傅里叶积分定理推导

Sunday, October 15, 2023 9:51 AM

有：$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega t+b_n\sin n\omega t)$

$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cdot\frac{e^{jn\omega t}+e^{-jn\omega t}}{2}-jb_n\frac{e^{jn\omega t}-e^{-jn\omega t}}{2}\right)$$

$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[e^{jn\omega t}\underbrace{\left(\frac{a_n}{2}-j\cdot\frac{b_n}{2}\right)}+e^{-jn\omega t}\left(\frac{a_n}{2}+j\cdot\frac{b_n}{2}\right)\right]$$

由：$a_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\frac{e^{jn\omega t}+e^{-jn\omega t}}{2}dt$ 有：$\frac{1}{2}(a_n-jb_n)=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)e^{-jn\omega t}dt$

$b_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\frac{e^{jn\omega t}-e^{-jn\omega t}}{2j}dt$ $\quad\frac{1}{2}(a_n+jb_n)=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)e^{jn\omega t}dt$

代入：有：f(t)

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[e^{jn\omega t}\cdot\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)e^{-jn\omega t}dt+e^{-jn\omega t}\cdot\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)e^{jn\omega t}dt\right]$$

其中：$a_0=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)dt$，

我们取系数 $C_n=\frac{a_n}{2}-j\cdot\frac{b_n}{2}$，则有：$\boxed{C_n=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)e^{-jn\omega t}dt}$

显然 $C_{n=0}=\frac{a_0}{2}$，比较，f(t)化为：

$$f(t)=C_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(C_ne^{jn\omega t}+C_{-n}e^{-jn\omega t}\right)$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}C_ne^{jn\omega t}\text{，其中：}\quad C_n=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)e^{-jn\omega t}dt$$