k}$ имеет степень $a_1+\dots+a_k$ и мономы совпадают тогда и только тогда, когда соответствующие последовательности показателей равны. Поэтому нам нужно найти количество решений уравнения

$$a_1 + \dots + a_k = n \tag{25}$$

в неотрицательных целых числах. Это число традиционно называется *числом сочетаний с повторениями* из n по k. Обозначим его

$$\genfrac{}{}{0pt}{}{n}{k}.$$

Название можно объяснить примером с лототроном, который рассматривался выше. Теперь мы каждый раз возвращаем выпавший шар в лототрон, поэтому шары могут повторяться. Но нам неважно, как и раньше, в каком порядке выпадали эти шары.

Ещё одно популярное представление чисел с повторениями даётся в формулировке следующей задачи.

Сколько есть вариантов разделить n одинаковых монет между k людьми?

Это то же самое число сочетаний с повторениями из n по k. Действительно, каждый вариант делёжки задаётся указанием числа a_1 монет, которые получает первый человек, числа a_2 монет, которые получает второй и т.д.

$\genfrac{}{}{0pt}{}{n}{k} = \binom{n+k-1}{k-1}.$

Установим взаимно однозначное соответствие между решениями уравнения (25) и $(k-1)$-элементными подмножествами $(n+k-1)$-элементного множества. Будем делать это, используя терминологию задачи о разделе монет.

Выстроим монеты в ряд и разделим их перегородками, чтобы указать, кому какие монеты отходят. Первый получает монеты, которые расположены до первой перегородки, второй — те, которые лежат между первой и второй, и т.д. Например, на рисунке 1 показан раздел 7 монет между 7 людьми, при котором первому не доста-

Рис. 1. $a_1 = 0$, $a_2 = 2$, $a_3 = 0$, $a_4 = 2$, $a_5 = 0$, $a_6 = 1$, $a_7 = 2$

ётся ничего, второму — две монеты, третьему — ничего, четвёртому — две монеты, пятому — ничего, шестому — одна, а седьмому — две монеты.

Такой раздел отвечает решению уравнения (25), которое указано в подписи под рисунком.

Последний человек получает монеты, которые лежат после последней перегородки. Поэтому для 7 людей нужно всего 6 перегородок. А в общем случае, когда людей k, нужна $k-1$ перегородка.

Итак, у нас есть позиции, на каждую из которых можно поставить либо монету, либо перегородку. Всего позиций $n+k-1$, а перегородок — $k-1$. Любой выбор $(k-1)$-элементного подмножества позиций, на котором стоят перегородки, возможен, и каждому такому выбору отвечает ровно одно решение уравнения (25). Получаем искомое соответствие.

2.11. Формула для суммы степеней вершин.

Количество соседей вершины v (оно же количество инцидентных её рёбер) называется *степенью* вершины, обозначать будем $d(v)$.

Сумма степеней всех вершин графа равна удвоенному числу его рёбер.

Здесь применим *метод двойного подсчёта*. Под таким громким названием скрывается очень простой факт: если посчитать сумму элементов матрицы по строкам, то получится такое же число, как и при суммировании элементов матрицы по столбцам.

Давайте посчитаем количество 1 в матрице инцидентности графа. В строке i количество 1 равно количеству инцидентных вершине i рёбер, то есть степени этой вершины. Значит, сумма 1 по строкам равна сумме степеней вершин.

В каждом столбце матрицы инцидентности ровно две 1, так как у ребра ровно два конца. Значит, сумма 1 по столбцам равна удвоенному количеству рёбер.

Обе суммы равны общему количеству 1 в матрице инцидентности, а значит, равны между собой.

2.12. Свойства отношения достижимости в неориентированном графе (рефлексивность, симметричность, транзитивность)

Для вершины v обозначим через $C(v)$ множество вершин, связанных с v. Будем называть это множество *областью достижимости вершины* v. Если граф связный, то для каждой вершины $C(v)$ совпадает со всем множеством вершин графа. В общем случае это не так. Но всегда выполняется несколько простых свойств для областей достижимости.

Для любого графа и любых его вершин v_1, v_2, v_3 выполняются следующие свойства:

(1) $v_1 \in C(v_1)$ (вершина достижима из себя самой);

(2) $v_1 \in C(v_2)$ равносильно $v_2 \in C(v_1)$ (если v_1 достижима из v_2, то v_2 достижима из v_1);

(3) если $v_1 \in C(v_2)$ и $v_2 \in C(v_3)$, то $v_1 \in C(v_3)$.

Эти свойства вполне очевидны из неформального представления о достижимости. Формальные их доказательства также очень просты.

v_1 — путь в любом графе, поэтому v_1 связанная с самой собой.

Если $v_1 u_1 otsu_s v_2$ — путь в графе, то $v_2 u_s otsu_1 v_1$ — также путь. Поэтому достижимость v_2 из v_1 равносильная достижимости v_1 из v_2.

Наконец, если в графе есть пути $v_3 u_1 otsu_s v_2$ и $v_2 w_1 otsw_t v_1$ (то есть $v_1 \in C(v_2)$ и $v_2 \in C(v_3)$), то в это графе есть также и путь $v_3 u_1 otsu_s v_2 w_1 otsw_t v_1$, то есть v_1 достижима из v_3.

На этой очевидной лемме основан важный способ доказательства связности графа. А именно, достаточно доказать, что из какой-то вершины достижимы все. Это эквивалентно в силу свойства 2 леммы 2.12, что из любой вершины достижима какая-то выделенная. А свойство 3 гарантирует, что года из каждой вершины достижима любая.

2.13. Разбиение неориентированного графа на компоненты связности.

Теорема 3.2. *Вершины неориентированного графа можно разбить на непересекающиеся группы, называемые* связными компонентами*, при этом:*

- *каждая вершина графа попадает ровно в одну группу;*
- *любые две вершины из одной группы связаны;*
- *любые две вершины из двух разных групп не связаны.*

Такая компонента может быть одна — это значит, что любые две вершины связаны (и, как мы уже говорили, в этом случае граф называют связным).

Доказательство. Для каждой вершины v составим группу из всех связанных с ней вершин. Обозначим эту группу $C(v)$ — от слова «connected» (*англ.* связаны). Наблюдение: для любых двух вершин v и w группы $C(v)$ и $C(w)$ либо совпадают (содержат одни и те же вершины), либо не пересекаются. В самом деле, если v и w связаны, то по транзитивности всякая вершина, связанная с одной, связана и с другой, так что $C(v) = C(w)$. Если же v и w не связаны, то докажем, что $C(v)$ и $C(w)$ не пересекаются (не могут иметь общих вершин). В самом деле, если u было бы общей вершиной ($u \in C(v) \cap C(w)$), то v и u связаны (по определению $C(w)$), а также w и u связаны (по определению $C(w)$). Транзитивность гарантирует, что v связано с w, вопреки предположению.

Мы проверили, что получилось разбиение на непересекающиеся группы. Каждая вершина v попадает в группу $C(v)$. Вершины из одной группы связаны: если $v, w \in C(u)$, то v и w связаны с u, и по транзитивности v и w связаны друг с другом. (Мы повторяем уже использованное рассуждение). Вершины из разных групп не связаны: если вершина $p \in C(u)$ связана с вершиной $q \in C(v)$, то получается цепочка связанных вершин: u с p, затем p с q, наконец, q с v. Дважды применяя транзитивность, заключаем, что u и v связаны и потому $C(u)$ и $C(v)$ — не разные группы, а одна и та же. Теорема доказана. □

У компонент связности есть другое описание. Для него нам потребуется новое понятие: *индуцированный подграф* графа. Пусть $U \subseteq V$ — подмножество вершин графа $G(V, E)$. Тогда $\langle U\rangle$ — это граф с множеством вершин U и множеством рёбер

$$E(\langle U\rangle) = ig\{\{x, y\} : \{x, y\} \in E(G),\ x, y \in Uig\}.$$

Компоненты связности — это в точности максимальные по включению множества вершин, индуцирующие связный граф.

Условие теоремы означает фактически два утверждения: (а) любое множество, строго содержащее компоненту связности (все вершины компоненты и ещё какие-то, хотя бы одну), индуцирует несвязный граф; (б) любое множество, индуцирующее связный граф, содержится в какой-то компоненте связности.

Если $X \supset C(v)$ (этот знак обозначает строгое включение), то $\langle X\rangle$ несвязный: из вершины $x \in X \supseteq C(v)$ недостижима v. Значит, компоненты связности — максимальные по включению множества, индуцирующие связные графы. Утверждение (а) доказано.

В обратную сторону. Пусть X — множество, индуцирующее связный граф, $v \in X$. Поскольку $\langle X\rangle$ связный, то $C(v) \supseteq X$ (вершины из X достижимы из v даже если запрещено выходить за пределы X). Утверждение (б) доказано.

2.14. Критерии деревьев.

Равносильны следующие свойства связных простых неориентированных графов:

(1) граф — дерево;

(2) для любых двух вершин u, v существует единственный простой путь из u в v;

(3) нет простых циклов длины больше 2.

Будем доказывать утверждения теоремы 1.20 по очереди.

Доказательство (2) $\Rightarrow$ (3).

Равносильно контрапозиции $\neg(3) \Rightarrow \neg(2)$. Пусть в графе G есть простой цикл $v_0, v_1, \ldots, v_\ell = v_0$, $\ell > 2$.

Вершины v_0 и v_1 связанные в этом графе, причём есть по крайней мере два разных пути с концами в этих вершинах: (v_0, v_1) (путь из одного ребра) и путь по остальным рёбрам цикла $(v_0 = v_\ell, v_{\ell-1}, \ldots, v_2, v_1)$ (здесь важно, что длина цикла больше 2).

Доказательство (3) $\Rightarrow$ (1). Равносильно контрапозиции $\neg(1) \Rightarrow \neg(3)$.

Пусть ребро $e = \{v_0, v_1\}$ можно удалить из графа G и полученный граф $G - e$ остаётся связным. Это значит, что вершины v_0, v_1 связанные в G'. По утверждению 1.18 в графе G' есть простой путь $v_1, v_2, \ldots, v_\ell = v_0$. Все вершины этого пути различные.

Но тогда в графе G есть простой цикл $v_0, v_1, v_2, \ldots, v_\ell = v_0$ и, так как $v_0 \neq v_1$, длины этого цикла больше 2.

Доказательство (1) $\Rightarrow$ (2). Равносильно контрапозиции $\neg(2) \Rightarrow \neg(1)$. Пусть между вершинами u и v есть два разных пути

$$u = u_0 u_1 \dots u_s = v \quad \text{и} \quad u = v_0 v_1 \dots v_t = v.$$

Начинаются эти пути в одной вершине, но полностью совпадать не могут. Выделим ребро, которое входит только в один из этих путей. Без ограничения общности это ребро $\{u_i, u_{i+1}\}$ на первом пути.

Докажем, что ребро $\{u_i, u_{i+1}\}$ — не мост. При удалении этого ребра из графа вершины u_i, u_{i+1} остаются в одной компоненте связности: они связаны (не обязательно простым) путём

$$u_i u_{i-1} \dots u_0 = v_0 v_1 \dots v_t = u_s u_{s-1} \dots u_{i+1}.$$

Области достижимости вершин не из $C(u_i)$ не изменяются: пути из таких вершин не проходят через ребро $\{u_i, u_{i+1}\}$.

Завершение доказательства теоремы 1.20. Поскольку мы доказали циклическую цепочку импликаций (2) $\Rightarrow$ (1) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (2), все эти утверждения равносильны (если хотя бы одно истинно, остальные два тоже истинны).

2.15. Критерий для деревьев: связный граф, в котором разность количества вершин и рёбер равна 1.

Связный граф является деревом тогда и только тогда, когда число рёбер в нём на единицу меньше числа вершин.

Доказательство теоремы основано на таком утверждении.

Пусть граф $G' = G + e$ получается из графа G добавлением ребра $e = \{x, y\}$ к множеству рёбер, а вершины у него те же.

Тогда $\dim G' = \dim G$, если концы ребра x, y лежат в разных компонентах связности графа G, и $\dim G' = \dim G + 1$, если x, y лежат в одной компоненте связности графа G.

Рассмотрим два случая, указанных в утверждении.

Вершины x, y лежат в одной компоненте связности C графа G. Тогда количество компонент связности не изменилось: для любой вершины x область достижимости в графе G' та же самая, что и в G (поскольку y достижима из x и в графе G). Количество рёбер увеличилось на 1, количество вершин не изменилось. Значит, и размерность увеличилась на 1.

Вершины x, y лежат в разных компонентах связности графа G. Тогда в графе G' в область достижимости вершины x добавляется $C(y)$, поскольку в G' вершина y достижима из x. Аналогично рассуждаем про y, получаем

$$C'(x) = C'(y) = C(v) \cup C(u),$$

то есть области достижимости x и y в графе G' равны объединению областей достижимости этих вершин в графе G. Области достижимости вершин из других компонент связности G остаются теми же самыми. Значит, количество компонент связности уменьшилось на 1. Количество рёбер увеличилось на 1, количество вершин не изменилось. Поэтому размерность не изменилась.

2.16. Описание ориентированных графов, в которых все исходящие степени равны 1; все входящие и исходящие степени равны 1.

Если в орграфе G каждая вершина имеет исходящую и входящую степень 1, то рёбра такого графа разбиваются на несколько -ориентированных циклов: каждое ребро принадлежит в точности одному из этих циклов.

Рассмотрим орграф G на множестве вершин V, который удовлетворяет условиям теоремы.

Выберем вершину $v = v_0$ и построим путь $v_0, v_1, \ldots, v_i, \ldots$ по орграфу G. Этот путь однозначно определён, так как из каждой вершины v_i выходит ровно одно ребро (v_i, v_{i+1}).

Построенный путь бесконечный, а вершин в графе конечное количество. Поэтому рано или поздно на этом пути какая-то вершина повторится. Выберем самое первое повторение: $v_i = v_\ell$, $i < \ell$; все вершины $v_0, \ldots, v_{\ell-1}$ различны.

Теперь опишем графы, у которых исходящая степень в каждой вершине равна 1.

Они не исчерпываются наборами ориентированных циклов, как показывает рис. **??**. Оказывается, в этих графах помимо ориентированных циклов есть ещё *ориентированные деревья*. Определим формально, что это такое.

Иногда в дереве выделяют особую вершину — *корень*. В этом случае дерево называют корневым. (Заметим, что висячие вершины, отличные от корня, называют *листьями*.)

По любому простому неориентированному графу можно построить орграф, выбрав для каждого ребра одну из двух возможных ориентаций. Для любого корневого дерева есть две естественные ориентации: по направлению к корню и по направлению от корня.

Будем называть корневое дерево с корнем r *ориентированным к корню*, если каждое ребро (u, v) удовлетворяет такому условию: вершина v лежит на простом пути от u к r. (Напомним, что в дереве такой путь единственный.)

Аналогично определяется *ориентация от корня*: вершина u лежит на простом пути от v к r. Но нам она сейчас не понадобится.

Если в орграфе G каждая вершина имеет исходящую степень 1, то рёбра такого графа разбиваются на несколько ориентированных циклов и несколько ориентированных корневых деревьев, корень каждого такого дерева принадлежит одному из циклов.

Как и доказательстве предыдущей теоремы, рассмотрим путь

$$v = v_0, v_1, \ldots, v_i, \ldots$$

по орграфу G, начинающийся в вершине v. Этот путь однозначно определён, вершины в нём обязаны повторяться.

Рассмотрим первое повторение $v_i = v_j$. Тогда $v_{i+1} = v_{j+1}$ и так далее. Поэтому, начиная с v_i, этот путь периодичен, и наименьший период является простым циклом. Обозначим этот цикл $C(v)$, а первую повторяющуюся вершину — $r(v)$.

Различные циклы вида $C(v)$ не пересекаются. Но теперь, в отличие от случая когда и все входящие степени равны 1, будут также и вершины, которые не лежат на этих циклах. (Поскольку теперь v необязательно лежит на цикле $C(v)$.

Пусть r лежит на одном из циклов. Рассмотрим граф, индуцированный множеством вершин $V_r = \{v : r = r(v)\}$ (за исключением возможной петли r, r). Докажем, что это ориентированное дерево с корнем r.

Заметим, что если убрать ориентации рёбер, то полученный неориентированный граф G_r является связным (из любой вершины достижима вершина r).

Обозначим через n количество вершин в графе G_r, а через m — количество рёбер. Из каждой вершины, кроме r выходит ровно одно ребро (ребро, выходящее из r лежит на цикле). Значит, $m = n - 1$. По следствию **??** из теоремы 1.20 граф G_r является деревом.

Осталось доказать, что всё ребра в дереве G_r ориентированы в исходном орграфе к корню. Действительно, из любой вершины $v \in V_r$ есть путь в $r(v)$, то есть корень дерева. Значит ребро (v, v') (единственное ребро, исходящее из v) ориентировано к корню.

Докажем от противного, что повторится именно вершина v_0. Пусть $i > 0$. Тогда в графе есть два ребра (v_{i-1}, v_i) и $(v_{\ell-1}, v_\ell)$, входящие в $v_i = v_\ell$. Поскольку входящая степень равна 1, то $v_{i-1} = v_{\ell-1}$. Это противоречит тому, что $v_i = v_\ell$ первое повторение. (Рис. **??**.)

Получили простой цикл $C(v) = (v_0, v_1, \dots, v_\ell = v_0)$. Из условий теоремы следует, что никакие другие рёбра не входят и не выходят из вершин v_i.

Различные циклы вида $C(v)$ не пересекаются, так как исходящие степени вершин равны 1. С другой стороны, каждая вершина v лежит на цикле $C(v)$. Значит, рёбра этих циклов и задают разбиение рёбер орграфа на ориентированные циклы.

2.17. 2-раскрашиваемые графы — это в точности графы без циклов нечётной длины.

Достаточно доказать утверждение для связных графов, так как несвязный граф 2-раскрашиваемый тогда и только тогда, когда все его компоненты связности 2-раскрашиваемые и то же самое верно для свойства «длины всех циклов чётные».

Если в графе есть цикл нечётной длины, то его нельзя правильно раскрасить в 2 цвета. Соседние вершины должны быть противоположных цветов, поэтому количество вершин одного цвета должно равняться количеству вершин другого цвета.

Теперь докажем обратное. Пусть в графе длины всех циклов чётные. Докажем, что тогда для любых двух вершин u, v длины путей из u в v имеют одинаковую чётность.

Если в графе есть путь $\alpha = (u, \dots, v)$ с чётным числом вершин (нечётной длины), а также другой путь $\beta = (v, \dots, u)$ с нечётным числом вершин (чётной длины), то соединение этих путей $\alpha\beta$ (идём по первому пути из u в v, затем по второму пути из v в u) даёт цикл с нечётным числом вершин (нечётной длины): вершины u и v считаются дважды в путях $\alpha]$, β и по одному разу в цикле. Это противоречит сделанному предположению, что все циклы в графе имеют чётную длину.

Теперь укажем искомую правильную раскраску в 2 цвета. Выберем вершину u и раскрасим вершину x графа в цвет 0, если длины путей из u в x чётные; в цвет 1, если длины путей из u в x нечётные. Это правило корректно по доказанному выше утверждению про одинаковую чётность длин циклов в графе без нечётных циклов (вспомним также, что мы доказываем утверждение теоремы для связных графов).

Заметим, что смежные в графе вершины не могут быть покрашены в один цвет: если $\{x, y\}$ — ребро графа, то для каждого пути $(u, \dots, x)$ существует путь в y противоположной чётности, а именно, $(u, \dots, x, y)$.

2.18. Свойства отношения связанности в ориентированном графе (рефлексивность, симметричность, транзитивность).

Для любого графа и любых его вершин v_1, v_2, v_3 выполняются следующие свойства:

$v_1 \in C(v_1)$ (вершина сильно связана сама с собой);

$v_1 \in C(v_2)$ равносильно $v_2 \in C(v_1)$;

если $v_1 \in C(v_2)$ и $v_2 \in C(v_3)$, то $v_1 \in C(v_3)$.

v_1 — путь в любом графе, поэтому v_1 сильно связана с самой собой.

Определение сильной связанности симметрично, отсюда свойство 2.19.

Наконец, если в графе есть пути из v_3 в v_2, из v_2 в v_3, из v_2 в v_1, из v_1 в v_2, то обязательно есть и пути из v_1 в v_3 (соединяем путь из v_1 в v_2 с путём из v_2 в v_3), а также из v_3 в v_1 (соединяем путь из v_3 в v_2 с путём из v_2 в v_1). Это доказывает свойство 2.19.

2.19. Разбиение графа на компоненты сильной связности.

Как и в случае неориентированных графов, обозначим через $R(u)$ множество тех вершин v, которые *достижимы* из u, то есть существует путь с началом u и концом v.

Будем говорить, что вершина u *сильно связана* с вершиной v, если v достижима из u и наоборот, то есть если есть путь из u в v, а также путь из v в u.

Через $C(u)$ обозначим множество тех вершин v, которые сильно связаны с u. Эти множества обладают теми же свойствами, что и компоненты связности обычного ориентированного графа и называются *компонентами сильной связности*.

Для любого графа и любых его вершин v_1, v_2, v_3 выполняются следующие свойства:

$v_1 \in C(v_1)$ (вершина сильно связана сама с собой);

$v_1 \in C(v_2)$ равносильно $v_2 \in C(v_1)$;

если $v_1 \in C(v_2)$ и $v_2 \in C(v_3)$, то $v_1 \in C(v_3)$.

v_1 — путь в любом графе, поэтому v_1 сильно связана с самой собой.

Определение сильной связанности симметрично, отсюда свойство

Наконец, если в графе есть пути из v_3 в v_2, из v_2 в v_3, из v_2 в v_1, из v_1 в v_2, то обязательно есть и пути из v_1 в v_3 (соединяем путь из v_1 в v_2 с путём из v_2 в v_3), а также из v_3 в v_1 (соединяем путь из v_3 в v_2 с путём из v_2 в v_1). Это доказывает свойство

Если $w \in C(v_1) \cap C(v_2)$, то $C(v_1) = C(v_2)$. Компоненты сильной связности не пересекаются или совпадают.

Поскольку w сильно связана с v_1 и с v_2, то v_2 достижима из v_1 (путь из v_1 в w, соединённый с путём из w в v_2). Аналогично, v_1 достижима из v_2.

Значит, $C(v_2) \subseteq C(v_1)$ и $C(v_1) \subseteq C(v_2)$. То есть $C(v_1) = C(v_2)$.

Из этих свойств, аналогично случаю неориентированных графов, следует, что компоненты сильной связности орграфа задают разбиение его вершин.

Если всё множество вершин орграфа образует компоненту сильной связности, такой орграф называется *сильно связным*. Примером сильно связного графа является ориентированный цикл.

2.20. Критерии ацикличности графа.

Следующие свойства ориентированного графа без петель равносильны:

(1) Каждая сильно связная компонента состоит из одной вершины.

(2) В орграфе нет циклов длины больше 0.

(3) Вершины орграфа можно пронумеровать натуральными числами таким образом, чтобы все рёбра вели «вверх»: из вершины с меньшим номером в вершину с большим.

Для доказательства этой теоремы нам понадобится такая полезная лемма.

В орграфе без циклов есть вершина, из которой не выходит ни одного ребра, а также есть вершина, в которую не входит ни одного ребра.

От противного. Если из каждой вершины выходит хотя бы одно ребро, то оставим по одному ребру, исходящему из каждой вершины. Получаем граф, в котором исходящие степени вершин равны 1. Как мы уже доказали в теореме **??**, в таком графе есть цикл.

Чтобы доказать второе утверждение, перейдём к графу, в котором ориентации всех рёбер изменены на противоположные. Если исходный граф был ациклическим, то граф с инвертированными ориентациями также будет ациклическим. Но исходящие и входящие степени вершин переставляются.

Доказательство теоремы 2.20 $1 \Rightarrow 2$ равносильно контрапозиции $\neg 2 \Rightarrow \neg 1$. Докажем вторую импликацию. Раз в орграфе нет петель, в нём нет циклов длины 1. Если в орграфе есть цикл с $n > 1$ вершинами, то вершины этого цикла сильно связаны (из любой можно попасть в любую по циклу).

$2 \Rightarrow 1$ равносильно контрапозиции $\neg 1 \Rightarrow \neg 2$. Докажем вторую импликацию. Если вершины $a \neq b$ сильно связаны, то существуют пути из a в b и из b в a. Соединением этих путей получается цикл.

$3 \Rightarrow 2$: если возможна нумерация вершин, при которой все рёбра идут из меньшей вершины в большую, то циклов нет: вдоль любого пути номера вершин строго возрастают, что невозможно при возвращении в исходную вершину.

$2 \Rightarrow 3$ докажем индукцией по числу вершин усиленный вариант: нумерация использует числа от 1 до n, где n — число вершин в орграфе.

База индукции: граф без петель на одной вершине. Он ациклический и требуемая нумерация существует (это очевидно, так как рёбер нет).

Шаг индукции: пусть $2 \Rightarrow 3$ выполняется для графов с $< n$ вершинами. Рассмотрим граф без циклов на n вершинах. Выберем вершину v_n исходящей степени 0, которая существует в таком орграфе по лемме **??**. Ей присвоим номер n. Удалив v_n и все входящие в неё рёбра, получим граф без циклов. (Циклы в нём были бы циклами и в исходном графе.) По предположению индукции его вершины можно пронумеровать числами от 1 до $n - 1$ с соблюдением условия. Объединяя эту нумерацию с номером n вершины v_n, получаем искомую нумерацию. Шаг индукции доказан.

2.21. Критерий наличия эйлерова цикла.

В ориентированном орграф без изолоированных вершин существует эйлеров цикл тогда и только тогда, когда граф сильно связен и у любой вершины входящая степень равна исходящей.

Пусть эйлеров цикл в орграфе есть. Тогда он проходит через все вершины (поскольку они имеют ненулевую степень), и по нему можно дойти от любой вершины до любой. Значит, орграф сильно связен.

Возьмём какую-то вершину v, пусть она встречается в эйлеровом цикле k раз. Двигаясь по циклу, мы приходим в неё k раз и уходим k раз, значит, использовали k входящих и k исходящих рёбер. При этом, раз цикл эйлеров, других рёбер у этой вершины нет, так что в ориентированном графе её входящая и исходящая степени равны k.

В обратную сторону чуть сложнее. Пусть орграф сильно связен и в каждой вершине исходящая степень равна входящей. Рассмотрим пути, которые не проходят дважды по одному ребру. Выберем среди таких путей самый длинный (его длина не больше общего количества рёбер)

$$\tau = (v_1,\ v_2,\ v_3,\ \ldots,\ v_{t-1},\ v_t)$$

и докажем, что этот путь и является искомым циклом, то есть что $v_1 = v_t$ и этот путь содержит все рёбра орграфа.

В самом деле, если τ самый длинный, то добавить к нему ребро (v_t, v_{t+1}) невозможно. Это означает, что все выходящие из v_t рёбра уже входят в τ. Это возможно, лишь если $v_1 = v_t$: если вершина v_t встречалась только внутри пути (пусть она входит k раз внутри пути и ещё раз в конце пути), то мы использовали $k+1$ входящих рёбер и k выходящих, и больше выходящих нет. Это противоречит равенству входящей и исходящей степени.

Итак, мы имеем цикл, и осталось доказать, что в него входят все рёбра. В самом деле, если во всех вершинах цикла использованы все рёбра, то из вершин этого цикла нельзя попасть в вершины, не принадлежащие циклу, то есть использованы все вершины (так как орграф сильно связен) и, следовательно, все рёбра. С другой стороны, если из какой-то вершины v_i выходит ребро (v_i, v), то путь можно удлинить до

$$(v_{i+1},\ \ldots, v_t = v_1,\ \ldots,\ v_i,\ v)$$

вопреки нашему выбору самого длинного пути. Аналогично можно получить противоречие и для входящего ребра (v, v_i), добавив его в начало.

Для неориентированных графов критерий аналогичен.

Неориентированный граф без вершин нулевой степени содержит эйлеров цикл тогда и только тогда, когда он связен и степени всех вершин чётны.

Доказательство полностью аналогично доказательству в ориентированном случае. Кратко повторим его.

Пусть эйлеров цикл в графе есть. Он проходит по всем вершинам, так что граф связен. В каждую вершину эйлеров цикл k раз заходит и k раз выходит. Значит, степень вершины $k + k = 2k$ чётна.

В обратную сторону опять рассматриваем самый длинный путь, в котором каждое ребро встречается не больше одного раза. Это цикл, так как иначе есть вершина нечётной степени.

Этот цикл обязан содержать все рёбра графа, так как в противном случае его можно удлинить

2.22. Теорема Холла.

Полное паросочетание существует тогда и только тогда, когда для любого $A \subset L$ выполнено $|A| \le |N(A)|$. Доказательство:

$\Rightarrow$ Очевидно, что если существует полное паросочетание, то для любого $A \subset L$ выполнено $|A| \le |N(A)|$. У любого подмножества вершин есть по крайней мере столько же соседей (соседи по паросочетанию).

$\Leftarrow$ В обратную сторону докажем по индукции (будем добавлять в изначально пустое паросочетание P по одному ребру и доказывать, что мы можем это сделать, если P не полное). Таким образом, в конце получим что P — полное паросочетание.

База индукции

Вершина из L соединена хотя бы с одной вершиной из R. Следовательно база верна.

Индукционный переход

Пусть после $k < n$ шагов построено паросочетание P. Докажем, что в P можно добавить вершину x из L, не насыщенную паросочетанием P. Рассмотрим множество вершин H — все вершины, достижимые из x, если можно ходить из R в L только по ребрам из P, а из L в R по любым ребрам из G. Тогда в H найдется вершина y из R, не насыщенная паросочетанием P, иначе, если рассмотреть вершины HL (вершины из H принадлежащие L), то для них не будет выполнено условие: $|HL| \leq |N(HL)|$. Тогда существует путь из x в y, который будет удлиняющим для паросочетания P (т.к из R в L мы проходили по ребрам паросочетания P). Увеличив паросочетание P вдоль этого пути, получаем искомое паросочетание. Следовательно предположение индукции верно.

3. Домашние задания

3.1. ДЗ №1.

3) Ассоциативна ли импликация $A \to (B \to C) \leftrightarrow (A \to B) \to C)$

Нет, возьмём A = B = C = 0, тогда слева будет:
$0 \to (0 \to 0) \leftrightarrow 0 \to 1 \leftrightarrow 1$
А справа: $(0 \to 0) \to 0 \leftrightarrow 1 \to 0 \leftrightarrow 0$
$0 \neq 1$, не ассоциативна

4) Равносильны ли высказывания $A \wedge (B \to C)$ и $(A \wedge B) \to (A \wedge C)$
Возьмём $A = B = C = 0$, тогда первое $0 \wedge (0 \to 0) \leftrightarrow 0$, а второе $(0 \wedge 0) \to (0 \wedge 0) \leftrightarrow 0 \to 0 \leftrightarrow 1$
$0 \neq 1$, не равносильны

5) Равносильны ли высказывания $A \to (B \to C) \leftrightarrow (A \to B) \to (A \to C)$
Преобразуем первое: $A \to (B \to C) \leftrightarrow \neg A \vee (B \to C) \leftrightarrow \neg A \vee \neg B \vee C$
Преобразуем второе: $(A \to B) \to (A \to C) \leftrightarrow (\neg A \vee B) \to (\neg A \vee C) \leftrightarrow \neg(\neg A \vee B) \vee \neg A \vee C \leftrightarrow (A \wedge \neg B) \vee \neg A \vee C \leftrightarrow (\neg A \vee A) \wedge (\neg B \vee \neg A) \vee C \leftrightarrow \neg A \vee \neg B \vee C$
Равносильны

6) Доказать что $|x + y| \leq |x| + |y|$
1 случай. $x, y \geq 0$
$|x| = x$ для положительных чисел и из этого следует равенство $x + y = x + y$

2 случай. $x > 0, y < 0$(симметричный случай при $x < 0, y > 0$)
$|x + y| < |x - y| \leq$(по 1ому случаю) $|x| + |y|$

3 случай. $x \leq 0, y \leq 0$

$|x| = |-x|$, тогда преобразуем выражение в вид $|-(x + y)| \leq |-x| + |-y|$, что совпадает со случаем 1

7) Предположим обратное, что $(a > \sqrt{n}) \wedge (b > \sqrt{n})$. Тогда $a \cdot b > \sqrt{n} \cdot \sqrt{n} = n$, получаем противоречие, так как по условию $a \cdot b = n$

8) Докажем $A \to B$. Предположим противное. Пусть хотя бы одно из чисел x, y, z будет нечетным, тогда нечетных чисел 2, т.к при 1 или 3 сумма будет нечётной, потому что сумма нечетного количества нечетных чисел нечётной. Тогда посмотрим на остаток при делении на 4 у нечетных чисел:
$n(mod4) = 1, n^2(mod4) = 1$
$n(mod4) = 3, n^2(mod4) = 1$
Тогда посмотрим на остаток исходного выражения:
$1 + 1 + 0 \neq 0$
Противоречие
Теперь докажем $B \to A$
Т.к x, y, z четные, то остаток от деления на 4 у $x^2 + y^2 + z^2 = 0$, значит $w^2(mod4) = 0$, следует w чётное, т.к можно представить $w^2 = 4k, k \in \mathbb{N} \cup 0$
Мы доказали $A \to B$ и $B \to A$, следует $A \equiv B$

3.2. ДЗ №2.

Для работы с множествами запишу операции на языке булевых функций:
$A \cup B = A \vee B$
$A \cap B = A \wedge B$
$A \backslash B = A \wedge \neg B$

1) $(A \wedge \neg B) \wedge ((A \vee B) \wedge \neg(A \wedge B)) = A \wedge \neg B$
$(A \wedge \neg B) \wedge ((A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg B)) = A \wedge \neg B$
$(A \wedge \neg B) \wedge 1 = A \wedge \neg B$
$(A \wedge \neg B) = A \wedge \neg B$
Выполняется

2) $(A \wedge B) \wedge \neg C = (A \wedge \neg C) \wedge (B \wedge \neg C)$
$(A \wedge B) \wedge \neg C = A \wedge B \wedge \neg C$
Выполняется

3) $(A \vee B) \wedge \neg(A \wedge \neg B) \subseteq B$
$(A \vee B) \wedge (\neg A \vee B) \subseteq B$
Теперь проверим 4 случая, когда элемент лежит или не лежит множестве A или B и проверю, выполняется ли равенство

A	B	$(A \wedge B) \vee (\neg A \vee B)$
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Получается, если элемент лежит в множестве B, но не лежит в A, или если лежит в A и B (в их пересечении), то 1, иначе 0. Значит неравенство выполняется

4) $((A \wedge \neg B) \vee (A \wedge \neg C)) \wedge (A \wedge (\neg B \vee \neg C)) = A \wedge (\neg B \wedge \neg C)$ выполняется ли равенство

$(A \wedge \neg B) \vee (A \wedge \neg C) = A \wedge (\neg B \vee \neg C)$
$A \wedge (\neg B \vee \neg C) \wedge A \wedge (\neg B \vee \neg C) = A \wedge (\neg B \wedge \neg C)$
$A \wedge (\neg B \vee \neg C) \neq A \wedge (\neg B \wedge \neg C)$ не выполняется

5) Пусть есть элемент, который лежит в A_1 но не лежит в A_4, тогда он лежит в $A_1 \backslash A_4$, но тогда он лежит и в $A_6 \backslash A_9$, но $A_4 \supseteq A_5 \supseteq A_6$, а в A_4 его нет.
Следует нет элемента который лежит в A_1 но не лежит в A_4, значит $A_1 = A_4$, тогда $A_1 \backslash A_4 = \varnothing$ и $A_1 = A_4$, тогда $A_6 \backslash A_9 = \varnothing$, значит $A_6 = A_6$
Тогда из-за вложенности множеств можно сказать, что $A_1 = A_2 = A_3 = A_4$ и $A_6 = A_7 = A_8 = A_9$, тогда выражение $A_2 \backslash A_7 = A_3 \backslash A_8$ можно преобразовать в $A1 \backslash A_6 = A_1 \backslash A_6$, что правда

6) Запишем сумму в виде $\sum_{i=1}^{n-1} i(n-i) = \sum_{i=1}^{n-1} in - i^2$
$\sum_{i=1}^{n-1} in = \frac{(2n+n(n-2))(n-1)}{2} = \frac{n^3-n^2}{2}$
$\sum_{i=1}^{n-1} i^2$ это сумма квадратов, формула суммы n квадратов $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, доказательство:

База: k = 1, очевидно $\frac{1*2*3}{6} = 1$
Предположение: $1^2 + 2^2 + 3^2 ... + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$

Переход: $n = k + 1$ $1^2 + 2^2 + 3^2 ... k^2 + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$

Зная для k, что $1^2 + 2^2 + 3^2 ... + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$ запишем:

$\frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$

Сократим на (k + 1) и получим

$\frac{k(2k+1)}{6} + (k+1) = \frac{(k+2)(2k+3)}{6}$

$\frac{2k^2+k+6k+6}{6} = \frac{(k+2)(2k+3)}{6}$

$\frac{2k^2+7k+6}{6} = \frac{(k+2)(2k+3)}{6}$

Разложим $2k^2 + 7k + 6$ и получим $(k + 2)(2k + 3)$ Тогда

$\frac{(k+2)(2k+3)}{6} = \frac{(k+2)(2k+3)}{6}$

Равенство выполняется

Тогда формула суммы равна:
$\frac{n^3-n^2}{2} - \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$

$\frac{n(n-1)(3n-2n+1)}{6} = \frac{n(n-1)(n+1)}{6}$
ч.т.д

7) Числа Фибоначчи 1, 1, 2, 3, 5...
Проверим, что выполняется для n = 1, $1 * 2 - 1^2 = 1$
Для n = 2, $1 * 3 - 2^2 = -1$. Тогда докажем методом индукции с переходом n = k + 2

База: n = 1, n = 2
Представим значения $F_{k-1} = a, F_k = b, F_{k+1} = a + b, F_{k+2} = a + 2b, F_{k+3} = 2a + 3b$
Если выполнятся для k, то тогда равенство должно выполняться для k+2 Запишем:
$a(a + b) - b^2 = (a + b)(2a + 3b) - (a + 2b)^2$

$a^2 + ab - b^2 = 2a^2 + 3ab + 2ab + 3b^2 - a^2 - 4ab - 4b^2$

$a^2 + ab - b^2 = a^2 + ab - b^2$

Равенство выполняется, формула работает

8) Докажем методом мат. индукции
База n = 2, $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{19}{20} > \frac{13}{24}$

Переход: n = k + 1
Предположение для k + 1:
$\frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + ... + \frac{1}{2k+2}$
Для k нам известно что $\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + ... + \frac{1}{2k} > \frac{13}{24}$
Докажем что $\frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + ... + \frac{1}{2k+2} > \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + ... + \frac{1}{2k} > \frac{13}{24}$

$\frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2} > \frac{1}{k+1}$, домножим на $(2k + 1)(2k + 2)(k + 1)$

$(2k+2)(k+1)+(2k+1)(k+1) > (2k+1)(2k+2)$
$2k^2+4k+2+2k^2+3k+1 > 4k^2+6k+2$
$k+1>0$
Доказали для k + 1, что $\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+...+\frac{1}{2k+2} > \frac{13}{24}$
Значит доказали неравенство

9) Докажем методом индукции. База n = 1 очевидно
Переход: k = n + 1
Для k + 1 давайте поставим в последнем столбце 3 разных цвета, тогда у нам останется расставить фишки в первых k столбцах, при этом каждого цвета будет k, но мы это уже умеем делать для к, поэтому мы сможем расставить все фишки как требуется.

Остаётся пояснить простой факт, что мы можем в последнем столбце поставить 3 разных цвета.

Допустим у нас последнем столбце 2 разных цвета, 112 или любая другая подобная комбинация
Тогда в столбцах с одинаковыми цветами обязательно найдётся третий цвет, т.к если бы его не было там, то в этих строках были только 1 и 2 цвет, которых в сумме получится 2n+1, но по условию их 2n. Случай когда 3 одинаковых цвета сводится к случаю с двумя цветами, т.к в любой строке будет другой цвет и его можно поставить в последний столбец.

10) Если был один студент, то очевидно, что когда он зашёл в аудиторию, то условие выполнилось. Если их > 1, то рассмотрим t1 - время первого вышедшего, t2 - время последнего вошедшего. Если t1 > t2, то в аудитории одновременно были все студенты. Если t1 < t2, то все преподаватели поговорили с первым и вторым, следует они все были в моменты времени [t1, t2] ч.т.д

3.3. ДЗ №3.

3) Посчитаем сколько есть всего 4хзначных чисел и сколько из них не содержат ни одной 7ки. Всего 4хзначных чисел, $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9000$ Чисел без 7, $8 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = 5832$. Значит чисел содержащих хоть одну 7, $9000 - 5832 = 3168$

Ответ: 3168

4-5) $(A_1 \setminus A_2) \times (B_1 \setminus B_2) \subseteq (A_1 \times B_1) \setminus (A_2 \times B_2)$

Рассмотрим какие элементы лежат слева: $(A_1 \wedge \neg A_2) \times (B_1 \wedge \neg B_2)$ дек. произведение элементов которые лежат только в A1 и в B1

Справа: $((A_1 \wedge \neg A_2) \vee (A_1 \wedge A_2)) \times ((B_1 \wedge \neg B_2) \vee (B_1 \wedge B_2)) \setminus ((\neg A_1 \wedge A_2) \vee (A_1 \wedge$

$A_2)) \times ((\neg B_1 \wedge B_2) \vee (B_1 \wedge B_2)) \longleftrightarrow ((A_1 \wedge \neg A_2) \times (B_1 \wedge \neg B_2)) \vee ((A_1 \wedge \neg A_2) \times (B_1 \wedge B_2)) \vee ((A_1 \wedge A_2) \times (B_1 \wedge \neg B_2))$
Видно что справа и слева есть $(A_1 \wedge \neg A_2) \times (B_1 \wedge \neg B_2)$. ч.т.д
Чтобы выполнялось равенство, нужно чтобы $((A_1 \wedge \neg A_2) \times (B_1 \wedge B_2)) \vee ((A_1 \wedge A_2) \times (B_1 \wedge \neg B_2))$ было равно нулю.
Тогда $A_1 \bigcap A_2 \equiv \oslash$ и $B_1 \bigcap B_2 \equiv \oslash$ или $A_1 \bigcap A_2 \equiv \oslash$ и $B_1 \equiv \oslash$ или $B_1 \bigcap B_2 \equiv \oslash$ и $A_1 \equiv \oslash$ или $B_1 = B_2$ и $A_1 = A_2$. !Возможно автор решения не досчитал некоторые случаи

6) Давайте действовать методом мат. индукции. Обозначим за $F_{n,1}$ кол-во слов длины n оканчивающихся на 1, в которых нет двух нолей подряд, за $F_{n,0}$ кол-во слов длины n оканчивающихся на 0, в которых нет двух нолей подряд, за $F_n = F_{n,0} + F_{n,1}$ кол-во слов длины n в которых нет двух 0 подряд. Тогда по индукции $F_1 = 1+1, F_2 = 1+2$, запишем формулу для F_n зная что для F_{n-1} выполняется. Если оканчивается на 1, то мы можем взять любое слово длины $n-1$ и приписать к нему 1, так мы получим корректное слово. $F_{n,1} = F_{n-1,0} + F_{n-1,1} = F_{n-1}$, если же оканчивается на 0, то мы можем взять корректное слово длины $n-1$ оканчивающееся на 1 и приписать 0, взять 0 и приписать 0 мы не можем, т.к тогда мы получим некорректное слово. $F_{n,0} = F_{n-1,1} = F_{n-2,0} + F_{n-2,1} = F_{n-2}$ по формуле для $F_{n,1}$, значит $F_n = F_{n-2} + F_{n-1}$, получаем что для n это $n+1$ число Фибоначчи

8) Обозначим за множество A - верхний ряд не закрашен, остальное как-то закрашено
B - нижний ряд
C - столбцы
Нам нужно $|A \cup B \cup C|$
$|A| = |B| = 2^8, |C| = 2^6$
$|A \cap B| = |A \cap C| = |B \cap C| = 2^4$
$|A \cap B \cap C| = 2^2$
$|A \cup B \cup C| = 2 \cdot 256 + 64 - 3 \cdot 16 + 4 = 532$

Ответ 532

10) Всего слов 2^9, давай посчитаем сколько слов без подслова 011. Обозначим функцию F как в задаче 6, но будем учитывать уже 2 последних цифры. $F_{n,00} = F_{n-2}, F_{n,01} = F_{n-2}, F_{n,10} = F_{n-2,00} + F_{n-2,10} + F_{n-2,11}, F_{n,11} = F_{n-2,11}$, Составим таблицу для подсчета

Цифры\длина	2	3	4	5	6	7	8	9
00	1	2	4	7	12	20	33	54
01	1	2	4	7	12	20	33	54
10	1	2	3	5	8	13	21	34
11	1	1	1	1	1	1	1	1

143 слов без 011. Значит слов с 011 будет 512 - 143 = 369.

Ответ: 369

3.4. ДЗ №4.

2. При таком условии у нас останется 7 вершин и 22 ребра, но в полном графе на 7 вершинах 21 ребро. Значит нельзя.

3. Максимальное независим. множество будет размера 10 и состоит из чисел 00, 11, 22... 99. Почему нельзя больше? По принципу Дирихле если размер будет > 10 найдутся 2 числа с одинаковыми цифрами, следует между ними будет ребро.
5. Приведем пример такого графа. Возьмём круговой граф. Если k четное, то из каждой вершины x пустим ребра в вершины $[x - \frac{k}{2}, x - 1]$ и $[x + 1, x + \frac{k}{2}]$ значения вершин по модулю, т.е если 0, то это n, -1 это n - 1 и тд. Если же k нечетное, то из вершины x проводим ребра в $[x - \frac{k}{2}, x - 1]$ и $[x + 1, x + \frac{k}{2}]$ (округление вниз). И проводим ребро в вершину $k + n/2$ Легко заметить что при таком условии в графе степень каждой вершины будет k

6. Мы можем перелететь из города x в город y только если (x + y) кратно 3. Но из города кратного 3 мы можем попасть только в города кратные 3. Тогда из 9 мы можем попасть даже с пересадками только в города кратные 3. Но 1 не кратно трём, значит нельзя.

7. Допустим он не связный и разбит на $k > 1$ компонент, возьмём самую маленькую по размерам компоненту. В ней будет <= 7 вершин. Но из каждой вершины исходит 7 ребер, значит из этой компоненты исходит ребро в какую-то другую компоненту. Объединим эти компоненты и повторим рассуждение. Следует граф связан.

8. Если вершины соединены, то слова различаются в 400 позициях, это инвертация 400 различных битов. Тогда если есть путь из вершины a в вершину b длины k, то суммарно будет 400*k инвертаций, т.е суммарно четное количество. Рассмотрим путь из вершины "00000...000000"в вершину "00000.000001". Они различаются в 1 бите, в то время как другие биты должны быть инвертированы четное количество раз и равны между собой. Но тут кол-во инвертированний нечетное, а по условию графа должно быть четное. Противоречие.

9. Повторим рассуждение из задачи 7, Допустим он не связный и разбит на $k > 1$ компонент, возьмём самую маленькую по размерам компоненту. В ней будет <= n вершин. Но мы удалили не более n - 1 ребер, значит осталась вершина с n исходящими ребрами. А вершин в компоненте <= n, значит из неё исходит ребро в другую компоненту. Объединим их и повторим рассуждение. Получим что граф связан.

3.5. ДЗ №5.

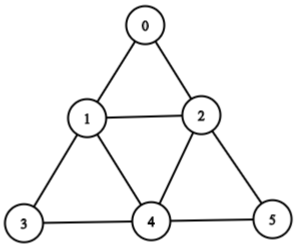
Задача №2(Существует ли дерево на 9 вершинах, в котором 2 вершины имеют степень 5?)
Вариант 1:
Тогда ребер суммарно будет 10 (если эти две вершины не соединены) и 9 (если соединены). Но в дереве на 9 вершинах 8 ребер, значит не существует.
Вариант 2:
Если дерево $\Rightarrow$ ребер $9-1=8 \Rightarrow \sum\limits_{v\in V} d(v) = 2\cdot E = 16 \Rightarrow 10 + \sum\limits_{ost.is7} d(v) = 16 \Rightarrow$ $\sum\limits_{ost.is7} d(v) = 6$, а вершин 7 $\Rightarrow$ хотя бы у одной вершины степень 0 $\Rightarrow$ противоречие $\Rightarrow$ не существует(ost.is 7 - сумма оставшихся 7 вершин).

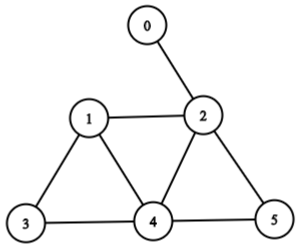
Задача №3(Найдите наибольшее количество вершин в связном графе, сумма степеней вершин в котором равна 20.)
Вариант 1:
Сумма степеней пополам = кол-во ребер. Т.е у нас 10 ребер, возьмём дерево (бамбук) на 11 вершинах, такой что вершина $i = 1..10$ соединена с $i+1$ вершиной
Вариант 2:
$\sum\limits_{v\in V} d(v) = 20 = 2\cdot E \Rightarrow E = 10$.Предположим, что граф - дерево $\Rightarrow n = E+1 = 11$. Предположим, что n = 11 - не максимальное $\Rightarrow$ Допустим n = 12 $\Rightarrow$ Максимальное количество количество ребер будет в дереве $\Rightarrow n-1 = E \Rightarrow E = 11$, но $E = 10 \Rightarrow$ противоречие $\Rightarrow n = 11$ - максимальное

Задача №5(В связном графе на n вершинах нет мостов.Какое наименьшее количество ребер может быть в таком графе?)
Если нет мостов $\Rightarrow$ степени всех вершин хотя бы 2(больше или равно 2), возьмем, что степени всех вершин равны 2 $\Rightarrow$ это цикл $\Rightarrow$ ребер n,(если убрать хотя бы одно ребро, то это уже дерево $\Rightarrow$ есть мост), но если есть хотя бы 1 вершина степень которой больше 2, то будет хотя бы +1 ребро, а это меньше чем, при случае, когда все степени равны 2 $\Rightarrow$ минимально n ребер.

Задача №6(В связном графе степени всех вершин четные. Докажите, что граф останется связным и после удаления любого из ребер.)
Вариант 1:
Допустим мы удалил ребро и разбили наш граф на две компоненты. Сумма степеней в каждой компоненте будет нечетной, т.к вершины между которыми мы удалил ребро лежат в разных компонентах. Но сумма степеней вершин = 2 * кол-во ребер. Противоречие.
Вариант 2:
Если степени всех вершин четны, то минимальная степень вершины в таком связном графе - 2, предположим, что в графе есть такая вершина(степени 2) $\Rightarrow$ от нее исходят 2 ребра $\Rightarrow$ если у нее убрать одно ребро, то граф останется связным(т.к.

можно попасть в остальную часть графа по 2-ому ребру, а остальная часть так и осталась связной).$\Rightarrow$ граф все равно связный. Если мы уберем ребро у вершины





степень которой больше 2, то в этом случае граф тем более связный.

Задача №7(Докажите,что если в графе больше 5 вершин, либо сам граф, либо его дополнение содержат цикл длины 3.)
Нам дан граф G. Возьмём вершину 1. Либо в дополении графа, либо в самом графе она соеденина как минимум с 3мя вершинами, т.к в графе минимум 6 вершин. Инвертируем наш граф G, если 1 соеденина хотя бы с 3мя в дополнении, Рассмотрим эти 3 вершины, если между какими-то из них есть ребро. То мы получили цикл длины 3. Если между них ребер нет, то опять инвертируем и получаем цикл длины 3 между этими вершинами.

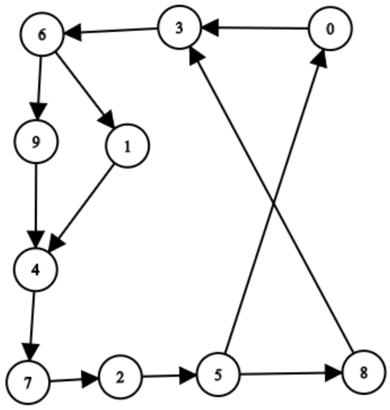
Задача №9(В дереве нет вершин степени 2.Докажите,что количество висячих вершин(т.е. вершин степени 1)больше половины общего количества вершин.)
Пусть x - кол-во вершин степени хотя бы 3, а y кол-во вершин степени 1. Тогда

$x + y = n$
$3x + y = 2(n-1)$ т.к в девере n - 1 ребро. Здесь $3x$ как оценка снизу степени вершин у котороых степень хотя бы 3, очевидно что при больших степенях кол-во листьев ещё больше
$2x = n - 2$
$x = \frac{n}{2} - 1$

Следует вершин степени 1(листьев) больше половины.

3.6. ДЗ №6.

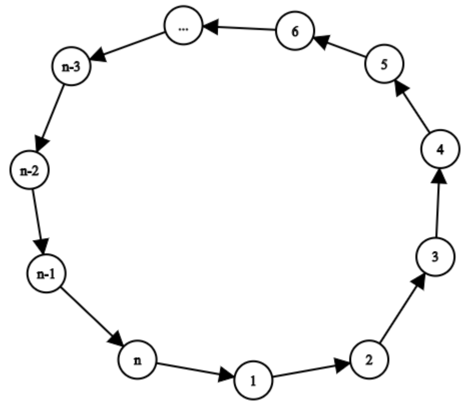
1) Ответ: 1
Цикл: 0 3 6 1 4 7 2 5 8 3 6 9 4 7 2 5 0



4) Давайте рассматривать двоичные слова как двоичные числа.
По сути, у нас не должно быть ор. ребра из позиции x в позицию y, $x > y$, а ребро проводится по правилам из пункта (б). Тогда заметим, что необходимым условием для проведения ребра из числа a в число b, является что $a > b$, т.к мы превращаем 1 в 0 и делаем число меньше.
Приведу пример расстановки чисел в таблицу так, что все условия выполнялись
На позицию 57 число 011100, а на позиции 58...64 Расставим числа 0???00 (где ? - 1 или 0, при этом число не использовалось раньше) в порядке не возрастания, т.е на позиции 64 будет 000000. На позиции 1-56 мы расставим оставшиеся числа в порядке не возрастания. т.е на позиции 1 будет 111111. Очевидно что условия (а) и (в) будут выполняться. Осталось пояснить за пункт (б). Ребро может быть проведено из позиций $57 - 64$, в позиции $1 - 56$. Но тогда число в позиции $1 - 56$ должно иметь вид 0???00, но все такие числа стоят на позициях 57-64, значит ребер быть не может
На позициях 1-56 и в 57-64 числа стоят по не возрастанию и ребер там не будет. Получили подходящую расстановку

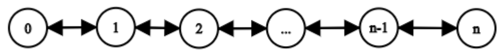
5) Вариант1: Не очень элегантное решение, но сначала оставим из каждой вершины 1 исходящее ребро и 1 входящее. С лекции мы знаем что такой граф разбивается на циклы. Получим k циклов(компонент сильной связности).
Представим каждую компоненту как вершину графа. Т.к наш граф связный (если его сделать неорграфом), то в каждую вершину либо входит ребро откуда-то, либо исходит ребро куда-то. Но в каждой такой компоненте сумма входящих = равно сумме входящих. Значит каждому входящему/исходящему ребру найдется исходящее/входящее из этой компоненты. Теперь повторим рассуждение с самого начала. По сути рекуррентно мы получим что у нас останется одна большая компонента сильной связности, значит граф сильно связан.

Вариант 2(ОЧЕНЬ ДЛИННЫЙ, но вдруг кому-то станет понятнее =)):
Если в ориентированном графе G исходящая степень каждой вершины которого равна входящей, то есть несколько случаев:
1) Если G - это цикл:



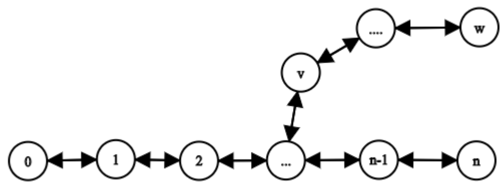
то G - сильно связен.(Так же в цикле все ребра могут быть направлены в 2 стороны, этот случай будет аналогичен, в остальных примерах будет показан случай с циклами направленными в одну сторону)

2) Если G - не цикл(и в G нет циклов):



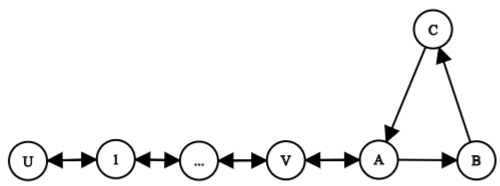
т.к. у нас нет циклов, а у висячих вершин исходящая степень вершины тоже должна равняться входящей степени, то от висячих вершин должны идти ребра в обе стороны ⇒ у соседних с ними вершин степень станет на 1 больше входящей степени ⇒ и от них должны идти ребра в обе стороны и т.д..

Если от любой точки идет ответвление, то там будет происходит все тоже самое:



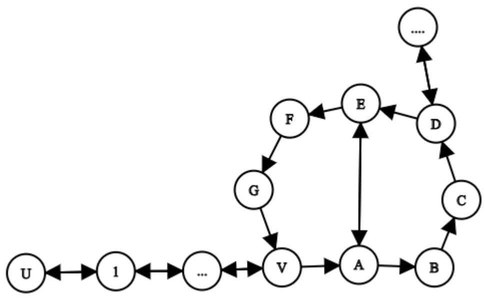
⇒ все ребра направленны в обе стороны, и граф сильно связен.

3) Если в G - есть цикл:



из п.2 мы знаем, что все ребра от U до V должны идти в 2 стороны. Но т.к. из A

идет только 1 ребро, а в A 2, то ребро между A и V тоже идет в обе стороны.$\Rightarrow$ Между U и V можно попасть из любой точки в любую аналогично п.2 из V можно попасть в A и из A в V, а из A идет цикл $\Rightarrow$ аналогично п.1 можно попасть в любую точку в цикле $\Rightarrow$ аналогично п.1 можно попасть в любую точку в цикле $\Rightarrow$ из любой точки в графе можно попасть в любую точку.
Если из любой точки в цикле будет идти ответвление и/или хорда в цикле, то будет аналогично п.2 $\Rightarrow$ в любом случае можно попасть из любой точки в любую:



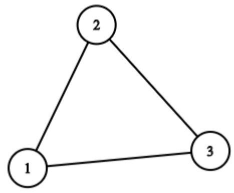
$\Rightarrow$ G - сильно связен.
$\Rightarrow$ из пунктов 1-3 при любых аналогичных случаях(а точнее просто при любых всех) G будет сильно связен. Так же во всех случая если убрать ориентацию на ребрах, то граф будет связен т.к. нет изолированных вершин.

6) Будем действовать методом мат. индукции.
База: n = 2, очевидно работает
Переход n = k + 1
По индукции для графа на k вершах есть какой-то простой путь по всем вершинам $(u_1, u_2, ..., u_k)$ и мы добавили вершину u_{k+1}, тогда если есть ребро (u_k, u_{k+1}) или ребро (u_{k+1}, u_1) то мы получили в новом графе простой путь по всем вершинами (приписав u_{k+1} в начало или конец пути для графа степени k, в зависимости от ребра).
Если же у нас ребра (u_1, u_{k+1}) и (u_{k+1}, u_k). Тогда давайте найдём такой первый i, при котором у нас есть ребро (u_i, u_{k+1}) и (u_{k+1}, u_{i+1}). Очевидно что такой i найдётся, т.к у нас по направлению различаются ребра (u_1, u_{k+1}) и (u_{k+1}, u_k) и где-то будет смена направления. Тогда новый простой путь это $u_1, u_2, ...u_i, u_{k+1}, u_{i+1}, ...u_k$

7) Берем решение задачи 6, мы умеем строить простой путь по всем вершинам для графа размера n, $(u_1, u_2, ..., u_n)$, смотрим, если есть ребро (u_n, u_1), то мы получили цикл по всем вершинам, иначе ориентируем ребро (u_1, u_n) и получаем тот же цикл.

3.7. ДЗ №7.

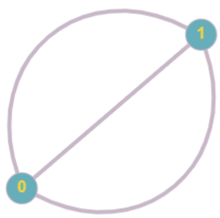
Задача №1(Степень каждой вершины равна 2. Верно ли, что граф 2-раскрашиваемый)
Нет, не верно, т.к. если мы возьмем граф на трех вершинах(треугольник), то степень каждой вершины равна 2, но он не является 2-раскрашиваемым.



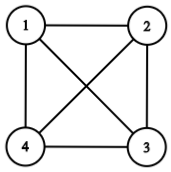
Задача №2(Докажите, что в дереве на 2n вершинах можно выбрать независимое множество из n вершин)
Мы знаем, что любое дерево 2-раскрашиваемое(цвета чередуются через 1) $\Rightarrow$ все вершины дерева 2n будут делиться на 2 независимых множества по n вершин.

Задача №3(Граф получен из цикла на 2n вершинах добавлением ребер, соединяющих противоположные вершины. При каких n вершины этого графа можно правильно раскрасить в 3 цвета)
Вариант решения 1:
Если n нечётное, то можно сделать его 2 раскрашиваемым и условие выполнится. Если n чётное. То для $2n, 2, n+1$ цвета 3. А для остальных в порядке возрастания чередуем 1 и 2. Прим для n = 4: 1 3 2 1 3 2 1 3. Но такая идея не работает для n = 2, т.к тут просто не существует расскраски т.к граф полный. Для больших n работает

Вариант решения 2(чуть более подробный):
Мы знаем, что граф на 2n вершинах 2-раскрашиваемый при нечетном n.если мы возьмем любую точку в 2-раскрашиваемом графе и заменим ее на точку третьего цвета, то наш граф станет 3-раскрашиваемым.Если n-четное, то 2n не является 2-раскрашиваемым, но является 3-раскрашиваемым:



В данном графе с каждой стороны по n-1 вершине $\Rightarrow$ в каждом цикле по n+1 вершине $\Rightarrow$ начнем красить цикл в 2 цвета и, дойдя до последней точки, понимаем, что т.к. цикл нечетный, то он не является 2-раскрашиваемым, но если последнюю вершину покрасить в 3 цвет, то граф станет 3-раскрашиваемым.Заметим так же, что при n=2, граф не является 3-раскрашиваемым, т.к. можно попасть из любой точки в любую через 1 ребро.



$\Rightarrow$ Ответ:при всех $n \neq 2$.

Задача №4(Докажите, что если степени всех вершин двудольного графа равны 3, то его рёбра можно разбить на 3 паросочетания, которые не пересекаются по ребрам(общие вершины у них возможны))
Применим теорему Холла, значит есть паросочетание размера n. Избавимся от ребер попавших в это паросочетие. Теперь степени всех вершин 2. Повторим размышления ещё 2 раза. Получим 3 паросочения не пересекающиеся по ребрам.

Задача №5(При обучении в некотором вузе ставится цель освоения 20 разных компетенций.В начале семестра оказалось, что каждый студент некоторой специализации ранее освоил ровно 8 компетенций из списка.При этом все студенты уникальны: нет двух студентов с одинаковым набором компетенций.

Докажите, что администрация может так выбрать для каждого студента одну новую компетенцию для освоения в семестре, чтобы в конце семестра студенты этой специализации сохранили свою уникальность(каждый в конце семестра освоит уже ровно 9 компетенций, причем набор компетенций у всех студентов различны).)
Максимальное количество студентов ранее освоивших ровно 8 компетенций = C_{20}^{8}, а максимальное количество студентов, которые могут освоить 9 компетенций = C_{20}^{9}. $C_{20}^{8} = 125970$, а $C_{20}^{9} = 167960 \Rightarrow C_{20}^{8} < C_{20}^{9} \Rightarrow$ администрация сможет выбрать для каждого студента компетенцию так, что набор 9 компетенций у всех разный.

Задача №6(Сколькими способами можно расставить в ряд 10 различных чисел так, чтобы наибольшее и наименьшее стояли рядом?)
Поставим Min и Max рядом, это 2 варианта. Вариантов куда их поставить 9. Остальные числа могут быть в любом порядке.
Ответ: $2 \cdot 9 \cdot 8! = 2 \cdot 9! = 725760$

Задача №7(Сколько существует четырехзначных чисел, в которых цифры идут в возрастающем порядке)
Очевидно что 0 в таких числах нет. Значит нам нужно выбрать 4 цифры из 9 и поставить их в возрастающем порядке. Это в точности C_9^4(т.к. мы выбираем 4 числа из последовательности 1,2,3,4,5,6,7,8,9 и все 4 числа уже будут возрастать).
Ответ: $\frac{9!}{4!\cdot 5!} = 126$

Задача №8(Сколькими способами можно вписать в ряд цифры от 0 до 9 так, чтобы четные цифры шли в порядке возрастания, а нечетные - в порядке убывания?)
Для этого нужно выбрать 5 мест из 10, на которых будут стоять четные числа в порядке возрастания, а на остальных 5 местах будут нечетные в порядке убывания $\Rightarrow$ способов взять 5 мест из $10 = C_{10}^5 = \frac{10!}{5!\cdot 5!} = 252$

Задача №9(Нужно выбрать множество, состоящее из двух диагоналей правильного n-угольника ($n \geq 5$), которые не пересекаются во внутренних точках. Сколькими способами это можно сделать?)
Вариант решения 1:
Будем решать от обратного. Для одной вершины есть $n-3$ варианта куда провести диагональ. Тогда кол-во вариантов провести диагональ в графе это $\frac{n(n-3)}{2}$. Провести 2 разные диагонали в графе это $C\ \binom{\frac{n(n-3)}{2}}{2}$.
А провести 2 пересекающие во внутр точках диагонали (если одна фиксирована). это $1*(n-3)+2*(n-4)...(n-3)*1$ эту штуку мы считали в дз второго листочка, только тут заменим $k = n-2$ и получим $\frac{(k-1)k(k+1)}{6} = \frac{(n-3)(n-2)(n-1)}{6}$
Ответ: $C\ \binom{\frac{n(n-3)}{2}}{2} - \frac{(n-3)(n-2)(n-1)n}{6}$
Вариант решения 2:
Посмотрим сколько есть всего сочетания C_n^2 и так мы получим ребра и диагонали.Теперь от этого количества отнимем количество сторон многоугольника n.
Количество диагоналей: $C_n^2 - n = \frac{n\cdot(n-3)}{2}$
Составим всевозможные пары диагоналей, как $C^2_{\frac{n\cdot(n-3)}{2}}$
Теперь нам нужно вычесть количество пересекающихся диагоналей.Будем отождествлять сочетания $\frac{4}{n}$ с четырехугольником, вершины которого - это номера вершин нашего изначального многоугольника.Тогда каждый многоугольник будет давать нам пару пересекающихся диагоналей, которую нам надо вычесть
Количество пар не пересекающихся диагоналей тогда будет: $C^2_{\frac{n\cdot(n-3)}{2}} - C_n^4$

Задача №10(Найдите максимальное количество простых путей из заданной вершины s в заданную вершину t в ориентированном ациклическом графе на n вершинах)
Вариант 1:
Назовём $s = 1$, $t = n$. Т.к 1ая и последняя вершина фиксированы и граф. ацикличный, то мы выбираем нам в простой путь вершины $2..n-1$ для всех возможных длин. И выбранные вершины ставим в порядке возрастания номеров, чтобы не бы-

ло цикла. Ответ это $\begin{pmatrix} n-2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n-2 \\ 1 \end{pmatrix} + \ldots + \begin{pmatrix} n-2 \\ n-2 \end{pmatrix} = 2^{n-2}$,
Граф будет иметь вид, когда из вершины i проведены ребра в вершины $i+1..n$
Вариант 2:
Так как у нас есть n вершин, то для того, чтобы максимизировать количество путей между вершинами s и t, все оставшиеся вершины мы должны поместить между ними, их будет n-2 и получить простой путь $s \to v_1 \to v_2 \to ... \to v_{n-2} \to t$.
Тогда теперь наши вершины внутри пути будут занумерованы числами от 1 до n-2, и мы возьмем все возможные сочетания и проведем ребра соответственно: $\sum\limits_{i=0}^{n-2} C_{n-2}^{i}$(тут будут все варианты для всех вершин, т.е количество путей, когда между s и t 1,2,3.....n-2 вершин)

3.8. ДЗ №8.

Задача №1. Найдите коэффициент при $x_1^2 x_2^2 x_3^2 x_4^2 x_5^2 x_6^2$ в разложении многочлена $(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6)^{12}$ на мономы.

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \cdots + \binom{n}{k} a^{n-k} b^k + \cdots + \binom{n}{n} b^n$$

Рис. 2.

При разложении бинома Ньютона получаем $\frac{12!}{2!2!2!2!2!2!}$

Задача №2. Сколькими способами можно образовать 6 пар из 12 человек?

$\frac{12!}{2^6 * 6!} = 10395$

1 пара $12 * 11$, то т. к. Катя и Саша, Саша и Катя, мы делим на 2, т. е. $12 * 11 : 2$.

2 пара $10 * 9 : 2$; $\ldots$ получим $12! : 2^6$. Но требуется просто разбить на пары, т.е. по порядку 6! способами т. е. каждая пара 6! разом. Тогда имеем $\frac{12!}{2^6 * 6!} = 10395$

Задача №3. Сколько существует слов длины 10 в алфавите А, Б, В, содержащих ровно 4 буквы А?

4 позиции из 10 для А: $\binom{10}{4} = 210$. Заполним оставшиеся позиции всеми возможными способами: $210 * 2^6 = 13440$

Задача №5. Студсовет из 8 человек выбирает из своего состава председателя путём тайного голосования. Каждый может отдать один голос за любого члена студсовета. Результат голосования — число голосов, отданных за каждого кандидата. Сколько существует различных результатов голосования?

Число сочетаний с повторениями: $\frac{(8+8-1)!}{(8-1)!8!} = 6435$ (по методу шаров и перегородок имеем 7 перегородок, у нас 8 человек и надо разбить голоса между ними. 8 шаров)
5) Метод шаров и перегородок, $\binom{8+8-1}{8-1} = \binom{15}{7}$
Т.е перед первой перегородок голоса за 1, между 1 и 2 голоса за 2 и тд. голоса за

8ого после последней перегородки

6) Давайте составим бинарную строку длины 15, в которой будет 6 единиц, и они обозначают, что этот элемент берётся. Т.к расстояние хотя бы 2. То изначально она выглядит как 10101010101, а остальные нолики (4 штуки) мы можем распределить между единицами и по краям (т.е в 7 мест). Это метод шаров и перегородок, ответ: $\binom{4+7-1}{7-1} = 210$

7) Кол-во буковок в слове "ОБОРОНОСПОСОБНОСТЬ": О – 7, С – 3, Б – 2, Н – 2, Ь – 1, Т – 1, П – 1, Р – 1. Расставим сначала все буквы кроме О. Это $\binom{11}{3,2,2}$. А потом в промежутки поставим буквы О, это $\binom{11}{7}$. Ответ: $\binom{11}{7} \cdot \frac{11!}{3! \cdot 2! \cdot 2!}$

8) Берем какую-то перестановку книг и делаем 4 перегородки, так мы расположим книги на полки. Ответ $20! \cdot \binom{24}{4}$

9) Комбинаторно. Пусть у нас есть множества R и S, тогда $\binom{r+s}{k}$ это выбор k элементов из объединения множеств. Некоторое j элементов из первого множества и $k - j$ из второго. Тогда это в точности $\binom{r}{j}$ и $\binom{s}{k-j}$ что и представлено слева.

4. Семинары

4.1. Семинар №1.

№2.

$$(A \wedge C) \vee (A \wedge \neg C) \vee \neg(\neg A \to \neg B) \equiv$$
$$\equiv A \vee \neg(\neg A \to \neg B) \equiv$$
$$\equiv A \vee \neg(A \vee \neg B) \equiv$$
$$\equiv A \vee (\neg A \wedge B) \equiv$$
$$\equiv (A \vee \neg A) \wedge (A \vee B) \equiv A \vee B$$

Ответ $A \vee B$

№3

а)

$$(A \wedge B) \vee C \equiv (A \vee C) \wedge (B \wedge C)$$
$$C = 1$$
$$(A \wedge B) \vee 1 \equiv (A \vee 1) \wedge (B \vee 1)$$
$$1 \equiv 1 \wedge 1$$
$$1 \equiv 1$$

b)

$$
\begin{gathered}
(A \vee B) \wedge C \equiv (A \wedge C) \vee (B \wedge C) \\
\left[\begin{array}{l}
(A \vee B) \wedge C \equiv 0 \ \& \ (A \wedge C) \vee (B \wedge C) \equiv 1 \\
(A \vee B) \wedge C \equiv 1 \ \& \ (A \wedge C) \vee (B \wedge C) \equiv 0
\end{array}\right.
\end{gathered}
$$

$\begin{cases} (A \vee B) \wedge C \equiv 0 \ (1) \\ (A \wedge C) \vee (B \wedge C) \equiv 1 \ (2) \end{cases}$

Далее надо рассмотреть совокупность двух систем: при C $=0$ и при C $=1$

№4.

a)

$$(A \vee (B \equiv C)) \equiv ((A \vee B) \equiv (A \vee C))$$

$$A = 0 \ (B \equiv C) \equiv (B \equiv C)$$

Тавтологичность высказывания доказана

b)

$$(A \wedge (B \equiv C)) \equiv ((A \wedge B) \equiv (A \wedge C))$$

Контрпример: $A = 0 \Rightarrow 0 \equiv \ 0 \equiv 0 \Rightarrow 0 \equiv 1$

Следовательно: Не выполняется

№5.

$$(\neg A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge \neg B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge \neg C) \vee (A \wedge B \wedge C)$$

$$(\neg A \to B \wedge C) \wedge (\neg B \to A \wedge C) \wedge (\neg C \to A \wedge B)$$

№7.

$a = 2^{\alpha} * x$ (чётное)

$a^n = 2^{\alpha * n} * x^n$

- нечётное $\Rightarrow$ x - нечётное

$= a^n = a * a * ... * a = x * x * ... * x \Rightarrow a^n$

$\Rightarrow$ a - чётное, a^n - чётное

p.s: не путать англ. a и греческую α

№8.

$$x \geq y$$

$$\left.\begin{array}{r} min(x,y) = y \\ max(x,y) = x \end{array}\right\} \Rightarrow min(x,y) + max(x,y) = x + y \Rightarrow x + y = x + y$$

$x \leq y$ - аналогично

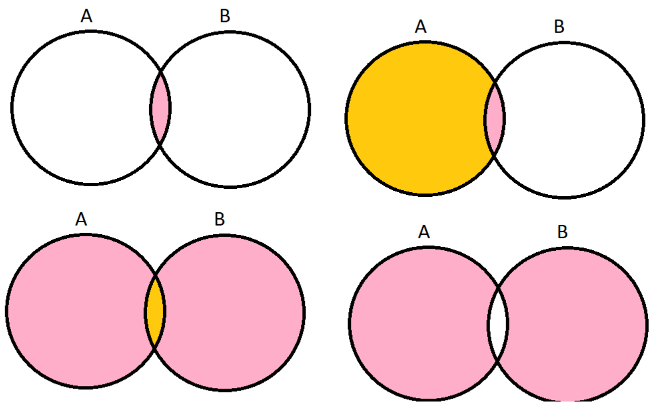
№9.

$$x + y + z = w$$

$A - w$ - чётное, B - ровно одно из x, y, z, чётное
C - все x, y, z, чётные
$A \equiv (B \vee C)\ A \to (B \vee C) \equiv \neg(B \vee C) \to \neg A \equiv (\neg B \wedge \neg C) \to \neg A$
$(\neg B \wedge \neg C) \equiv$ {нечётное число нечётных}
$\neg A$ - {w - нечётное}

4.2. Семинар №2.

№2.



в) Будем действовать с тавтологиями вместо теоретико множественных операций. Обозначим $A' = \{x \in A\}; B' = \{x \in B\}. A' \wedge \urcorner(A' \wedge \urcorner B') = A' \wedge \urcorner A' \vee \urcorner\urcorner B = A \wedge (\urcorner A \vee B) = A \wedge B$

№3. Про множества A, B, C известно, что $A \cap B \subseteq C \backslash (A \cup B)$. Верно ли что $A \subseteq A \triangle B$?
$A \cap B \subseteq C \backslash (A \cup B); A \subseteq A \triangle B \Rightarrow A \cap A = \emptyset; A \cap B = \emptyset \Rightarrow A \cap B = \emptyset \Rightarrow A \subseteq B$. Докажем от противного $\exists x \in A \cap B \to (x \in A)(x \in B)$

№4.
Для n = 1 очевидно верно Пусть верно для n-1, докажем для n. $(A_1 \wedge A_2 \wedge ... A_{n-1} \wedge A_n) \backslash (B_1 \vee B_2 ... \vee B_{n-1} \vee B_n)$
$= (A' \wedge A_n) \wedge \urcorner(B' \vee B_n) = (A' \wedge A_n) \wedge \urcorner B' \wedge \urcorner B_n = (A' \wedge \urcorner B') \wedge (A_n \wedge \urcorner B_n)$

№5.
а) При n = 1 равенство примет вид: $2 \cdot 1 - 1 = 1^2$ или $1 = 1$, то есть, $P(1)$ истинно. Допустим, что имеет место равенство

$1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2$ и докажем, что имеет место P(n + 1): $1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) + (2(n + 1) - 1) = (n + 1)^2$ или $1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) + (2n + 1) = (n + 1)^2$. Используя предположение индукции, получим

$1 + 3 + 5 + ... + (2n-1) + (2n+1) = n^2 + (2n+1) = (n+1)^2$. Таким образом, $P(n+1)$ истинно и, следовательно, требуемое равенство доказано.
b) При n = 1 равенство верно: $1 \cdot 2 = 2$; Пусть верно для n, докажем для n+1. $1 \cdot 2^1 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 ... n \cdot 2^n + (n+1) \cdot 2^{n+1} = (n-1) \cdot 2^{n+1} + 2 + (n+1) \cdot 2^{n+1} = 2n \cdot 2^{n+1} + 2 = 2n \cdot 2^{n+2} + 2$

№6.

В последовательности отмечены чётные числа, как можно заметить каждое 3-е число Фибоначчи — чётное и, наверное, все чётные числа стоят на позициях кратных 3. Это и будет наша догадка, теперь нам нужно её подтвердить и выработать алгоритм вычисления.

Лучшее доказательство — простое, поэтому спасибо пользователю за простую идею, которую я первоначально упустил. Каждое последующее число Фибоначчи представляет собой сумму двух предыдущих, если два предыдущих числа — нечётные, то следующее будет чётным, если в двух предыдущих числах одно нечётное, а другое чётное, то следующее будет нечётным. В принципе одной этой идеи уже достаточно, чтобы «интуитивно нащупать» доказываемый факт. Доказательство по индукции очевидное, но не могу удержаться, чтобы не привести его

Мы доказываем, что «каждое третье число Фибоначчи — чётное, а два предшествующих каждому такому числу — нечётные». База индукции. Первые два числа Фибоначчи — нечётные, третье число — чётное Гипотеза. Пусть вплоть до некоторого кратного по номеру 3 числа Фибоначчи выполнено, что каждое третье — чётное, а два предшествующих ему — нечётные. Шаг индукции. Следующее за последним чётным из гипотезы числом является нечётным, т.к. оно получается из суммы нечётного с чётным, следующее за уже этим числом также нечётное, т.к. оно получается из суммы чётного с нечётным, а уже следующее за ним — чётное, т.к. только что полученные два предыдущих для него — нечётные, по построению его номер кратен 3, оно чётное, а два предшествующих ему — нечётные.

№7. Из чисел от 1 до 2n выбрано n + 1 число. Докажите, что среди выбранных чисел найдутся два, одно из которых делится на другое.

Рассмотрим наибольшие нечётные делители выбранных чисел. У чисел от 1 до 2n есть ровно n различных наибольших нечётных делителей (числа 1, 3, ..., 2n - 1). Итак, два из выбранных чисел имеют одинаковые наибольшие нечётные делители. Это означает, что два выбранных числа отличаются только тем, что множитель 2 входит в них в разных степенях. Большее из них делится на меньшее.

№8. На краю пустыни имеется большой запас бензина и машина, которая при полной заправке может проехать 50 километров. Имеются (в неограниченном количестве) канистры, в которые можно сливать бензин из бензобака машины и оставлять на хранение (в любой точке пустыни). Доказать, что машина может проехать любое расстояние. (Канистры с бензином возить не разрешается, пустые можно возить в любом количестве.)

Решение. Попытаемся доказать индукцией по n, что машина может отъехать на n километров от края. При $n \leqslant 50$ это известно. Осталось провести шаг индукции и объяснить, как проехать n километров, если известно, что $(n-1)$ километров проехать можно. Однако тут мы встречаемся с трудностью: после того как мы проехали $(n-1)$ километров, бензина может не хватить даже на обратную дорогу (не говоря уже о хранении).

Как и в предыдущих задачах, выход состоит в усилении доказываемого утверждения. Будем доказывать, что мы не только можем проехать n километров, но и

> можем сделать сколь угодно большой запас бензина в точке на расстоянии n километров от края пустыни, оказавшись в этой точке после окончания перевозок.

Базис индукции ($n = 1$). Рейс на расстояние 1 и обратно требует 2 единиц бензина (будем называть единицей количество бензина на километр пути), поэтому мы можем оставить 48 единиц бензина в хранилище (на расстоянии километра от края) и вернуться за новой порцией. (Осторожный человек оставлял бы чуть меньше — скажем, 47 единиц, — чтобы не возвращаться с совсем уж пустым баком.) Но так или иначе, за несколько рейсов в хранилище можно сделать запас произвольного размера, какого нам потребуется. (При этом «коэффициент полезного действия» составляет 48/50: чтобы создать 48 единиц запаса, мы расходуем 50 единиц.)

Шаг индукции. Мы должны научиться создавать хранилище на расстоянии n с любым заданным наперёд запасом бензина (и оказаться у этого хранилища в конце перевозок). Как мы только что видели, это возможно, если в точке $n-1$ имеется неограниченный запас бензина (базис индукции). Но по предположению индукции мы можем запасти любое количество бензина (A единиц при сколь угодно большом A) на расстоянии $n-1$ от края!

Другими словами, если нам надо завезти заданное количество B бензина на расстояние n от края, мы сначала представляем себе, что в $n-1$ бензина сколько угодно, и смотрим, какое количество (A) нам реально понадобится. Затем мы (пользуясь предположением индукции) завозим A единиц бензина в точку $n-1$.

№9.

Докажем по индукции такое утверждение: на первых n местах можно получить любую комбинацию нулей и единиц. При n = 1 это нам дано по условию: первую цифру можно менять как угодно. Предположим, что мы уже доказали, что на первых n-1 местах можно получить любую комбинацию цифр. Тогда, в частности, там можно получить и комбинацию 000 . . . 0001 (единица на (n-1)-ом месте и нули до неё). Эта комбинация позволяет заменить цифру, стоящую на n-м месте, поскольку именно она оказывается цифрой, стоящей после первой единицы. После этого мы можем снова воспользоваться предположением индукции получить на первых n-1 местах любые нужные нам цифры. Задача решена? На самом деле нет. Наше решение содержит не сразу заметный, но важный пробел: почему изменение n-1 цифр на последнем шаге не испортит n-й цифры? Чтобы исправить положение, нам придётся изменить решение и доказывать по индукции более сильное утверждение: на первых n местах можно получить любые цифры, не трогая следующих цифр. Теперь уже всё проходит гладко: проводя шаг индукции, мы получили нужные нам цифры на первых n местах и не касались следующих цифр. Теперь задача действительно решена.

Задача 14. Доказать, что (при любом натуральном $n \geqslant 1$)

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{n^2}<2.$$

Решение. Здесь оба приёма из предыдущей задачи встречаются с трудностями: нет ни общей формулы для суммы в левой части, ни способа провести шаг индукции, не меняя утверждения.

Однако можно усилить утверждение так:

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{n^2}\leqslant 2-\frac{1}{n}.$$

При $n=1$ неравенство превращается в равенство $1=2-1$. Проведём шаг индукции: если

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{(n-1)^2}\leqslant 2-\frac{1}{n-1},$$

то после прибавления к обеим частям дроби $1/n^2$ получаем

$$\begin{aligned}1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{n^2}\leqslant 2-\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n^2}&=\\ =2-\frac{n^2-n+1}{(n-1)n^2}&<\\ <2-\frac{n^2-n}{(n-1)n^2}&=2-\frac{1}{n},\end{aligned}$$

что и требовалось.

№10.

По существу это же решение можно изложить и в более наглядном виде: заметим, что

$$\frac{1}{n^2}<\frac{1}{(n-1)n}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n},$$

поэтому

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}$$

меньше суммы

$$1+\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right).$$

Теперь все промежуточные члены сокращаются и остаётся $1+1-1/n$, так что исходная сумма меньше 2.

4.3. Семинар №3.

4.4. Семинар №4.

Задача 4.2. Докажите, что не существует графа с пятью вершинами, степени которых равны 4, 4, 4, 4, 2.

Пусть в нашем графе вершины обозначены v_1, v_2, v_3, v_4, v_5. Тогда пусть степень вершины v_1 равна 4, тода она должна быть соединена с вершинами v_2, v_3, v_4, v_5, а значит их степени у каждой уже равна одному.

Идем далее к вершине v_2, она связана с первой вершиной, значит, чтобы степень ее была равна 4 нужно провести ребра к вершинам v_3, v_4, v_5. Получаем, что у двух вершин уже степени 4, а у остальных по 2.

Нам нужны еще вершины степени 4, поэтому берем вершину v_3 и соединяем ее с вершинами v_4, v_5. Таким образом, мы смогли получить три вершины степени 4, но вершин степени два уже нет. Значит, такой граф построить нельзя.

Аля интернет. Предположим, такой граф существует. Тогда в нем найдутся три попарно различные вершины u, v, w, степень каждой из которых равна 4, и отличная от них вершина z степени 2. Поскольку всего в графе 5 вершин, любая вершина степени 4 смежна со всеми другими. Следовательно, каждая из вершин u, v, w смежна с z. Тогда степень вершины z не меньше чем 3. Противоречие.

Задача 4.3. Найдите все графы, в которых каждая пара рёбер имеет общий конец

Для каждого из ниже описанных случаев учтем, что в этих графах могут быть еще и изолированные вершины, которые не будут противоречить условию задачи.

1 случай. Рассмотрим произвольное ребро AB. Любое другое ребро имеет в качестве концевой вершины A или B. Предположим, что есть другие рёбра как с концом A, так и с концом B. Тогда у них есть общая вершина C. При этом получается граф треугольник. Других вариантов быть уже не может, так как если мы добавим еще одну точку D и соединим ее с A, то пара ребер DA и BC не будет иметь общий конец.

2 случай Пусть все рёбра исходят из A. Это даёт так называемый звёздный граф. Число рёбер в нём может быть любое. Он удовлетворяет условию.

Итого имеем звёздный граф или треугольник (плюс отдельные изолированные вершины, если они есть).

Задача 4.4. Докажите, что если в графе есть хотя бы две вершины, то есть две вершины одинаковой степени.

В графе n вершин, значит варианты для степеней вершин {0,1...n-1}.

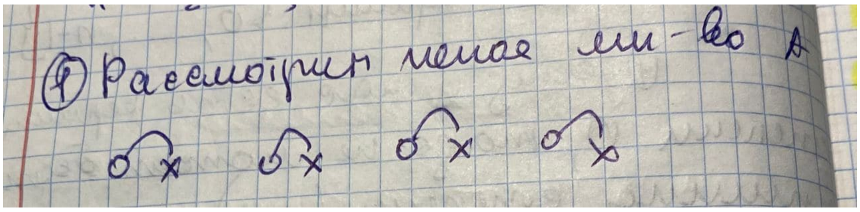
Если у нас есть изолированная вершина, тогда не может быть вершины степени n-1. Значит, у нас есть n вершин, но n-1 вариант {0, 1... n-2}. Значит, у нас вершин больше числа вариантов, а значит, точно будут две вершины с одинаковой степенью.

Если у нас нет изолированной вершины, тогда возможные варианаты {1...n-1}.Значит, у нас есть n вершин, но n-1 варианта. Значит, у нас вершин больше числа вариантов, а значит, точно будут две вершины с одинаковой степенью.

Задача 4.5. Граф–путь P_n имеет n вершин v_1...v_n. Рёбрами связаны пары вершин v_i и v_{i+1} (1 <= n-1). Найдите максимальный размер независимого множества в графе-пути P_n.

Если наше n четно, тогда независимое множество мы максимально можем собрать, выбирая каждую первую вершину чередуя. Таким образом, у нас будет n / 2 вершин, которые мы возьмём в независимое множество.

Если n нечетно, тогда возьмем и будем делать аналогично, до последней вершины, ее мы тоже включим в наше множество. Так как согласно нашему принципу она не будет соединена с другими вершинами из нашего множества. Таким образом, в нашем множестве будет ((n-1) / 2) + 1 вершин .



Решение АлинОчки. Наш граф путь перерисовать можно таким образом: кружок - это значит, что мы берем вершину в независимое множество, а крестик, что ее брать нельзя, так как она соединена ребром с уже взятой.

Пусть наше независимое множество это A, тогда количество запрещенных вершинок |A| - 1 (-1 потому что нарисуйте себе пример, когда нечетное число вершин и поймете все). Таким образом, |A| + |A| - 1 <= n, значит, |A| <= (n + 1) / 2.

Ответ: (n + 1) / 2

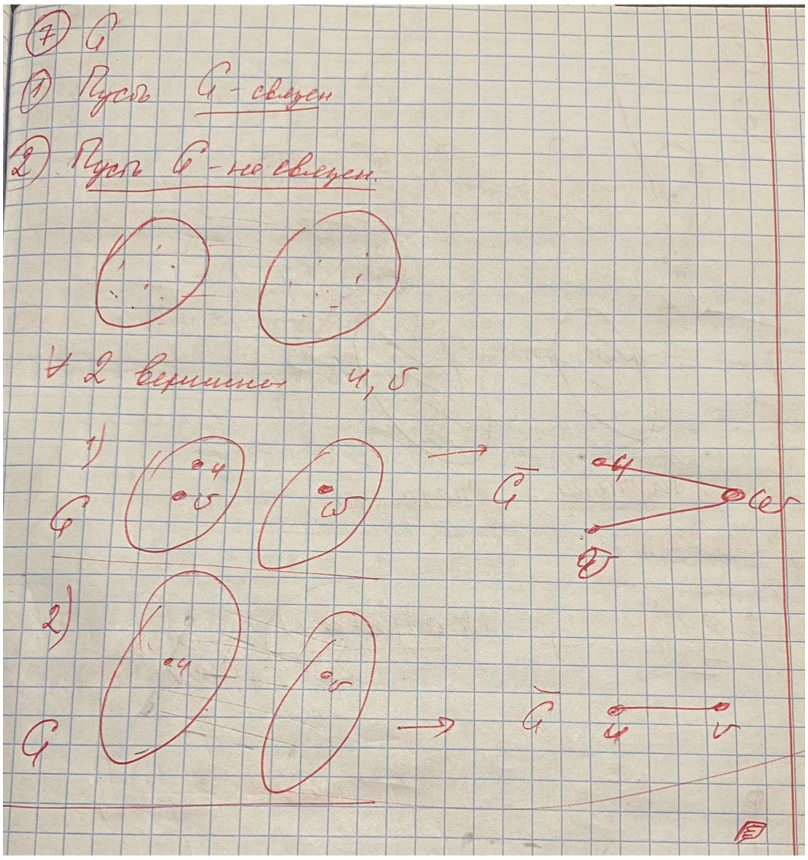
Задача 4.7. Докажите, что граф или его дополнение связны (возможно оба связны).

Дополнением G графа называется такой граф на том же множестве вершин, что и у графа G, в котором пара вершин смежна тогда и только тогда, когда в G эта пара вершин не смежна. 3 Рассмотрим произвольный граф G. Если он связен, утверждение верно. Предположим, что G не связен. Рассмотрим произвольные u, v. Покажем, что эти вершины соединены путем в дополнении графа G.

Возможны ровно два случая.

В первом случае u и v не соединены никаким путем в G, тогда вершины u и v соединены путем в дополнении. Таким образом, каждая вершина первой компоненты будет связана с каждой вершиной второй компоненты, а значит, мы точно связали вершины первой компоненты со второй. Может возникнуть вопрос, а связи, которые были внутри компонент, но ничего. Если захотим попасть в какие- то две вершины A, B из одной компоненты, то существует такая C, во второй компоненте, что теперь в дополнении есть ребра AC, CB, а значит легко попасть из A в B. А значит, дополнение окажется связано.

Во втором случае, u и w соединены некоторым путем в G. Однако, раз G несвязен найдется вершина w, с которой u не соединена никаким путем в G. Легко видеть, что тогда и w не соединена путем с v, но в дополнении вершины u и w, w и v окажутся связаны. Таким образом, все вершины, которые находились в разных компонентах связности теперь окажутся связаны, а значит, дополнение будет связано.



Задача 4.8. Какое максимальное число рёбер может быть в несвязном графе с n вершинами.

Пусть в нашем несвязном графе есть несколько компонент связности, тогда будет добавлять ребра в наш граф до тех пор, пока количество компонент связности не будет равно двум. Пусть в певрой компоненте связности a вершин, тогда 1 <= a <= n - 1, тогда во второй компоненте связности (n - a) вершин.

Тогда, чтобы количество рёбер было максимально нужно, чтобы наши компоненты связности представляли собой полные графы (там все вершины связаны ребром). Таким образом, по доказаному ранее количество рёбер в первой компоненте связности и во вотрой будет:

$$\frac{a \cdot (a-1)}{2} + \frac{(n-a) \cdot (n-a-1)}{2}$$

Найдем максимальное значение данной суммы относительно a. Раскрывая и приводя подобные слагаемые увидим, что это парабола, направленная ветвями вверх. Значит, проверим значения в точках, которые являются ограничениями. Если a = 1, получим

$$\frac{1 \cdot (1-1)}{2} + \frac{(n-1) \cdot (n-1-1)}{2} = \frac{(n-1) \cdot (n-2)}{2}$$

Если a = n - 1 , получим

$$\frac{(n-1) \cdot (n-1-1)}{2} + \frac{(n-n+1) \cdot (n-n+1-1)}{2} = \frac{(n-1) \cdot (n-2)}{2}$$

Таким образом, наш ответ

$$\frac{(n-1) \cdot (n-2)}{2}$$

4.5. Семинар №5

Задача 5.1. В связном графе на 10 вершинах есть три вершины степени 4. Может ли этот граф быть деревом?

Воспользуемся тем фактом, что в дереве (количество ребер = количество вершин - 1) |E| = |V| - 1 Значит, |E| = 9

Сумма степеней вершин равна удвоенному количеству ребёр, то есть 2 $\cdot |E| = 18$.

У нас есть три вершины степени 4, значит, сумма оставшихся степней 18 - 12 = 6. А вершин у нас еще 7, значит такого дерева точно не может быть.

Задача 5.2. В графе на 400 вершинах степень каждой вершины равна 201. Докажите, что в этом графе есть простой цикл длины 3.?

Рассмотрим некоторую вершину u в нашем графе, по условию нашей задачи она должна будет быть связана с 201 вершинами. Тогда выберем какю-то вершину w среди тех,. с которыми связана u.

Вершин несоединеных с u : 400 - 201 - 1 = 198. Таким образом, если w будет соединена со всеми этими 198 вершинами, она еще должна будет быть соединена с одной из вершин, которые соединены с u, например y. Иначе, у нас есть ребро uw, uy, yw. А значит, есть цикл длины 3.

Задача 5.3 Диаметром дерева назовём наибольшую длину простого пути в этом дереве. Верно ли, что в любом дереве диаметра d любые два простых пути длины d имеют хотя бы одну общую вершину?

Указание: нарисуете в два столбика точки, столбики одной длины, теперь проведете ребро и поймете, что у нас получается путь длины хотя бы d + 1 точно.

Пусть у нас есть два простых пути длины d, так как наш граф дерево, то мы должны должны их как-то соединить, а значит проведем ребро между двумя этими путями. Таким образом, у нас получается путь длины хотя бы d + 1 (ну идете до это ребра по одному столбику, а потом ребро и еще потом топаете по другому столбику).

Нет, неверно

Задача 5.4 В дереве на 10 вершинах ровно три вершины имеют степень 1. Сколько вершин имеют степень 3?

Воспользуемся тем фактом, что в дереве (количество ребер = количество вершин - 1) |E| = |V| - 1 Значит, |E| = 9

Сумма степеней вершин равна удвоенному количеству рёбер, то есть 2 $\cdot |E| = 18$.

18 - 3 = 15 - сумма оставшихся семи вершин.

Значит, у семи, шести, пяти вершин точно не может быть степень 3. Если четыре вершины, то тогда степень оставшихся трех будет 1 (противоречит условию, что у нас только три вершины степени один. Проводя аналогичные рассуждения получаем, что вершин степени 3 может быть только одна.

Задача 5.5 Имеется связный граф. Докажите, что в нём можно выбрать одну из вершин так, чтобы после её удаления вместе со всеми ведущими из неё рёбрами останется связный граф.

У всякого связного графа G есть остовное дерево. Докажем этот факт.

Доказательство. Пусть в связном графе G ровно n вершин. Рассуждаем индукцией по числу ребер. Пусть в графе m > 0 ребер. Если в графе G есть ребро, после удаления которого останется связный граф G0, то G0 содержит m 1 ребро и, по предположению индукции, имеет остовное дерево, которое подходит и для G. Если же в графе G нет такого ребра (в частности, вообще нет ребер), то по удалении любого ребра остается несвязный граф, а значит, G есть дерево и собственное остовное дерево.

Теперь у нас есть связный граф, мы можем найти остовное дерево, удалим висячую вершину u с её ребром, опять получаем остовное дерево и связный граф.

Можно посмотреть тут на некоторые вещи, за которые могут прицепиться проверяющие.

Лемма 1. *Во всяком дереве более чем на одной вершине есть хотя бы две вершины степени один.*

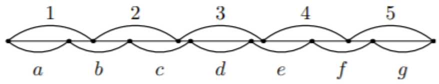
Доказательство. Пусть $v_1, \ldots, v_n$ суть все вершины дерева, причем $n > 1$. В силу связности, степени всех вершин положительны. По лемме о рукопожатиях, имеем $\sum_{i=1}^{n} \deg v_i = 2(n-1)$. Если какие-то $n-1$ вершины (допустим, $v_1, \ldots, v_{n-1}$) имеет степень 2 и более, то $2(n-1) + \deg v_n \leqslant \sum_{i=1}^{n} \deg v_i = 2(n-1)$, откуда $\deg v_n = 0$, что не так. Значит, более чем n 2 вершин не могу иметь степень 2 и больше, а оставшиеся — не менее двух — имеют степень 1. □

Остóвным деревом графа G называется произвольный подграф этого графа, содержащий все вершины G, и являющийся деревом. (Эквивалентно: любое дерево на всех вершинах графа G, каждое ребро которого есть и в G). Заметим, что любое дерево является остовным для себя самого.

Задача 5.6 В гости придут либо 5, либо 7 человек. На какое минимальное число кусков нужно порезать торт, чтобы гарантированно можно было раздать всем поровну?

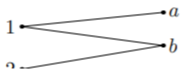
5.7. Есть ли в булевом кубе остовное дерево, в котором все вершины кроме двух имеют степень 2? Пусть у нас есть вершина, у которой степень 1. У

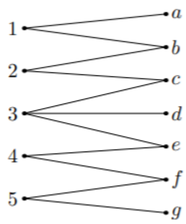
Пример 2. *Деление торта.* Допустим, что нам надо заранее разрезать торт на несколько кусков, готовясь к приходу гостей — так, чтобы его можно было раздать поровну m людям, а также чтобы его можно было (с теми же разрезами, только перегруппировав куски) раздать поровну n людям. Какое минимальное число кусков понадобится? Пусть, скажем, $m = 5$ и $n = 7$; сколько надо кусков, чтобы можно было раздать торт поровну и пяти, и семи людям? Наивный способ состоит в том, чтобы разделить торт на части по $1/35$ и потом группировать куски по 5 и по 7. Но легко понять, что это не оптимально (с точки зрения числа кусков) — представим себе торт отрезком и наметим точки разреза на 5 и на 7 равных частей. В первом случае будет 4 точки разреза, во втором 6, всего 10 точек разреза, то есть 11 кусков. Сделав все эти разрезы заранее, мы решим задачу, то есть 11 кусков достаточно. (В общем случае достаточно $m + n - 1$ кусков.)



Как доказать, что это оптимальный способ, то есть что 10 кусков недостаточно? Можно разбирать разные варианты и случаи и это установить, но есть такое рассуждение (которое легко обобщается на произвольные взаимно простые m и n).

Нарисуем схему раздачи в виде графа. Слева изобразим 5 гостей одного варианта, назовём их 1, 2, 3, 4, 5. Справа изобразим 7 гостей другого, назовём их a, b, c, d, e, f. Куски изобразим рёбрами, соединяющими тех, кому они попали при том и другом варианте. Получится граф, рёбра которого соответствуют кускам: ребро соединяет тех людей (в первом и втором варианте), которым соответствующий кусок достанется.[7] Вот граф, изображающий ту же самую раздачу, что на предыдущем рисунке, но, разумеется, возможны и другие варианты раздач.





Нам надо доказать, что в этом графе не менее 11 рёбер. Заметим, что в нём 12 вершин. Значит, если рёбер меньше 11, то граф будет несвязен (вот где нужна предыдущая теорема). Связная компонента состоит из некоторых вершин; разобьём и рёбра в соответствии с тем, в какую компоненту они попали (концы любого ребра попадают в одну компоненту, так как они связаны). Таким образом, куски разбиваются на несколько групп. Спросим себя, какой может быть суммарный вес кусков в одной из групп. Все эти куски в каждом из вариантов идут каким-то гостям, и больше эти гости ничего не получают (иначе эти новые куски вошли бы в ту же связную компоненту). Значит, общий вес кусков в группе должен быть кратен $1/5$ торта и $1/7$ торта одновременно, а это невозможно, кроме того случая, когда общий вес равен 1, то есть группа только одна. Получаем искомое противоречие.

нас дерево, у него хотя бы 2 висячие вершины (в нашем случае ровно 2). Из другой вершины, связанной с нашей, тоже выходит ребро и так далее мы придем в конец, где у нас будет вторая висячая вершина. Заметим, что мы можем интерпретировать условие задачи так: у нас есть слова длины n, и нам надо показать, что мы можем построить путь, в котором участвуют все наши слова. Докажем по индукции, для n=2 очевидно. Пусть верно для n, докажем для n+1. Алгоритм такой: если по старому графу мы шли из $a_1 \to a_2 ... \to a_{2^n}$, то в новом у нас все те же слова длины n, но на конце может быть либо 0, либо 1. Тогда построим такой путь $a_1 0 \to a_1 1 \to a_2 1 \to a_2 0$. И так далее. Получается, мы модифицировали наш предыдущий алгоритм, просто количество вершин увеличилось в 2 раза. Дерево есть.

4.6. Семинар №6.

№1. 50 команд сыграли турнир по волейболу в один круг (в волейболе ничьих не бывает). Говорят, что команда A сильнее B, если A выиграла у B или есть команда C, такая, что A выиграла у C, а C выиграла у B. Доказать, что команда, набравшая наибольшее число очков, сильнее любой другой

Решение. Известно, что в волейболе не бывает ничьих, выигравшему матч добавляется одно очко, а число очков проигравшего не изменяется. Турнир в один круг означает, что любые две различные команды сыграли между собой ровно по одному разу.

Рассмотрим орграф $G = (V, A)$, где вершины суть команды-участники, и $xy \in A$ тогда и только тогда, когда команда x выиграла у команды y. Нетрудно видеть, что мы действительно определили орграф (т. е. нет петель и кратных ребер), причем по условию между любыми двумя разными вершинами проходит ровно одна стрелка (в ту или другую сторону). Число набранных командой x очков оказывается равным $d_+(x)$.

Пусть некая команда a набрала наибольшее число очков k (такая, заметим, непременно найдется, хотя может быть и не единственна). Рассмотрим произвольную команду $b \neq a$. Если $ab \in A$, то a сильнее b. В противном случае, $ba \in A$. Имеем $d_+(b) \leqslant k$. Следовательно, помимо a, команда b победила не более чем $k - 1$ команду. С другой стороны, команд, побежденных a (и значит, отличных и от a и от b), имеется ровно k. Все они не могли быть побеждены b, следовательно, для некоторой команды $c \neq a, b$ имеем $ac \in A$, но $bc \notin A$. Тогда $cb \in A$, а значит, a сильнее b. $\square$

№2. Найдите наибольшее целое положительное число, в котором все цифры разные, а любые две подряд идущие цифры образуют двузначное число, делящееся на 7

Решение. Чисел интересующего нас вида лишь конечно много, причем хотя бы одно есть (скажем, 14). Следовательно, существует наибольшее такое число. Каким оно должно быть? Представив задачу графом, мы можем ясным образом сократить возникающий перебор.

Образуем орграф $G = (V, A)$ с вершинами $0, 1, \ldots, 9$, т. ч. $ab \in A$ тогда и только тогда, когда $a \neq b$ и последовательность ab есть двузначное число в десятичной записи, кратное семи (например, $70, 21 \in A$, но $77, 07, 34 \notin A$). Ясно, что каждая вершина G содержится ровно в одном из следующих путей:

$$7\,0 \quad 3\,5\,6\,3 \quad 1\,4\,2\,8\,4\,9\,1,$$

причем стрелки между вершинами из разных таких путей в G отсутствуют. (Отметим, что второй и третий из них являются циклами, а значит, компонентами сильной связности орграфа G. Первый путь разбивается на две компоненты сильной связности по одной вершине в каждой, поскольку из 0 нет пути в 7.)

Легко видеть, что подходящие числа взаимно-однозначно соответствуют простым путям в орграфе G. В частности, все цифры любого такого числа лежат в одном из указанных выше подмножеств вершин. Число вершин простого пути равно числу знаков соответствующего ему подходящего числа. Самые длинные простые пути в нашем графе содержат не более пяти вершин, и таковой, действительно, есть на вершинах из третьего множества. Значит, наибольшее подходящее число — пятизначное и составленное из цифр $9, 8, 4, 2, 1$. Напомним также, что цифры в подходящем числе не повторяются.

Самым большим числом с этими свойствами является $x = 98421$ (так цифры в нем идут по убыванию). С другой стороны, x соответствует простому пути 9 8 4 2 1, а значит, x является подходящими и искомым. □

№3. Последовательность чисел определена рекуррентно: $a_0 = 5; a_{n+1} = a_n^2 + 3$**. Найдите последнюю цифру числа** a_{2020}

$a_0 = 5; a_1 = 8; a_2 = 7; a_3 = 2; a_4 = 7;$ Создадим граф, вершинами которого будут последние цифры чисел нашей рекуррентной последовательности. Ребра следуют из вершины a_i в вершину a_j, если у числа, соответствующего вершине a_i, последняя цифра после проведенной операции изменилась на a_j. Тогда мы видим, что $5 \to 8 \to 7 \to 2 \to 7$. Из 7 мы можем попасть только в 2, а из 7 только в 2. У нас образуется компонента сильной связности, другого числа мы получить не можем. 2020-2=2018; Пусть 7 соотвествует 0, а 2 единица, тогда 2018 mod 2=0, значит последняя цифра равна 7.

№4. Предположим, что последовательность чисел задана соотношением $a_{n+1} = f(a_n)$**, где f некоторая функция (определённая на всех числах). а) Покажите, что либо все члены последовательности различны, либо она периодична: после некоторого начала (предпериода) числа начинают повторяться (период). б) Покажите, что второй случай имеет место тогда и только тогда, когда** $a_{2n} = a_n$ **при некотором n**

Решение. **a)** Предположим, не все члены последовательности различны, т. е. найдутся два одинаковых: $a_N = a_{N+k}$ для некоторых $N, k \in \mathbb{N}$. Покажем, что k является длиной периода[2], а N длиной предпериода нашей последовательности.

[2]Периодов у последовательности может быть несколько: например, если есть период длины 2, то 3 таких периода образуют период длины 6. Обычно имеют в виду период наименьшей положительной длины (и саму эту длину называют периодом), но здесь это не оговорено.

В самом деле, при любом $n > N$ имеем $n = N + t$ для некоторого $t \in \mathbb{N}$, откуда

$$a_n = a_{N+t} = \underbrace{f(\ldots f(}_{t} a_N)\ldots) = f^t(a_N) =$$

$$f^t(a_{N+k}) = a_{N+k+t} = a_{N+t+k} = a_{n+k}.$$

Можно также представить последовательность бесконечным путем в (бесконечном) орграфе (возможно, с петлями), вершинами которого являются все числа, а стрелки соединяют каждое число a с $f(a)$. В таком графе исходящая степень каждой вершины равна единице. Поэтому из любой вершины a_1 начинается единственный путь $a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$, содержащий или не содержащий цикла. Первому случаю соответствует последовательность без повторов, а второму — периодическая. В самом деле, если мы пришли в некоторую вершину из нее самой, в силу единственности исходящего из вершины пути данной длины, мы непременно снова вернемся в эту вершину. Цикл образует период последовательности, а путь из a_1 в любую принадлежащую циклу вершину — предпериод.

b) Если $a_{2n} = a_n$, то, поскольку $n > 0$, мы явно имеем два одинаковых члена с разными номерами, а значит последовательность, как мы показали, периодична.

Обратно, пусть существуют $N, k \in \mathbb{N}$, т. ч. для всех $n > N$ верно $a_n = a_{n+k}$. Выберем число $l \in \mathbb{N}$ так, что $kl > N$. Тогда $a_{2kl} = a_{kl+kl} = a_{kl+k+\ldots+k} = a_{kl}$. Достаточно, значит, взять $n = kl$. □

№5. Докажите, что в ориентированном графе G нет пути из вершины s в вершину t тогда и только тогда, когда вершины графа можно разбить на два непересекающихся множества S и T, таких что s ∈ S, t ∈ T и в графе нет рёбер из вершин из множества S в вершины из множества T

Пусть это не так. Тогда, точно есть хотя бы одно ребро из S в T. Но тогда два этих множество связаны, а поскольку вершины внутри этих множеств связаны, значит есть путь из s в t. Если какая-то вершина из S связана с T, то тогда оп построению перетащим эту вершину в S. Все вершины, до которых можем добраться из s, назовем S, остальные T.

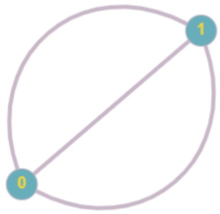
№6. а) Докажите, что есть такое двоичное слово, в котором любая комбинация из 10 нулей и единиц встречается ровно один раз. б) Пусть двоичное слово удовлетворяет условию предыдущего пункта и начинается на 0100011101. Найдите последние 8 цифр этого слова

а) Всего таких цепочек 1024 (длины 10). Если мы берем какой-то префикс, то продолжить мы его может только либо 0, либо 1. По факту, мы должны строить развилку так: пусть есть префикс, отводим от него как раз два ребра (продолжения 0 и 1) и выбросили первую его цифру, представим, что нарисовали граф, где каждой вершине соответствует какая-то цепочка длины 10. Соединим две вершины ребрами в том случае, если из конечной вершины можно получить начальную выбрасыванием первого символа и записыванием какого-то в конце. Более того, самопроизводящие слова мы не строим (к нулям не будем приписывать 0). Степени исходящих вершин у этого графа будут 2 и 1. Но и у каждой вершины при этом почти будет входящая степень 2. Также мы знаем, что у вершин. у которых скорее всего исходящая степень равна 2, то и входящая будет равна двум. Также если у вершины входящая степень 1, то и исходящая такая же. Мы всегда начав с одного слова сможем получить другое. Мы ведь можем приписать все 10 новых символов. В ориентированном графе без изолированных вершин содержится эйлеров цикл тогда и только тогда, когда степени всех вершин четные. Это мы и доказали. б) А тогда, если это эйлеров граф, то первая и последняя вершина в эйлеровом цикле смежные, последняя не совпадающая с исходной. И вот тогда наше исходное слово из 10 цифр должно получаться из последнего. Ну и тогда последние 8 цифр последнего слова - это часть первого слова с 2 по 9

4.7. Семинар №7.

Задача №1(а)Докажите, что любое дерево 2-раскрашиваемое(существует правильная раскраска в 2 цвета)
б)Сколько есть правильных 2-раскрасок у дерева на n вершинах
в)Сколько есть правильных k-раскрасок у дерева на n вершинах)
а)Возьмем любую вершину и покрасим ее в цвет 1, ее соседей в цвет 2, а их соседей в цвет 1 и т.д.(Доказать можно через индукцию по количеству вершин: база очевидна, если можем покрасить k вершин, докажем для k+1.В дереве на k+1 вершине, выделим дерево на K вершинах(все вершины,кроме одного листа), такое дерево мы уже можем покрасить, тогда оставшийся лист красим в противоположный его родителю цвет)
б)Всего 2 раскраски, т.к. мы знаем, что если цвет любой одной вершины например 1, то у остальных он однозначно определен, а у любой вершины может быть только 2 цвета.
в) $N = k \cdot (k-1)^{n-1}$ - т.к. мы берем любую вершину и ее мы можем покрасить в k цветов, ее соседей в k-1, их соседей в k-1 и т.д.(так же можно доказать через индукцию).
Задача №2(Граф получен из цикла на 2n вершинах добавлением ребер, соединяющих противоположные вершины.При каких n этот граф 2-раскрашиваемым)

Всего 2n вершин $\Rightarrow$ с обоих сторон по n-1 вершин $\Rightarrow$ в каждом цикле n+1 вершина $\Rightarrow$ Т.к. цикл является 2-раскрашиваемым при четном количестве вершин $\Rightarrow$ (n+1) - четное $\Rightarrow$ n - нечетное.



Задача №3(Назовем не 2-раскрашиваемый граф минимальным, если после удаления любого ребра он становиться 2-раскрашиваемым. Докажите, что в минимальном не 2-раскрашиваемом графе на 1000 вершинах есть хотя бы одна изолированная вершина(т.е. вершина степени 0))
Граф не является 2-раскрашиваемым $\Leftrightarrow$ в нем $\exists$ цикл нечетной длинны.В данном графе имеется нечетный цикл(цикл нечетной длинны).Если какое-либо ребро графа не входит в этот цикл, то после его удаления останется данный цикл(нечетной длинны).$\Rightarrow$ в минимальном не 2-раскрашиваемом графе $\exists$ ребра только цикла нечетной длинны $\Rightarrow$ т.к. имеем сетное количество вершин(1000) $\Rightarrow$ должна быть хотя бы 1 изолированная вершина.

Задача №4(Мэри Поппинс раздает детям подарки, каждый должен получить ровно один подарок. Известно, что каждый подарок готовы взять не более 4 детей, и каждый ребенок готов взять дюбой из не менее 4 подарков(вообще говоря,разных для разных детей).Может ли Мэри справиться с таким заданием?)
$|$подарков$| \geq |$детей$| \Rightarrow \forall$ подмножества детей X:
$|S(x)| \geq |X|$, то совершенное паросочетание возможно.
Рассмотрим произвольное поднмножество детей X:
в S(x) - ребер не больше чем $4 \cdot |S(x)| \Rightarrow 4 \cdot |S(x)| \geq |E(x)| \geq 4 \cdot |X| \Rightarrow |S(x)| \geq |X|$ $\Rightarrow$ может (ПРИМЕЧАНИЕ: так же можно просто сослаться на теорему Холла т.к. количество подарков больше, чем детей $\Rightarrow$ возможно идеальное паросочетание)

Задача №5(4 человека должны взять по одному из имеющихся 9 предметов.Сколькими способами это можно сделать?)
Решение достаточно очевидно:
первый человек может взять 1 из 9 предметов, второй же уже будет брать 1 из 8 предметов(т.к. 1 какой-то предмет взял первый человек), третий уже выбирает из 7, а четвертый из 6.$\Rightarrow$ Ответ: $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 3024$.

Задача №6(Сколькими способами колоду из 36 карт можно перетасовать так, чтобы красные и черные карты чередовались?)
Всего 36 карт $\Rightarrow$ у нас по 18 карт черного и 18 карт красного цвета.Карты должны чередоваться Значит у нас есть 18 мест для красных карт и 18 мест для черных карт, на места для красных карт мы можем положить карты 18! способами(аналогично 5 задаче: на первое место можем поставить 18 карт, на 2 - 17 и т.д, но тут мест и

карт равное количество $\Rightarrow 18 \cdot 17 \cdot 16... \cdot 2 \cdot 1 = 18!$) так же и для черных карт - 18!. Но так же черные и красные карты могут чередоваться 2 способами - ведь первая карта либо черная, либо красная $\Rightarrow$ Ответ: $2 \cdot (18!)^2$

Задача №7(а)Найдите количество последовательностей длинны 4, состоящих из различных десятичных цифр
б)Найдите количество 4-значных чисел, в десятичной записи которых все цифры различны)
а) нужно составить последовательность из цифр 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 $\Rightarrow$ всего 10 цифр $\Rightarrow$ аналогично прошлым задачам расставляем цифры $\Rightarrow$ Ответ: $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040$
б) эта задача аналогична пункту А, но т.к. тут не комбинации цифр, а числа $\Rightarrow$ на первом месте не может стоять 0 $\Rightarrow$ на первом месте, как и на втором 9 цифр $\Rightarrow$ Ответ: $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4536$

Задача №8(В правильном n-угольнике провели максимально возможное количество диагоналей так, чтобы они не пересекались во внутренних точках(Это называется триангуляцией многоугольника)
а.Сколько проведено диагоналей?
б.Докажите,что в любой траингуляции есть такая тройка подряд идущих вершин A_1, A_2, A_3, что диагональ A_1A_3 входит в траингуляцию(а A_1A_2, A_2A_3 - стороны многоугольника)
в.По траингуляции построим граф: его вершины - это вершины многоугольника, а ребра соединяют концы сторон, или концы проведенных диагоналей.Найдите количество правильных раскрасок этого графа в 4 цвета)
а) (n-3) диагонали(докажем по индукции): База: при n=3 (3-3) =0 - верно
Шаг: Предположим, что доказано для (n-1), тогда докажем для n:
Пусть проведем диагональ(без ограничения общности из 1-ой вершины в k-ую) $\Rightarrow$ в левой части у нас k точки(считая точки 1 и к), которые образуют (k-3) диагонали (т.к. k-3 $<$ n, а до n уже доказано), а в правой части (n-k+2) точек(считая 1 и k), которые образуют (n-k+2-3) диагонали $\Rightarrow$ всего диагоналей (k-3) +(n-k+2-3) + 1(+1 т.к. мы не учитывали в обоих случаях диагональ 1k) = (n-3).

б)(n-3) диагонали $\Rightarrow$ n-2 треугольника,n$>$3
Сторон всего n штук, каждая сторона лежит в каком-то треугольнике(ровно в 1)(и это не значит,что в треугольнике обязана быть сторона из n- угольника).У 1 треугольника не более 2-ух сторон являются сторонами n-угольника. По принципу Дирихле $\Rightarrow$ найдутся хотя бы 2 крайних треугольника.

в) Метод математической индукции:

База: n = 4, то наш многоугольник имеет всего 4 вершины, и поэтому расскрасить его в 4 цвета можно произвольным образом, то есть 4! = 24 способов сделать правильную раскраску.

Переход: Пусть мы T(n) - это ответ для n $<=$ k. Докажем, что T(k + 1) - ответ для n = k + 1.

Рассмотрим (k + 1)-угольник, разбитый на триангуляцию. Из пункта (б) следует, что в нём есть треугольник, у которого 2 стороны - стороны (k + 1)-угольника, а третья - диагональ в триангуляции. Назовём такой треугольник крайним, а вершину, которая не является концом диагонали "пустой". Тогда, вся фигура без пустой вершиины и двух рёбер, ведущих в неё является k-угольником. Тогда для него количество способов закрашивания есть T(k). В каждом из них 2 непустые вершины крайнего треугольника имеют какие-то 2 цвета, тогда в пустой вершине в каждом из случаем можно поставить один из 2-х оставшихся цветов. Но ещё также возможен случай, что при отделении пустой вершины в оставшемся многоугольнике не используются все 4 цвета, а только 3 из них. Тогда в пустую вершину мы обязаны положить оставшийся 4-ый цвет, а все остальные должны быть раскрашены в 3. В оставшемся k-угольнике также есть крайний треугольник. Его можно 6-ю способами раскрасить в 3 цвета, при этом все остальные вершины многоугольника однозначно получают свой цвет. Значит, что количество способов закрасить (k+1)-угольник есть $T(k+1) = 2 \cdot T(k) + 6$. Тогда по индукции получаем, что $T(n) = 2 \cdot T(n-1) + 6$.

$$T(n) = 2 \cdot T(n-1) + 6 = 2 \cdot (2 \cdot T(n-2) + 6) + 6 = \ldots = 2(2(\ldots(2 \cdot T(4) + 6)\ldots) + 6) + 6 =$$

$$= 2^{n-4} \cdot T(4) + 6 + 6 \cdot 2 + 6 \cdot 4 + \ldots + 6 \cdot 2^{n-5} = 2^{n-4} \cdot 24 + 6(2^{n-4} - 1) = 2^{n-4} \cdot 30 - 6$$

Ответ: $2^{n-4} \cdot 30 - 6$.

4.8. Семинар №8.

№1. Разделить 15 конфет между 5 детьми, чтобы каждому досталось хотя бы 2.

Воспользуемся методом шаров и перегородок, но для начала вычтем 10 обязательно распределенных конфет. Получим 111|11|||. Надо разделить 5 одинаковых конфет между 5 детьми. Значит, C_9^4

№2. Сколько имеется 7-значных чисел, у которых каждая следующая (слева направо) цифра не больше предыдущей?

Число из условия полностью определяется набором своих цифр, которые мы упорядочиваем по невозростанию. При этом берется 7 цифр из 10, цифры могут повторяться. Итого: сочетания с повторениями C_9^7

№3. Сколько существует шестизначных чисел, в которых четных и нечетных цифр поровну?

На первое место можно поставить любую из 9 ненулевых цифр. Из оставшихся 5 мест выберем два ($5 \cdot 4/2 = 10$ способов). На эти два места поставим цифры той же чётности, что и первая (5^2 способов), на остальные три места – цифры другой чётности (5^3 способов). Итого, $9 \cdot 10 \cdot 55$ способов.

№4. Сколько различных слов (не обязательно осмысленных) можно получить, переставляя буквы в слове «ОБОРОНОСПОСОБНОСТЬ»?

18 букв, 7 букв о, 2 б, 2 н, 3 с. Ответ: $\frac{18!}{7!\cdot 2\cdot 2\cdot 3!}$

№5. Какое из чисел $\binom{F_{1000}}{F_{998}+1}$ и $\binom{F_{1000}}{F_{999}+1}$ больше?

$F_{1000} = F_{999} + F_{998} \Rightarrow C_{F_{1000}}^{F_{999}+1} = C_{F_{1000}}^{F_{998}-1}$; $F_{998} < \frac{F_{1000}}{2}$. Значит, первое больше второго.

№6.

6. Докажите, что

$$\sum_{j=0}^{n} j\binom{n}{j} = n2^{n-1}.$$

Решение. Посчитаем двумя способами количество слов длины n в алфавите $\{N, C, H\}$, содержащих ровно одну букву H. Для краткости будем называть такие слова «отрядами» длины n.

1й способ. Получаем отряд в два шага. На первом шаге выбираем одно из 2^{n-1} слов длины $n-1$ в алфавите $\{N, C\}$, на втором — ставим букву H на один из n промежутков между буквами выбранного слова (позиции перед всеми буквами и после всех букв также удобно называть промежутками). Получаем $n2^{n-1}$, т.е. правую часть доказываемого равенства.

2й способ. Получаем отряд в три шага. На первом шаге выбираем число j от 1 до n. На втором шаге выбираем одно из $\binom{n}{j}$ слов длины n в алфавите $\{N, \boxed{CH}\}$, содержащее j символов $\boxed{CH}$. На третьем шаге в этом слове выбираем один из символов $\boxed{CH}$ (j способов выбрать) и меняем его на H. Остальные символы $\boxed{CH}$ заменяем на C.

По формуле суммы количество отрядов равно

$$\sum_{j=1}^{n} j\binom{n}{j}.$$

Эта сумма отличается от левой части доказываемого равенства на единственное слагаемое с $j = 0$, то есть на $0 \cdot \binom{n}{0} = 0$.

Итак, и левая, и правая части равенства равны количеству отрядов длины n. Значит, равенство верно. □

№7.

7. Докажите, что

$$\binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \dots + \binom{n}{k} = \sum_{j=0}^{n} \binom{j}{k} = \binom{n+1}{k+1}.$$

(Желательно найти комбинаторное доказательство.)

Решение. Посчитаем двумя способами количество возрастающих последовательностей длины $k+1$, состоящих из целых чисел из промежутка от 1 до $n+1$.

1й способ. Это количество равно количеству двоичных слов длины $n+1$, в которых $k+1$ единица, то есть $\binom{n+1}{k+1}$. Действительно, последовательности $a_1 < a_2 < \dots < a_{k+1}$ указанного вида сопоставляем слово, в котором на позициях с номерами $a_1, a_2, \dots, a_{k+1}$ стоят единицы, а на остальных позициях стоят нули. Соответствие взаимно однозначное: позиции единиц в слове однозначно восстанавливают последовательность.

2й способ. Выберем последовательность указанного вида в два шага. На первом выбираем максимальный элемент последовательности, обозначим его $j+1$. На втором шаге выбираем остальные члены последовательности. Они принадлежат промежутку от 1 до j. Аналогично первому способу подсчёта убеждаемся, что вариантов выбрать младшие k членов последовательности ровно $\binom{j}{k}$ штук. Получаем левую часть равенства.

Итак, и левая, и правая части равенства равны количеству элементов в некотором множестве. Значит, равенство верно. □

№8.

$\sum\limits_{0 \le k \le \frac{n+1}{2}} C_{n-k+1}^{k} - F_{n+1}$. F_{n+1} - число путей длины n из 0 и 1, в которых нет двух соседних нулей (дз 3.6). Число нулей в пути - k, $0 \le k \le \frac{n+1}{2}$. При фиксированном $1 \le k$, для всех 0, кроме последнего, следующее число, - 1. Вычеркнем эти 1, остается n-k+1 членов. среди которых k нулей. Таких путей (верхнее сочетание)