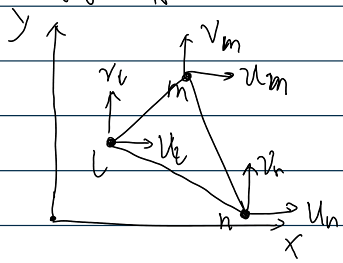
使用虚功原理推导三角形单元刚度矩阵

Wednesday, March 22, 2023 8:55 AM

对于三角形单元，根据虚功原理，节点力所做的虚功＝内力做的虚功。



有：$\delta A_p + \delta A_\sigma = 0$

单元应变 $\{\varepsilon\}^e = [B]\{\delta\}^e$

单元应力 $\{\sigma\}^e = [D]\{\varepsilon\}^e = [D][B]\{\delta\}^e$

显然虚应力/虚应变：

$\{\varepsilon^*\}^e = [B]\{\delta^*\}^e$

则，应力在虚应变上的做功：

$\delta A_\sigma = -\int_{V^e} \{\varepsilon^*\}^{eT}\{\sigma\}\,dV$ 其中：V^e为单元体积。

$= -\int_{V^e}(\varepsilon_x^*\sigma_x + \varepsilon_y^*\sigma_y + \gamma_{xy}^*\tau_{xy})\,dV$

代入：$\{\varepsilon^*\}^e = [B]\{\delta^*\}^e \rightarrow \{\varepsilon^*\}^{eT} = ([B]\{\delta^*\}^e)^T = \{\delta^*\}^{eT}[B]^T$

∴有虚功：

$\delta A_\sigma = -\int_{V^e}\{\delta^*\}^{eT}[B]^T[D][B]\{\delta\}^e$ 并代入 $\{\sigma\} = [D][B]\{\delta\}$

显然：其中

节点虚位移 $\{\delta^*\}$ 任意给定，

而：外力虚功 $\delta A_p = \{\delta^*\}^{eT}\{P\}^e$ → 给定，可约去

故有：

$\cancel{\{\delta^*\}^{eT}}\{P\}^e = -\int_{V^e}\cancel{\{\delta^*\}^{eT}}[B]^T[D][B]\{\delta\}^e$

得到

$\{P\}^e = \int_{V^e}[B]^T[D][B]\{\delta^e\}\,dV = \int_{V^e}[B]^T[D][B]\,dV\{\delta\}^e$

得到：$\boxed{\{P\}^e = [k]^e\{\delta\}^e}$，其中，

$\boxed{[k]^e = \int_{V^e}[B]^T[D][B]\,dV}$ 为单元刚度矩阵

对于简单三角形单元，如果厚度h为常值，且为均质时有近似：

$[k]^e = h\Delta[B]^T[D][B]$

上式中，单元刚度矩度 $[k]^e$ 为 6×6的对称方阵，并可以按节点进行分块表示为：

$$[k]^e = h\Delta \begin{Bmatrix} B_i^T \\ B_m^T \\ B_n^T \end{Bmatrix} [D] [B_i, B_m, B_n] = \boxed{\begin{bmatrix} k_{ii} & k_{im} & k_{in} \\ k_{mi} & k_{mm} & k_{mn} \\ k_{ni} & k_{nm} & k_{nn} \end{bmatrix}} \quad 6\times 6\text{分块}$$