对偶优化一致解条件(KKT条件)推导过程

Friday, March 29, 2024 3:45 PM

首先，对偶优化针对的是 $f(x)$ 在 $g_i(x) \le 0$, $h_j(x) = 0$ 条件下的条件极小值问题：

由于求解：$\min L(x,\alpha,\beta) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i g_i(x) + \sum_{j=1}^{k} \beta_j h_j(x)$

即：

$$\min_x \max_{\alpha \ge 0, \beta} L(x,\alpha,\beta) = \max_{\alpha \ge 0,\beta} \min_x L(x,\alpha,\beta)$$

我们首先定义：
$$\begin{cases} Z_{primal}(x) = \max_{\alpha \ge 0, \beta} L(x,\alpha,\beta) \\ Z_{Dual}(\alpha,\beta) = \min_x L(x,\alpha,\beta) \end{cases}$$
⟹ 显然当 $\alpha = 0$ 时，第二项最大 0

显然：约束条件满足时：

$$\boxed{Z_{primal}(x) = f(x)}$$

此时约束转化为：

$$\min f(x) = \min_x \left(Z_{primal}(x) \right) = \max_{\alpha \ge 0, \beta} \left(Z_{Dual}(x) \right)$$

显然有：

$$\boxed{Z_{Dual}(\alpha,\beta) \le L(x,\alpha,\beta) \le f(x) = Z_{primal}(x)} \quad ☆$$

我们考虑：为使对偶问题的解与原问题解一致，

即需使得：$Z_{Dual}(\alpha^*, \beta^*) = Z_{primal}(x^*)$ ⟹ 设对应 $\alpha = \alpha^*$, $\beta = \beta^*$

显然要求：

$$\min_x L(x,\alpha^*,\beta^*) = L(x^*,\alpha^*,\beta^*)$$，x^* 为极值点，

故有公式：

$$\left.\frac{\partial L(x,\alpha^*,\beta^*)}{\partial x}\right|_{x^*} = 0 \quad ①$$

另外：☆ 中的两个不等式均成立 $\overset{显}{\Longrightarrow}$ 要求 $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i^* g_i(x^*) = \sum_{j=1}^{k} \beta_j^* h_j(x^*) = 0$. ②

综合上述条件得到：

$$\text{KKT条件} \begin{cases} \left.\frac{\partial L(x,\alpha^*,\beta^*)}{\partial x}\right|_{x^*} = 0 \\ \alpha_i^* g_i(x^*) = 0 \\ h_j(x^*) = 0, \quad g_i(x^*) \le 0. \\ \alpha_i^* \ge 0. \end{cases}$$

为对偶优化问题的一致解条件

$$\left\{\begin{array}{l} h_j(x^*) = 0, \quad g_i(x^*) \le 0. \\ \alpha_i^* \ge 0. \end{array}\right.$$