Transformada de la Place.

- Demuestre si los siguientes sistemas de la forma $y = H(x)$ son sistemas Lineales e invariantes en el tiempo (SLIT) (Simular en Python).

1. $y[n] = x[n]/3 + 2x[n-1] - y[n-1]$

2. $y[n] = \sum_{k=\infty}^{n} x^2[k]$

3. $y[n] =$ median$(x[n]$; donde median es la función mediana sobre una ventana de tamaño 3

4. $y[t] = Ax(t) + B$; $A, B \in \mathbb{R}$.

1. Linealidad Sistema [1]

Sea $x_1[n] \to y_1[n]$, y $x_2[n] \to y_2[n]$, definido por.

$$y_1[n] = \frac{x_1[n]}{3} + 2x_1[n-1] - y[n-1]$$

$$y_2[n] = \frac{x_2[n]}{3} + 2x_2[n-1] - y_2[n-1]$$

Se quiere probar que

$$x[n] = ax_1[n] + bx_2[n]$$

$$y[n] = ay_1[n] + by_2[n]$$

Sustituimos.

$$y[n] = \frac{ax_1[n] + bx_2[n]}{3} + 2\,(ax_1[n-1] + bx_2[n-1])$$
$$- y[n-1].$$

Comparación directa.

$$y[n-1] = ay_1[n-1] + by_2[n-1]$$

- $y[n] = ay_1[n] + by_2[n]$

Se cumple la Propiedad de linealidad.

$$\Rightarrow x[n-n_0] = \frac{x[n-n_0]}{3} + 2x[n-n_0-1] - y[n-n_0-1]$$

$\Rightarrow$ Como la forma de la ecuación no cambia al desplazar la entrada, se dice que el sistema es invariante en el tiempo, por tanto el sistema es SLIT.

② Sistema 2 (Linealidad de el)

Sea $x[n] = ax_1[n] + bx_2[n]$; $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x^2[k]$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} (a^2x_1^2[k] + bx_2[k]]^2.$$

Factorizando obtenemos:

$$= \sum_{k=-\infty}^{n} (a^2x_1^2[k] + 2abx_1[k] + b^2x_2^2[k])$$
$$\neq a\sum x_1^2 + b\sum x_2^2[k]$$

No cumple la propiedad de linealidad

$\Rightarrow$ Invarianza en el tiempo:

desplazando $x[n] \rightarrow x[n-n_0]$:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x^2[k-n_0] = \sum_{k=-\infty}^{n-n_0} x^2[k] = y[n-n_0]$$

Cumple con varianza en el tiempo
como no cumple ambas condiciones

Linealidad ✗
Invarianza ✓

El Sistema no es SLit

3. Sistema 3. $y[n] = \tilde{x}(x[n-1], x_n; x[n+1])$

Linealidad: Se tiene en cuenta que la mediana no es una operación lineal, ejemplo:

- $x_1 = [1,1,1]$; $\tilde{x} = 1$
- $x_2 = [3,3,3]$; $\tilde{x} = 3$

Pero $0{,}5 \cdot 1 + 0{,}5 \cdot 3 = 2$, Ok en general falla

$x_3 = [0{,}5{,}100]$ $\tilde{x} = 5$

$x_4 = [0{,}6{,}100]$ $\tilde{x} = 6$

$x \cdot x_3 + x_4 = [0{,}11{,}200]$, $\tilde{x} = 11$

Pero no siempre ocurre $\tilde{x}_3 + \tilde{x}_4 = 5+6 = 11$ por lo que el comportamiento, no es garantizado.

* No es Lineal ✗.

→ Invarianza en el tiempo:

Si se desplaza la señal, tambien se desplaza la ventana y el sistema si es variable en el tiempo.

Portanto:

Linealidad: X
Invarianza: ✓

El Sistema No es SLIT

4. Sistema 4.

$y(t) = A\cdot(t) + B$; Linealidad

→ Se requiere que.

$T\{ax_1(t) + bx_2(t)\} = aT\{x_1(t)\} + bT\{x_2(t)\}$

Verificación: $T\{x(t)\} = Ax(t) + B$

Por tanto.

$T\{ax_1 + bx_2\} = A\cdot(ax_1 + bx_2) + B$

Mientras que:

$aT\{x_1\} + bT\{x_2\} = a(Ax_1 + B) + b(Ax_2 + B)$

$= A(ax_1 + bx_2) + (a+b)B$

Solo si $B = 0$; Pero si $B \neq 0$

Es lineal cuando $B = 0$

- Invarianza en el tiempo.

Si se desplaza la entrada.

$$x(t) \to x(t-t_0) \Rightarrow y(t) = A \cdot (t-t_0) + B = y(t-t_0)$$

$\Rightarrow$ Es variante en el tiempo.

Solo si $B = 0$ es SLIT. ✓

Pero si $B \neq 0$ No es SLIT ✗