Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

Cálculo Diferencial e Integral II

Ficha de trabalho 7

(Teorema de Fubini)

1. Calcule o integral da função indicada no rectângulo $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq 1\}$.

   a) $f(x, y) = xy^3$.

   b) $f(x, y) = x\cos(xy)$.

   c) $f(x, y) = \begin{cases} ye^{xy}, & x \in [0, 1] \\ \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$

2. Invertendo a ordem de integração, calcule:

   a) $\int_0^1 \left(\int_{2y}^2 \cos(x^2)\, dx\right) dy$.

   b) $\int_0^1 \left(\int_{\operatorname{arcsen} y}^{\pi/2} y \operatorname{sen} x\, dx\right) dy$.

3. Inverta a ordem de integração dos seguintes integrais duplos:

   a) $\int_0^1 \left(\int_{x^2-1}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy\right) dx$.

   b) $\int_0^1 \left(\int_{\sqrt{1-x^2}}^{2-x} f(x, y) dy\right) dx$.

   c) $\int_{-2}^{-1} \left(\int_0^{2+x} f(x, y) dy\right) dx + \int_{-1}^1 \left(\int_{\sqrt{1-x^2}}^{2-|x|} f(x, y) dy\right) dx$.

4. Calcule a área da região

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < 2x < y < 3 - x^2\},$$

   usando um integral iterado da forma $\int(\int dx)dy$. Calcule ainda (usando a ordem de integração que entender) a coordenada x do centróide.

5. Escreva expressões para o volume de V na ordem indicada.

   a) $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1, 0 \leq z \leq x + y\}$ nas ordens $\int \left(\int \left(\int dz\right) dx\right) dy$ e $\int \left(\int \left(\int dy\right) dx\right) dz$.

   b) $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1\ ;\ y^2 + z^2 \leq 1\}$ nas ordens $\int \left(\int \left(\int dz\right) dx\right) dy$ e $\int \left(\int \left(\int dz\right) dy\right) dx$.

   c) $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x}{2} \leq y \leq x\ ;\ 0 \leq z \leq x\ ;\ x \leq 1\}$ nas ordens $\int \left(\int \left(\int dx\right) dz\right) dy$ e $\int \left(\int \left(\int dx\right) dy\right) dz$.

6. Para cada um dos conjuntos seguintes escreva uma expressão para o respectivo volume, usando um único integral triplo:

   a) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x}{2} \leq y \leq x\ ;\ 0 \leq z \leq x\ ;\ x \leq 1\}$,

   b) $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1\ ;\ 0 \leq z \leq x^2 - y^2\ ;\ x > 0\}$.

7. Considere a região

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + 2z \leq 1\ ;\ x + y - 2z \leq 1\ ;\ x \geq 0\ ;\ y \geq 0\}.$$

   Calcule o volume de V na forma:

   a) $\int_{\cdots}^{\cdots} \left(\int_{\cdots}^{\cdots} \left(\int_{\cdots}^{\cdots} \cdots dy\right) dx\right) dz$.

   b) $\int_{\cdots}^{\cdots} \left(\int_{\cdots}^{\cdots} \left(\int_{\cdots}^{\cdots} \cdots dz\right) dx\right) dy$.

8. Calcule $\int_V f$ sendo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ a função definida por

   a) $f(x,y,z) = z$ e V o sólido limitado pelos planos $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$, $z = 0$ e $z = x + y$.

   b) $f(x,y,z) = \frac{1}{(1+x+y+z)^3}$ e V o sólido limitado pelos planos coordenados e o plano $x+y+z = 1$.

9. Calcule a primeira coordenada do centróide do sólido limitado pela superfície $z = x^2 - y^2$, o plano xy e os planos $x = 0$ e $x = 1$.

10. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Mostre que

$$2\int_a^b \int_x^b f(x)f(y)\,dydx = \left(\int_a^b f(x)\,dx\right)^2.$$

11. Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Trocando a ordem de integração, mostre que

$$\int_0^1 \int_0^{1-y} \int_{1-x-y}^1 g(z)\,dzdxdy = \frac{1}{2}\int_0^1 g(z)z(2-z)\,dz.$$