Cramer 法则证明

Thursday, August 24, 2023 3:44 PM

对线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}$$

其中 $D=|a_{ij}|\neq 0$,

则: $x_j=\dfrac{D^{(j)}}{D}$ $j=1,2,\cdots,n$,

其中: $D^{(j)}$ 为将 j 列换 b_j 的行列式.

①首先证解的存在性:

我们有:

$$D^{(j)}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & & b_2 & & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

按列展开 $\Longrightarrow$ $D^{(j)}=b_1A_{1j}+b_2A_{2j}+\cdots+b_nA_{nj}$

此时: 只要说明 x_j 是对应解即可:

$D^{(j)}=b_1A_{1j}+b_2A_{2j}+\cdots+b_nA_{nj}$ 则:

$$a_{i1}x_1+\cdots+a_{in}x_n=a_{i1}\frac{D^{(1)}}{D}+\cdots a_{in}\frac{D^{(n)}}{D}$$

$$\begin{aligned}=\;&\frac{a_{i1}}{D}(b_1A_{11}+b_2A_{21}+\cdots+b_nA_{n1})\\ &+\frac{a_{i2}}{D}(b_1A_{12}+b_2A_{22}+\cdots+b_nA_{n2})\\ &+\frac{a_{i3}}{D}(b_1A_{13}+b_2A_{23}+\cdots+b_nA_{n3})\\ &+\cdots\frac{a_{in}}{D}(b_1A_{1n}+b_2A_{2n}+b_nA_{nn})\end{aligned}$$

$$\overset{\text{重整}}{=}\frac{1}{D}\left[\begin{aligned}&b_1\underbrace{(a_{i1}A_{11}+a_{i2}A_{12}+\cdots+a_{in}A_{1n})}_{=0}\\ &+b_2\underbrace{(a_{i1}A_{21}+a_{i2}A_{22}+\cdots+a_{in}A_{2n})}_{=0}\\ &+b_i(a_{i1}A_{i1}+\cdots+a_{in}A_{in})\\ &+b_n\underbrace{(a_{i1}A_{11}+\cdots+a_{in}A_{nn})}_{=0}\end{aligned}\right]$$

由定理:

有: 本列的元素与另一列元素代数余子式乘积之和为0

而与本列元素的代数余子式 $\longrightarrow D$,

则: 原式

$$=\frac{b_i}{D}(a_{i1}A_{11}+\cdots+a_{in}A_{in})=b_i$$

故 $x_j=\dfrac{D^{(j)}}{D}$ 是方程组的解.

②: 证明解的唯一性:

我们 设 $x_1=c_1, x_2=c_2\cdots\cdots x_n=c_n$ 是线性方程组的解,

我们 设 $x_1=c_1,\ x_2=c_2 \cdots\cdots x_n=c_n$ 是线性方程组的解，

则有：

$$\begin{cases} a_{11}c_1+a_{12}c_2+\cdots+a_{1n}c_n=b_1 & ① \\ a_{21}c_1+a_{22}c_2+\cdots+a_{2n}c_n=b_2 & ② \\ \quad\vdots & \vdots \\ a_{n1}c_1+a_{n2}c_2+\cdots+a_{nn}c_n=b_n & ⓝ \end{cases}$$

我们取其中第j列元素的代数余子式 $A_{1j}, A_{2j}\cdots\cdots A_{nj}$ 分别乘①②…ⓝ，

有：

$$\begin{cases} a_{11}A_{1j}c_1+a_{12}A_{1j}c_2+\cdots+a_{1n}A_{1j}c_n=A_{1j}b_1 \\ a_{21}A_{2j}c_1+\cdots\quad+a_{2n}A_{2j}c_n=A_{2j}b_2 \\ \quad\vdots \\ a_{n1}A_{nj}c_1+a_{n2}A_{nj}c_2+\cdots+a_{nn}A_{nj}c_n=A_{nj}b_n \end{cases}$$

相加有：

仅有第j项不为0

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{n}a_{k1}A_{kj}}_{=0}c_1+\underbrace{\sum_{k=1}^{n}a_{k2}A_{kj}}_{=0}c_2+\cdots+\sum_{k=1}^{n}a_{kn}A_{kj}c_n=\underbrace{\sum_{k=1}^{n}A_{kj}b_k}_{=D^{(j)}}.$$

右端项是 $D^{(j)}$ 沿第j列展开式，而左侧为

$$\sum_{k=1}^{n}a_{kj}A_{kj}c_j=Dc_j=D^{(j)}$$

故有：$c_j=\dfrac{D^{(j)}}{D}$

都是唯一的，