Лекция 7

1. Предел функции.

Определение 1 (предела функции по Коши)**.** Пусть функция f определена на некотором множестве $D \subset \mathbb{R}$ и пусть a предельная для D точка. Число A называтся **пределом** функции f в точке a (по множеству D), если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что $|f(x) - A| < \varepsilon$ для каждого $x \in D \cap B'_\delta(a)$. Используют обозначения $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ или $f(x) \to A$ при $x \to a$.

С помощью кванторов определние можно записать так: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, если

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0 \colon \forall x \in D \cap B'_\delta(a)\ |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Пример 2. Пусть $f(x) = x^2$, тогда $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 1$. Действительно, при $|x-1| < \delta$ выполнено $|f(x)-1| = |x+1||x-1| < (\delta+2)\delta$. Поэтому при $\delta := \min\{1, \varepsilon/3\}$ выполнено $|f(x)-1| < \varepsilon$ при каждом x, для которого $|x-1| < \delta$.

Если множество D не ограничено сверху (снизу), то можно определить предел функции в «точке» $+\infty$ $(-\infty)$. Для этого по определению будем считать, что $B'_\varepsilon(+\infty) := (\varepsilon^{-1}, +\infty)$ и $B'_\varepsilon(-\infty) := (-\infty, -\varepsilon^{-1})$.

Можно также дать «конкурирующее» определение:

Определение 3 (предела функции по Гейне)**.** Пусть функция f определена на некотором множестве $D \subset \mathbb{R}$ и пусть a предельная для D точка. Число A называтся **пределом** функции f в точке a (по множеству D), если для каждой последовательности точек $x_n \in D \setminus \{a\}$, $x_n \to a$, выполнено $f(x_n) \to A$ при $n \to \infty$.

Покажем, что два «конкурирующих» определения дают одно и то же.

Теорема 4. *Определения по Коши и по Гейне равносильны.*

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ в смысле Коши. Рассмотрим последовательность точек $x_n \in D \setminus \{a\}$, сходящуюся к точке a. Для каждого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$, для которого $|f(x) - A| < \varepsilon$ при $x \in D \cap B'_\delta(a)$. Найдется номер N, для которого $x_n \in B_\delta(a)$ при $n > N$. Т.к. при $n > N$ точки $x_n \in D \setminus \{a\}$ и $x_n \in B_\delta(a)$, то при $n > N$ выполнено $|f(x_n) - A| < \varepsilon$. Это и означает, что $f(x_n) \to A$ при $n \to \infty$. Таким образом, число A является пределом функции f в точке a в смысле Гейне.

Пусть число A не является пределом функции f в точке a в смысле Коши. Это означает, что нашлось такое $\varepsilon > 0$, что для каждого $\delta > 0$ есть точка $x_\delta \in D \cap B'_\delta(a)$, для которой $|f(x_\delta) - A| \geq \varepsilon$. Для последовательности точек $x_{1/n} \in D \setminus \{a\}$ выполнено $x_{1/n} \to a$, но последовательность точек $f(x_{1/n})$ не сходится к A. Таким образом, число A не является пределом функции f в точке a в смысле Гейне. $\square$

Сформулируем теперь основные свойства предела функции.

Теорема 5. *Пусть функции f, g, h определены на некотором множестве $D \subset \mathbb{R}$ и пусть a предельная для D точка. Тогда*

1) *если* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ *и* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = B$, *то* $A = B$;
2) *если* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ *и* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$, *то* $\lim\limits_{x\to a}(\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha A + \beta B \ \ \forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$;
3) *если* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ *и* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$, *то* $\lim\limits_{x\to a}(f(x) \cdot g(x)) = A \cdot B$;
4) *если* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B \neq 0$ *и* $g(x) \neq 0$ *при* $x \in D$, *то* $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$;
5) *если* $\exists \varepsilon > 0 \colon$ $f(x) \leq g(x)$ *при* $x \in D \cap B'_\varepsilon(a)$ *и* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$, *то* $A \leq B$;

6) *если* $\exists\varepsilon > 0$: $f(x) \le h(x) \le g(x)$ *при* $x \in D \cap B'_\varepsilon(a)$ *и* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = A$, *то* $\lim\limits_{x\to a} h(x) = A$;

7) *если* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, *то найдутся такие* $\delta > 0$ *и* $C > 0$, *что* $|f(x)| \le C$ *при каждом* $x \in D \cap B'_\delta(a)$;

8) *если* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \neq 0$, *то найдется такое* $\delta > 0$, *что* $|f(x)| > \frac{|A|}{2}$ *при* $x \in D \cap B'_\delta(a)$.

Доказательство. Свойства 1) − 6) следуют из аналогичных свойств для предела последовательности и определния предла функции по Гейне.

7) Найдется такое $\delta > 0$, что $|f(x) - A| < 1$ при $x \in D \cap B'_\delta(a)$. Таким образом, при $x \in D \cap B'_\delta(a)$ выполнено $|f(x)| < 1 + |A|$.

8) Найдется такое $\delta > 0$, что $|f(x) - A| < \frac{|A|}{2}$ при $x \in D \cap B'_\delta(a)$. Таким образом, при $x \in D \cap B'_\delta(a)$ выполнено $|f(x)| > \frac{|A|}{2}$. □

Первый замечательный предел:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Действительно, при $x \in (0, \pi/2)$, сравнивая площади сектора с площадами двух треугольников, получаем

$$\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sin x \le \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot x \le \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \operatorname{tg} x,$$

откуда, в силу четности, при $x \in (-\pi/2, \pi/2)$, $x \neq 0$, выполнено

$$\cos x \le \frac{\sin x}{x} \le 1.$$

Утверждение теперь следует из теоремы о пределе зажатой функции.

Второй замечательный предел:

$$\lim_{x\to+\infty} \Big(1 + \frac{1}{x}\Big)^x = e.$$

Пусть $f(x) := \big(1 + \frac{1}{[x]+1}\big)^{[x]}$ и $g(x) := \big(1 + \frac{1}{[x]}\big)^{[x]+1}$. Тогда $f(x) \le \big(1 + \frac{1}{x}\big)^x \le g(x)$. Кроме того, т.к. $\lim\limits_{n\to+\infty} \big(1 + \frac{1}{n+1}\big)^n = \lim\limits_{n\to+\infty} \big(1 + \frac{1}{n}\big)^{n+1} = e$, то и $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = e$. Утверждение теперь следует из теоремы о пределе зажатой функции.

2. Критерий Коши.

Теорема 6 (Критерий Коши)**.** *Пусть* $f\colon D \to \mathbb{R}$ *и* a *— предельная точка* D. *Предел* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ *существует тогда и только тогда, когда для каждого* $\varepsilon > 0$ *найдется такое* $\delta > 0$, *что для каждых* $x, y \in B'_\delta(a) \cap D$ *выполнено* $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Доказательство. Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, то для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для произвольной точки $x \in B'_\delta(a) \cap D$ выполнено $|f(x) - A| < \varepsilon/2$. Тогда для произвольных точек $x, y \in B'_\delta(a) \cap D$ выполнено $|f(x) - f(y)| \le |f(x) - A| + |A - f(y)| < \varepsilon$.

Предположим, что выполнено условие Коши. Тогда для произвольной последовательности точек $x_n \in D \setminus \{a\}$, $x_n \to a$, последовательность $\{f(x_n)\}$ является фундаментальной, а значит сходится. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$. Если есть другая последовательность точек $y_n \in D \setminus \{a\}$, $y_n \to a$, то рассмотрим новую последовательность $x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots \subset D \setminus \{a\}$. Эта последовательность также сходится к a, поэтому последовательность образов $f(x_1), f(y_1), f(x_2), f(y_2), \ldots$ снова оказывается фундаментальной, а потому сходится.

В силу того, что предел подпоследовательности сходящейся последовательности совпадает с пределом всей последовательности, получаем, что $\lim\limits_{n\to\infty} f(y_n) = A$. Таким образом, доказано существование предела по Гейне. $\square$