# 标准化变量以及常见分布方差

Thursday, December 7, 2023 11:37 AM

① 设连续型随机变量 $X$ 有数学期望 $E(X)=\mu$，$D(X)=\sigma^2\neq 0$

设 $X^*=\frac{X-\mu}{\sigma}$。求 $E(X^*)$，$D(X^*)$

$$E(X^*)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{X-\mu}{\sigma}f(x)\right]dx=\frac{1}{\sigma}\mu-\mu\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,dx=0,$$

$$D(X^*)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{X-\mu}{\sigma}-0\right]^2f(x)\,dx=\frac{1}{\sigma^2}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)^2f(x)\,dx$$

(说明：要用：$X^*-E^2(X^*)$ 代入)

而：$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)^2f(x)\,dx=\sigma^2$.

则 $D(X^*)=1$ $\Rightarrow$ 因而将 $X^*=\frac{X-\mu}{\sigma}$ 称为标准化变量。

② 常见分布的方差：

1) 对 $(0,1)$ 分布，分布律

| $X$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $P(X)$ | $1-P$ | $P$ |

因而有：$E(X)=P$

$$\therefore D(X)=(-P)^2(1-P)+(1-P)^2\cdot P=(1-P)(P^2+P-P^2)=P(1-P)$$

2). 设 $X\sim\pi(\lambda)$，求 $D(X)$，分布律：$p(X=k)=\begin{cases}\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, & k=1,2,\cdots\\ 0\end{cases}$

解：(泊松分布)

$$E(X)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}k$$

由：$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}=e^{\lambda}=1+\lambda+\frac{1}{2}\lambda^2+\cdots$

$$\therefore \lambda\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}\longrightarrow E(X)=\lambda$$

**对方差的证明**

我们考虑用 $D(X)=E(X^2)-E^2(X)$ 证明：

我们考虑用 $D(X)=E(X^2)-E^2(X)$ 证明：

由 $E(X^2)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}k^2=\lambda\sum_{k=1}^{\infty}k\frac{e^{-\lambda}}{(k-1)!}$ ✗

由 $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$

$$E(X^2)=E(X(X-1)+X)=E(X(X-1))+E(X)$$ ☆

有 $\sum_{k=0}^{\infty}k(k-1)\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}k$

由于 $k=0$ 时，该项为 0，故消去分露改变求和限

$$=\lambda^2\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\lambda^{k-2}e^{-\lambda}}{(k-2)!}+\lambda\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}e^{-\lambda}}{(k-1)!}=\lambda^2+\lambda。$$

$\therefore E(X^2)-E^2(X)=\lambda^2+\lambda-\lambda^2=\lambda$ 为泊松分布的方差。

③、均匀分布的方差：对均匀分布随机变量 $X$，有

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, & a\le x\le b\\ 0。\end{cases}\qquad \therefore E(X)=\frac{a+b}{2}$$

$\therefore \int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{b-a}dx$ > 积分后非负

$$=\frac{1}{3}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^3\Big|_a^b\cdot\frac{1}{b-a}=\frac{1}{3(b-a)}\left[\left(\frac{b-a}{2}\right)^3-\left(\frac{a-b}{2}\right)^3\right]$$

$$=\frac{1}{3(b-a)}\left[\frac{1}{4}(b-a)^3\right]=\frac{(b-a)^2}{12}=D(X)、$$

④.指数分布的方差

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}} & x>0\\ 0, & 其它\end{cases}$$

有：$\int_{-\infty}^{+\infty}x f(x)\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}dx$ 取 $\frac{x}{\theta}=t$，$(\theta>0)$

$\therefore dx=\theta\,dt$

$=\theta\int_0^{+\infty}te^{-t}dt$，从而：$(t+1)e^{-t}$

$=\theta\,(t+1)e^{-t}\Big|_0^{+\infty}=\theta$ 为期望

$= \theta (t+1) e^{-t} \Big|_0^{+\infty} = \theta$ 为期望

此时：

$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} dx$，而：仍取 $\frac{x}{\theta} = t$，

$= \theta \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-t} \cdot \theta \cdot dt = \theta^2 \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t} dt$

由于 $\left[-t^2 e^{-t} - 2t e^{-t} + 2e^{-t}\right]' = t^2 e^{-t}$

$= \theta^2 \left[-t^2 e^{-t} - 2te^{-t} + 2e^{-t}\right]\Big|_0^{+\infty}$

$= 2\theta^2$

$\therefore D(X) = E(X^2) - E^2(X) = 2\theta^2 - \theta^2 = \theta^2$。

⑤ 二项分布：n重试验中，E(X) 为 A 发生次数

| $X_k$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $P_k$ | $1-p$ | $p$ |

$E(X) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=0}^{1} P_k = np$

引入 $X_k$ 表示：

$X_k = \begin{cases} 1, & A\text{在第}k\text{次实验发生} \\ 0, & A\text{在第}k\text{次实验不发生。} \end{cases}$

而 n重实验中 A 发生次数 X 满足：

$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$，而 $E(X_i) = p$

从而：$E(X) = E(X_1) + \cdots + E(X_n) = np$。

此时二项分布方差为：

$D(X) = E(X - E(X))^2 = \sum_{k=1}^{n} E(X_i - E(X_i))^2$

$= \sum_{k=1}^{n} p^2(1-p) + (1-p)^2 p$

$= np(1-p)$

| $(X_k - p)^2$ | $p^2$ | $(1-p)^2$ |
|---|---|---|
| $P_k$ | $1-p$ | $p$ |

$= p\left[p - p^2 + 1 - 2p + p^2\right] = p(1-p)$

例7. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，求 E(X)，D(X)

解法：先求 $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ 标准正态分布变量的E和D，

此时：

由 $\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$ $\left(e^{-\frac{z^2}{2}}\right)' = -\frac{2z}{2} e^{-\frac{z^2}{2}} = -z e^{-\frac{z^2}{2}}$ 别丢2.

有：$E(Z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \Big|_{-\infty}^{+\infty} = 0$

$\therefore E(X) = E(\sigma Z + \mu) = \mu$ $E([X - E(X)]^2)$

$\therefore E(X) = E(\sigma Z + \mu) = \mu \qquad E([X-E(X)]^2)$

此时：$D(Z) = \int_{-\infty}^{+\infty} (Z-0)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{Z^2}{2}} = \int_{-\infty}^{+\infty} Z^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{Z^2}{2}} dZ$

$= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} Z \, d(e^{-\frac{Z^2}{2}}) = 0 + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{Z^2}{2}} dZ = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times \sqrt{2\pi} = 1 = \sigma^2$

有：$D(X) = D[\sigma Z + \mu] = D[\sigma Z] = \sigma^2$. 显：$E(X) = \mu$, $D(X) = \sigma^2$.