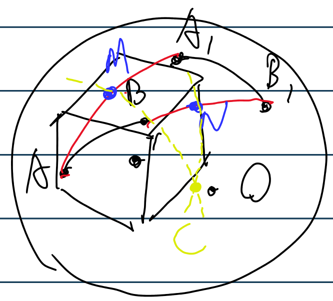
欧拉定理证明

Sunday, April 9, 2023   9:57 PM

欧拉定理：作定点运动时，刚体任何位置的变化，可由此刚体绕过定点的某轴转动一次实现

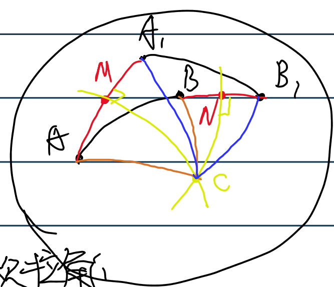


解：设刚体定点运动过程中，各点分别在以O为中心球上运动，只需使用一段圆弧 $\overset{\frown}{AB}$ 代表运动轨迹，

首先做出弧 $\overset{\frown}{AA_1}$，$\overset{\frown}{BB_1}$，取 $\overset{\frown}{AA_1}$ 中点M，$\overset{\frown}{BB_1}$ 中点N，

然后过M做 $CM\perp AA_1$ 且 $CN\perp BB_1$

经连接得球面三角形 ABC 和 A_1B_1C



显然，C点是中垂线的交线，则

$AC=A_1C,\ BC=B_1C,\ AB=A_1B_1$

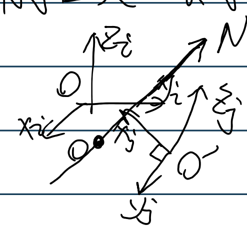
$\therefore \triangle ABC \cong \triangle A_1B_1C$ 绕C轴的

显然 $\triangle A_1B_1C$ 可以由 $\triangle ABC$ 经过一次旋转而得到。

方向余弦与欧拉角

在进行欧拉角旋转，$Ox_jy_jz_j$ 相对 $Ox_iy_iz_i$ 的欧拉轴 ON 可以使用单位矢 $\vec{n}$ 表示

此时：给出 ON，θ，



为求解：$[C^{ij}]$，取一z轴为 $\overline{ON}$ 的坐标系 $Ox_ky_kz_k$，

并将其连同 $x_iy_iz_i$ 旋转θ得到 $O'x_jy_jz_j$，设 $Ox_ky_kz_k$ 转至 $Ox_my_mz_m$，则：

$$[C^{ik}]=[C^{jm}],\ =[C^{mj}]^T$$

则：

$$[C^{ij}]=[C^{ik}][C^{kj}]=[C^{ik}][C^{km}][C^{mj}]$$

利用 $[C^{km}]$ 是绕z轴转θ角，即：

$$[C^{km}]=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & \\ \sin\theta & \cos\theta & \\ & & 1\end{bmatrix},$$

而：$[C_{ij}]=[C^{ik}][C^{km}][C^{ik}]^T$，

在i系下表示

我们设：ON的单位矢量 $\vec{n}=(\vec{n_1},\vec{n_2},\vec{n_3})$，其中：$\vec{n_i}=\cos\langle x_i,z_k\rangle$，$\vec{n_j}=\cos\langle y_j,z_k\rangle$，

$n_3=\vec{n_k}=\cos\langle x_k,z_k\rangle$

则：

$$[C^{ik}]=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & n_1\\ a_{21} & a_{22} & n_2\\ a_{31} & a_{32} & n_3\end{bmatrix}$$

则：

则:

$$[C_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & n_1 \\ a_{21} & a_{22} & n_2 \\ a_{31} & a_{32} & n_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & \\ \sin\theta & \cos\theta & \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}\cos\theta + a_{12}\sin\theta & -a_{11}\sin\theta + a_{12}\cos\theta & n_1 \\ a_{21}\cos\theta + a_{22}\sin\theta & -a_{21}\sin\theta + a_{22}\cos\theta & n_2 \\ a_{31}\cos\theta + a_{32}\sin\theta & -a_{31}\sin\theta + a_{32}\cos\theta & n_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{bmatrix}$$

?

$$= \begin{bmatrix} (a_{11}^2 + a_{12}^2)\cos\theta + n_1^2 & \cdots & \\ (a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22})\cos\theta + \underbrace{(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}_{=n_3}\sin\theta + n_1 n_2 & (a_{21}^2 + a_{22}^2)\cos\theta + n_2^2 & \cdots \\ (a_{11}a_{31} + a_{12}a_{32})\cos\theta + \underbrace{(a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31})}_{=-n_2}\sin\theta + n_1 n_3 & (a_{21}a_{31} + a_{22}a_{32})\cos\theta + (a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})\sin\theta + n_2 n_3 & (a_{31}^2 + a_{32}^2)\cos\theta + n_3^2 \end{bmatrix}$$

由于方向余弦阵为正交阵

有
$$\begin{cases} a_{11}^2 + a_{12}^2 + n_1^2 = 1 \\ a_{21}^2 + a_{22}^2 + n_2^2 = 1 \\ a_{31}^2 + a_{32}^2 + n_3^2 = 1 \\ a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} + n_1 n_2 = 0 \\ a_{11}a_{31} + a_{12}a_{31} + n_1 n_3 = 0 \\ \vdots \end{cases}$$

重新一次

$e_m^i e_n^i = \delta_{mn}$ 《刚体空间运动推导》

代入有:

$$\begin{bmatrix} n_1^2(1-\cos\theta) + \cos\theta & n_1 n_2(1-\cos\theta) - n_3\sin\theta & n_1 n_3(1-\cos\theta) + n_2\sin\theta \\ n_1 n_2(1-\cos\theta) + n_3\sin\theta & n_2^2(1-\cos\theta) + \cos\theta & n_2 n_3(1-\cos\theta) - n_1\sin\theta \\ n_1 n_3(1-\cos\theta) - n_2\sin\theta & n_2 n_3(1-\cos\theta) + n_1\sin\theta & n_3^2(1-\cos\theta) + \cos\theta \end{bmatrix}$$

由此可推导出:

$$\begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{2}(C_{11} + C_{22} + C_{33} - 1) \\ \sin\theta = \pm\frac{1}{2}\sqrt{(C_{11} + C_{22} + C_{33} + 1)(3 - C_{11} - C_{22} - C_{33})} \\ n_1 = \frac{C_{32} - C_{23}}{2\sin\theta} \\ n_2 = \frac{C_{13} - C_{31}}{2\sin\theta} \\ n_3 = \frac{C_{21} - C_{12}}{2\sin\theta} \end{cases}$$