Листок 4 (Часть II)

(4)

Вычислить пределы:

e) $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\alpha+x)\cdot\sin(\alpha+2x)-\sin^2\alpha}{x} = L_1$$

f) $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x+\sin 2x+\dots+\sin nx}{\sqrt{1+2x}-1}$$

Решение e) прежде всего преобразуем выражение:

$$\sin(\alpha+x)\cdot\sin(\alpha+2x)-\sin^2\alpha$$
$$\parallel$$
$$(\sin(\alpha)\cdot\cos x+\cos\alpha\cdot\sin x)(\sin\alpha\cdot\cos 2x+\cos\alpha\cdot\sin 2x)-\sin^2\alpha$$
$$\parallel$$
$$\sin^2\alpha(\cos x\cdot\cos 2x-1)+\cos\alpha\cdot\sin\alpha\cdot\sin x\cdot\cos 2x+$$
$$+\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\cos x\cdot\sin 2x+\cos^2\alpha\cdot\sin x\cdot\sin 2x$$

Т.е.

$$L_1=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\alpha(\cos x\cdot\cos 2x-1)}{x} = \hat{L}$$

$$+$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos\alpha\cdot\sin\alpha\cdot\sin x\cdot\cos 2x}{x} = \cos\alpha\cdot\sin\alpha$$

$$+$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\cos x\cdot\sin 2x}{x} = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$$

$$\frac{\sin 2x}{2x}\cdot\frac{2x}{x}$$

$$+$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2\alpha\cdot\sin x\cdot\sin 2x}{x} = 0$$

Осталось вычислить $\hat{L}$:

$$\hat{L} = \lim_{x\to 0}\left\{\frac{(\cos x\cdot\cos 2x - \cos x)}{x}\cdot\sin^2\alpha + \frac{\cos x - 1}{x}\cdot\sin^2\alpha\right\}$$

просто арифметическое преобразование

т.к., в силу пункт b) $\dfrac{1-\cos x}{x^2}\to\dfrac{1}{2}$, то

$$\frac{\cos x(\cos 2x - 1)}{x} = \overset{\to 1}{\cos x}\,\overset{\to -\frac{1}{2}}{\frac{(\cos(2x)-1)}{(2x)^2}}\cdot\underbrace{(2x)^2\cdot\frac{1}{x}}_{\to 0}\to 0$$

$$\frac{\cos x - 1}{x} = \underbrace{\frac{\cos x - 1}{x^2}}_{\to -\frac{1}{2}}\cdot\overset{\to 0.}{\frac{x^2}{x}}\to 0$$

и $\hat{L} = 0$.

Т.е. $L_1 = 3\sin\alpha\cdot\cos\alpha = \boxed{\frac{3}{2}\sin(2\alpha)}$

Альтернативное решение.

Хорошо известно, что производная в точке α для ф-и f определяется как

$$f'(\alpha) = \lim_{x\to 0}\frac{f(\alpha+x) - f(\alpha)}{x}$$

то мы имеем:

$$\lim_{x\to 0}\left\{\frac{\sin(\alpha+x)\cdot\sin(\alpha+2x) - \sin^2\alpha}{x}\right.$$

$$\shortparallel$$

$$\underbrace{\frac{\sin^2(\alpha+x) - \sin^2\alpha}{x}}_{f'(\alpha),\ \text{где}\ f(x)=\sin^2 x} + \frac{\sin(\alpha+x)(\sin(\alpha+2x) - \sin(\alpha+x))}{x}$$

$$\|$$

$$\left.(\sin^2 x)'\right|_{x=a} + \frac{\sin(a+x)\cdot 2\cdot \sin\left(\frac{a+2x-a-x}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{2a+3x}{2}\right)}{x}$$

$$\|$$

$$2\sin(a)\cdot\cos(a) + 2\underbrace{\sin(a+x)}_{\to \sin a}\cdot\overbrace{\cos\left(\frac{2a+3x}{2}\right)}^{\to\cos a}\underbrace{\frac{\sin\frac{x}{2}}{x}}_{\to\frac{1}{2}} \ominus$$

$$\ominus\ 2\sin a\cdot\cos a + 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\sin a\cdot\cos a$$

$$\|$$

$$\frac{3}{2}\sin(2a).$$

f) $$\lim_{x\to 0}\left\{\frac{\sin x+\sin(2x)+\dots+\sin(nx)}{\sqrt{1+2x}-1}\right.$$

$\|$ домножаем на сопряженное.

$$\frac{\sqrt{1+2x}+1}{1+2x-1}\cdot\left(\sin x+\sin(2x)+\dots+\sin(nx)\right)$$

$$\|$$

$$\left.\underbrace{\frac{\sqrt{1+2x}+1}{2}}_{\to 1}\cdot\left(\underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\to 1}+\underbrace{\frac{\sin 2x}{x}}_{\to 2}+\dots+\underbrace{\frac{\sin nx}{x}}_{\to n}\right)\right\}$$

$$//\ \frac{\sin(kx)}{x} = \underbrace{\frac{\sin(kx)}{kx}}_{\to 1}\cdot\underbrace{\frac{kx}{x}}_{\to k} \to k\ //$$

$$\|$$

$$1\cdot(1+2+\dots+n)$$

$$\|$$

$$\boxed{\frac{(n+1)\cdot n}{2}}$$

Формулы Маклорена (Тейлора) с остаточным членом в форме Пеано

Справедливы следующие выражения:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \bar{\bar{o}}(x^n) \quad (\forall x \in \mathbb{R})$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n} + \bar{\bar{o}}(x^n)$$
$x \in (-1, 1]$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \binom{\alpha}{1} x + \binom{\alpha}{2} x^2 + \dots + \binom{\alpha}{n} x^n + \bar{\bar{o}}(x^n), \quad x \in (-1,1),$$
$\alpha \in \mathbb{R}$.

где $\binom{\alpha}{n} = \dfrac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n+1} \cdot \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \bar{\bar{o}}(x^{2n})$$
$x \in \mathbb{R}$.

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \bar{\bar{o}}(x^{2n+1})$$
$x \in \mathbb{R}$.

где во всех формулах $\bar{\bar{o}}(x^k)$ понимается при $x \to 0$.

Опр $\bar{\bar{o}}(f)$ при $x \to a$ определяется как множество ф-й g таких x, что $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{g(x)}{f(x)} = 0$.

Например: $x^3 \in \bar{\bar{o}}(\sin x)$ при $x \to 0$ т.к. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^3}{\sin x} = 0$

$x^2 \in \bar{\bar{o}}(x^3)$ при $x \to +\infty$, т.к. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{x^3} = 0$

$x^3 \in \bar{\bar{o}}(x^2)$ при $x \to 0$, т.к. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^3}{x^2} = 0$.

Вычислить пределы:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x}$, b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{x}$ c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^\alpha-1}{x}$, $\cancel{\alpha>0}$

d) $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\ln\sin\frac{x}{2}}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{\pi}}$; e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x-b^x}{x}$, $a,b>0$

f) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{e^x-e^2}{(x-4)e^x+x\cdot e^2}$

Решение a) $\lim\limits_{x\to 0}\left\{\dfrac{\ln(1+x)}{x} = \dfrac{x+\bar{o}(x)}{x} = 1+\bar{o}(1)\right\} = 1+0 = \boxed{1}$

Если $f\in\bar{o}(1)$, то $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{1}=0$

$\bar{o}(f\cdot g) = f\cdot\bar{o}(g) = f\cdot g\cdot\bar{o}(1) \Rightarrow x+\bar{o}(x) = x\cdot(1+\bar{o}(1))$

действительно:

$h\in\bar{o}(f\cdot g) \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{h(x)}{f(x)\cdot g(x)}=0$

$\Updownarrow$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{h(x)}{f(x)}}{g(x)} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{h}{f}\in\bar{o}(g)$

$\Updownarrow$

$h\in f\cdot\bar{o}(g)$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\left\{\dfrac{e^x-1}{x} = \dfrac{1+x+\bar{o}(x)-1}{x} = \dfrac{x+\bar{o}(x)}{x} = \dfrac{x(1+\bar{o}(1))}{x} = \right.$

$\left.= 1+\bar{o}(1)\right\} = 1+0 = \boxed{1}$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\left\{\dfrac{(1+x)^{\alpha}-1}{x} = \dfrac{1+\binom{\alpha}{1}x+\bar{o}(x)-1}{x} = \binom{\alpha}{1}+\bar{o}(1)\right\} =$

$= \binom{\alpha}{1}+0 = \boxed{\alpha}$

d) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\ln\sin\frac{x}{2}}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{\pi}} = \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\ln\left(\sin\left(\frac{t+\pi}{2}\right)\right)}{\sqrt[3]{t+\pi}-\sqrt[3]{\pi}} =$

замена $x=t+\pi$

$= \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\ln\cos\frac{t}{2}}{\sqrt[3]{\pi}\left(\sqrt[3]{1+\frac{t}{\pi}}-1\right)} =$

$\sin(x+\frac{\pi}{2}) = \cos(x)$

Найдем вспомогательный предел

$\lim\limits_{t\to 0}\left\{\dfrac{\ln\cos t}{t^2} = \dfrac{\ln\left(1-2\sin^2\frac{t}{2}\right)}{-2\sin^2\frac{t}{2}}\cdot(-2)\dfrac{\sin^2\frac{t}{2}}{\left(\frac{t}{2}\right)^2}\cdot\dfrac{\left(\frac{t}{2}\right)^2}{t^2}\right\} =$

1 в силу пункта a) $\qquad$ 1^2 как замечатель-й предел $\qquad$ $\frac{1}{4}$

$= 1\cdot(-2)\cdot 1^2\cdot\frac{1}{4} = -\frac{1}{2}$

$= \lim\limits_{t\to 0}\left[\dfrac{\ln\cos\frac{t}{2}}{\left(\frac{t}{2}\right)^2}\cdot\left(\frac{t}{2}\right)^2\cdot\dfrac{1}{\sqrt[3]{\pi}}\cdot\dfrac{\frac{t}{\pi}}{\sqrt[3]{1+\frac{t}{\pi}}-1}\cdot\dfrac{1}{\frac{t}{\pi}}\right] = \boxed{0}$

$\frac{\pi}{4}\cdot t\to 0$

$-\frac{1}{2}$ в силу

$\dfrac{1}{\frac{1}{3}}$ в силу пункта c)

$$e)\ \lim_{\substack{x \to 0 \\ a,b>0}} \left\{ \frac{a^x - b^x}{x} = \frac{e^{\ln a \cdot x} - e^{\ln b \cdot x}}{x} \right.$$

$$= \frac{1 + \ln a \cdot x + \bar{\bar{o}}(\ln a \cdot x) - (1 + \ln b\, x + \bar{\bar{o}}(\ln b \cdot x))}{x}$$

$$= \left. \ln a - \ln b + \bar{\bar{o}}(1) \right\} = \ln a - \ln b + 0 = \boxed{\ln \frac{a}{b}}$$

$$// \ \bar{\bar{o}}(\text{const} \cdot f) = \bar{\bar{o}}(f) \quad \forall\ \text{const} \neq 0$$

$$\bar{\bar{o}}(f) + \bar{\bar{o}}(f) = \bar{\bar{o}}(f) \ //$$

$$f)\ \lim_{x \to 2} \frac{e^x - e^2}{(x-4)e^x + x \cdot e^2}$$