第五章例题2

Friday, May 12, 2023 3:26 PM

例5.10 研究系统 $\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2 - x_1^2 x_2 \end{cases}$ 的原点稳定性

解：

我们构造函数 $L(x_1, x_2)$

有：$\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial L}{\partial x_1}\dot{x}_1 + \frac{\partial L}{\partial x_2}\dot{x}_2$，则代入有：

$$\dot{L} = \frac{\partial L}{\partial x_1}(-x_1 + x_2) + \frac{\partial L}{\partial x_2}(-x_1 - x_2 - x_1^2 x_2)$$

$$= -\frac{\partial L}{\partial x_1}(x_1 - x_2) - \frac{\partial L}{\partial x_2}(x_1 + x_2 + x_1^2 x_2)$$

取：$\frac{\partial L}{\partial x_1}(x_2 - x_1) = \frac{\partial L}{\partial x_2}(x_1 + x_2 + x_1^2 x_2)$

取 $L = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) \longrightarrow$ 保证正定性，

有：$\frac{\partial L}{\partial x_1} = x_1$，$\frac{\partial L}{\partial x_2} = x_2$，

则：$\dot{L} = -x_1(x_1 - x_2) - x_2(x_1 + x_2 + x_1^2 x_2)$

$$= -x_1^2 \cancel{+ x_1 x_2} \cancel{- x_1 x_2} - x_2^2 - x_1^2 x_2^2 < 0$$，负定，

我们只需证：L 正定，显然成立，故系统是稳定的。

例5.11，使用李亚普诺夫近似法研究

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - a x_2 - x_1^2 x_2 \end{cases}$$

研究近似系统：舍去 $-x_1^2 x_2$ 项

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & 1 \\ -1 & -a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$，特征值

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda + a \end{vmatrix} = \lambda^2 + a\lambda + 1 = 0$$，

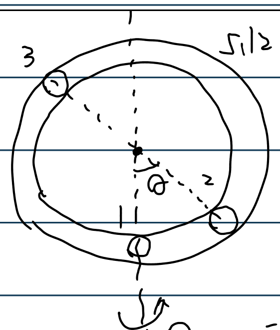
因而：λ $-a \pm \sqrt{a^2-4}$ —

因而：$\lambda = \dfrac{-a\pm\sqrt{a^2-4}}{2}$

有：$a>0$时：两个特征根实部均负，则系统稳定

$a<0$时，两特征根实部均正，不稳定

$a=0$时，稳定性不能直接判断获取。



5.12，如图系统，分析三个平衡点的不稳定性条件(19)题)

由于系统的微分方程：

$$\begin{cases} \dot\theta = \omega \\ \dot\omega = -\left(\dfrac{g}{r} - \Omega^2\cos\theta\right)\sin\theta \end{cases}$$

三个平衡位置为：$\omega=0,\ \theta$

$$\theta_{s_1}=0,\quad \theta_{s_2}=\arccos\frac{g}{\Omega^2 r},\quad \theta_{s_3}=\pi$$

我们取扰动为：

$$\dot x_1 = \dot\theta-\dot\theta_s = \omega-\omega_s = x_2$$

建立：泰勒展开并取一阶线性项，有：　　故 $\dot x_1 = x_2$

注意：不取 $\dot\omega_s$ 或 $\dot\theta_s=0$

$$\begin{cases} \dot x_1 = x_2 \\ \dot\omega = -\dfrac{g}{r}\sin\theta + \Omega^2\sin\theta\cos\theta \end{cases}$$

将$\sin\theta$展开

$$= -\frac{g}{r}\left(\sin\theta_s + \cos\theta_s\cdot(\theta-\theta_s)\right) + \Omega^2\left[\sin\theta_s+\cos\theta_s(\theta-\theta_s)\right]\left[\cos\theta_s-\sin\theta_s(\theta-\theta_s)\right]$$

$$= -\frac{g}{r}\left(\sin\theta_s + \cos\theta_s\cdot x_1\right) + \Omega^2\left(\sin\theta_s+\cos\theta_s x_1\right)\left(\cos\theta_s-\sin\theta_s x_1\right)$$

而：$\dot x_2 = \dot\omega - \dot\omega_s \Rightarrow$ 其中 $\dot\omega_s = -\dfrac{g}{r}\sin\theta_s + \Omega^2\sin\theta_s\cos\theta_s$

则：$\dot x_2 = -\dfrac{g}{r}\cos\theta_s x_1 + \Omega^2\left[\cancel{\sin\theta_s\cos\theta_s} + x_1(\cos^2\theta_s-\sin^2\theta_s) - x_1^2\sin\theta_s\cos\theta_s\right]$

这项是小量的平方，略去

$$= -\frac{g}{r}\cos\theta_s x_1 + \Omega^2 x_1\cos 2\theta_s$$

则方程（扰动方程）变为：

$$\bigstar\ \begin{cases} \dot x_1 = x_2 \\ \dot x_2 = \left[\Omega^2\cos2\theta_s - \dfrac{g}{r}\cos\theta_s\right]x_1 \end{cases}$$

因而得到系统的特征方程。

$\dot{X}_2 = [\Omega^2\cos 2\theta_s - \frac{g}{r}\cos\theta_s] X_1$ 　　因而得到系统的特征方程：

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & 1 \\ \Omega^2\cos 2\theta_s - \frac{g}{r}\cos\theta_s & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ 由 $|\lambda E - A| = 0$

$$\therefore \boxed{\lambda^2 - \Omega^2\cos 2\theta_s + \frac{g}{r}\cos\theta_s = 0}$$

$$\therefore \lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{\Omega^2\cos 2\theta_s - \frac{g}{r}\cos\theta_s}$$

该式为系统的特征方程；可分别根据特征方程根判断稳定条件。

因此：1) 对 $\theta_s = \theta_{s1} = 0$, $\omega_s = 0$, $\lambda^2 - (\Omega^2 - \frac{g}{r}) = 0$, $\therefore \Omega > \sqrt{\frac{g}{r}}$ 时有存在正实根，不稳定

2). $\theta_s = \theta_{s2}$, $\omega_s = 0$, …

3). $\theta_s = \theta_{s3}$, $\omega_s = 0$;