方阵乘积的行列式的证明

Wednesday, August 30, 2023 7:11 PM

证明：对于 n 阶方阵 A, B, 有 $\det(AB) = \det A \det B$。

设 $A = (a_{ij})_{n\times n}$, $B = (b_{ij})_{n\times n}$,

则：

取

$$D = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} ① & ② & \cdots & ⓝ & n+1 & & \end{array} \\ \left| \begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1n} & & & & \\ \vdots & & & \vdots & & & & \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} & & & & \\ \hline -1 & & & & b_{11} & \cdots & \cdots & b_{1n} \\ & -1 & & & \vdots & & & \vdots \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & -1 & b_{n1} & \cdots & \cdots & b_{nn} \end{array} \right| \end{array} = \begin{vmatrix} A & O \\ -E & B \end{vmatrix}$$

显然：由 Laplace 定理中的性质，$\det D = \det A \det B$。

由于 $AB = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$

将 1 列乘 b_{11} 2 列乘 b_{12} ⋯ ⓝ列乘 b_{1n} 后加到第 $n+1$ 列上。

此时第 $n+1$ 列变为：

$$D = \left| \begin{array}{ccc|cccc} a_{11} & \cdots & a_{1n} & a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+\cdots a_{1n}b_{n1} & & & \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & a_{n1}b_{11}+a_{n2}b_{21}+\cdots a_{nn}b_{n1} & & & \\ \hline -1 & & & 0 & & & \\ & -1 & & 0 & & & \\ & & \ddots & \vdots & & & \\ & & -1 & & & & \end{array} \right|$$

此时，我们对第 $n+2, n+3, \cdots n+n$ 列进行相同操作后 $\Longrightarrow$

$$D = \left| \begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & \\ \vdots & & \vdots & AB \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & \\ \hline -1 & & & \\ & -1 & & O \\ & & \ddots & \\ & & -1 & \end{array} \right|$$

则有：$|D| = \det A \det B = \left| \begin{array}{c|c} A & AB \\ \hline -E & O \end{array} \right| \xrightarrow[\text{或交换 } n \text{ 次行列}]{\text{由结论}} = (-1)^n \det(-E) \det(AB)$

然后由 $\det(\lambda A) = \lambda^n A$, 故 $\det(-E) = (-1)^n \det E = (-1)^n$.

故：$|D| = [(-1)^n]^2 \det(AB) = \det AB$，因而有：$\det A \det B = \det(AB)$