

Controlo da Velocidade e Posição de um Motor DC

Francisco de Mendonça Rocha (93058)

francisco.rocha.727@tecnico.ulisboa.pt

Marta Rebelo Valente (103574)

marta.valente@tecnico.ulisboa.pt

Francisco Tavares (103402)

francisco.carreira.tavares@tecnico.ulisboa.pt

Grupo: 44

2. Identificação do Sistema

2.1.

Partindo das seguintes equações:

$$\text{Equação 3: } J\dot{\omega}(t) = -b\omega(t) + K_n i(t)$$

$$\text{Equação 4: } i(t) = \frac{1}{R} (v(t) - K_e K_g \omega(t))$$

$$J\dot{\omega}(t) = -b\omega(t) + K_n \left(\frac{1}{R} (v(t) - K_e K_g \omega(t)) \right) \Leftrightarrow J\dot{\omega}(t) = -b\omega(t) + K_n \frac{v(t) - K_e K_g \omega(t)}{R}$$

$$\Leftrightarrow J\dot{\omega}(t) = -b\omega(t) + K_n \frac{v(t) - K_e K_g \omega(t)}{R} \Leftrightarrow J\dot{\omega}(t) + b\omega(t) = \frac{K_n v(t)}{R} - \frac{K_n K_e K_g}{R} \omega(t)$$

A partir da Transformada de Laplace, obtemos:

$$(Js + b)\Omega(s) = \frac{K_n V(s)}{R} - \frac{K_n K_e K_g}{R} \Omega(s) \Leftrightarrow \Omega(s)(RJs + bR + K_n K_e K_g) = K_n V(s)$$

Como tal:

$$G(s) = \frac{\Omega(s)}{v(s)} = \frac{K_n}{RJs + bR + K_n K_e K_g} = \frac{\frac{K_n}{JR}}{s + \frac{bR + K_n K_e K_g}{JR}} = \frac{K_n}{bR + K_n K_e K_g} * \frac{\frac{bR + K_n K_e K_g}{JR}}{s + \frac{bR + K_n K_e K_g}{JR}}$$

Por fim, podemos então concluir que: $k_0 = \frac{K_n}{bR + K_n K_e K_g}$ $a = \frac{bR + K_n K_e K_g}{JR}$

2.2.

Sabemos que a resposta ao degrau unitário é dada por $\Omega(s) = G(s) * R(s)$, onde:

$$G(s) = k_0 \frac{a}{s + a} \quad e \quad R(s) = \frac{1}{s}$$

$$\text{Logo, } \Omega(s) = k_0 * \frac{a}{s(s+a)} = \frac{k_0}{s} - \frac{k_0}{s+a} = k_0 * \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+a} \right)$$

Fazendo o inverso da transformada de Laplace de $\Omega(s)$, e sabendo que: $u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$

Temos que,

$$\omega(t) = k_0 * (1 - e^{-at}), \quad \text{para } t \geq 0$$

A resposta para o tempo de estabelecimento ($t \rightarrow \infty$) é dada por:

$$k_0(1 - e^{-a \cdot \infty}) = k_0(1 - 0) = k_0$$

Já a resposta quando t tende para o inverso do polo a ($t = \frac{1}{a}$) da função de transferências é dada por:

$$\omega\left(t = \frac{1}{a}\right) = k_0(1 - e^{-1}) = k_0 \frac{e - 1}{e} \approx 0.6321 k_0$$

É possível descobrir os parâmetros do sistema apenas a partir da análise da sua resposta a um degrau. Para descobrir o valor de k_0 , podemos dividir o valor da resposta ao degrau quando chega ao seu valor estável pelo valor do degrau, obtendo assim o ganho do sistema. Por outro lado, para obter o valor de a sabemos que o tempo de estabelecimento a 63.21% é aproximadamente $\frac{1}{a}$. Com efeito, substituindo na expressão da resposta ao degrau em função do tempo $\omega\left(t = \frac{1}{a}\right) = 0.6321 k_0$ e substituindo o valor de k_0 , calculado anteriormente, podemos obter facilmente o seu valor ao resolvermos para a .

2.3.

Para determinar o diagrama de Bode assintótico da função $G(s)$, dividimo-la em componentes de magnitude e fase. Para determinar o gráfico da magnitude da função $G(s)$ podemos começar por determinar a assintota de baixas frequências e de seguida a de altas frequências. Substituindo $s = j\omega$ (onde ω é a frequência angular) temos $G(j\omega)$. Para a magnitude em dB, ficamos com:

$$|G(j\omega)|_{dB} = \frac{|k_0 a|}{\sqrt{\omega^2 + a^2}}$$

Para baixas frequência sabemos que $\omega \ll a$. Assim, substituindo na expressão, temos que:

$$|G(j\omega)|_{dB} = \frac{|k_0 a|}{\sqrt{a^2}} = k_0$$

Logo a assintota para baixas frequências é dada por k_0 . Para altas frequências assumimos que $\omega \gg a$, assim, a expressão de $|G(j\omega)|_{dB}$ é dada por:

$$|G(j\omega)|_{dB} = \frac{|k_0 a|}{\sqrt{\omega^2 + a^2}} = \frac{|k_0 a|}{\sqrt{\omega^2}} = \frac{|k_0 a|}{|\omega|} = 20 \log(k_0 a) - 20 \log(\omega)$$

Sendo essa também a expressão para a assintota para altas frequências.

Escrevendo agora a expressão do argumento da função de $G(j\omega)$:

$$\arg G(j\omega) = \arg(k_0 a) - \arg(j\omega + a) = -\arg(j\omega + a)$$

Novamente para baixas frequências temos que $\omega \ll a$, logo:

$$\arg G(j\omega) = -\arg(a) \approx 0$$

Quando $\omega = a$ ficamos com:

$$\arg G(j\omega) = -\arg(j\omega + \omega) = -\arg(\omega(j + 1)) \approx -45^\circ$$

Por fim, para altas frequências onde $\omega \gg a$, temos que: $\arg G(j\omega) = -\arg(j\omega) \approx -90^\circ$

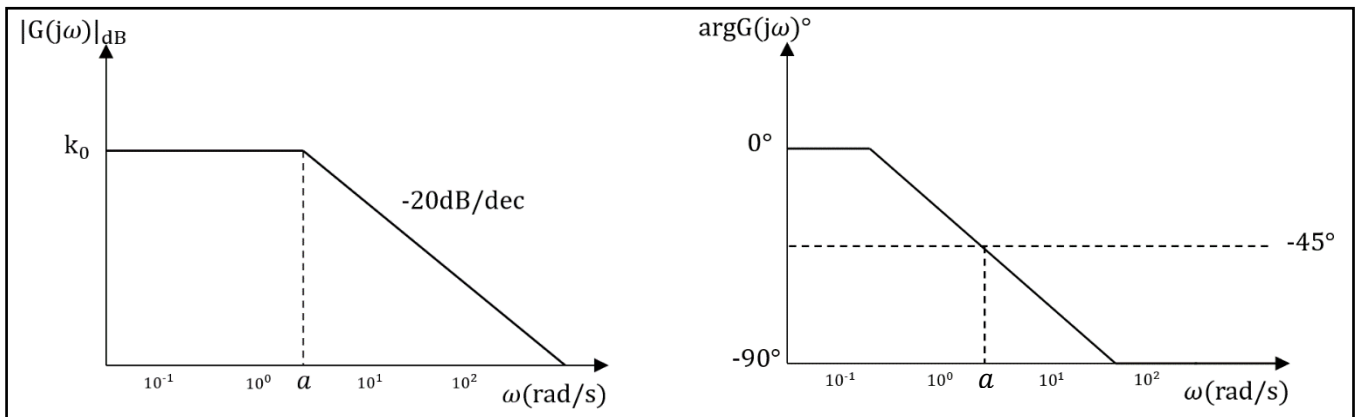


Figura 1: Diagrama de Bode Assintótico de $G(s)$.

Para identificar os parâmetros do sistema, k_0 e a , a partir da sua resposta em frequência podemos analisar o diagrama de bode para a magnitude. Ora, sabemos que o valor de k_0 equivale ao ganho estático, logo será igual ao valor máximo da magnitude quando a frequência é aproximadamente 0. O valor de a equivale à frequência angular onde a magnitude diminui 3 dB do valor de k_0 .

2.4.

Neste exercício para descobrirmos o valor de k_0 observámos o gráfico da resposta em tempo ao degrau sendo o degrau (desprezando para $t < 10$), dado por: $u(t) = 0$ se $t < 10$ e 70 se $t \geq 10$

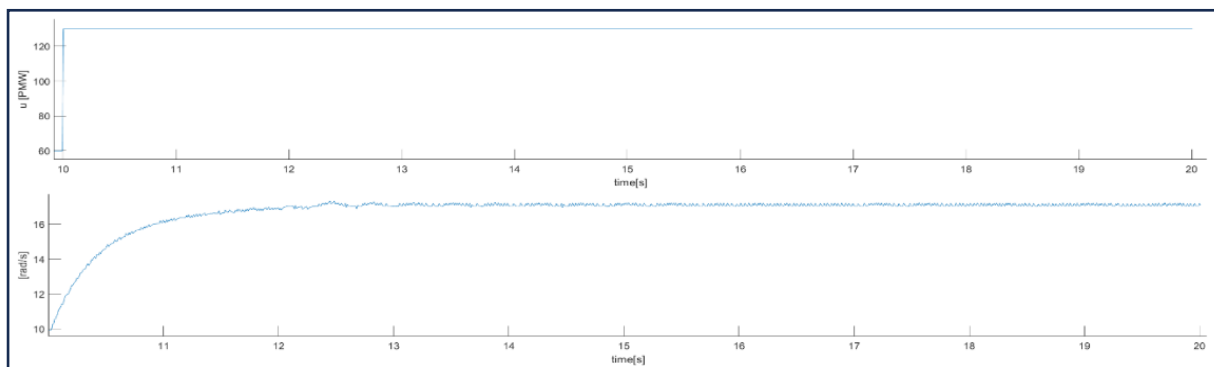


Figura 2: Degrau e Resposta ao Degrau em Função do Tempo de $G(s)$.

A partir dos gráficos anteriores observámos que quando a resposta ao degrau estabiliza temos uma velocidade média de aproximadamente 17.03 rad/s, enquanto para $t = 10$ s temos que a velocidade é de 9.78 rad/s. Assim, sendo k_0 a razão entre a velocidade da resposta ao degrau com o degrau concluímos que:

$$k_0 = \frac{v_f - v_i}{u_f - u_i} = \frac{17,03 - 9,78}{130 - 60} \approx 0.1036$$

Com base na expressão calculada no exercício 2.2 sabemos que a velocidade no tempo de estabelecimento a 63.2% ($t = \frac{1}{a}$) é dado por:

$$\omega\left(t = \frac{1}{a}\right) \approx 0.6321 k_0$$

Utilizando a expressão usada para calcular o k_0 e manipulando-a desta vez para descobrir qual a velocidade correspondente ao tempo de estabelecimento a 63.21% temos que:

$$v(t) = 0.6321 * k_0 * 70 + v_i = 4.58 + 9.78 = 14.36 \text{ rad/s}$$

A partir da observação do gráfico criado pelo MatLab concluímos que o instante de tempo em que a velocidade é 14.36 rad/s, ou seja, quando o ganho é 63.21% do valor final é de:

$$t(63.21\%) \approx 10.451s$$

E como desprezamos os primeiros 10 segundos da resposta ao degrau temos que o valor de tempo que nos interessa é dado por:

$$t_{inicial} = 10s \rightarrow \tau = 0.451s$$

Assim chegámos ao valor estimado do a :

$$\omega(t = \tau) = k_0(1 - e^{-a\tau}) \Leftrightarrow 0.6321k_0 = k_0(1 - e^{-a \cdot 0.451}) \Leftrightarrow a = \frac{\ln(0.3679)}{-0.451} \approx 2.22 \text{ rad/s}$$

2.5.

Tomando a como 2.22 rad/s o nosso intervalo de frequências é dado por: [0.222 , 11.1] rad/s.

	Frequência ω_f (rad/s)	Amplitude Entrada A_{in}	Amplitude Saída A_{out}	Ganho (dB)
1	0.222	15	1.2496	-21.5864
2	0.444	15	1.340717	-20.9751
3	0.666	15	1.256783	-21.5366
4	1.11	15	1.18585	-22.0412
5	2.22	15	0.943917	-24.0232
6	3.33	15	0.746733	-26.0585
7	4.44	15	0.623	-27.6321
8	5.55	15	0.5078	-29.408
9	6.66	15	0.441883	-30.6157
10	7.77	15	0.397533	-31.5344
11	8.88	15	0.319717	-33.4265
12	9.99	15	0.298033	-34.0365
13	11.1	15	0.263183	-35.1167

Tabela 1: Resultados da Resposta em Frequência.

Para descobrir os parâmetros da tabela observámos os diferentes gráficos obtidos a partir do MatLab. Para a amplitude de saída fizemos uma média de vários pontos depois da resposta já estar estabilizada. O ganho calculámos dividindo a amplitude de saída pela de entrada e depois transformamos em dB.

2.6.

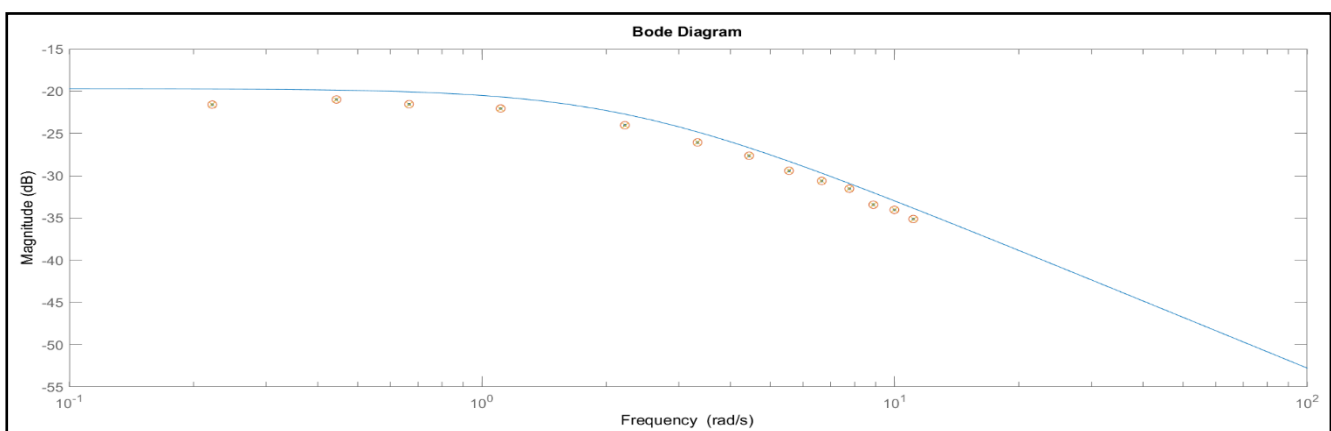


Figura 3: Diagrama de Bode (Magnitude).

Utilizando os dados obtidos na tabela anterior criámos um gráfico onde podemos observar o diagrama de bode da função de transferência $G(s)$ com os valores de k_0 e a calculados em 2.4 sobreposto com os pontos correspondentes aos ganhos em função da frequência angular:

Fazendo uma média dos primeiros 4 pontos observamos que a assintota de baixas frequências é aproximadamente $y = -21.535 \text{ dB}$. Comparando-a com a equação esperada ($y = k_0 = 20 * \log_{10}(k_0) = -19.69 \text{ dB}$), podemos observar que não há uma grande discrepância entre as duas assintotas.

Para a assintota de altas frequências, analisamos agora os restantes pontos. Começando por reparar que para $\omega = 2.22 \text{ rad/s}$ temos que $|G(j\omega)| \text{ dB} \approx -24.0232 \text{ dB}$ e passado aproximadamente uma 0.88 de uma década para $\omega = 11.1 \text{ rad/s}$ temos que $|G(j\omega)| \text{ dB} \approx -35.1167 \text{ dB}$, logo concluímos que a magnitude decresce aproximadamente 13.869 dB por década. Recordando que se trata de um sistema de primeira ordem, devíamos obter um decréscimo de 20 dB por década. Como tal, concluímos que o sistema real, como era de esperar, não é ideal. Para a componente na ordenada na origem da equação da assintota chegámos ao valor de -22.003 dB , a partir do excel. Recordando que o valor esperado era de $20 * \log_{10}(k_0 * a) = -12.077 \text{ dB}$ também obtivemos alguma discrepância. Por fim, as assintotas experimentais são as seguintes:

$$\text{Assintota Baixas Frequência: } r(\omega) = -21.535 \text{ (dB)}$$

$$\text{Assintota Altas Frequência: } t(\omega) = -13.869 * \log(\omega) - 22.003 \text{ (dB)}$$

$$\text{Frequência de Corte: } -21.535 = -13.869 * \log(\omega) - 22.003 \Rightarrow \omega_c = 1.081 \text{ rad/s}$$

$$\text{Ganho de baixas frequências} = r(0) = -21.535 \text{ (dB)} = 0.0838$$

Estes valores representam, respetivamente, os valor de a e k_0 do nosso sistema real.

3. Controlo de velocidade

3.1.

Para tentar controlar inicialmente a velocidade do motor, o controlador $K(s)$ toma a seguinte forma proporcional ($k_i = 0$): $K(s) = k_\omega$

Considerando o modelo, $G(s) = k_0 * \frac{a}{s+a}$, $a = 2.22$ e $k_0 = 0.1036$

Com ajuda do MatLab e da aplicação *Control System Designer*, ao definirmos inicialmente um valor arbitrário de k_ω encontrámos o valor mínimo de k_ω em que o tempo de estabelecimento em 30% da resposta ao degrau do ciclo fechado é menor do que 0.2 segundos, a partir do deslocamento da localização dos polos na aplicação concluímos que $k_\omega = 16.69$.

Pela imagem podemos ver que a função de transferência terá um zero e um polo. Enquanto $k_\omega > 0$ o sistema será estável, já que o polo localizar-se-á sempre na parte real negativa do plano.

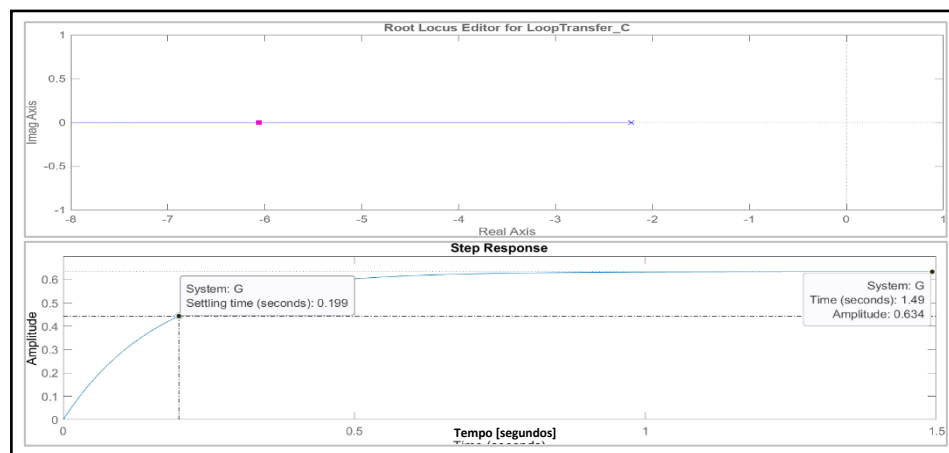
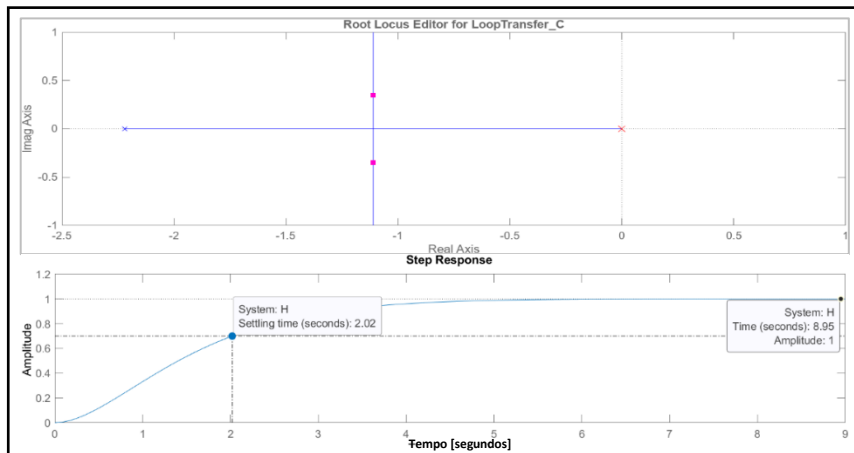


Figura 4: Root Locus e Resposta ao Degrau Unitário do Sistema em Ciclo Fechado com o Controlador Proporcional.

Reparámos também que à medida que se aumenta o valor de k_ω , a resposta ao degrau é cada vez mais rápida e por sua vez também o tempo de estabelecimento diminui. Desta forma, o intervalo de valores que k_ω pode tomar, para que o requisito seja cumprido, é de $k_\omega \in [16.69, +\infty[$.

3.2.

Neste exercício o controlador passa a ser integral tendo a seguinte expressão onde $k_i > 0$: $K(s) = \frac{k_i}{s}$



De modo semelhante ao exercício anterior, achámos o valor máximo para k_i , desta vez, de modo que não exista sobrelevação do sistema em ciclo fechado (do qual obtivemos $k_i = 5.888$).

Para além disso, concluímos que é impossível escolher um valor de k_i que não tenha sobrelevação e que cumpra os requisitos postos ao controlador proporcional.

Figura 5: Root Locus e Resposta ao Degrau Unitário do Sistema em Ciclo Fechado com o Controlador Integral.

Chegámos também à conclusão de que a vantagem principal do controlador integral é anular o erro estacionário, já que introduz um polo ao sistema na origem.

3.3.

Combinando os dois controladores obtemos o controlador proporcional integral com a seguinte expressão onde $k_\omega, k_i > 0$:

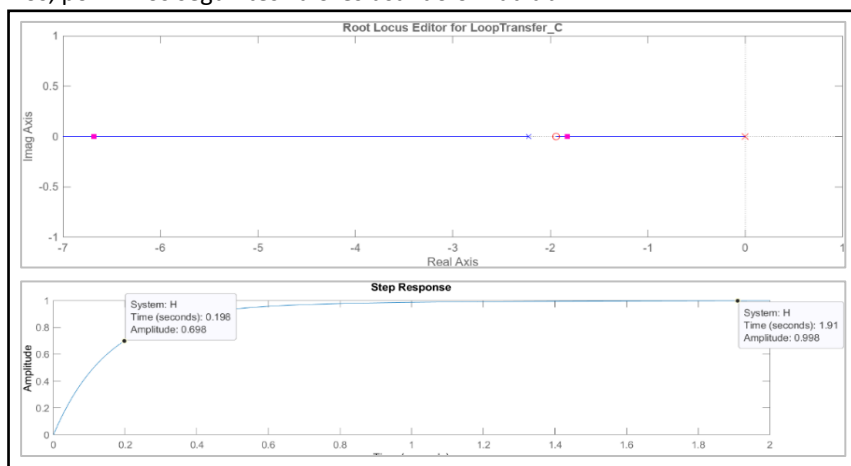
$$K(s) = \frac{k_\omega s + k_i}{s}$$

Manipulando a expressão de modo a ter uma relação entre o valor de k_ω e k_i :

$$K(s) = k_\omega * \frac{s + z}{s}, \quad z = \frac{k_i}{k_\omega}$$

Deste modo, alterando apenas o valor de k_ω conseguimos desenhar um controlador que cumpre os requisitos apresentados no exercício 3.1, apresentando a vantagem crucial do controlador integral. Assim, tendo os valores de k_ω e de z , podemos calcular: $k_i = z * k_\omega$

Obtivemos, por fim os seguintes valores usando o MatLab:



$$k_\omega = 27,328$$

$$z = 1,941$$

$$k_i = 53,044$$

Figura 6: Root Locus e Resposta ao Degrau Unitário do Sistema em Ciclo Fechado com o Controlador Integral Proporcional.

3.4.

Estes são os gráficos obtidos da resposta ao degrau do sistema em ciclo fechado para os três controladores desenhados nos exercícios anteriores. Para a análise, apenas nos interessam os valores após aproximadamente 10 segundos. Para os três casos, calculámos os valores aproximados do tempo de estabelecimento a 30%. Para isso, começámos por calcular o valor da velocidade a 30% da velocidade estabelecida e depois pela observação do gráfico achámos o tempo correspondente, tomando os 10 segundos como a origem:

$$vel_{30\% \text{ do } Fim} = (vel_{Final} - vel_{10 \text{ segundos}}) * 0.7 + vel_{10 \text{ segundos}}$$

$$t_{est.30\%} = (\text{tempo em que a velocidade atinge o valor calculado anteriormente}) - 10$$

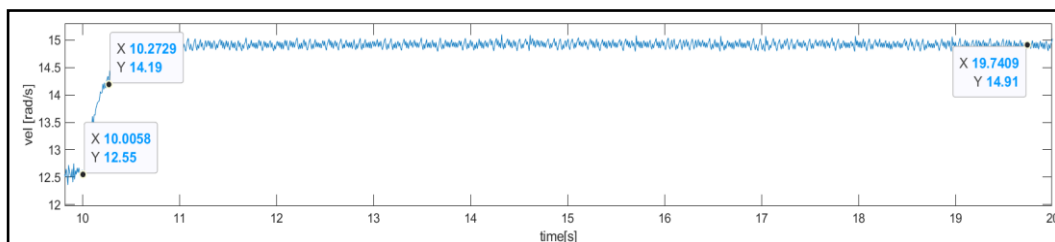


Figura 7: Resposta ao Degrau do Sistema em Ciclo Fechado Controlado com um Controlador Proporcional.

$$t_{est.30\%} = 10.2729 - 10 = 0.2729 \text{ segundos}$$

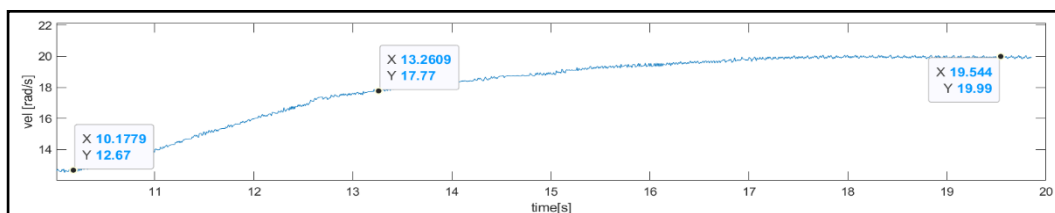


Figura 8: Resposta ao Degrau do Sistema em Ciclo Fechado Controlado com um Controlador Integral.

$$t_{est.30\%} = 13.2609 - 10 = 3.2609 \text{ segundos}$$

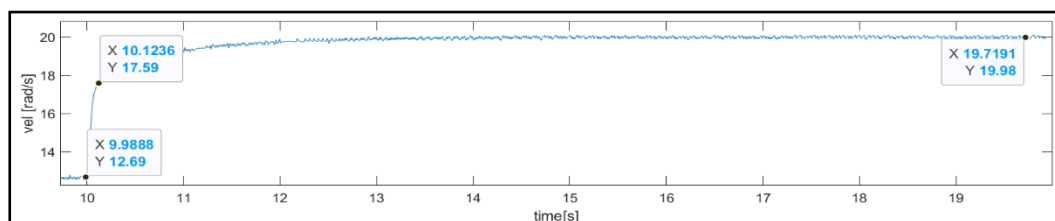


Figura 7: Resposta ao Degrau do Sistema em Ciclo Fechado Controlador com um Controlador Prporcional

$$t_{est.30\%} = 10.1236 - 10 = 0.1236 \text{ segundos}$$

3.5.

Ao analisarmos e compararmos a resposta do sistema real e do sistema simulado ao degrau (controlados por um controlador proporcional), constatamos que, embora semelhantes, como seria de esperar, o sistema real não cumpriu os requisitos projetados. Enquanto no sistema simulado um valor de k_w igual a 16.69 era suficiente para que o tempo de estabelecimento a 30% fosse inferior a 0.2 segundos (tal como observado no exercício 3.1), tal não aconteceu no sistema real (como calculado no exercício 3.4) uma vez que quando a velocidade atingiu 70% do seu valor final, já tinham passado aproximadamente 0.2729 segundos. Concluimos rapidamente que tal se deveu a um claro atraso no sistema real, em comparação com o projetado, logo o sistema não cumpriu os requisitos projetados.

Quando realizámos a experiência com o controlador integral, confirmámos, tal como na simulação, que o tempo de resposta é consideravelmente mais lento em comparação com o controlador proporcional. Isso ocorre porque leva mais tempo para corrigir o erro acumulado, tornando impossível cumprir o requisito de um tempo de estabelecimento a 30% inferior a 0.2 segundos. Na realidade, só alcançamos esse tempo de estabelecimento após 3.2609 segundos (como calculado no exercício 3.4), confirmando novamente que o sistema real é consideravelmente mais lento do que o simulado, pois (como observado no exercício 3.2) o simulado alcança esse tempo de estabelecimento em 2.02 segundos. Mesmo assim, não observámos qualquer sobrelevação, sendo que acreditamos que k_i ainda pode ser superior a 5.888 antes de se começar a observar.

Por fim, ao analisarmos o comportamento do controlador proporcional integral neste sistema, observámos que tanto o requisito de tempo de estabelecimento a 30% como a ausência de qualquer sobrelevação foram cumpridos. Conforme calculado no exercício 3.4, obtivemos um tempo de estabelecimento a 30% de 0.1236 segundos, apesar de um pouco superior ao simulado no exercício 3.3. Concluimos que, com este controlador, conseguimos obter um sistema rápido e sem qualquer erro estacionário.

3.6.

Começando novamente com o controlador proporcional, ao aumentarmos o valor de k_ω , é possível verificar que a resposta ao degrau se torna mais rápida, diminuindo assim o tempo necessário para estabelecer o valor final e o tempo de pico, uma vez que é um sistema de primeira ordem. Por outro lado, o valor em regime permanente aumenta com o aumento de k_ω . Embora não tenhamos realizado testes adicionais, sabemos que um aumento ainda maior de k_ω pode resultar em sobrelevação. O valor máximo do sinal de atuação, conforme observado, aumenta com o aumento de k_ω e acaba por estabilizar em valores superiores quando k_ω é maior.

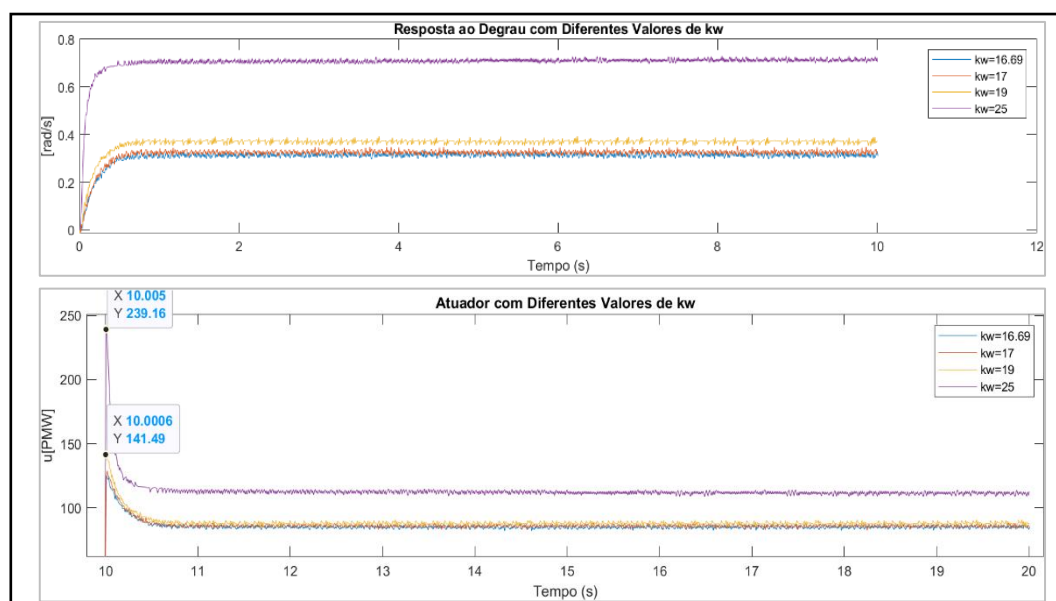


Figura 8: Resposta ao Degrau e Atuador para Diferentes Valores de k_w .

Quanto ao controlador integral, aumentámos o valor de k_i até que a sobrelevação se tornasse notável (que foi a partir de $k_i=15$). O tempo de pico também aumentou com o aumento de k_i . No entanto, o valor em regime permanente permaneceu aproximadamente constante devido à ação integral do controlador. Os limites do sinal de atuação tendem a aumentar à medida que k_i aumenta, mas não tão consideravelmente como com o controlador proporcional.

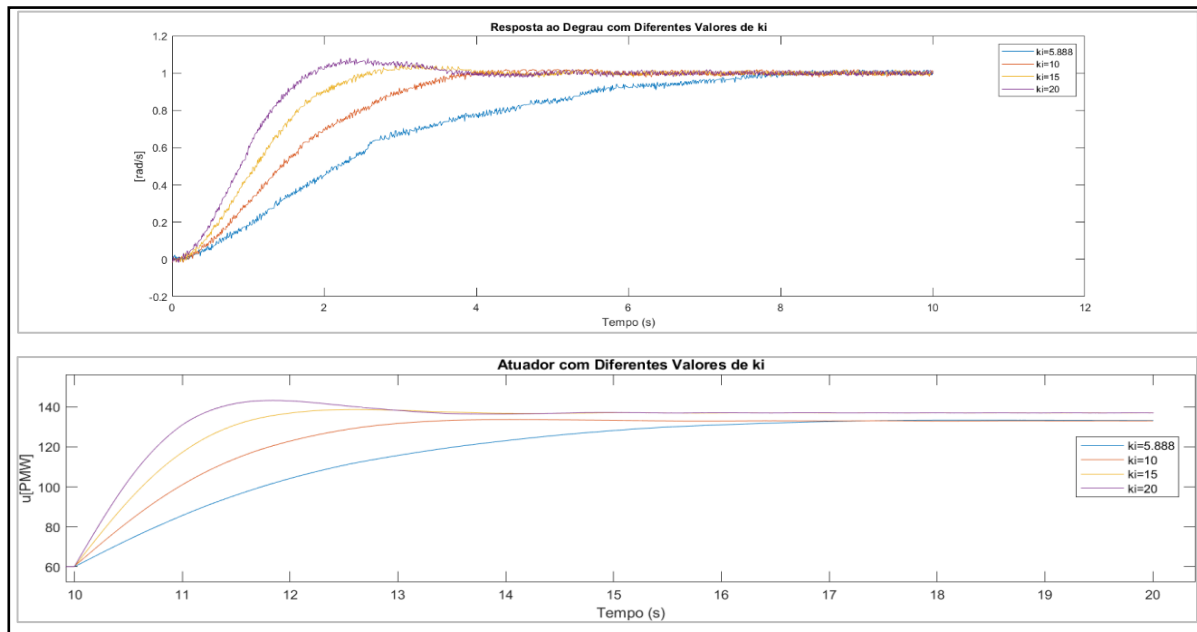


Figura 9: Resposta ao Degrau e Atuador para Diferentes Valores de K_i .

Por fim, para o controlador proporcional-integral, um aumento do k_i ou do k_ω resulta num aumento da sobrelevação (como podemos observar no gráfico) enquanto que o tempo de pico diminui muito mais com o aumento de k_ω do que com o aumento de k_i . O valor em regime permanente permanece constante para todos os valores, devido à ação integral do controlador. Assim como no controlador proporcional, o valor máximo do atuador também aumenta consideravelmente com o aumento de k_ω , mas mais uma vez estabiliza perto do mesmo valor devido à ação integral.

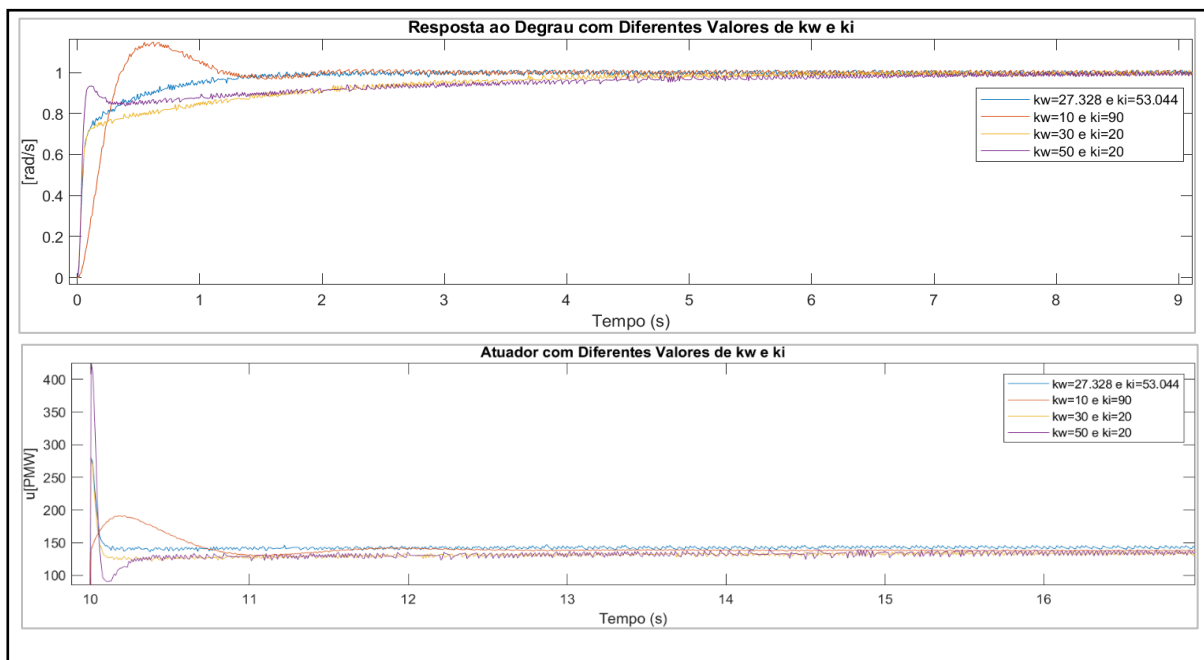


Figura 10: Resposta ao Degrau e Atuador para Diferentes Valores de K_w e K_i .

4. Controlo de Posição

4.1.

Considerando que a função de transferência em cadeia fechada do exercício 3.3 é equivalente a:

$$C(s)_{3.3} = \frac{K(s)G(s)}{1 + K(s)G(s)} = \frac{(k_\omega + \frac{k_i}{s}) * G(s)}{1 + (k_\omega + \frac{k_i}{s}) * G(s)}, \text{ onde } K(s) = k_\omega + \frac{k_i}{s}$$

E que, a função de transferência em cadeia fechada deste exercício é dada por:

$$G(s)_{4.1} = \frac{K(s)G(s) * \frac{1}{s}}{1 + K(s)G(s) * \frac{1}{s}} = \frac{(k_2 + \frac{k_1}{s}) * G(s)}{1 + (k_2 + \frac{k_1}{s}) * G(s)}, \text{ onde } K(s) = k_1 + k_2 s$$

Podemos concluir que as funções são de facto equivalentes considerando que $k_1 = k_i$ e $k_2 = k_\omega$.

Deste modo, podemos admitir que:

$$k_1 = 53,044 \quad e \quad k_2 = 27,328$$

Garantindo, assim, que o valor o tempo de estabelecimento a 30% se mantém abaixo dos 0.2 segundos.

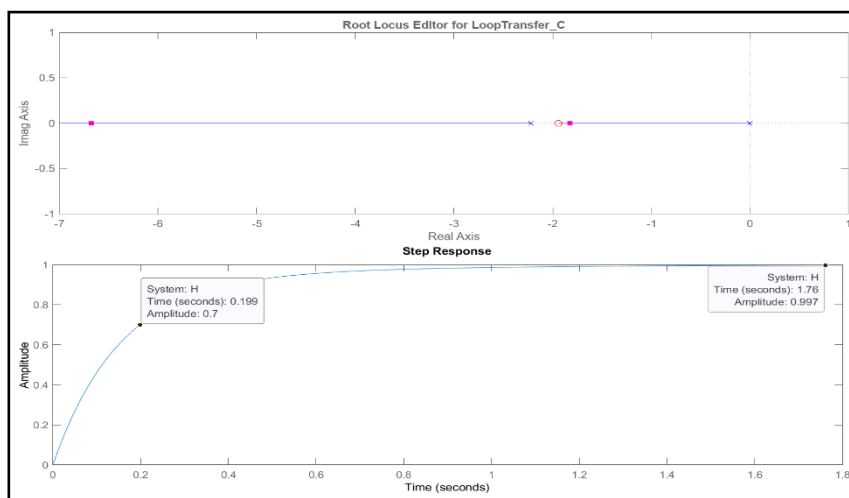


Figura 11: Root Locus e Resposta ao Degrau com o Controlador Proporcional Derivativo.

4.2.

Para garantir que os valores dos ganhos permitam que a reposta a uma referência de rampa tenha um erro estacionário de 0, começámos por descobrir uma equação que relacionasse o erro estacionário com os ganhos.

Sabemos que a função de transferência em cadeia aberta é:

$$H(s) = K(s)G(s) \frac{1}{s} = \frac{k_1 k_0 a + k_2 k_0 s + \frac{k_3 k_0 a}{s}}{s(s + a)}$$

Para calcularmos o coeficiente de erro estático de velocidade, temos de calcular o seguinte limite:

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s * H(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{k_1 k_0 a s + k_2 k_0 s^2 + k_3 k_0 a}{s(s + a)} = \infty$$

Assim, o erro estacionário com uma entrada de rampa é dado por:

$$e_v = \frac{1}{K_v} = \frac{1}{\infty} = 0$$

Com efeito, para garantir que o erro estacionário, com a entrada de uma rampa, seja 0, podemos escolher qualquer valor de k_1 , k_2 e k_3 que fazem com que os ramos do respetivo Root Locus não sejam muito diferentes dos ramos do controlador projetado no exercício 4.1. e também que cumpram os requisitos definidos, ou seja, que o tempo de estabelecimento a 30% seja menor do que 0.2 segundos e que não haja sobrelevação.

Para isso, tivemos de manipular a expressão do ganho de modo a depender apenas do k_2 e dos zeros:

$$K(s) = k_1 + k_2 s + \frac{k_3}{s} = \frac{k_2(s^2 + \frac{k_1}{k_2}s + \frac{k_3}{k_2})}{s}$$

Simplificando a expressão,

$$K(s) = k_2 \frac{(s + z_1)(s + z_2)}{s} = k_2 \frac{(s^2 + s(z_2 + z_1) + z_1 z_2)}{s}$$

Escolhemos então valores arbitrários para os zeros inicialmente e depois concluímos que para cumprir os requisitos e para que os ramos do Root Locus fossem semelhantes aos do controlador PD os valores seriam os seguintes:

$$k_2 = 23,922 \quad z_1 = 0,5 \quad z_2 = 2,341$$

Por fim substituindo os valores na equação: $\frac{k_1}{k_2} = 2,841 \quad \frac{k_3}{k_2} = 1,1705$

Assim: $k_1 = 68.161$, $k_2 = 23.922$ e $k_3 = 28.0$

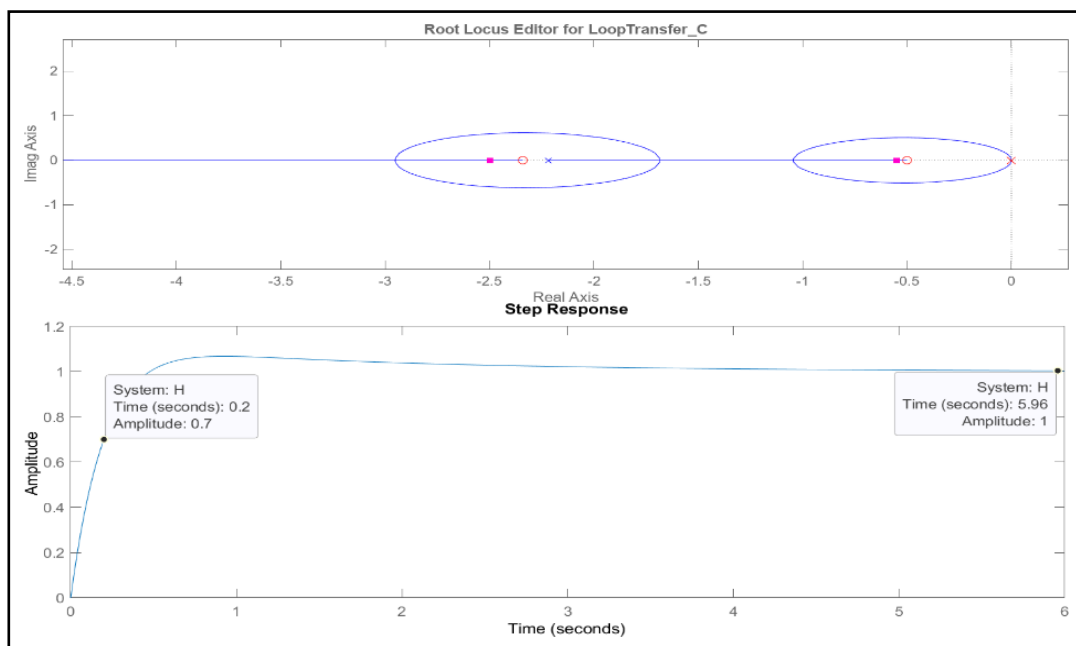


Figura 12: Root Locus e Resposta ao Degrau com o Controlador Proporcional Integral Derivativo.

4.3.

Tal como esperávamos, com o controlador proporcional integral derivativo é possível observar que o erro em regime estacionário tende para 0, enquanto com o controlador proporcional derivativo este erro é notável e mantém-se constante com o passar do tempo. Com a ação derivativa introduzimos antecipação do erro, pois passamos a ter em conta a rapidez da variação do erro. Substituindo o controlador PD por um PID melhoramos o seguimento em regime permanente, sem alterar significativamente os ramos principais do root locus, tal como demonstrámos no exercício 4.2. Como era de esperar com este controlador também temos um tempo de estabelecimento a 30 % menor do que 0.2 segundos.

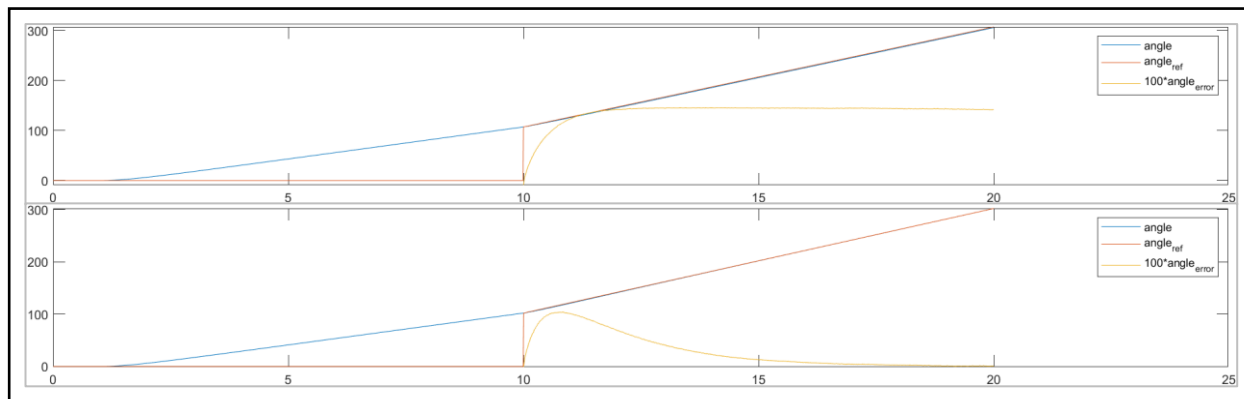


Figura 13: Ângulo e Respetivo Erro para o Controlador PD e PID respetivamente com a entrada de uma rampa.

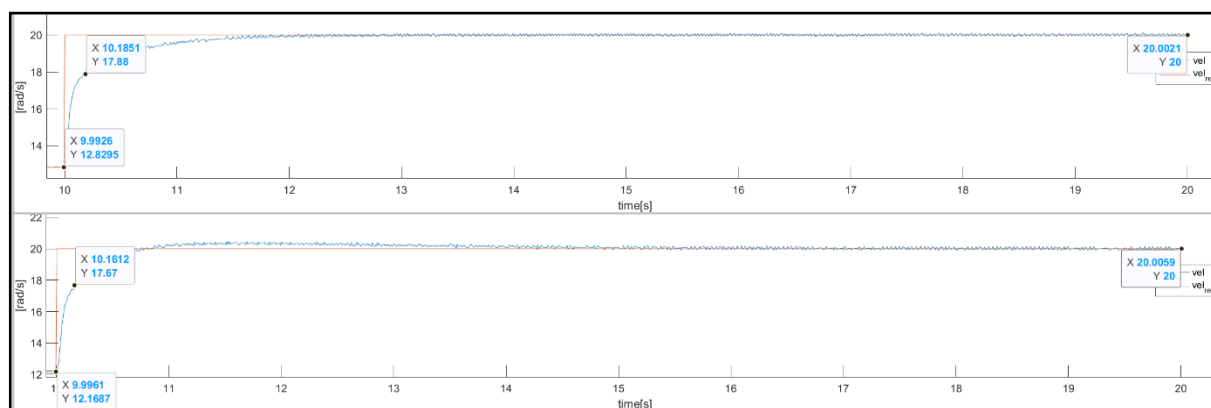


Figura 14: Resposta a uma entrada de Rampa para o Controlador PD e PID respetivamente.