例3. 中心流形计算实例

Monday, June 19, 2023 1:51 AM

例1. 确定系统的中心流形

$$\begin{cases} \dot{u} = -u^3 \\ \dot{v} = -v \end{cases} \quad (7)$$

有：$\frac{du}{dt} = -u^3$

$\therefore -\frac{1}{u^3}du = dt$

则：$-\frac{1}{2}\frac{1}{u^2}\Big|_0^u = t$

而：取 $v = h(u)$，有：

$$\frac{dh}{dt} = \frac{dh}{du}\cdot\frac{du}{dt} = -h(u)$$

则：$h'(u)\cdot -u^3 = -h(u)$ ①

$$\therefore \int_0^u \frac{1}{h(u)}h'(u) = \int_0^u \frac{1}{u^3}du = \int_0^u d(\ln(h(u)))$$

此时有：

$$\ln(h(u))\Big|_0^u = \frac{1}{2u^2} \longrightarrow \frac{h(u)}{h(0)} = e^{\frac{1}{2u^2}} \longrightarrow \boxed{h(u) = h(0)\,e^{\frac{1}{2u^2}}}$$

(由①可得) $\longrightarrow$ 有：$h(u) = \begin{cases} Ce^{\frac{1}{2u^2}} & u \neq 0 \\ 0 & u = 0 \end{cases}$

例2. 确定系统的中心流形，其中：

$$\begin{cases} u' = -uv \\ v' = -v + au^2, \end{cases}$$

解：令 $v = h(u)$，则：$\frac{du}{dt} = uh(u)$

且有：

$$v' = -v + au^2$$

$\therefore$ 有：$\frac{dh}{du}(-uh(u)) = -h(u) + au^2$ 该式不易直接分离变量求解

因而使用：

$$h'(u)\cdot(-uh(u)) + h(u) - au^2 = 0$$ 进行列写.

初始条件为 $h(0) = 0$，$h'(0) = 0$ (即零次、一次项系数为0)

此时求解方程㊍，不能精确解 $\longrightarrow$ 可采用数值方法。

也可采用渐近展开式：

此时求解方程⊛，不能精确解 ⟶ 可采用数值方法。

也可采用渐近展开式：

设 $h(u)$ 展开式： $h(u)=C_2u^2+C_3u^3+O(u^4)$

$$(-2C_2u^2-3C_3u^3+1)(C_2u^2+C_3u^3)-au^2=0$$

$$(-2C_2u^2-3C_3u^3+1)(C_2+C_3u)=a$$

???

令： $C_2=a$， $C_3=0$???