Resumos das Aulas de CDI II[1]
Curso: LEEC
2º Semestre de 2021-2022

Norma, distância e bola

Definição: A norma de um vector $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ é o escalar

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$$

Propriedades da norma:

1) $\|x\| \geq 0$ e $\|x\| = 0$ se e só se $x = (0, 0, ..., 0)$;

2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$, para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$;

3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Exercício: Mostre que as desigualdades

$$|x_i| \leq \|x\| \leq |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|$$

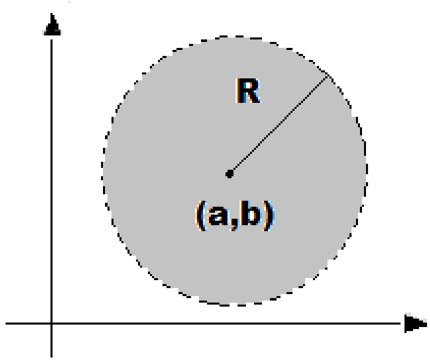
são válidas para qualquer $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Definição: Chama-se distância entre dois pontos $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ e $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ de $\mathbb{R}^n$ ao escalar

$$\|x - y\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}.$$

Definição: Chama-se bola de centro $a \in \mathbb{R}^n$ e raio $R > 0$ ao conjunto dos pontos de $\mathbb{R}^n$ cuja distância a a é inferior a R, ou seja

$$B_R(a) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\| < R\}.$$



Bola de $\mathbb{R}^2$ com centro (a, b) e raio R

[1]Coligidos por João Ferreira Alves

Interior exterior e fronteira

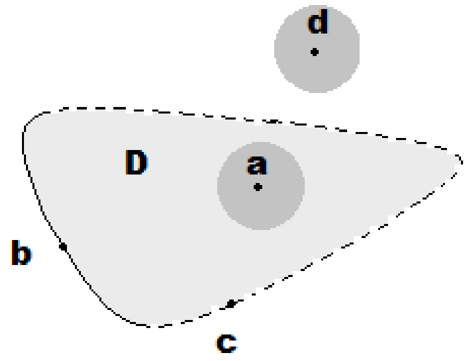
Definição: Dado um conjunto $D \subset \mathbb{R}^n$ e um ponto $a \in \mathbb{R}^n$, diz-se que:

1) O ponto a é interior a D, se existir $R > 0$ tal que $B_R(a) \subset D$.

2) O ponto a exterior a D, se existir $R > 0$ tal que $B_R(a) \subset D^c$.

3) O ponto a é fronteiro a D, se não é interior nem exterior a D, ou seja

$$B_R(a) \cap D \neq \emptyset \wedge B_R(a) \cap D^c \neq \emptyset, \text{ para qualquer } R > 0.$$



Pontos interiores, exteriores e
fronteiros a um conjunto $D \subset \mathbb{R}^2$

O interior, exterior e fronteira de um conjunto $D \subset \mathbb{R}^n$ definem-se respectivamente por:

$$\text{int}(D) = \{a \in \mathbb{R}^n : a \text{ é interior a } D\},$$

$$\text{ext}(D) = \{a \in \mathbb{R}^n : a \text{ é exterior a } D\}$$

e

$$\partial(D) = \{a \in \mathbb{R}^n : a \text{ é fronteiro a } D\}.$$

Observação: Note-se que as igualdades:

1) $\mathbb{R}^n = \text{int}(D) \overset{\circ}{\cup} \text{ext}(D) \overset{\circ}{\cup} \partial(D)$;

2) $\text{int}(D^c) = \text{ext}(D)$;

3) $\text{ext}(D^c) = \text{int}(D)$;

4) $\partial(D^c) = \partial(D)$

são válidas para qualquer conjunto $D \subset \mathbb{R}^n$.

Exemplo: Se $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$, então:

$\text{int}(D) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\right\}$; $\text{ext}(D) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0\right\}$; $\partial(D) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\right\}$.

Exemplo: Se $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2\}$, então:

$\text{int}(D) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > x^2\right\}$; $\text{ext}(D) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < x^2\right\}$; $\partial(D) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\right\}$.

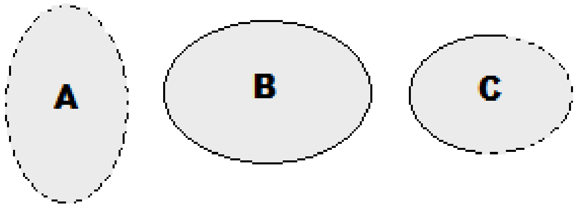
Definição: Dado $D \subset \mathbb{R}^n$, chama-se fecho de D ao conjunto

$$\overline{D} = \text{int}(D) \cup \partial(D).$$

Definição: Seja $D \subset \mathbb{R}^n$.

1) Diz-se que D é aberto se $D = \operatorname{int}(D)$.

2) Diz-se que D é fechado, se $D = \overline{D}$.



Três subconjuntos de $\mathbb{R}^2$: A é aberto; B é fechado; C não é aberto nem fechado.

Exercício: Mostre que um conjunto $D \subset \mathbb{R}^n$ é aberto (resp. fechado) se e só se o seu complementar, D^c, é fechado (resp. aberto).

Exercício: Mostre que se dois conjuntos, $D_1, D_2 \subset \mathbb{R}^n$, são abertos (resp. fechados), então também $D_1 \cap D_2$ e $D_1 \cup D_2$ são abertos (resp. fechados).

Exercício: Identifique dois subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ que sejam simultaneamente abertos e fechados.

Definição: Seja $D \subset \mathbb{R}^n$.

1) Diz-se que D é limitado, se existir $R > 0$ tal que

$$\|x\| < R, \text{ para qualquer } x \in D.$$

2) Diz-se que D é compacto, se D é limitado e fechado.

Sucessões em $\mathbb{R}^n$

Uma sucessão $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$, de termos em $\mathbb{R}^n$, é uma função que a cada $k \in \mathbb{N}$ faz corresponder um vector $x_k = (x_{k1}, x_{k2}, ..., x_{kn}) \in \mathbb{R}^n$.

Definição: Diz-se que uma sucessão $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de termos em $\mathbb{R}^n$ converge para $a \in \mathbb{R}^n$, se, para qualquer $\delta > 0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$x_k \in B_\delta(a), \text{ para qualquer } k > k_0.$$

Para se dizer que uma sucessão $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de termos em $\mathbb{R}^n$ converge para $a \in \mathbb{R}^n$, escreve-se

$$\lim x_k = a \text{ ou } x_k \to a.$$

Note-se que uma sucessão de termos em $\mathbb{R}^n$, $x_k = (x_{k1}, x_{k2}, ..., x_{kn})$, converge para $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$ se e só se a sucessão real $\|x_k - a\|$ converge para 0. Se além disto, tivermos em conta que as desigualdades

$$|x_{kj} - aj| \leq \|x_k - a\| \leq |x_{k1} - a_1| + |x_{k2} - a_2| + \cdots |x_{kn} - a_n|$$

são válidas para $k \in \mathbb{N}$ e $j = 1, ..., n$, vemos que

$$x_k = (x_{k1}, x_{k2}, ..., x_{kn}) \to a = (a_1, a_2, ..., a_n) \text{ se e só se } x_{kj} \to a_j, \text{ para qualquer } j = 1, ..., n.$$

Exemplo:

1) A sucessão de termos em $\mathbb{R}^2$, definida por $x_k = \left(\frac{1}{k}, \frac{k+1}{k}\right)$, converge para $(0, 1)$, já que

$$\frac{1}{k} \to 0 \text{ e } \frac{k+1}{k} \to 1.$$

2) A sucessão de termos em $\mathbb{R}^3$, definida por $x_k = \left(\frac{1}{k}, e^{-k}, \frac{k}{1+k^2}\right)$, converge para $(0, 0, 0)$, já que

$$\frac{1}{k} \to 0, \ e^{-k} \to 0 \text{ e } \frac{k}{1+k^2} \to 0.$$

3) A sucessão de termos em $\mathbb{R}^2$, definida por $x_k = \left((-1)^k, \frac{k}{1+k^2}\right)$, não é convergente porque a sua primeira componente é uma sucessão real divergente.

Definição: Diz-se que uma sucessão $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de termos em $\mathbb{R}^n$ é limitada se existe $R > 0$ tal que

$$\|x_k\| < R, \text{ para qualquer } k \in \mathbb{N}.$$

Exercício:

1) Mostre que uma sucessão $x_k = (x_{k1}, x_{k2}, ..., x_{kn})$ é limitada se e só se cada uma das suas componentes, x_{kj}, é uma sucessão limitada.

2) Mostre que se $x_k = (x_{k1}, x_{k2}, ..., x_{kn})$ é uma sucessão limitada e y_k é uma sucessão real convergente para zero, então a sucessão $z_k = y_k x_k$ converge para $(0, 0, ..., 0)$.

Proposição: Um ponto $a \in \mathbb{R}^n$ pertence ao fecho de A sse existe uma sucessão (x_k) de termos em A tal que $x_k \to a$.

Proposição: Um conjunto $D \subset \mathbb{R}^n$ é fechado se e só se qualquer sucessão covergente de termos em D tem limite em D.

Funções definidas em $\mathbb{R}^n$

Seja $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ um função com domínio D e com valores em $\mathbb{R}^m$.

Quando $n = m$ diz-se que f é um campo vectorial. Quando $m = 1$ diz-se que f é um campo escalar.

Uma função $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ fica definida pelas suas funções coordenadas

$$f_j : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \text{com } j = 1, ..., m,$$

que são os únicos campos escalares que verificam

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), ..., f_m(x)), \text{ para qualquer } x \in D.$$

Limite de uma função num ponto

Definição: Seja $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e $a \in \overline{D}$. Diz-se que $f(x)$ tende para $b \in \mathbb{R}^m$ quando x converge para a, e escreve-se

$$\lim_{x \to a} f(x) = b,$$

se para qualquer $\delta > 0$ existe $\epsilon > 0$ tal que

$$f(x) \in B_\delta(b) \;\text{ para qualquer } x \in B_\epsilon(a).$$

Proposição: Seja $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e $a \in \overline{D}$. Então

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

sse para toda a sucessão (x_k) de termos em D que converge para a se tem $\lim f(x_k) = b$.

Exercício: Seja $D = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ e $f : D \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}.$$

a) Mostre que f tem limite em $(1, 1)$.

b) Mostre que f não tem limite em $(0, 0)$.

Proposição: Seja $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $a \in \overline{D}$ e $b = (b_1, ..., b_m)$. Então

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \text{ sse } \lim_{x \to a} f_j(x) = b_j, \text{ para } j = 1, ..., m.$$

Exercício: Seja $D = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ e $f : D \to \mathbb{R}^2$ a função definida por

$$f(x, y) = \left(\frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}, (x^2 + y^2) \ln(x^2 + y^2) \right).$$

Mostre que f tem limite em $(0, 0)$.

Continuidade

Definição: Diz-se que uma função $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é contínua em $a \in D$, se

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Se $A \subset D$, diz-se que f é contínua em A quando é contínua em qualquer ponto de A.

Proposição: Uma função $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é contínua em $a \in D$, sse as suas funções coordenadas

$$f_j : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ j = 1, ..., m,$$

são contínuas em a.

Exemplo:

1) Qualquer função constante $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é contínua no seu domínio.

2) As projecções $\pi_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, definidas por

$$\pi_i(x_1, x_2, ..., x_n) = x_i$$

são contínuas em $\mathbb{R}^n$.

Proposição: Se duas funções $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $g : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ são contínuas em D, então:

1) As funções $f + g$ e fg são contínuas em D;

2) A função f/g é contínua em $\{x \in D : g(x) \neq 0\}$.

Proposição: Se duas funções $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e $g : B \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ são contínuas nos seus domínios e $f(A) \subset B$, então a função $g \circ f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ é contínua em A.

Exemplo: Mostre que as funções $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$, definidas por

$$f(x, y) = e^{x^2+5y} \text{ e } g(x, y) = \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2},$$

são contínuas nos seus domínios.

Exercício: Mostre que se duas funções, $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e $g : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, coincidem num conjunto **aberto** $A \subset D \cap E$ e g é contínua em A, então também f é contínua em A.

Exercício: Determine o conjunto dos pontos de continuidade da função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

Transformaçãoes lineares/afins

Recorde que:

1) Uma aplicação $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ diz-se linear se:

$$L(x+y) = L(x) + L(y) \text{ e } L(\alpha x) = \alpha L(x), \text{ para quaisquer } x, y \in \mathbb{R}^n, \ \alpha \in \mathbb{R}.$$

2) Uma aplicação $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, com funções coordenadas

$$L_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \ L_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, ..., \ L_m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},$$

é linear se e só se existem números reais a_{ij}, com $i \in \{1, ..., m\}$ e $j \in \{1, ..., n\}$, tais que

$$L_i(x_1, ..., x_n) = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n,$$

ou de forma equivalente

$$\begin{bmatrix} L_1(x_1, ..., x_n) \\ L_2(x_1, ..., x_n) \\ \vdots \\ L_m(x_1, ..., x_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

À matriz

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

chama-se matriz que representa L em relação às bases canónicas de $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$.

3) Uma aplicação $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ diz-se **afim** se existir um vector $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^m$ e uma aplicação linear $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tais que

$$g(\mathbf{x}) = \mathbf{c} + L(\mathbf{x}), \text{ para qualquer } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,$$

ou por outras palavras: se existir uma aplicação linear $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tal que

$$g(\mathbf{x}) = g(\mathbf{a}) + L(\mathbf{x} - \mathbf{a}), \text{ para quaisquer } \mathbf{a}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Exercício: Mostre que qualquer aplicação linear (ou afim) $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é contínua em qualquer ponto do seu domínio.

Gráfico de uma função

Dada uma função $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, chama-se gráfico de f ao subconjunto de $\mathbb{R}^{n+m}$ definido por

$$G(f) = \left\{ (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^{n+m} : \mathbf{x} \in D \wedge f(\mathbf{x}) = \mathbf{y} \right\}.$$

Exemplo: O gráfico da aplicação linear $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por $f(x, y) = x + y$, é o plano de equação cartesiana $x + y - z = 0$, já que

$$G(f) = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y) = z \right\} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = z \right\}.$$

Exemplo: O gráfico da aplicação afim $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por $f(x, y) = 1 + x - y$, é o plano de equação cartesiana $x - y - z = -1$, já que

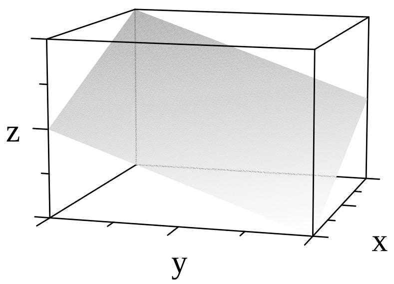
$$G(f) = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y) = z \right\} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 + x - y = z \right\}.$$

Exemplo: O gráfico da aplicação $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por $f(x, y) = x^2 + y^2$, é o parabolóide de equação cartesiana $x^2 + y^2 = z$, já que

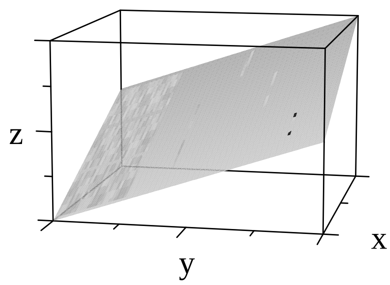
$$G(f) = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y) = z \right\} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z \right\}.$$

Exemplo: O gráfico da aplicação $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, é a superfície cónica de equação cartesiana $\sqrt{x^2 + y^2} = z$, já que

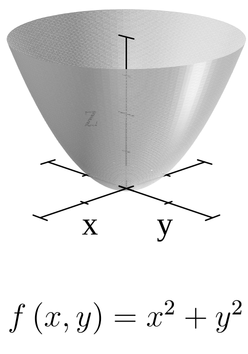
$$G(f) = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y) = z \right\} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2} = z \right\}.$$



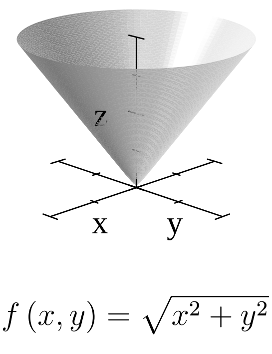
$f(x, y) = x + y$



$f(x, y) = 1 + x - y$



$f(x, y) = x^2 + y^2$



$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

Derivadas direccionais e derivadas parciais

Definição: Seja $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\mathbf{a} \in \operatorname{int}(D)$ e $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$. Ao limite

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(\mathbf{a}+t\mathbf{v}) - f(\mathbf{a})}{t},$$

quando existe, chama-se derivada de f no ponto $\mathbf{a}$ segundo o vector $\mathbf{v}$, e designa-se por qualquer dos símbolos $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{a})$, $D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{a})$ ou $f'_{\mathbf{v}}(\mathbf{a})$. No caso do vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ ser unitário ($\|\mathbf{v}\| = 1$), diz-se que $D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{a})$ é a derivada direccional de f no ponto $\mathbf{a}$, na direcção e sentido de $\mathbf{v}$.

De forma equivalente, pode-se escrever

$$D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{a}) = \varphi'_{\mathbf{v}}(0),$$

onde $\varphi'_{\mathbf{v}}$ designa a derivada da função real de variável real, definida por

$$\varphi_{\mathbf{v}}(t) = f(\mathbf{a}+t\mathbf{v})$$

Assim, a derivação segundo um vector arbitrário pode reduzir-se à derivação ordinária de uma função real de variável real.

Exemplo: Para a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por $f(x,y) = x^2 y$, teremos

$$D_{(1,1)} f(2,3) = \varphi'_{(1,1)}(0), \text{ com } \varphi_{(1,1)}(t) = f(2+t, 3+t) = (2+t)^2 (3+t).$$

Como $\varphi'_{(1,1)}(t) = 2(2+t)(3+t) + (2+t)^2$, obtém-se $\varphi'_{(1,1)}(0) = 16$, pelo que

$$D_{(1,1)} f(2,3) = 16.$$

Exemplo: Para a função $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, definida por $f(x,y,z) = \sin(xy) + \cos(yz)$, teremos

$$D_{(0,2,1)} f(1,0,0) = \varphi'(0), \text{ com } \varphi_{(0,2,1)}(t) = f(1, 2t, t) = \sin(2t) + \cos\left(2t^2\right).$$

Como $\varphi'_{(0,2,1)}(t) = 2\cos(2t) - 4t \sin(2t^2)$, obtém-se $\varphi'_{(0,2,1)}(0) = 2$, pelo que

$$D_{(0,2,1)} f(1,0,0) = 2.$$

Definição: Dada uma função $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, define-se i-ésima derivada parcial de f em $\mathbf{a} \in \operatorname{int}(D)$, com $i = 1, ..., n$, como sendo a derivada de f no ponto $\mathbf{a}$ segundo o i-ésimo vector da base canónica de $\mathbb{R}^n$, ou seja

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = D_{\mathbf{e}_i} f(\mathbf{a}), \text{ para } i = 1, ..., n,$$

com $\mathbf{e}_1 = (1, 0, ..., 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, ..., 0)$,..., $\mathbf{e}_n = (0, 0, ..., 1)$.

Exemplo: Para a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por $f(x,y) = x^2 y$, teremos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \varphi'_{(1,0)}(0) \text{ e } \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = \varphi'_{(0,1)}(0)$$

com

$$\varphi_{(1,0)}(t) = f(a+t, b) = (a+t)^2 b \text{ e } \varphi_{(0,1)}(t) = f(a, b+t) = a^2 (b+t)$$

Como $\varphi'_{(1,0)}(t) = 2(a+t)b$ e $\varphi'_{(0,1)}(t) = a^2$ obtém-se

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \varphi'_{(1,0)}(0) = 2ab \text{ e } \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = \varphi'_{(0,1)}(0) = a^2.$$

Ou seja, as derivadas parciais de f estão definidas em qualquer $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ e são dadas por

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy \text{ e } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2.$$

Exemplo: Para a função $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, definida por $f(x,y,z) = \sin(xy) + \cos(yz)$, teremos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b,c) = \varphi'_{(1,0,0)}(0), \ \frac{\partial f}{\partial y}(a,b,c) = \varphi'_{(0,1,0)}(0) \ \text{ e } \ \frac{\partial f}{\partial z}(a,b,c) = \varphi'_{(0,0,1)}(0),$$

com:

$$\begin{array}{rcccl} \varphi_{(1,0,0)}(t) &=& f(a+t,b,c) &=& \sin((a+t)b) + \cos(bc); \\ \varphi_{(0,1,0)}(t) &=& f(a,b+t,c) &=& \sin(a(b+t)) + \cos((b+t)c); \\ \varphi_{(0,0,1)}(t) &=& f(a,b,c+t) &=& \sin(ab) + \cos(b(c+t)). \end{array}$$

Como

$$\begin{array}{rcl} \varphi'_{(1,0,0)}(t) &=& b\cos((a+t)b) \\ \varphi'_{(0,1,0)}(t) &=& a\cos(a(b+t)) - c\sin((b+t)c) \\ \varphi'_{(0,0,1)}(t) &=& -b\sin(b(c+t)) \end{array}$$

obtém-se:

$$\begin{array}{rcccl} \frac{\partial f}{\partial x}(a,b,c) &=& \varphi'_{(1,0,0)}(0) &=& b\cos(ab); \\ \frac{\partial f}{\partial y}(a,b,c) &=& \varphi'_{(0,1,0)}(0) &=& a\cos(ab) - c\sin(bc); \\ \frac{\partial f}{\partial z}(a,b,c) &=& \varphi'_{(0,0,1)}(0) &=& -b\sin(bc). \end{array}$$

Ou seja, as derivadas parciais de f estão definidas em qualquer $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ e são dadas por

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = y\cos(xy), \ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = x\cos(xy) - z\sin(yz) \ \text{ e } \ \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = -y\sin(yz).$$

Note-se que a derivada de uma função vectorial $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ num ponto $\mathbf{a} \in \operatorname{int}(D)$ segundo um vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ define-se de forma análoga:

$$\begin{array}{rcl} Df_{\mathbf{v}}(\mathbf{a}) &=& \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(\mathbf{a}+t\mathbf{v}) - f(\mathbf{a})}{t} \\ &=& (Df_{1\mathbf{v}}(\mathbf{a}), ..., Df_{m\mathbf{v}}(\mathbf{a})). \end{array}$$

Em particular, a i-ésima derivada parcial de f no ponto $\mathbf{a}$ é definida por

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}(\mathbf{a}), \frac{\partial f_2}{\partial x_i}(\mathbf{a}), ..., \frac{\partial f_m}{\partial x_i}(\mathbf{a})\right).$$

Matriz jacobiana

Definição: Dada uma aplicação $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ com derivadas parciais num ponto $\mathbf{a} \in \operatorname{int}(D)$, define-se matriz jacobiana de f no ponto $\mathbf{a}$ como sendo

$$Df(a) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\mathbf{a}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\mathbf{a}) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(\mathbf{a}) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \end{bmatrix}.$$

Por abuso de linguagem, usamos a mesma notação para designar a transformação linear $Df(\mathbf{a}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ que relativamente às base canónicas de $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$ é representada pela matriz jacobiana, ou seja

$$\begin{aligned} Df(\mathbf{a})(x_1,...,x_n) &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\mathbf{a}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\mathbf{a}) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(\mathbf{a}) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{a})x_1 + \cdots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{a})x_n \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathbf{a})x_1 + \cdots + \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\mathbf{a})x_n \\ \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\mathbf{a})x_1 + \cdots + \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\mathbf{a})x_n \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

para qualquer $(x_1,...,x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Exemplo: Para a aplicação $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por $f(x_1,x_2) = x_1x_2$, tem-se

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,x_2) = x_2 \text{ e } \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1,x_2) = x_1,$$

pelo que

$$Df(a_1,a_2) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1,a_2) & \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1,a_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 & a_1 \end{bmatrix}$$

e

$$Df(a_1,a_2)(x_1,x_2) = a_2x_1 + a_1x_2, \text{ para qualquer } (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Exemplo: Para a aplicação $f : \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 \neq 0\} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x_1,x_2) = \frac{x_1}{x_2}$,

tem-se

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,x_2) = \frac{1}{x_2} \text{ e } \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1,x_2) = -\frac{x_1}{x_2^2},$$

pelo que

$$Df(a_1,a_2) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1,a_2) & \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1,a_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_2} & -\frac{a_1}{a_2^2} \end{bmatrix}$$

e

$$Df(a_1,a_2)(x_1,x_2) = \frac{x_1}{a_2} - \frac{a_1x_2}{a_2^2}, \text{ para qualquer } (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Exemplo: Para a aplicação $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, definida por $f(x_1,x_2)=(\sin(x_1x_2),\cos(x_1+x_2))$, tem-se

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_1,x_2)=x_2\cos(x_1x_2)\,,\ \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_1,x_2)=x_1\cos(x_1x_2)$$

e

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_1,x_2)=\frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_1,x_2)=-\sin(x_1+x_2)\,,$$

pelo que

$$Df(a_1,a_2)=\left[\begin{array}{cc}\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a_1,a_2) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a_1,a_2)\\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a_1,a_2) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a_1,a_2)\end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc}a_2\cos(a_1a_2) & a_1\cos(a_1a_2)\\ -\sin(a_1+a_2) & -\sin(a_1+a_2)\end{array}\right]$$

e

$$Df(a_1,a_2)(x_1,x_2)=(a_2\cos(a_1a_2)\,x_1+a_1\cos(a_1a_2)\,x_2,-\sin(a_1+a_2)\,x_1-\sin(a_1+a_2)\,x_2)\,,$$

para qualquer$(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$.

Exercício:

1) Mostre que se $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ é uma aplicação linear, então

$$Df(a)=f,\text{ para qualquer } a\in\mathbb{R}^n.$$

2) Mostre que se $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ é uma aplicação afim, então a aplicação $g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$, definida por $g(\mathbf{x})=f(\mathbf{x})-f(0)$, é linear e

$$Df(a)=g,\text{ para qualquer } a\in\mathbb{R}^n.$$

Gradiente de um campo escalar

Se uma aplicação $f:D\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ tem derivadas parciais num ponto $\mathbf{a}\in\operatorname{int}(D)$, chama-se gradiente de f no ponto $\mathbf{a}$ ao vector de $\mathbb{R}^n$ definido por

$$\nabla f(\mathbf{a})=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}),\frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{a}),...,\frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{a})\right).$$

Se tivermos em conta que produto interno dos vectores $\nabla f(\mathbf{a})$ e $(x_1,...,x_n)$ é dado por

$$\nabla f(\mathbf{a})\cdot(x_1,...,x_n)=\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a})\,x_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{a})\,x_2+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{a})\,x_n,$$

obtem-se

$$Df(a)(x_1,...,x_n)=\nabla f(\mathbf{a})\cdot(x_1,...,x_n)\,,\text{ para qualquer }\ (x_1,...,x_n)\in\mathbb{R}^n.$$

Diferenciabilidade

Definição: Uma aplicação $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é diferenciável num ponto $\mathbf{a} \in \operatorname{int}(D)$ se existir uma aplicação linear $L_{\mathbf{a}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tal que

$$\lim_{\mathbf{h}\to 0} \frac{\|f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) - L_{\mathbf{a}}(\mathbf{h})\|}{\|\mathbf{h}\|} = 0,$$

ou de forma equivalente,

$$\lim_{\mathbf{x}\to \mathbf{a}} \frac{\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a}) - L_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}-\mathbf{a})\|}{\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|} = 0.$$

Proposição: Se $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é diferenciável num ponto $\mathbf{a} \in \operatorname{int}(D)$, então f é contínua em $\mathbf{a}$.

Proposição: Se $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é diferenciável em $\mathbf{a} \in \operatorname{int}(D)$, então f tem derivada em $\mathbf{a}$ segundo qualquer vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ e

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{a}) = L_{\mathbf{a}}(\mathbf{v}).$$

Corolário: Se $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é diferenciável em $\mathbf{a} \in \operatorname{int}(D)$, então a aplicação linear $L_{\mathbf{a}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é (em relação às bases canónicas de $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$) representada pela matriz jacobiana de f no ponto $\mathbf{a}$, ou seja $Df(\mathbf{a}) = L_{\mathbf{a}}$. Em particular, tem-se

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{a}) = Df(\mathbf{a})(\mathbf{v}), \text{ para qualquer } \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n.$$

Quando f é diferenciável num ponto $\mathbf{a}$, a aplicação linear $Df(\mathbf{a}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é chamada de derivada de f no ponto $\mathbf{a}$.

Teorema: Uma aplicação $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é diferenciável num ponto $\mathbf{a} \in \operatorname{int}(D)$ se e só se possui derivadas parciais no ponto $\mathbf{a}$ e

$$\lim_{\mathbf{h}\to 0} \frac{\|f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) - Df(\mathbf{a})(\mathbf{h})\|}{\|\mathbf{h}\|} = 0,$$

ou de forma equivalente,

$$\lim_{\mathbf{x}\to \mathbf{a}} \frac{\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a}) - Df(\mathbf{a})(\mathbf{x}-\mathbf{a})\|}{\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|} = 0.$$

Exemplos:

1) Qualquer aplicação constante $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é diferenciável em qualquer ponto $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ e $Df(\mathbf{a}) = 0$.

2) Qualquer aplicação linear $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é diferenciável em qualquer ponto $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ e $Df(\mathbf{a}) = f$.

3) Qualquer aplicação afim $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é diferenciável em qualquer ponto $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ e $Df(\mathbf{a}) = f - f(0)$.

Exemplo: A aplicação $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por $f(x_1, x_2) = x_1 x_2$, é diferenciável em qualquer ponto $\mathbf{a} = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$. Com efeito, de

$$Df(\mathbf{a})(\mathbf{h}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, a_2) & \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 & a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = a_2 h_1 + a_1 h_2,$$

obtemos

$$f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) - Df(\mathbf{a})(\mathbf{h}) = (a_1 + h_1)(a_2 + h_2) - a_1 a_2 - (a_2 h_1 + a_1 h_2) = h_1 h_2,$$

pelo que

$$\frac{|f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) - Df(\mathbf{a})(\mathbf{h})|}{\|\mathbf{h}\|} = \frac{|h_1 h_2|}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \leq \sqrt{h_1^2 + h_2^2}.$$

Logo

$$0 \leq \lim_{\mathbf{h} \to 0} \frac{|f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) - Df(\mathbf{a})(\mathbf{h})|}{\|\mathbf{h}\|} \leq \lim_{\mathbf{h} \to 0} \sqrt{h_1^2 + h_2^2} = 0,$$

donde se deduz

$$\lim_{\mathbf{h} \to 0} \frac{|f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) - Df(\mathbf{a})(\mathbf{h})|}{\|\mathbf{h}\|} = 0.$$

Exemplo: A aplicação $f : D = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 \neq 0\} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x_1, x_2) = \frac{x_1}{x_2}$, é diferenciável em qualquer ponto $\mathbf{a} = (a_1, a_2) \in D$. Com efeito, de

$$Df(\mathbf{a})(\mathbf{h}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, a_2) & \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_2} & -\frac{a_1}{a_2^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = \frac{h_1}{a_2} - \frac{a_1 h_2}{a_2^2},$$

obtemos

$$f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) - Df(\mathbf{a})(\mathbf{h}) = \frac{a_1 + h_1}{a_2 + h_2} - \frac{a_1}{a_2} - \frac{h_1}{a_2} + \frac{a_1 h_2}{a_2^2} = \frac{a_1 h_2^2 - h_1 h_2 a_2}{a_2^2 (a_2 + h_2)},$$

pelo que

$$\begin{aligned}
\frac{|f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) - Df(\mathbf{a})(\mathbf{h})|}{\|\mathbf{h}\|} &= \frac{|a_1 h_2^2 - h_1 h_2 a_2|}{|a_2^2 (a_2 + h_2)| \sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \\
&\leq \frac{|a_1 h_2^2| + |h_1 h_2 a_2|}{|a_2^2 (a_2 + h_2)| \sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \\
&= \frac{|a_1| (h_1^2 + h_2^2) + |a_2| (h_1^2 + h_2^2)}{|a_2^2 (a_2 + h_2)| \sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \\
&= \frac{|a_1| + |a_2|}{|a_2^2 (a_2 + h_2)|} \sqrt{h_1^2 + h_2^2}.
\end{aligned}$$

Logo

$$0 \leq \lim_{\mathbf{h} \to 0} \frac{|f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) - Df(\mathbf{a})(\mathbf{h})|}{\|\mathbf{h}\|} \leq \lim_{\mathbf{h} \to 0} \frac{|a_1| + |a_2|}{|a_2^2 (a_2 + h_2)|} \sqrt{h_1^2 + h_2^2} = 0,$$

donde se deduz

$$\lim_{\mathbf{h} \to 0} \frac{|f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) - Df(\mathbf{a})(\mathbf{h})|}{\|\mathbf{h}\|} = 0.$$

Teorema: Seja $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma aplicação com derivadas parciais em qualquer ponto dum conjunto aberto $A \subset D$. Se as aplicações

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} : A \to \mathbb{R}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} : A \to \mathbb{R}, ..., \quad \frac{\partial f}{\partial x_n} : A \to \mathbb{R}$$

são contínuas num ponto $\mathbf{a} \in A$, então f é diferenciável em $\mathbf{a}$.

Exemplo: A aplicação $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por

$$f(x, y) = \sin^2\left(xy^3\right),$$

é diferenciável em qualquer ponto de $\mathbb{R}^2$, já que as suas derivadas parciais,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2y^3 \sin\left(xy^3\right) \cos\left(xy^3\right) \text{ e } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 6xy^2 \sin\left(xy^3\right) \cos\left(xy^3\right),$$

são aplicações contínuas em $\mathbb{R}^2$.

Exemplo: A aplicação $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\} \to \mathbb{R}$, definida por

$$f(x, y) = \ln^3\left(x^2 + y^4\right),$$

é diferenciável em qualquer ponto do seu domínio, já que as suas derivadas parciais,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{6x \ln^2(x^2 + y^4)}{x^2 + y^4} \text{ e } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{12y^3 \ln^2(x^2 + y^4)}{x^2 + y^4},$$

são aplicações contínuas em $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\}$.

Definição: Dado um aberto $D \subset \mathbb{R}^n$, diz-se que uma função $f : D \to \mathbb{R}^m$ é de classe C^1, e escreve-se $f \in C^1$, se as derivadas parciais de f existem e são contínuas em qualquer ponto de D. Ou de forma equivalente, se as derivadas parciais das funções coordenadas, f_1, f_2,..., f_m existem e são contínuas em qualquer ponto de D.

Proposição: Uma aplicação $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é diferenciável num ponto $\mathbf{a} \in \operatorname{int}(D)$ se e só cada uma das suas aplicações coordenadas é diferenciável no mesmo ponto.

Corolário: Se $D \subset \mathbb{R}^n$ é aberto, qualquer aplicação $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ de classe C^1 é diferenciável em qualquer ponto de D.

Exemplo: A aplicação $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\} \to \mathbb{R}^2$, definida por

$$f(x, y) = \left(\sin^2\left(xy^3\right), \ln^3\left(x^2 + y^4\right)\right),$$

é diferenciável em qualquer ponto do seu domínio, já que, pelo que vimos nos exemplos anteriores, a aplicação f é de classe C^1.

Derivação da função composta (regra da cadeia)

Teorema: Se $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é diferenciável em $\mathbf{a} \in \operatorname{int}(A)$ e $g : B \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ é diferenciável em $f(\mathbf{a}) \in \operatorname{int}(B)$, então a função composta $g \circ f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, com domínio $D = \{\mathbf{x} \in A : f(\mathbf{x}) \in B\}$, é diferenciável em $\mathbf{a} \in \operatorname{int}(D)$ e

$$D(g \circ f)(\mathbf{a}) = Dg(\mathbf{b}) \circ Df(\mathbf{a}), \text{ com } \mathbf{b} = f(\mathbf{a}).$$

Consequentemente, a matriz jacobiana de $h = g \circ f$ no ponto $\mathbf{a}$ relaciona-se com as matrizes jacobianas de f e g nos pontos $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ (respectivamente) através da igualdade

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \cdots & \frac{\partial h_1}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_m}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \cdots & \frac{\partial h_m}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1}(\mathbf{b}) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial y_m}(\mathbf{b}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_p}{\partial y_1}(\mathbf{b}) & \cdots & \frac{\partial g_p}{\partial y_m}(\mathbf{b}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \end{bmatrix}$$

que por sua vez é equivalente à fórmula

$$\frac{\partial h_i}{\partial x_j}(\mathbf{a}) = \frac{\partial g_i}{\partial y_1}(\mathbf{b}) \frac{\partial f_1}{\partial x_j}(\mathbf{a}) + \frac{\partial g_i}{\partial y_2}(\mathbf{b}) \frac{\partial f_2}{\partial x_j}(\mathbf{a}) + \cdots + \frac{\partial g_i}{\partial y_m}(\mathbf{b}) \frac{\partial f_m}{\partial x_j}(\mathbf{a}),$$

válida para $i = 1, ..., m; j = 1, ..., n$, e habitualmete conhecida por regra da cadeia.

Exemplo: As funções $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e $g : \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : y_1 + 2y_2 > 0\} \to \mathbb{R}^3$, definidas por

$$f(x_1, x_2) = \left(e^{x_1 - x_2}, x_1 - x_2\right) \text{ e } g(y_1, y_2) = (y_1 + \arctan(y_2), y_1 + 2e^{y_2}, \ln(y_1 + 2y_2)),$$

são de classe C^1, já que as derivadas parciais de f_1 e f_2,

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_1, x_2) = e^{x_1 - x_2}, \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_1, x_2) = -e^{x_1 - x_2},$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_1, x_2) = 1, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_1, x_2) = -1,$$

e de g_1, g_2 e g_3

$$\frac{\partial g_1}{\partial y_1}(y_1, y_2) = 1, \quad \frac{\partial g_1}{\partial y_2}(y_1, y_2) = \frac{1}{1+y_2^2},$$

$$\frac{\partial g_2}{\partial y_1}(y_1, y_2) = 1, \quad \frac{\partial g_2}{\partial y_2}(y_1, y_2) = 2e^{y_2},$$

$$\frac{\partial g_3}{\partial y_1}(y_1, y_2) = \frac{1}{y_1+2y_2}, \quad \frac{\partial g_3}{\partial y_2}(y_1, y_2) = \frac{2}{y_1+2y_2},$$

são contínuas nos respectivos domínios. Assim, porque f é diferenciável em $\mathbf{a} = (1, 1)$ e g é diferenciável em $\mathbf{b} = f(\mathbf{a}) = (1, 0)$, podemos concluir que $g \circ f$ é diferenciável em $(1, 1)$, com matriz jacobiana dada por

$$\begin{aligned} D(g \circ f)(\mathbf{a}) &= \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1}(1,0) & \frac{\partial g_1}{\partial y_2}(1,0) \\ \frac{\partial g_2}{\partial y_1}(1,0) & \frac{\partial g_2}{\partial y_2}(1,0) \\ \frac{\partial g_3}{\partial y_1}(1,0) & \frac{\partial g_3}{\partial y_2}(1,0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(1,1) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(1,1) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(1,1) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(1,1) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 3 & -3 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Exercício: Considere as funções $\gamma(t) = (\sin(t), t^2, \cos(t))$, $F(x,y,z) = x^2+y^2+z^2+1$ e $\sigma(t) = F(\gamma(t))$. Calcule a derivada $\sigma'(t)$.

Resposta: As aplicações $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ e $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ são diferenciáveis nos seus domínios, pelo que $\sigma = F \circ \gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é diferenciável em qualquer ponto do seu domínio e

$$\begin{aligned}
D\sigma(t) &= D(F\circ\gamma)(t) \\
&= DF(\gamma(t))\, D\gamma(t) \\
&= \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial x}(\sin(t), t^2, \cos(t)) & \frac{\partial F}{\partial y}(\sin(t), t^2, \cos(t)) & \frac{\partial F}{\partial z}(\sin(t), t^2, \cos(t)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(t) \\ 2t \\ -\sin(t) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2\sin(t) & 2t^2 & 2\cos(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(t) \\ 2t \\ -\sin(t) \end{bmatrix} \\
&= 4t^3.
\end{aligned}$$

Exercício: Considere a função $f(x,y,z) = ye^x + xz^2$ e seja $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ uma função de classe C^1 tal que $g(0,0) = (0,1,2)$ e

$$Dg(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}.$$

Calcule a derivada $D_v(f\circ g)(0,0)$ em que $v = (1,2)$.

Resposta: A função $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ é de classe C^1 já que as suas derivadas parciais,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = ye^x + z^2, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = e^x \ \text{ e } \ \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 2xz,$$

são funções contínuas em $\mathbb{R}^3$. Assim, f e g são diferenciáveis nos seus domínios, pelo que $f\circ g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é diferenciável em $(0,0)$ e

$$\begin{aligned}
D(f\circ g)(0,0) &= Df(g(0,0))\, Dg(0,0) \\
&= \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(0,1,2) & \frac{\partial f}{\partial y}(0,1,2) & \frac{\partial f}{\partial z}(0,1,2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2 & 8 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Finalmente, porque já vimos que $f\circ g$ é diferenciável em $(0,0)$, obtemos

$$D_{(1,2)}(f\circ g)(0,0) = D(f\circ g)(0,0)(1,2) = \begin{bmatrix} 2 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 18.$$

Exercício: Seja $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$h(x,y) = g\left(g\left(x^2, xy, x+y\right) + e^x, xy, g(x,x,x)\right),$$

onde $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável no seu domínio. Calcule $\frac{\partial h}{\partial x}(x,y)$ em função das derivadas parciais de g.

Resolução: Considere-se a função diferenciável $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, definida por

$$f(x,y) = \left(g\left(x^2, xy, x+y\right) + e^x, xy, g(x,x,x)\right).$$

Como $h = g \circ f$, podemos recorrer à regra da cadeia para obter

$$\begin{aligned}
\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial g}{\partial u}(f(x,y))\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial g}{\partial v}(f(x,y))\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial g}{\partial w}(f(x,y))\frac{\partial f_3}{\partial x}(x,y) \\
&= \frac{\partial g}{\partial u}(f(x,y))\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial g}{\partial v}(f(x,y)) + \frac{\partial g}{\partial w}(f(x,y))\frac{\partial f_3}{\partial x}(x,y)
\end{aligned}$$

Por outro lado, se considerarmos as funções diferenciáveis $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ e $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, definidas por

$$\varphi(x,y) = \left(x^2, xy, x+y\right) \text{ e } \psi(x,y) = (x,x,x),$$

temos

$$f_1(x,y) = g \circ \varphi(x,y) + e^x \text{ e } f_3(x,y) = g \circ \psi(x,y),$$

e, mais uma vez pela regra da cadeia, obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial g}{\partial u}(\varphi(x,y))\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial g}{\partial v}(\varphi(x,y))\frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial g}{\partial w}(\varphi(x,y))\frac{\partial \varphi_3}{\partial x}(x,y) + e^x \\
&= 2x\frac{\partial g}{\partial u}(\varphi(x,y)) + y\frac{\partial g}{\partial v}(\varphi(x,y)) + \frac{\partial g}{\partial w}(\varphi(x,y)) + e^x
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_3}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial g}{\partial u}(\psi(x,y))\frac{\partial \psi_1}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial g}{\partial v}(\psi(x,y))\frac{\partial \psi_2}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial g}{\partial w}(\psi(x,y))\frac{\partial \psi_3}{\partial x}(x,y) \\
&= \frac{\partial g}{\partial u}(\psi(x,y)) + \frac{\partial g}{\partial v}(\psi(x,y)) + \frac{\partial g}{\partial w}(\psi(x,y)).
\end{aligned}$$

Finalmente

$$\begin{aligned}
\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial g}{\partial u}(f(x,y))\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial g}{\partial v}(f(x,y)) + \frac{\partial g}{\partial w}(f(x,y))\frac{\partial f_3}{\partial x}(x,y) \\
&= \frac{\partial g}{\partial u}(f(x,y))\left(2x\frac{\partial g}{\partial u}(\varphi(x,y)) + y\frac{\partial g}{\partial v}(\varphi(x,y)) + \frac{\partial g}{\partial w}(\varphi(x,y)) + e^x\right) + \\
&\quad y\frac{\partial g}{\partial v}(f(x,y)) + \frac{\partial g}{\partial w}(f(x,y))\left(\frac{\partial g}{\partial u}(\psi(x,y)) + \frac{\partial g}{\partial v}(\psi(x,y)) + \frac{\partial g}{\partial w}(\psi(x,y))\right).
\end{aligned}$$

Aplicações geométricas

Definição: Chama-se caminho em $\mathbb{R}^n$ a qualquer função contínua $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ definida num intervalo de $\mathbb{R}$. Quando o intervalo I é aberto e γ é diferenciável em qualquer dos seus pontos, diz-se que γ é um caminho diferenciável.

Note-se que um caminho $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$, definido num intervalo aberto, é diferenciável se e só se as suas funções coordenadas $\gamma_1 : I \to \mathbb{R}, ..., \gamma_n : I \to \mathbb{R}$ são diferenciáveis. Neste caso a matriz jacobiana de γ em $t_0 \in I$,

$$\gamma'(t_0) = D\gamma(t_0) = \begin{bmatrix} \gamma_1'(t_0) \\ \vdots \\ \gamma_n'(t_0) \end{bmatrix},$$

pode ser identificada com um vector de $\mathbb{R}^n$, ou seja

$$\gamma'(t_0) = (\gamma_1'(t_0), ..., \gamma_n'(t_0)).$$

Isto significa que se olharmos para $\gamma(t)$ como vector de posição de uma partícula que se desloca em $\mathbb{R}^n$, a velocidade (instantânea) da partícula no instante t_0 é dada pelo vector $\gamma'(t_0)$, e é portanto um vector tangente à curva $C = \{\gamma(t) : t \in I\}$ no ponto $\gamma(t_0) \in C$.

Exercício: Determine a recta tangente, r, e a recta normal, s, à curva

$$C = \left\{\left(t, t^2\right) : t \in \mathbb{R}\right\}$$

no ponto $(1, 1)$.

Resolução: O caminho $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, definido por $\gamma(t) = (t, t^2)$, é diferenciável, com derivada dada por

$$\gamma'(t) = (1, 2t).$$

Como $C = \{\gamma(t) : t \in \mathbb{R}\}$ e $\gamma(1) = (1, 1)$, o vector $\gamma'(1) = (1, 2)$ é tangente à curva no ponto $(1, 1)$. Logo

$$r = \{(1, 1) + t(1, 2) : t \in \mathbb{R}\} \text{ e } s = \{(1, 1) + t(2, -1) : t \in \mathbb{R}\}.$$

Exercício: Determine a recta tangente, r, e a recta normal, s, à curva

$$C = \{(2\cos(t), 3\sin(t)) : t \in]0, 2\pi[\}$$

no ponto $\left(1, \frac{3}{2}\sqrt{3}\right)$.

Resolução: O caminho $\gamma :]0, 2\pi[\to \mathbb{R}^2$, definido por $\gamma(t) = (2\cos(t), 3\sin(t))$, é diferenciável, com derivada dada por

$$\gamma'(t) = (-2\sin(t), 3\cos(t)).$$

Como $C = \{\gamma(t) : t \in]0, 2\pi[\}$ e $\gamma(\frac{\pi}{3}) = \left(1, \frac{3}{2}\sqrt{3}\right)$, o vector $\gamma'(\frac{\pi}{3}) = \left(-\sqrt{3}, \frac{3}{2}\right)$ é tangente à curva no ponto $\left(\sqrt{2}, \frac{3}{2}\sqrt{2}\right)$. Logo

$$r = \left\{\left(1, \frac{3}{2}\sqrt{3}\right) + t\left(-\sqrt{3}, \frac{3}{2}\right) : t \in \mathbb{R}\right\} \text{ e } s = \left\{\left(1, \frac{3}{2}\sqrt{3}\right) + t\left(\frac{3}{2}, \sqrt{3}\right) : t \in \mathbb{R}\right\}.$$

Exercício: Determine a recta tangente, r, e o plano normal, α, à curva

$$C = \left\{ \left(e^t, \cos(t), \sin(t)\right) : t \in \left]-\pi, \pi\right[\right\}.$$

no ponto $(1,1,0)$.

Resolução: O caminho $\gamma : \left]-\pi, \pi\right[\to \mathbb{R}^3$, definido por $\gamma(t) = (e^t, \cos(t), \sin(t))$, é diferenciável, com derivada dada por

$$\gamma'(t) = \left(e^t, -\sin(t), \cos(t)\right).$$

Como $C = \{\gamma(t) : t \in \left]-\pi, \pi\right[\}$ e $\gamma(0) = (1,1,0)$, o vector $\gamma'(0) = (1,0,1)$ é tangente à curva no ponto $(1,1,0)$. Logo

$$r = \{(1,1,0) + t\,(1,0,1) : t \in \mathbb{R}\} \text{ e } \alpha = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + z = 1\right\}.$$

Definição: Seja $M \subset \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{p} \in M$.

1) Diz-se que um vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ é tangente a M no ponto p se existir um caminho diferenciável $\gamma : I \to M$ tal que

$$\gamma(t_0) = \mathbf{p} \text{ e } \gamma'(t_0) = \mathbf{v}, \text{ para algum } t_0 \in I.$$

2) Diz-se que um vector $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ é ortogonal a M no ponto p quando é ortogonal a qualquer vector tangente a M no ponto $\mathbf{p}$, ou seja

$$\mathbf{w} \cdot \mathbf{v} = 0, \text{ para qualquer vector } \mathbf{v} \text{ tangente a } M \text{ no ponto } \mathbf{p}.$$

Exercício: Seja $M \subset \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{p} \in M$. Mostre que:

a) Se $\mathbf{p} \in \operatorname{int}(M)$, então qualquer vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ é tangente a M no ponto $\mathbf{p}$;

b) Se $M = \{\mathbf{p}\}$, então só o vector nulo $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ é tangente a M no ponto $\mathbf{p}$;

c) Se $D \subset \mathbb{R}^p$ é um conjunto aberto, $\mathbf{a} \in D$ e $f : D \to M$ é uma função diferenciável no seu domínio tal que $f(\mathbf{a}) = \mathbf{p}$, então o vector $Df(\mathbf{a})(\mathbf{u}) \in \mathbb{R}^m$ é tangente ao conjunto M no ponto $\mathbf{p}$, para qualquer $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^p$.

d) Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é diferenciável no seu domínio e $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ é tangente ao conjunto M no ponto $\mathbf{p}$, então o vector $Df(\mathbf{p})(\mathbf{v}) \in \mathbb{R}^m$ é tangente ao conjunto $f(M)$ no ponto $f(\mathbf{p})$.

Resolução:

a) Consideremos uma bola $B_r(\mathbf{p}) \subset M$, um vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ e um número real positivo ϵ tal que $\epsilon \|\mathbf{v}\| < r$. Nestas condições, o caminho diferenciável $\gamma : \left]-\epsilon, \epsilon\right[\to M$, definido por $\gamma(t) = \mathbf{p} + t\mathbf{v}$, satisfaz $\gamma(0) = \mathbf{p}$ e $\gamma'(0) = \mathbf{v}$. Logo $\mathbf{v}$ é tangente a M no ponto $\mathbf{p}$.

b) Admitamos que $M = \{\mathbf{p}\}$ e que $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ é tangente a M no ponto $\mathbf{p}$. Isto significa que existe um caminho diferenciável $\gamma : I \to M$ tal que $\gamma'(t_0) = \mathbf{v}$, para algum $t_0 \in I$. Como a função γ é constante em I, obtemos $\mathbf{v} = \gamma'(t_0) = \mathbf{0}$.

c) Por a) sabemos que qualquer vector $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^p$ é tangente a D no ponto $\mathbf{a}$, pelo que podemos considerar um caminho diferenciável $\gamma : I \to D$ tal que

$$\gamma(t_0) = \mathbf{a} \text{ e } \gamma'(t_0) = \mathbf{u}.$$

Assim, porque a função $f : D \to M$ é diferenciável no seu domínio, também o caminho $\varphi = f \circ \gamma : I \to M$ é diferenciável e verifica

$$\varphi(t_0) = f(\gamma(t_0)) = f(\mathbf{a}) = \mathbf{p} \text{ e } \varphi'(t_0) = Df(\gamma(t_0))\,\gamma'(t_0) = Df(\mathbf{a})(\mathbf{u}),$$

donde se conclui que o vector $Df(\mathbf{a})(\mathbf{u}) \in\mathbb{R}^m$ é tangente ao conjunto M no ponto $\mathbf{p}$.

d) Se $\mathbf{v} \in\mathbb{R}^n$ é tangente a M no ponto $\mathbf{p}$, sabemos que existe um caminho diferenciável $\gamma : I \to M$ tal que

$$\gamma(t_0) = \mathbf{p} \text{ e } \gamma'(t_0) = \mathbf{v}.$$

Como $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é diferenciável no seu domínio, também o caminho $\varphi = f \circ \gamma : I \to f(M)$ é diferenciável e verifica

$$\varphi(t_0) = f(\gamma(t_0)) = f(\mathbf{p}) \text{ e } \varphi'(t_0) = Df(\gamma(t_0))\gamma'(t_0) = Df(\mathbf{p})(\mathbf{v}),$$

logo o vector $Df(\mathbf{p})(\mathbf{v}) \in\mathbb{R}^m$ é tangente ao conjunto $f(M)$ no ponto $f(\mathbf{p})$.

Definição: Dada uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e um número real α, define-se conjunto de nível α de f, como sendo

$$N(\alpha) = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : f(x_1, ..., x_n) = \alpha\}.$$

Teorema: Seja $M \subset \mathbb{R}^n$ e $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que $M = N(\alpha)$, para algum $\alpha \in \mathbb{R}$. Se f é diferenciável em $\mathbb{R}^n$, então o vector $\nabla f(\mathbf{p})$ é ortogonal a M em qualquer ponto $\mathbf{p} \in M$.

Exercício: Demonstre o teorema anterior. Sugestão: Utilize as alíneas a) e d) do exercício anterior para demonstrar que a igualdade $Df(\mathbf{p})(\mathbf{v}) = 0$, com $\mathbf{p} \in M$, é válida para qualquer vector $\mathbf{v}$ tangente a M em $\mathbf{p}$. Por fim, tenha em conta que $Df(\mathbf{p})(\mathbf{v}) = \nabla f(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{v}$.

Exercício: Determine a reta tangente e a recta normal á curva

$$C = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1\right\}$$

no ponto $\left(1, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$.

Resolução: Consideremos a função diferenciável $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por

$$f(x, y) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}.$$

Como $C = N(1)$ e $\nabla f(x, y) = \left(\frac{x}{2}, \frac{2y}{9}\right)$, vemos que o vector $\nabla f\left(1, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ é ortogonal a C no ponto $\left(1, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$. Logo

$$s = \left\{\left(1, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right) + t\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right) : t \in \mathbb{R}\right\} \text{ e } r = \left\{\left(1, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right) + t\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{2}\right)\right\}.$$

Exercício: Determine a recta normal, s, e o plano tangente, α, ao parabolóide

$$P = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 1 - x^2 - y^2\right\}$$

no ponto $(0, 1, 0)$.

Resolução: Consideremos a função diferenciável $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, definida por

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + z.$$

Como $P = N(1)$ e $\nabla f(x, y, z) = (2x, 2y, 1)$, vemos que o vector $\nabla f(0, 1, 0) = (0, 2, 1)$ é ortogonal a P no ponto $(0, 1, 0)$. Logo

$$s = \{(0, 1, 0) + t(0, 2, 1) : t \in \mathbb{R}\} \text{ e } \alpha = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2y + z = 2\right\}.$$

Exercício: Considere a superfície

$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{3} + \frac{(y-z)^2}{2} + (y+z)^2 = 12\right\}$$

Determine os pontos de S onde o plano tangente é horizontal.

Resolução: Consideremos a função diferenciável $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, definida por

$$f(x, y) = \frac{x^2}{3} + \frac{(y-z)^2}{2} + (y+z)^2.$$

Como $S = N(12)$ e $\nabla f(x, y, z) = \left(\frac{2}{3}x, 3y + z, y + 2z\right)$, vemos que pontos de S onde o plano tangente é horizontal são dados pelas soluções do sistema

$$\left\{\begin{array}{rcl} \frac{x^2}{3} + \frac{(y-z)^2}{2} + (y+z)^2 & = & 12 \\ \frac{2}{3}x & = & 0 \\ 3y + z & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} y^2 & = & 1 \\ x & = & 0 \\ z & = & -3y \end{array}\right. ,$$

ou seja $(0, 1, -3)$ e $(0, -1, 3)$.

Derivadas parciais de ordem superior

Seja $D \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e $f : D \to \mathbb{R}$ uma função com derivadas parciais em qualquer ponto do seu domínio. As derivadas parciais das funções

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} : D \to \mathbb{R}$$

(quando existem) chamam-se derivadas parciais de f de ordem 2 e denotam-se por

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right), \text{ ou } \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \text{ quando } i = j.$$

Analogamente, quando f admite derivadas parciais de ordem 2, definem-se as derivadas parciais de f de ordem 3, como sendo as derivadas parciais das funções

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} : D \to \mathbb{R},$$

sendo denotadas por

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x_k \partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}\right).$$

Mais geralmente, definem-se as derivadas parciais de f de ordem p como sendo as derivadas parciais das derivadas parciais de ordem $p-1$:

$$\frac{\partial^p f}{\partial x_{i_p} \partial x_{i_{p-1}} \cdots \partial x_{i_1}} = \frac{\partial}{\partial x_{i_p}}\left(\frac{\partial^{p-1} f}{\partial x_{i_{p-1}} \cdots \partial x_{i_1}}\right).$$

Exemplo: Para a função $f(x, y, z) = z \arctan(xy)$, tem-se

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = \frac{yz}{1+x^2y^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = \frac{xz}{1+x^2y^2} \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = \arctan(xy),$$

pelo que:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z) = \frac{-2xy^3z}{(1+x^2y^2)^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y,z) = \frac{z - x^2y^2z}{(1+x^2y^2)^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(x,y,z) = \frac{y}{1+x^2y^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y,z) = \frac{z - x^2y^2z}{(1+x^2y^2)^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z) = \frac{-2x^3yz}{(1+x^2y^2)^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(x,y,z) = \frac{x}{1+x^2y^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x,y,z) = \frac{y}{1+x^2y^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x,y,z) = \frac{x}{1+x^2y^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z) = 0.$$

Definição: Diz-se que uma função $f : D \to \mathbb{R}$, definida num conjunto aberto $D \subset \mathbb{R}^n$, é de classe C^p, com $p \in \mathbb{N}$, se as suas derivadas parciais de ordem p existem e são contínuas em qualquer ponto de D.

Teorema (Schwarz): Se $D \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto aberto e $f : D \to \mathbb{R}$ é de classe C^2, então

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j},$$

para quaisquer $i, j = 1, ..., n$.

Definição: Seja $D \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e $f : D \to \mathbb{R}$ uma função com derivadas parciais de ordem 2 num ponto $\mathbf{a} \in D$. Define-se matriz Hessiana de f em $\mathbf{a}$, com sendo

$$Hf(\mathbf{a}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(\mathbf{a}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\mathbf{a}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(\mathbf{a}) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\mathbf{a}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2}(\mathbf{a}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(\mathbf{a}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(\mathbf{a}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(\mathbf{a}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n}(\mathbf{a}) \end{bmatrix}.$$

Exercício: Calcule o gradiente e a matriz Hessiana de cada uma das seguintes funções:

a) $f(x, y) = x \arctan(y)$

b) $g(x, y, z) = \ln(xy) + e^z$

Resolução: a) Como

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \arctan(y) \text{ e } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x}{1 + y^2}$$

temos

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 0, \ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{1}{1 + y^2}, \ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{1}{1 + y^2} \text{ e } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \frac{-2xy}{(1 + y^2)^2}.$$

Logo

$$\nabla f(x, y) = \left(\arctan(y), \frac{x}{1 + y^2}\right) \text{ e } Hf(x, y) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{1+y^2} \\ \frac{1}{1+y^2} & \frac{-2xy}{(1+y^2)^2} \end{bmatrix}.$$

b) Como

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y, z) = \frac{1}{x}, \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x, y, z) = \frac{1}{y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial g}{\partial z}(x, y, z) = e^z$$

temos

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, y, z) = -\frac{1}{x^2}, \quad \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(x, y, z) = 0, \quad \frac{\partial^2 g}{\partial z \partial x}(x, y, z) = 0$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x, y, z) = 0, \quad \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x, y, z) = -\frac{1}{y^2}, \quad \frac{\partial^2 g}{\partial z \partial y}(x, y, z) = 0$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial z}(x, y, z) = 0, \quad \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial z}(x, y, z) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 g}{\partial z^2}(x, y, z) = e^z.$$

Logo

$$\nabla g(x, y, z) = \left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, e^z\right) \text{ e } Hg(x, y, z) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{x^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x, y, z) = -\frac{1}{y^2} & 0 \\ 0 & 0 & e^z \end{bmatrix}.$$

Exercício: Seja $w(x,y) = f(y-x, x+y)$, em que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é uma função de classe C^2. Mostre que se tem

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}(x,y) - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x,y) = 4\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}(u,v)\,,$$

com $u = y - x$ e $v = x + y$.

Resolução: Consideremos a função $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definida por $g(x,y) = (y-x, x+y)$. Como $w(x,y) = f \circ g(x,y)$, temos pela regra da cadeia

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial f}{\partial u}(g(x,y))\frac{\partial g_1}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial v}(g(x,y))\frac{\partial g_2}{\partial x}(x,y) \\
&= -\frac{\partial f}{\partial u}(g(x,y)) + \frac{\partial f}{\partial v}(g(x,y)) \\
&= \left(\frac{\partial f}{\partial v} \circ g\right)(x,y) - \left(\frac{\partial f}{\partial u} \circ g\right)(x,y)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w}{\partial y}(x,y) &= \frac{\partial f}{\partial u}(g(x,y))\frac{\partial g_1}{\partial y}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial v}(g(x,y))\frac{\partial g_2}{\partial y}(x,y) \\
&= \frac{\partial f}{\partial u}(g(x,y)) + \frac{\partial f}{\partial v}(g(x,y)) \\
&= \left(\frac{\partial f}{\partial u} \circ g\right)(x,y) + \left(\frac{\partial f}{\partial v} \circ g\right)(x,y)\,,
\end{aligned}$$

ou seja

$$\frac{\partial w}{\partial x}(x,y) = \psi(x,y) - \varphi(x,y) \ \text{ e } \ \frac{\partial w}{\partial y}(x,y) = \varphi(x,y) + \psi(x,y)\,, \text{ com } \varphi = \frac{\partial f}{\partial u} \circ g \text{ e } \psi = \frac{\partial f}{\partial v} \circ g.$$

Como, mais uma vez pela regra da cadeia, se tem:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial^2 u}(g(x,y))\frac{\partial g_1}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}(g(x,y))\frac{\partial g_2}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}(g(x,y)) - \frac{\partial^2 f}{\partial^2 u}(g(x,y))\,;$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial^2 u}(g(x,y))\frac{\partial g_1}{\partial y}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}(g(x,y))\frac{\partial g_2}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial^2 u}(g(x,y)) + \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}(g(x,y))\,;$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}(g(x,y))\frac{\partial g_1}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(g(x,y))\frac{\partial g_2}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(g(x,y)) - \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}(g(x,y))\,;$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}(g(x,y))\frac{\partial g_1}{\partial y}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial^2 v}(g(x,y))\frac{\partial g_2}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}(g(x,y)) + \frac{\partial^2 f}{\partial^2 v}(g(x,y))\,,$$

e

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u},$$

já que f é de classe C^2, obtém-se

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x,y) &= \frac{\partial \psi}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y) \\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(g(x,y)) - \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}(g(x,y)) - \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}(g(x,y)) + \frac{\partial^2 f}{\partial^2 u}(g(x,y)) \\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(g(x,y)) - 2\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}(g(x,y)) + \frac{\partial^2 f}{\partial^2 u}(g(x,y))
\end{aligned}$$

e

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}(x,y) &= \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y)+\frac{\partial \psi}{\partial y}(x,y) \\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial^2 u}(g(x,y))+\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}(g(x,y))+\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}(g(x,y))+\frac{\partial^2 f}{\partial^2 v}(g(x,y)) \\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial^2 u}(g(x,y))+2\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}(g(x,y))+\frac{\partial^2 f}{\partial^2 v}(g(x,y)).
\end{aligned}
$$

Logo

$$
\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}(x,y)-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x,y)=4\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}(g(x,y))=4\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}(y-x,x+y).
$$

Exercício: Seja $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ é uma função de classe C^2, $\mathbf{a}=(a_1,a_2)$, $\mathbf{v}=(v_1,v_2)\in\mathbb{R}^2$, e $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $\varphi(t)=f(\mathbf{a}+t\mathbf{v})$.

a) Mostre que $\varphi'(t)=\nabla f(\mathbf{a}+t\mathbf{v})\cdot\mathbf{v}$ e $\varphi''(t)=\mathbf{v}^T Hf(\mathbf{a}+t\mathbf{v})\,\mathbf{v}$.

b) Mostre que se $\nabla f(\mathbf{a})\cdot\mathbf{v}=0$ e $\mathbf{v}^T Hf(\mathbf{a})\,\mathbf{v}\neq 0$, então a função φ tem um extremo local em 0, que será mínimo ou máximo consoante $\mathbf{v}^T Hf(\mathbf{a})\,\mathbf{v}$ seja positivo ou negativo.

Resolução:

a) Consideremos a função $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$, definida por $g(t)=\mathbf{a}+t\mathbf{v}=(a_1+tv_1,a_2+tv_2)$. Como $\varphi=f\circ g$, obtemos (regra da cadeia):

$$
\varphi'(t)=\frac{\partial f}{\partial x_1}(g(t))\,g_1'(t)+\frac{\partial f}{\partial x_2}(g(t))\,g_2'(t)=\frac{\partial f}{\partial x_1}(g(t))\,v_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}(g(t))\,v_2=\nabla f(\mathbf{a}+t\mathbf{v})\cdot\mathbf{v}.
$$

Como

$$
\varphi'(t)=\frac{\partial f}{\partial x_1}(g(t))\,v_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}(g(t))\,v_2,
$$

obtemos, mais uma vez pela regra da cadeia

$$
\begin{aligned}
\varphi''(t) &= v_1\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(g(t))\,v_1+\frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_1}(g(t))\,v_2\right)+v_2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}(g(t))\,v_1+\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(g(t))\,v_2\right) \\
&= \begin{bmatrix} v_1 & v_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(g(t))\,v_1+\frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_1}(g(t))\,v_2 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}(g(t))\,v_1+\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(g(t))\,v_2\end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} v_1 & v_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(g(t)) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_1}(g(t)) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}(g(t)) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(g(t))\end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2\end{bmatrix} \\
&= \mathbf{v}^T Hf(\mathbf{a}+t\mathbf{v})\,\mathbf{v}.
\end{aligned}
$$

b) Por a) sabemos que a função $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ (de classe C^2) verifica $\varphi'(0)=\nabla f(\mathbf{a})\cdot\mathbf{v}$ e $\varphi''(0)=\mathbf{v}^T Hf(\mathbf{a})\,\mathbf{v}$. Logo, se $\nabla f(\mathbf{a})\cdot\mathbf{v}=0$ e $\mathbf{v}^T Hf(\mathbf{a})\,\mathbf{v}\neq 0$, teremos $\varphi'(0)=0$ e $\varphi''(0)\neq 0$, e como sabemos isto significa que φ tem um extremo local em 0, que será mínimo ou máximo consoante $\varphi''(0)$ seja positivo ou negativo.

Extremos

Definição: Dada uma função $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e um ponto $\mathbf{a} \in D$, diz-se que:

a) f tem um máximo relativo (ou local) em $\mathbf{a}$ se existe uma bola de centro em $\mathbf{a}$, $B_r(\mathbf{a})$, tal que

$$f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{a}), \text{ para qualquer } \mathbf{x} \in B_r(\mathbf{a}) \cap D.$$

Se $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{a})$, para qualquer $\mathbf{x} \in D$, diz-se que f tem um máximo absoluto em $\mathbf{a}$.

b) f tem um mínimo relativo (ou local) em $\mathbf{a}$ se existe uma bola de centro em $\mathbf{a}$, $B_r(\mathbf{a})$, tal que

$$f(\mathbf{a}) \leq f(\mathbf{x}), \text{ para qualquer } \mathbf{x} \in B_r(\mathbf{a}) \cap D.$$

Se $f(\mathbf{a}) \leq f(\mathbf{x})$, para qualquer $\mathbf{x} \in D$, diz-se que f tem um mínimo absoluto em $\mathbf{a}$.

c) f tem um extremo em $\mathbf{a}$ se tem um máximo relativo ou mínimo relativo no mesmo ponto.

Proposição: Se uma função $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, diferenciável em $\mathbf{a} \in \operatorname{int}(D)$, tem um extremo em $\mathbf{a}$, então $\nabla f(\mathbf{a}) = 0$.

Nota: Se $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é diferenciável em $\mathbf{a} \in \operatorname{int}(D)$ e $\nabla f(\mathbf{a}) = 0$, diz-se que $\mathbf{a}$ é um ponto de estacionaridade de f.

Definição: Chama-se ponto de sela de f a um ponto de estacionaridade que não é ponto de extremo da função.

Definição: Dada uma matriz $n \times n$ simétrica A $(A^T = A)$ chama-se forma quadrática associada a A à aplicação $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por

$$q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

a) A forma quadrática diz-se definida positiva se $q(\mathbf{x}) > 0$, para qualquer $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$.

b) A forma quadrática diz-se definida negativa se $q(\mathbf{x}) < 0$, para qualquer $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$.

c) A forma quadrática diz-se semidefinida positiva se $q(\mathbf{x}) \geq 0$, para qualquer $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

d) A forma quadrática diz-se semidefinida negativa se $q(\mathbf{x}) \leq 0$, para qualquer $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

e) A forma quadrática diz-se indefinida se existem $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^n$ tais que $q(\mathbf{x}_1) > 0$ e $q(\mathbf{x}_2) < 0$.

Teorema: Seja A uma matriz $n \times n$ simétrica e $q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}$ a forma quadrática associada.

a) A forma quadrática q é definida positiva sse todos os valores proprios de A são positivos.

b) A forma quadrática q é definida negativa sse todos os valores proprios de A são negativos.

c) A forma quadrática q é semidefinida positiva sse todos os valores proprios de A são positivos ou nulos.

d) A forma quadrática q é semidefinida negativa sse todos os valores proprios de A são negativos ou nulos.

e) A forma quadrática q é indefinida sse a matriz A tem valores próprios positivos e negativos.

Teorema: Seja $D \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto, $f : D \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2, $\mathbf{a} \in D$ um ponto de estacionaridade de f e $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a forma quadrática associada à matriz Hessiana de f em $\mathbf{a}$, ou seja

$$q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T Hf(\mathbf{a})\,\mathbf{x}.$$

Nestas condições tem-se:

a) Se q é definida positiva, então f tem um mínimo relativo em $\mathbf{a}$;

b) Se q é definida negativa, então f tem um máximo relativo em $\mathbf{a}$;

c) Se q é indefinida, então f tem um ponto de sela $\mathbf{a}$;

d) Se f tem um mínimo relativo em $\mathbf{a}$, então q é semidefinida positiva;

e) Se f tem um máximo relativo em $\mathbf{a}$, então q é semidefinida negativa.

Exercício: Classifique os pontos de estacionaridade de

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - \frac{x^3}{3}.$$

Resolução: Os pontos de estacionaridade de f são as soluções de sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) & = & 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 2x - x^2 & = & 0 \\ 2y & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x(2-x) & = & 0 \\ y & = & 0 \end{array} \right. .$$

Temos portanto dois pontos de estacionaridade, $(0,0)$ e $(2,0)$. Por outro lado tem-se

$$Hf(x,y) = \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc} 2-2x & 0 \\ 0 & 2 \end{array} \right],$$

pelo que

$$Hf(0,0) = \left[\begin{array}{cc} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{array} \right] \text{ e } Hf(2,0) = \left[\begin{array}{cc} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{array} \right].$$

Como a matriz $Hf(0,0)$ tem um único valor próprio positivo, e $Hf(2,0)$ tem valores positivos e negativos, vemos que f tem um mínimo em $(0,0)$ e um ponto de sela em $(2,0)$.

Exercício: Classifique os pontos de estacionaridade da função

$$f(x,y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}.$$

Resolução: Os pontos de estacionaridade de f são as soluções de sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) & = & 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x - \frac{1}{x^2} & = & 0 \\ y - \frac{1}{y^2} & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x^3 - 1 & = & 0 \\ y^3 - 1 & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 1 \\ y & = & 1 \end{array} \right. .$$

Temos portanto um único ponto de estacionaridade, $(1,1)$. Por outro lado,

$$Hf(x,y) = \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc} 1+\frac{2}{x^3} & 0 \\ 0 & 1+\frac{2}{y^3} \end{array} \right],$$

pelo que

$$Hf\,(1,1) = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Como a matriz $Hf\,(1,1)$ tem um único valor próprio positivo, vemos que f tem um mínimo em $(1,1)$.

Exercício: Classifique os pontos de estacionaridade da função

$$f\,(x,y) = x^3 - y^2.$$

Resolução: Os pontos de estacionaridade de f são as soluções de sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}\,(x,y) & = & 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}\,(x,y) & = & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 & = & 0 \\ -2y & = & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x & = & 0 \\ y & = & 0 \end{cases}.$$

Temos portanto um único ponto de estacionaridade, $(0,0)$. Por outro lado,

$$Hf\,(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\,(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\,(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6x & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix},$$

pelo que

$$Hf\,(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Note-se que, como a matriz $Hf\,(0,0)$ é semidefinida negativa, isto apenas permite concluir que f tem um máximo ou um ponto de sela no ponto $(0,0)$. No entanto, como $f\,(0,0) = 0$ e $f\,(x,0) = x^3$, vemos que f toma valores positivos e negativos em qualquer bola com centro em $(0,0)$. Logo f tem um ponto de sela em $(0,0)$.

Exercício: Classifique os pontos de estacionaridade da função

$$f\,(x,y) = x^4 - y^4.$$

Resolução: Os pontos de estacionaridade de f são as soluções de sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}\,(x,y) & = & 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}\,(x,y) & = & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^3 & = & 0 \\ -4y^3 & = & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x & = & 0 \\ y & = & 0 \end{cases}.$$

Temos portanto um único ponto de estacionaridade, $(0,0)$. Por outro lado,

$$Hf\,(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\,(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\,(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12x^2 & 0 \\ 0 & -12y^2 \end{bmatrix},$$

pelo que

$$Hf\,(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Neste caso a matriz Hessiana é completamente inútil para classificar o ponto de estacionaridade. No entanto, como $f\,(0,0) = 0$, $f\,(x,0) = x^4$ e $f\,(0,y) = -y^4$ vemos que f toma valores positivos e negativos em qualquer bola com centro em $(0,0)$. Logo f tem um ponto de sela em $(0,0)$.

Exercício: Classifique os pontos de estacionaridade da função

$$f(x,y) = \frac{y^2}{2} + xy + x^4.$$

Resolução: Os pontos de estacionaridade de f são as soluções de sistema

$$\left\{\begin{array}{rcl} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) & = & 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 4x^3 + y & = & 0 \\ y + x & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 4x^3 - x & = & 0 \\ y & = & -x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x(4x^2-1) & = & 0 \\ y & = & -x \end{array}\right. .$$

Temos portanto três pontos de estacionaridade: $(0,0)$, $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ e $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Por outro lado,

$$Hf(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12x^2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

pelo que

$$Hf(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } Hf\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = Hf\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Como o polinómio característico de $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ é

$$\det\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{bmatrix} = -\lambda(1-\lambda) - 1 = \lambda^2 - \lambda - 1$$

e

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \vee \lambda = \frac{1-\sqrt{5}}{2},$$

vemos que os valores próprios de $Hf(0,0)$ são $\frac{1+\sqrt{5}}{2} > 0$ e $\frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$. Logo f tem um ponto de sela em $(0,0)$.

Como o polinómio característico de $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ é

$$\det\left(\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \det \begin{bmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{bmatrix} = (3-\lambda)(1-\lambda) - 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 2$$

e

$$\lambda^2 - 4\lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2 + \sqrt{2} \vee \lambda = 2 - \sqrt{2},$$

vemos que os valores próprios de $Hf\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = Hf\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ são $2+\sqrt{2} > 0$ e $2-\sqrt{2} > 0$. Logo f tem dois pontos de mínimo em $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ e $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Exercício: Classifique os pontos de estacionaridade da função

$$f(x,y,z) = xy + xz + yz - x + z.$$

Resolução: Os pontos de estacionaridade de f são as soluções de sistema

$$\left\{\begin{array}{rcl} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) & = & 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) & = & 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} y + z - 1 & = & 0 \\ x + z & = & 0 \\ x + y + 1 & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} y + z & = & 1 \\ x + z & = & 0 \\ x + y & = & -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} z & = & 1 \\ y & = & 0 \\ x & = & -1 \end{array}\right. .$$

Temos portanto um único ponto de estacionaridade: $(-1,0,1)$. Por outro lado:

$$Hf(x,y,z)=\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z) & \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y,z) & \frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x}(x,y,z) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y,z) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z) & \frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}(x,y,z) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}(x,y,z) & \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}(x,y,z) & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

pelo que

$$Hf(-1,0,1)=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Como o polinómio característico de $Hf(-1,0,1)$ é

$$\det(Hf(-1,0,1)-\lambda I)=\det\begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{bmatrix}=-\lambda^3+3\lambda+2=(2-\lambda)(\lambda+1)^2,$$

os valores próprios de $Hf(-1,0,1)$ são -1 e 2, pelo que f tem um ponto de sela em $(-1,0,1)$.

Exercício: Determine e classifique os pontos de estacionaridade da função

$$f(x,y)=x^4-y^4-2x^2+2ay^2$$

para cada valor do parâmetro $a\in\mathbb{R}$.

Resolução: Os pontos de estacionaridade de f são as soluções de sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) & = & 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) & = & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^3-4x & = & 0 \\ -4y^3+4ay & = & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x^2-1) & = & 0 \\ y(a-y^2) & = & 0 \end{cases}$$

e dependem do parâmetro $a\in\mathbb{R}$, a saber:

$$\begin{cases} (0,0),(\pm1,0) & \text{se} \quad a\leq 0 \\ (0,0),(\pm1,0),(0,\pm\sqrt{a}),(\pm1,\pm\sqrt{a}) & \text{se} \quad a>0 \end{cases}$$

Como

$$Hf(x,y)=\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 12x^2-4 & 0 \\ 0 & -12y^2+4a \end{bmatrix},$$

obtemos:

$$Hf(0,0)=\begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 4a \end{bmatrix} \text{ e } Hf(\pm1,0)=\begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 4a \end{bmatrix}, \text{ para qualquer } a\in\mathbb{R};$$

$$Hf\left(0,\pm\sqrt{a}\right)=\begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -8a \end{bmatrix} \text{ e } Hf\left(\pm1,\pm\sqrt{a}\right)=\begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -8a \end{bmatrix}, \text{ para } a>0.$$

Temos portanto:

Se $a<0$, a função tem um máximo local em $(0,0)$ e dois pontos de sela em $(\pm1,0)$.

Se $a>0$, a função tem dois máximos locais nos pontos $(0,\pm\sqrt{a})$, dois mínimos locais nos pontos $(\pm1,0)$, e cinco pontos de sela nos pontos $(0,0)$ e $(\pm1,\pm\sqrt{a})$.

Se $a=0$, a matriz $Hf(0,0)$ é semidefinida negativa e as matrizes $Hf(\pm1,0)$ são semi-definidas positivas, pelo que neste caso a classificação dos três pontos de estacionaridade não se pode deduzir das correspondentes matrizes Hessianas. No entanto porque, para $a = 0$, se tem

$$f(x, y) = x^4 - y^4 - 2x^2$$

facilmente se verifica que f tem um máximo local em $(0, 0)$, já que $f(0, 0) = 0$ e $f(x, y) \leq 0$ para (x, y) suficientemente próximo de $(0, 0)$ (note que $x^4 - 2x^2 \leq 0$ para x suficientemente próximo de 0). Nos pontos $(\pm 1, 0)$ a situação é diferente: se considerarmos as funções reais de variável real

$$\varphi(t) = f(\pm 1, t) = -1 - t^4 \text{ e } \psi(t) = f(t \pm 1, 0) = (t \pm 1)^4 - 2(t \pm 1)^2,$$

vemos que a primeira tem um máximo em 0, e a segunda um mínimo já que $\psi'(0) = 0$ e $\psi''(0) = 8$. Logo a função f tem dois pontos de sela em $(\pm 1, 0)$.

Teorema da função inversa

Recorde que se $f : A \to B$ é uma aplicação injectiva, com contradomínio $f(A) = \{f(x) : x \in A\}$, a inversa de f é a aplicação $f^{-1} : f(A) \to A$ definida por

$$f^{-1}(f(x)) = x, \text{ para qualquer } x \in A.$$

Trata-se portanto da única aplicação de $f(A)$ em A que verifica

$$\left(f^{-1} \circ f\right)(x) = x, \text{ para qualquer } x \in A$$

e

$$\left(f \circ f^{-1}\right)(y) = y, \text{ para qualquer } y \in f(A).$$

Mais geralmente, diz-se que uma aplicação $f : A \to B$ é injectiva (ou invertível) num conjunto $C \subset A$, quando a restrição de f a C é injectiva.

Se $f : A \to B$ é injectiva em $C \subset A$, chama-se inversa de f em C à aplicação $f^{-1} : f(C) \to C$ definida por

$$f^{-1}(f(x)) = x, \text{ para qualquer } x \in C.$$

Teorema da função inversa: Seja $D \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto, $f : D \to \mathbb{R}^n$ uma função de classe C^1 e $\mathbf{a} \in D$. Se $\det(Df(a)) \neq 0$, então existe um conjunto aberto $V \subset D$, com $\mathbf{a} \in D$, e tal que:

1) A função f é injectiva em V;

2) O conjunto $f(V) \subset \mathbb{R}^n$ é aberto;

3) A função $f^{-1} : f(V) \to V$ é de classe C^1 e

$$Df^{-1}(f(\mathbf{x})) = (Df(\mathbf{x}))^{-1}, \text{ para qualquer } \mathbf{x} \in V.$$

Exercício: Considere a função $f : \{(x,y) : \mathbb{R}^2 : x \neq 0\} \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(x,y) = \left(xy, \frac{y}{x}\right)$.

a) Mostre que f não é injectiva.

b) Mostre que f tem inversa local em torno do ponto $(2,2)$ e calcule $Df^{-1}(4,1)$.

c) Mostre que f tem inversa local em torno do ponto $(-2,-2)$ e calcule $Df^{-1}(4,1)$.

Resolução:

a) Basta notar $f(-x,-y) = f(x,y)$, para qualquer (x,y) no domínio da função.

b) A função é de classe C^1 já que as derivadas parciais,

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = y,\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = x,\ \frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = -\frac{y}{x^2} \text{ e } \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{x},$$

são contínuas no seu domínio. Como a matriz jacobiana

$$Df(2,2) = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(2,2) & \frac{\partial u}{\partial y}(2,2) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(2,2) & \frac{\partial v}{\partial y}(2,2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

é invertível, pois

$$\det Df(2,2) = \det \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = 2 \neq 0,$$

o teorema da função inversa garante que existe um conjunto aberto $V \subset \mathbb{R}^2$, com $(2,2) \in V$, onde f é invertível. Além disso o conjunto $f(V) \subset \mathbb{R}^2$ é aberto e a função inversa $f^{-1} : f(V) \to V$ é de classe C^1 com matriz jacobiana dada por

$$Df^{-1}(f(x,y)) = (Df(x,y))^{-1}, \text{ para qualquer } (x,y) \in V.$$

Assim, porque $f(2,2) = (4,1)$, obtemos

$$Df^{-1}(4,1) = Df^{-1}(f(2,2)) = (Df(2,2))^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -1 \\ \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix}.$$

c) Como a matriz jacobiana

$$Df(-2,-2) = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(-2,-2) & \frac{\partial u}{\partial y}(-2,-2) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(-2,-2) & \frac{\partial v}{\partial y}(-2,-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

é invertível, pois

$$\det Df(-2,-2) = \det \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = 2 \neq 0,$$

o teorema da função inversa garante que existe um conjunto aberto $W \subset \mathbb{R}^2$, com $(-2,-2) \in W$, onde f é invertível. Além disso o conjunto $f(W) \subset \mathbb{R}^2$ é aberto e a função inversa $f^{-1} : f(W) \to W$ é de classe C^1 com matriz jacobiana dada por

$$Df^{-1}(f(x,y)) = (Df(x,y))^{-1}, \text{ para qualquer } (x,y) \in W.$$

Assim, porque $f(-2,-2) = (4,1)$, obtemos

$$Df^{-1}(4,1) = Df^{-1}(f(-2,-2)) = (Df(-2,-2))^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & 1 \\ -\frac{1}{4} & -1 \end{bmatrix}.$$

Exercício: Mostre que a função $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, definida por $f(x,y,z) = (2e^{yz-1}, e^{xz-1}, -e^{xy-1})$ é invertível numa vizinhança do ponto $(1,1,1)$, com inversa de classe C^1, e calcule a derivada $Df^{-1}(2,1,-1)$.

Resolução: a) A função é de classe C^1 já que as derivadas parciais,

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y,z) = 0,\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,y,z) = 2ze^{yz-1},\ \frac{\partial u}{\partial z}(x,y,z) = 2ye^{yz-1},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x,y,z) = ze^{xz-1},\ \frac{\partial v}{\partial y}(x,y,z) = 0,\ \frac{\partial v}{\partial z}(x,y,z) = xe^{xz-1}$$

$$\frac{\partial w}{\partial x}(x,y,z) = -ye^{xy-1},\ \frac{\partial w}{\partial y}(x,y,z) = -xe^{xy-1},\ \frac{\partial w}{\partial z}(x,y,z) = 0,$$

são contínuas no seu domínio. Como a matriz jacobiana

$$Df(1,1,1) = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(1,1,1) & \frac{\partial u}{\partial y}(1,1,1) & \frac{\partial u}{\partial z}(1,1,1) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(1,1,1) & \frac{\partial v}{\partial y}(1,1,1) & \frac{\partial v}{\partial z}(1,1,1) \\ \frac{\partial w}{\partial x}(1,1,1) & \frac{\partial w}{\partial y}(1,1,1) & \frac{\partial w}{\partial z}(1,1,1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

é invertível, pois

$$\det Df(1,1,1) = \det \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = -2\det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + 2\det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = -2-2 = -4 \neq 0,$$

o teorema da função inversa garante que existe um conjunto aberto $V \subset \mathbb{R}^3$, com $(1,1,1) \in V$, onde f é invertível e a função inversa $f^{-1} : f(V) \to V$ é de classe C^1 com matriz jacobiana dada por

$$Df^{-1}(f(x,y,z)) = (Df(x,y,z))^{-1}, \text{ para qualquer } (x,y,z) \in V.$$

Assim, porque $f(1,1,1) = (2,1,-1)$, obtemos

$$Df^{-1}(2,1,-1) = Df^{-1}(f(1,1,1)) = (Df(1,1,1))^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Exercício: Considere a função $f(x,y) = (x + y + \sin(x-y), 1 + \log(1+xy) - x)$.

a) Mostre que existe um conjunto aberto $V \subset \mathbb{R}^2$, com $(1,1) \in V$, onde f é invertível. Conclua que o sistema de equações $f(x,y) = (2, \log 2)$ tem solução única em V.

b) Determine $\frac{\partial x}{\partial u}(2,\log 2)$ e $\frac{\partial y}{\partial v}(2,\log 2)$, onde $x(u,v)$ e $y(u,v)$ designam as funções coordenadas da função inversa $f^{-1} : f(V) \to V$.

c) Mostre que se $\epsilon > 0$ é suficientemente pequeno e $(x(\epsilon), y(\epsilon))$ designa a única solução em V do sistema de equações $f(x,y) = (2+\epsilon, \log(2)+\epsilon)$, então $x(\epsilon) > 1$ e $y(\epsilon) > 1$.

Resolução: a) A função f é de classe C^1 já que as derivadas parciais,

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = 1 + \cos(x-y), \ \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = 1 - \cos(x-y), \ \frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = \frac{y}{1+xy} - 1 \text{ e } \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) = \frac{x}{1+xy},$$

são contínuas no seu domínio. Como a matriz jacobiana

$$Df(1,1) = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(1,1) & \frac{\partial u}{\partial y}(1,1) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(1,1) & \frac{\partial v}{\partial y}(1,1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

é invertível, pois

$$\det Df(1,1) = \det \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = 1 \neq 0,$$

o teorema da função inversa garante que existe um conjunto aberto $V \subset \mathbb{R}^2$, com $(1,1) \in V$, onde f é invertível. Assim, porque f é injectiva em V e $f(1,1) = (2, \log(2))$, pode-se concluir que a equação $f(x,y) = (2, \log 2)$ tem solução única em V.

b) Pelo teorema da função inversa, o conjunto $f(V) \subset \mathbb{R}^2$ é aberto e a função $f^{-1} : f(V) \to V$ é de classe C^1 com matriz jacobiana dada por

$$Df^{-1}(f(x,y)) = (Df(x,y))^{-1}, \text{ para qualquer } (x,y) \in V.$$

Assim, porque $f(1,1) = (2, \log 2)$, obtemos

$$Df^{-1}(2,\log 2) = Df^{-1}(f(1,1)) = (Df(1,1))^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 2 \end{bmatrix},$$

donde se deduz

$$\left[\begin{array}{cc} \frac{\partial x}{\partial u}(2,\log 2) & \frac{\partial x}{\partial v}(2,\log 2) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(2,\log 2) & \frac{\partial y}{\partial v}(2,\log 2) \end{array}\right] = Df^{-1}(2,\log 2) = \left[\begin{array}{cc} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 2 \end{array}\right].$$

Logo $\frac{\partial x}{\partial u}(2,\log 2) = \frac{1}{2}$ e $\frac{\partial y}{\partial v}(2,\log 2) = 2$.

c) Como o conjunto aberto $f(V) \subset \mathbb{R}^2$ contém o ponto $f(1,1) = (2,\log 2)$, podemos considerar um real $\delta > 0$ tal que $(2+t, \log(2)+t) \in f(V)$, para qualquer $t \in]-\delta,\delta[$. Isto significa que, para qualquer $t \in]-\delta,\delta[$, o sistema de equações $f(x,y) = (2+t,\log(2)+t)$ tem solução única em V dada por

$$(x(t), y(t)) = f^{-1}(2+t, \log(2)+t).$$

Note-se que, porque a função $f^{-1} : f(V) \to V$ é de classe C^1, as funções $x(t)$ e $y(t)$ são de classe C^1 e verificam

$$\left[\begin{array}{c} x'(0) \\ y'(0) \end{array}\right] = Df^{-1}(2,\log 2)\left[\begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 2 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} \end{array}\right].$$

Logo as funções $x(t)$ e $y(t)$, porque são de classe C^1 e têm derivada positiva em $t = 0$, são estritamente crescentes numa vizinhança de $t = 0$, donde se deduz que se $\epsilon > 0$ é suficientemente pequeno, então

$$x(\epsilon) > x(0) = 1 \text{ e } y(\epsilon) > y(0) = 1.$$

Teorema da função implícita

Teorema da função implícita para funções de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}$: Seja $D \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto aberto, $f : D \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 e $(a,b) \in D$ tal que $f(a,b) = 0$. Nestas condições tem-se:

1) Se $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \neq 0$, então existem intervalos abertos $I, J \subset \mathbb{R}$, com $a \in I$, $b \in J$ e $I \times J \subset D$, e uma função $g : I \to J$ de classe C^1 tal que

$$\{(x,y) \in I \times J : f(x,y) = 0\} = \{(x,y) : x \in I \text{ e } y = g(x)\}.$$

Além disso a derivada de g satisfaz

$$g'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, g(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x))}, \text{ para qualquer } x \in I.$$

Porque $g(a) = b$, tem-se em particular

$$g'(a) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)}{\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)}.$$

2) Se $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) \neq 0$, então existem intervalos abertos $I, J \subset \mathbb{R}$, com $a \in I$, $b \in J$ e $I \times J \subset D$, e uma função $g : J \to I$ de classe C^1 tal que

$$\{(x,y) \in I \times J : f(x,y) = 0\} = \{(x,y) : y \in J \text{ e } x = g(y)\}.$$

Além disso a derivada de g satisfaz

$$g'(y) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(g(y), y)}{\frac{\partial f}{\partial x}(g(y), y)}, \text{ para qualquer } y \in J,$$

Porque $g(b) = a$, tem-se em particular

$$g'(b) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)}{\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)}.$$

Exercício: Mostre que a equação $y \sin(x+y) = 0$ define implicitamente x como função de y nalguma vizinhança do ponto $(0,\pi)$, e calcule a derivada $\frac{dx}{dy}(\pi)$. Confirme o resultado explicitando x como função de y.

Resolução: A função $f(x,y) = y\sin(x+y)$ é de classe C^1, já que as derivadas parciais,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y\cos(x+y) \text{ e } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \sin(x+y) + y\cos(x+y),$$

são contínuas em $\mathbb{R}^2$. Como $f(0,\pi) = 0$ e $\frac{\partial f}{\partial x}(0,\pi) = \pi\cos(\pi) = -\pi \neq 0$, o teorema da função implícita garante que existem dois intervalos abertos, $I, J \subset \mathbb{R}$, com $0 \in I$ e $\pi \in J$, e uma função $g : J \to I$ de classe C^1 tal que

$$\{(x,y) \in I \times J : y\sin(x+y) = 0\} = \{(g(y), y) : y \in J\}$$

e cuja derivada em π é dada por

$$g'(\pi) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(0,\pi)}{\frac{\partial f}{\partial x}(0,\pi)} = -\frac{\sin(\pi)+\pi\cos(\pi)}{\pi\cos(\pi)} = -1.$$

Na formulação mais geral do teorema da função implícita trata-se de determinar condições para que um sistema de m equações da forma:

$$\begin{cases} F_1(x_1,...,x_n,y_1,...,y_m) = 0 \\ F_2(x_1,...,x_n,y_1,...,y_m) = 0 \\ \vdots \\ F_m(x_1,...,x_n,y_1,...,y_m) = 0 \end{cases},$$

onde $F_1,...,F_m$ são funções definidas num aberto $D \subset \mathbb{R}^{n+m}$, possa ser resolvido em ordem às m variáveis $y_1,...,y_m$, por forma que cada uma destas fique expressa (localmente) como função das restantes variáveis, $x_1,...,x_n$.

Veremos de seguida que o determinante

$$\frac{\partial(F_1,...,F_m)}{\partial(y_1,...,y_m)}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \det\begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(\mathbf{x},\mathbf{y}) & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m}(\mathbf{x},\mathbf{y}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1}(\mathbf{x},\mathbf{y}) & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m}(\mathbf{x},\mathbf{y}) \end{bmatrix},$$

com $\mathbf{x} = (x_1,...,x_n)$ e $\mathbf{y} = (y_1,...,y_m)$, a que habitualmente se chama jacobiano das funções $F_1,...,F_m$ em relação às variáveis $y_1,...,y_m$, desempenha um papel importante neste contexto.

Teorema da função implícita: Seja D um aberto de $\mathbb{R}^{n+m}$ e $F : D \to \mathbb{R}^m$ uma aplicação com funções coordenadas, $F_1,...,F_m$, de classe C^1. Admita-se que

$$(\mathbf{a},\mathbf{b}) = (a_1,...,a_n,b_1,...,b_m) \in D,$$

designa uma solução do sistema de equações $F(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \mathbf{0}$, com $\mathbf{x} = (x_1,...,x_n)$ e $\mathbf{y} = (y_1,...,y_m)$, tal que

$$\frac{\partial(F_1,...,F_m)}{\partial(y_1,...,y_m)}(\mathbf{a},\mathbf{b}) \neq 0.$$

Nestas condições, existem conjuntos abertos, $V \subset \mathbb{R}^n$ e $W \subset \mathbb{R}^m$, com $\mathbf{a} \in V$ e $\mathbf{b} \in W$, e uma aplicação $g : V \to W$ de classe C^1 tal que

$$\{(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in V \times W : F(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \mathbf{0}\} = \{(\mathbf{x},\mathbf{y}) : \mathbf{x} \in V \text{ e } \mathbf{y} = g(\mathbf{x})\}.$$

Além disso, as derivadas parciais $\frac{\partial g_i}{\partial x_j}$, com $i = 1,...,m$ e $j = 1,...,n$, satisfazem

$$\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}) = -\frac{\frac{\partial(F_1,...,F_m)}{\partial(y_1,...,y_{i-1},x_j,y_{i+1},...,y_m)}(\mathbf{x},g(\mathbf{x}))}{\frac{\partial(F_1,...,F_m)}{\partial(y_1,...,y_m)}(\mathbf{x},g(\mathbf{x}))}, \text{ para qualquer } \mathbf{x} \in V.$$

Porque $\mathbf{b} = g(\mathbf{a})$, tem-se em particular

$$\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(\mathbf{a}) = -\frac{\frac{\partial(F_1,...,F_m)}{\partial(y_1,...,y_{i-1},x_j,y_{i+1},...,y_m)}(\mathbf{a},\mathbf{b})}{\frac{\partial(F_1,...,F_m)}{\partial(y_1,...,y_m)}(\mathbf{a},\mathbf{b})}$$

Exercício: Mostre que a equação $2z + x^2z^5 + y^2x^3 + xy = 2$ define implicitamente z como função de (x, y) em torno do ponto $(0, 0, 1)$, e calcule a derivada parcial de segunda ordem $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}(0, 0)$.

Resolução: Consideremos a função $f(x, y, z) = 2z + x^2z^5 + y^2x^3 + xy - 2$. Note-se que f é de classe C^1 e o ponto $(0, 0, 1)$ é solução da equação $f(x, y, z) = 0$, já que $f(0, 0, 1) = 0$. Por outro lado, como

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = 2 + 5x^2z^4, \text{ para qualquer } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$$

obtém-se

$$\frac{\partial f}{\partial z}(0, 0, 1) = 2 \neq 0.$$

Pelo teorema da função implícita podemos então concluir que existem conjuntos abertos, $V \subset \mathbb{R}^2$ e $W \subset \mathbb{R}$, com $(0, 0) \in V$ e $1 \in W$, e uma função $g : V \to W$ de classe C^1 que, se denotada por $z(x, y)$, verifica

$$\{(x, y, z) \in V \times W : f(x, y, z) = 0\} = \{(x, y, z) : (x, y) \in V \text{ e } z = z(x, y)\}.$$

Fica portanto demonstrado que, na vizinhança $V \times W$ do ponto $(0, 0, 1)$, a equação $f(x, y, z) = 0$ define implicitamente z como função de (x, y).

Por outro lado, como

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 2xz^5 + 3y^2x^2 + y, \text{ para qualquer } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$$

teremos

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x, y) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z(x, y))}{\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z(x, y))} = -\frac{2xz(x, y)^5 + 3y^2x^2 + y}{2 + 5x^2z(x, y)^4}$$

para qualquer $(x, y) \in V$. Consequentemente,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}(x, y) &= -\frac{\left(10xz(x, y)^4 \frac{\partial z}{\partial y}(x, y) + 6yx^2 + 1\right)\left(2 + 5x^2z(x, y)^4\right)}{\left(2 + 5x^2z(x, y)^4\right)^2} \\ &\quad + \frac{\left(2xz(x, y)^5 + 3y^2x^2 + y\right)\left(20x^2z(x, y)^3 \frac{\partial z}{\partial y}(x, y)\right)}{\left(2 + 5x^2z(x, y)^4\right)^2},\end{aligned}$$

e porque $z(0, 0) = 1$, obtemos finalmente

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}(0, 0) = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}.$$

Exercício: Considere o conjunto $S \subset \mathbb{R}^3$ definido pelo seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} y^2 + z^2 &= x^2 + 1 \\ y^2 + \sin x + \sin z &= 1 \end{cases}.$$

a) Mostre que o conjunto S coincide com o gráfico de uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ nalguma vizinhançaa do ponto $(0, 1, 0)$, ou seja, duas das variáveis são funções da terceira.

b) Calcule $f'(0)$.

Resolução: Consideremos a função $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, definida por

$$F(x,y,z) = \left(y^2 + z^2 - x^2 - 1, y^2 + \sin x + \sin z - 1\right).$$

Note-se que F é de classe C^1 e o ponto $(0,1,0)$ é solução do sistema de equações $F(x,y,z) = (0,0)$, já que $F(0,1,0) = (0,0)$. Por outro lado, como

$$\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(x,y)}(x,y,z) = \det\begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x}(x,y,z) & \frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y,z) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y,z) & \frac{\partial F_2}{\partial y}(x,y,z) \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} -2x & 2y \\ \cos x & 2y \end{bmatrix} = -4xy - 2y\cos x$$

obtém-se

$$\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(x,y)}(0,1,0) = -2 \neq 0.$$

Pelo teorema da função implícita podemos então concluir que existem conjuntos abertos, $V \subset \mathbb{R}$ e $W \subset \mathbb{R}^2$, com $0 \in V$ e $(0,1) \in W$, e uma função $f : V \to W$ de classe C^1 que verifica

$$\{(x,y,z) \in V \times W : F(x,y,z) = (0,0)\} = \{(x,y,z) : z \in V \text{ e } (x,y) = f(z)\},$$

e porque o conjunto S é formado pelas soluções do sistema de equações $F(x,y,z) = (0,0)$, podemos escrever

$$S \cap (V \times W) = \{(x,y,z) : z \in V \text{ e } (x,y) = f(z)\}.$$

Fica assim demonstrado que, na vizinhança $V \times W$ do ponto $(0,1,0)$, o conjunto S coincide com o gráfico da função $f : V \subset \mathbb{R} \to W \subset \mathbb{R}^2$.

Por outro lado, como

$$\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(z,y)}(x,y,z) = \det\begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial z}(x,y,z) & \frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y,z) \\ \frac{\partial F_2}{\partial z}(x,y,z) & \frac{\partial F_2}{\partial y}(x,y,z) \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} 2z & 2y \\ \cos z & 2y \end{bmatrix} = 4yz - 2y\cos z,$$

e

$$\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(x,z)}(x,y,z) = \det\begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x}(x,y,z) & \frac{\partial F_1}{\partial z}(x,y,z) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y,z) & \frac{\partial F_2}{\partial z}(x,y,z) \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} -2x & 2z \\ \cos x & \cos z \end{bmatrix} = -2x\cos z - 2z\cos x,$$

obtemos

$$f_1'(0) = \frac{df_1}{dz}(0) = -\frac{\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(z,y)}(0,1,0)}{\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(x,y)}(0,1,0)} = -\frac{-2}{-2} = -1$$

e

$$f_2'(0) = \frac{df_2}{dz}(0) = -\frac{\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(x,z)}(0,1,0)}{\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(x,y)}(0,1,0)} = -\frac{0}{-2} = 0,$$

ou seja $f'(0) = (-1,0)$.

Exercício: Considere o conjunto $S \subset \mathbb{R}^2$ definido por

$$S = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = 0\right\}, \text{ com } f(x, y) = x^3 + xy^2 - y^3 - 1.$$

a) Mostre que qualquer vector $(0, c)$, com $c \in \mathbb{R}$, é tangente a S no ponto $(1, 0)$.

b) Conclua que um vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ é tangente a S no ponto $(1, 0)$ sse $\nabla f(1, 0) \cdot \mathbf{v} = 0$.

Resolução:

a) As derivadas parciais de f:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 + y^2 \text{ e } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2xy - 3y^2,$$

são obviamente contínuas, pelo que f é de classe de C^1. Assim, porque

$$f(1, 0) = 0 \text{ e } \frac{\partial f}{\partial x}(1, 0) = 3 \neq 0,$$

o teorema da função implícita garante que existem intervalos abertos $I, J \subset \mathbb{R}$, com $1 \in I$ e $0 \in J$, e uma função $g : J \to I$ de classe C^1 tal que

$$(I \times J) \cap S = \{(x, y) \in I \times J : f(x, y) = 0\} = \{(x, y) : y \in J \text{ e } x = g(y)\},$$

e

$$g'(0) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(1, 0)}{\frac{\partial f}{\partial x}(1, 0)} = -\frac{0}{3} = 0.$$

Isto significa que, para qualquer $c \in \mathbb{R}$ e $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, a aplicação

$$\gamma_c :]-\epsilon, \epsilon[\to \mathbb{R}^2,$$

definida por $\gamma_c(t) = (g(ct), ct)$, é um caminho diferenciável em S tal que

$$\gamma_c(0) = (g(0), 0) = (1, 0) \text{ e } \gamma_c'(0) = (cg'(0), c) = (0, c).$$

Logo, o vector $(0, c)$ é tangente a S no ponto $(1, 0)$.

b) Basta notar que o vector $\nabla f(1, 0) = (3, 0)$ é ortogonal a S em $(1, 0)$, e ter em conta a alínea anterior, onde se demonstra que qualquer vector ortogonal $\nabla f(1, 0)$ é tangente a S no ponto $(1, 0)$.

Método dos Multiplicadores de Lagrange

Definição: Seja $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função e $f_{|S} : S \to \mathbb{R}$ a restrição de f a um subconjunto $S \subset D$. Dado um ponto $\mathbf{a} \in S$, diz-se que:

a) $f_{|S}$ tem um máximo local em $\mathbf{a}$, se existe uma bola de centro em $\mathbf{a}$, $B_r(\mathbf{a})$, tal que

$$f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{a}), \text{ para qualquer } \mathbf{x} \in B_r(\mathbf{a}) \cap S.$$

Se $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{a})$, para qualquer $\mathbf{x} \in S$, diz-se que $f_{|S}$ tem um máximo absoluto em $\mathbf{a}$.

b) $f_{|S}$ tem um mínimo local em $\mathbf{a}$, se existe uma bola de centro em $\mathbf{a}$, $B_r(\mathbf{a})$, tal que

$$f(\mathbf{a}) \leq f(\mathbf{x}), \text{ para qualquer } \mathbf{x} \in B_r(\mathbf{a}) \cap S.$$

Se $f(\mathbf{a}) \leq f(\mathbf{x})$, para qualquer $\mathbf{x} \in S$, diz-se que $f_{|S}$ tem um mínimo absoluto em $\mathbf{a}$.

c) $f_{|S}$ tem um extremo local em $\mathbf{a}$, se $f_{|S}$ tem um máximo ou mínimo local em $\mathbf{a}$.

Teorema de Weierstrass: Qualquer função contínua $f : S \to \mathbb{R}$ num conjunto compacto $S \subset \mathbb{R}^n$ tem mínimo e máximo absolutos em S. Isto é, existem $\mathbf{a} \in S$ e $\mathbf{b} \in S$ tais que

$$f(\mathbf{a}) \leq f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{b}) \text{ para qualquer } \mathbf{x} \in S.$$

Proposição: Seja D um aberto de $\mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável e $S \subset D$. Se $f_{|S}$ tem um extremo local em $\mathbf{a} \in S$, então $\nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{v} = 0$, para qualquer vector $\mathbf{v}$ tangente a S no ponto $\mathbf{a}$.

Proposição: Seja D um aberto de $\mathbb{R}^n$ e $F : D \to \mathbb{R}^m$, com $n \geq m$, uma função de classe C^1. Admita-se que a matriz jacobiana $DF(\mathbf{a})$, com $\mathbf{a} \in S = \{\mathbf{x} \in D : F(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$, tem característica m e que $T_{\mathbf{a}}S$ designa o subconjunto de $\mathbb{R}^n$ formado pelos vectores tangentes a S no ponto $\mathbf{a}$. Nestas condições tem-se

$$T_{\mathbf{a}}S = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n : DF(\mathbf{a})\,\mathbf{v} = \mathbf{0}\}.$$

Teorema (Método dos Multiplicadores de Lagrange): Seja D um aberto de $\mathbb{R}^n$ e $f : D \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1. Admita-se que $F : D \to \mathbb{R}^m$, com $n \geq m$, é uma função de classe C^1, com funções coordenadas $F_1, ..., F_m$, tal que

$$\text{rank} DF(\mathbf{x}) = m, \text{ para qualquer } \mathbf{x} \in S = \{\mathbf{x} \in D : F(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}.$$

Nestas condições, se a restrição de f a S tem um extremo local em $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n) \in S$, então existem números reais $\lambda_1, ..., \lambda_m$ tais que

$$\nabla f(x_1, ..., x_n) = \lambda_1 \nabla F_1(x_1, ..., x_n) + \cdots + \lambda_m \nabla F_m(x_1, ..., x_n),$$

ou seja, o ponto $(x_1, ..., x_n, \lambda_1, ..., \lambda_m) \in \mathbb{R}^{n+m}$ é solução do sistema

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, ..., x_n) - \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(x_1, ..., x_n) - \cdots - \lambda_m \frac{\partial F_m}{\partial x_1}(x_1, ..., x_n) & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, ..., x_n) - \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(x_1, ..., x_n) - \cdots - \lambda_m \frac{\partial F_m}{\partial x_n}(x_1, ..., x_n) & = & 0 \\ F_1(x_1, ..., x_n) & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ F_m(x_1, ..., x_n) & = & 0 \end{array} \right. .$$

Exercício: Determinar os extremos da função $f(x,y) = x^4 + y^2$ no conjunto

$$S = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\right\}.$$

Resolução: Se considerarmos a função $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por $F(x,y) = x^2 + y^2 - 1$, temos

$$S = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : F(x,y) = 0\right\}$$

e

$$\operatorname{rank} DF(x,y) = \operatorname{rank} \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial F}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) \end{array}\right] = \operatorname{rank} \left[\begin{array}{cc} 2x & 2y \end{array}\right] = 1,$$

para qualquer $(x,y) \in S$. Assim, porque as soluções (x,y,λ) do sistema de equações,

$$\left\{\begin{array}{rcl} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \lambda \frac{\partial F}{\partial x}(x,y) & = & 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) - \lambda \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) & = & 0 \\ F(x,y) & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 4x^3 - \lambda 2x & = & 0 \\ 2y - \lambda 2y & = & 0 \\ x^2 + y^2 & = & 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x(2x^2 - \lambda) & = & 0 \\ y(1-\lambda) & = & 0 \\ x^2 + y^2 & = & 1 \end{array}\right.,$$

são $(\pm 1, 0, 2), (0, \pm 1, 1)$ e $\left(\frac{\pm\sqrt{2}}{2}, \frac{\pm\sqrt{2}}{2}, 1\right)$, vemos que os possíveis pontos de extremo da restrição de f a S são: $(\pm 1, 0), (0, \pm 1)$ e $\left(\frac{\pm\sqrt{2}}{2}, \frac{\pm\sqrt{2}}{2}\right)$. Por fim, porque

$$f(\pm 1, 0) = f(0, \pm 1) = 1 \text{ e } f\left(\frac{\pm\sqrt{2}}{2}, \frac{\pm\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3}{4},$$

e porque pelo Teorema de Weirstrass temos a garantia de que a restrição de f ao compacto S tem máximo e mínimo absolutos, podemos concluir que $(\pm 1, 0)$, $(0, \pm 1)$ são pontos de máximo absoluto, e $\left(\frac{\pm\sqrt{2}}{2}, \frac{\pm\sqrt{2}}{2}\right)$ são pontos de mínimo absoluto.

Exercício: Determinar os extremos da função $f(x,y,z) = x + y + z$ no conjunto

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 3\right\}.$$

Resolução: Se considerarmos a função $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, definida por $F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 3$, temos

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : F(x,y,z) = 0\right\}$$

e

$$\operatorname{rank} DF(x,y,z) = \operatorname{rank} \left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z) & \frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z) & \frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z) \end{array}\right] = \operatorname{rank} \left[\begin{array}{ccc} 2x & 2y & 2z \end{array}\right] = 1$$

para qualquer $(x,y,z) \in S$. Assim, porque as soluções (x,y,z,λ) do sistema de equações,

$$\left\{\begin{array}{rcl} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) - \lambda \frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z) & = & 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) - \lambda \frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z) & = & 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) - \lambda \frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z) & = & 0 \\ F(x,y,z) & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 1 - 2\lambda x & = & 0 \\ 1 - 2\lambda y & = & 0 \\ 1 - 2\lambda z & = & 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 & = & 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x & = & \frac{1}{2\lambda} \\ y & = & \frac{1}{2\lambda} \\ z & = & \frac{1}{2\lambda} \\ \frac{3}{4\lambda^2} & = & 3 \end{array}\right.,$$

são $\left(1,1,1,\frac{1}{2}\right)$ e $\left(-1,-1,-1,-\frac{1}{2}\right)$, vemos que os possíveis pontos de extremo da restrição de f a S são $(1,1,1)$ e $(-1,-1,-1)$. Por fim, porque

$$f(1,1,1) = 3 \text{ e } f(-1,-1,-1) = -3,$$

e porque pelo Teorema de Weirstrass temos a garantia de que a restrição de f ao compacto S tem máximo e mínimo absolutos, podemos concluir que $(1,1,1)$, $(-1,-1,-1)$ são pontos de máximo absoluto e de mínimo absoluto, respectivamente.

Exercício: Determinar os extremos da função $f(x,y,z) = z$ no conjunto

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 4 \text{ e } x + z = 1\right\}.$$

Resolução: Se considerarmos a função $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, definida por

$$F(x,y,z) = \left(x^2 + y^2 - 4, x + z - 1\right),$$

temos

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : F(x,y,z) = (0,0)\right\}$$

e

$$\text{rank} DF(x,y,z) = \text{rank} \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x}(x,y,z) & \frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y,z) & \frac{\partial F_1}{\partial z}(x,y,z) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y,z) & \frac{\partial F_2}{\partial y}(x,y,z) & \frac{\partial F_2}{\partial z}(x,y,z) \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} 2x & 2y & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 2,$$

para qualquer $(x,y,z) \in S$. Assim, porque as soluções $(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2)$ do sistema de equações,

$$\left\{\begin{array}{lcl} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) - \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial x}(x,y,z) - \lambda_2 \frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y,z) & = & 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) - \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y,z) - \lambda_2 \frac{\partial F_2}{\partial y}(x,y,z) & = & 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) - \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial z}(x,y,z) - \lambda_2 \frac{\partial F_2}{\partial z}(x,y,z) & = & 0 \\ F_1(x,y,z) & = & 0 \\ F_2(x,y,z) & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} -2\lambda_1 x - \lambda_2 & = & 0 \\ -2\lambda_1 y & = & 0 \\ 1 - \lambda_2 & = & 0 \\ x^2 + y^2 & = & 4 \\ x + z & = & 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} \lambda_1 & = & -\frac{1}{2x} \\ y & = & 0 \\ \lambda_2 & = & 1 \\ x^2 & = & 4 \\ z & = & 1 - x \end{array}\right.,$$

são $\left(2,0,-1,-\frac{1}{4},1\right)$ e $\left(-2,0,3,\frac{1}{4},1\right)$, vemos que os possíveis pontos de extremo da restrição de f a S são: $(2,0,-1)$ e $(-2,0,3)$. Por fim, porque

$$f(2,0,-1) = -1 \text{ e } f(-2,0,3) = 3,$$

e porque pelo Teorema de Weirstrass temos a garantia de que a restrição de f ao compacto S tem máximo e mínimo absolutos, podemos concluir que $(-2,0,3)$, $(2,0,-1)$ são pontos de máximo absoluto e de mínimo absoluto, respectivamente.

Exercício: Determinar os ponto da superfície $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 - y^2 + 1\}$ mais próximos da origem.

Resolução: Consideremos a função $F(x,y,z) = z - x^2 + y^2 - 1$. Como

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : F(x,y,z) = 0\right\},$$

e o quadrado da distância de um ponto $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ a $(0,0,0)$ é dado por

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2,$$

teremos de encontrar os pontos de S onde a restrição de f a S tem mínimo absoluto. Como as soluções (x,y,z,λ) do sistema de equações,

$$\left\{\begin{array}{lcl} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) - \lambda \frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z) & = & 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) - \lambda \frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z) & = & 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) - \lambda \frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z) & = & 0 \\ F(x,y,z) & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} 2x + 2\lambda x & = & 0 \\ 2y - 2\lambda y & = & 0 \\ 2z - \lambda & = & 0 \\ z - x^2 + y^2 & = & 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x(1+\lambda) & = & 0 \\ y(1-\lambda) & = & 0 \\ z & = & \frac{\lambda}{2} \\ y^2 - x^2 & = & 1 - \frac{\lambda}{2} \end{array}\right.,$$

são $(0,0,1,2)$ e $\left(0, \frac{\pm\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$, vemos que os possíveis pontos de extremo da restrição de f a S são: $(0,0,1)$ e $\left(0, \frac{\pm\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Por fim, porque

$$f(0,0,1) = 1 \text{ e } f\left(0, \frac{\pm\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4},$$

podemos concluir que os pontos de S mais próximos de $(0,0,0)$ são $\left(0, \frac{\pm\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Exercício: Determinar os extremos absolutos da função $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + 2z^2 - x - y$ na bola

$$B = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 2\right\}.$$

Resolução: Comecemos por determinar os pontos de estacionaridade de f no interior de B. Como

$$\nabla f(x,y,z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z), \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)\right) = (2x-1, 2y-1, 4z),$$

vemos que $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$ é o único ponto de estacionaridade de f no interior de B.

De seguida, consideremos a superfície

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 2\right\}$$

e utilizemos o método dos multiplicadores de Lagrange para identificar os extremos da restrição de f a S. Como

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : F(x,y,z) = 0\right\}, \text{ com } F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2,$$

e as soluções (x,y,z,λ) do sistema de equações,

$$\left\{\begin{array}{lcl} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) - \lambda\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z) & = & 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) - \lambda\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z) & = & 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) - \lambda\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z) & = & 0 \\ F(x,y,z) & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} 2x - 1 - 2\lambda x & = & 0 \\ 2y - 1 - 2\lambda y & = & 0 \\ 4z - 2\lambda z & = & 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 & = & 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x & = & \frac{1}{2(1-\lambda)} \\ y & = & \frac{1}{2(1-\lambda)} \\ 2z(2-\lambda) & = & 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 & = & 2 \end{array}\right.,$$

são $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{\pm\sqrt{6}}{2}, 2\right)$, $\left(-1,-1,0,\frac{3}{2}\right)$ e $\left(1,1,0,\frac{1}{2}\right)$, vemos que os possíveis pontos de extremo da restrição de f a S são $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{\pm\sqrt{6}}{2}\right)$, $(-1,-1,0)$ e $(1,1,0)$.

Com o que vimos podemos concluir que os possíveis pontos de extremo da restrição de f a B são

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right), \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{\pm\sqrt{6}}{2}\right), (-1,-1,0) \text{ e } (1,1,0).$$

Por fim, porque

$$f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) = -\frac{1}{2}, f\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{\pm\sqrt{6}}{2}\right) = \frac{9}{2}, f(-1,-1,0) = 4 \text{ e } f(1,1,0) = 0$$

e porque pelo Teorema de Weirstrass temos a garantia de que a restrição de f ao compacto B tem máximo e mínimo absolutos, podemos concluir que $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{\pm\sqrt{6}}{2}\right)$ e $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$ são pontos de máximo absoluto e de mínimo absoluto, respectivamente.

Exercício: Determinar o valor máximo da área de um rectângulo inscrito numa elipse de semieixos a e b.

Resolução: Consideremos a função $F(x,y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1$. Como a elipse de semieixos $a > 0$ e $b > 0$ é dada por

$$S = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : F(x,y) = 0\right\},$$

e o quadrado da área de qualquer rectângulo com vértices em $(x,y), (-x,y), (-x,-y), (x,-y)$ é dado por

$$f(x,y) = 16x^2y^2$$

teremos de encontrar o máximo absoluto da restrição de f a S. Como as soluções (x,y,λ) do sistema de equações,

$$\left\{\begin{array}{lcl} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \lambda \frac{\partial F}{\partial x}(x,y) & = & 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) - \lambda \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) & = & 0 \\ F(x,y) & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} 32xy^2 - \frac{2\lambda x}{a^2} & = & 0 \\ 32yx^2 - \frac{2\lambda y}{b^2} & = & 0 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} & = & 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x\left(16y^2 - \frac{\lambda}{a^2}\right) & = & 0 \\ y\left(16x^2 - \frac{\lambda}{b^2}\right) & = & 0 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} & = & 1 \end{array}\right.,$$

são $(0, \pm b, 0)$, $(\pm a, 0, 0)$ e $\left(\frac{\pm a\sqrt{2}}{2}, \frac{\pm b\sqrt{2}}{2}, 8a^2b^2\right)$, vemos que os possíveis pontos de extremo da restrição de f a S são: $(0, \pm b)$, $(\pm a, 0)$ e $\left(\frac{\pm a\sqrt{2}}{2}, \frac{\pm b\sqrt{2}}{2}\right)$. Por fim, porque

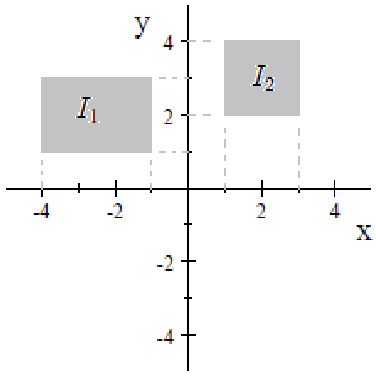
$$f(0, \pm b) = f(\pm a, 0) = 0 \text{ e } f\left(\frac{\pm a\sqrt{2}}{2}, \frac{\pm b\sqrt{2}}{2}\right) = 4a^2b^2,$$

e porque pelo Teorema de Weirstrass temos a garantia de que a restrição de f a S tem máximo absoluto, podemos concluir que o valor máximo da área de um rectângulo inscrito numa elipse de semieixos a e b é $\sqrt{4a^2b^2} = 2ab$.

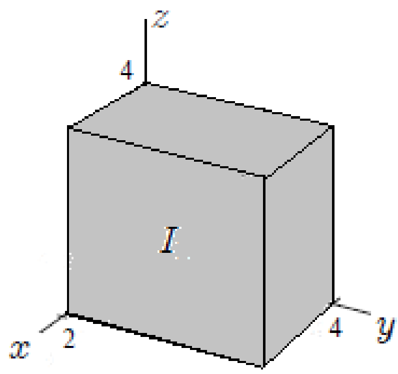
Cálculo Integral em $\mathbb{R}^n$

Definição (Intervalo de $\mathbb{R}^n$): Diz-se que um conjunto $I \subset \mathbb{R}^n$ é um intervalo, se existirem n intervalos reais $J_1 \subset \mathbb{R}, J_2 \subset \mathbb{R}, ..., J_n \subset \mathbb{R}$ tais que

$$\begin{aligned} I &= J_1 \times J_2 \times \cdots \times J_n \\ &= \{(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : x_k \in J_k \text{ para } k = 1, ..., n\}. \end{aligned}$$



Dois intervalos de $\mathbb{R}^2$:
$I_1 = [-4, -1] \times [1, 3]$;
$I_2 = [1, 3] \times [2, 4]$



Um intervalo de $\mathbb{R}^3$:
$I = [0, 2] \times [0, 4] \times [0, 4]$

Definição (Volume n-dimensional de um intervalo de $\mathbb{R}^n$): O volume n-dimensional de um intervalo $I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$ é definido por

$$\text{vol}_n(I) = (b_1 - a_1) \times (b_2 - a_2) \times \cdots \times (b_n - a_n).$$

Definição (Partição de um intervalo de $\mathbb{R}^n$): Dado um intervalo $I \subset \mathbb{R}^n$, diz-se que uma família de intervalos de $\mathbb{R}^n$, $I_1, I_2, ..., I_p$, é uma partição de I se

$$I = I_1 \cup I_2 \cup \cdots \cup I_p \text{ e } \text{int}(I_i) \cap \text{int}(I_j) = \emptyset \text{ para } i \neq j.$$

Definição (Função em escada): Dado um intervalo $I \subset \mathbb{R}^n$, diz-se que $s : I \to \mathbb{R}$ é uma função em escada se é limitada e existe uma partição de I tal que s é constante no interior de cada um dos seus intervalos.

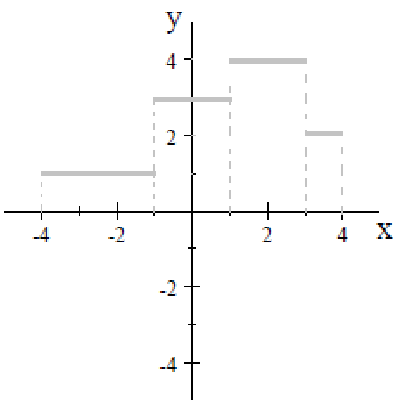


Gráfico de uma função em escada $s : [-4, 4] \to \mathbb{R}$

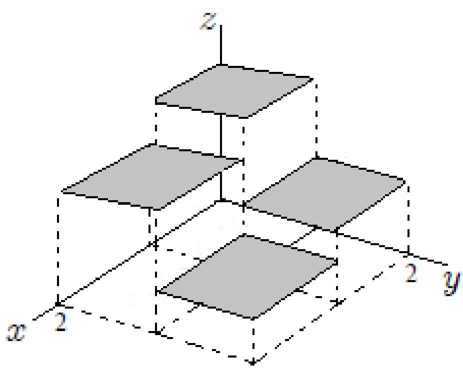


Gráfico de uma função em escada $s : [0, 2] \times [0, 2] \to \mathbb{R}$

Definição (Integral de uma função em escada): Seja I um intervalo limitado de $\mathbb{R}^n$, $s : I \to \mathbb{R}$ uma função em escada e $I_1, I_2, ..., I_p$ uma partição de I tal que s é constante em $\mathrm{int}(I_j)$. O integral de s em I define-se como sendo

$$\int_I s = \sum_{j=1}^{p} s_j \mathrm{vol}_n\left(I_j\right),$$

onde s_j designa o valor (constante) que s toma em $\mathrm{int}(I_j)$.

Definição (Integral de uma função): Seja I um intervalo limitado de $\mathbb{R}^n$ e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função limitada. O integral inferior de f é definido por

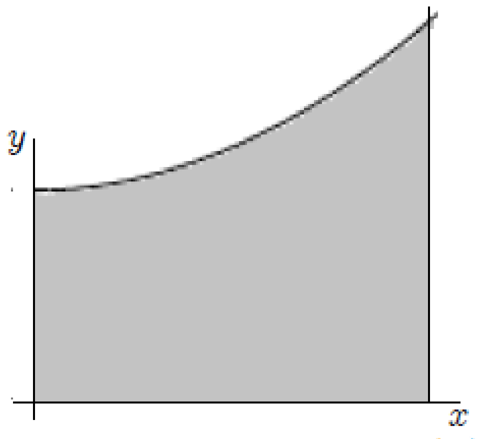
$$\underline{\int_I} f = \sup\left\{\int_I s : s \text{ é uma função em escada e } s \leq f\right\}.$$

O integral superior de f é definido por

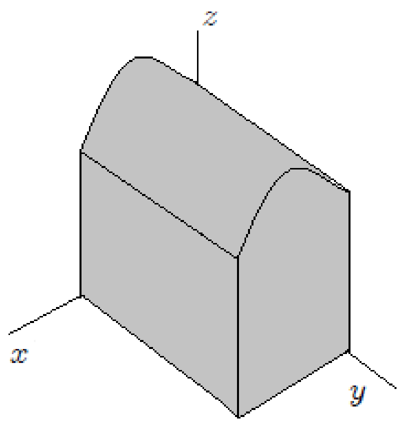
$$\overline{\int_I} f = \inf\left\{\int_I t : t \text{ é uma função em escada e } f \leq t\right\}.$$

A função f diz-se integrável se os integrais inferior e superior coincidem, definindo-se, neste caso, o integral de f com sendo

$$\int_I f = \underline{\int_I} f = \overline{\int_I} f.$$



Se $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é positiva e integrável, o integral de f coincide com a área do conjunto dos pontos por baixo do gráfico



Se $f : I \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é positiva e integrável, o integral de f coincide com o volume do conjunto dos pontos por baixo do gráfico

Teorema de Fubini

Teorema de Fubini (para funções de duas variáveis): Seja $I = [a,b] \times [c,d] \subset \mathbb{R}^2$ um intervalo limitado e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função integrável.

a) Se, para qualquer $x \in [a,b]$, a função $f_x : [c,d] \to \mathbb{R}$, definida por $f_x(y) = f(x,y)$, é integrável em $[c,d]$ e a função $\psi : [a,b] \to \mathbb{R}$, definida por $\psi(x) = \int_c^d f_x(y)\,dy$, é integrável em $[a,b]$, então

$$\int_I f = \int_a^b \psi(x)\,dx = \int_a^b \left(\int_c^d f_x(y)\,dy \right) dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx.$$

b) Se, para qualquer $y \in [c,d]$, a função $f_y : [a,b] \to \mathbb{R}$, definida por $f_y(x) = f(x,y)$, é integrável em $[a,b]$ e a função $\varphi : [c,d] \to \mathbb{R}$, definida por $\varphi(y) = \int_a^b f_y(x)\,dx$, é integrável em $[c,d]$, então

$$\int_I f = \int_c^d \varphi(y)\,dy = \int_c^d \left(\int_a^b f_y(x)\,dx \right) dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy.$$

Exemplo: Calcular o o integral da função $f : I = [0,1] \times [0,2] \to \mathbb{R}$, definida por $f(x,y) = x^2 + y + 1$.

Pelo teorema de Fubini temos

$$\int_I f = \int_0^1 \left(\int_0^2 f(x,y)\,dy \right) dx.$$

Como

$$\int_0^2 f(x,y)\,dy = \int_0^2 \left(x^2 + y + 1\right) dy = \left[x^2 y + \frac{1}{2} y^2 + y \right]_{y=0}^{y=2} = 2x^2 + 4,$$

obtemos

$$\int_I f = \int_0^1 \left(2x^2 + 4\right) dx = \left[\frac{2}{3} x^3 + 4x \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{14}{3}.$$

Alternativamente, temos

$$\int_I f = \int_0^2 \left(\int_0^1 f(x,y)\,dx \right) dy.$$

Como

$$\int_0^1 f(x,y)\,dx = \int_0^1 \left(x^2 + y + 1\right) dx = \left[\frac{1}{3} x^3 + xy + x \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{4}{3} + y,$$

obtemos

$$\int_I f = \int_0^2 \left(\frac{4}{3} + y \right) dy = \left[\frac{4}{3} y + \frac{1}{2} y^2 \right]_{y=0}^{y=2} = \frac{14}{3}.$$

Exercício: Considere o rectângulo $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2 \wedge 0 \leq y \leq 1\}$. Calcular o integral de f em R quando:

a) $f(x,y) = xy^3$;

b) $f(x,y) = x\cos(xy)$;

c) $f(x,y) = \begin{cases} ye^{xy}, & \text{se } x \in [0,1] \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$.

Resolução: a) Pelo teorema de Fubini temos

$$\int_R f = \int_0^2 \left(\int_0^1 f(x,y)\, dy \right) dx = \int_0^2 \left(\int_0^1 xy^3 dy \right) dx.$$

Como

$$\int_0^1 xy^3 dy = \left[\frac{1}{4} xy^4 \right]_{y=0}^{y=1} = \frac{1}{4} x,$$

obtemos

$$\int_R f = \int_0^2 \frac{1}{4} x dx = \left[\frac{1}{8} x^2 \right]_{x=0}^{x=2} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}.$$

Alternativamente, temos

$$\int_R f = \int_0^1 \left(\int_0^2 f(x,y)\, dx \right) dy = \int_0^1 \left(\int_0^2 xy^3 dx \right) dy.$$

Como

$$\int_0^2 xy^3 dx = \left[\frac{1}{2} y^3 x^2 \right]_{x=0}^{x=2} = 2y^3,$$

obtemos

$$\int_R f = \int_0^1 2y^3 dy = \left[\frac{1}{2} y^4 \right]_{y=0}^{y=1} = \frac{1}{2}.$$

b) Pelo teorema de Fubini temos

$$\int_R f = \int_0^2 \left(\int_0^1 f(x,y)\, dy \right) dx = \int_0^2 \left(\int_0^1 x \cos(xy)\, dy \right) dx.$$

Como

$$\int_0^1 x \cos(xy)\, dy = [\sin(xy)]_{y=0}^{y=1} = \sin(x),$$

obtemos

$$\int_R f = \int_0^2 \sin(x)\, dx = [-\cos(x)]_0^2 = 1 - \cos(2)$$

Note-se que neste caso, a alternativa:

$$\begin{aligned} \int_R f &= \int_0^1 \left(\int_0^2 f(x,y)\, dx \right) dy = \int_0^1 \left(\int_0^2 x \cos(xy)\, dx \right) dy \\ &= \int_0^1 \left(\left[\frac{x \sin(xy)}{y} \right]_{x=0}^{x=2} - \int_0^2 \frac{\sin(xy)}{y} dx \right) dy = \int_0^1 \left(\frac{2\sin(2y)}{y} + \frac{\cos(2y) - 1}{y^2} \right) dy, \end{aligned}$$

seria inconclusiva já que envolve funções que não são elementarmente primitiváveis.

c) Pelo teorema de Fubini temos

$$\int_R f = \int_0^1 \left(\int_0^2 f_y(x)\, dx \right) dy.$$

onde, para cada $y \in [0,1]$, $f_y : [0,2] \to \mathbb{R}$ designa a função definida por

$$f_y(x) = f(x,y) = \begin{cases} ye^{xy}, & \text{se } 0 \le x \le 1 \\ 0, & \text{se } 1 < x \le 2 \end{cases}.$$

Como

$$\int_0^2 f_y(x)\,dx = \int_0^1 f_y(x)\,dx + \int_1^2 f_y(x)\,dx = \int_0^1 ye^{xy}dx + \int_1^2 0dx = [e^{xy}]_{x=0}^{x=1} = e^y - 1,$$

obtemos

$$\int_R f = \int_0^1 (e^y - 1)\,dy = [e^y - y]_{y=0}^{y=1} = e - 2.$$

Teorema de Fubini (caso geral): Sejam $A \subset \mathbb{R}^k$ e $B \subset \mathbb{R}^m$ intervalos compactos e f uma função integrável no intervalo $A \times B \subset \mathbb{R}^{k+m}$.

a) Se para cada $\mathbf{x} \in A$, a função $f_{\mathbf{x}} : B \to \mathbb{R}$, definida por $f_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) = f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, é integrável em B, e a função $\psi : A \to \mathbb{R}$, definida por $\psi(\mathbf{x}) = \int_B f_{\mathbf{x}}(\mathbf{y})\,d\mathbf{y}$, é integrável em A, então

$$\int_{A\times B} f = \int_A \psi(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = \int_A \left(\int_B f_{\mathbf{x}}(\mathbf{y})\,d\mathbf{y}\right) d\mathbf{x} = \int_A \left(\int_B f(\mathbf{x}, \mathbf{y})\,d\mathbf{y}\right) d\mathbf{x}.$$

b) Se para cada $\mathbf{y} \in B$, a função $f_{\mathbf{y}} : A \to \mathbb{R}$, definida por $f_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, é integrável em A, e a função $\varphi : B \to \mathbb{R}$, definida por $\varphi(\mathbf{y}) = \int_A f_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}$, é integrável em B, então

$$\int_{A\times B} f = \int_B \varphi(\mathbf{y})\,d\mathbf{y} = \int_B \left(\int_A f_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}\right) d\mathbf{y} = \int_B \left(\int_A f(\mathbf{x}, \mathbf{y})\,d\mathbf{x}\right) d\mathbf{y}.$$

Nota: O Teorema de Fubini fornece portanto seis alternativas para calcular o intergral de uma função f num intervalo $I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3] \subset \mathbb{R}^3$, a saber:

$$\int_I f = \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_3}^{b_3} f(x,y,z)\,dz\right) dy\right) dx \quad \int_I f = \int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_3}^{b_3} f(x,y,z)\,dz\right) dx\right) dy$$

$$\int_I f = \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_3}^{b_3} \left(\int_{a_2}^{b_2} f(x,y,z)\,dy\right) dz\right) dx \quad \int_I f = \int_{a_3}^{b_3} \left(\int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} f(x,y,z)\,dy\right) dx\right) dz$$

$$\int_I f = \int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_3}^{b_3} \left(\int_{a_1}^{b_1} f(x,y,z)\,dx\right) dz\right) dy \quad \int_I f = \int_{a_3}^{b_3} \left(\int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_1}^{b_1} f(x,y,z)\,dx\right) dy\right) dz$$

Exemplo: Pelo teorema de Fubini**,** o integral da função $f(x,y,z) = xy + e^z$ no intervalo $I = [0,1] \times [0,2] \times [0,1]$ é dado por

$$\begin{aligned}
\int_I f &= \int_0^1 \left(\int_0^2 \left(\int_0^1 (xy + e^z)\,dz\right) dy\right) dx = \int_0^1 \left(\int_0^2 \left([xyz + e^z]_{z=0}^{z=1}\right) dy\right) dx \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^2 (xy + e - 1)\,dy\right) dx = \int_0^1 \left(\left[\frac{1}{2}xy^2 + ey - y\right]_{y=0}^{y=2}\right) dx \\
&= \int_0^1 (2x + 2e - 2)\,dx = \left[x^2 + 2ex - 2x\right]_{x=0}^{x=1} = 2e - 1,
\end{aligned}$$

ou alternativamente

$$\begin{aligned}
\int_I f &= \int_0^1 \left(\int_0^1 \left(\int_0^2 (xy + e^z)\,dy\right) dz\right) dx = \int_0^1 \left(\int_0^1 \left(\left[\frac{1}{2}xy^2 + ye^z\right]_{y=0}^{y=2}\right) dz\right) dx \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^1 (2x + 2e^z)\,dz\right) dx = \int_0^1 \left([2xz + 2e^z]_{z=0}^{z=1}\right) dx \\
&= \int_0^1 (2x + 2e - 2)\,dx = \left[x^2 + 2ex - 2x\right]_{x=0}^{x=1} = 2e - 1.
\end{aligned}$$

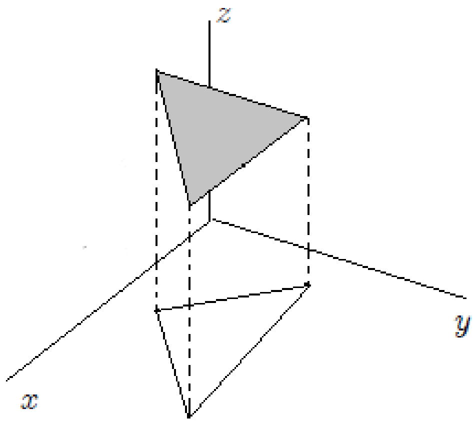
Integral de uma função num conjunto limitado

Definição: Seja $D \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto limitado e I um intervalo limitado de $\mathbb{R}^n$ tal que $D \subset I$. Diz-se que uma função $f : D \to \mathbb{R}$ é integrável em D, se a função $\widetilde{f} : I \to \mathbb{R}$, definida por

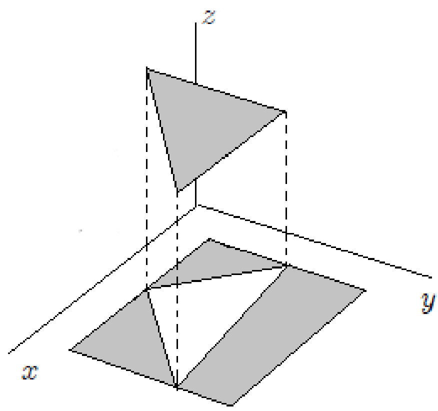
$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } x \in D \\ 0, & \text{se } x \in I \backslash D \end{cases},$$

é integrável em I. Neste caso, o integral de f em D é definido por

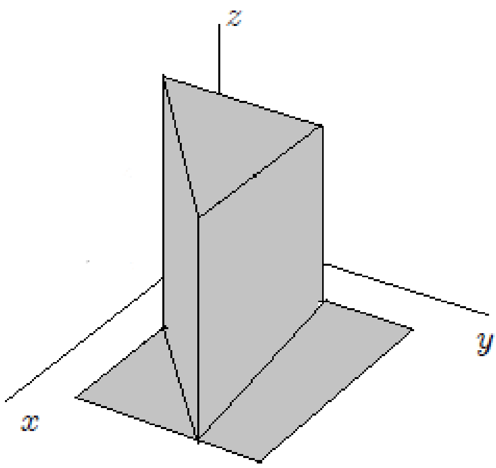
$$\int_D f = \int_I \widetilde{f}.$$



O gráfico de $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$



O gráfico de $\widetilde{f} : I \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$



O integral de $\widetilde{f}$ coincide com o volume do conjunto dos pontos por baixo do gráfico de f

Exemplo: Pretende-se calcular o integral da função $f(x,y) = e^{x+y}$ no conjunto

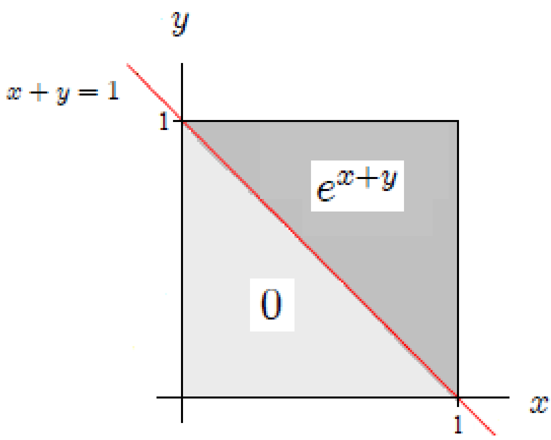
$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 1; y \leq 1; 1 \leq x+y\right\}.$$

Como o conjunto D está contido no intervalo $I = [0,1] \times [0,1]$, temos

$$\int_D f = \int_I \widetilde{f}$$

onde $\widetilde{f} : I \to \mathbb{R}$ está definida por

$$\widetilde{f}(x,y) = \begin{cases} e^{x+y}, & \text{se } (x,y) \in D \\ 0, & \text{se } (x,y) \in I \backslash D \end{cases}.$$



A função $\widetilde{f}$

Pelo teorema de Fubini temos

$$\int_I \widetilde{f} = \int_0^1 \left(\int_0^1 \widetilde{f}(x,y)\,dx\right) dy = \int_0^1 \left(\int_0^1 \widetilde{f}_y(x)\,dx\right) dy,$$

onde, para cada $y \in [0,1]$, $\widetilde{f}_y : [0,1] \to \mathbb{R}$ designa a função definida por

$$\widetilde{f}_y(x) = \widetilde{f}(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq x < 1-y \\ e^{x+y}, & \text{se } 1-y \leq x \leq 1 \end{cases}.$$

Assim, porque

$$\int_0^1 \widetilde{f}_y(x)\,dx = \int_0^{1-y} \widetilde{f}_y(x)\,dx + \int_{1-y}^1 \widetilde{f}_y(x)\,dx = \int_0^{1-y} 0dx + \int_{1-y}^1 e^{x+y}dx = \int_{1-y}^1 e^{x+y}dx,$$

obtemos

$$\int_I \widetilde{f} = \int_0^1 \left(\int_{1-y}^1 e^{x+y}dx\right) dy,$$

e por fim

$$\int_D f = \int_0^1 \left(\int_{1-y}^1 e^{x+y}dx\right) dy = \int_0^1 \left(\left[e^{x+y}\right]_{x=1-y}^{x=1}\right) dy = \int_0^1 \left(e^{1+y} - e\right) dy = \left[e^{1+y} - ey\right]_{y=0}^{y=1} = e^2 - 2e.$$

De forma mais abreviada, temos a seguinte reformulação do teorema de Fubini que pode ser útil no cálculo dum integral duplo em muitas situações interessantes.

Teorema: Seja $D \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto limitado, $I = [a, b] \times [c, d]$ um intervalo compacto tal que $D \subset I$ e $f : D \to \mathbb{R}$ uma função integrável.

a) Se o conjunto D pode ser escrito na forma

$$D = \bigcup_{a \le x \le b} \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : c(x) \le y \le d(x) \right\},$$

então

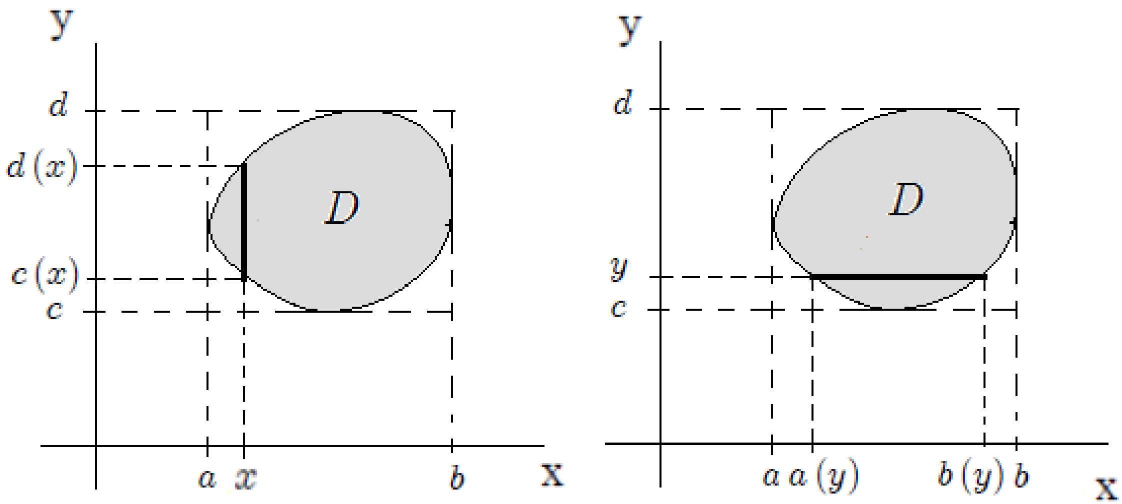
$$\int_D f = \int_a^b \left(\int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y)\, dy \right) dx.$$

b) Se o conjunto D pode ser escrito na forma

$$D = \bigcup_{c \le y \le d} \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : a(y) \le x \le b(y) \right\},$$

então

$$\int_D f = \int_c^d \left(\int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y)\, dx \right) dy.$$



Um conjunto nas condições do teorema

Exercício: Inverter a ordem de integração para calcular os seguintes integrais:

a) $\int_0^1 \left(\int_{2y}^2 \cos\left(x^2\right) dx \right) dy$;

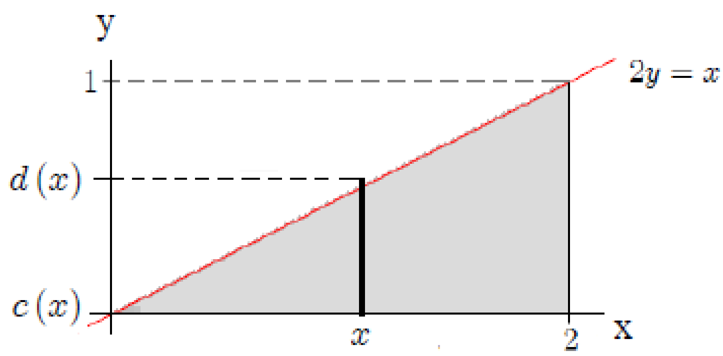
b) $\int_0^1 \left(\int_{\arcsin(y)}^{\pi/2} y \sin(x)\, dx \right) dy$.

Resolução: a) Consideremos o conjunto

$$\begin{aligned} D &= \bigcup_{0 \leq y \leq 1} \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2y \leq x \leq 2 \right\} \\ &= \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1 \wedge 2y \leq x \leq 2 \right\} \end{aligned}$$

e a função $f : D \to \mathbb{R}$, definida por $f(x,y) = \cos\left(x^2\right)$. Como o conjunto D está contido no intervalo $I = [0,2] \times [0,1]$ e a função $f : D \to \mathbb{R}$, definida por $f(x,y) = \cos\left(x^2\right)$, é integrável temos

$$\int_D f = \int_0^1 \left(\int_{2y}^2 \cos\left(x^2\right) dx \right) dy.$$



O conjunto D

Como por outro lado se tem

$$D = \bigcup_{0 \leq x \leq 2} \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : c(x) \leq y \leq d(x) \right\}, \text{ com } c(x) = 0 \text{ e } d(x) = \frac{x}{2},$$

obtemos

$$\int_D f = \int_0^2 \left(\int_{c(x)}^{d(x)} \cos\left(x^2\right) dy \right) dx = \int_0^2 \left(\int_0^{x/2} \cos\left(x^2\right) dy \right) dx.$$

Logo

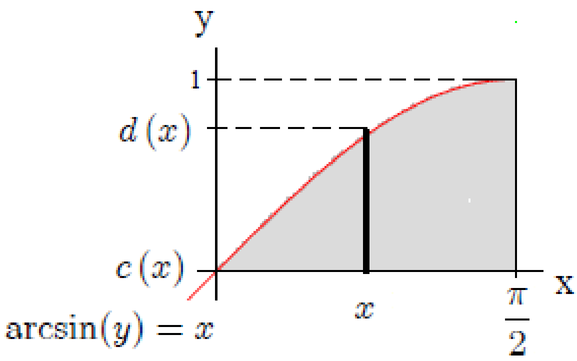
$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(\int_{2y}^2 \cos\left(x^2\right) dx \right) dy &= \int_0^2 \left(\int_0^{x/2} \cos\left(x^2\right) dy \right) dx = \int_0^2 \left(\frac{x}{2} \cos\left(x^2\right) \right) dx \\ &= \frac{1}{4} \int_0^2 \left(2x \cos\left(x^2\right) \right) dx = \frac{1}{4} \left[\sin\left(x^2\right) \right]_0^2 = \frac{1}{4} \sin(4). \end{aligned}$$

b) Consideremos o conjunto

$$\begin{aligned} D &= \bigcup_{0 \leq y \leq 1} \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \arcsin(y) \leq x \leq \frac{\pi}{2} \right\} \\ &= \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1 \wedge \arcsin(y) \leq x \leq \frac{\pi}{2} \right\}. \end{aligned}$$

Como o conjunto D está contido no intervalo $I = [0, \pi/2] \times [0, 1]$, e a função $f : D \to \mathbb{R}$, definida por $f(x, y) = y \sin(x)$, é integrável temos

$$\int_D f = \int_0^1 \left(\int_{\arcsin(y)}^{\pi/2} y \sin(x)\, dx \right) dy.$$



O conjunto D

Como por outro lado se tem

$$D = \bigcup_{0 \le x \le \frac{\pi}{2}} \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : c(x) \le y \le d(x) \right\}, \text{ com } c(x) = 0 \text{ e } d(x) = \sin(x),$$

obtemos

$$\int_D f = \int_0^{\pi/2} \left(\int_{c(x)}^{d(x)} y \sin(x)\, dy \right) dx = \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^{\sin(x)} y \sin(x)\, dy \right) dx.$$

Logo

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \left(\int_{\arcsin(y)}^{\pi/2} y \sin(x)\, dx \right) dy &= \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^{\sin(x)} y \sin(x)\, dy \right) dx \\
&= \int_0^{\pi/2} \left(\sin(x) \int_0^{\sin(x)} y dy \right) dx = \int_0^{\pi/2} \left(\sin(x) \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_{y=0}^{y=\sin(x)} \right) dx \\
&= \int_0^{\pi/2} \sin(x) \frac{1}{2} \sin(x)^2\, dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \left(\sin(x) \left(1 - \cos(x)^2 \right) \right) dx \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \sin(x)\, dx + \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} - \sin(x) \cos(x)^2\, dx \\
&= \frac{1}{2} \left[-\cos(x) \right]_{x=0}^{x=\pi/2} + \frac{1}{6} \int_0^{\pi/2} -3 \sin(x) \cos(x)^2\, dx \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \left[\cos(x)^3 \right]_{x=0}^{x=\pi/2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

Exercício: Inverter a ordem de integração dos seguintes integrais duplos:

a) $\int_0^1 \left(\int_{x^2-1}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\, dy \right) dx$;

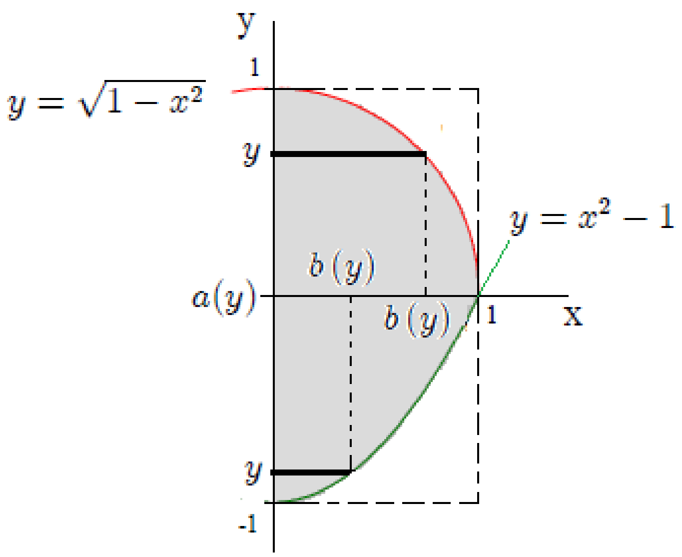
b) $\int_0^1 \left(\int_{\sqrt{1-x^2}}^{2-x} f(x,y)\, dy \right) dx$;

Resolução: a) Consideremos o conjunto

$$\begin{aligned} D &= \bigcup_{0 \le x \le 1} \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 1 \le y \le \sqrt{1-x^2} \right\} \\ &= \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1 \wedge x^2 - 1 \le y \le \sqrt{1-x^2} \right\} \end{aligned}$$

e uma função integrável $f : D \to \mathbb{R}$. Como $D \subset [0,1] \times [-1,1]$, temos

$$\int_D f = \int_0^1 \left(\int_{x^2-1}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\, dy \right) dx.$$



Como por outro lado se tem

$$D = \bigcup_{-1 \le y \le 1} \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : a(y) \le x \le b(y) \right\},$$

com

$$a(y) = 0 \text{ e } b(y) = \begin{cases} \sqrt{y+1}, & \text{se } -1 \le y \le 0 \\ \sqrt{1-y^2}, & \text{se } 0 < y \le 1 \end{cases},$$

obtemos

$$\begin{aligned} \int_D f &= \int_{-1}^1 \left(\int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)\, dx \right) dy = \int_{-1}^0 \left(\int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)\, dx \right) dy + \int_0^1 \left(\int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)\, dx \right) dy \\ &= \int_{-1}^0 \left(\int_0^{\sqrt{y+1}} f(x,y)\, dx \right) dy + \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\, dx \right) dy. \end{aligned}$$

Logo

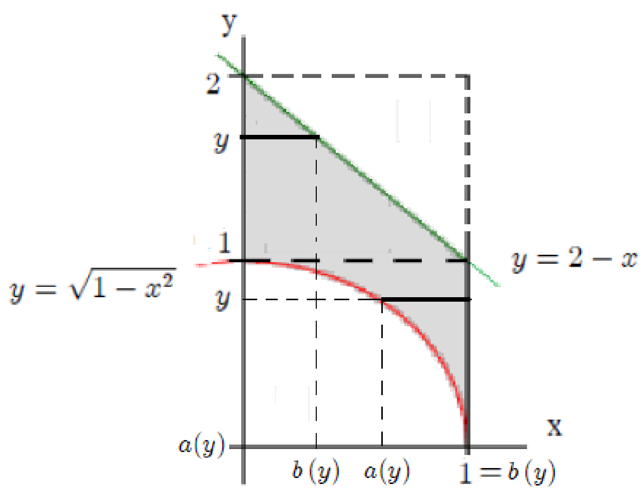
$$\int_0^1 \left(\int_{x^2-1}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\, dy \right) dx = \int_{-1}^0 \left(\int_0^{\sqrt{y+1}} f(x,y)\, dx \right) dy + \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\, dx \right) dy.$$

b) Consideremos o conjunto

$$\begin{aligned} D &= \bigcup_{0\le x\le 1} \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{1-x^2} \le y \le 2-x \right\} \\ &= \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1 \wedge \sqrt{1-x^2} \le y \le 2-x \right\}. \end{aligned}$$

e uma função integrável $f : D \to \mathbb{R}$. Como $D \subset [0,1] \times [0,2]$, temos

$$\int_D f = \int_0^1 \left(\int_{\sqrt{1-x^2}}^{2-x} f(x,y)\, dy \right) dx.$$



O conjunto D

Como por outro lado se tem

$$D = \bigcup_{0\le y\le 2} \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : a(y) \le x \le b(y) \right\},$$

com

$$a(y) = \begin{cases} \sqrt{1-y^2}, & \text{se } 0 \le y \le 1 \\ 0, & \text{se } 1 < y \le 2 \end{cases} \quad \text{e } b(y) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 \le y \le 1 \\ 2-y, & \text{se } 1 < y \le 2 \end{cases},$$

obtemos

$$\begin{aligned} \int_D f &= \int_0^2 \left(\int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)\, dx \right) dy = \int_0^1 \left(\int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)\, dx \right) dy + \int_1^2 \left(\int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)\, dx \right) dy \\ &= \int_0^1 \left(\int_{\sqrt{1-y^2}}^1 f(x,y)\, dx \right) dy + \int_1^2 \left(\int_0^{2-y} f(x,y)\, dx \right) dy. \end{aligned}$$

Logo

$$\int_0^1 \left(\int_{\sqrt{1-x^2}}^{2-x} f(x,y)\, dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_{\sqrt{1-y^2}}^1 f(x,y)\, dx \right) dy + \int_1^2 \left(\int_0^{2-y} f(x,y)\, dx \right) dy.$$

Volumes de subconjuntos limitados de $\mathbb{R}^n$

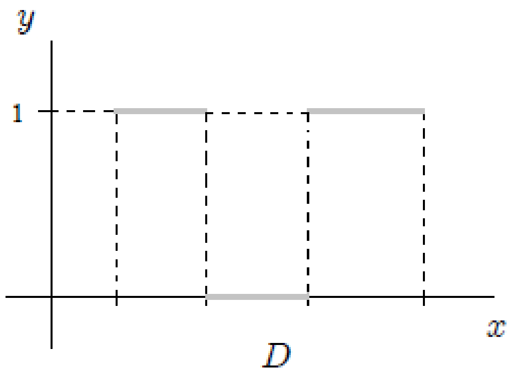
Definição: Seja $D \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto limitado, $I \subset \mathbb{R}^n$ um intervalo compacto tal que $D \subset I$, e $\chi : I \to \mathbb{R}$ a função característica de D, definida por

$$\chi(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \text{se } \mathbf{x} \in D \\ 0, & \text{se } \mathbf{x} \in I \backslash D \end{cases}.$$

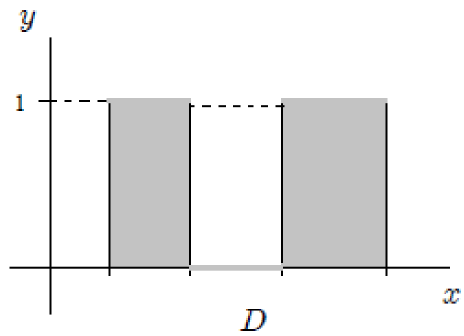
O volume do conjunto D é dado por

$$\mathrm{vol}_n(D) = \int_D 1 = \int_I \chi,$$

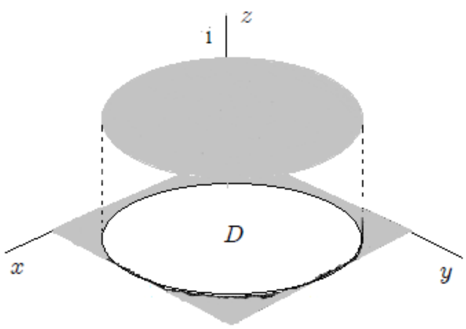
desde que a função χ seja integrável em I.



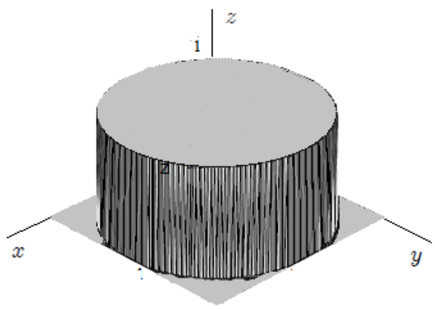
O gráfico de χ quando D é um subconjunto de $\mathbb{R}$



O integral de χ coincide com o comprimento de D



O gráfico de χ quando D é um subconjunto de $\mathbb{R}^2$



O integral de χ coincide com a área de D

Cálculo da área dum subconjunto $D \subset \mathbb{R}^2$

Teorema: Seja $D \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto limitado e $I = [a,b] \times [c,d]$ um intervalo compacto tal que $D \subset I$. Admita-se que a função característica de D, $\chi : I \to \mathbb{R}$, é integrável.

a) Se o conjunto D pode ser escrito na forma

$$D = \bigcup_{a \leq x \leq b} \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : c(x) \leq y \leq d(x) \right\},$$

então

$$\mathrm{vol}_2(D) = \int_a^b \left(\int_{c(x)}^{d(x)} dy \right) dx.$$

b) Se o conjunto D pode ser escrito na forma

$$D = \bigcup_{c \leq y \leq d} \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : a(y) \leq x \leq b(y) \right\},$$

então

$$\mathrm{vol}_2(D) = \int_c^d \left(\int_{a(y)}^{b(y)} dx \right) dy.$$

Exercício: Calcular a área da região

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq 2x \leq y \leq 3 - x^2 \right\}$$

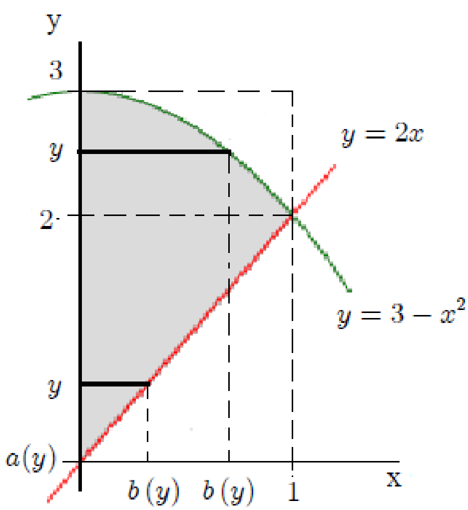
usando um integral iterado da forma $\int \left(\int dx \right) dy$. Calcule ainda (usando a ordem de integração que entender) a coordenada x do centróide.

Resolução: O conjunto D pode ser escrito na forma

$$D = \bigcup_{0 \leq y \leq 3} \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : a(y) \leq x \leq b(y) \right\},$$

com

$$a(y) = 0 \text{ e } b(y) = \begin{cases} \frac{y}{2}, & \text{se } 0 \leq y \leq 2 \\ \sqrt{3-y}, & \text{se } 2 \leq y \leq 3 \end{cases}.$$



O conjunto D

Logo

$$
\begin{aligned}
\mathrm{vol}_2(D) &= \int_0^3 \left(\int_{a(y)}^{b(y)} dx \right) dy = \int_0^2 \left(\int_{a(y)}^{b(y)} dx \right) dy + \int_2^3 \left(\int_{a(y)}^{b(y)} dx \right) dy \\
&= \int_0^2 \left(\int_0^{\frac{y}{2}} dx \right) dy + \int_2^3 \left(\int_0^{\sqrt{3-y}} dx \right) dy = \int_0^2 \frac{y}{2} dy + \int_2^3 \sqrt{3-y} dy \\
&= \frac{1}{4} \left[y^2 \right]_{y=0}^{y=2} - \left[\frac{2}{3} (3-y)^{\frac{3}{2}} \right]_{y=2}^{y=3} = 1 - \left(-\frac{2}{3} \right) = \frac{5}{3}
\end{aligned}
$$

Cálculo do volume dum subconjunto $D \subset \mathbb{R}^3$

Exercício: Seja $D \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto limitado, $f : D \to \mathbb{R}$ uma função positiva e integrável e $V \subset \mathbb{R}^3$o conjunto dos pontos que ficam por baixo do gráfico de f, ou seja

$$V = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D \text{ e } 0 \leq z \leq f(x, y)\right\}.$$

Mostre que $\mathrm{vol}_3(V) = \int_D f$.

Resolução: Seja $I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$ intervalo compacto tal que $V \subset I$, $\chi : I \to \mathbb{R}$ a função característica de D e $\widetilde{f} : [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \to \mathbb{R}$, definida por

$$\widetilde{f}(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{se } (x, y) \in D \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Como

$$\int_I \chi = \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_3}^{b_3} \chi(x, y, z)\, dz \right) dy \right) dx$$

e

$$\int_{a_3}^{b_3} \chi(x, y, z)\, dz = \begin{cases} \int_0^{f(x,y)} dz & \text{se } (x, y) \in D \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} = \begin{cases} f(x, y) & \text{se } (x, y) \in D \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} = \widetilde{f}(x, y),$$

obtemos

$$\begin{aligned} \mathrm{vol}_3(V) &= \int_I \chi = \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_3}^{b_3} \chi(x, y, z)\, dz \right) dy \right) dx \\ &= \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} \widetilde{f}(x, y)\, dy \right) dx = \int_{[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]} \widetilde{f} = \int_D f. \end{aligned}$$

Exercício: Escreva expressões para o volume do sólido

$$V = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq y \leq 1; 2y \leq x \leq 2; 0 \leq z \leq x + y\right\}$$

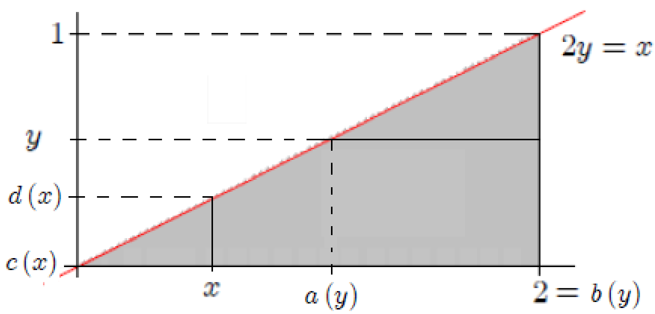
nas seguintes ordens:

a) $\int \left(\int \left(\int dz \right) dx \right) dy$;

b) $\int \left(\int \left(\int dz \right) dy \right) dx$.

Resolução: Consideremos o conjunto $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1 \wedge 2y \leq x \leq 2\right\}$ e a função $f : D \to \mathbb{R}$, definida por $f(x, y) = x + y$. Como V coincide com o conjunto dos pontos por baixo do gráfico de f, temos

$$\mathrm{vol}_3(V) = \int_D f.$$



O conjunto D

Por fim, porque

$$\int_D f = \int_0^1 \left(\int_{a(y)=2y}^{b(y)=2} f(x,y)\, dx \right) dy = \int_0^2 \left(\int_{c(x)=0}^{d(x)=x/2} f(x,y)\, dy \right) dx$$

e

$$f(x,y) = \int_0^{f(x,y)} dz = \int_0^{x+y} dz$$

obtemos

$$\mathrm{vol}_3(V) = \int_0^1 \left(\int_{2y}^2 \left(\int_0^{x+y} dz \right) dx \right) dy = \int_0^2 \left(\int_0^{x/2} \left(\int_0^{x+y} dz \right) dy \right) dx.$$

Demontra-se de forma análoga que se duas funções , $f : D \to \mathbb{R}$ e $g : D \to \mathbb{R}$, com $f \leq g$, são integráveis e $V \subset \mathbb{R}^3$ designa o conjunto dos pontos compreendidos entre os seus gráficos, ou seja

$$\begin{aligned} V &= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in D \text{ e } f(x,y) \leq z \leq g(x,y) \right\} \\ &= \bigcup_{(x,y)\in D} \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : f(x,y) \leq z \leq g(x,y) \right\}, \end{aligned}$$

então

$$\mathrm{vol}_3(V) = \int_D (g - f).$$

Exercício: Escreva expressões para o volume do sólido

$$V = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 3x^2 + 3y^2 \leq z \leq 2x^2 + 2y^2 + 1, x \geq 0 \right\}$$

nas seguintes ordens:

a) $\int \left(\int \left(\int dz \right) dx \right) dy$;

b) $\int \left(\int \left(\int dz \right) dy \right) dx$.

Resolução: Consideremos o conjunto

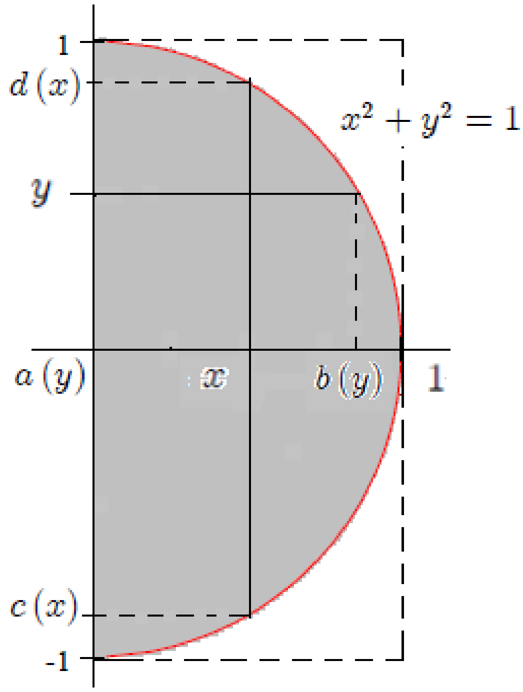
$$\begin{aligned} D &= \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 3x^2 + 3y^2 \leq 2x^2 + 2y^2 + 1, x \geq 0 \right\} \\ &= \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0 \right\}. \end{aligned}$$

e as funções $f : D \to \mathbb{R}$ e $g : D \to \mathbb{R}$, definidas por $f(x,y) = 3x^2 + 3y^2$ e $g(x,y) = 2x^2 + 2y^2 + 1$. Como

$$\begin{aligned} V &= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 3x^2 + 3y^2 \leq z \leq 2x^2 + 2y^2 + 1, x \geq 0 \right\} \\ &= \bigcup_{(x,y)\in D} \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 3x^2 + 3y^2 \leq z \leq 2x^2 + 2y^2 + 1 \right\} \\ &= \bigcup_{(x,y)\in D} \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : f(x,y) \leq z \leq g(x,y) \right\}, \end{aligned}$$

obtemos

$$\mathrm{vol}_3(V) = \int_D (g - f).$$



O conjunto D

Por fim, porque

$$\begin{aligned}\int_D (g-f) &= \int_{-1}^{1}\left(\int_{a(y)=0}^{b(y)=\sqrt{1-y^2}} (g(x,y)-f(x,y))\,dx\right)dy\\ &= \int_{0}^{1}\left(\int_{c(x)=-\sqrt{1-x^2}}^{d(x)=\sqrt{1-x^2}} (g(x,y)-f(x,y))\,dy\right)dx\end{aligned}$$

e

$$g(x,y)-f(x,y)=\int_{f(x,y)}^{g(x,y)} dz=\int_{3x^2+3y^2}^{2x^2+2y^2+1} dz$$

obtemos

$$\mathrm{vol}_3(V)=\int_{-1}^{1}\left(\int_{0}^{\sqrt{1-y^2}}\left(\int_{3x^2+3y^2}^{2x^2+2y^2+1} dz\right)dx\right)dy=\int_{0}^{1}\left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\left(\int_{3x^2+3y^2}^{2x^2+2y^2+1} dz\right)dy\right)dx.$$

Definição: Dado $D\subset\mathbb{R}^n$, ao conjunto $C_k(c)$, com $k=1,...,n$ e $c\in\mathbb{R}$, definido por

$$C_k(c)=D\cap\{(x_1,...,x_n)\in\mathbb{R}^n : x_k=c\},$$

chama-se corte em D perpendicular ao eixo Ox_k.

Teorema: Seja $D\subset\mathbb{R}^n$ um conjunto limitado, $I\subset\mathbb{R}^n$ um intervalo compacto tal que $D\subset I$ e $\chi: I\to\mathbb{R}$ a função característica de D. Se χ é integrável em I e $C_k(c)=\emptyset$ para qualquer $c\in\mathbb{R}\setminus[a,b]$, então

$$\mathrm{vol}_n(D)=\int_a^b \mathrm{vol}_{n-1}(C_k(x_k))\,dx_k.$$

Exercício: Escreva expressões para o volume do sólido

$$V = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0; y \geq 0; x + y \leq 1; 0 \leq z \leq x + y\right\}$$

nas seguintes ordens:

a) $\int \left(\int \left(\int dz\right) dx\right) dy$;

b) $\int \left(\int \left(\int dy\right) dx\right) dz$.

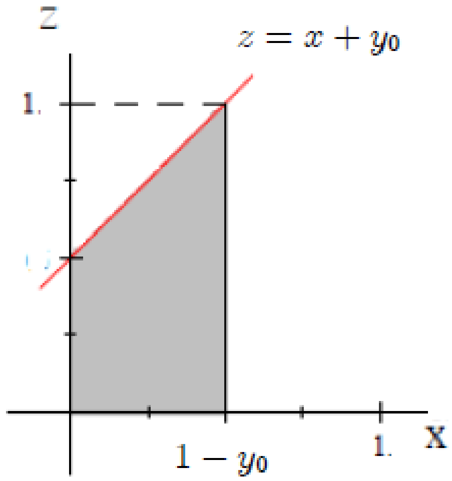
Resolução:

a) Comecemos por determinar a área do corte obtido pela intersecção de V com o plano de equação $y = y_0$, com $y_0 \in \mathbb{R}$, ou seja

$$\begin{aligned} C_2(y_0) &= \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = y_0\right\} \cap V \\ &= \left\{(x, y_0, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0; y_0 \geq 0; x + y_0 \leq 1; 0 \leq z \leq x + y_0\right\}. \end{aligned}$$

Tem-se portanto

$$C_2(y_0) = \begin{cases} \left\{(x, y_0, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1 - y_0 \wedge 0 \leq z \leq x + y_0\right\}, \text{ se } y_0 \in [0, 1] \\ \emptyset, \text{ caso contrário} \end{cases}.$$



O corte $C_2(y_0)$, com $y_0 \in [0, 1]$

donde se deduz que a área da secção $C_2(y_0)$ é dada por

$$\text{vol}_2(C_2(y_0)) = \int_0^{1-y_0} \left(\int_0^{x+y_0} dz\right) dx, \text{ para } y_0 \in [0, 1].$$

Por fim, porque $C_2(y_0) = \emptyset$ para $y_0 \in \mathbb{R} \setminus [0, 1]$, obtemos

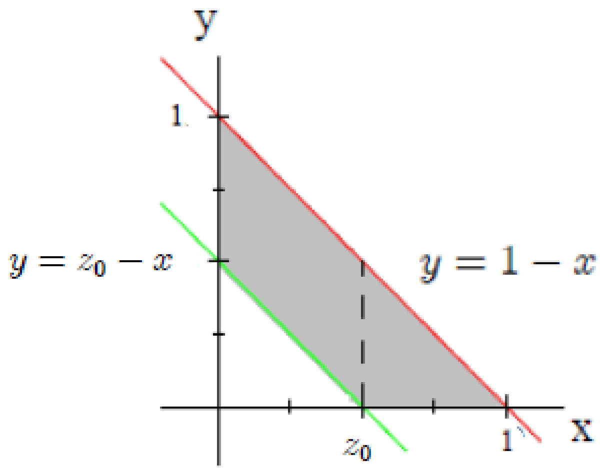
$$\begin{aligned} \text{vol}_3(V) &= \int_0^1 \text{vol}_2(C_2(y))\, dy \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^{1-y} \left(\int_0^{x+y} dz\right) dx\right) dy. \end{aligned}$$

b) Comecemos por determinar a área do corte obtido pela intersecção de V com o plano de equação $z = z_0$, com $z_0 \in \mathbb{R}$, ou seja

$$\begin{aligned} C_3(z_0) &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = z_0\right\} \cap V \\ &= \left\{(x,y,z_0) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0; y \geq 0; x+y \leq 1; 0 \leq z_0 \leq x+y\right\}. \end{aligned}$$

Tem-se portanto

$$C_3(z_0) = \begin{cases} \{(x,y,z_0) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0; y \geq 0; z_0 \leq x+y \leq 1\}, \text{ se } z_0 \in [0,1] \\ \emptyset, \text{ caso contrário} \end{cases}.$$



O corte $C_3(z_0)$, com $z_0 \in [0,1]$

donde se deduz que a área da secção $C_3(z_0)$ é dada por

$$\mathrm{vol}_2(C_3(z_0)) = \int_0^{z_0} \left(\int_{z_0 - x}^{1-x} dy \right) dx + \int_{z_0}^{1} \left(\int_0^{1-x} dy \right) dx, \text{ para } z_0 \in [0,1].$$

Por fim, porque $C_3(z_0) = \emptyset$ para $z_0 \in \mathbb{R} \setminus [0,1]$, obtemos

$$\begin{aligned} \mathrm{vol}_3(V) &= \int_0^1 \mathrm{vol}_2(C_3(z))\, dz \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^z \left(\int_{z-x}^{1-x} dy \right) dx + \int_z^1 \left(\int_0^{1-x} dy \right) dx \right) dz \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^z \left(\int_{z-x}^{1-x} dy \right) dx \right) dz + \int_0^1 \left(\int_z^1 \left(\int_0^{1-x} dy \right) dx \right) dz. \end{aligned}$$

Exercício: Escreva expressões para o volume do sólido

$$V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1 \wedge y^2 + z^2 \leq 1\right\}$$

nas seguintes ordens:

a) $\int \left(\int \left(\int dz \right) dx \right) dy$;

b) $\int \left(\int \left(\int dz\right) dy\right) dx$.

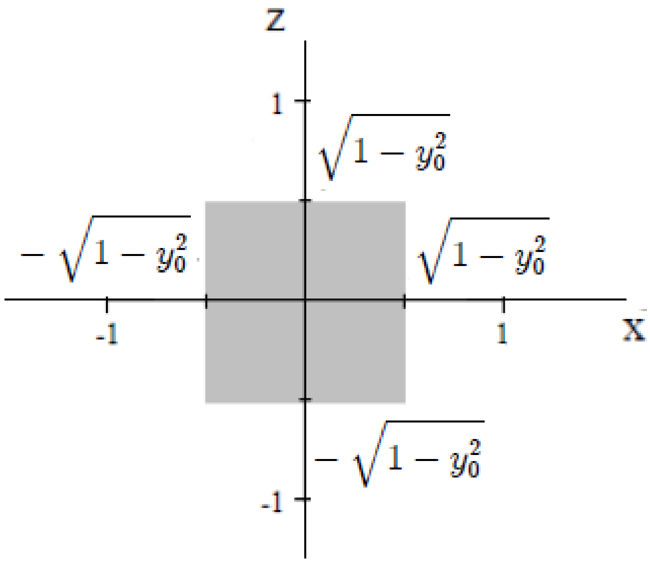
Resolução:

a) Comecemos por determinar a área do corte obtido pela intersecção de V com o plano de equação $y = y_0$, com $y_0 \in \mathbb{R}$, ou seja

$$\begin{aligned} C_2(y_0) &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y = y_0\right\} \cap V \\ &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y = y_0; x^2 + y^2 \leq 1; y^2 + z^2 \leq 1\right\} \\ &= \left\{(x,y_0,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 \leq 1 - y_0^2 \wedge z^2 \leq 1 - y_0^2\right\}. \end{aligned}$$

Tem-se portanto

$$C_2(y_0) = \begin{cases} \left\{(x,y_0,z) \in \mathbb{R}^3 : -\sqrt{1-y_0^2} \leq x \leq \sqrt{1-y_0^2} \wedge -\sqrt{1-y_0^2} \leq z \leq \sqrt{1-y_0^2}\right\}, \text{ se } y_0 \in [-1,1] \\ \emptyset, \text{ caso contrário} \end{cases}$$



O corte $C_3(y_0)$, com $y_0 \in [-1,1]$

donde se deduz que a área da secção $C_2(y_0)$ é dada por

$$\mathrm{vol}_2(C_2(y_0)) = \int_{-\sqrt{1-y_0^2}}^{\sqrt{1-y_0^2}} \left(\int_{-\sqrt{1-y_0^2}}^{\sqrt{1-y_0^2}} dz\right) dx, \text{ para } y_0 \in [-1,1].$$

Por fim, porque $C_2(y_0) = \emptyset$ para $y_0 \in \mathbb{R}\setminus[-1,1]$, obtemos

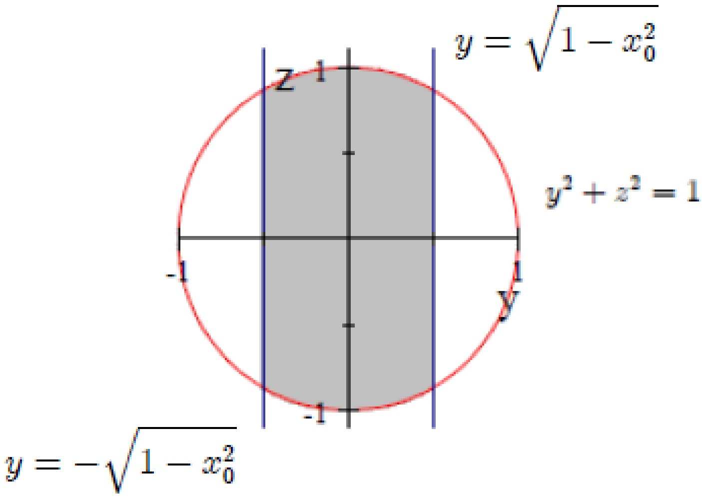
$$\begin{aligned} \mathrm{vol}_3(V) &= \int_{-1}^{1} \mathrm{vol}_2(C_2(y))\, dy \\ &= \int_{-1}^{1} \left(\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \left(\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} dz\right) dx\right) dy \\ &= \int_{-1}^{1} \left(\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \left(\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} dz\right) dx\right) dy. \end{aligned}$$

b) Comecemos por determinar a área do corte obtido pela intersecção de V com o plano de equação $x = x_0$, com $x_0 \in \mathbb{R}$, ou seja

$$\begin{aligned} C_1(x_0) &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = x_0\right\} \cap V \\ &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = x_0; x^2 + y^2 \leq 1; y^2 + z^2 \leq 1\right\} \\ &= \left\{(x_0,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 \leq 1 - x_0^2 \wedge y^2 + z^2 \leq 1\right\}. \end{aligned}$$

Tem-se portanto

$$C_1(x_0) = \begin{cases} \left\{(x_0,y,z) \in \mathbb{R}^3 : -\sqrt{1-x_0^2} \leq y \leq \sqrt{1-x_0^2} \wedge y^2 + z^2 \leq 1\right\}, \text{ se } x_0 \in [-1,1] \\ \emptyset, \text{ caso contrário} \end{cases}.$$



O corte $C_1(x_0)$, com $x_0 \in [-1,1]$

donde se deduz que a área da secção $C_1(x_0)$ é dada por

$$\operatorname{vol}_2(C_1(x_0)) = \int_{-\sqrt{1-x_0^2}}^{\sqrt{1-x_0^2}} \left(\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} dz \right) dy, \text{ para } x_0 \in [-1,1].$$

Por fim

$$\begin{aligned} \operatorname{vol}_3(V) &= \int_{-1}^{1} \operatorname{vol}_2(C_1(x))\, dx \\ &= \int_{-1}^{1} \left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \left(\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} dz \right) dy \right) dx. \end{aligned}$$

Exercício: Escreva expressões para o volume do sólido

$$V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x}{2} \leq y \leq x; 0 \leq z \leq x; x \leq 1\right\}$$

nas seguintes ordens:

a) $\int\left(\int\left(\int dx\right)dz\right)dy$;

b) $\int\left(\int\left(\int dx\right)dy\right)dz$.

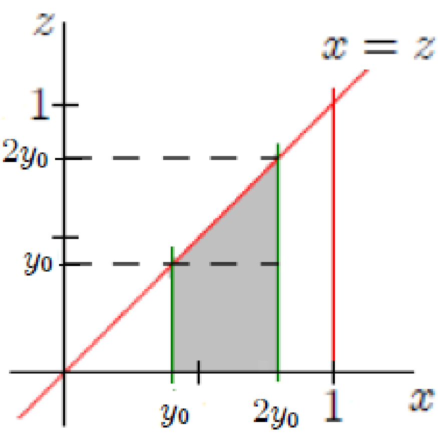
Resolução:

a) Comecemos por determinar a área do corte obtido pela intersecção de V com o plano de equação $y = y_0$, com $y_0 \in \mathbb{R}$, ou seja

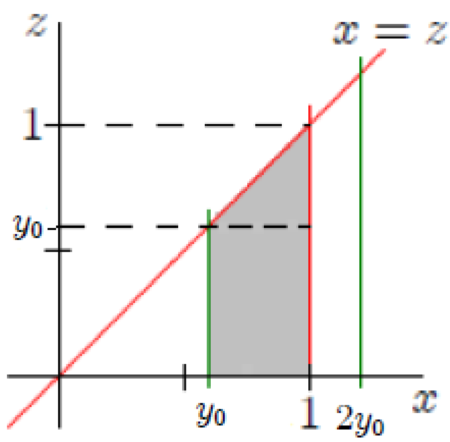
$$\begin{aligned} C_2(y_0) &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y = y_0\right\} \cap V \\ &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y = y_0; \frac{x}{2} \le y \le x; 0 \le z \le x; x \le 1\right\} \\ &= \left\{(x,y_0,z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x}{2} \le y_0 \le x \wedge 0 \le z \le x \le 1\right\}. \end{aligned}$$

Tem-se portanto

$$C_2(y_0) = \begin{cases} \left\{(x,y_0,z) \in \mathbb{R}^3 : y_0 \le x \le 2y_0 \wedge 0 \le z \le x \le 1\right\}, \text{ se } y_0 \in [0,1] \\ \emptyset, \text{ caso contrário} \end{cases},$$



O corte $C(y_0)$, com $y_0 \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$



O corte $C(y_0)$, com $y_0 \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$

donde se deduz que a área da secção $C_2(y_0)$ é dada por

$$\operatorname{vol}_2(C_2(y_0)) = \begin{cases} \int_0^{y_0}\left(\int_{y_0}^{2y_0} dx\right)dz + \int_{y_0}^{2y_0}\left(\int_z^{2y_0} dx\right)dz & \text{se } y_0 \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ \int_0^{y_0}\left(\int_{y_0}^{1} dx\right)dz + \int_{y_0}^{1}\left(\int_z^{1} dx\right)dz & \text{se } y_0 \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}.$$

Por fim, porque $\mathrm{vol}_2(C_2(y_0)) = 0$ para $y_0 \notin [0,1]$, obtemos

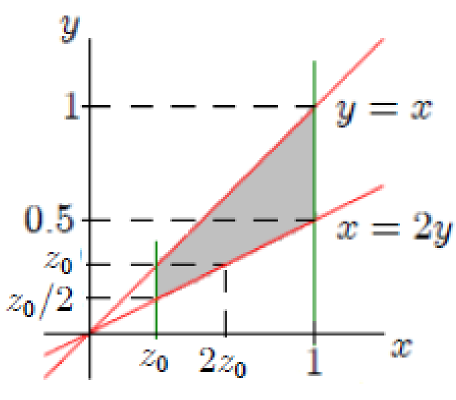
$$\begin{aligned}
\mathrm{vol}_3(V) &= \int_0^1 \mathrm{vol}_2(C_2(y))\,dy \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} \mathrm{vol}_2(C_2(y))\,dy + \int_{\frac{1}{2}}^1 \mathrm{vol}_2(C_2(y))\,dy \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^y \left(\int_y^{2y} dx\right) dz + \int_y^{2y} \left(\int_z^{2y} dx\right) dz\right) dy \\
&\quad + \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\int_0^y \left(\int_y^1 dx\right) dz + \int_y^1 \left(\int_z^1 dx\right) dz\right) dy \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^y \left(\int_y^{2y} dx\right) dz\right) dy + \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\int_y^{2y} \left(\int_z^{2y} dx\right) dz\right) dy \\
&\quad + \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\int_0^y \left(\int_y^1 dx\right) dz\right) dy + \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\int_y^1 \left(\int_z^1 dx\right) dz\right) dy
\end{aligned}$$

b) Comecemos por determinar a área do corte obtido pela intersecção de V com o plano de equação $z = z_0$, com $z_0 \in \mathbb{R}$, ou seja

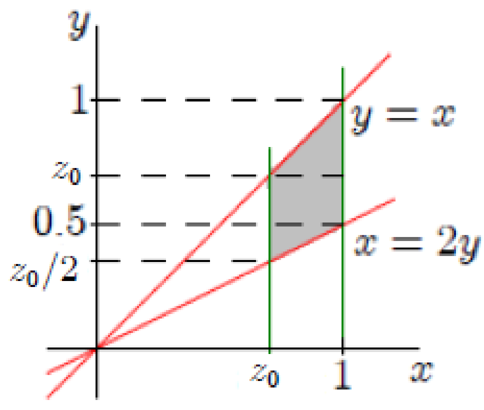
$$\begin{aligned}
C_3(z_0) &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = z_0\right\} \cap V \\
&= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = z_0; \frac{x}{2} \le y \le x; 0 \le z \le x; x \le 1\right\} \\
&= \left\{(x,y,z_0) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x}{2} \le y \le x; 0 \le z_0 \le x; x \le 1\right\}.
\end{aligned}$$

Tem-se portanto

$$C_3(z_0) = \begin{cases} \left\{(x,y,z_0) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le z_0 \le x \le 1; \frac{x}{2} \le y \le x\right\}, \text{ se } z_0 \in [0,1] \\ \emptyset, \text{ caso contrário} \end{cases},$$



O corte $C_3(z_0)$, com $z_0 \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$



O corte $C_3(z_0)$, com $z_0 \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$

donde se deduz que a área da secção $C_3(z_0)$ é dada por

$$\mathrm{vol}_2(C_3(z_0)) = \begin{cases} \int_{z_0/2}^{z_0} \left(\int_{z_0}^{2y} dx\right) dy + \int_{z_0}^{1/2} \left(\int_y^{2y} dx\right) dy + \int_{1/2}^1 \left(\int_y^1 dx\right) dy & \text{se } z_0 \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ \int_{z_0/2}^{1/2} \left(\int_{z_0}^{2y} dx\right) dy + \int_{1/2}^{z_0} \left(\int_{z_0}^1 dx\right) dy + \int_{z_0}^1 \left(\int_y^1 dx\right) dy & \text{se } z_0 \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}.$$

Por fim, porque $\text{vol}_2(C_3(z_0)) = 0$ para $z_0 \notin [0,1]$, obtemos

$$\begin{aligned}
\text{vol}_3(V) &= \int_0^1 \text{vol}_2(C_3(z))\,dz \\
&= \int_0^{1/2} \text{vol}_2(C_3(z))\,dz + \int_{1/2}^1 \text{vol}_2(C_3(z))\,dz \\
&= \int_0^{1/2} \left(\int_{z/2}^{z} \left(\int_z^{2y} dx \right) dy + \int_z^{1/2} \left(\int_y^{2y} dx \right) dy + \int_{1/2}^{1} \left(\int_y^{1} dx \right) dy \right) dz \\
&\quad + \int_{1/2}^{1} \left(\int_{z/2}^{1/2} \left(\int_z^{2y} dx \right) dy + \int_{1/2}^{z} \left(\int_z^{1} dx \right) dy + \int_z^{1} \left(\int_y^{1} dx \right) dy \right) dz.
\end{aligned}$$

Exercício: Escreva expressões para o volume do sólido

$$V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z \leq 2 - x^2 - y^2, y \geq 0\right\}$$

nas seguintes ordens:

a) $\int \left(\int \left(\int dx\right) dy\right) dz$;

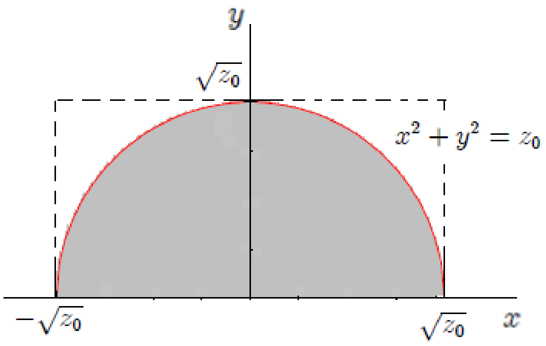
b) $\int \left(\int \left(\int dy\right) dx\right) dz$.

Resolução: Comecemos por determinar a área do corte obtido pela intersecção de V com o plano de equação $z = z_0$, com $z_0 \in \mathbb{R}$, ou seja

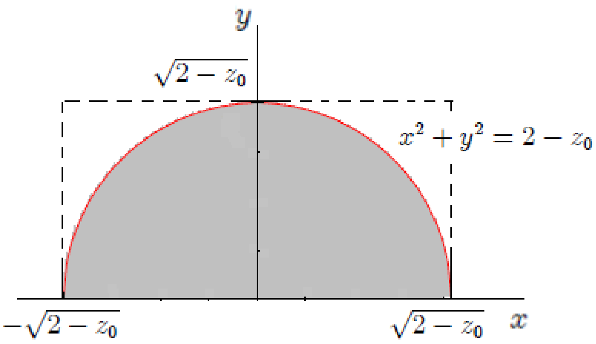
$$\begin{aligned}
C_3(z_0) &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = z_0\right\} \cap V \\
&= \left\{(x,y,z_0) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z_0 \leq 2 - x^2 - y^2, y \geq 0\right\} \\
&= \left\{(x,y,z_0) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z_0, x^2 + y^2 \leq 2 - z_0, y \geq 0\right\}.
\end{aligned}$$

Tem-se portanto

$$C_3(z_0) = \begin{cases} \left\{(x,y,z_0) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z_0, y \geq 0\right\}, \text{ se } z_0 \in [0,1] \\ \left\{(x,y,z_0) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 2 - z_0, y \geq 0\right\}, \text{ se } z_0 \in [1,2] \\ \emptyset, \text{ caso contrário} \end{cases},$$



O corte $C_3(z_0)$, com $z_0 \in [0,1]$



O corte $C_3(z_0)$, com $z_0 \in [1,2]$

donde se deduz que a área da secção $C_3(z_0)$ é dada por

$$\text{vol}_2(C_3(z_0)) = \begin{cases} \int_0^{\sqrt{z_0}} \left(\int_{-\sqrt{z_0 - y^2}}^{\sqrt{z_0 - y^2}} dx \right) dy = \int_{-\sqrt{z_0}}^{\sqrt{z_0}} \left(\int_0^{\sqrt{z_0 - x^2}} dy \right) dx & \text{se } z_0 \in [0,1] \\ \int_0^{\sqrt{2 - z_0}} \left(\int_{-\sqrt{2 - z_0 - y^2}}^{\sqrt{2 - z_0 - y^2}} dx \right) dy = \int_{-\sqrt{2 - z_0}}^{\sqrt{2 - z_0}} \left(\int_0^{\sqrt{2 - z_0 - x^2}} dy \right) dx & \text{se } z_0 \in [1,2] \end{cases}.$$

Por fim, porque $C_3(z_0) = \emptyset$ para $z_0 \notin [0,2]$, obtemos

$$\begin{aligned}
\mathrm{vol}_3(V) &= \int_0^2 \mathrm{vol}_2(C_3(z))\,dz = \int_0^1 \mathrm{vol}_2(C_3(z))\,dz + \int_1^2 \mathrm{vol}_2(C_3(z))\,dz \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{z}} \left(\int_{-\sqrt{z-y^2}}^{\sqrt{z-y^2}} dx \right) dy \right) dz + \int_1^2 \left(\int_0^{\sqrt{2-z}} \left(\int_{-\sqrt{2-z-y^2}}^{\sqrt{2-z-y^2}} dx \right) dy \right) dz \\
&= \int_0^1 \left(\int_{-\sqrt{z}}^{\sqrt{z}} \left(\int_0^{\sqrt{z-x^2}} dy \right) dx \right) dz + \int_1^2 \left(\int_{-\sqrt{2-z}}^{\sqrt{2-z}} \left(\int_0^{\sqrt{2-z-x^2}} dy \right) dx \right) dz.
\end{aligned}$$

Outras aplicações dos integrais

Massa:

Seja $\sigma : D \to \mathbb{R}$ a densidade de massa por unidade de volume do material que constitui um corpo representado por D. Então a massa M do corpo D é dada pelo integral

$$M = \int_D \sigma.$$

Note-se que quando $\sigma = 1$, a massa coincide com o volume.

Centro de Massa:

Seja $\sigma : D \to \mathbb{R}$ a densidade de massa por unidade de volume do material que constitui um corpo representado por D, e seja

$$f_i(x) = \frac{1}{M} x_i \sigma(x), \; i = 1, ..., n,$$

onde M é a massa a do corpo.

O centro de massa do corpo é o ponto $(c_1, ..., c_n)$ com coordenadas dadas por

$$c_i = \int_D f_i, \; i = 1, ..., n.$$

No caso em que $\sigma = 1$, ao centro de massa também se chama **centróide.**

Momento de Inércia:

Seja L uma linha recta e $d_L(x)$ a distância de um ponto $x \in \mathbb{R}^n$ à linha L.

O momento de inércia do conjunto D relativo à linha L, designado por I_L, é o integral da função definida por $f(x) = d_L^2(x)\,\sigma(x)$, ou seja

$$I_L = \int_D f,$$

em que σ é a densidade de massa por unidade de volume de D.

Integrabilidade

Definição: Diz-se que um conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ tem contéudo nulo se para todo o $\epsilon > 0$ existe uma família finita de intervalos limitados $\{I_1, ..., I_N\}$ tal que

$$A \subset I_1 \cup \cdots \cup I_N \text{ e } \operatorname{vol}(I_1) + \cdots + \operatorname{vol}(I_N) < \epsilon$$

Proposição:

1) Qualquer conjunto finito $A \subset \mathbb{R}^n$ tem contéudo nulo.

2) A união de uma famíilia finita de conjuntos com contéudo nulo tem nulo.

Teorema: Se $I \subset \mathbb{R}^n$ é um intervalo compacto e $f : I \to \mathbb{R}$ é uma função contínua, então o gráfico de f tem contéudo nulo em $\mathbb{R}^{n+1}$.

Teorema: Seja $I \subset \mathbb{R}^n$ um intervalo compacto e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função limitada. Se o conjunto dos pontos de descontinuidade de f tem contéudo nulo, então f é integrável em I.

Teorema: Se f e g são funções integráveis num intervalo compacto $I \subset \mathbb{R}^n$, e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, então as funções $\alpha f + \beta g$, fg e $|f|$ também são integráveis em I e:

1) $\int_I \alpha f + \beta g = \alpha \int_I f + \beta \int_I g$;

2) $\left|\int_I f\right| \leq \int_I |f|$;

3) Se $f \leq g$, então $\int_I f \leq \int_I g$.

Mudança de variáveis

Definição: Diz-se que uma função $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$, definida num aberto $U \subset \mathbb{R}^n$, é uma mudança de variáveis (ou transformação de coordenadas) se verifica:

1) φ é de classe C^1;

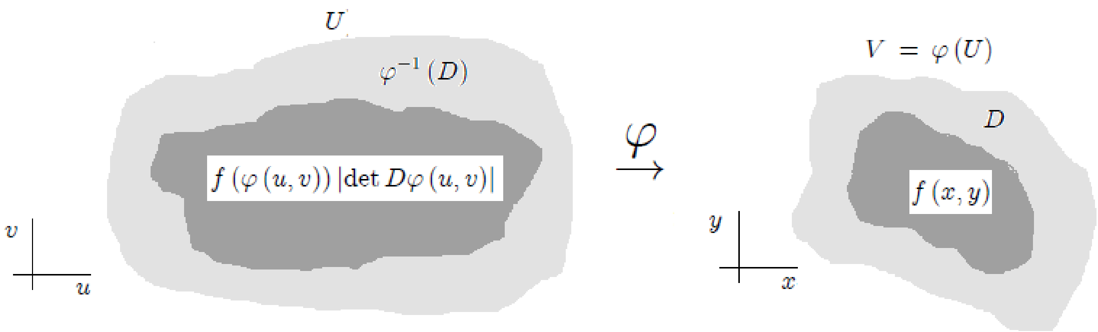
2) φ é injectiva:

3) $\det D\varphi(\mathbf{x}) \neq 0$, para qualquer $\mathbf{x} \in U$.

Nota: O teorema da função inversa, mostra que uma mudança de variáveis $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ é uma bijecção entre os abertos U e $V = \varphi(U)$, com inversa $\varphi^{-1} : V \to U$ de classe C^1.

Teorema (Mudança de variáveis): Seja U um aberto de $\mathbb{R}^n$, $\varphi : U \to V$, com $V = \varphi(U)$, uma mudança de variáveis e $D \subset V$ um conjunto limitado. Se $f : D \to \mathbb{R}$ é uma função integrável e $\varphi^{-1}(D) = \{\mathbf{u} \in U : \varphi(\mathbf{u}) \in D\}$ é um conjunto limitado, então a função $(f \circ \varphi)|\det D\varphi|$ é integrável em $\varphi^{-1}(D)$ e

$$\int_D f = \int_{\varphi^{-1}(D)} (f \circ \varphi)|\det D\varphi|.$$



Exemplo: Para calcular o integral da função $f(x,y) = x^2 - y^2$ no conjunto

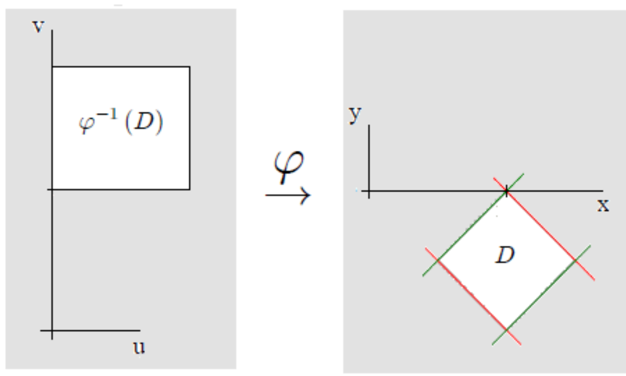
$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x + y \leq 1, 1 \leq x - y \leq 2\right\},$$

podemos considerar a mudança de variáveis definida por

$$\begin{cases} x + y = u \\ x - y = v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v \\ y = \frac{1}{2}u - \frac{1}{2}v \end{cases}.$$

Trata-se portanto da bijecção $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definida por

$$\varphi(u,v) = \left(\frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v, \frac{1}{2}u - \frac{1}{2}v\right).$$



Como

$$\begin{aligned}
\varphi^{-1}(D) &= \left\{(u,v)\in\mathbb{R}^2 : \varphi(u,v)\in D\right\}\\
&= \left\{(u,v)\in\mathbb{R}^2 : \left(\frac{1}{2}u+\frac{1}{2}v,\frac{1}{2}u-\frac{1}{2}v\right)\in D\right\}\\
&= \left\{(u,v)\in\mathbb{R}^2 : 0\leq \frac{1}{2}u+\frac{1}{2}v+\frac{1}{2}u-\frac{1}{2}v\leq 1\wedge 1\leq \frac{1}{2}u+\frac{1}{2}v-\frac{1}{2}u+\frac{1}{2}v\leq 2\right\}\\
&= \left\{(u,v)\in\mathbb{R}^2 : 0\leq u\leq 1\wedge 1\leq v\leq 2\right\}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
f\circ\varphi(u,v)\left|\det D\varphi(u,v)\right| &= f\left(\frac{1}{2}u+\frac{1}{2}v,\frac{1}{2}u-\frac{1}{2}v\right)\left|\det\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}\right|\\
&= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{2}u+\frac{1}{2}v\right)^2-\left(\frac{1}{2}u-\frac{1}{2}v\right)^2\right)\\
&= \frac{1}{2}uv,
\end{aligned}$$

obtemos

$$\begin{aligned}
\int_D f &= \int_{\varphi^{-1}(D)}(f\circ\varphi)\left|\det D\varphi\right| = \int_1^2\left(\int_0^1\left(\frac{1}{2}uv\right)du\right)dv\\
&= \int_1^2\left(\frac{1}{2}v\int_0^1 udu\right)dv = \frac{1}{4}\int_1^2 vdv = \frac{1}{4}\left[\frac{v^2}{2}\right]_{v=1}^{v=2} = \frac{3}{8}.
\end{aligned}$$

Exercício: Considere a região

$$R=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 2\leq xy\leq 4, 3x\leq y\leq 5x, 0\leq x, 0\leq y\right\},$$

com densidade de massa igual a $\sigma(x,y)=\frac{2y}{x}$. Calcule a área e a massa de R utilizando uma transformação de coordenadas apropriada.

Resolução: Consideremos a mudança de variáveis em $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$ definida por

$$\left\{\begin{array}{l} xy=u\\ \frac{y}{x}=v\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=u^{\frac{1}{2}}v^{-\frac{1}{2}}\\ y=u^{\frac{1}{2}}v^{\frac{1}{2}}\end{array}\right. .$$

Trata-se portanto da bijecção $\varphi:]0,+\infty[\times]0,+\infty[\to]0,+\infty[\times]0,+\infty[$, definida por

$$\varphi(u,v)=\left(u^{\frac{1}{2}}v^{-\frac{1}{2}},u^{\frac{1}{2}}v^{\frac{1}{2}}\right).$$

Como

$$\begin{aligned}\varphi^{-1}(R) &= \{(u,v)\in\,]0,+\infty[\times]0,+\infty[\,:\varphi(u,v)\in R\}\\ &= \left\{(u,v)\in\,]0,+\infty[\times]0,+\infty[\,:\left(u^{\frac{1}{2}}v^{-\frac{1}{2}},u^{\frac{1}{2}}v^{\frac{1}{2}}\right)\in R\right\}\\ &= \{(u,v)\in\,]0,+\infty[\times]0,+\infty[\,:2\le u\le 4, 3\le v\le 5\}\\ &= [2,4]\times[3,5],\end{aligned}$$

e por outro lado se tem

$$|\det D\varphi(u,v)| = \left|\det\begin{bmatrix}\frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}v^{-\frac{1}{2}} & -\frac{1}{2}u^{\frac{1}{2}}v^{-\frac{3}{2}}\\ \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}v^{\frac{1}{2}} & \frac{1}{2}u^{\frac{1}{2}}v^{-\frac{1}{2}}\end{bmatrix}\right| = \frac{1}{2v}$$

e

$$(\sigma\circ\varphi)(u,v) = \sigma(\varphi(u,v)) = \sigma\left(u^{\frac{1}{2}}v^{-\frac{1}{2}},u^{\frac{1}{2}}v^{\frac{1}{2}}\right) = 2\frac{u^{\frac{1}{2}}v^{\frac{1}{2}}}{u^{\frac{1}{2}}v^{-\frac{1}{2}}} = 2v$$

obtemos

$$\begin{aligned}\mathrm{vol}_2(R) &= \int_R 1 = \int_{\varphi^{-1}(R)}|\det D\varphi| = \int_2^4\left(\int_3^5\frac{1}{2v}dv\right)du\\ &= \int_2^4\frac{1}{2}(\log(5)-\log(3))\,du = \log(5)-\log(3)\end{aligned}$$

e

$$M = \int_R\sigma = \int_{\varphi^{-1}(R)}(\sigma\circ\varphi)|\det D\varphi| = \int_{\varphi^{-1}(R)}1 = \mathrm{vol}_2([2,4]\times[3,5]) = 4.$$

Coordenadas polares (r,θ) **em** $\mathbb{R}^2$**:** É a mudança de variáveis

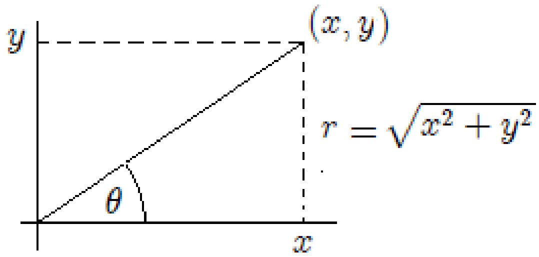
$$\varphi:]0,+\infty[\times]0,2\pi[\,\to\mathbb{R}^2,$$

definida por

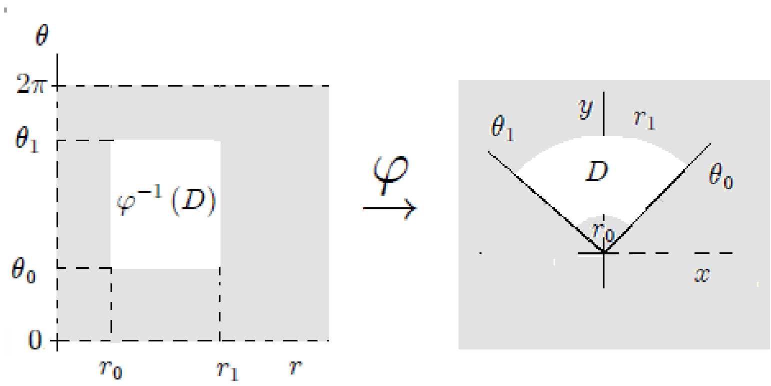
$$\varphi(r,\theta) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta)),$$

ou de forma equivalente

$$\begin{cases}x = r\cos(\theta)\\ y = r\sin(\theta)\end{cases}.$$



Trata-se de uma bijecção de $]0,+\infty[\times]0,2\pi[$ em $\mathbb{R}^2\setminus\{(x,0):x\geq 0\}$ que transforma intervalos de $]0,+\infty[\times]0,2\pi[$ em sectores de coroas circulares com centro em $(0,0)$.



Note-se ainda que como

$$D\varphi(r,\theta)=\begin{bmatrix}\frac{\partial x}{\partial r}(r,\theta) & \frac{\partial x}{\partial \theta}(r,\theta)\\ \frac{\partial y}{\partial r}(r,\theta) & \frac{\partial y}{\partial \theta}(r,\theta)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos(\theta) & -r\sin(\theta)\\ \sin(\theta) & r\cos(\theta)\end{bmatrix},$$

tem-se

$$\det D\varphi(r,\theta)=r\cos^2(\theta)+r\sin^2(\theta)=r.$$

Exercício: Escreva o integral $\int\int_S f(x,y)\,dxdy$ em coordenadas polares considerando as seguintes regiões:

a) $S=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:1\leq x^2+y^2\leq 4, x<y\}$

b) $S=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:x^2+y^2\leq 2, x>|y|\}$

c) $S=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:0\leq x\leq 1,-\sqrt{1-x^2}\leq y\leq x\right\}$

Resolução: a) Como

$$\begin{aligned}\varphi^{-1}(S) &= \{(r,\theta)\in]0,+\infty[\times]0,2\pi[:(r\cos(\theta),r\sin(\theta))\in S\}\\ &= \left\{(r,\theta)\in]0,+\infty[\times]0,2\pi[:1\leq r^2\leq 4, r\cos(\theta)<r\sin(\theta)\right\}\\ &= \{(r,\theta)\in]0,+\infty[\times]0,2\pi[:1\leq r\leq 2,\cos(\theta)<\sin(\theta)\}\\ &= \left\{(r,\theta)\in]0,+\infty[\times]0,2\pi[:1\leq r\leq 2,\frac{5\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{4}\right\}\\ &= [1,2]\times\left]\frac{5\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right[,\end{aligned}$$

obtemos

$$\int_S f=\int_{\varphi^{-1}(S)}(f\circ\varphi)\left|\det D\varphi\right|=\int_1^2\left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}f(r\cos(\theta),r\sin(\theta))\,rd\theta\right)dr.$$

b) Com coordenadas polares $(r,\theta) \in]0,+\infty[\times]-\pi,\pi[$, temos

$$\begin{aligned}
\varphi^{-1}(S) &= \{(r,\theta) \in]0,+\infty[\times]-\pi,\pi[: (r\cos(\theta), r\sin(\theta)) \in S\} \\
&= \left\{(r,\theta) \in]0,+\infty[\times]-\pi,\pi[: r^2 \leq 2, r\cos(\theta) > |r\sin(\theta)|\right\} \\
&= \left\{(r,\theta) \in]0,+\infty[\times]-\pi,\pi[: r \leq \sqrt{2}, \cos(\theta) > |\sin(\theta)|\right\} \\
&= \left\{(r,\theta) \in]0,+\infty[\times]-\pi,\pi[: r \leq \sqrt{2}, -\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{4}\right\} \\
&= \left]0,\sqrt{2}\right] \times \left]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right[.
\end{aligned}$$

Logo

$$\int_S f = \int_{\varphi^{-1}(S)} (f\circ\varphi)\,|\det D\varphi| = \int_0^{\sqrt{2}} \left(\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))\, r d\theta\right) dr.$$

c) Como $S = S_1 \cup S_2$, com

$$\begin{aligned}
S_1 &= \{(x,y) \in S : y \leq 0\} \\
&= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, y \leq 0, -\sqrt{1-x^2} \leq y\right\} \\
&= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x, y \leq 0, x^2+y^2 \leq 1\right\}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
S_2 &= \{(x,y) \in S : y > 0\} \\
&= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 < y \leq x\right\},
\end{aligned}$$

temos

$$\int_S f = \int_{S_1} f + \int_{S_2} f.$$

Por outro lado, como

$$\begin{aligned}
\varphi^{-1}(S_1) &= \{(r,\theta) \in]0,+\infty[\times]-\pi,\pi[: (r\cos(\theta), r\sin(\theta)) \in S_1\} \\
&= \left\{(r,\theta) \in]0,+\infty[\times]-\pi,\pi[: 0 \leq \cos(\theta), \sin(\theta) \leq 0, r^2 \leq 1\right\} \\
&=]0,1] \times \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\varphi^{-1}(S_2) &= \{(r,\theta) \in]0,+\infty[\times]-\pi,\pi[: (r\cos(\theta), r\sin(\theta)) \in S_2\} \\
&= \{(r,\theta) \in]0,+\infty[\times]-\pi,\pi[: 0 \leq r\cos(\theta) \leq 1, 0 < \sin(\theta) \leq \cos(\theta)\} \\
&= \left\{(r,\theta) \in]0,+\infty[\times]-\pi,\pi[: 0 < \theta \leq \frac{\pi}{4}, r\cos(\theta) \leq 1\right\} \\
&= \bigcup_{0<\theta\leq\frac{\pi}{4}} \left\{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 : 0 < r \leq \frac{1}{\cos(\theta)}\right\},
\end{aligned}$$

obtemos

$$\begin{aligned}
\int_S f &= \int_{S_1} f + \int_{S_2} f = \int_{\varphi^{-1}(S_1)} (f\circ\varphi)\,|\det D\varphi| + \int_{\varphi^{-1}(S_2)} (f\circ\varphi)\,|\det D\varphi| \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \left(\int_0^1 f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))\, r dr\right) d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^{\frac{1}{\cos(\theta)}} f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))\, r dr\right) d\theta
\end{aligned}$$

Exercício: Utilize coordenadas polares para calcular o integral duplo

$$\int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} e^{-x^2-y^2} dy \right) dx.$$

Resolução: Consideremos o conjunto

$$\begin{aligned} D &= \bigcup_{0 \leq x \leq 1} \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2} \right\} \\ &= \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1 \wedge 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2} \right\} \\ &= \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y, y^2 \leq 1 - x^2 \right\} \\ &= \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y, x^2 + y^2 \leq 1 \right\} \end{aligned}$$

e a função $f(x,y) = e^{-x^2-y^2}$. Como

$$\int_D f = \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} e^{-x^2-y^2} dy \right) dx$$

e

$$\begin{aligned} \varphi^{-1}(D) &= \{ (r,\theta) \in]0,+\infty[\times]0,2\pi[: (r\cos(\theta), r\sin(\theta)) \in D \} \\ &= \left\{ (r,\theta) \in]0,+\infty[\times]0,2\pi[: 0 \leq r\cos(\theta) \leq 1, 0 \leq r\sin(\theta), r^2 \leq 1 \right\} \\ &= \left\{ (r,\theta) \in]0,+\infty[\times]0,2\pi[: 0 \leq \cos(\theta) \leq \frac{1}{r}, 0 \leq \sin(\theta), r \leq 1 \right\} \\ &= \{ (r,\theta) \in]0,+\infty[\times]0,2\pi[: 0 \leq \cos(\theta), 0 \leq \sin(\theta), r \leq 1 \} \\ &=]0,1] \times \left]0, \frac{\pi}{2}\right], \end{aligned}$$

obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} e^{-x^2-y^2} dy \right) dx &= \int_D f = \int_{\varphi^{-1}(D)} (f \circ \varphi) |\det D\varphi| \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} r f(r\cos\theta, r\sin\theta) \, d\theta \right) dr = \int_0^1 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} r e^{-r^2} d\theta \right) dr \\ &= \int_0^1 \frac{\pi}{2} r e^{-r^2} dr = -\frac{\pi}{4} \int_0^1 -2r e^{-r^2} dr = -\frac{\pi}{4} \left[e^{-r^2} \right]_{r=0}^{r=1} = \frac{\pi}{4} \left(1 - e^{-1} \right). \end{aligned}$$

Exercício: Utilize coordenadas polares (possivelmente modificadas) para calcular o integral da função $f(x,y) = x^2 + y^2 - 1$ no conjunto

$$U = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x+1)^2 + y^2 \leq 1, 0 < y \right\}$$

Resolução: Neste caso podemos utilizar as coordenadas polares (modificadas) definidas por

$$\left\{ \begin{array}{l} x + 1 = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = r\cos(\theta) - 1 \\ y = r\sin(\theta) \end{array} \right. ,$$

ou seja $\varphi(r,\theta) = (r\cos(\theta) - 1, r\sin(\theta))$. Como

$$\begin{aligned}
\varphi^{-1}(U) &= \{(r,\theta) \in \,]0,+\infty[\, \times \,]0,2\pi[\, : (r\cos(\theta) - 1, r\sin(\theta)) \in U\} \\
&= \left\{(r,\theta) \in \,]0,+\infty[\, \times \,]0,2\pi[\, : r^2 \leq 1, 0 < r\sin(\theta)\right\} \\
&= \{(r,\theta) \in \,]0,+\infty[\, \times \,]0,2\pi[\, : r \leq 1, 0 < \theta < \pi\} \\
&= \,]0,1] \times \,]0,\pi[\,,
\end{aligned}$$

e por outro lado se tem

$$f \circ \varphi(r,\theta) = f(r\cos(\theta) - 1, r\sin(\theta)) = (r\cos(\theta) - 1)^2 + (r\sin(\theta))^2 - 1 = r^2 - 2r\cos\theta$$

e $|\det D\varphi(r,\theta)| = r$, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_U f &= \int_{\varphi^{-1}(U)} (f \circ \varphi) |\det D\varphi| = \int_0^1 \left(\int_0^\pi \left(r^3 - 2r^2\cos\theta\right) d\theta \right) dr \\
&= \int_0^1 \pi r^3 dr = \frac{1}{4}\pi.
\end{aligned}$$

Exercício: Utilize coordenadas polares (possivelmente modificadas) para calcular a área do conjunto

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{4} + y^2 < 1, |y| < x\right\}$$

Resolução: Neste caso podemos utilizar as coordenadas polares (modificadas) definidas por

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x}{2} = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 2r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \end{array} \right. ,$$

ou seja $\varphi(r,\theta) = (2r\cos(\theta), r\sin(\theta))$. Como

$$\begin{aligned}
\varphi^{-1}(A) &= \{(r,\theta) \in \,]0,+\infty[\, \times \,]-\pi,\pi[\, : (2r\cos(\theta), r\sin(\theta)) \in A\} \\
&= \left\{(r,\theta) \in \,]0,+\infty[\, \times \,]-\pi,\pi[\, : \frac{4r^2\cos^2(\theta)}{4} + r^2\sin^2(\theta) < 1, |r\sin(\theta)| < 2r\cos(\theta)\right\} \\
&= \left\{(r,\theta) \in \,]0,+\infty[\, \times \,]-\pi,\pi[\, : r^2 < 1, |\tan(\theta)| < 2, 0 < \cos(\theta)\right\} \\
&= \{(r,\theta) \in \,]0,+\infty[\, \times \,]-\pi,\pi[\, : r < 1, |\theta| < \arctan(2)\} \\
&= \,]0,1] \times \,]-\arctan(2), \arctan(2)[\,,
\end{aligned}$$

e por outro lado se tem

$$|\det D\varphi(r,\theta)| = \left|\det \begin{bmatrix} 2\cos(\theta) & -2r\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{bmatrix}\right| = 2r$$

obtemos

$$\begin{aligned}
\mathrm{vol}_2(A) &= \int_A 1 = \int_{\varphi^{-1}(A)} |\det D\varphi| = \int_0^1 \left(\int_{-\arctan(2)}^{\arctan(2)} 2r d\theta \right) dr \\
&= \int_0^1 4r\arctan(2)\, dr = 4\arctan(2) \int_0^1 r dr = 4\arctan(2) \left[\frac{r^2}{2}\right]_{r=0}^{r=1} = 2\arctan(2).
\end{aligned}$$

Coordenadas cilíndricas (ρ, θ, z) **em** $\mathbb{R}^3$**:** É a mudança de variáveis

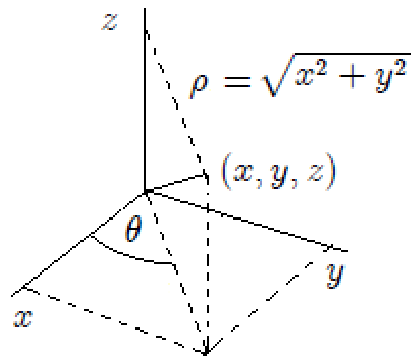
$$\varphi :]0, +\infty[\times]0, 2\pi[\times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,$$

definida por

$$\varphi(\rho, \theta, z) = (\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta), z)$$

ou de forma equivalente

$$\begin{cases} x = \rho \cos(\theta) \\ y = \rho \sin(\theta) \\ z = z \end{cases}.$$



Trata-se de uma bijecção de $]0, +\infty[\times]0, 2\pi[\times \mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^3 \setminus \{(x, y, z) : x \geq 0, y = 0\}$. Note-se ainda que como

$$D\varphi(\rho, \theta, z) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho}(\rho, \theta, z) & \frac{\partial x}{\partial \theta}(\rho, \theta, z) & \frac{\partial x}{\partial z}(\rho, \theta, z) \\ \frac{\partial y}{\partial \rho}(\rho, \theta, z) & \frac{\partial y}{\partial \theta}(\rho, \theta, z) & \frac{\partial y}{\partial z}(\rho, \theta, z) \\ \frac{\partial z}{\partial \rho}(\rho, \theta, z) & \frac{\partial z}{\partial \theta}(\rho, \theta, z) & \frac{\partial z}{\partial z}(\rho, \theta, z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\rho \sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \rho \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

tem-se

$$\det D\varphi(\rho, \theta, z) = \rho \cos^2(\theta) + \rho \sin^2(\theta) = \rho.$$

Exercício: Utilizar coordenadas cilíndricas para calcular o volume do sólido

$$V = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < z < \sqrt{2 - x^2 - y^2}\right\}.$$

Resolução: Como

$$\begin{aligned} \varphi^{-1}(V) &= \{(\rho, \theta, z) \in]0, +\infty[\times]0, 2\pi[\times \mathbb{R} : (\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta), z) \in V\} \\ &= \left\{(\rho, \theta, z) \in]0, +\infty[\times]0, 2\pi[\times \mathbb{R} : \rho^2 < z < \sqrt{2 - \rho^2}\right\} \\ &= \left\{(\rho, \theta, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < \rho \leq 1, 0 < \theta < 2\pi, \rho^2 < z < \sqrt{2 - \rho^2}\right\} \\ &= \bigcup_{(\rho, \theta) \in]0,1] \times]0, 2\pi[} \left\{(\rho, \theta, z) \in \mathbb{R}^3 : \rho^2 < z < \sqrt{2 - \rho^2}\right\}, \end{aligned}$$

temos

$$\mathrm{vol}_3(V) = \int_V 1 = \int_{\varphi^{-1}(V)} |\det D\varphi| = \int_{\varphi^{-1}(V)} \rho = \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_{\rho^2}^{\sqrt{2-\rho^2}} \rho dz \right) d\theta \right) d\rho.$$

Exercício: Calcule o momento de inércia do sólido

$$U = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y^2+z^2 \leq 1, 0 \leq x \leq \left(y^2+z^2\right)^{\frac{1}{4}}, y \geq 0, z \geq 0 \right\}$$

relativamente ao eixo Ox, e cuja densidade de massa é dada por $\sigma(x,y,z) = x(y^2+z^2)$.

Resolução: O momento de inércia do sólido relativamente ao eixo Ox é dado pelo integral

$$I_L = \int_U d^2\sigma,$$

onde $d(x,y,z) = \sqrt{y^2+z^2}$ é a distância de (x,y,z) ao eixo Ox. Temos portanto de calcular o integral da função

$$d^2\sigma(x,y,z) = x\left(y^2+z^2\right)^2$$

no conjunto U. Para calcular este integral, consideramos a mudança de variáveis

$$\varphi(\rho,\theta,x) = (x, \rho\sin(\theta), \rho\cos(\theta)),$$

ou de forma equivalente,

$$\begin{cases} x = x \\ y = \rho\sin(\theta) \\ z = \rho\cos(\theta) \end{cases}.$$

Como

$$\begin{aligned}
\varphi^{-1}(U) &= \{(\rho,\theta,x) \in \,]0,+\infty[\, \times \,]0,2\pi[\, \times \mathbb{R} : (x, \rho\sin(\theta), \rho\cos(\theta)) \in U\} \\
&= \left\{(\rho,\theta,x) \in \,]0,+\infty[\, \times \,]0,2\pi[\, \times \mathbb{R} : \rho^2 \leq 1, 0 \leq x \leq \rho^{\frac{1}{2}}, \sin(\theta) \geq 0, \cos(\theta) \geq 0\right\} \\
&= \left\{(\rho,\theta,x) \in \,]0,+\infty[\, \times \,]0,2\pi[\, \times \mathbb{R} : 0 < \rho \leq 1, 0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq x \leq \rho^{\frac{1}{2}}\right\} \\
&= \bigcup_{(\rho,\theta) \in]0,1] \times \left]0,\frac{\pi}{2}\right]} \left\{(\rho,\theta,x) : 0 \leq x \leq \rho^{\frac{1}{2}}\right\},
\end{aligned}$$

e $|\det D\varphi(\rho,\theta,x)| = \rho$, obtemos

$$\begin{aligned}
I_L &= \int_U d^2\sigma = \int_{\varphi^{-1}(U)} \left(d^2\sigma \circ \varphi\right) |\det D\varphi| \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\sqrt{\rho}} d^2\sigma(x, \rho\sin(\theta), \rho\cos(\theta)) \rho dx \right) d\theta \right) d\rho = \int_0^1 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\sqrt{\rho}} x\rho^5 dx \right) d\theta \right) d\rho \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\rho^5 \left[\frac{x^2}{2} \right]_{x=0}^{x=\sqrt{\rho}} \right) d\theta \right) d\rho = \int_0^1 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\rho^6}{2} d\theta \right) d\rho \\
&= \int_0^1 \frac{\pi\rho^6}{4} d\rho = \frac{\pi}{4} \left[\frac{\rho^7}{7} \right]_{\rho=0}^{\rho=1} = \frac{\pi}{28}.
\end{aligned}$$

Exercício: Calcular o volume dos sólidos:

a) $A = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1 - \left(\sqrt{y^2+z^2} - 1\right)^2, 0 \leq y, 0 \leq z\right\}$;

b) $B = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \left(\sqrt{x^2+y^2} - 4\right)^2 + z^2 < 1, 0 \leq y, 0 \leq z\right\}$.

Resolução: a) Considerando a mudança de variáveis

$$\varphi(\rho,\theta,x) = (x, \rho\sin(\theta), \rho\cos(\theta)),$$

ou de forma equivalente,

$$\begin{cases} x = x \\ y = \rho\sin(\theta) \\ z = \rho\cos(\theta) \end{cases},$$

temos

$$\begin{aligned}
\varphi^{-1}(A) &= \{(\rho,\theta,x) \in]0,+\infty[\times]0,2\pi[\times\mathbb{R} : (x,\rho\sin(\theta),\rho\cos(\theta)) \in A\} \\
&= \left\{(\rho,\theta,x) \in]0,+\infty[\times]0,2\pi[\times\mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1-(\rho-1)^2, 0 \leq \rho\sin(\theta), 0 \leq \rho\cos(\theta)\right\} \\
&= \left\{(\rho,\theta,x) \in]0,+\infty[\times]0,2\pi[\times\mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1-(\rho-1)^2, 0 \leq \sin(\theta), 0 \leq \cos(\theta)\right\} \\
&= \left\{(\rho,\theta,x) \in]0,+\infty[\times]0,2\pi[\times\mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1-(\rho-1)^2, 0 \leq 1-(\rho-1)^2, 0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}\right\} \\
&= \left\{(\rho,\theta,x) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1-(\rho-1)^2, 0 < \rho \leq 2, 0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}\right\} \\
&= \bigcup_{(\rho,\theta)\in]0,2]\times\left]0,\frac{\pi}{2}\right]} \left\{(\rho,\theta,x) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 2\rho-\rho^2\right\}.
\end{aligned}$$

Finalmente, porque $|\det D\varphi(\rho,\theta,x)| = \rho$, obtemos

$$\begin{aligned}
\mathrm{vol}_3(A) &= \int_A 1 = \int_{\varphi^{-1}(A)} |\det D\varphi| = \int_0^2 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{1-(\rho-1)^2} \rho dx\right) d\theta\right) d\rho \\
&= \int_0^2 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho\left(1-(\rho-1)^2\right) d\theta\right) d\rho = \int_0^2 \frac{\pi}{2}\rho\left(1-(\rho-1)^2\right) d\rho \\
&= \frac{\pi}{2}\int_0^2 \rho\left(1-(\rho-1)^2\right) d\rho = \frac{\pi}{2}\int_0^2 \left(2\rho^2-\rho^3\right) d\rho = \frac{\pi}{2}\left[\frac{2}{3}\rho^3 - \frac{1}{4}\rho^4\right]_{\rho=0}^{\rho=2} = \frac{2}{3}\pi.
\end{aligned}$$

b) Com coordenadas cilíndricas

$$\begin{cases} x = \rho\cos(\theta) \\ y = \rho\sin(\theta) \\ z = z \end{cases},$$

temos

$$\begin{aligned}
\varphi^{-1}(B) &= \{(\rho,\theta,z) \in]0,+\infty[\times]0,2\pi[\times\mathbb{R} : (\rho\cos(\theta),\rho\sin(\theta),z) \in B\} \\
&= \left\{(\rho,\theta,z) \in]0,+\infty[\times]0,2\pi[\times\mathbb{R} : (\rho-4)^2 + z^2 < 1, 0 \leq \rho\sin(\theta), 0 \leq z\right\} \\
&= \left\{(\rho,\theta,z) \in]0,+\infty[\times]0,2\pi[\times\mathbb{R} : (\rho-4)^2 < 1-z^2, 0 \leq \sin(\theta), 0 \leq z, 0 \leq 1-z^2\right\} \\
&= \left\{(\rho,\theta,z) \in]0,+\infty[\times]0,2\pi[\times\mathbb{R} : |\rho-4| < \sqrt{1-z^2}, 0 < \theta \leq \pi, 0 \leq z \leq 1\right\} \\
&= \bigcup_{0\leq z\leq 1} \left\{(\rho,\theta,z) \in \mathbb{R}^3 : 4-\sqrt{1-z^2} < \rho < 4+\sqrt{1-z^2}, 0 < \theta \leq \pi\right\}.
\end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned}\operatorname{vol}_3(B) &= \int_B 1 = \int_{\varphi^{-1}(B)} |\det D\varphi| = \int_0^1 \left(\int_0^{\pi} \left(\int_{4-\sqrt{1-z^2}}^{4+\sqrt{1-z^2}} \rho d\rho \right) d\theta \right) dz \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^{\pi} \left(\left[\frac{\rho^2}{2} \right]_{\rho=4-\sqrt{1-z^2}}^{\rho=4+\sqrt{1-z^2}} \right) d\theta \right) dz = \int_0^1 \left(\int_0^{\pi} 8\sqrt{1-z^2} d\theta \right) dz \\ &= \int_0^1 8\pi\sqrt{1-z^2} dz = 8\pi \int_0^1 \sqrt{1-z^2} dz = 2\pi^2.\end{aligned}$$

Coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) **em** $\mathbb{R}^3$**:** É a mudança de variáveis

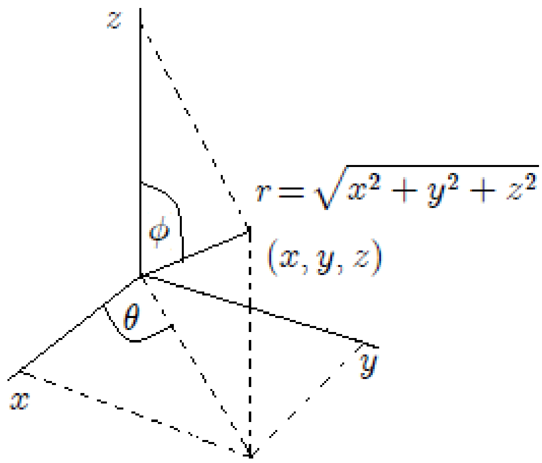
$$\varphi :]0, +\infty[\times]0, 2\pi[\times]0, \pi[\to \mathbb{R}^3,$$

definida por

$$\varphi(r, \theta, \phi) = (r \sin(\phi) \cos(\theta), r \sin(\phi) \sin(\theta), r \cos(\phi)),$$

ou de forma equivalente

$$\begin{cases} x = r \sin(\phi) \cos(\theta) \\ y = r \sin(\phi) \sin(\theta) \\ z = r \cos(\phi) \end{cases}.$$



Trata-se de uma bijecção de $]0, +\infty[\times]0, 2\pi[\times]0, \pi[$ em $\mathbb{R}^3 \setminus \{(x, y, z) : x \geq 0, y = 0\}$. Note-se ainda que como

$$\begin{aligned} D\varphi(r, \theta, \phi) &= \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r}(r, \theta, \phi) & \frac{\partial x}{\partial \theta}(r, \theta, \phi) & \frac{\partial x}{\partial \phi}(r, \theta, \phi) \\ \frac{\partial y}{\partial r}(r, \theta, \phi) & \frac{\partial y}{\partial \theta}(r, \theta, \phi) & \frac{\partial y}{\partial \phi}(r, \theta, \phi) \\ \frac{\partial z}{\partial r}(r, \theta, \phi) & \frac{\partial z}{\partial \theta}(r, \theta, \phi) & \frac{\partial z}{\partial \phi}(r, \theta, \phi) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sin(\phi) \cos(\theta) & -r \sin(\phi) \sin(\theta) & r \cos(\phi) \cos(\theta) \\ \sin(\phi) \sin(\theta) & r \sin(\phi) \cos(\theta) & r \cos(\phi) \sin(\theta) \\ \cos(\phi) & 0 & -r \sin(\phi) \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

tem-se

$$\det D\varphi(r, \theta, \phi) = -r^2 \sin \phi.$$

Exercício: Utilizar coordenadas esféricas para calcular o volume da esfera

$$S=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\sqrt{x^2+y^2+z^2}\leq s\right\}.$$

Resolução: Como

$$\begin{aligned}\varphi^{-1}(S) &= \{(r,\theta,\phi)\in]0,+\infty[\times]0,2\pi[\times]0,\pi[:(r\sin(\phi)\cos(\theta),r\sin(\phi)\sin(\theta),r\cos(\phi))\in S\}\\ &= \{(r,\theta,\phi)\in]0,+\infty[\times]0,2\pi[\times]0,\pi[:r\leq s\}\\ &=]0,s]\times]0,2\pi[\times]0,\pi[,\end{aligned}$$

temos

$$\begin{aligned}\mathrm{vol}_3(S) &= \int_S 1=\int_{\varphi^{-1}(S)}|\det D\varphi|=\int_0^s\left(\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi}r^2\sin\phi d\phi\right)d\theta\right)dr\\ &= \int_0^s\left(\int_0^{2\pi}\left(r^2\left[-\cos\phi\right]_{\phi=0}^{\phi=\pi}\right)d\theta\right)dr=\int_0^s\left(\int_0^{2\pi}\left(2r^2\right)d\theta\right)dr\\ &= \int_0^s 4\pi r^2dr=4\pi\left[\frac{r^3}{3}\right]_{r=0}^{r=s}=\frac{4}{3}\pi s^3.\end{aligned}$$

Exercício: Utilizar coordenadas esféricas para calcular o volume do sólido

$$V=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:0<y,1\leq x^2+y^2+z^2\leq 2,\sqrt{x^2+y^2}<z\right\}.$$

Resolução: Como

$$\begin{aligned}\varphi^{-1}(V) &= \{(r,\theta,\phi)\in]0,+\infty[\times]0,2\pi[\times]0,\pi[:(r\sin(\phi)\cos(\theta),r\sin(\phi)\sin(\theta),r\cos(\phi))\in V\}\\ &= \left\{(r,\theta,\phi)\in]0,+\infty[\times]0,2\pi[\times]0,\pi[:0<\sin(\theta),1\leq r^2\leq 2,\sqrt{r^2\sin^2(\phi)}<r\cos(\phi)\right\}\\ &= \left\{(r,\theta,\phi)\in]0,+\infty[\times]0,2\pi[\times]0,\pi[:0<\sin(\theta),1\leq r^2\leq 2,\sin(\phi)<\cos(\phi)\right\}\\ &= \left\{(r,\theta,\phi)\in]0,+\infty[\times]0,2\pi[\times]0,\pi[:0<\theta<\pi,1\leq r\leq\sqrt{2},0<\phi<\frac{\pi}{4}\right\}\\ &= \left]1,\sqrt{2}\right[\times]0,\pi[\times\left]0,\frac{\pi}{4}\right[,\end{aligned}$$

temos

$$\mathrm{vol}_3(V)=\int_V 1=\int_{\varphi^{-1}(V)}|\det D\varphi|=\int_{\varphi^{-1}(V)}r^2\sin\phi=\int_1^{\sqrt{2}}\left(\int_0^{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}}r^2\sin\phi d\phi\right)d\theta\right)dr.$$

Regra de Leibniz

Teorema (Regra de Leibniz): Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto compacto cuja fronteira tem contéudo nulo, U um aberto de $\mathbb{R}^m$ e $f : A \times U \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Nestas condições, a função $F : U \to \mathbb{R}$, definida por

$$F(\mathbf{t}) = \int_A f(\mathbf{x}, \mathbf{t}) d\mathbf{x}, \text{ para } \mathbf{t} = (t_1, ..., t_m) \in U,$$

tem as seguintes propriedades:

1) F é contínua em U.

2) Se a derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial t_i}$ existir e for contínua em $A \times U$, então $\frac{\partial F}{\partial t_i}$ existe em U e

$$\frac{\partial F}{\partial t_i}(\mathbf{t}) = \int_A \frac{\partial f}{\partial t_i}(\mathbf{x}, \mathbf{t}) d\mathbf{x}, \text{ para } \mathbf{t} = (t_1, ..., t_m) \in U.$$

Exemplo: Pela regra de Leibniz, a função $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por

$$F(t) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin(t+x)} dx,$$

é diferenciável em $\mathbb{R}$, com derivada dada por

$$F'(t) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t+x)\, e^{\sin(t+x)} dx.$$

Em particular

$$F'(0) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\, e^{\sin(x)} dx = \left[e^{\sin(x)}\right]_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} = e - 1$$

Exercício: Cacule $F'(0)$ onde $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é a função definida por

$$F(t) = \int_0^1 \sin\left(tx^2 + x^3\right) dx.$$

Resolução: Consideremos o intervalo compacto $A = [0, 1]$ e a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, t) = \sin(tx^2 + x^3)$. Como

$$F(t) = \int_A f(x, t)\, dx,$$

e f é de classe C^1, obtemos

$$F'(t) = \int_A \frac{\partial f}{\partial t}(x, t)\, dx = \int_0^1 x^2 \cos\left(tx^2 + x^3\right) dx,$$

e em particular

$$F'(0) = \int_0^1 x^2 \cos\left(x^3\right) dx = \frac{1}{3} \int_0^1 3x^2 \cos\left(x^3\right) dx = \frac{1}{3}\left[\sin\left(x^3\right)\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{\sin(1)}{3}.$$

Exercício: Seja $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ uma função de classe C^1. Calcule $G'(x)$, onde $G:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ é definida por

$$G(x)=\int_x^{x^3} f\left(tx,t^2+x^3\right)dt.$$

Resolução: A função G pode ser escrita na forma

$$G(x)=\int_{a(x)}^{b(x)} g(x,t)\,dt,$$

com $a:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $b:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ e $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, definidas por

$$a(x)=x,\ b(x)=x^3 \text{ e } g(x,t)=f\left(tx,t^2+x^3\right).$$

A função G pode portanto ser vista como composição das funções $H:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ e $L:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$, definidas por

$$H(x,y,z)=\int_y^z g(x,t)\,dt \text{ e } L(x)=(x,a(x),b(x)).$$

Como pela regra de Leibniz e pela regra da cadeia se tem

$$\frac{\partial H}{\partial x}(x,y,z)=\int_y^z\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\,dt=\int_y^z\left(t\frac{\partial f}{\partial u}\left(tx,t^2+x^3\right)+3x^2\frac{\partial f}{\partial v}\left(tx,t^2+x^3\right)\right)dt$$

e pelo teorema fundamental do cálculo sabemos que

$$\frac{\partial H}{\partial y}(x,y,z)=-g(x,y)=-f\left(xy,y^2+x^3\right) \text{ e } \frac{\partial H}{\partial z}(x,y,z)=g(x,z)=f\left(xz,z^2+x^3\right),$$

obtemos (mais uma vez pela regra da cadeia)

$$\begin{aligned}
G'(x) &= (H\circ L)'(x)\\
&= \frac{\partial H}{\partial x}(x,a(x),b(x))+a'(x)\frac{\partial H}{\partial y}(x,a(x),b(x))+b'(x)\frac{\partial H}{\partial z}(x,a(x),b(x))\\
&= \int_x^{x^3}\left(t\frac{\partial f}{\partial u}\left(tx,t^2+x^3\right)+3x^2\frac{\partial f}{\partial v}\left(tx,t^2+x^3\right)\right)dt-f\left(x^2,x^2+x^3\right)+3x^2f\left(x^4,x^6+x^3\right).
\end{aligned}$$

Exercício: Sendo $V_t=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:1\le x^2+y^2\le t,0\le z\le 1,0\le y\}$ e $F:[1,+\infty[\to\mathbb{R}$ a função definida por

$$F(t)=\int\int\int_{V_t}\frac{e^{t\left(x^2+y^2\right)}}{x^2+y^2}dxdydz,$$

calcule $F'(4)$.

Resolução: A função F está definida por

$$F(t)=\int_{V_t} g(x,y,z,t)\,dxdydz, \text{ com } g(x,y,z,t)=\frac{e^{t\left(x^2+y^2\right)}}{x^2+y^2}.$$

Considerando coordenadas cilíndricas, $\varphi(\rho,\theta,z)=(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta,z)$, temos

$$\begin{aligned}
\varphi^{-1}(V_t) &= \{(\rho,\theta,z)\in\,]0,+\infty[\,\times\,]0,2\pi[\,\times\mathbb{R}:(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta,z)\in V_t\}\\
&= \left\{(\rho,\theta,z)\in\,]0,+\infty[\,\times\,]0,2\pi[\,\times\mathbb{R}:1\le\rho^2\le t,0\le z\le 1,0\le\sin\theta\right\}\\
&= \left[1,\sqrt{t}\right]\times\,]0,\pi]\times[0,1],
\end{aligned}$$

pelo que

$$\begin{aligned}\int_{V_t} g(x,y,z,t)\,dxdydz &= \int_{\varphi^{-1}(V_t)} \rho g(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta,z)\,d\rho d\theta dz = \int_1^{\sqrt{t}}\left(\int_0^{\pi}\left(\int_0^1 \frac{e^{t\rho^2}}{\rho}dz\right)d\theta\right)d\rho \\ &= \int_1^{\sqrt{t}}\left(\int_0^{\pi}\frac{e^{t\rho^2}}{\rho}d\theta\right)d\rho = \int_1^{\sqrt{t}}\frac{\pi e^{t\rho^2}}{\rho}d\rho.\end{aligned}$$

A função F pode portanto ser escrita na forma

$$F(t) = \int_1^{a(t)} f(\rho,t)\,d\rho, \text{ com } a(t) = \sqrt{t} \text{ e } f(\rho,t) = \frac{\pi e^{t\rho^2}}{\rho},$$

donde se deduz que $F = G \circ H$, onde as funções $G : [1,+\infty[\, \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $H : [1,+\infty[\, \to \mathbb{R}$ estão definidas por

$$G(u,t) = \int_1^u f(\rho,t)\,d\rho \text{ e } H(t) = \left(\sqrt{t},t\right).$$

Assim, porque pelo teorema fundamental do Cálculo se tem

$$\frac{\partial G}{\partial u}(u,t) = f(u,t),$$

e pela regra Leibniz

$$\frac{\partial G}{\partial t}(u,t) = \int_1^u \frac{\partial f}{\partial t}(\rho,t)\,d\rho = \int_1^u \pi\rho e^{t\rho^2}d\rho,$$

vemos que as funcões G e H são de classe C^1, e consequentemente

$$\begin{aligned}F'(4) &= DG(H(4))\,DH(4) \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial G}{\partial u}(2,4) & \frac{\partial G}{\partial t}(2,4)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{4} \\ 1\end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{4}f(2,4) + \int_1^2 \pi\rho e^{4\rho^2}d\rho \\ &= \frac{\pi e^{16}}{8} + \frac{\pi}{8}\int_1^2 8\rho e^{4\rho^2}d\rho = \frac{\pi e^{16}}{8} + \frac{\pi}{8}\left[e^{4\rho^2}\right]_{\rho=1}^{\rho=2} = \frac{\pi e^{16}}{8} + \frac{\pi}{8}\left[e^{16}-e^4\right] = \frac{\pi}{8}\left(2e^{16}-e^4\right).\end{aligned}$$

Integral de linha de um campo escalar

Definição: Seja $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação de classe C^1 e injectiva em $]a,b[$, e $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ a linha descrita pelo caminho γ, ou seja

$$\Gamma = \{\gamma(t) : t \in [a,b]\}.$$

Ao integral

$$\ell(\Gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| \, dt$$

chama-se comprimento da linha Γ.

Exemplo: Um segmento de recta $\Gamma = [A,B] \subset \mathbb{R}^n$ é descrito pelo caminho $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^n$, definido por

$$\gamma(t) = (a_1 + t(b_1 - a_1), ..., a_n + t(b_n - a_n)), \text{ com } A = (a_1, ..., a_n) \text{ e } B = (b_1, ..., b_n),$$

pelo que o comprimento de Γ é dado por

$$\ell(\Gamma) = \int_0^1 \|\gamma'(t)\| \, dt = \int_0^1 \|(b_1 - a_1, ..., b_n - a_n)\| \, dt = \int_0^1 \|B - A\| \, dt = \|B - A\|.$$

Exemplo: A semi-circunferência $\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1, y \geq 0\}$ é descrita pelo caminho $\gamma : [0,\pi] \to \mathbb{R}^2$, definido por

$$\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t)),$$

pelo que o comprimento de Γ é dado por

$$\ell(\Gamma) = \int_0^\pi \|\gamma'(t)\| \, dt = \int_0^\pi \|(-\sin(t), \cos(t))\| \, dt = \int_0^\pi \sqrt{\sin^2(t) + \cos^2(t)} dt = \int_0^\pi 1 dt = \pi.$$

Exercício: Determine o comprimento da linha descrita pelo caminho $g : [0,1] \to \mathbb{R}^3$, definido por $g(t) = \left(t, \frac{1}{\sqrt{2}}t^2, \frac{1}{3}t^3\right)$.

Resolução: Basta notar que $g'(t) = \left(1, \sqrt{2}t, t^2\right)$, para obter

$$\begin{aligned} \ell(\Gamma) &= \int_0^1 \|g'(t)\| \, dt = \int_0^1 \left\| \left(1, \sqrt{2}t, t^2\right) \right\| dt = \int_0^1 \sqrt{1 + 2t^2 + t^4} dt \\ &= \int_0^1 1 + t^2 dt = \left[t + \frac{1}{3}t^3\right]_{t=0}^{t=1} = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

Definição: Seja $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ um campo escalar contínuo e $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ a linha descrita pelo caminho $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$. Ao integral

$$\int_\Gamma \phi = \int_a^b \phi(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| \, dt$$

chama-se integral de linha do campo escalar ϕ ao longo da linha Γ.

Aplicações dos integrais de linha

Massa de um fio:

Seja $\sigma : \Gamma \to \mathbb{R}$ a densidade de massa por unidade de comprimento do material que constitui um fio descrito por $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$. Então a massa M do fio é dada pelo integral de linha

$$M = \int_\Gamma \sigma = \int_a^b \sigma\left(\gamma\left(t\right)\right) \left\|\gamma'\left(t\right)\right\| dt.$$

Note-se que quando $\sigma = 1$, a massa do fio coincide com o seu comprimento.

Centro de Massa de um fio:

Seja $\sigma : \Gamma \to \mathbb{R}$ a densidade de massa por unidade de comprimento do material que constitui um fio descrito por $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, e seja

$$\phi_i\left(x\right) = \frac{1}{M} x_i \sigma\left(x\right), \; i = 1, ..., n,$$

onde M é a massa a do fio.

O centro de massa do fio é o ponto $(c_1, ..., c_n)$ com coordenadas dadas por

$$c_i = \int_\Gamma \phi_i = \int_a^b \phi_i\left(\gamma\left(t\right)\right) \left\|\gamma'\left(t\right)\right\| dt = \frac{1}{M}\int_a^b \gamma_i\left(t\right) \sigma\left(\gamma\left(t\right)\right) \left\|\gamma'\left(t\right)\right\| dt, \; i = 1, ..., n.$$

No caso em que $\sigma = 1$, ao centro de massa também se chama **centróide.**

Momento de Inércia relativo a uma linha recta:

Seja L uma linha recta e $d_L\left(x\right)$ a distância de um ponto $x \in \mathbb{R}^n$ à linha L.

O momento de inércia da linha Γ relativo à linha L, designado por I_L, é o integral da função definida por $\phi\left(x\right) = d_L^2\left(x\right)\sigma\left(x\right)$, ou seja

$$I_L = \int_\Gamma \phi = \int_a^b d_L^2\left(\gamma\left(t\right)\right) \sigma\left(\gamma\left(t\right)\right) \left\|\gamma'\left(t\right)\right\| dt,$$

em que σ é a densidade de massa por unidade de comprimento do material que constitui a linha.

Exercício: Determine a massa total do fio $\Gamma = \{(t^2, t\cos t, t\sin t) : 0 \leq t \leq 2\pi\}$, com densidade de massa por unidade de comprimento $\sigma\left(x, y, z\right) = \sqrt{x}$.

Resolução: Como a linha Γ é descrita pelo caminho $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$, definido por

$$\gamma\left(t\right) = \left(t^2, t\cos t, t\sin t\right),$$

obtemos

$$\begin{aligned} M &= \int_\Gamma \sigma = \int_0^{2\pi} \sigma\left(\gamma\left(t\right)\right) \left\|\gamma'\left(t\right)\right\| dt = \int_0^{2\pi} \sigma\left(t^2, t\cos t, t\sin t\right) \left\|(2t, \cos t - t\sin t, \sin t + t\cos t)\right\| dt \\ &= \int_0^{2\pi} t\sqrt{4t^2 + \left(\cos t - t\sin t\right)^2 + \left(\sin t + t\cos t\right)^2} dt = \int_0^{2\pi} t\sqrt{1 + 5t^2} dt \\ &= \frac{1}{10}\int_0^{2\pi} 10t\left(1 + 5t^2\right)^{\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{10}\left[\frac{2}{3}\left(1 + 5t^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]_{t=0}^{t=2\pi} = \frac{1}{15}\left(\left(1 + 20\pi^2\right)^{\frac{3}{2}} - 1\right). \end{aligned}$$

Exercício: Determine o centro de massa da linha descrita pelas equações $x = y^2 + z^2$ e $x^2 + y^2 + z^2 = 2$, com densidade de massa $\sigma(x, y, z) = 2 - y$.

Resolução: A linha Γ é descrita pelo caminho $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$, definido por

$$\gamma(t) = (1, \cos t, \sin t),$$

já que

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 2 \\ y^2 + z^2 = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x - 2 = 0 \\ y^2 + z^2 = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x+2) = 0 \\ y^2 + z^2 = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y^2 + z^2 = 1 \end{cases}.$$

Assim, porque a massa do fio é dada por

$$\begin{aligned} M &= \int_\Gamma \sigma = \int_0^{2\pi} \sigma(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| \, dt = \int_0^{2\pi} \sigma(1, \cos t, \sin t) \|(0, -\sin t, \cos t)\| \, dt \\ &= \int_0^{2\pi} (2 - \cos t) \sqrt{\sin^2(t) + \cos^2(t)} dt = \int_0^{2\pi} (2 - \cos t) \, dt = 4\pi, \end{aligned}$$

as coordenadas c_1, c_2 e c_3 do centro de massa são:

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \gamma_1(t) \sigma(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| \, dt = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} (2 - \cos t) \, dt \\ &= \frac{1}{4\pi} [2t - \sin t]_{t=0}^{t=2\pi} = 1; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_2 &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \gamma_2(t) \sigma(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| \, dt = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} (2 - \cos t) \cos t dt \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left(2 \cos t - \cos^2 t\right) = \frac{1}{4\pi} \left[2 \sin t - \frac{t + \sin t \cos t}{2}\right]_{t=0}^{t=2\pi} = -\frac{1}{4}; \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} c_3 &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \gamma_3(t) \sigma(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| \, dt = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} (2 - \cos t) \sin t dt \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} (2 \sin t - \cos t \sin t) \, dt = \frac{1}{4\pi} \left[-2 \cos t - \frac{\sin^2 t}{2}\right]_{t=0}^{t=2\pi} = 0. \end{aligned}$$

Trabalho, integral de linha de um campo vectorial,

Definição: Seja $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ um de classe C^1 e $F : U \to \mathbb{R}^n$ um campo vectorial contínuo definido num aberto U de $\mathbb{R}^n$ tal que $\gamma([a, b]) \subset U$. Ao integral

$$\int F \cdot d\gamma = \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt$$

chama-se trabalho realizado pelo campo F ao longo do caminho γ, ou integral de linha de F ao longo do caminho γ.

Nota: A definição de trabalho estende-se a caminhos seccionalmente de classe C^1. Diz-se que um caminho contínuo $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ é seccionalmente de classe C^1, se existem pontos $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_p = b$ por forma a que restrição de γ a cada $[a_{i-1}, a_i]$ seja de classe C^1. Neste caso, quando $F : U \to \mathbb{R}^n$ é um campo vectorial contínuo definido num aberto U de $\mathbb{R}^n$ tal que $\gamma([a, b]) \subset U$, define-se

$$\int F \cdot d\gamma = \sum_{i=1}^{p} \int_{a_{i-1}}^{a_i} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt,$$

ou de forma equivalente

$$\int F \cdot d\gamma = \sum_{i=1}^{p} \int F . d\gamma_i,$$

onde $\gamma_i : [a_{i-1}, a_i] \to \mathbb{R}^n$ designa a restrição de γ a $[a_{i-1}, a_i]$.

Nota: Quando $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ designa a linha descrita por um caminho $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, seccionalmente de classe C^1e injectivo em $]a, b[$, é habitual escrever

$$\int_\Gamma F \cdot d\gamma$$

para designar o trabalho realizado pelo campo F ao longo do caminho γ.

Exercício: Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto, $F : U \to \mathbb{R}^n$ um campo vectorial contínuo, e $\gamma : [a, b] \to U$, um caminho de classe C^1. Mostre que se $\alpha : [c, d] \to [a, b]$ é uma bijecção de classe C^1, então

$$\int F \cdot d(\gamma \circ \alpha) = \pm \int F \cdot d\gamma,$$

consoante α é crescente ou decrescente.

Sugestão: Mostre que se $G : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma primitiva de $F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$, então $G \circ \alpha : [c, d] \to \mathbb{R}$ é uma primitiva de $F((\gamma \circ \alpha)(t)) \cdot (\gamma \circ \alpha)'(t)$.

Exercício: Para cada um dos casos seguintes calcule o trabalho realizado pelo campo vetorial F ao longo do caminho γ indicado:

a) $F(x, y) = (-y, x)$, $\gamma(t) = (t \cos t, t \sin t)$, com $t \in [0, 2\pi]$;

b) $F(x, y, z) = (x, z, z - y)$, $\gamma(t) = (t^2, \cos t, \sin t)$, com $t \in [0, \pi]$.

Resolução: a) Como

$$F(\gamma(t)) = F(t \cos t, t \sin t) = (-t \sin t, t \cos t) \;\text{ e }\; \gamma'(t) = (\cos t - t \sin t, \sin t + t \cos t),$$

obtemos

$$\begin{aligned}\int F\cdot d\gamma &= \int_0^{2\pi} F(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt = \int_0^{2\pi} (-t\sin t, t\cos t)\cdot(\cos t - t\sin t, \sin t + t\cos t)\,dt\\ &= \int_0^{2\pi} ((t\sin t-\cos t)\,t\sin t + (\sin t + t\cos t)\,t\cos t)\,dt\\ &= \int_0^{2\pi} \left(t^2\sin^2(t) + t^2\cos^2(t)\right)dt = \int_0^{2\pi} t^2 dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_{t=0}^{t=2\pi} = \frac{8\pi^3}{3}.\end{aligned}$$

b) Como

$$F(\gamma(t)) = F\left(t^2,\cos t,\sin t\right) = \left(t^2,\sin t,\sin t-\cos t\right) \text{ e } \gamma'(t) = (2t,-\sin t,\cos t),$$

obtemos

$$\begin{aligned}\int F\cdot d\gamma &= \int_0^{\pi} F(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt = \int_0^{\pi}\left(t^2,\sin t,\sin t-\cos t\right)\cdot(2t,-\sin t,\cos t)\,dt\\ &= \int_0^{\pi}\left(2t^3-\sin^2(t)+(\sin t-\cos t)\cos t\right)dt = \int_0^{\pi}\left(2t^3-1+\cos(t)\sin(t)\right)dt\\ &= \left[\frac{t^4}{2}-t+\frac{\sin^2(t)}{2}\right]_{t=0}^{t=\pi} = \frac{\pi^4}{2}-\pi.\end{aligned}$$

Exercício: Calcule o trabalho realizado pelo campo vetorial $F(x,y,z) = (x,z,2y)$ ao longo das seguintes curvas:

a) O segmento de recta que une o ponto $(0,0,0)$ a $(1,2,3)$.

b) A intersecção das superfícies $x^2+y^2 = 1$ e $z = x^2-y^2$ num sentido que parece o anti-horário quando visto desde o ponto $(0,0,100)$.

c) A intersecçãoo das superfícies $x = y^2+z^2$ e $2y+x = 3$ num sentido que parece o horário quando visto do ponto $(100,-1,0)$.

Resolução: a) Trata-se de calcular o trabalho realizado pelo campo vetorial F ao longo do caminho $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^3$, definido por $\gamma(t) = (t,2t,3t)$, ou seja

$$\begin{aligned}\int F\cdot d\gamma &= \int_0^1 F(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt = \int_0^1 F(t,2t,3t)\cdot(1,2,3)\,dt\\ &= \int_0^1 (t,3t,4t)\cdot(1,2,3)\,dt = \int_0^1 19t dt = \frac{19}{2}.\end{aligned}$$

b) Trata-se de calcular o trabalho realizado pelo campo F ao longo do caminho $\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$, definido por

$$\gamma(t) = \left(\cos t,\sin t,\cos^2 t-\sin^2 t\right) = \left(\cos t,\sin t,1-2\sin^2 t\right)$$

ou seja

$$\begin{aligned}\int F\cdot d\gamma &= \int_0^{2\pi} F(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt = \int_0^{2\pi} F\left(\cos t,\sin t,1-2\sin^2 t\right)\cdot(-\sin t,\cos t,-4\sin t\cos t)\,dt\\ &= \int_0^{2\pi}\left(\cos t,1-2\sin^2 t,2\sin t\right)\cdot(-\sin t,\cos t,-4\sin t\cos t)\,dt\\ &= \int_0^{2\pi}\left(-\sin t\cos t+\cos t-10\cos t\sin^2 t\right)dt = \left[\frac{\cos^2 t}{2}+\sin t-10\frac{\sin^3 t}{3}\right]_{t=0}^{t=2\pi} = 0.\end{aligned}$$

c) Como

$$\begin{cases} x = y^2 + z^2 \\ 2y + x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y^2 + z^2 \\ x = 3 - 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y^2 + z^2 \\ y^2 + z^2 = 3 - 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y^2 + z^2 \\ (y+1)^2 + z^2 = 4 \end{cases},$$

trata-se de calcular o trabalho realizado pelo campo F ao longo do caminho $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$, definido por

$$\gamma(t) = \left((2\cos t - 1)^2 + (-2\sin t)^2, 2\cos t - 1, -2\sin t\right) = (5 - 4\cos t, 2\cos t - 1, -2\sin t),$$

ou seja

$$\begin{aligned}
\int F \cdot d\gamma &= \int_0^{2\pi} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} F(5 - 4\cos t, 2\cos t - 1, -2\sin t) \cdot (4\sin t, -2\sin t, -2\cos t)\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} (5 - 4\cos t, -2\sin t, 4\cos t - 2) \cdot (4\sin t, -2\sin t, -2\cos t)\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} \left(4\cos t + 20\sin t - 16\cos t\sin t - 12\cos^2 t + 4\right) dt \\
&= \left[4\sin t - 20\cos t - 8\sin^2 t - 6\sin t\cos t - 2t\right]_{t=0}^{t=2\pi} = -4\pi.
\end{aligned}$$

Exercício: Seja $E \subset \mathbb{R}^2$ a elipse definida pela equação $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$. Calcule o integral de linha do campo vetorial dado por $F(x,y) = (4xf(x,y) - y, yf(x,y) + x)$ ao longo de E orientada no sentido anti-horário, onde $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é contínua.

Resolução: Trata-se de calcular o trabalho realizado pelo campo F ao longo do caminho $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, definido por

$$\gamma(t) = (2\cos t, 4\sin t).$$

Temos portanto

$$\begin{aligned}
\int F \cdot d\gamma &= \int_0^{2\pi} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} (8f(2\cos t, 4\sin t)\cos t - 4\sin t, 4f(2\cos t, 4\sin t)\sin t + 2\cos t) \cdot (-2\sin t, 4\cos t)\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} (-2\sin t\,(8f(2\cos t, 4\sin t)\cos t - 4\sin t) + 4\cos t\,(4f(2\cos t, 4\sin t)\sin t + 2\cos t))\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} (-16f(2\cos t, 4\sin t)\sin t\cos t + 8 + 16f(2\cos t, 4\sin t)\cos t\sin t)\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} 8dt = 16\pi.
\end{aligned}$$

Campos gradientes

Definição: Diz-se que um campo vectorial $F : U \to \mathbb{R}^n$, definido num U aberto de $\mathbb{R}^n$, é um campo gradiente, se existe um campo escalar $\varphi : U \to \mathbb{R}$, de classe C^1, tal que $F = \nabla\varphi$, ou seja

$$F(\mathbf{x}) = (F_1(\mathbf{x}), F_2(\mathbf{x}), ..., F_n(\mathbf{x})) = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(\mathbf{x}), \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}(\mathbf{x}), ..., \frac{\partial\varphi}{\partial x_n}(\mathbf{x})\right), \text{ para } \mathbf{x} \in U.$$

Teorema: Se $F = \nabla\varphi$ é um campo gradiente, definido num U aberto de $\mathbb{R}^n$, e $\gamma : [a, b] \to U$ é um caminho seccionalmente de classe C^1, então o trabalho realizado por F ao longo de γ é igual a $\varphi(\gamma(b)) - \varphi(\gamma(a))$, ou seja

$$F \cdot d\gamma = \varphi(B) - \varphi(A), \text{ com } A = \gamma(a) \text{ e } B = \gamma(b).$$

O teorema anterior mostra que o trabalho realizado por um campo gradiente ao longo dum caminho $\gamma : [a, b] \to U$ seccionalmente de classe C^1, apenas depende dos pontos $\gamma(a)$ e $\gamma(b)$. Os campos vectoriais com esta propriedade chamam-se conservativos.

Teorema: Seja U um aberto de $\mathbb{R}^n$ e $F : U \to \mathbb{R}^n$ um campo vectorial contínuo. As seguintes afirmações são equivalentes:

1) F é conservativo.

2) $\int F \cdot d\gamma = 0$, para qualquer caminho $\gamma : [a, b] \to U$ fechado $(\gamma(a) = \gamma(b))$ seccionalmente de classe C^1.

3) F é um campo gradiente.

Definição: Diz-se que um campo vectorial $F : U \to \mathbb{R}^n$, definido num U aberto de $\mathbb{R}^n$, é fechado, se é de classe C^1 e verifica

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}, \text{ para } i \neq j.$$

Como consequência do Lema de Schwarz tem-se o seguinte:

Proposição: Seja U um aberto de $\mathbb{R}^n$ e $F : U \to \mathbb{R}^n$ um campo vectorial de classe C^1. Se F é um campo gradiente, então é fechado.

Exercício: Para cada um dos casos seguintes determine se o campo vetorial é ou não conservativo. Em caso afirmativo, calcule um potencial.

a) $F(x, y) = (y^2, x^3)$

b) $F(x, y) = (x^3 + y, y^2 + x)$

c) $F(x, y) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right)$

d) $F(x, y, z) = (y, x, 2z)$

e) $F(x, y, z) = (-y, x, z)$

Resolução: a) O campo não é fechado, já que

$$\frac{\partial F_1}{\partial y}(x, y) = 2y \neq 3x^2 = \frac{\partial F_2}{\partial x}(x, y),$$

logo não é conservativo.

b) O campo é fechado, já que

$$\frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) = 1 = \frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y).$$

Como

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y) = F_1(x,y) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) = F_2(x,y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y) = x^3 + y \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) = y^2 + x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi(x,y) = \frac{x^4}{4} + yx + A(y) \\ x + A'(y) = y^2 + x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \varphi(x,y) = \frac{x^4}{4} + yx + A(y) \\ A'(y) = y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi(x,y) = \frac{x^4}{4} + yx + A(y) \\ A(y) = \frac{y^3}{3} + C \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \varphi(x,y) = \frac{x^4}{4} + yx + \frac{y^3}{3} + C,$$

concluimos que o campo é conservativo com potencial $\varphi(x,y) = \frac{x^4}{4} + yx + \frac{y^3}{3}$.

c) O campo é fechado, já que

$$\frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y).$$

Como

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y) = F_1(x,y) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) = F_2(x,y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi(x,y) = \frac{1}{2}\log(x^2+y^2) + A(y) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \varphi(x,y) = \frac{1}{2}\log(x^2+y^2) + A(y) \\ \frac{y}{x^2+y^2} + A'(y) = \frac{y}{x^2+y^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi(x,y) = \frac{1}{2}\log(x^2+y^2) + A(y) \\ A'(y) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \varphi(x,y) = \frac{1}{2}\log\left(x^2+y^2\right) + C,$$

concluimos que o campo é conservativo com potencial $\varphi(x,y) = \varphi(x,y) = \frac{1}{2}\log(x^2+y^2)$.

d) O campo é fechado, já que:

$$\frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) = 1 = \frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y); \frac{\partial F_1}{\partial z}(x,y) = 0 = \frac{\partial F_3}{\partial x}(x,y); \frac{\partial F_2}{\partial z}(x,y) = 0 = \frac{\partial F_3}{\partial y}(x,y).$$

Como

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y,z) = F_1(x,y,z) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y,z) = F_2(x,y,z) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z}(x,y,z) = F_3(x,y,z) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y,z) = y \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y,z) = x \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z}(x,y,z) = 2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi(x,y,z) = yx + A(y,z) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y,z) = x \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z}(x,y,z) = 2z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \varphi(x,y,z) = yx + A(y,z) \\ x + \frac{\partial A}{\partial y}(y,z) = x \\ \frac{\partial A}{\partial z}(y,z) = 2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi(x,y,z) = yx + A(y,z) \\ \frac{\partial A}{\partial y}(y,z) = 0 \\ \frac{\partial A}{\partial z}(y,z) = 2z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \varphi(x,y,z) = yx + A(y,z) \\ A(y,z) = B(z) \\ B'(z) = 2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi(x,y,z) = yx + A(y,z) \\ A(y,z) = B(z) \\ B(z) = z^2 + C \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \varphi(x,y,z) = yx + z^2 + C,$$

concluímos que o campo é conservativo com potencial $\varphi(x,y,z) = yx + z^2$.

d) O campo não é fechado, já que

$$\frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y,z) = -1 \neq 1 = \frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y,z),$$

logo não é conservativo.

Teorema de Green

Seja $F=(P,Q)$ um campo vectorial em $\mathbb{R}^2$ e $C\subset\mathbb{R}^2$ uma curva descrita por um caminho, $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^2$, seccionalmente regular. No que se segue, escrevemos

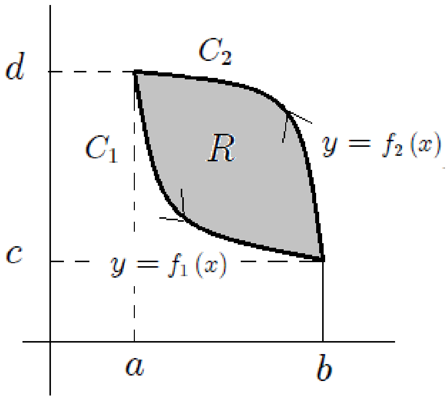
$$\int_C Pdx+Qdy$$

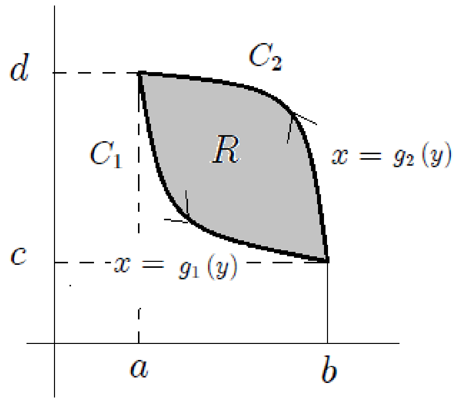
para denotar o integral de linha do campo F ao longo de γ, ou seja

$$\int_C Pdx+Qdy=\int_a^b F\left(\gamma\left(t\right)\right)\cdot\gamma'\left(t\right)dt.$$

Definição: Diz-se que um conjunto $R\subset\mathbb{R}^2$ é um domínio elementar se existirem funções contínuas $f_1:[a,b]\to\mathbb{R}$, $f_2:[a,b]\to\mathbb{R}$, $g_1:[c,d]\to\mathbb{R}$, $g_2:[c,d]\to\mathbb{R}$, seccionalmente de classe C^1, tais que

$$\begin{aligned} R &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : a\le x\le b\wedge f_1\left(x\right)\le y\le f_2\left(x\right)\right\}\\ &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : c\le y\le d\wedge g_1\left(y\right)\le x\le g_2\left(y\right)\right\}.\end{aligned}$$





Exercício: Mostre que se $F=(P,Q)$ é um campo vectorial de classe C^1, definido num aberto $U\subset\mathbb{R}^2$, e $R\subset U$ é um domínio elementar, então

$$\int_R\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)=\oint_{\partial R}Pdx+Qdy,$$

quando a curva ∂R é percorrida no sentido anti-horário.

Resolução: Como

$$\begin{aligned}\int_R\frac{\partial Q}{\partial x} &= \int_c^d\left(\int_{g_1(y)}^{g_2(y)}\frac{\partial Q}{\partial x}\left(x,y\right)dx\right)dy\\ &= \int_c^d\left(Q\left(g_2\left(y\right),y\right)-Q\left(g_1\left(y\right),y\right)\right)dy\\ &= \int_c^d Q\left(g_2\left(y\right),y\right)dy-\int_c^d Q\left(g_1\left(y\right),y\right)dy\\ &= \int_c^d\left(0,Q\left(g_2\left(y\right),y\right)\right)\cdot\left(g_2'\left(y\right),1\right)dy-\int_c^d\left(0,Q\left(g_1\left(y\right),y\right)\right)\cdot\left(g_1'\left(y\right),1\right)dy\\ &= \int_{C_2}0dx+Qdy+\int_{C_1}0dx+Qdy\\ &= \oint_C 0dx+Qdy,\end{aligned}$$

e, de forma análoga,

$$
\begin{aligned}
\int_R \frac{\partial P}{\partial y} &= \int_a^b \left(\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\, dy \right) dx \\
&= \int_a^b \left(P\left(x, f_2(x)\right) - P\left(x, f_1(x)\right) \right) dx \\
&= \int_a^b P\left(x, f_2(x)\right) dx - \int_a^b P\left(x, f_1(x)\right) dx \\
&= \int_a^b \left(P\left(x, f_2(x)\right), 0 \right) \cdot \left(1, f_2'(x)\right) dx - \int_a^b \left(P\left(x, f_1(x)\right), 0 \right) \cdot \left(1, f_1'(x)\right) dx \\
&= -\int_{C_2} P dx + 0 dy - \int_{C_1} P dx + 0 dy \\
&= -\oint_C P dx + 0 dy,
\end{aligned}
$$

obtemos

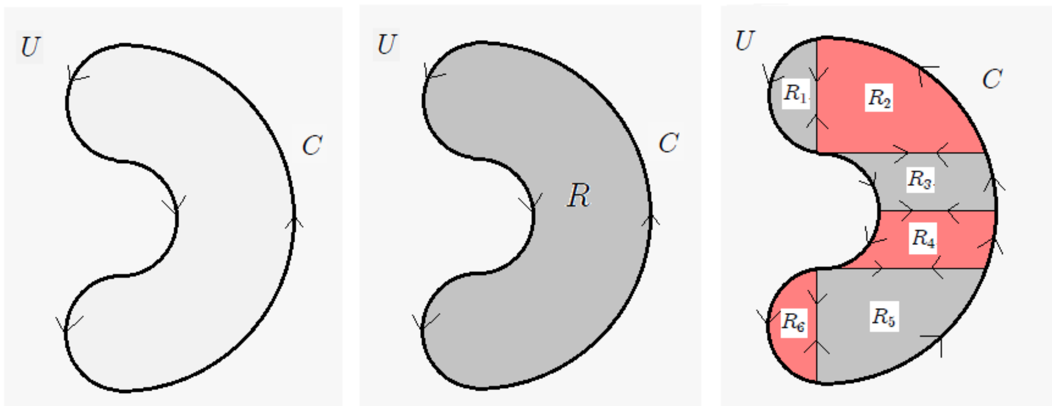
$$
\begin{aligned}
\int_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) &= \int_R \frac{\partial Q}{\partial x} - \int_R \frac{\partial P}{\partial y} \\
&= \oint_C 0 dx + Q dy + \oint_C P dx + 0 dy \\
&= \oint_C P dx + Q dy.
\end{aligned}
$$

Definição: Uma curva $C \subset \mathbb{R}^n$ é dita de Jordan, quando pode ser descrita por um caminho, $\gamma : [a, b] \to C$, injectivo em $]a, b[$ e tal que $\gamma(a) = \gamma(b)$. Quando o caminho γ é seccionalmente regular, diz-se que C é uma curva de Jordan seccionalmente regular.

Teorema de Green (para uma região do plano limitada por uma curva de Jordan seccionalmente regular): Seja U um aberto de $\mathbb{R}^2$, $F = (P, Q) : U \to \mathbb{R}^2$ um campo vectorial de classe C^1 e $C \subset U$ uma curva de Jordan seccionalmente regular. Designe-se por R a região do plano formada pelos pontos que se encontram na parte interna de C e admita-se que $R \subset U$. Nestas condições verifica-se a igualdade

$$\int\int_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_C P dx + Q dy,$$

onde o integral de linha se toma ao longo de C no sentido anti-horário.



Exercício: Considere o campo vetorial $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ definido por $F(x,y)=(-2y,x)$ e o conjunto

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2<1\wedge y>|x|\right\}.$$

Calcule o trabalho realizado por F ao longo da fronteira do conjunto D no sentido anti-horário.

Resolução: Como $F(x,y)=(P(x,y),Q(x,y))$, com $P(x,y)=-2y$ e $Q(x,y)=x$, o Teorema de Green garante que

$$\begin{aligned}\oint_{\partial D} Pdx+Qdy &= \int\int_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\int\int_D 3dxdy\\ &= 3\int\int_D 1dxdy=3\mathrm{vol}_2(D)=\frac{3\pi}{4}.\end{aligned}$$

Exercício: Use o Teorema de Green para calcular a área do conjunto

$$R=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+\frac{y^2}{4}<1\wedge x>0\right\}.$$

Resolução: Consideremos o campo $F(x,y)=(P(x,y),Q(x,y))$, com $P(x,y)=0$ e $Q(x,y)=x$. Como

$$\mathrm{vol}_2(R)=\int\int_R 1dxdy=\int\int_R\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy,$$

o Teorema de Green garante que

$$\begin{aligned}\mathrm{vol}_2(R) &= \oint_{\partial R} Pdx+Qdy=\int_{C_1}Pdx+Qdy+\int_{C_2}Pdx+Qdy\\ &= \int F\cdot d\gamma_1+\int F\cdot d\gamma_2,\end{aligned}$$

com $\gamma_1:[-2,2]\to\mathbb{R}^2$ e $\gamma_2:\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R}^2$ definidos por $\gamma_1(t)=(0,-t)$ e $\gamma_2(t)=(\cos t,2\sin t)$. Logo

$$\begin{aligned}\mathrm{vol}_2(R) &= \int_{-2}^{2}F(\gamma_1(t))\cdot\gamma_1'(t)\,dt+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}F(\gamma_2(t))\cdot\gamma_2'(t)\,dt\\ &= \int_{-2}^{2}F(0,-t)\cdot(0,-1)\,dt+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}F(\cos t,2\sin t)\cdot(-\sin t,2\cos t)\,dt\\ &= \int_{-2}^{2}(0,0)\cdot(0,-1)\,dt+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(0,\cos t)\cdot(-\sin t,2\cos t)\,dt\\ &= \int_{-2}^{2}0dt+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}2\cos^2 tdt=0+\pi=\pi.\end{aligned}$$

Teorema de Green (para uma região do plano limitada por n curvas de Jordan seccionalmente regulares): Seja U um aberto de $\mathbb{R}^2$, $F = (P, Q) : U \to \mathbb{R}^2$ um campo vectorial de classe C^1 e $C_1, ..., C_n \subset U$ n curvas de Jordan seccionalmente regulares nas seguintes condições:

a) Duas quaisquer curvas não se intersectam.

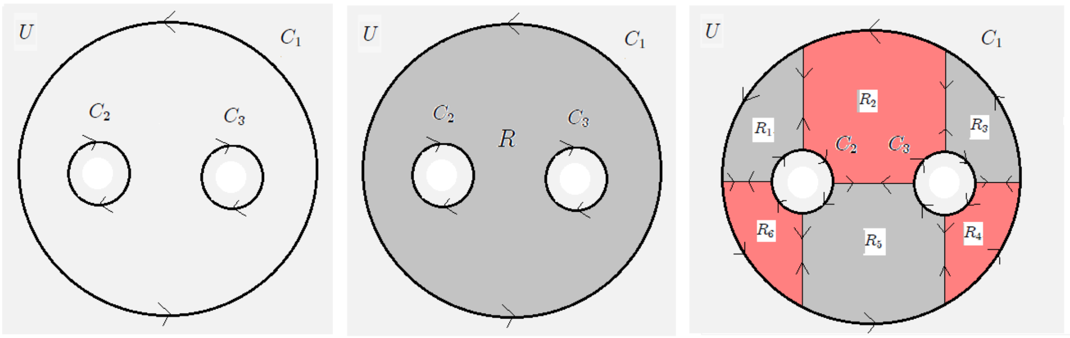
b) As curvas $C_2, ..., C_n$ situam-se na parte interna de C_1.

c) A curva C_i situa-se na parte externa de C_j para $i \neq j, i > 1, j > 1$.

Designe-se por R a região do plano formada pelos pontos que se encontram na parte interna de C_1 e na parte externa de cada $C_2, ..., C_n$, e admita-se que $R \subset U$. Nestas condições verifica-se a igualdade

$$\int\int_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \oint_{C_1} Pdx + Qdy + \sum_{i=2}^{n} \oint_{C_i} Pdx + Qdy,$$

quando C_1 é percorrida sentido anti-horário, e cada C_i, com $i > 1$, é percorrida no sentido horário.



Exercício: Considere o campo vectorial $F : \mathbb{R}^2 \backslash \{(-1, 0), (1, 0)\} \to \mathbb{R}^2$

$$F(x, y) = \left(\frac{-y}{(x-1)^2 + y^2} + \frac{y}{(x+1)^2 + y^2}, \frac{x-1}{(x-1)^2 + y^2} + \frac{-(x+1)}{(x+1)^2 + y^2}\right).$$

Calcule o trabalho realizado por F ao longo de cada uma das linhas seguintes percorridas no sentido horário:

a) Circunferência definida pela equação $(x+1)^2 + y^2 = 1$;

b) Circunferência definida pela equação $(x-1)^2 + y^2 = 2$

c) Elipse definida pela equação $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

Resolução: Consideremos os campos vectoriais $G : \mathbb{R}^2 \backslash \{(1, 0)\} \to \mathbb{R}^2$ e $H : \mathbb{R}^2 \backslash \{(-1, 0)\} \to \mathbb{R}^2$ definidos por

$$G(x, y) = \left(\frac{-y}{(x-1)^2 + y^2}, \frac{x-1}{(x-1)^2 + y^2}\right) \text{ e } H(x, y) = \left(\frac{y}{(x+1)^2 + y^2}, \frac{-(x+1)}{(x+1)^2 + y^2}\right)$$

Note-se que $F = G + H$, e que qualquer destes campos é fechado já que

$$\frac{\partial G_1}{\partial y}(x, y) = \frac{y^2 - (x-1)^2}{\left((x-1)^2 + y^2\right)^2} = \frac{\partial G_2}{\partial x}(x, y) \text{ e } \frac{\partial H_1}{\partial y}(x, y) = \frac{(x+1)^2 - y^2}{\left((x+1)^2 + y^2\right)^2} = \frac{\partial H_2}{\partial x}(x, y)$$

a) A circunferência definida pela equação $(x+1)^2 + y^2 = 1$ (percorrida no sentido anti-horário) é descrita pelo caminho $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (-1 + \cos t, \sin t)$. Como o campo G é fechado no seu domínio, o Teorema de Green garante que

$$\int G \cdot d\gamma = 0,$$

pelo que

$$\begin{aligned}
\int F \cdot d\gamma &= \int G \cdot d\gamma + \int H \cdot d\gamma = 0 + \int H \cdot d\gamma \\
&= \int_0^{2\pi} H(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt = \int_0^{2\pi} H(-1+\cos t, \sin t) \cdot (-\sin t, \cos t)\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\frac{\sin t}{\cos^2 t + \sin^2 t}, \frac{-\cos t}{\cos^2 t + \sin^2 t} \right) \cdot (-\sin t, \cos t)\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} (\sin t, -\cos t) \cdot (-\sin t, \cos t)\, dt = \int_0^{2\pi} \left(-\sin^2 t - \cos^2 t\right) dt \\
&= \int_0^{2\pi} -1 dt = -2\pi.
\end{aligned}$$

Logo o trabalho realizado por F ao longo desta circunferência quando é percorrida no sentido horário é $-\int F \cdot d\gamma = 2\pi$.

b) A circunferência definida pela equação $(x-1)^2 + y^2 = 2$ (percorrida no sentido anti-horário) é descrita pelo caminho $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = \left(1 + \sqrt{2}\cos t, \sqrt{2}\sin t\right)$. Como o campo H é fechado no seu domínio, o Teorema de Green garante que

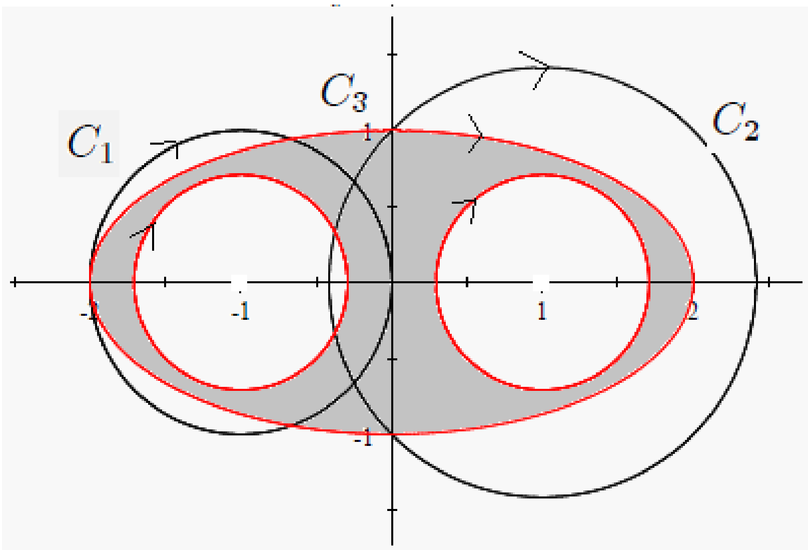
$$\int H \cdot d\gamma = 0,$$

pelo que

$$\begin{aligned}
\int F \cdot d\gamma &= \int G \cdot d\gamma + \int H \cdot d\gamma = \int G \cdot d\gamma + 0 \\
&= \int_0^{2\pi} G(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt = \int_0^{2\pi} G\left(1 + \sqrt{2}\cos t, \sqrt{2}\sin t\right) \cdot \left(-\sqrt{2}\sin t, \sqrt{2}\cos t\right) dt \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\frac{-\sqrt{2}\sin t}{2}, \frac{\sqrt{2}\cos t}{2} \right) \cdot \left(-\sqrt{2}\sin t, \sqrt{2}\cos t\right) dt \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\sin^2 t + \cos^2 t\right) dt \\
&= \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi.
\end{aligned}$$

Logo o trabalho realizado por F ao longo desta circunferência quando é percorrida no sentido horário é $-\int F \cdot d\gamma = -2\pi$.

c) Sejam C_1 e C_2 as circunferências das alíneas anteriores (percorridas no sentido horário) e C_3 a elipse definida pela equação $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ (percorrida no sentido horário).



Como o campo F é fechado, o Teorema de Green garante que

$$\int_{C_3} F = \int_{C_1} F + \int_{C_2} F = 2\pi - 2\pi = 0.$$

Homotopia

Definição: Seja U um aberto de $\mathbb{R}^n$. Dados dois caminhos fechados $\alpha, \beta : [0,1] \to U$, diz-se que α é homotópico a β em U, se existe uma aplicação contínua $H : [0,1] \times [0,1] \to U$ tal que:

1) $H(0,t) = \alpha(t)$, para $t \in [0,1]$

2) $H(1,t) = \beta(t)$, para $t \in [0,1]$

3) $H(s,0) = H(s,1)$, para $s \in [0,1]$

Observação: A relação de homotopia num aberto U de $\mathbb{R}^n$ é uma relação de equivalência. Isto significa que, para quaisquer caminhos fechados $\alpha : [0,1] \to U$, $\beta : [0,1] \to U$ e $\gamma : [0,1] \to U$, são válidas as seguintes afirmações :

1) α é homotópico a α em U;

2) Se α é homotópico a β em U, então β é homotópico a α em U;

3) Se α é homotópico a β em U, e β é homotópico a γ em U, então α é homotópico a γ em U.

Exemplo: No conjunto aberto $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, qualquer caminho fechado $\alpha : [0,1] \to U$ é homotópico em U ao caminho $\beta : [0,1] \to U$, definido por $\beta(t) = \frac{1}{\|\alpha(t)\|}\alpha(t)$. Com efeito, podemos considerar a aplicação contínua $H : [0,1] \times [0,1] \to U$, definida por

$$H(s,t) = \frac{s(\|\alpha(t)\| - 1) + 1}{\|\alpha(t)\|}\alpha(t),$$

para concluir que β é homotópico a α em U.

Exemplo: No conjunto aberto $U = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,z) : y \in \mathbb{R}\}$, qualquer caminho fechado $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) : [0,1] \to U$ é homotópico em U ao caminho $\beta : [0,1] \to U$, definido por $\beta(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), 0)$. Com efeito, podemos considerar a aplicação contínua $H : [0,1] \times [0,1] \to U$, definida por

$$H(s,t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), s\alpha_2(t)),$$

para concluir que β é homotópico a α em U.

Definição: Diz-se que um conjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ é simplesmente conexo se qualquer caminho fechado $\alpha : [0,1] \to U$ é homotópico em U a um caminho constante $\beta : [0,1] \to U$.

Exemplo: Um conjunto aberto convexo (ou estrelado) de $\mathbb{R}^n$ é simplesmente conexo. Com efeito, se $P \in U$ e $\gamma : [0,1] \to U$ é um caminho fechado, podemos considerar a aplicação contínua $H : [0,1] \times [0,1] \to U$, definida por

$$H(s,t) = P + s(\gamma(t) - P),$$

para concluir que o caminho constante $\alpha : [0,1] \to U$, com $\alpha(t) = P$, é homotópico a γ em U.

Teorema: Seja U um aberto de $\mathbb{R}^n$ e $F : U \to U$ um campo vectorial de classe C^1 fechado no seu domínio. Se dois caminhos fechados $\alpha, \beta : [0,1] \to U$ são homotópicos em U, então

$$\int F \cdot d\alpha = \int F \cdot d\beta.$$

Teorema: Um campo vectorial $F : U \to U$ de classe C^1, definido num aberto simplesmente conexo de $\mathbb{R}^n$, é um potencial no seu domínio se e só se é fechado.

Exercício: Considere o campo vectorial H definido por

$$H(x,y,z) = \left(\frac{z}{x^2+z^2} + x, y, \frac{-x}{x^2+z^2} + z\right).$$

a) Calcule o trabalho realizado por H ao longo da elipse definida por $2(x-1)^2 + \frac{y^2}{4} = 1, z = 0$ percorrida num sentido à sua escolha.

b) Calcule o trabalho realizado por H ao longo da linha definida por $x^2 + z^2 = 2, y + z = 1$, percorrida no sentido horário para um observador colocado no ponto $(0, 10, 0)$.

c) Será H um gradiente no seu domínio?

Resolução: Comecemos por notar que o campo H é fechado no seu domínio,

$$D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 \neq 0\right\} = \mathbb{R}^3 \backslash \{(0,y,0) : y \in \mathbb{R}\}.$$

a) A elipse definida pelas equações $2(x-1)^2 + \frac{y^2}{4} = 1, z = 0$ está contida no aberto simplesmente conexo $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0\}$. Como $S \subset D$, o trabalho realizado por H longo da elipse é nulo.

b) A linha definida pelas equações $x^2 + z^2 = 2, y + z = 1$, percorrida no sentido horário para um observador colocado no ponto $(0, 10, 0)$, é descrita pelo caminho $\alpha : [0, 2\pi] \to D$, definido por $\alpha(t) = \left(\sqrt{2}\cos t, 1 - \sqrt{2}\sin t, \sqrt{2}\sin t\right)$. Como α é homotópico em D a $\gamma : [0, 2\pi] \to D$, com $\gamma(t) = (\cos t, 0, \sin t)$, obtemos

$$\begin{aligned}
\int H \cdot d\alpha &= \int H \cdot d\gamma = \int_0^{2\pi} H(\cos t, 0, \sin t) \cdot (-\sin t, 0, \cos t)\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} (\sin t + \cos t, 0, \sin t - \cos t) \cdot (-\sin t, 0, \cos t)\, dt = \int_0^{2\pi} -1 dt = -2\pi.
\end{aligned}$$

c) Como o trabalho realizado por H ao longo de um caminho fechado pode ser não nulo, o campo não é um gradiente.

Exercício: Considere o campo vectorial F definido por

$$F(x,y,z) = \left(\frac{3y}{x^2+y^2} - 2y, \frac{-3x}{x^2+y^2} + 5x, z^2\right).$$

a) Calcule o trabalho de F ao longo do caminho $g(t) = (1, 1, t)$, $t \in [0, 5]$.

b) Calcule o trabalho de F ao longo da curva dada pelas equações $y = 1$, $x^2 + z^2 = 1$, orientada num sentido à sua escolha

c) Calcule o trabalho de F ao longo da curva dada pelas equações $9x^2 + 4y^2 = 1$, $x + y + z = 1$, orientada no sentido anti-horário quando observada do ponto $(0, 0, 10)$.

Resolução: O campo F não é fechado no seu domínio,

$$D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \neq 0\right\} = \mathbb{R}^3 \backslash \{(0,0,z) : z \in \mathbb{R}\},$$

mas pode ser escrito na forma $F = G + H$, onde $G : D \to \mathbb{R}^3$ é o campo fechado definido por

$$G(x,y,z) = \left(\frac{3y}{x^2+y^2} + 5y, \frac{-3x}{x^2+y^2} + 5x, z^2\right)$$

e $H : D \to \mathbb{R}^3$ é definido por $H(x,y,z) = (-7y, 0, 0)$.

a) Basta notar que

$$\begin{aligned}
\int F \cdot dg &= \int_0^5 F(g(t)) \cdot g'(t)\, dt = \int_0^5 F(1,1,t) \cdot (0,0,1)\, dt \\
&= \int_0^5 t^2 dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^5 = \frac{5^3}{3}.
\end{aligned}$$

b) A linha definida pelas equações $y = 1, x^2 + z^2 = 1$ é descrita pelo caminho $\alpha : [0, 2\pi] \to D$, definido por $\alpha(t) = (\cos t, 1, \sin t)$. Como a linha está contida no aberto simplesmente conexo $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y > 0\} \subset D$, e G é fechado em D, o trabalho realizado por G longo desta linha é nulo. Logo

$$\begin{aligned}
\int F \cdot d\alpha &= \int G \cdot d\alpha + \int H \cdot d\alpha = 0 + \int H \cdot d\alpha = \int_0^{2\pi} H(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t)\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} H(\cos t, 1, \sin t) \cdot (-\sin t, 0, \cos t)\, dt = \int_0^{2\pi} (-7,0,0) \cdot (-\sin t, 0, \cos t)\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} (-7,0,0) \cdot (-\sin t, 0, \cos t)\, dt = \int_0^{2\pi} 7 \sin t dt = 0.
\end{aligned}$$

c) A linha definida pelas equações $9x^2 + 4y^2 = 1$, $x + y + z = 1$, orientada no sentido anti-horário quando observada do ponto $(0,0,10)$, é descrita pelo caminho $\alpha : [0, 2\pi] \to D$, definido por $\alpha(t) = \left(\frac{1}{3}\cos t, \frac{1}{2}\sin t, 1 - \frac{1}{3}\cos t - \frac{1}{2}\sin t\right)$. Como α é homotópico em D a $\gamma : [0, 2\pi] \to D$, com $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 0)$, e G é fechado em D, obtemos

$$\begin{aligned}
\int G \cdot d\alpha &= \int G \cdot d\gamma = \int_0^{2\pi} G(\cos t, \sin t, 0) \cdot (-\sin t, \cos t, 0)\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} (8 \sin t, 2\cos t, 0) \cdot (-\sin t, \cos t, 0)\, dt = \int_0^{2\pi} \left(2\cos^2 t - 8 \sin^2 t\right) dt \\
&= \int_0^{2\pi} \left(10 \cos^2 t - 8\right) dt = -16\pi + \left[5x + \frac{5}{2}\sin 2x\right]_0^{2\pi} = -6\pi.
\end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned}
\int F \cdot d\alpha &= \int G \cdot d\alpha + \int H \cdot d\alpha = -6\pi + \int_0^{2\pi} H(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t)\, dt \\
&= -6\pi + \int_0^{2\pi} H(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t)\, dt = \\
&= -6\pi + \int_0^{2\pi} \left(-\frac{7}{2}\sin t, 0, 0\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}\sin t, \frac{1}{2}\cos t, \frac{1}{3}\sin t - \frac{1}{2}\cos t\right) dt \\
&= -6\pi + \frac{7}{6}\int_0^{2\pi} \sin^2 t dt = -\frac{29}{6}\pi.
\end{aligned}$$