Mikro B: Assigment 1

Mikkel Janus Dahl (xdg178), Marius Clausen Hansen De Cordier (wck138), Frederik Højer N

May 2024

1 Straffespark

1.1

Straffespark kan analyseres som et nulsumsspil, fordi spillet er et strengt kompetitivt spil. Dette er tilfældet da spillerne fortrækker omvendte strategiprofiler, for eksempel fortrækker en sparker et mål (L,b) fremfor en redning (L,L), mens målmanden fortrækker en redning (L,L) fremfor et mål (L,B). Da et hvert strengt kompetivt spil også er et nulsumsspil, er straffespark spillet også et nulsumsspil. Spillet er statisk af den årsag at spillerne træffer "alle" deres valg simultant.

1.2

Spillet består af to spillere $N = \{1, 2\}$ og begge spillere har strategimængden $S_i = \{L, R\}$. Vi kan opstille payoff matricen for sparker ud fra andel mål, og payoff matricen for målmanden som den negative af sparkeres payoff matrice. Dette er nemlig muligt, da spillet er et nulsumspil.

$$U_1 = \begin{pmatrix} 0.65 & 0.88 \\ 0.83 & 0.56 \end{pmatrix}, \quad U_2 = -U_1$$

I spillet findes der ingen Nash-ligevægte i rene strategier, men der eksisterer en Nash-ligevægt i blandede strategier. Her vælger både spiller 1 og spiller 2 med en vægtet sandsynlighed mellem L og R.

$$\text{MSNE} = ((0.54, 0.46), (0.64, 0.36))$$

Ved dette punkt er der ingen mulige forberedringer af nytten, da det vil blive udnyttet af modspilleren. Hvis målmanden for eksempel ikke spiller nash ligevægten, vil sparker udnytte dette, ved at sparke til den side, som målmanden vælger med lavest sandsynlighed, hvilket vil fører til en lavere nytte for målmanden.

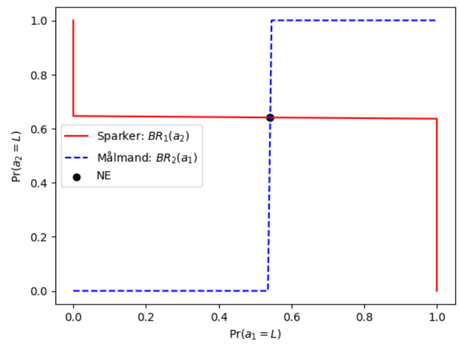

Figure 1: Plot af best response funktionerne for straffesparkspillet

1.3

Ved at anvende tabel 1.a kan vi udregne den empiriske sandsynlighedsfordeling for de to strategier (bemærk vi for nu udlader alle observatiner med handlingen centrum). Fra tabellen kan vi ud regne at $P(a_1 = L) = 0.543$, mens $P(a_2 = L) = 0.570$. Dette tyder altså på, at sparkeren spiller nashligevægten, men målmanden gør ikke. Vores råd til sparkeren vil derfor være at udnytte, at målmanden ikke spiller nashligevægten ved at skyde til venstre hvergang. Vores råd til målmanden vil være at spille nashligevægten, og dermed hoppe mere til venstre og mindre til højre.

1.4

Spillerne består stadig af en målmand og en sparker, mens strategierne nu er blevet udvidet til også at indeholde centrum. Strategimængden er dermed givet ved $S_i = \{L, C, R\}$. Under dette spil vælger vi at udvide vores payoff matrix således at vi tager højde heterogeniteten i andel mål for de forskellige outcomes. Dette gøres ved at definer payouten for sparker for alle udfald, som andelen af mål og for målmanden definer vi payouten som $-U_1(a)$. Payout matrixerne er dermed givet ved:

$$U_1 = \begin{bmatrix} 0.65 & 1.00 & 0.88 \\ 1.00 & 0.00 & 0.889 \\ 0.833 & 1.00 & 0.556 \end{bmatrix} \quad U_2 = \begin{bmatrix} -0.65 & -1.00 & -0.88 \\ -1.00 & 0.00 & -0.889 \\ -0.833 & -1.00 & -0.556 \end{bmatrix}$$

Fra denne payout matrix kan man vha. `support_enumeration()` udregne følgende MSNE:

$$MSNE = \{(0.475, 0.219, 0.307), (0.521, 0.185, 0.294)\}$$

Sammenligner man med MSNE ligevægten kan bemærke følgende ting. Sparker afviger mest fra ligevægten fra centrum. Både sparker og målmand spiller L mindre end ligevægten anskriver og spiller R mere.

Direction	Kicker (%)	Goalkeeper (%)
Left	43.69	45.63
Center	5.83	16.50
Right	50.49	37.86

Table 1: Procentdel af valgte retninger af sparkeren og målmanden.

1.5

Givet den empiriske fordeling af målmandens handlinger, kan vi udregne den forventet nytte af sparker.

$$V_1 = U_1 A_2.T = [0.7948, 0.7929, 0.7556]$$

Hvor V_1 er den forventede nytte og A_2 er den empriske fordeling af målmandens valg. Ud fra den forventede nytte ser vi, at det er marginalt bedre at skyde til venstre end at skyde midt på og begge dele er at foretrække frem for at skyde til venstre. Da målmanden ikke spiller sin ligevægt er vores anbefaling til sparkeren derfor at sparke til venstre hver gang. Samme beregning kan anvendes til at udregne den forventet nytte af målmandens handligner givet den empiriske fordeling.

$$V_2 = A_1 U_2 = [-0.7629, -0.9418, -0.7170]$$

Den højeste nytte for målmanden er givet at hoppe til højre, og vores anbefaling til målmanden er derfor at hoppe til højresiden hver gang. Disse anbefalinger afhænger af, at payoff martixen U_i repræsentere modstanderens payoff matrix ved et givent spil.

1.6

De to mest væsentlige årsager til at spillere ikke spiller nash ligevægten kunne være:

- Personlige præferencer eller evner, der medfører en afvigelse fra de empiriske payoff-matricer. Hvis en sparker for eksempel har en foretrukken fod, vil det (formentlig) have påvirkning på payoff-matricerne, givet at ens foretrukne fod ændrer sandsynligheden for mål for de tre forskellige handlinger. Dermed vil payoff-matricerne eksempelvis være forskellige for højre- og venstrefodede spillere, og dermed også Nash-ligevægten.

- Hvis spillerne kan uddrage information fra modspilleren i løbet af spillet. Dette vil føre til brud på vores antagelse om et statisk spil, og dermed vil vores Nash-ligevægt ikke nødvendigvis være en optimal strategi i virkeligheden.

Dir	Left	Center	Right
Kicker (%)	44.88	17.21	37.91
Goalkeeper (%)	56.64	2.40	40.96

Table 2: Procentdel af valgte retninger af sparkeren og målmanden

1.7

(([0.43071471, 0.23768458, 0.33160071]),([0.59066745, 0.09037212, 0.31896043]))

$$V_1 = U_1 A_2.T = [0.7658, 0.8234, 0.7140]$$

$$V_2 = A_1 U_2 = [-0.7633, -0.8279, -0.7419]$$

Vi ser igen hvordan hverken målmand eller sparker spiller nashligevægten. Kigger vi på nytten for sparkeren ser vi, at han nu anbefales at sparke midt på hver gang og målmanden anbefales stadig at hoppe til højre hver gang.

2 Heartstone

2.1

Spillet består af to spillere N = $\{1, 2\}$, med handlingsmængden $S_1 = S_2 =$ {'Aggro Paladin', 'Aggro Shaman', 'Control Priest', 'Control Warlock', 'Control Warrior', 'Face Hunter', 'Heal Priest', 'Midrange Demon Hunter', 'Miracle Rogue', 'No Minion Mage', 'Other Mage', 'Ping Mage', 'Rally Priest', 'Rush Warrior', 'Secret Libram Paladin', 'Secret Paladin', 'Spell Damage Mage', 'Token Druid}. Payoff for spiller 1 er givet ved vindersandsynligheden for en given combination af handlingsmængden, for eksempel er payouten for (Aggro Paladin, Aggro paladin) 0.5. Payoff matricen for spiller to er defineret som $-U_2$, da spillet er et nulsumsspil.

Vha. IESDS kan de strengt domineret strategier udregnes. De strengt dominerede strategier består af 'Aggro Shaman', 'Control Warrior', 'Miracle Rogue', 'Other Mage', 'Ping Mage', 'Rally Priest', 'Spell Damage Mage' og 'Token Druid'.

2.2

Følgende tabel er udarbejdet ved hjælp af et loop, der beregner den strategi med den højeste forventede nytte baseret på tidligere iterations rationalitetsniveau, hvor orden 0 antager en uniform distribution af strategier. Fra tabellen er det tydeligt, at der fra og med iteration 4 opstår et gentagende mønster med strategierne 'Control Priest', 'Control Warlock' og 'Miracle Rouge'. Dette mønster opstår som et resultat af "counters", hvor strategier typisk har stærke sider mod specifikke andre strategier, men samtidigt udviser svagheder mod andre.

Iteration	Best Strategy	Expected Utility of Top 3 Strategies
1	No Minion Mage	58.529, 53.993, 52.649
2	Midrange Demon Hunter	54.490, 50.000, 46.370
3	Aggro Shaman	52.080, 50.900, 50.800
4	Control Priest	80.010, 62.810, 60.030
5	Control Warlock	64.540, 64.210, 63.180
6	Miracle Rogue	61.070, 59.270, 58.990
7	Control Priest	56.630, 53.620, 51.590
8	Control Warlock	64.540, 64.210, 63.180
9	Miracle Rogue	61.070, 59.270, 58.990
10	Control Priest	56.630, 53.620, 51.590
11	Control Warlock	64.540, 64.210, 63.180
12	Miracle Rogue	61.070, 59.270, 58.990
13	Control Priest	56.630, 53.620, 51.590
14	Control Warlock	64.540, 64.210, 63.180
15	Miracle Rogue	61.070, 59.270, 58.990
16	Control Priest	56.630, 53.620, 51.590
17	Control Warlock	64.540, 64.210, 63.180
18	Miracle Rogue	61.070, 59.270, 58.990
19	Control Priest	56.630, 53.620, 51.590
20	Control Warlock	64.540, 64.210, 63.180

Table 3: Best Strategies and Expected Utilities of Top 3 Strategies Across Iterations

2.3

Under antagelsen af at fordelingen af Arnes modstanderes deck går mod fordeling af strategiandelene, kan vi udregne det bedste deck for Arne, ved at beregne den forventet nytte V_1 ud fra strategiandelene A_2.

$$V_1 = U_1 @ A_2$$

Det optimale deck, er den strategi der giver Arne den højeste forventet nytte. Vha. python er dette regnet til at være Secret Paladin med en forventet nytte på 63.55.

2.4

Først anvendes IESDS til at fjerne strengt domineret strategier og derefter anvendes `solve_zerosum_with_linprog()` fra den udleveret kode til at løse spillet. Den udledte strategi profil i Nash ligevægten er en blandet strategi hvor Arne spiller Control Warlock 24.2%, Rush Warrior med 71.2% og Secret Paladin med 4.91 %. Fordelen ved at anvende `solve_zerosum_with_linprog()` er at den kan løse Nash ligevægten i polynomisk tid, mens de andre mere generelle metoder som foreksempel `nashpy.Game().fictitious_play()` løser det i faktoriel tid.

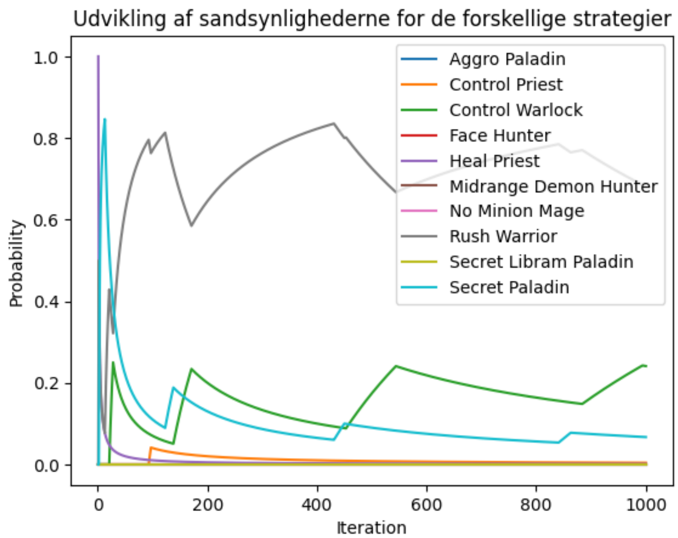

Figure 2:

2.5

I figur 2 kan man se udviklingen i sandsynligheder for den blandt strategi. Ved sidste iteration var strategiprofilen Control Priest med 0.2%, Control Warlock med 23.42%, Face Hunter med 0.1%, Rush Warrior med 70.97% og Secret Paladin med 5.31%. Resultaterne indikerer en mindre afvigelse på ca. 0.4 procentpoint Secret Paladin decket. Begge metoder fremhæver Rush Warrior som den dominerende strategi med henholdsvis 70.97% og 71.2%, og Control Warlock som den næst mest dominerende med henholdsvis 23.42% og 24.2%. Det er også værd at bemærke at der er to handlinger mere i den fictousplay, hvis sandsynligheder er non-zero, hvilket dog kan tilskrives "numerisk støj" og vil formentligt forsvinde ved et højere antal iterationer.

3 Priskonkurrence i Bilmarkedet

3.1

Forbrugerens nyttefunktion fortæller os, at de to firmaers biler er perfekte substitutter. Nyttefunktionen er en funktion af prisen og efterspørgslen er altså inverst relateret til prisen af bilen. Firmaerne kan således tage en større markedsandel ved at sætte sin pris marginalt lavere end konkurrentens indtil prisen rammer Nash-ligevægten, og som følge af vores ikke-lineære efterspørgselsfunktion ligger Nash-ligevægten over marginalomkostningerne i dette tilfælde jf. figur 4. Dette er kendt som Bertrand-konkurrence.

For at løse Nash-ligevægten i rene strategier numerisk bruger vi iterated best response algoritmen kombineret med en optimeret profitfunktion. Dette sikrer os, at vi opnår samme pay-offs i Nash-ligevægten, hvilket er i overensstemmelse med idéen om Bertrand-konkurrence. Vi undgår uendelige loops ved at begrænse antallet af iterationer. Med en startværdi på $p_1 = p_2 = 0.5$ får vi således følgende Nash-ligevægt (3):

```
IBR successful after 2 iterations
spiller 1 og 2 sætter begge en pris på p = [[0.88659581]
 [0.88659581]]
```

Figure 3: Nash-ligevægt i rene strategier

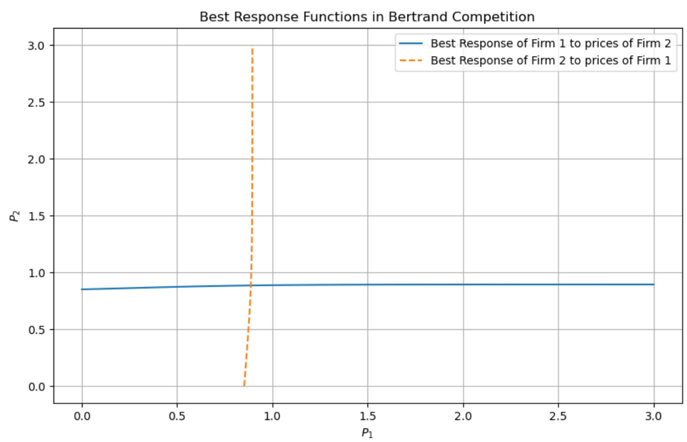

Figure 4: Bedste-Svar-funktioner

3.2

Fordi de to firmaers profitfunktioner er ens, kan vi lade $p_1 = p_2$ og vi har derfor:

$$\pi_1(p_1) = (p_1 - c) \cdot \frac{\exp(v_1)}{\exp(v_0) + 2\exp(v_1)}$$

$$\pi_1(p_1) = \left(p_1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{\exp(1 - 3 \cdot p_1)}{1 + 2\exp(1 - 3 \cdot p_1)}$$

Profitfunktionen π_1 optimeres og kartellet fastsætter en pris på 0.9410 med en profit på 0.0538.

3.3

Firma 1's bedste svar løses som en funktion af firma 1's maksimerede pris og firma 2's best response på denne og firma 2's bedste svar til denne løsning regnes herefter. Med iterated best response algoritmen finder vi også her Nash-ligevægten. I modsætning til Cournot har vi altså ikke nogen "first mover advantage" mht. prissætning.

3.4

Jo højere vi sætter α-værdien, desto tættere kommer vi på marginalomkostningerne. Dette er gældende for både Nash-ligevægten i rene strategier, for kartellerne og i Stackelberg-eksemplet. α kan tolkes som købernes prissensitivitet og en lav prissensitivitet gør det altså muligt for firmaerne at tage en højere pris for sine produkter. I medicinalmarkeder vil man se en lav α som følge af patenter og i hvor høj grad patienterne er afhængige af medicinen. I markeder med høj grad af substituerbarhed ser vi typisk en høj alpha. Et eksempel på dette er dagligvarer.

3.2

3.2.1

Vi får at nashligevægten (fundet ved iterative best response) er givet ved: [53980.14444991, 48216.76894319] for p1 og p2. Vi ser at det adskiller sig lidt fra priserne baseret på data. Firma 1's pris 37.800 kr. Firma 2's pris er 25.850 kr.

3.2.2

Ligesom i forrige opgave, løser vi den ved at behandle hver profit funktion som 1 stor profit funktion og løser $max(profit1 + profit2)$ med hensyn til p1 og p2. Dermed får vi at kartel prisen blier henholdsvis 54889.196 og 48883.9866, for p1 og p2.

3.2.3