大数定律证明

Tuesday, December 12, 2023 12:03 PM

辛钦大数①：设 X_1, X_2 相互独立且服从同一分布，且方差 σ^2 存在，

由于

$$E\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E(X_k) = \frac{1}{n}\cdot n\mu = \mu$$

而：

$$D\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \frac{1}{n^2} D\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)$$

由方差性质，当 X_1, X_2 独立时 $D(X_1+X_2)=D(X_1)+D(X_2)$

$$= \frac{1}{n^2}\cdot\sum_{k=1}^{n} D(X_k) = \frac{\sigma^2}{n} \to \sigma'^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

从而：有切比雪夫不等式：$P\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \mu \geq \varepsilon\right\} \leq \frac{\sigma'^2}{\varepsilon^2}$，从而有：

显然：当 ε 足够小时，则：$P\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \mu \geq \varepsilon\right\} \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$

我们取数据总量 n 足够大，则显有：

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k}{n} - \mu\right| \geq \varepsilon\right\} \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}，即：\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k}{n} - \mu\right| < \varepsilon\right\} \geq 1 - \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} \to 1$$

显然 $n\to\infty$ 时：$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k}{n} - \mu\right| < \varepsilon\right\} = 1$，即：$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow{P} \mu$

②、伯努利大数定律

对独立重复试验：即：$f_A \sim b(n,p)$ 为发生次数

显有：$f_A = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$，其中：$X_i = \begin{cases} 0，不发生 \\ 1，发生 \end{cases}$

从而：由于

$E(X_i) = p$，

$D(X_i) = p^2(1-p) + (1-p)^2 p$

$= p[p - p^2 + 1 - 2p + p^2] = p(1-p)$

X_i	0	1
$P(X_i)$	$1-p$	p

故：$E(f_n) = n\cdot p$，$D(f_n) = np(1-p)$ $\Rightarrow$ 显然：同上有：$\lim_{n\to\infty}\{|f_A - np| \geq \varepsilon\} \leq \frac{np(1-p)}{\varepsilon^2}$

不是收敛于一个确定值 这是由于差值变大但比例减小

$D(f_n)=np(1-p)$

不是收敛于一个确定值，　这是由于差值变大但比例减小

显然考虑 $\frac{f_n}{n}$，则：$E\left(\frac{f_n}{n}\right)=p$，

$D\left(\frac{f_n}{n}\right)=\frac{p(1-p)}{n}$，$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{f_n}{n}-p\right|\geq\varepsilon\right\}\leq\frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}$.

当 $n\to\infty$ 时，显有：$\lim\limits_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{f_n}{n}-p\right|<\varepsilon\right\}=1$，得证。