Лекция 13

1. Правило Лопиталя.

Теорема 1 (праило Лопиталя)**.** *Пусть f и g дифференцируемы на интервале (a,b) и $g'(x)\neq 0$ в каждой точке $x\in(a,b)$. Предположим, что $\lim\limits_{x\to b-0} f(x)=\lim\limits_{x\to b-0} g(x)=0$ и существует предел $\lim\limits_{x\to b-0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$. Тогда существует предел $\lim\limits_{x\to b-0}\frac{f(x)}{g(x)}=A$.*

Доказательство. Пусть $x,y\in(a,b)$, $x<y$. По теореме Лагранжа $g(x)-g(y)\neq 0$. Тогда по теорема Коши $\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$, $c\in(x,y)$. Перепишем это соотношение в следующем виде: $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}(1-\frac{g(y)}{g(x)})+\frac{f(y)}{g(x)}$. По условию для каждого $\varepsilon>0$ найдется такое $\delta>0$, что для произвольных точек x,y, $b-\delta<x<y<b$ для соответствующей точки c выполнено $|\frac{f'(c)}{g'(c)}-A|<\varepsilon$. Таким образом, для произвольной точки $x\in(b-\delta,b)$ и для произвольной точки $y\in(x,b)$ выполнено

$$\Big|\frac{f(x)}{g(x)}-A\Big|=\Big|\frac{f'(c)}{g'(c)}-A-\frac{f'(c)}{g'(c)}\frac{g(y)}{g(x)}+\frac{f(y)}{g(x)}\Big|\le\Big|\frac{f'(c)}{g'(c)}-A\Big|+\Big|\frac{f'(c)}{g'(c)}\Big|\cdot\Big|\frac{g(y)}{g(x)}\Big|+\Big|\frac{f(y)}{g(x)}\Big|$$
$$\le\varepsilon+(|A|+\varepsilon)\Big|\frac{g(y)}{g(x)}\Big|+\Big|\frac{f(y)}{g(x)}\Big|.$$

Устремляя $y\to b-0$ и переходя к пределу в неравенстве, получаем, что для произвольного $x\in(b-\delta,b)$ выполнено $|\frac{f(x)}{g(x)}-A|\le\varepsilon$. $\square$

Аналогично обосновывается следующий вариант правила Лопиталя.

Теорема 2 (праило Лопиталя)**.** *Пусть f и g дифференцируемы на интервале (a,b) и $g'(x)\neq 0$ в каждой точке $x\in(a,b)$. Предположим, что $\lim\limits_{x\to b-0} g(x)=\infty$ и существует предел $\lim\limits_{x\to b-0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$. Тогда существует предел $\lim\limits_{x\to b-0}\frac{f(x)}{g(x)}=A$.*

Доказательство. Пусть $x,y\in(a,b)$, $x>y$. По теореме Лагранжа $g(x)-g(y)\neq 0$. Тогда по теорема Коши $\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$, $c\in(y,x)$. Перепишем это соотношение в следующем виде: $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}(1-\frac{g(y)}{g(x)})+\frac{f(y)}{g(x)}$. По условию для каждого $\varepsilon>0$ найдется такое $\delta>0$, что для произвольных точек x,y, $b-\delta<y<x<b$ для соответствующей точки c выполнено $|\frac{f'(c)}{g'(c)}-A|<\varepsilon$. Таким образом, для произвольной точки $y\in(b-\delta,b)$ и для произвольной точки $x\in(y,b)$ выполнено

$$\Big|\frac{f(x)}{g(x)}-A\Big|=\Big|\frac{f'(c)}{g'(c)}-A-\frac{f'(c)}{g'(c)}\frac{g(y)}{g(x)}+\frac{f(y)}{g(x)}\Big|\le\Big|\frac{f'(c)}{g'(c)}-A\Big|+\Big|\frac{f'(c)}{g'(c)}\Big|\cdot\Big|\frac{g(y)}{g(x)}\Big|+\Big|\frac{f(y)}{g(x)}\Big|$$
$$\le\varepsilon+(|A|+\varepsilon)\Big|\frac{g(y)}{g(x)}\Big|+\Big|\frac{f(y)}{g(x)}\Big|.$$

Пусть теперь y — фиксировано. Тогда найдется такое δ_1, что для произвольного $x\in(b-\delta_1,b)$ выполнено $|\frac{g(y)}{g(x)}|<\varepsilon$ и $|\frac{f(y)}{g(x)}|<\varepsilon$. Тогда при $x\in(b-\delta_1,b)$ выполнено неравенство $|\frac{f(x)}{g(x)}-A|\le\varepsilon(2+|A|+\varepsilon)$. $\square$

2. Производные старших порядков.

Определение 3. Пусть функция f определена в некоторой окрестности точки a. **Производная n-го порядка** функции f в точке a определяется индуктивно: предположим, что проиводная $(n-1)$-го порядка $f^{(n-1)}$ определена в некоторой окрестности точки a и сама является дифференцируемой в точке a функцией, тогда по определению производная n-го порядка $f^{(n)}(a):=(f^{(n-1)})'(a)$.

Обычно саму функцию считают ее производной «нулевого порядка», т.е. используют обозначение $f^{(0)} = f$.

Предложение 4 (обобщенное правило Лейбница)**.** *Пусть функции f и g дифференцируемы n раз в точке a. Тогда функция $f \cdot g$ также дифференцируема n раз в точке a и $(fg)^{(n)}(a) = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)}(a) g^{(n-k)}(a)$.*

Доказательство. Доказательство проведем по индукции. Для $n = 1$ формула дает обычное правило Лейбница для производной произведения. Обсудим индуктивный переход.

$$(fg)^{(n+1)} = \Big(\sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)} g^{(n-k)}\Big)' = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k+1)} g^{(n-k)} + \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)} g^{(n+1-k)}$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} C_n^{k-1} f^{(k)} g^{(n+1-k)} + \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)} g^{(n+1-k)} = f^{(n+1)} g^{(0)} + \sum_{k=1}^{n} (C_n^{k-1} + C_n^k) f^{(k)} g^{(n+1-k)} + f^{(0)} g^{(n+1)}$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k f^{(k)} g^{(n+1-k)},$$

где было использовано равенство $C_n^{k-1} + C_n^k = C_{n+1}^k$. □

3. Формула Тейлора и ряд Тейлора.

Определение 5. Пусть f дифференциркема n раз в точке a. **Многочленом Тейлора** порядка n функции f называется многочлен $T_n(x) = T_n(x; f, a) := \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$.

Заметим, что T_n — многочлен степени n, у которого все производные до порядка n в точке a совпадают с производными функции f в этой точке.

Теорема 6. *Пусть функция f дифференциркема n раз в точке a. Тогда*

$$f(x) = T_n(x) + \bar{o}\big((x-a)^n\big)$$

при $x \to a$.

Доказательство. Применим правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k}{(x-a)^n} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x) - \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{(k-1)!}(x-a)^{k-1}}{n(x-a)^{n-1}}$$

$$= \ldots = \lim_{x\to a} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a) - f^{(n)}(a)(x-a)}{n!(x-a)} = 0,$$

что следует из определения дифференцируемости функции $f^{(n-1)}$ в точке a. □

С помощью предыдущей теоремы обосновываются равенства

1) $e^x = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \bar{o}(x^n)$ при $x \to 0$;

2) $\sin x = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \bar{o}(x^{2n+2})$ при $x \to 0$;

3) $\cos x = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + \bar{o}(x^{2n+1})$ при $x \to 0$;

4) $\ln(1+x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} + \bar{o}(x^n)$ при $x \to 0$;

5) $(1+x)^\alpha = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{\alpha\cdot(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-k+1)}{k!} \cdot x^k + \bar{o}(x^n)$ при $x \to 0$.

Теорема 7. *Пусть функция f дифференцируема n раз в каждой точке отрезка с концами a и x и ее первые n производных являются непрерывными функциями на этом отрезке. Кроме того, пусть в каждой точке интервала с концами a и x функция f дифференцируема $(n+1)$ раз. Пусть g — произвольная непрерывная функция на отрезке с концами a и x, которая дифференцируема в каждой точке интервала с концами a и x, причем $g'(t) \neq 0$ в каждой точке t данного интервала. Тогда найдется точка c в интервале с концами a и x, для которой*

$$f - T_n(x; f, a) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!g'(c)}(g(x) - g(a))(x-c)^n.$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $G(t) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k$. Заметим, что

$$G'(t) = \sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k - \frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!}(x-t)^{(k-1)}\Big) + f'(t) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n.$$

По теореме Коши на интервале с концами a и x есть точка c, для которой

$$G(x) - G(a) = \frac{G'(c)}{g'(c)}(g(x) - g(a)).$$

Остается заметить, что $G(x) = f(x)$, $G(a) = T_n(x; f, a)$. □

Пусть $R_n(x; f, a) := f(x) - T_n(x; f, a)$.

Остаточный член в форме Коши. Если $g(t) = t - x$, то $g'(c) = 1$, $g(x) - g(a) = x - a$ и $R_n(x; f, a) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n(x-a)$.

Остаточный член в форме Лагранжа. Если $g(t) = (t-x)^{n+1}$, то $g'(c) = (n+1)(c-x)^n$, $g(x) - g(a) = -(a-x)^{n+1}$ и $R_n(x; f, a) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$.

Теорема 8. *Пусть f бесконечно дифференцируема на интервале $(a-r, a+r)$ (т.е. имеет в каждой точке этого интервала производные всех порядков). Предположим, что для некоторых чисел $C > 0$, $M > 0$ выполнено $|f^{(n)}(x)| \le CM^n$ для всех $x \in (a-r, a+r)$. Тогда $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ для каждой точки $x \in (a-r, a+r)$.*

Доказательство. Заметим, что

$$\Big|f(x) - \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\Big| = \Big|\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}\Big| \le \frac{C(rM)^{n+1}}{(n+1)!} \to 0$$

при $n \to +\infty$. □

Определение 9. Для бесконечно дифференцируемой функции f в точке a ее **рядом Тейлора** называется формальное выражение $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$.

Пример 10. Для функции $f(x) = e^x$ на каждом интервале $(-r, r)$ выполнено $|f^{(n)}(x)| = |e^x| \le e^r$. По предыдущей теореме $e^x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ для каждого $x \in \mathbb{R}$.

Аналогично можно обосновать равенства:
$\sin x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$ при $x \in \mathbb{R}$; $\cos x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$ при $x \in \mathbb{R}$.

Используя остаточный член в форме Коши, можно показать, что
$\ln(1+x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k}$ при $|x| < 1$; $(1+x)^\alpha = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha\cdot(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-k+1)}{k!} \cdot x^k$ при $|x| < 1$.

Замечание 11. Отметим, что бывают такие бесконечно дифференцируемые функции, что их ряд Тейлора в точке a сходится к значению функции только в точке a (т.е. не сходится к значению функции ни в какой окрестности точки a). Такой функцией например будет $f(x) = e^{-1/x^2}$ при $x \neq 0$ и $f(0) = 0$ $(a = 0)$.