

随机变量函数分布公式证明

Saturday, November 18, 2023 10:04 AM

设随机变量 X 具有概率密度 $f_X(x)$, 且有:

$Y = g(X)$, 设有 $X = h(Y)$ 是 g 的反函数, 且 $g'(x) > 0$ (即递增)

设 $F_X(x) = P\{X \leq x\}$ 为 X 的分布函数,

$$\text{则 } F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{g(X) \leq y\}$$

$$= P\{X \leq h(y)\} = \underline{F_X[h(y)]} \rightarrow X \text{ 分布函数}$$

此时, 对 y 求导, 有:

$$f_Y(y) = \begin{cases} [h'(y)] f_X[h(y)] & g_{\min} < y < g_{\max} \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

* 需要说明: 这是 $g'(x) > 0$ 情况

同样对于 $g'(x) < 0$ 情况可得:

$$f_Y(x) = \int [-h'(y)] f_X[h(y)] \quad \text{其中 } f_X \text{ 为 } X \text{ 分布函数}$$

即有:

$$f_Y(y) = |h'(y)| f_X[h(y)]$$

($g'(x)$ 恒 > 0 或
 $g'(x)$ 恒 < 0)