# 例题部分1 张量分析基础

Wednesday, May 10, 2023 11:49 AM

$\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w}) = u_i\vec{e}_i\cdot(v_j\vec{e}_j\times w_k\vec{e}_k)$

$= u_i\vec{e}_i(v_j w_k \varepsilon_{jkl}\vec{e}_l)$

$= u_i v_j w_k \delta_{il}\varepsilon_{jkl} = \underline{u_l v_j w_k \varepsilon_{jkl}}$

$\vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w}) = u_i\vec{e}_i\times(v_j\vec{e}_j\times w_k\vec{e}_k)$

$= u_i\vec{e}_i\times(v_j w_k \vec{e}_j\vec{e}_k)$

$= u_i\vec{e}_i v_j w_k \varepsilon_{jkm}\vec{e}_m$

$= u_i v_j w_k \varepsilon_{jkm}\vec{e}_i\times\vec{e}_m$

$= u_i v_j w_k \varepsilon_{jkm}\varepsilon_{imn}\vec{e}_n$

证明：取 $i,j,k=1,2,3$

则 $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} = 6 = 3!$

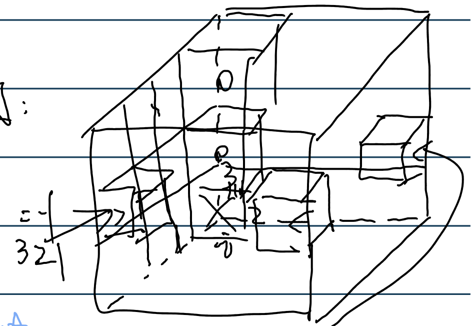
若：$\varepsilon_{mjk}\neq 0$，$i$ 有3种 $\to$ $j$ 2种，$k$ 1种。

$= 3\times2\times1 = 6$

将上式进行简化

为了求解：$\varepsilon_{jkm}\cdot\varepsilon_{imn} = \varepsilon_{mjk}\cdot\varepsilon_{mni}$

如图：



我们以如下求解为例：

求：$\varepsilon_{ijk}\cdot\varepsilon_{lmn}$ 则引入矩阵

令 $\Lambda^{(1)} = \begin{bmatrix} a_{1m} & a_{1n} & a_{1l} \\ a_{2m} & \cdots & a_{2l} \\ a_{3m} & \cdots & a_{3l} \end{bmatrix}$

$m=1, n=2, l=3$

若想从 $A$ 代为 $|\Lambda|^{(1)}$

则显然从行列式表示有：

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

我们可以将 $\varepsilon_{ijk}$ 想成一个 $3\times3\times3$ 的矩阵，其中有元素相同时即为0

$\det A = \det|\Lambda|^{(1)}\varepsilon_{123}$ ☆

$m=1, n=2, l=3$，则：$\varepsilon_{mnl} = \begin{vmatrix} a_{1m} & a_{1n} & a_{1l} \\ a_{2m} & a_{2n} & a_{2l} \\ a_{3m} & a_{3n} & a_{3l} \end{vmatrix}$ $\varepsilon_{123} = 1$

对于 $\boxed{\Lambda^{(2)} = \begin{bmatrix} A_{im} & A_{in} & A_{il} \\ A_{jm} & A_{jn} & A_{jl} \\ A_{km} & A_{kn} & A_{kl} \end{bmatrix}}$

则在 $m=1, n=2, l=3$ 时，$\Lambda^{(2)}$ 退化为 $\Lambda^{(1)}$

有：$\Lambda^{(1)} = \Lambda^{(2)}\cdot\varepsilon_{ijk}$

（换行和换列特性）

其中 $i,j,k,l,m,n = 1,2,3$，

$|A|\,\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{mnl}$ （行ijk 列lmn）

故：$\det\Lambda^{(2)} = \det\Lambda^{(1)}\varepsilon_{ijk} = \det(A)\cdot\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{mnl}$，

因于 $A = \begin{vmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{vmatrix}$

我们取 $|A|=1$，即：$A$ 取单位阵

有：$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn} = \det\begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix}$

我们计算上式，则：

$$\boxed{\begin{aligned}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn} = {} & \delta_{il}\delta_{jm}\delta_{kn} + \delta_{im}\delta_{jn}\delta_{kl} + \delta_{in}\delta_{jl}\delta_{km} \\ & - \delta_{kl}\delta_{jm}\delta_{in} - \delta_{km}\delta_{jn}\delta_{il} - \delta_{kn}\delta_{jl}\delta_{im}\end{aligned}}$$

此时说明阵中特殊情况：

①：$i=l$ 时：有：

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{imn} = \delta_{ii}\delta_{jm}\delta_{kn} + \delta_{im}\delta_{jn}\delta_{ki} + \delta_{in}\delta_{ji}\delta_{km} - \delta_{ki}\delta_{jm}\delta_{in} - \delta_{km}\delta_{jn}\delta_{ii} - \delta_{kn}\delta_{ji}\delta_{im}$$

其中：$\delta_{ii}=3$ ⟶ 在连乘中，进行换标

$$= 3(\delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{km}\delta_{jn}) + (\delta_{km}\delta_{jn} - \delta_{jm}\delta_{kn}) + (\delta_{jn}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kn})$$

$$= 3(\delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{km}\delta_{jn}) - (\delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{km}\delta_{jn}) - (\delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{km}\delta_{jn})$$

$$= \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}$$

$j\,k\;m\,n \quad - j\,k\;m\,n$

②：取：$i=l, j=m$，

有：$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijn} = \delta_{jj}\delta_{kn} - \delta_{kj}\delta_{nj}$

$$= 3\delta_{kn} - \delta_{kn} = 2\delta_{kn}$$

③：当 $i=l, j=m, k=n$ 时：

$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} = 2\delta_{kk} = 6 = 3!$ 其原理：对 $\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{ijk}$

3种 2种 1种、

可推广到：$\varepsilon_{ijk\cdots m}\varepsilon_{ijk\cdots m} = m!$

规律：$\varepsilon_{2143} = 1$ 偶数次交点（换标偶数次）$= 1$

$$\vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w}) = u_i\vec{e_i}\times(v_j\vec{e_j}\times v_k\vec{e_k})$$

$$= u_i\vec{e_i}\times(v_j v_k\varepsilon_{jkm}\vec{e_m})$$

$$= u_i v_j w_k\,\varepsilon_{jkm}\cdot\varepsilon_{imn}\vec{e_n}$$

$$= u_i v_j w_k\,\varepsilon_{mjk}\cdot\varepsilon_{mni}\vec{e_n}$$

由：$\varepsilon_{mjk}\cdot\varepsilon_{mni} = \delta_{jn}\delta_{ki} - \delta_{kn}\delta_{ji}$，代入得到，

$= u_i v_j w_k[\delta_{jn}\delta_{ki} - \delta_{kn}\delta_{ji}]\vec{e_n}$，使用δ进行换标，有：

$= (u_i w_i v_n\vec{e_n} - w_n u_i v_i\vec{e_n}) = (u_i w_i\,v_n - u_i v_i\,w_n)\vec{e_n}$

如果换n为j，得：$\vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w}) = u_i(w_i v_j - v_i w_j)\vec{e_j}$

$$= u_i w_i\vec{v} - u_i v_i\vec{w}$$

$$u\times(v\times w) = (\vec{u}\cdot\vec{w})\vec{v} - (\vec{u}\cdot\vec{v})\vec{w}$$