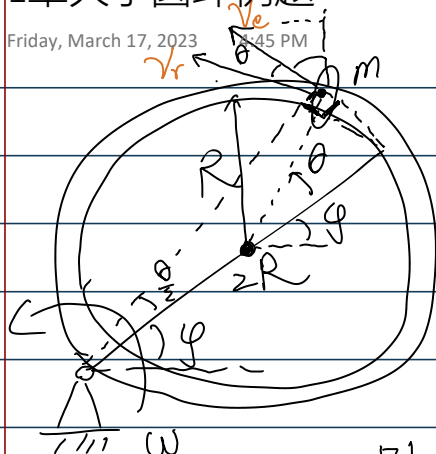


# 1章大小圆环例题

Friday, March 17, 2023 4:45 PM



如图：半径为  $R$  的大圆环，在水平面内以角速度  $\omega$  绕  $O$  点转动，质量为  $m$  的小环在其上无摩擦滑动，求运动微分方程的第一积分

小环相对

①：先确定自由度：我们设转过  $\theta$  角，

则由于  $\omega$  知：仅有单自由度  $\theta$ ，

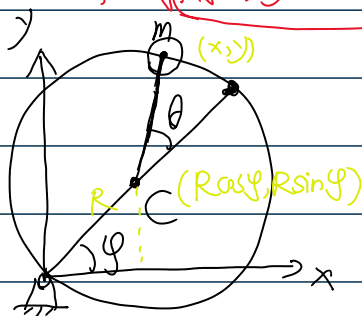
有：  $v_r = R\dot{\theta}$   
而：  $v_e = 2R \cdot \cos\frac{\theta}{2} \cdot \omega$

则有：

$$V_y = R\dot{\theta} \cos(\theta + \omega t) + 2R\omega \cos\frac{\theta}{2} \cdot \cos(\frac{\theta}{2} + \omega t)$$

$$V_x = -R\dot{\theta} \sin(\theta + \omega t) - 2R\omega \cos\frac{\theta}{2} \cdot \sin(\frac{\theta}{2} + \omega t)$$

我们用  $x, y$  直接表示圆环相对后进行求导：



$$\begin{cases} x = R(\cos \varphi + \cos(\theta + \varphi)) \\ y = R(\sin \varphi + \sin(\theta + \varphi)) \end{cases} \quad \text{其中 } \varphi = \omega t$$

其中  $\theta$  为广义坐标

约束方程为：

$$(x - R \cos \omega t)^2 + (y - R \sin \omega t)^2 = R^2$$

由于显含  $t$ ，为（非定常）完整约束。

$$\text{有： } \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0$$

$$\begin{aligned} & 2(x - R \cos \omega t) \cdot \dot{x} + 2(y - R \sin \omega t) \cdot \dot{y} + \\ & 2(x - R \cos \omega t) \cdot \omega R \sin \omega t - 2(y - R \sin \omega t) R \omega \cos \omega t \\ & = 2(x - R \cos \omega t) (\dot{x} + \omega R \sin \omega t) + 2(y - R \sin \omega t) (\dot{y} - \omega R \cos \omega t) = 0 \end{aligned}$$

对整个系统，为保守系统，而计算： $L = T - V$

$$\text{有： } T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2} m R^2 \left[ \omega \sin(\omega t) + (\omega + \dot{\theta}) \sin(\omega t + \theta) \right]^2$$

$$\begin{aligned}
 \text{有: } T &= \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2} m R^2 \left[ \dot{\omega} \sin(\omega t) + (\omega + \dot{\theta}) \sin(\omega t + \theta) \right]^2 \\
 &\quad + \frac{1}{2} m R^2 \left[ \dot{\omega} \cos \omega t + (\omega + \dot{\theta}) \cos(\omega t + \theta) \right]^2 \\
 &= \frac{1}{2} m R^2 \left[ \dot{\omega}^2 + (\omega + \dot{\theta})^2 + 2 \omega (\omega + \dot{\theta}) (\sin \omega t \sin(\omega t + \theta) + \cos \omega t \cos(\omega t + \theta)) \right] \\
 &\quad \text{由 } \cos a \cos b + \sin a \sin b = \cos(a-b) \\
 &= \frac{1}{2} m R^2 \left[ \dot{\omega}^2 + (\omega + \dot{\theta})^2 + 2 \omega (\omega + \dot{\theta}) \cos \theta \right] = \cos \theta \\
 &= \frac{1}{2} m R^2 \dot{\theta}^2 + m R^2 \omega^2 + m R^2 \omega (\omega + \dot{\theta}) \cos \theta + m R^2 \omega \dot{\theta} \\
 &= \boxed{\frac{1}{2} m R^2 \dot{\theta}^2 + m R^2 \dot{\theta} \omega (1 + \cos \theta) + m R^2 \omega^2 (1 + \cos \theta)} = L
 \end{aligned}$$

(而  $V = 0$ )

则运动方程的第一积分为

$$T + V = \text{constant} \quad \text{代入并代入初条件 } \dot{\theta}|_{t=0} = 0, \text{ 有:}$$

$2 m R^2 \omega^2 = C_1$ , 代入  $C_1$  得到:

$$\boxed{\frac{1}{2} m R^2 \dot{\theta}^2 + m R^2 \dot{\theta} \omega (1 + \cos \theta) + m R^2 \omega^2 (\cos \theta - 1) = 0}$$

为系统的 Lagrange 第一积分 (广义能量积分)

而循环积分显含  $\theta$  项, 无循环积分.