Лекция 8

1. Теорема Вейерштрасса.

Пусть $D_a^+ := D \cap (a, +\infty)$ и $D_a^- := D \cap (-\infty, a)$.

Определение 1. Пусть точка a — предельная для множества D_a^+ и существует предел функции f по множеству D_a^+ в точке a. Этот предел называют пределом справа функции f в точке a и обозначают $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$. Аналогично определяется предел слева, который обозначают $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$.

Теорема 2 (Вейерштрасс)**.** *Пусть f — не убывает и ограничена на множестве D, a — предельная точка множества D_a^-. Тогда существует предел слева*

$$\lim_{x\to a-0} f(x) = \sup\{f(x)\colon x \in D_a^-\}.$$

Пусть f — не убывает и ограничена на множестве D, a — предельная точка множества D_a^+. Тогда существует предел справа

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = \inf\{f(x)\colon x \in D_a^+\}.$$

Аналогичные утверждения с заменой inf *на* sup *справедливы и для невозрастающей функции.*

Доказательство. Пусть $M = \sup\{f(x)\colon x \in D_a^-\}$. Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такая точка $x_0 \in D_a^-$, что $M - \varepsilon < f(x_0)$. Т.к. f не убывает на D_a^-, то для каждого $x \in (x_0, a)$ выполнено $M - \varepsilon < f(x_0) \le f(x) \le M < M + \varepsilon$. Тогда, взяв $\delta := a - x_0$ получаем, что для каждого $x \in B'_\delta(a) \cap D_a^-$ выполнено $|f(x) - M| < \varepsilon$. □

2. Непрерывные функции.

Определение 3. Функция $f\colon D \to \mathbb{R}$ непрерывна (по множеству D) в точке $a \in D$, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для каждого $x \in D$, $|x - a| < \delta$, выполнено $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

С помощью кванторов данное утверждение записывается в виде

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\colon \forall x \in D \quad |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$

Определение 4. Точка $a \in D$ называется изолированной точкой множества D если для некоторого $\delta > 0$ выполнено $B'_\delta(a) \cap D = \emptyset$.

Ясно, что точка $a \in D$ может быть либо изолированной, либо предельной точкой множества D.

Предложение 5. *Пусть $f\colon D \to \mathbb{R}$, $a \in D$. Следующие утверждения равносильны:*

1) *функция f непрерывна в точке a (по множеству D);*

2) *для каждой последовательности точек $x_n \in D$, $x_n \to a$, выполнено $f(x_n) \to f(a)$;*

3) *либо точка a — изолированная точка множества D, либо a — предельная точка множества D и $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.*

Доказательство. Если точка a — изолированная, то для некоторого $\delta > 0$ выполнено $B'_\delta(a) \cap D = \emptyset$. Поэтому единственная точка $x \in D$, $|x - a| < \delta$, это точка a, а значит f всегда непрерывна в изолированной точке. Кроме того, если последовательность точек $x_n \in D$ сходится к изолированной точке a, то начиная с некоторого номера N выполнено $x_n = a$ при $n > N$.

Если a — предельная точка множества D, то 1) $\Rightarrow$ 2) обосновывается также, как в доказательстве эквивалентности опрделенией предела по Коши и по Гейне, 2) $\Rightarrow$ 3) следует из определения предела по Гейне, 3) $\Rightarrow$ 1) следует из определения предела по Коши и определения непрерывности. □

Следующие свойства непрерывных функций следуют из свойств предела.

Предложение 6. *Пусть функции f, g определены на некотором множестве $D \subset \mathbb{R}$ и непрерывны в некоторой точке $a \in D$. Тогда*

1) *$\alpha f + \beta g, f \cdot g$ — непрерывны в точке a;*
2) *если $g(x) \neq 0$ при $x \in D$, то f/g — непрерывна в точке a;*
3) *найдутся такие $\delta > 0$ и $C > 0$, что $|f(x)| \leq C$ при каждом $x \in D \cap B_\delta(a)$;*
4) *если $f(a) \neq 0$, то найдется такое $\delta > 0$, что $|f(x)| > \frac{|f(a)|}{2}$ при $x \in D \cap B_\delta(a)$.*

Предложение 7. *Пусть $f\colon D \to K \subset \mathbb{R}$ и $g\colon K \to \mathbb{R}$, причем f непрерывна в точке $a \in D$ по множеству D, а g непрерывна в точке $f(a)$ по множеству K. Тогда функция $g \circ f$ непрерывная в точке a по множеству D, где $g \circ f(x) := g(f(x))$.*

Доказательство. Пусть $x_n \in D$, $x_n \to a$. Тогда $f(x_n) \to f(a)$, $f(x_n) \in K$, и значит $g(f(x_n)) \to g(f(a))$. □

Определение 8. Точка $a \in D$ называется точкой разрыва функции $f\colon D \to \mathbb{R}$, если f не является непрерывной в точке a.

Из определения следует, что точка разрыва это такая предельная точка множества D, что предел $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ либо существует, но не совпадает с $f(a)$ (такую точку называют точкой **устранимого** разрыва), либо вообще не существует. Во втором случае принято рассматривать наличие односторонних пределов. Предположим, что точка a оказалась предельной для множеств $D_a^- = D \cap (-\infty, a)$ и $D_a^+ = D \cap (a, +\infty)$. Если пределы функции f в точке a по множествам D_a^- и D_a^+ существуют, но различны, то точка a называется точкой разрыва **первого** рода. Если же хотя бы один из односторонних пределов не существует, то точка a называется точкой разрыва **второго** рода.

Пример 9. *Пусть $f(x) = \sin \frac{1}{x}$. Тогда точка $x = 0$ — разрыв второго рода для функции f, заданной на всем множестве $\mathbb{R}$.*

Предложение 10. *Пусть f — монотонная на интервале (a, b) функция (т.е. f либо не убывает, либо не возрастает). Тогда f может иметь разрывы только первого рода на интервале (a, b).*

Доказательство. Не ограничивая общности, считаем, что f не убывает. Пусть $x_0 \in (a, b)$. По теореме Вейерштрасса

$$\lim_{x\to x_0 - 0} f(x) = \sup_{x < x_0} f(x) \leq f(x_0) \leq \inf_{x > x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x).$$

Т.е. для точки разрыва x_0 односторонние пределы существуют по теореме Вейерштрасса. □