

1. Найдите решения уравнения $45x - 37y = 25$ в целых числах.
2. Существует ли решение уравнения $31x + 75y = 2345$ в неотрицательных целых числах?
3. Пусть $\text{НОД}(a, b) = 1$. Найдите возможные значения $\text{НОД}(a + b, a^2 + b^2)$.
4. Сколько положительных делителей имеет число $2^{10} \cdot 3^5 \cdot 5^3$?
5. Докажите, что при любом целом a число $a^{73} - a$ делится на 2, на 3, на 5, на 7, на 13, на 19, на 37, на 73.
6. Докажите, что $(p - 1)!$ дает остаток -1 по модулю p для любого простого числа p .
7. Найдите остаток при делении числа $\underbrace{111 \dots 111}_{105 \text{ цифр}}$ на 107. (Использована десятичная система.)
8. Формулы включения – исключения для НОК и НОД. **а)** Докажите, что для положительных x, y, z выполняется равенство
$$\text{НОК}(x, y, z) = \frac{xyz \cdot \text{НОД}(x, y, z)}{\text{НОД}(x, y) \cdot \text{НОД}(x, z) \cdot \text{НОД}(y, z)};$$
б) попробуйте выразить $\text{НОК}(x_1, \dots, x_n)$ аналогичным образом.

Домашнее задание 13

1. Докажите, что если $\text{НОД}(a, b) = \text{НОД}(a, c) = 1$, то $\text{НОД}(a, bc) = 1$.
2. Существует ли решение уравнения $74x + 47y = 2900$ в неотрицательных целых числах?
3. Положительное целое число a чётно, но не делится на 4. Покажите, что количество (положительных) чётных делителей a равно количеству (положительных) нечётных делителей a .
4. Существует ли степень тройки, заканчивающаяся на $\dots 0001$ в десятичной записи?
5. Пусть p — простое число, большее 3. Докажите, что $p^2 - 1$ делится на 24.
6. Докажите, что при любом нечетном положительном n число $2^{n!} - 1$ делится на n .
7. Докажите, что числитель несократимой дроби, равной $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{p-1}$, делится на p для любого простого $p > 2$.
8. Известно, что $a^{10} + b^{10} + c^{10} + d^{10} + e^{10} + f^{10}$ делится на 11. Докажите, что $abcdef$ делится на 11^6 . Здесь a, b, c, d, e, f — целые числа.