第二，三章重要例题

Monday, October 9, 2023 5:10 PM

P44例4. 若 $f(z)=u+iv$ 为一解析函数，且 $f'(z)\neq 0$，则 $u(x,y)=C_1$，$v(x,y)=C_2$ 必互相正交（$C_1, C_2 = const$）

解：由于解析 → 符合 Cauchy – Riemman 方程。

有：$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}$　$\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}$，

则：

$$\left.\begin{aligned}\text{有：}du&=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy=0\\ dv&=\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy=0\end{aligned}\right\}\text{为两曲线.}$$

有：$k_1=-\dfrac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial y}}=\dfrac{\frac{\partial v}{\partial y}}{\frac{\partial v}{\partial x}}$　$k_2=\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{\frac{\partial v}{\partial x}}{\frac{\partial v}{\partial y}}$

显：$k_1\cdot k_2=-1$，即曲线正交

P72. 例1.

计算 $\int_C z\,dz$，C为从原点到 $3+4i$ 直线。

解：$=\frac{1}{2}z^2\Big|_0^{3+4i}=\frac{1}{2}[(9-16)+24i]=\frac{1}{2}[-7+24i]$

$=-\frac{7}{2}+12i$

※ 由于 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$，$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$，则积分与路线无关

即使取 $u=3t$，$v=4t$，$\int u+iv=\int(3+4i)t\,dt=\frac{1}{2}(3+4i)^2$.

P73.例2. 计算 $\oint_C\dfrac{dz}{(z-z_0)^{n+1}}$，其中 C为 z_0为中心，r为半径的圆周。

有：$|z-z_0|=r$，即：$(z-z_0)\overline{(z-z_0)}=r^2$，

用三角或指数形式来表示：$z=z_0+re^{i\theta}$.　由 $z=re^{i\theta}+z_0$

$dz=i\,re^{i\theta}d\theta$

则：

$$\oint_C\frac{1}{z-z_0}dz=\oint_C\frac{1}{re^{i\theta}}dz=\int_0^{2\pi}\frac{1}{\cancel{re^{i\theta}}}\,i\cdot\cancel{re^{i\theta}}\,d\theta=\underline{2\pi i}$$

※ 公式、

$$\oint_C\frac{1}{(z-z_0)^{n+1}}dz=\oint_C\frac{1}{(re^{i\theta})^{n+1}}\cdot i re^{i\theta}d\theta=\oint_C\frac{i}{(re^{i\theta})^n}d\theta=\frac{i}{r^n}\oint_C e^{-in\theta}d\theta$$

$$=\frac{i}{r^n}\cdot-\frac{1}{ni}\,e^{-in\theta}\Big|_0^{2\pi}\quad(n\neq 0)$$

$$= \frac{1}{r^n} \cdot -\frac{1}{ni} e^{-in\theta} \Big|_0^{2\pi} \quad (n \neq 0)$$

$$= \frac{i}{nr^n} \left(e^{-i \cdot 2\pi n} - 1 \right)$$

由于 e 是以 2π 周期函数、

$$= \frac{1}{nr^n} (1 - 1) = 0$$

当 $n\cancel{=}$ $(\neq 0)$ 时，显：

则：$$\oint_C \frac{1}{(z-z_0)^{n+1}} = \begin{cases} 2\pi i & (n=0) \\ 0 & (n \neq 0) \end{cases}$$