

Lista Lambda

Otávio Almeida

1) Reescreva os seguintes termos utilizando parênteses explicitamente em volta de cada subtermo.

- a) $a\ b\ c\ d$
 $((a\ b)\ c)\ d$
- b) $\lambda q.\lambda i.q$
 $(\lambda q.(\lambda i.q))$
- c) $\lambda x.\lambda y.\lambda z.x\ z\ (y\ z)$
 $(\lambda x.(\lambda y.(\lambda z.(x\ (z\ (y\ z))))))$

2) Para os seguintes termos, digam que variáveis estão livres, e que variáveis estão ligadas (e a que λ !).

- a) $\lambda s.s\ z\ \lambda q.s\ q$
 $\lambda s.(s\ z\ \lambda q.(s\ q))$
 FV = {z}
 Ligadas = {s \rightarrow λs , q \rightarrow λq }
- b) $(\lambda s.s\ z)\ \lambda q.w\ \lambda w.w\ q\ z\ s$
 $(\lambda s.s\ z)\ \lambda q.(w\ \lambda w.(w\ q\ z\ s))$
 $(\lambda s.s\ z)\ \lambda q.(**w**\ (\text{Esse } w \text{ é livre})\ \lambda w.(**w**\ (\text{Esse } w \text{ é ligado a } \lambda w)\ q\ z\ s))$
 FV = {z, s, w}
 Ligadas = {s \rightarrow λs , w \rightarrow λw }
- c) $(\lambda s.s)\ (\lambda q.q\ s)$
 $(\lambda s.**s**\ (\text{Esse } s \text{ é ligado a } \lambda s))\ (\lambda q.q\ **s**\ (\text{Esse } s \text{ é livre}))$
 FV = {s}
 Ligadas = {s \rightarrow λs , q \rightarrow λq }
- d) $\lambda z.((\lambda s.s\ q)\ (\lambda q.q\ z))\ \lambda z.z\ z$
 $\lambda z'.((\lambda s.s\ **q**\ (\text{Esse } q \text{ é livre}))\ (\lambda q.**q**\ (\text{Esse } q \text{ esta ligado a } \lambda q)\ **z**\ (\text{Esse } z \text{ é ligado a } \lambda z')))\ \lambda z''.**z\ z**\ (\text{Esses } z \text{ são ligados a } \lambda z'')$
 FV = {q}
 Ligadas = {z \rightarrow $\lambda z'$ ou $\lambda z''$, s \rightarrow λs , q \rightarrow λq }

3) Aplique reduções β às expressões abaixo, os reduzindo à forma normal (isto é, a um formato onde não é mais possível aplicar reduções).

- a) $(\lambda z.z) (\lambda q.q \ q) (\lambda s.s \ a)$
 $(\lambda q.q \ q) (\lambda s.s \ a)$
 $(\lambda s.s \ a) (\lambda s.s \ a)$
 $(\lambda s.s \ a) \ a$
 $a \ a$
- b) $(\lambda s.\lambda q.s \ q \ q) (\lambda a.a) \ b$
 $(\lambda q.(\lambda a.a) \ q \ q) \ b$
 $(\lambda a.a) \ b \ b$
 $b \ b$
- c) $(\lambda s.\lambda q.s \ q \ q) (\lambda x.x) \ c$
 $(\lambda q.(\lambda x.x) \ q \ q) \ c$
 $(\lambda x.x) \ c \ c$
 $c \ c$
- d) $((\lambda s.s \ s) (\lambda q.q)) (\lambda r.r)$
 $(\lambda q.q) (\lambda q.q) (\lambda r.r)$
 $(\lambda q.q) (\lambda r.r)$
 $\lambda r.r$

4) Considere uma versão do cálculo lambda estendido com numerais e operações aritméticas; sendo assim, além da redução β , podemos realizar reduções aritméticas quando ambos os lados de um operador forem numerais (e.g., $1 + 1 \rightarrow 2$). Reduza as expressões abaixo às suas formas normais.

- a) $(\lambda x.x) \ 5$
 5
- b) $(\lambda x.x + 10) \ 42$
 $42 + 10$
 52
- c) $(\lambda f.f \ (f \ 10)) (\lambda x.x + 2)$
 $(\lambda x.x + 2) ((\lambda x.x + 2) \ 10)$
 $(\lambda x.x + 2) (10 + 2)$
 $(\lambda x.x + 2) \ 12$
 $(12 + 2)$
 14
- d) $(\lambda f.f) (\lambda x.x) \ 51$
 $(\lambda x.x) \ 51$
 51

5) Considerando que:

```
ONE =  $\lambda a.\lambda b.a\ b$   
TWO =  $\lambda c.\lambda d.c\ (c\ d)$   
PLUS =  $\lambda m.\lambda n.\lambda f.\lambda x.m\ f\ (n\ f\ x)$ 
```

...aplique as reduções β à expressão PLUS TWO ONE à sua forma normal (dica: são necessárias 6 reduções).
Cuidado com os parênteses!

```
PLUS TWO ONE  
( $\lambda m.\lambda n.\lambda f.\lambda x.m\ f\ (n\ f\ x)$ ) ( $\lambda c.\lambda d.c\ (c\ d)$ ) ( $\lambda a.\lambda b.a\ b$ )  
( $\lambda m.\lambda n.\lambda f.\lambda x.m\ f\ (n\ f\ x)$ ) ( $\lambda c.\lambda d.c\ (c\ d)$ ) ( $\lambda a.\lambda b.a\ b$ )  
( $\lambda n.\lambda f.\lambda x.(\lambda c.\lambda d.c\ (c\ d))\ f\ (n\ f\ x)$ ) ( $\lambda a.\lambda b.ab$ )  
 $\lambda f.\lambda x.(\lambda c.\lambda d.c\ (c\ d))\ f\ ((\lambda a.\lambda b.a\ b)\ f\ x)$   
 $\lambda f.\lambda x.(\lambda d.f\ (f\ d))((\lambda a.\lambda b.a\ b)\ f\ x)$   
 $\lambda f.\lambda x.f(f\ ((\lambda a.\lambda b.a\ b)\ f\ x))$   
 $\lambda f.\lambda x.f(f\ ((\lambda b.f\ b)\ x))$   
 $\lambda f.\lambda x.f(f(f\ x))$ 
```