谐波平衡法求解Duffing振动方程

Thursday, June 22, 2023 1:54 PM

一、自由振动的推导：

①：Duffing方程的自由振动问题方程为：

$$\ddot{x}+\omega_0^2(x+\varepsilon x^3)=0$$

谐波平衡法的核心是仅保留一次展开系数

$x=A\cos\omega t$，得：

$$-A\omega^2\cos\omega t+\omega_0^2(A\cos\omega t+\varepsilon A^3\cos^3\omega t)=0$$

利用：

$\cos^3\omega t=\frac{3}{4}\cos\omega t+\frac{1}{4}\cos 3\omega t$，有：

$$A(\omega_0^2-\omega^2)\cos\omega t+\varepsilon\omega^2A^3\cos^3\omega t=0$$

则有：

$$A(\omega_0^2-\omega^2)\cos\omega t+\varepsilon\omega_0^2A^3\left(\frac{3}{4}\cos\omega t+\frac{1}{4}\cos 3\omega t\right)=0,$$

则合并 $\cos\omega t$ 项：

$$A\left(\omega_0^2-\omega^2+\frac{3}{4}A^2\omega^2\varepsilon\right)\cos\omega t+\frac{1}{4}\varepsilon\omega_0^2A^3\cos 3\omega t=0$$

由于 $\cos\omega t$ 系数久期项，为0，即：

$$\frac{3}{4}A^2\omega_0^2\varepsilon=\omega^2-\omega_0^2,\quad \therefore 则：\boxed{\omega^2=\omega_0^2\left(1+\frac{3}{4}A^2\varepsilon\right)}$$

得：$\omega=\omega_0\sqrt{1+\frac{3\varepsilon}{4}A^2}$，即Duffing系统振动频率 ω 为振幅 A 的参数。

二、受迫振动的推导：

对于有阻尼的Duffing系统，受到 $\boxed{频率\omega的周期激励}$，其动力学方程为：

$$\ddot{x}+2\xi\omega_0\dot{x}+\omega_0^2(x+\varepsilon x^3)=B\omega_0^2\cos(\omega t+\theta)$$

代入一次谐波近似解：

$x=A\cos\omega t$，

$$-A\omega^2\cos\omega t-2\xi A\omega_0\omega\sin\omega t+\omega_0^2\left(A\cos\omega t+\frac{3\varepsilon}{4}A^3\cos\omega t+\frac{\varepsilon}{4}A^3\cos 3\omega t\right)=B\omega_0^2\cos(\omega t+\theta)$$

$x = A\cos\omega t$

$$-A\omega^2\cos\omega t - 2\xi A\omega_0\omega\sin\omega t + \omega_0^2\left(A\cos\omega t + \frac{3\varepsilon}{4}A^3\cos\omega t + \frac{\varepsilon}{4}A^3\cos 3\omega t\right) = B\omega_0^2\cos(\omega t+\theta)$$

$$\left(A\omega_0^2 - A\omega^2 + \frac{3}{4}\varepsilon A^3\omega_0^2\right)\cos\omega t + \left(\frac{\varepsilon}{4}A^3\omega_0^2\right)\underline{\cos 3\omega t} - 2\xi A\omega_0\omega\sin\omega t = B\omega_0^2\cos(\omega t+\theta)$$

此时：令 $s=\frac{\omega}{\omega_0}$ 为频率比，有：同除 ω_0^2

$$\left(A(1-s^2)+\frac{3\varepsilon}{4}A^3\right)\cos\omega t + \frac{\varepsilon}{4}A^3\cos 3\omega t - 2\xi A s\cdot\sin\omega t = B\cos(\omega t+\theta)$$

只需展开并令一次系数相同即可：

右，$= B(\cos\omega t\cos\theta - \sin\omega t\sin\theta)$

移项，有：

$$\left[A(1-s^2)+\frac{3\varepsilon}{4}A^3 - B\cos\theta\right]\cos\omega t + \left(B\sin\theta - 2\xi A s\right)\sin\omega t + \frac{\varepsilon}{4}A^3\omega_0^2\cos 3\omega t = 0,$$

由于 cos ωt，sin ωt 的系数均为零，有：

可解 s, θ

$$\begin{cases} ①: A(1-s^2)+\frac{3\varepsilon}{4}A^3 - B\cos\theta = 0 \\ ②: B\sin\theta - 2\xi A s = 0 \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ 则有：$B\sin\theta = 2\xi A s$

$B\cos\theta = A(1-s^2)+\frac{3\varepsilon}{4}A^3$

另有：将其平方相加：

$$\boxed{4\xi^2A^2s^2 + \left(A(1-s^2)+\frac{3\varepsilon}{4}A^3\right)^2 = B^2}$$

$$4\xi^2A^2s^2 + A^2(1-s^2)^2 + \frac{3\varepsilon}{2}A^4(1-s^2) + \frac{9\varepsilon^2}{16}A^6 = B^2$$

$$(2\xi s)^2 + \left[(1-s^2)+\frac{3\varepsilon}{4}A^2\right]^2 = \left(\frac{B}{A}\right)^2.$$

即：$\frac{A}{B} = 1\Big/\sqrt{\left[(1-s^2)+\frac{3\varepsilon}{4}A^2\right]^2 + (2\xi s)^2}$

则有：$\left[(s^4-2s^2+1)+\frac{3\varepsilon}{2}A^2(1-s^2)+\frac{9\varepsilon^2}{16}A^4\right] + (2\xi s)^2 - \left(\frac{B}{A}\right)^2 = 0$

$$s^4 - \left(2+\frac{3\varepsilon A^2}{2} - 4\xi^2\right)s^2 + \left[1+\frac{3}{2}A^2\varepsilon+\frac{9}{16}\varepsilon^2A^4\right] - \left(\frac{B}{A}\right)^2 = 0$$

$$+\left(1+\frac{3}{4}\varepsilon A^2\right)^2 - \left(\frac{B}{A}\right)^2 = 0$$

$2+\frac{3A^2\varepsilon}{2} - 4\xi^2 + \sqrt{(1+\frac{3}{2}\varepsilon A^2)^2 \ldots}$

$$+\left(1+\frac{3}{4}\varepsilon A^2\right)^2-\left(\frac{\beta}{A}\right)^2=0$$

$$s^2=\frac{2+\frac{3A^2\varepsilon}{2}-4\xi^2\pm\sqrt{\left(1+\frac{3}{4}\varepsilon A^2\right)^2+4\left(\frac{\beta}{A}\right)^2}}{2\times 1}\longrightarrow \text{舍去负解}$$

$$=1+\frac{3\varepsilon A^2}{4}-2\xi^2+\sqrt{\left(1+\frac{3\varepsilon A^2}{4}\right)+4\left(\frac{\beta}{A}\right)^2}$$

对应地，可以解出对应频率比为：

$$\tan\theta=\frac{2\xi A s}{A(1-s^2)+\frac{3\varepsilon}{4}A^3}\Rightarrow \theta=\arctan\left(\frac{2\xi A s}{A(1-s^2)+\frac{3\varepsilon}{4}A^3}\right)$$