Лекция 10

1. Непрерывность обратной функции.

На предыдущей лекции была доказана следующая теорема.

Теорема 1 (критерий непрерывности монотонной функции).
Монотонная функция $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ непрерывна на $[a,b]$ тогда и только тогда, когда $f([a,b])$ — отрезок.

Теорема 2 (теорема об обратной фцнуции). *Пусть f непрерывна и строго монотонна на $[a,b]$ (т.е. f монотонна и $f(x) \neq f(y)$ при $x \neq y$). Тогда f — биекция между отрезками $I = [a,b]$ и J с концами $f(a)$ и $f(b)$ и f^{-1} непрерывна и строго монотонна на J.*

Доказательство. Строгая монотонность означает, что f инъективна, а из предыдущей теоремы следует, что образ $I = [a,b]$, это отрезок J с концами $f(a)$ и $f(b)$. Значит f осуществляет биекцию отрезков I и J, поэтому корректно определена обратная функция $f^{-1}\colon J \to I$.

Без ограничения общности считаем, что f не убывает. Если $f(x_1) < f(x_2)$, то $x_1 < x_2$, т.к. в противном случае $x_1 \geq x_2$ и $f(x_1) \geq f(x_2)$. Поэтому f^{-1} — строго монотонная функция. Кроме того $f^{-1}(J) = I$ — отрезок, что по предыдущей теореме гарантирует непрерывность f. □

При помощи приведенной теоремы обосновывается существование и непрерывность функций $\sqrt[n]{x}$, $\mathrm{arctg} x$, и т.д.

Пример 3. Рассмотрим функцию $f(x) = \mathrm{tg}\, x$ на интервале $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Она строго возрастает на данном интервале и непрерывна. Поэтому образ отрезка $[-\frac{\pi}{2} + \frac{1}{n}, \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n}]$ есть отрезок $[\mathrm{tg}(-\frac{\pi}{2} + \frac{1}{n}), \mathrm{tg}(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{n})]$, на котором существует непрерывная строго монотонная обратная функция f_n^{-1}. Эти функции согласованы, т.е. $f_{n+1}^{-1}(x) = f_n^{-1}(x)$ для каждой точки $x \in [\mathrm{tg}(-\frac{\pi}{2} + \frac{1}{n}), \mathrm{tg}(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{n})]$, а $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} [\mathrm{tg}(-\frac{\pi}{2} + \frac{1}{n}), \mathrm{tg}(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{n})] = \mathbb{R}$. Тем самым, построена обратная функция f^{-1} на $\mathbb{R}$, которую мы обозначаем $\mathrm{arctg} x$.

2. Построение показательной функции.

Пусть $a > 1$. Будем считать известным из школьного курса, что для рациональных x значение a^x корректно определно и выполнены свойства

$a^0 = 1, a^{x+y} = a^x \cdot a^y, x < y \Rightarrow a^x < a^y$

для рациональных x и y.

Лемма 4. *Пусть $N \in \mathbb{N}$. Тогда найдется такое число $C(N)$, что для всех $x, y \in \mathbb{Q}$, $x, y \leq N$, выполнено*

$$|a^x - a^y| \leq C(N)|x - y|.$$

Доказательство. Предположим, что $x < y$. Если $y - x \geq 1$, то

$$a^y - a^x \leq a^y \leq a^N \leq a^N|y - x|.$$

Если $y - x < 1$, то найдется натурально число n, для которого $\frac{1}{n+1} \leq y - x < \frac{1}{n}$. Тогда, по неравенству Бернуллу,

$$a^y - a^x = a^x(a^{y-x} - 1) \leq a^N(a^{1/n} - 1) \leq a^N(a-1)\frac{1}{n} \leq 2a^N(a-1)\frac{1}{n+1} \leq 2a^N(a-1)(y-x).$$

Таким образом, $C(N) = \max\{a^N, 2a^N(a-1)\}$. □

Теорема 5. *Пусть $a > 1$. Существует единственная непрерывная функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, совпадающая с $x \mapsto a^x$ при $x \in \mathbb{Q}$.*

Доказательство. Рассмотрим точку $x \in \mathbb{R}$. Пусть $x_n \to x$, $x_n \in \mathbb{Q}$, (такая последовательность всегда существует, например для $x = \pm a_0.a_1a_2a_3\dots a_m\dots$ можно взять $x_n := \pm a_0.a_1a_2\dots a_n$). Найдется число $N \in \mathbb{N}$, для которого $x_n \le N$ при каждом n. В силу доказанной в предыдущей лемме оценки, последовательность $\{a^{x_n}\}$ фундаментальна, а значит имеет предел, который мы обозначим $f(x)$. Пусть $y_n \to x$, $y_n \in \mathbb{Q}$, некоторая другая последовательность. Тогда для нее найдется число N_1, для которого $y_n \le N_1$ при каждом n. Тогда для $N_2 = \max\{N, N_1\}$ выполнено

$$|a^{x_n} - a^{y_n}| \le C(N_2)|x_n - y_n|,$$

откуда получаем, что $a^{y_n} \to f(x)$, что означает корректность определения f.

Рассмотрим теперь две точки x, y. Пусть $N \in \mathbb{N}$ и $x \le N$, $y \le N$. Пусть $x_n \to x$, $x_n \in \mathbb{Q}$, $x_n \le N+1$, и $y_n \to y$, $y_n \in \mathbb{Q}$, $y_n \le N+1$. Тогда, переходя к пределу в неравенстве, получаем

$$|f(x) - f(y)| \le C(N+1)|x-y|,$$

что влечет непрерывность f. Действительно, если $x_n \to x$ (не обязательно рациональные), то найдется $N \in \mathbb{N}$, для которого $x_n \le N$, $x \le N$. Из неравенства выше получаем, что $f(x_n) \to f(x)$.

Пусть f_1 — какая-то непрерывная функция, совпадающая с $x \mapsto a^x$ при $x \in \mathbb{Q}$. Пусть $x_n \to x$, $x_n \in \mathbb{Q}$. Тогда $f(x_n) = f_1(x_n) = a^{x_n}$ и $f(x_n) \to f(x)$, $f_1(x_n) \to f_1(x)$, что и дает совпадение $f(x)$ и $f_1(x)$. □

Построенное продолжение $f(x)$ будем также обозначать a^x.

Следствие 6. *Для построенной функции a^x выполнены следующие свойства:*
$a^{x+y} = a^x \cdot a^y$ *и* $x < y \Rightarrow a^x < a^y$.

Доказательство. Пусть $x_n \to x, y_n \to y$, $x_n, y_n \in \mathbb{Q}$. Тогда

$$a^{x+y} = \lim_{n\to\infty} a^{x_n+y_n} = \lim_{n\to\infty} a^{x_n} \cdot a^{y_n} = a^x \cdot a^y.$$

Теперь для проверки второго свойства достаточно убедиться, что для $x > 0$ выполнено $a^x > 1$. Пусть $x_n \to x$, $x_n \in \mathbb{Q}$. Найдется номер n_0, начиная с которого $x_n > \frac{x}{2} > 0$. Пусть $q \in \mathbb{Q}$, $q \in (0, \frac{x}{2})$. Тогда $a^x = \lim\limits_{n\to\infty} a^{x_n} \ge a^q > a^0 = 1$. □

По теореме об обратной функции корректно определна непрерывная строго монотонная функция $\log_a\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}$.

3. $o - O$ символика

Определение 7. Пусть f и g определены на множестве D и a предельная для D точка. Говорят, f **бесконечно малая по сравнению с** g при $x \to a$ (по множеству D), если $f(x) = h(x)g(x)$ и $\lim\limits_{x\to a} h(x) = 0$. Используется обозначение: $f = \bar{o}(g)$ при $x \to a$ (при этом говорят, что f есть о малое от g).

В частности, $f = \bar{o}(1)$ при $x \to a$ означает, что $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$. Таким образом, введенное обозначение $f = \bar{o}(g)$ равносильно тому, что $f = \bar{o}(1) \cdot g$.

Пример 8. Пусть $m > n$, тогда
1) $x^m = \bar{o}(x^n)$ при $x \to 0$, т.к. $x^m = x^{m-n} \cdot x^n$;
2) $x^n = \bar{o}(x^m)$ при $x \to \infty$, т.к. $x^n = x^{-(m-n)} \cdot x^m$.

Пример 9. Например из первого замечательного предела следует, что $\sin x = x + \bar{o}(x)$.

На семинарах будет обосновано, что $\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \bar{o}(x^2)$, $\ln(1+x) = x + \bar{o}(x)$, $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \bar{o}(x)$, $e^x = 1 + x + \bar{o}(x)$ при $x \to 0$.

Пример 10. Подобная эквивалентность часто используется для вычисления пределов.
$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{\sin x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-\frac{1}{2}x^2+\bar{o}(x^2))}{x^2+\bar{o}(x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^2+\bar{o}(x^2)+\bar{o}(-\frac{1}{2}x^2+\bar{o}(x^2))}{x^2+\bar{o}(x^2)}.$$
Заметим, что $\bar{o}(-\frac{1}{2}x^2+\bar{o}(x^2))=\bar{o}(1)\cdot(-\frac{1}{2}x^2+\bar{o}(x^2))=\bar{o}(1)\cdot(-\frac{1}{2}+\bar{o}(1))\cdot x^2=\bar{o}(1)\cdot x^2=\bar{o}(x^2)$. Кроме того, $\bar{o}(x^2)+\bar{o}(x^2)=(\bar{o}(1)+\bar{o}(1))\cdot x^2=\bar{o}(1)\cdot x^2=\bar{o}(x^2)$. Тем самым, нам осталось вычислить
$$\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^2+\bar{o}(x^2)}{x^2+\bar{o}(x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}+\bar{o}(1)}{1+\bar{o}(1)}=-\frac{1}{2}.$$