

Дискретная математика №13

Сармин Павел

09.12.2020

1 Значит у b нет простых множителей, которые делят a . Аналогично с c . Значит и у произведения b и c нет простых множителей, которые делят a .

2 $74x + 47y = 2900$

$$74x + 47y = 1$$

$$74 = 1 * 47 + 27$$

$$47 = 27 * 1 + 20$$

$$27 = 20 * 1 + 7$$

$$20 = 7 * 2 + 6$$

$$7 = 6 * 1 + 1$$

$$1 = 7 - 6 = 7 - 20 + 2 * 7 = 3 * 7 - 20 = 3 * 27 - 3 * 20 - 2 = 3 * 27 - 4 * 20 =$$

$$3 * 27 - 4 * 47 + 4 * 27 = 7 * 27 - 4 * 47 = 7 * 74 - 7 * 47 - 4 * 47 = 7 * 74 - 11 * 47$$

$$\text{Общее решение: } 74(7 * 2900 + 47k) + 47(-11 * 2900 - 74k)$$

Возьмем $k = -431$. Частное решение с таким k : $74 * 43 + 47 * (-6)$. Т.е. $x = 43, y = -6$.

Теперь возьмем $k = -432$. Частное решение с таким k : $74 * (-4) + 47 * 68$. Т.е. $x = -4, y = 68$. Значит не найдется такого k при котором и x и y оба положительные.

3 Представим наше число в виде $2k$, где k - нечетное число, которое мы можем разложить на простые делители. $k = \rho_1 \rho_2 \dots \rho_n$ Тогда у нас всего n нечетных делителей. И еще мы каждый делитель можем домножить на 2 и получить четный делитель.

4 $3^{\varphi(10^4)} - 1 \equiv 0(10^4)$. Значит есть такое число и оно равно $3^{\varphi(10^4)}$

5 Разложим наше число на множители: $(p-1)(p+1)$. Одно из них точно делится на 3. Одно из них делится на 4. И оба делятся на 2. Следовательно их произведение делится на $8 * 3 = 24$

6 $2^{n!} \equiv 1 \pmod{n}$. Т.к. $\varphi(n) \mid n!$, то мы можем записать наше тождество как $(2^k)^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$. Это верно т.к. $\text{НОД}(2^k, n) = 1$. Значит $(2^k)^{\varphi(n)} - 1 \equiv 0 \pmod{n}$

7 Разобьем наши числа на пары такие, что сумма в числителе будет давать p . Тогда у нас получится сумма вида $\frac{p}{p-1} + \frac{p}{2(p-2)} + \dots$. Вынесем p . Получим $p(\frac{1}{p-1} + \frac{1}{2(p-2)} + \dots)$. Соберем числа в нашей сумме. В знаменателе будет какое то число, которое точно не делится на p . Тогда у нас в числителе будет pk , где k - сумма в числителе после сложения. Тогда число делится на p

8 Число вида x^{10} по малой теореме ферма либо делится на 11, либо нет и имеет остаток 1. Тогда для того, чтобы сумма у нас сумма наших чисел делилась на 11, нужно чтобы каждое делилось на 11 без остатка. Тогда произведение 6 чисел, каждое из которых делится на 11, значит произведение делится на 11^6