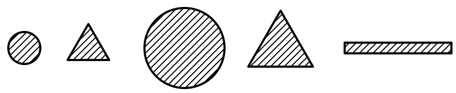
Определения. Элементы x, y порядка $(X,<)$ *соседние*, элемент x *непосредственно предшествует* y, элемент y *непосредственно следует за* x, если $x<y$ и нет такого z, что $x<z<y$.

Элемент a порядка P называется *наименьшим*, если $a \leqslant x$ для всех $x \in P$. Элемент a порядка P называется *минимальным*, если не существует такого $x \in P$, что $x < a$. Аналогично определяются наибольшие и максимальные элементы.

Отрезком $[a;b]$ порядка называется множество $\{x : a \leqslant x \leqslant b\}$.

Порядок *линейный*, если любые два элемента в нём сравнимы. *Цепь* — подмножество порядка, которое образует линейный порядок. *Антицепь* — подмножество порядка, в котором элементы попарно несравнимы.

1. На рисунке показаны пять фигур.



Введём на этом множестве из 5 элементов отношение порядка, считая, что $X \leqslant Y$, если фигура X помещается внутрь фигуры Y. Нарисуйте граф отношения непосредственного следования для этого порядка.

2. Рассмотрим два единичных квадрата на координатной плоскости $\mathbb{R}^2$:

$$P = \{(x,y) : 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1\}, \qquad Q = \{(x,y) : |x| + |y| \leqslant 1\}$$

и порядки на них, индуцированные покоординатным порядком на $\mathbb{R}^2$.

Найдите все минимальные элементы в этих порядках. Есть ли среди них наименьшие?

3. Сколько есть порядков на n-элементном множестве, в которых ровно одна пара элементов несравнима?

4. Найдите (с точностью до изоморфизма) все линейные порядки, в которых все отрезки конечны.

5. Лексикографический порядок на словах в алфавите $\{0,\dots,\ell\}$: если слово u является началом слова w, то $u \leqslant w$. Если ни одно из слов u, v не является началом другого, то найдётся позиция, в которой эти слова различаются. Тогда меньше то слово, в котором на этой позиции меньшее число.

а) Найдите в лексикографическом порядке на двоичных словах все соседние пары (u,v).

б) Существует ли бесконечная убывающая цепь $u_0 > u_1 > \dots$ в лексикографическом порядке на двоичных словах?

в) Изоморфны ли лексикографические порядки на двоичных и на троичных словах?

6. Докажите, что линейные порядки $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ и $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ неизоморфны. (Упорядочение пар лексикографическое.)

7. Докажите, что в любом бесконечном порядке есть бесконечная цепь или есть бесконечная антицепь.

8. Множество $\mathbb{N}^d$ упорядочено покоординатно. Есть ли в этом порядке бесконечная антицепь?

Дискретная математика **Основной поток**

Домашнее задание 11

Напоминаем, что ответы на вопросы должны быть обоснованы.

1. Сколько пар несравнимых элементов может быть в частичном порядке на четырёх элементах?

2. Приведите пример порядка на 6 элементах, в котором есть 9 соседних пар. (Определение см. в лекции или на предыдущей странице.)

3. Рассмотрим два порядка: делители числа 42 (положительные целые числа, на которые 42 делится нацело) с отношением делимости ($x \mid y$ по определению означает, что y делится на x нацело) и подмножества множества $\{1, 2, 3\}$ с порядком по включению $x \subseteq y$. Изоморфны ли эти порядки?

4. Докажите, что линейные порядки $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ неизоморфны. (Упорядочение пар лексикографическое.)

5. Произведение цепей $[0, \ldots, n-1] \times [0, \ldots, n-1]$ упорядочено покоординатно. Найдите размер максимальной антицепи в этом порядке.

6. Докажите, что в любом конечном порядке на $mn + 1$ элементах есть либо цепь размера $n + 1$, либо антицепь размера $m + 1$.