空间刚度矩阵变换的推导

Monday, March 20, 2023 8:26 AM

①：对于一般的几何变换矩阵，即：

$$\begin{Bmatrix} \Delta_i \\ f_i \\ \theta_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_i \end{Bmatrix}$$ 可简写为 $\{\delta_i'\}^e = \phi\ \{\delta_i\}^e$

则对于单元整体有：

$$\begin{Bmatrix} \delta_i' \\ \delta_j' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi & 0 \\ 0 & \phi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \end{Bmatrix} \xrightarrow{\text{记为}} \underbrace{\{\delta'\}^e = [T^e]\{\delta\}^e}_{\text{为节点位移的变换式}}$$

显然节点力有变换式 $\{p'\}^e = [T^e]\{p\}^e$

利用局部坐标系中单元刚度矩阵关系

故：$\underline{\{p'\}^e = [k']^e\{\delta'\}^e}$，代入有：

$$[T^e]\{p\}^e = [k']^e\{\delta'\}^e = [k']^e[T^e]\{\delta\}^e$$

此时两边同乘 $[T^e]^{-1}$，则有：

$$\{p^e\} = \underbrace{[T^e]^{-1}[k']^e[T^e]}\{\delta\}^e$$

可写成 $\{p^e\} = [k]^e\{\delta\}^e$，

其中：空间整体刚度矩阵 $[k]^e$ 变换公式

$$[k]^e = [T^e]^{-1}[k']^e[T^e]$$

其中：可以验证：T^e 即：$\begin{bmatrix} \phi & 0 \\ 0 & \phi \end{bmatrix}$，是一个正交矩阵，$[T^e]^{-1} = [T^e]^T$，

其中：可以验证：T^e 即：$\begin{bmatrix} \phi & 0 \\ 0 & \phi \end{bmatrix}$，是一个正交矩阵，$[T^e]^T = [T^e]^{-1}$，

故有公式 $[k]^e = [T^e]^T [k']^e [T^e]$