Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

Cálculo Diferencial e Integral II

Ficha de trabalho 8

(Mudança de Variáveis de Integração. Regra de Leibniz)

1. Escreva o integral $\int\int_S f(x,y)dxdy$ em coordenadas polares considerando as seguintes regiões S.
   (a) $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2+y^2 \le 2, x > |y|\}$.
   (b) $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 1 \le x^2+y^2 \le 4, y > x\}$.
   (c) $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \le x \le 1, -\sqrt{1-x^2} \le y \le x\}$.

2. Utilizando coordenadas polares (possivelmente modificadas), calcule
   (a) $\int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} e^{-x^2-y^2} dy\right) dx$.
   (b) $\int_0^1 \left(\int_x^{\sqrt{2-x^2}} \frac{1}{1+x^2+y^2} dy\right) dx$.
   (c) $\int\int_U (x^2+y^2-1)dxdy$, sendo $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon (x+1)^2+y^2 \le 1 \ ; \ y > 0\}$.
   (d) $\int\int_S \operatorname{sen}((x-1)^2+y^2)dxdy$, sendo $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon (x-1)^2+y^2 \le \frac{\pi^2}{4}\}$.
   (e) A área da região $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{4}+y^2 < 1 \ ; \ x > |y|\}$.

3. Considere a transformação de coordenadas definida por
$$x = 2u+v, \qquad y = u^2 - v.$$
   (a) Sendo T o triângulo com vértices $(0,0),(1,0)$ e $(0,2)$ no plano uv, determine a imagem de T no plano xy pela transformação de coordenadas.
   (b) Sendo S o conjunto determinado na alínea anterior, calcule $\int\int_S \frac{1}{\sqrt{x+y+1}} dxdy$.

4. Considere o conjunto
$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x+y < 2 \ ; \ 0 < x < y\},$$
e seja $f : D \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = (y^2-x^2)\cos(x+y)^4$. Calcule $\int_D f$ utilizando uma transformação de coordenadas apropriada. Justifique cuidadosamente.

5. Considere a região
$$R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2 \le xy \le 4 \ ; \ 3x \le y \le 5x \ ; \ x \ge 0 \ ; \ y \ge 0\},$$
com densidade de massa igual a $\sigma(x,y) = \frac{2y}{x}$. Calcule a área e a massa de R utilizando uma transformação de coordenadas apropriada.

6. Use coordenadas cilíndricas ou coordenadas esféricas para exprimir o volume de cada uma das seguintes regiões em termos de um só integral iterado:
   (a) $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2+y^2 < z < \sqrt{2-x^2-y^2}\}$.
   (b) $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon y > 0\,,\, 1 \le x^2+y^2+z^2 \le 2\,,\, z > \sqrt{x^2+y^2}\}$.

7. Calcule o momento de inércia do sólido
$$U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y^2+z^2 \le 1 \ ; \ 0 \le x \le (y^2+z^2)^{\frac{1}{4}} \ ; \ y \ge 0 \ ; \ z \ge 0\},$$
relativamente ao eixo Ox, e cuja densidade de massa é dada por $\sigma(x,y,z) = x(y^2+z^2)$.

8. Calcule o volume de cada uma das regiões:

(a) $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1 - (\sqrt{y^2+z^2} - 1)^2 \ ; \ y \geq 0 \ ; \ z \geq 0\}$

(b) $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (\sqrt{x^2+y^2} - 4)^2 + z^2 < 1 \ ; \ y \geq 0 \ ; \ z > 0\}$.

9. Calcule o volume de intersecção de uma bola de raio $R > 0$ em $\mathbb{R}^3$ com um cilindro de raio $r < R$ cujo eixo passa pelo centro da bola.

10. Calcule $F'(0)$ onde $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é a função definida pela expressão

$$F(t) = \int_0^1 \operatorname{sen}(tx^2 + x^3)dx.$$

11. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1. Calcule $G'(x)$ onde $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é a função definida pela expressão

$$G(x) = \int_x^{x^3} f(tx, t^2 + x^3)\, dt.$$

12. Sendo $V_t = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon 1 \leq x^2 + y^2 \leq t \ ; \ 0 \leq z \leq 1 \ ; \ y > 0\}$ e $F \colon [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ a função definida por

$$F(t) = \int\int\int_{V_t} \frac{e^{t(x^2+y^2)}}{x^2+y^2} dxdydz,$$

calcule $F'(4)$.

13. Prove o *Teorema de Pappus*: Se D é uma região limitada no 1º quadrante do plano xy com área $A > 0$, então o volume do sólido que se obtém por rotação de D em torno do eixo $0y$ é dado por

$$V = 2\pi A\bar{x}$$

onde $\bar{x}$ é a coordenada x do centróide da região D.