坐标系变换与基变换相关证明

Tuesday, April 23, 2024　　8:11 PM

①：基变换点积公式证明：(重点)

我们考虑新的坐标系，新坐标系仍有一组协变基 $g_{i'}$ 和一组逆变基 $g^{j'}$，此时，新坐标下仍有：

$$g_{i'}\cdot g^{j'}=\delta^{j'}_{i'}=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$$

此时，由：

$$g_{i'}=\beta^{j}_{i'}g_j\ ,\quad g^{k'}=\beta^{k'}_{l}g^{l}$$

则有：

$$g_{i'}\cdot g^{k'}=\beta^{j}_{i'}g_j\,\beta^{k'}_{l}g^{l}=\boxed{\beta^{j}_{i'}\beta^{k'}_{l}\delta^{l}_{j}=\delta^{k'}_{i'}}$$

我们取两个原坐标系的协变基，逆变基顺序相同，即：$j=l=j$，代入有：

$$\boxed{\beta^{j}_{i'}\beta^{k'}_{j}=\delta^{k'}_{i'}=\begin{cases}1 & i'=k'\\ 0 & i'\neq k'\end{cases}}$$

为基变换点乘公式

另外，在直角坐标系下，两个坐标间为协变基和逆变基，故显然满足要求(即 $g^{i'}$ 和 $g_{i'}$ 一致)

对于新基，只需：$g_i=\beta^{j'}_{i}g_{j'}$　　$g^{k}=\beta^{k}_{l'}g^{l'}$

则：

$$\beta^{j'}_{i}\beta^{k}_{l'}\delta^{l'}_{j'}=\delta^{k}_{i}\ ,\quad \beta^{j'}_{i}\beta^{k}_{j'}=\delta^{k}_{i}$$

则：$\beta_i^{j'}\beta_{l'}^{k}\delta_{j'}^{l'}=\delta_i^k \longrightarrow \beta_i^{j'}\beta_{j'}^{k}=\delta_i^k$

② 基矢量变换系数的偏导数意义

旧坐标系 $g_i=\frac{\partial R}{\partial x^i}$，新坐标系 $g_{i'}=\frac{\partial R}{\partial x^{i'}}$，

由于 $x^{j'}$ 与 x^i 线性无关，则：

$$g_{j'}=\frac{\partial R}{\partial x^i}\cdot\frac{\partial x^i}{\partial x^{j'}}=g_i\cdot\frac{\partial x^i}{\partial x^{j'}},$$

得关系：$\boxed{\beta^i_{j'}=\frac{\partial x^i}{\partial x^{j'}}}$ ☆