Дискретная математика №11

Сармин Павел

27.11.2020

1 $99^{1000} = (100-1)^{1000} \equiv (-1)^{1000} mod(100) \Rightarrow$
Последние 2 цифры равны 01

2 $(a^2-b^2) mod(a-b) = (a-b)(a+b) \equiv 0 mod(a-b) \Rightarrow a^2 \equiv b^2(mod(a-b))$

3 1) Сумма не делится, т.к. сумма a + b по модулю c равна $(a\ mod\ c) + (b\ mod\ c) \neq 0 \Rightarrow$ Верно
2) a + b может делиться на c, если сумма остатков по модулю дает ноль. Например a = 1, b = 3, c = 4 $\Rightarrow$ $a + b \equiv 0\ mod(c) \Rightarrow$ Неверно
3) Аналогично как и с первым, только вместо сложения умножение. Например: $a = 3,\ b = 3.\ c = 9\ ab \equiv 0\ mod(c) \Rightarrow$ Неверно
4) Пусть $a = ckx \vdots c$, $b = qcy \vdots c \Rightarrow ab = c^2qkxy \equiv 0\ (c^2)$

4 Если $x + 10y$ делится на 13, то $x + 10y \equiv 4x + 40y$ (13). Тогда если $4x + 40y$ делится на 13, то $(4x + y) + 39y$ тоже должно делиться. $39y$ делится на 13 без остатка. Тогда для того чтобы $x + 10y$ делилось на 13, нужно чтобы $4x + y$ тоже делилось на 13

5 $53x - 42y = 1$
Используем расширенный алгоритм Евклида:
$53 = 1 * 42 + 11$
$42 = 3 * 11 + 9$
$11 = 1 * 9 + 2$
$9 = 4 * 2 + 1$
$2 = 2 * 1 + 0$
Теперь собираем

$1 = 9-4*2 = 9-4*11+4*9 = 5*9-4*11 = 5*42-(5*3)*11-4*11 = 5*42-19*11 = 5*42-19*53+19*42 = 24*42-19*53 \Rightarrow$
$-19 \equiv 23(42) \Rightarrow x \ = \ 23$

6 $GCD(n^2-n+1, n^2+1) = GCD(-n, n^2+1) = GCD(-n, 1) \Rightarrow \ n^2-n+1$ и n^2+1 взаимно просты

7 У нас наше число делится на 3, т.к. сумма цифр равна 300. Тогда чтобы извлечь корень из нашего числа, наше число должно делиться на 9, но оно не делится на 9 и извлечь корень из 3 мы не можем. Значит наше число - не точный квадрат.

8 Для того чтобы сумма N цифр и N+1 цифр различались не на 1(если они различаются на 1, очевидно не найдутся 2 такие соседние суммы, которые делются на 7), нужно, чтобы на конце были 9. Тогда найдем такое минимальное число 9, такое что $9k-1 \ mod \ 7 \equiv 0$ это 4. Значит наше число исмеет на конце 9 девяток. Теперь просто ставим 6 впереди, получаем 69999, сумма цифр этого числа делится на 7. И сумма цифр в $69999+1 = 70000$ делится на 7.