3. 增量型本构方程的建立

一、回顾： Drucker公设建立的增量公式

$$d\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu} dS_{ij} + \frac{1-2\nu}{E} d\sigma_{ij}\delta_{ij} + d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}$$

其中:

$$d\varepsilon_{ij}^{p} = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}$$

二、增量型本构关系建立(塑性流动理论)

(1) 相关推导和概念补充 (P-R)本构关系和(L-M)本构关系推导
强化材料的本构方程推导

Shield 和 Ziegler 指出，塑性本构关系的构成可以包含以下的方面:

1. 初始屈服条件分析
2. 加载函数(强化条件)
3. 与初始屈服面和后继屈服面相关的流动法则

塑性流动理论包括全量理论和增量理论

全量理论和增量理论 (1) 全量理论也称塑性形变理论，认为塑性状态下仍然存在应力应变的全量关系
主要是Hencky全量理论 -> Ilyushin全量本构关系(考虑了弹性变形和强化关系)

(2) 增量理论也称塑性流动理论，主要研究塑性状态下应变率(增量)和应力率(增量)之间的关系，主要有：

1. Levy - Mises 理论 -> 适用于刚塑性变形
2. Prandtl - Reuss 理论 -> 考虑了弹性变形

(2) Prandtl-Reuss和Levy-Mises流动法则 若使用Mises屈服条件，建立应力方程为

$$\boxed{f(\sigma_{ij}) = \sigma_i^2 - \sigma_s^2 = 0}$$

代入Drucker公设建立的塑性应变项即得到

$$\boxed{d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \cdot S_{ij}}$$

Caution

由上式以及$d\varepsilon_{ij}^p = \sqrt{\frac{3}{2}}\varepsilon_i^p, S_{ij} = \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_i$得到本构关系

$$d\lambda = \frac{3d\varepsilon_i^p}{2\sigma_i}$$

注意这个本构关系适用于所有模型(包括线性强化，幂强化，等等)

并且可以在各个方向上列相应的方程并代入$d\lambda$

上式称为**Prandtl-Reuss流动法则**, 与Levy-Mises流动法则及其类似

Levy-Mises流动法则初始形式以及Levy-Mises本构关系

由于Levy-Mises流动法则是针对于理想刚塑性材料的，不参与 Drucker 公设,

因此弹性变形可以忽略去，即

$$\varepsilon_{ij}^p = d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \cdot S_{ij}$$

由上式容易推导得出应力强度σ_i和塑性应变强度$d\varepsilon_{ij}^p$之间的关系为

$$d\lambda = \frac{3d\varepsilon_i^p}{2\sigma_i}$$

则得到**Levy-Mises本构关系:**

$$\boxed{d\varepsilon_{ij} = \frac{3d\varepsilon_i}{2\sigma_i}S_{ij}}$$

上式只适用于理想刚塑性材料

(3) 增量本构关系(Plandtl-Reuss本构关系)　有$d\lambda$的表达式

$$\boxed{d\lambda = \frac{3dW^p}{2\sigma_s^2}}$$

其中

$$\begin{cases} dW^p = \sigma_{ij}d\varepsilon_{ij}^p = \sigma_i d\varepsilon_i^p \\ dW^d = S_{ij}de_{ij} \\ dW^p = dW^d \end{cases}$$

故有本构关系

$$\boxed{d\sigma_{ij} = \frac{1}{2\mu}dS_{ij} + \frac{1-2\nu}{E}d\sigma_m\delta_{ij} + d\lambda \cdot S}$$

或

$$\boxed{\begin{cases} de_{ij} = \frac{1}{2\mu}dS_{ij} + d\lambda \cdot S \\ d\varepsilon_{ii} = \frac{1-2\nu}{E}d\sigma_{ii} \end{cases}}$$

此两式称为**Prandtl- Reuss本构关系**

1. 理想弹塑性本构方程 λ的表达

- 塑性应变表达

$$d\lambda = \frac{3}{2}\frac{d\varepsilon_i^p}{\sigma_s}$$

- 塑性功表达

$$W^p = W^d, \quad W^p = \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}^p = \sigma_i\varepsilon_i^p, \quad dW_d = S_{ij}de_{ij}$$

方程直接代入即可得到相应的增量本构关系

$$d\sigma_{ij} = \frac{1}{2\mu}dS_{ij} + \frac{1-2\nu}{E}d\sigma_m\delta_{ij} + \frac{3}{2}\frac{d\varepsilon_i^p}{\sigma_s} \cdot S$$

2. 理想刚塑性本构方程

$$d\lambda = \frac{3}{2}\frac{d\varepsilon_i}{\sigma_s}$$

增量型本构关系:

$$d\varepsilon_{ij} = \frac{3d\varepsilon_i}{2\sigma_s}S_{ij}$$

3. 强化材料的本构方程

$$d\lambda = \frac{3d\sigma_i}{2H'\sigma_i}$$

其中H'是$\sigma_i - \int \varepsilon_i^p$的图像直线斜率

即:

$$\boxed{d\sigma_{ij} = \frac{1}{2\mu}dS_{ij} + \frac{1-2\nu}{E}d\sigma_m\delta_{ij} + \frac{3d\sigma_i}{2H'\sigma_i} \cdot S}$$

或者

$$\begin{cases} de_{ij} = \frac{1}{2\mu}dS_{ij} + \frac{3d\sigma_i}{2H'\sigma_i} \cdot S \\ d\varepsilon_{ii} = \frac{1-2\nu}{E}d\sigma_{ii} \end{cases}$$