全局灵敏度有关性质证明*

Friday, April 19, 2024 10:49 AM

①：证：若 $\delta_{i,j}=\delta_i$，则 X_j 对失效无影响，

证明：

1). 由 $|a+b| \leq |a|+|b|$，有：

$$\left|P\{F\}-P\{F|X_i X_j\}\right| \leqslant \left|P\{F\}-P\{F|X_i\}\right|+\left|P\{F|X_i\}-P\{F|X_i,X_j\}\right|$$

同取期望，有：

$$E_{X_i X_j}\left[\left|P\{F\}-P\{F|X_i,X_j\}\right|\right] \leqslant E_{X_i X_j}\left\{\left|P\{F\}-P\{F|X_i\}\right|\right\}+E_{X_i X_j}\left\{\left|P\{F|X_i\}-P\{F|X_i,X_j\}\right|\right\}$$

故有：

$$\delta_{i,j}^{P\{F\}} \leqslant \delta_i^{P\{F\}}+\delta_{j|i}^{P\{F\}} \quad ①$$

需要说明：根据定义 ⟹ 我们取不同 X_i 时，

$P\{F|X_i\}$ 显然是不相同的。

从而：$E[s(X_i)]=\int s(x_i) f_X(x_i)\,dx_i$

而：$E[s(x_i,x_j)]=\int s(x_i x_j) f_X(x_i,x_j)\,dx_i dx_j$

我们使用条件概率边缘密度拆出：

$$f_X(x_i,x_j)=f_X(x_i)\cdot f_X(x_j|x_i)$$

$$=\int s(x_i,x_j)\cdot f_X(x_j|x_i)\,dx_j\cdot f_X(x_i)\,dx_i$$

由于定义是类似于方差的，我们从方差角度考虑：

$$s(x_i)=\left|P\{F\}-P\{F|X_i\}\right|$$

而 $s(x_i x_j)=\left|\{P\{F\}-P\{F|X_i,X_j\}\right|$

由定义：$\int P\{F|X_i\} f(x)\,dx_i = P\{F\}$

需说明：$\int s(x_i,x_j) f_X(x_j|x_i)\,dx_j \geq s(x_i)$

由定义: $\int P\{F|X_i\} f(x)\, dx_i = P\{F\}$

需说明: $\int S(X_i, X_j)\cdot f_X(X_j|X_i)\, dX_j \geq S(X_i)$

$$\text{上式} = \int_{X_j} \left[P\{F\} - P\{F|X_i\}\cdot P_F\{X_j|X_i\} \right] f_X(X_j|X_i)\, dX_j$$

$$\underbrace{E(P\{F\})}_{P\{F\}} - P\{F|X_i\}\cdot \int_{X_j} P_F\{X_j|X_i\}\cdot f_X(X_j|X_i)\, dX_j .$$

$$= \left| P\{F\} - P\{F|X_i\}\cdot E(P_F\{X_j|X_i\}) \right|$$

显然,后面一项更小,但取决于$P\{F\}$和$P\{F|X_i\}$大小关系