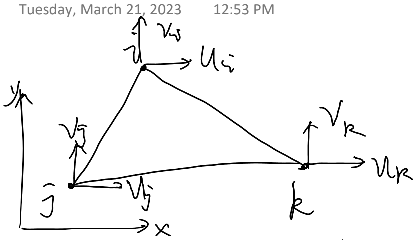
三角形三节点的刚度分析

Tuesday, March 21, 2023   12:53 PM



对于三角形节点，有；设其位移模式为

$$\begin{cases} u_i(x,y) = a_1 + a_2 x_i + a_3 y_i \\ v_i(x,y) = a_4 + a_5 x_i + a_6 y_i \end{cases}$$

$$\begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_k \\ v_k \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i & & & \\ & & & 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j & & & \\ & & & 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k & & & \\ & & & 1 & x_k & y_k \end{bmatrix}}_{} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{Bmatrix}$$

上式简记为: $\{\delta\}^e = [A]\{a\}$

其中 $\{\delta\}^e$ 为节点位移，

则形状函数: $\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = [M]\{a\} = \underbrace{[M][A]^{-1}}\{\delta\}^e$

$= [N]\{\delta\}^e$

其中$[N]$为2×6的形状函数矩阵并有:

$$[N] = \left[\begin{array}{cc|cc|cc} N_i & 0 & N_j & 0 & N_k & \\ 0 & N_i & 0 & N_j & & N_k \end{array}\right]$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & x & y & & & \\ & & & 1 & x & y \end{bmatrix} \cdot A^{-1}$$

可以得到:

$$\begin{cases} N_i = \dfrac{a_i + b_i x + c_i y}{2\Delta} \\ N_j = \dfrac{a_j + b_j x + c_j y}{2\Delta} \\ N_k = \dfrac{a_k + b_k x + c_k y}{2\Delta} \end{cases}$$

上式中有: Δ为三角形的面积，且a,b,c为系数:

并有: 令: $[\Lambda] = \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{bmatrix}$ Δ可表述为:

$$\boxed{\Delta = \frac{1}{2}|\Lambda| = \frac{1}{2}(x_i y_j + x_j y_k + x_k y_i) - \frac{1}{2}(x_j y_i + x_k y_j + x_i y_k)}$$

其中: $a_i, b_i, c_i, \cdots a_k b_k, c_k \cdots$ 可以通过求解上述的代数余子式即:

$$\boxed{\begin{array}{lll} a_i = \begin{vmatrix} x_j & y_j \\ x_k & y_k \end{vmatrix} & b_i = -\begin{vmatrix} 1 & y_i \\ 1 & y_j \end{vmatrix} & c_i = \begin{vmatrix} 1 & x_i \\ 1 & x_j \end{vmatrix} \\ a_j = -\begin{vmatrix} x_i & y_i \\ x_k & y_k \end{vmatrix} & b_j = \begin{vmatrix} 1 & y_i \\ 1 & y_k \end{vmatrix}, & c_j = -\begin{vmatrix} 1 & x_i \\ 1 & x_k \end{vmatrix} \\ a_k = \begin{vmatrix} x_i & y_i \\ x_j & y_j \end{vmatrix} & b_k = -\begin{vmatrix} 1 & y_i \\ 1 & y_j \end{vmatrix} & c_k = \begin{vmatrix} 1 & x_i \\ 1 & x_j \end{vmatrix} \end{array}}$$

其中: 若令 $u_i = 1$, $u_j = u_k = 0$ 时:

即是i节点形状函数N_i的物理意义

则：$u(x,y)=N_i$

另外，在节点，显然有：

$$\begin{cases} N_i(x_i,y_i)=1, & N_i(x_j,y_j)=0, & N_i(x_k,y_k)=0 \\ N_j(x_i,y_i)=0, & N_j(x_j,y_j)=1, & N_j(x_k,y_k)=0 \\ \cdots=0 & \cdots=0 & N_k(x_k,y_k)=1 \end{cases}$$

并有：$N_i+N_j+N_k=1$　由 $\delta=\begin{bmatrix} N_i & & \vdots \\ & N_i & \vdots \end{bmatrix}[A]^{-1}$

$\longrightarrow$ 显然 $N_i=N_j=N_k$ 时 $\rightarrow$ 为 各点位移相同