小挠度薄板问题的里兹法和伽辽金法

Wednesday, October 4, 2023 2:45 PM

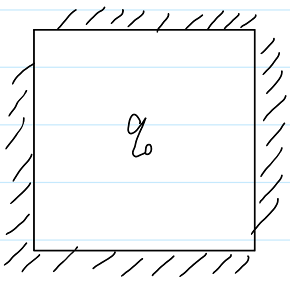
① 对里兹法，我们选用三角级数与板条弹性曲线为挠度函数.

由 $$\Pi = U - W = \frac{D}{2}\iint_F \left\{(\nabla^2 w)^2 - 2(1-\nu)\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2\right]\right\} dxdy$$
$$- \iint_F q w \, dxdy + \int_{L_f} M_n \frac{\partial w}{\partial n} ds - \int_{L_f}\left(Q_n + \frac{\partial M_{ns}}{\partial s}\right) w \, ds$$ ☆

总势能 Π 是 $a_1, a_2 \cdots a_n$ 的一个二次函数，有：

$$\delta\Pi = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Pi}{\partial a_i}\delta a_i = 0 \Longrightarrow \frac{\partial\Pi}{\partial a_i} = 0,$$

以四边固定的矩形板受 q_0 作用为例，有：



$x=0$，$x=a$ 处

$w = \frac{\partial w}{\partial x} = 0$

$y=0$，$y=b$ 处

$w = \frac{\partial w}{\partial y} = 0$，选取挠度函数为

$$w = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}\left(1-\cos\frac{2m\pi x}{a}\right)\left(1-\cos\frac{2m\pi y}{b}\right)$$ 满足边界条件.

将 w 代入总势能式中，积分得到总势能表达式，其中 a_{mn} 为待定系数

令 $\frac{\delta\Pi}{\delta a_i} = 0$，得到 a_{mn} 的表达式（其中，只需取前几项），

---

② 伽辽金法中，

有变分方程：$\iint_F (D\nabla^2\nabla^2 w - q)\,\delta w \, dxdy = 0$，

而设挠度 $w = \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i(x,y)$，则：$\delta w = \sum_{i=1}^{n} \delta a_i \varphi_i(x,y)$，代入上式有：

$\sum_{i=1}^{n} \iint_F (D\nabla^2\nabla^2 w - q)\,\delta a_i \varphi_i \, dxdy = 0$，由于 δa_i 任意，则有：

$$\sum_{i=1}^{n} \iint_F (D\nabla^2\nabla^2 w - q)\,\varphi_i(x,y)\, dxdy = 0, \quad i=1,2,\cdots n,$$

上式表明，不平衡残差 $(D\nabla^2\nabla^2 w - q)$ 在 φ_i 上做功积分为 0.

仍然使用 $\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}\left(1-\cos\frac{2m\pi x}{a}\right)\left(1-\cos\frac{2m\pi y}{b}\right) = w$ 为挠度函数

代入上述方程中积分后可得结果
