应力理论证明例题

Monday, June 26, 2023 4:32 PM

例1. 证：$\frac{d}{dt}F^{-1} = -F^{-1}l$ ⟹ 重要公式：

证明：

$\dot{F}^{-1} = -F^{-1}l$

由 $l = \dot{F}F^{-1}$

另：$l = \dot{F}F^{-1} \Rightarrow \underbrace{\dot{F} = Fl}$

※利用 $FF^{-1} = I$

$$\therefore \underbrace{\frac{d}{dt}(FF^{-1}) = \dot{F}F^{-1} + F\frac{d}{dt}(F^{-1}) = 0}$$ ☆

有 $\underbrace{\frac{d}{dt}F^{-1} = \dot{F}^{-1} = -F^{-1}\dot{F}F^{-1}}, = -F^{-1}l$ ✓

例2. 证：$\frac{d}{dt}(F^{-T}) = -l^TF^{-T}$

$$\frac{d}{dt}(F^{-T}) = \left[\frac{d}{dt}(F^{-1})\right]^T = (-F^{-1}l)^T$$

$$= \underbrace{-l^TF^{-T}}$$ 得证

例3. 证：$\dot{E} = F^T \underbrace{d} F$ ⟹ 其中：d 为 $\frac{1}{2}(l^T+l)$ 为 l 的对称分量

而：由：$E = \frac{1}{2}(F^TF - I)$ 为格林应变

有：$\dot{E} = \frac{1}{2}(\dot{F}^TF + F^T\dot{F})$ 有：由 $\dot{F} = lF$

$\dot{F}^T = F^Tl^T$

$$= \frac{1}{2}(F^Tl^TF + F^TlF)$$

$$= F^T\cdot\frac{1}{2}(l^T+l)F = F^TdF$$

例4. 证：$\dot{e} = d - l^Te - el$

证明:有: $e=\frac{1}{2}(I-B^{-1}) = \frac{1}{2}\left[I-(FF^T)^{-1}\right]$

则 $e=\frac{1}{2}\left[I-F^{-T}F^{-1}\right]$

有:

$\dot{e}=\frac{1}{2}\left[-\dot{F}^{-T}F^{-1}-F^{-T}\dot{F}^{-1}\right]$. 由: $\dot{F}^{-1}=-F^{-1}l$

$\dot{F}^{-T}=-l^TF^{-T}$

$=\frac{1}{2}\left[l^TF^{-T}F^{-1}+F^{-T}F^{-1}l\right]$

$=\frac{1}{2}\left[l+l^T+(F^{-T}F^{-1}-I)l+l^T(F^{-T}F^{-1}-I)\right]$

$=\frac{1}{2}(l+l^T)-\frac{1}{2}(I-(FF^T)^{-1})l-\frac{l^T}{2}(I-(FF^T)^{-1})$

$= d-el-l^Te$,

例5: 证: $\dot{B}=lB+Bl^T$

解: $B=FF^T$

$\therefore \dot{B}=\dot{F}F^T+F\dot{F}^T$, 有: $l=\dot{F}F^{-1}$ 即: $\dot{F}=lF$

$(\dot{F})^T=F^Tl^T$

$\dot{B}=lFF^T+FF^Tl^T$

$=lB+Bl^T$ ✓

例6: $\dot{J}=J\cdot \mathrm{div}\, v = J\, tr(d)$

由于 $[J]J=\det F$, 有:

补充结论 (不予证明) $\boxed{\frac{\partial J}{\partial F}=J\cdot F^{-T}}$

$\boxed{\dot{J}=\frac{\partial J}{\partial F}:\dot{F}} = JF^{-T}:\dot{F}$.

$\|$

结论:

由 $A:BC=B^TA:C$

$=AC^T:B$

$J:\underbrace{\dot{F}F^{-1}}=J:l=tr(J\cdot l)$

$=J\,tr(d+\omega)$

$= AC^T : B$

$= J\,tr(d+g)$

由于 g 为反对称（对角线元素为0）

$= J\,tr(d)$

结论：$tr(d) = div\, v$

例7 证 $\frac{d}{dt}(dv) = div(v)\, dv$

$$\frac{d}{dt}(dv) = \frac{d}{dt}(J \cdot dV) = \dot{J}\, dV = J\, tr(d) \cdot dV$$

$$= tr(d)\, dv = div(v)\, dv$$