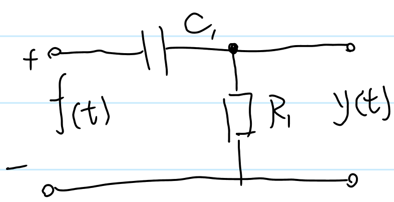
卷积法的推导

Monday, December 11, 2023 12:43 PM

对于一般的电路微分方程，形式：

$$a_n\frac{d^n y}{dt^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}+\cdots+a_n y(t)=b_m\frac{d^m f(t)}{dt^m}+b_{m-1}\frac{d^{m-1}f(t)}{dt^{m-1}}+\cdots+b_0 f(t)$$

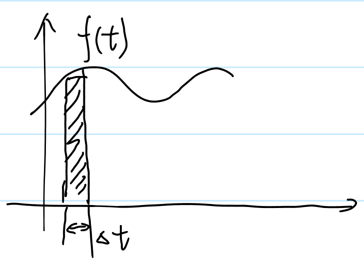
其中，一个系统在冲激响应下



有 $y(t)=iR_1=\frac{d(f(t)-y(t))}{dt}R_1C$

$$CR_1\frac{dy}{dt}+y(t)=\cancel{RC}\frac{df(t)}{dt}\Rightarrow\frac{dy}{dt}+\frac{1}{RC}y(t)=\frac{df}{dt}$$

其中：零输入响应：$y(0)=0$，零状态响应：$f=0$。



对于激励 $f(t)$，函数如图可分解为一系列的脉冲激励之和。

由于 $f(t_0)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t-t_0)\,dt$，(其余时刻为0)

δ函数性质

$f(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)\,d\tau$ 为任一时刻的激励

从而：由线性系统的积分性质，若 $\delta(t)$ 产生的响应 $h(t)$，即：

$\delta(t)\to h(t)$，

则：$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)\,d\tau \longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)h(t-\tau)\,d\tau$

故 $y=\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)h(t-\tau)\,d\tau$ 可求出响应。