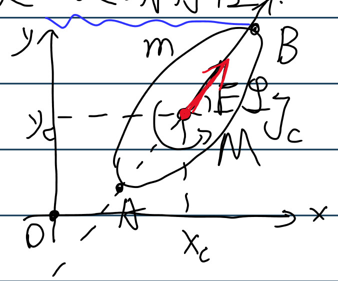
例题1.6

Friday, March 31, 2023 3:07 PM

如图，质量为m的雪橇，对其质心轴的转动惯量J_c，因雪橇速度始终沿AB，在xOy平面运动，其上有AB方向力F，力偶M，设F,M,t均为已知函数，确定其运动方程。



解：由于受非完整约束，不满足Lagrange方程，

可用罗斯方程：

受非完整约束：

三自由度 x, y, φ，$k=3$

则有：$\tan\varphi = \frac{\delta y}{\delta x}$ 即：$\frac{\partial x}{\partial t}\tan\varphi - \frac{\partial y}{\partial t} = 0$

或：$\delta x\tan\varphi - \delta y = 0$

罗斯方程为：$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j + \sum_{r=1}^{m}\lambda_r a_{rj}$ $(m=1)$

其中：有：$a_{11} = \tan\varphi$

$a_{12} = -1$

$a_{13} = 0$ (对φ导数)，而 $T = \frac{1}{2}m(\dot x^2 + \dot y^2) + \frac{1}{2}J_c\dot\varphi^2$

难点：广义力的获取方法：

虚功原理：$F\cos\varphi\,\delta x + F\sin\varphi\,\delta y + M\cdot\delta\varphi = \delta W = \sum_{j=1}^{3} Q_j\delta_j$ ($k=3$)

因此有：$Q_1 = F\cos\varphi$ $Q_2 = F\sin\varphi$ $Q_3 = M$

列方程：

$$\begin{cases} m\ddot x = F\cos\varphi + \lambda_1\tan\varphi & ① \\ m\ddot y = F\sin\varphi - \lambda_1 & ② \\ J_c\ddot\varphi = M & ③ \\ \dot x\tan\varphi - \dot y = 0 & ④ \end{cases}$$

注意仅有一个λ

联立约束方程：$\dot x\tan\varphi - \dot y = 0$ ④

这四个方程即为描述雪橇运动模型

下面讨论如何求解λ：联①②④：

需要注意的是：对 $\dot x\tan\varphi - \dot y = 0$ 两边求导时 ⇒ φ也要对时间求导：

对④导：

复合求导：

$$\ddot x\tan\varphi + \dot x\frac{1}{\cos^2\varphi}\dot\varphi - \ddot y = 0$$

故：$m\ddot x\tan\varphi + \frac{m\dot x}{\cos^2\varphi}\dot\varphi - m\ddot y = \cancel{F\sin\varphi} + \lambda_1\tan^2\varphi + m\dot x\sec^2\varphi\dot\varphi - \cancel{F\sin\varphi} + \lambda_1 = 0$

有：$\lambda_1(1+\tan^2\varphi) = -m\dot x\sec^2\varphi\dot\varphi$

注意符号

$$2\dot{x}\cdot m\dot{x}\tan\varphi + \frac{m\dot{x}}{\cos^2\varphi}\dot{\varphi} - m\ddot{y} = F\sin\varphi + \lambda_1\tan\varphi + \ldots$$

注意符号

有：$\lambda_1(1+\tan^2\varphi) = -m\dot{x}\sec^2\varphi\,\dot{\varphi}$

$$\lambda_1 \frac{1}{\cancel{\cos^2\varphi}} = -m\dot{x}\frac{1}{\cancel{\cos^2\varphi}}\dot{\varphi}$$ 即：$\lambda = -m\dot{x}\dot{\varphi}$

移项！

因此我们求得：$\lambda_1 = m\dot{x}\dot{\varphi}$

回代，得：

$$\begin{cases} m\ddot{x} = F\cos\varphi - m\dot{x}\dot{\varphi}\tan\varphi \\ m\ddot{y} = F\sin\varphi - m\dot{x}\dot{\varphi} \\ J_c\ddot{\varphi} = M \end{cases} \Longrightarrow$$

此时：利用 M 已知，J_c；首先：

$\varphi = \varphi(t)$ 可求出：

即：$\varphi(t) = \iint \frac{M}{J_c}\,dt\,dt$

之后：

由 $m\ddot{x} = F\cos\varphi + m\dot{x}\dot{\varphi}\tan\varphi$，解微分方程得 x，

即：$\ddot{x}_c = -\dot{x}_c\dot{\varphi}\tan\varphi + \frac{F}{m}\cos\varphi$

在如右方程中，为了解出 $x(t)$，可令 $\dot{x}_c = pq$

$$\dot{p}q + p\dot{q} + pq\dot{\varphi}\tan\varphi = \frac{F}{m}\cos\varphi$$

即：$(\dot{p} + p\tan\varphi\dot{\varphi})q = \frac{F}{m}\cos\varphi - p\dot{q}$

取：$p = \cos\varphi$，则：$\dot{p} = -\dot{\varphi}\sin\varphi$ 此时 q 前系数为 0

则：$\frac{F}{m}\cos\varphi - \cos\varphi\cdot\dot{q} = 0$ $\therefore \dot{q} = \frac{F}{m}$，$q = \frac{1}{m}\int_0^t F(t)\,dt + C$

假设为 $\psi(t) + C$

$\therefore$ 有：$\dot{x}_c = \left[\frac{1}{m}\int_0^t F(t)\,dt + C\right]\cos\varphi$ 同一次导数：

$= [\psi(t) + C]\cos\varphi$ —— 得：$\dot{y}_c = [\psi(t)+C]\sin\varphi$

故 $x_c = \int_0^t [\psi(t) + C]\cos\varphi\,dt$ $\quad y_c = \int_0^t [\psi(t)+C]\sin\varphi\,dt$

~~$y_c = \iint_0^t \left\{\frac{F}{m}\sin\varphi - m\dot{\varphi}[\psi(t)+C]\cos\varphi\right\}dt$~~ 为运动方程

$\varphi = \varphi(t)$