

1. Известно, что a, b, c, d — положительные целые числа, $ab = cd$ и a делится на c . Докажите, что d делится на b .
2. Докажите, что число $a^3 - a$ делится на 3 при любом целом a .
3. Найдите остаток при делении
 - а) 100^{100} на 99;
 - б) $\binom{15}{8}$ на 13;
 - в) $20^2 + 21^2 + 22^2$ на 23;
 - г) $\binom{32}{3}$ на 33.
4. Сформулируйте и докажите признак делимости 11 в десятичной системе счисления.
5. Найдите наибольший общий делитель 238 и 39 с помощью алгоритма Евклида.
6. Решите сравнение $25x \equiv 1 \pmod{39}$ с помощью алгоритма Евклида.
7. Найдите НОД($3^{168} - 1, 3^{140} - 1$).
8. а) Какой может быть последняя цифра степени тройки в десятичной записи? б) Докажите, что предпоследняя цифра степени тройки всегда четна.

Домашнее задание 12

1. Найдите две последние цифры числа 99^{1000} .
 2. Докажите, что числа a^2 и b^2 дают одинаковые остатки при делении на $a - b$, если a и b — положительные целые числа, и $a > b$.
 3. Какие из следующих утверждений о целых числах a , b , c верны: (1) если a делится на c , а b не делится на c , то $a + b$ не делится на c ; (2) если a не делится на c и b не делится на c , то $a + b$ не делится на c ; (3) если a не делится на c и b не делится на c , то ab не делится на c ; (4) если a делится на b и b делится на c , то ab делится на c^2 ? Докажите верные и приведите контрпримеры к неверным.
- Примечание.* В этой задаче правильный и обоснованный ответ на каждый из пунктов дает 1 балл в общую оценку за задачу (максимум 4 балла).
4. Пусть x , y — целые числа. Докажите, что число $x + 10y$ делится на 13 тогда и только тогда, когда $y + 4x$ делится на 13.
 5. Решите сравнение $53x \equiv 1 \pmod{42}$ с помощью алгоритма Евклида.
 6. Докажите, что дробь $\frac{n^2 - n + 1}{n^2 + 1}$ несократима при всех положительных целых n .
 7. Может ли целое положительное число, в десятичной записи которого 100 нулей, 100 единиц и 100 двоек, быть точным квадратом? (Т.е. квадратный корень целый.)
 8. Найдите наименьшее целое положительное число N такое, что и сумма цифр десятичной записи числа N , и сумма цифр десятичной записи числа $N + 1$ делятся на 7.