Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

Cálculo Diferencial e Integral II

Ficha de trabalho 3

(Derivada da Função Composta)

1. Calcule a derivada $D(f \circ g)(1,1)$ em que
$$g(x,y) = (e^{x-y}, x-y)\,; \quad f(u,v) = (u + \arctan v, 2e^v + u, \ln(u+2v)).$$

2. Considere as funções $\gamma(t) = (\operatorname{sen} t, t^2, \cos t)$, $F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + 1$ e $\sigma(t) = F(\gamma(t))$. Calcule a derivada $\sigma'(t)$.

3. Considere a função $f(x,y,z) = ye^x + xz^2$ e seja $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ uma função de classe C^1 tal que $g(0,0) = (0,1,2)$ e
$$Dg(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}.$$
Calcule a derivada $D_v(f \circ g)(0,0)$ em que $\vec{v} = (1,2)$.

4. Considere a função $\sigma(x) = f(\operatorname{sen} x, x + e^x)$ em que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ é de classe C^1 e tal que
$$Df(0,1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}.$$
Calcule a derivada $\sigma'(0)$.

5. Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por
$$f(x,y,z) = (x^2 + y^2 + z^2, x + y - z, xye^z)$$
e $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável.

   a) Calcule $\dfrac{\partial}{\partial y}(g \circ f)(1,1,0)$, sabendo que $\nabla g(2,2,1) = (-1,0,3)$.

   b) Para $g(u,v,w) = u^2 - v^2 + e^w$, calcule $\dfrac{\partial}{\partial z}(g \circ f)(0,1,0)$.

6. Determine a reta tangente e a reta normal à curva definida por
$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1\right\}$$
no ponto $(1, \frac{3\sqrt{3}}{2})$.

7. Determine a reta tangente e o plano normal à linha definida por
$$\{(e^t, \cos t, \operatorname{sen} t)\ ;\ -\pi < t < \pi\}$$
no ponto $(1,1,0)$.

8. Determine a reta normal e o plano tangente ao parabolóide
$$P = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ z = 1 - x^2 - y^2\ \}$$
no ponto $(0,1,0)$.

9. Seja $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Determine

$$\frac{\partial}{\partial x}(g(g(x^2, xy, x+y) + e^x, xy, g(x, x, x)))$$

em função das derivadas parciais de g.

10. Sejam $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funções de classe C^1 e tais que se verifica a equação $F(x, y, g(x, y)) = 0$. Supondo que $\dfrac{\partial F}{\partial z}(x, y, z) \neq 0$ calcule a derivada $Dg(x, y)$.

11. Determine os pontos da superfície $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 - z^2 + 1 = x\}$ tais que a recta normal à superfície em cada um desses pontos passa pela origem.

12. Considere a superfície

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{3} + \frac{(y-z)^2}{2} + (y+z)^2 = 12 \right\}.$$

Determine os pontos de S onde o plano tangente é horizontal.