Лекция 12

1. Производная сложной функции и производная обратной функции.

Предложение 1 (Производная сложной функции). *Пусть f дифференцируема в точке $g(a)$, а g дифференцируема в точке a. Тогда функция $f\circ g$ дифференцируема в точке a и $d(f\circ g)\big|_{x=a}= df\big|_{y=g(a)}\circ dg\big|_{x=a}$, т.е. $d(f\circ g)\big|_{x=a}(h) = df\big|_{y=g(a)}\big(dg\big|_{x=a}(h)\big)$. В частности, т.к. $df(q)\big|_{y=g(a)}= f'(g(a))q$ и $dg\big|_{x=a}(h) = g'(a)(h)$, то $(f\circ g)'(a)h = d(f\circ g)\big|_{x=a}(h) = f'(g(a))g'(a)h$ для каждого h и $(f\circ g)'(a) = f'(g(a))g'(a)$.*

Доказательство. Из определения дифференцируемости имеем $f(g(a) + q) = f(g(a)) + f'(g(a))q + \alpha(q)q$, причем $\lim\limits_{q\to 0}\alpha(q) = 0$. Будем счиатать, что $\alpha(0) := 0$ (т.е. доопределим функцию α своим пределом до непрерывной в нуле функции). Подставим в равенство выше $q = g(a + h) - g(a) = g'(a)h + \beta(h)h$, где $\lim\limits_{h\to 0}\beta(h) = 0$. Т.е.

$$f(g(a) + q) = f(g(a)) + f'(g(a))g'(a)h + \big(f'(g(a))\beta(h) + \alpha(g(a + h) - g(a))(g'(a) + \beta(h))\big)h.$$

Заметим, что $\lim\limits_{h\to 0}\big(f'(g(a))\beta(h)+\alpha(g(a+h)-g(a))(g'(a)+\beta(h))\big) = 0$, т.к. $g(a+h)-g(a) \to 0$ при $h \to 0$ в силу непрерывности дифференцируемой функции. □

Пример 2. $(a^x)' = (e^{x\ln a})' = (e^y)'\big|_{y=x\ln a}(x\ln a)' = e^{x\ln a}\ln a = (\ln a)a^x$.

Предложение 3. Заметим, что предыдущее утверждение можно переписать в таком виде: $d\big(f(g)\big)(h) = df(dg(h)) = f'(g)dg(h)$, т.е. $df(g) = f'(g)dg$ и в этом равенстве неважно, считаем мы g независимой переменной или функцией от другой независимой переменной. Это свойство называют **инвариантностью первого дифференциала**.

Предложение 4 (Производная обратной функции). *Пусть f — непрерывная и строго монотонная функция, отображающая интервал I на интервал J. Предположим, что f дифференцируема в точке $a \in I$ и $f'(a) \neq 0$. Тогда обратная функция $f^{-1}\colon J \to I$ дифференцируема в точке $f(a)$ и $df^{-1}\big|_{y=f(a)}= (df\big|_{x=a})^{-1}$, т.е. $(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$, $b = f(a)$.*

Доказательство.

$$\lim_{q\to 0}\frac{f^{-1}(f(a) + q) - f^{-1}(f(a))}{q} = \lim_{h\to 0}\frac{f^{-1}(f(a + h)) - f^{-1}(f(a))}{f(a + h) - f(a)} = \lim_{h\to 0}\frac{h}{f(a + h) - f(a)} = \frac{1}{f'(a)}.$$

□

Пример 5. Имеет место равенство $(\mathrm{arctg}x)' = \frac{1}{1+x^2}$. Действительно

$$(\mathrm{arctg}x)' = \frac{1}{\mathrm{tg}'(y)\big|_{y=\mathrm{arctg}x}} = \frac{1}{1 + \mathrm{tg}^2(\mathrm{arctg}x)} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Используя доказанные свойства и определение обосновывается следующая **таблица производных**:

1) $(const)' = 0$, 2) $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$, 3) $(a^x)' = a^x\ln a$, 4) $(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}$,
5) $(\sin x)' = \cos x$, 6) $(\cos x)' = -\sin x$, 7) $(\mathrm{tg}\, x)' = 1 + \mathrm{tg}^2\, x = \frac{1}{\cos^2 x}$,
8) $(\mathrm{ctg}\, x)' = -1 - \mathrm{ctg}^2\, x = -\frac{1}{\sin^2 x}$, 9) $(\arcsin x)' = -(\arccos x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,
10) $(\mathrm{arctg}x)' = -(\mathrm{arcctg}x)' = \frac{1}{1+x^2}$.

2. Основные теоремы дифференциального исчисления.

Определение 6. Пусть $f\colon D \to \mathbb{R}$. Точка $c \in D$ назывется точкой **локального максимума (минимума)**, если существует такое $\delta > 0$, что для каждой точки $x \in D\cap B_\delta(c)$ выполнено $f(x) \le f(c)$ ($f(x) \ge f(c)$ соответственно). Значение $f(c)$ назывется **локальным максимумом (минимумом)** функции f.

Определение 7. Если в определении выше для каждой точки $x \in D \cap B'_\delta(c)$ выполнено $f(x) < f(c)$ ($f(x) > f(c)$ соответстенно), то c называют **точкой строгого локального максимума (минимума)** функции f.

Определение 8. Точки локального максимума и минимума называют **точками локального экстремума**, а значения в них **локальными экстремумами** функции.

Теорема 9 (Ферма)**.** *Пусть $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ и $c \in (a,b)$ — точка локального экстремума. Если f дифференцируема в точке c, то $f'(c) = 0$.*

Доказательство. Пусть c — точка локального максимума. Тогда найдется окрестность $(c-\delta, c+\delta) \subset (a,b)$, для которой выражение $\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$ неотрицательно при $x \in (c-\delta, c)$ и неположительно при $x \in (c, c+\delta)$. Тогда, с одной стороны, выбирая последовательность $x_n = c - \frac{1}{n}$, получаем, что $f'(c) \geq 0$, а сдругой стороны, рассмотрев последовательность $y_n = c + \frac{1}{n}$, получаем, что $f'(c) \leq 0$. Таким образом, $f'(c) = 0$. □

Теорема 10 (Ролль)**.** *Пусть f непрерывна на $[a,b]$ и дифференцируема в каждой точке интервала (a,b). Если $f(a) = f(b)$, то найдется точка $c \in (a,b)$, для которой $f'(c) = 0$.*

Доказательство. В силу непрерывности функции f на отрезке $[a,b]$, на нем существуют точки m и M (глобального) минимума и максимума соответственно ($f(m) \leq f(x) \leq f(M)$ для каждой точки $x \in [a,b]$). Если $m, M \in \{a,b\}$, то f — постоянная функция. Если $m \in (a,b)$ ($M \in (a,b)$), то по теорема Ферма $f'(m) = 0$ ($f'(M) = 0$ соответственно). □

Теорема 11 (Лагранж)**.** *Пусть f непрерывна на $[a,b]$ и дифференцируема в каждой точке интервала (a,b). Тогда найдется такая точка $c \in (a,b)$, что выполнено соотношение $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$.*

Доказательство. Достаточно применить теорему Ролля к функции

$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

□

Следствие 12. *Пусть f дифференцируема в каждой точке интервала (a,b). Тогда f не убывает (не возрастает) на (a,b) тогда и только тогда, когда $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$ соответственно) для каждой точки $x \in (a,b)$. Кроме того, если $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$), то f строго возрастает (соответственно, убывает) на (a,b).*

Доказательство. Если f не убывает (не возрастает), то $\frac{f(x)-f(y)}{x-y}$ неотрицательно (неположительно) для произвольных $x, y \in (a,b)$. Отсюда следует, что и $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$ соответстенно), как предел разностных отношений выше.

В другую сторону, при $x > y$, по теореме Лагранжа $f(x) - f(y) = f'(\xi)(x-y)$ для некоторой точки $\xi \in (y, x)$, откуда следует утверждение. □

Следствие 13. *Если f дифференцируема в каждой точке интервала (a,b) и $f'(x) = 0$ в каждой точке $x \in (a,b)$, то f — постоянная на (a,b) функция.*

Теорема 14 (Коши)**.** *Пусть f и g непрерывны на $[a,b]$ и дифференцируемы в каждой точке интервала (a,b). Тогда найдется такая точка $c \in (a,b)$, что выполнено соотношение $(f(b)-f(a))g'(c) = f'(c)(g(b)-g(a))$.*

Доказательство. Применяем теорему Ролля к функции

$$\Phi(x) := (f(b)-f(a))g(x) - f(x)(g(b)-g(a)).$$

□

Теорема 15 (праило Лопиталя)**.** *Пусть f и g дифференцируемы на интервале (a,b) и $g'(x) \neq 0$ в каждой точке $x \in (a,b)$. Предположим, что $\lim\limits_{x\to b-0} f(x) = \lim\limits_{x\to b-0} g(x) = 0$ и существует предел $\lim\limits_{x\to b-0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$. Тогда существует предел $\lim\limits_{x\to b-0} \frac{f(x)}{g(x)} = A$.*

Теорема 16 (праило Лопиталя)**.** *Пусть f и g дифференцируемы на интервале (a,b) и $g'(x) \neq 0$ в каждой точке $x \in (a,b)$. Предположим, что $\lim\limits_{x\to b-0} g(x) = \infty$ и существует предел $\lim\limits_{x\to b-0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$. Тогда существует предел $\lim\limits_{x\to b-0} \frac{f(x)}{g(x)} = A$.*

Пример 17. 1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^n}{e^x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{nx^{n-1}}{e^x} = \ldots = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{n!}{e^x} = 0$.

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^n} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^{-1}}{nx^{n-1}} = 0$.