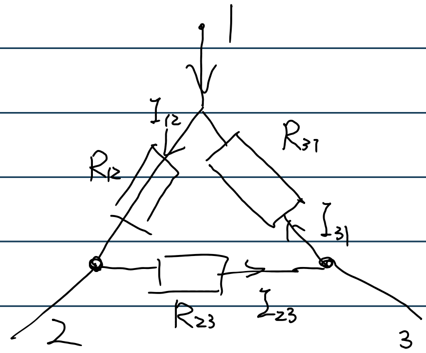
电路的Y-△型变换推导

Wednesday, September 20, 2023 9:50 AM

①：△型电路等效为Y型



$i_{12}=\dfrac{U_{12}}{R_{12}}$，$i_{23}=\dfrac{U_{23}}{R_{23}}$，$i_{31}=\dfrac{U_{31}}{R_{31}}$

则由KCL，有：

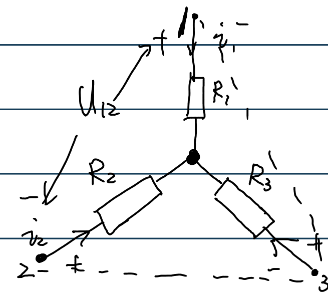
$$\begin{cases} i_1+i_{31}=i_{12} \\ i_2+i_{12}=i_{23} \\ i_3+i_{23}=i_{31} \end{cases} \Rightarrow$$

可导出：

$$\begin{cases} i_1=\dfrac{U_{12}}{R_{12}}-\dfrac{U_{31}}{R_{31}} \\ i_2=\dfrac{U_{23}}{R_{23}}-\dfrac{U_{12}}{R_{12}} \\ i_3=\dfrac{U_{31}}{R_{31}}-\dfrac{U_{23}}{R_{23}} \end{cases}$$

①

而：对Y型电路：



KVL 3个，

$$\begin{cases} U_{12}=i_1R_1-i_2R_2 & ① \\ U_{23}=i_2R_2-i_3R_3 & ② \\ U_{31}=i_3R_3-i_1R_1 & ③ \text{(多余)} \\ \text{又：} i_1+i_2+i_3=0 & ④ \end{cases}$$

(KCL)

解出 i_1, i_2, i_3.

有：我们以①②④为例：

$$\begin{cases} U_{12}=i_1R_1-i_2R_2 \Rightarrow \dfrac{U_{12}}{R_2}=i_1\dfrac{R_1}{R_2}-i_2 \\ U_{23}=i_2R_2+(i_1+i_2)R_3 = i_1R_3+i_2(R_2+R_3) \Rightarrow \dfrac{U_{23}}{R_2+R_3}=i_1\dfrac{R_3}{R_2+R_3}+i_2 \end{cases}$$

∴两式相加，有：

$$\frac{U_{12}}{R_2}+\frac{U_{23}}{R_2+R_3}=i_1\left(\frac{R_1}{R_2}+\frac{R_3}{R_2+R_3}\right)$$

化简：

$$i_1\left(\frac{R_1(R_2+R_3)+R_2R_3}{R_2(R_2+R_3)}\right)=i_1\frac{R_1R_2+R_2R_3+R_1R_3}{\cancel{R_2(R_2+R_3)}}=\frac{U_{12}(R_2+R_3)+U_{23}R_2}{\cancel{R_2(R_2+R_3)}}$$

得到

$$i_1=\frac{U_{12}(R_2+R_3)+U_{23}R_2}{R_1R_2+R_2R_3+R_1R_3}$$

又：$U_{12}+U_{23}+U_{31}=0$.

分子 $=(U_{12}+U_{23})R_2+U_{12}R_3$

$=U_{12}R_3-U_{31}R_2$

则有电路电流：

同理：

$$\begin{cases} i_1=\dfrac{U_{12}R_3-U_{31}R_2}{R_1R_2+R_2R_3+R_1R_3} \\ i_2=\dfrac{U_{23}R_1-U_{12}R_3}{R_1R_2+R_2R_3+R_1R_3} \\ i_3=\dfrac{U_{31}R_2-U_{23}R_1}{R_1R_2+R_2R_3+R_1R_3} \end{cases}$$

②.

我们比较结果①②，则：

$$\begin{cases} R_{12}=\dfrac{R_1R_2+R_2R_3+R_1R_3}{R_3}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_{12}=\dfrac{R_1R_2+R_2R_3+R_1R_3}{R_3}; \\ R_{23}=\dfrac{R_1R_2+R_2R_3+R_1R_3}{R_1}; \\ R_{31}=\dfrac{R_1R_2+R_2R_3+R_1R_3}{R_2}; \end{cases}$$

为 Y—△ 变换公式

（$Y \xrightarrow{\text{表示}} \triangle$ 型）

→ 也可通过线性代数解出 x_1, x_2, x_3.

通过反解 R_1, R_2, R_3，有：

①：先将三式相加，通分有：

$$R_{12}+R_{23}+R_{31}=\frac{(R_1R_2+R_2R_3+R_1R_3)(R_1R_2+R_2R_3+R_1R_3)}{R_1R_2R_3}$$

$$=\frac{(R_1R_2+R_2R_3+R_1R_3)^2}{R_1R_2R_3}$$

，则：显然我们可以通过任意两个式子的乘积凑出上方式子平方形式，

显有：$R_{12}R_{31}=\dfrac{(R_1R_2+R_2R_3+R_1R_3)^2}{R_2R_3}$，则：有：

$$R_1=\frac{R_{12}R_{31}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}}.$$

同理得：三个公式：

$$\begin{cases} R_1=\dfrac{R_{12}R_{31}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}} \\ R_2=\dfrac{R_{23}R_{12}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}} \\ R_3=\dfrac{R_{23}R_{31}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}} \end{cases}$$

即为 △—Y 变换公式