实对称矩阵的相关性质证明

Saturday, September 16, 2023 9:25 AM

①：实对称阵的特征值为实数

我们设λ为实对称矩阵A的特征值，x为对应的特征向量，有$Ax=\lambda x$，$x\neq 0$，另外我们用$\bar{\lambda}$表示λ的共轭复数，而$\bar{x}$为x的共轭复向量，则有：由实对称阵，显$A=\bar{A}$（每一项取共轭，不改变）

$$A\bar{x}=\bar{A}\bar{x}$$

$$=\overline{Ax}=\overline{\lambda x}=\bar{\lambda}\bar{x}$$，从而我们有：

$$\bar{x}^TAx=\bar{x}^T\lambda x=\lambda\bar{x}^Tx$$

又：$\underbrace{\overline{\overline{\bar{x}^TAx}}}_{\text{实对称}}=(A\bar{x})^Tx=(\bar{\lambda}\bar{x})^Tx=\bar{\lambda}\bar{x}^Tx$

从而得到：

$$\lambda\bar{x}^Tx=\bar{\lambda}\bar{x}^Tx$$ 由$x\neq 0$，

变为：$\lambda=\bar{\lambda}$，即特征值必为实数，

②、证明实对称矩阵不同特征值对应特征向量相互正交。

证：由A是实对称阵：

$$Ax_1=\lambda_1x_1,\quad Ax_2=\lambda_2x_2$$

由 $(Ax_1)^Tx_2=(\lambda_1x_1)^Tx_2$

$Ax_1 = \lambda_1 x_1, \quad Ax_2 = \lambda_2 x_2$

~~由~~ $(Ax_2)^T x_1 = (\lambda_2 x_2)^T x_1$

$$x_2^T A x_1 = \lambda_2 x_2^T x_1$$

$$x_2^T(\lambda_1 x_1) = \lambda_2 x_2^T x_1 = \lambda_1 x_2^T x_1$$

得 $\Longrightarrow (\lambda_2-\lambda_1)x_2^T x_1 = 0$，从而若：$\lambda_2 \neq \lambda_1$，则

有：$x_2^T x_1 = 0$

即：x_1, x_2 相互正交。

---

③、证：实方阵 A 是正交矩阵充要条件是 A 的列（行）向量组是单位正交向量组

解：有：

A 正交 $\Longrightarrow A^T A = I$，则设 α 的列向量组为 $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n)$，则

$$A^T A = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} (\alpha_1^T, \alpha_2^T \cdots \alpha_n^T) = \begin{bmatrix} \alpha_1\alpha_1^T & \alpha_1\alpha_2^T & \cdots \\ \alpha_2\alpha_1^T & \alpha_2\alpha_2^T & \\ \vdots & & \\ \alpha_n\alpha_1^T & \cdots & \alpha_n\alpha_n \end{bmatrix} = I,$$

显然有：$\alpha_i\alpha_j^T = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i\neq j \end{cases}$ 则 A 的列向量均正交单位，同理由 $AA^T=I$，得 A 行向量正交单位

证：定理5.8：设 A 为 n 阶实对称矩阵，则必存在正交矩阵 Q，使得

$$Q^{-1}AQ = Q^TAQ = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \end{bmatrix}$$

正交矩阵Q，使得

$$Q^{-1}AQ=Q^{T}AQ=\Lambda=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & & \\ & \lambda_2 & & & \\ & & \lambda_3 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \lambda_n\end{bmatrix}$$

其中λ_i为A的特征值，

证明：使用数学归纳方法，

首先设矩阵的阶数$n=1$，则取$Q=[1]$

则：Q^TAQ 显然是特征值 我们设此结论对于$n-1$阶实对称矩阵成立，来证明对于n阶实对称矩阵成立。

我们设q_1是A的对应特征值λ_1对应的单位特征向量，则：$Aq_1=\lambda_1 q_1$，则$\|q_1\|=1$

我们设向量 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$与q_1正交，即

$q_1^Tx=[q_1,x]=0$ 是含有n个未知数，

1个方程的齐次线性方程，由于该齐次线性方程组的秩为1，即基础解系有$n-1$个线性无关解向量$p_2,p_3\cdots p_n$，此时使用施密特正交化方向对此正交化，再单位化得到向量组

$q_2,q_3,\cdots,q_n$，则$q_1,q_2\cdots q_n$是单位正交向量组，构成列向量矩阵

$Q=(q_1q_2\cdots q_n)$ 显然是正交矩阵。

又：$q_1^TAq_i=(q_1^TAq_i)^T=q_i^TAq_1=q_i^T\lambda_1 q_1=\lambda_1 q_i^Tq_1$

其中q_1是λ_1特征值

其中 q_1 是 λ_1 特征值

此时，由于 $q_1, q_2 \cdots q_n$ 构成正交且单位向量，则 $\lambda_1 q_i^T q_1 = \begin{cases} \lambda_1, & i=1 \\ 0, & i \neq 1 \end{cases}$

因而：

$$Q_1^{-1} A Q_1 = Q_1^T A Q_1 = \begin{bmatrix} q_1^T \\ q_2^T \\ \vdots \\ q_n^T \end{bmatrix} A (q_1, q_2 \cdots q_n)$$

$$= \begin{bmatrix} q_1^T A q_1, & q_1^T A q_2 & \cdots & q_1^T A q_n \\ q_2^T A q_1 & & & q_2^T A q_n \\ \vdots & & & \vdots \\ q_n^T A q_1 & q_n^T A q_2 & \cdots & q_n^T A q_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & B & \vdots \\ 0 & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} \leftarrow [B]$$

其中有 $b_{ij} = q_i^T A q_j = (q_i^T A q_j)^T = q_j^T A q_i = b_{ji}$.

因为是实数，$b_{ij} = b_{ij}^T$，

因而可知：[B] 是实对称阵。

显然：对 B，由归纳法，存在 n-1 阶正交矩阵 $\tilde{Q}_2$，使得：

$$\tilde{Q}_2^{-1} B \tilde{Q}_2 = \tilde{Q}_2^T B \tilde{Q}_2 = \begin{bmatrix} \lambda_2 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

则我们取：$Q_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0^T \\ 0 & \tilde{Q}_2 \end{bmatrix} \Rightarrow Q = Q_1 Q_2$

显有：Q_2 是 n 阶正交矩阵

而 Q 是 n 阶正交矩阵，

则：$Q^{-1} A Q = Q_2^{-1} Q_1^{-1} A Q_1 Q_2$

$$= Q_2^T (Q_1^T A Q_1) Q_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0^T \\ 0 & \tilde{Q}_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0^T \\ 0 & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0^T \\ 0 & \tilde{Q}_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0^T \\ 0 & \tilde{Q}_2^T B \tilde{Q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \end{bmatrix}$$

即存在 n 阶正交矩阵 Q

$$= \begin{bmatrix} \cdots & \cdots \\ 0 & \tilde{Q}_2^T B Q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

即存在n阶正交矩阵Q 使得$Q^T A Q = I$成立