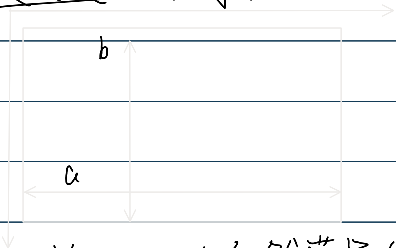
薄板弯曲问题的双三角级数解(附带例题)

Wednesday, September 20, 2023 11:35 AM

四边简支矩形薄板，



对矩形薄板的弯曲问题，

由于边界边件为：

$x=0$ 和 $x=a$ 处，$w=0,\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0$

$y=0$ 和 $y=b$ 处，$w=0,\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0$

我们取下列自然满足级数解：

$$w=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi x}{b},$$

代入：$\nabla^4 w=\frac{q}{D}$，则：

$$D\pi^4\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}\right)^2\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}=q(x,y) \quad ①$$

此时，将右侧展开，

$$q(x,y)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} q_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} \quad ②$$

两边乘 $\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}$ ⇒

$$q(x,y)\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}=q_{mn}\left(\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\right)^2,$$

注意分离变量方法 ⇒ 先分出 $d(\frac{\pi}{a}x)$ $d(\frac{\pi}{b}x)$

(查基本积分表) 由于：$\int_0^{\pi}\sin mx\sin nx=\begin{cases}0 & m\neq n\\ \frac{\pi}{2} & m=n\neq 0\end{cases}$，则：

因此开得：$\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{ab}{\pi^2}=\frac{ab}{4}$

$$\int_0^a\int_0^b q(x,y)\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}dxdy=\cancel{\frac{\pi}{2}\times\frac{\pi}{2}\times\frac{a}{\pi}\times\frac{b}{\pi}}=\frac{ab}{4}q_{mn}$$

∴故：
$$q_{mn}=\frac{4}{ab}\int_0^a\int_0^b q(x,y)\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}dxdy \quad ①$$

又：比较上式①②的系数：有：

$$q_{mn}=D\pi^4 A_{mn}\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^2 \Rightarrow A_{mn}=\frac{q_{mn}}{\pi^4 D\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^2}$$

则有：

$$w(x,y)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q_{mn}}{\pi^4 D\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^2}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}$$

(2-3) 为所求挠度的表达式。

(一般情况)。

例1、四边形简支矩形受均布载荷时：

$q(x,y)=q_0$，此时：$q_{mn}=\frac{4}{ab}\int_0^a\int_0^b q(x,y)\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}dxdy$

$q(x,y)=q_0$，此时：$q_{mn}=\dfrac{4}{ab}\displaystyle\int_0^a\int_0^b q(x,y)\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\,dxdy$

$$\xrightarrow{\text{代入}} = \frac{4q_0}{ab}\int_0^a\int_0^b \sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\,dxdy$$

$$= \frac{4q_0}{\cancel{ab}}\cdot\cancel{ab}\int_0^a\int_0^b \sin m\pi\frac{x}{a}\sin n\pi\frac{y}{b}\,d\left(\frac{x}{a}\right)d\left(\frac{y}{b}\right)$$

$$= 4q_0\,\frac{1}{\pi m}\cos m\pi\frac{x}{a}\Big|_0^a\cdot\frac{1}{\pi n}\cos n\pi\frac{y}{b}\Big|_0^b$$

$$= \frac{4q_0}{\pi^2 mn}(\cos m\pi-1)(\cos n\pi-1)$$ （其中：$m=1,3,\cdots\infty$，$n=1,3,\cdots\infty$）

其余时均为0.

则：$\cos m\pi=\cos n\pi=-1$，即有：$q_{mn}=\dfrac{16q_0}{mn\pi^2}$

因此：代入 $W(x,y)$ 表达式，

$$A_{mn}=\frac{16q_0}{\pi^6 D\,mn\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^2}$$ （$m=1,3,\cdots\infty$，$n=1,3,\cdots\infty$）

☆

$$W_{max}=\frac{16q_0}{\pi^6 D}\sum_{m=1,3,\cdots}^{\infty}\sum_{n=1,3,\cdots}^{\infty}\frac{1}{mn\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^2}\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

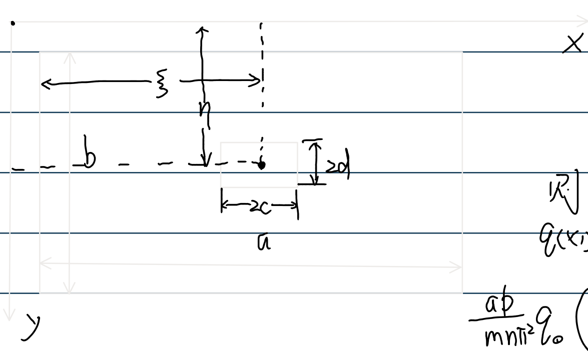
我们知道：$x=\frac{a}{2}$，$y=\frac{b}{2}$ 时，$\sin\left(\frac{m\pi}{2}\right)\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)$

则：$\longrightarrow$ $=(-1)^{\frac{m}{2}-\frac{1}{2}}\cdot(-1)^{\frac{n}{2}-\frac{1}{2}}=(-1)^{\frac{m+n}{2}-1}$

$$W_{max}=\frac{16q_0}{\pi^6 D}\sum_{m=1,3\cdots}^{\infty}\sum_{n=1,3,\cdots}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{m+n}{2}-1}}{mn\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)}$$ 为最大挠度，

需要说明：此级数有很快收敛速度，取前12项计算即可、

例2. 在板的局部面积上作用均布载荷（近似于一点作用载荷情况）



我们设载荷条件：

$x=\xi$，$y=\eta$ 处作用一集中力P

因P集中分布在 $2c$ 和 $2d$ 上，

此时：此部分载荷强度 $q_0=\dfrac{P}{4cd}$

则

$$q(x,y)=\int_{\eta-d}^{\eta+d}\int_{\xi-c}^{\xi+c} q_0\cdot\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\,dxdy.$$

$$\frac{ab}{mn\pi^2}q_0\left(\cos\frac{n\pi(\eta-d)}{b}-\cos\frac{n\pi(\eta+d)}{b}\right)\left(\cos\frac{n\pi(\xi-C)}{a}-\cos\frac{n\pi(\xi+c)}{a}\right)$$

由和差化积：$\cos a-\cos b=-2\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}$，

如 $=-2\sin\dfrac{m\pi\xi}{a}\sin\dfrac{m\pi c}{a}$

$$故\ q(x,y)=\frac{4q_0 ab}{mn\pi^2}\sin\frac{m\pi\xi}{a}\sin\frac{m\pi c}{a}\sin\frac{n\pi\eta}{b}\sin\frac{n\pi d}{b}$$

$\Longrightarrow$ 其中 $q_0=\dfrac{P}{4cd}$

代入：有：

故 $q(x,y) = mn\pi^2 \sin\frac{\cdots}{a}\sin\frac{\cdots}{a}\sin\frac{\cdots}{b}\sin\frac{\cdots}{b}$ $\Longrightarrow$ 其中 $q_0=\frac{P}{4cd}$

代入有：

$$A_{mn}=\frac{4P}{D\pi^6 cd\, mn\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)}\sin\frac{m\pi\xi}{a}\sin\frac{m\pi c}{a}\sin\frac{n\pi\eta}{b}\sin\frac{n\pi d}{b}$$

此时若取 $c\to 0, d\to 0$，则 $\sin\frac{m\pi c}{a}\sin\frac{n\pi c}{d}\to\frac{m\pi c}{a}\cdot\frac{n\pi d}{b}$

$$A_{mn}=\frac{4P}{D\pi^{\cancel{6}\,4}\cancel{cd}\,\cancel{mn}\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)}\times\frac{\cancel{mn}\,\cancel{\pi^2}\,\cancel{cd}}{ab}=\frac{4P}{D\pi^4 ab\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)}\sin\frac{m\pi\xi}{a}\sin\frac{n\pi\eta}{b}$$

从而

$$w=\frac{4P}{\pi^4 abD}\sum_{m=1,3,\cdots}^{\infty}\sum_{n=1,3,\cdots}^{\infty}\frac{\sin\frac{m\pi\xi}{a}\sin\frac{n\pi\eta}{b}}{\left[(m^2/a^2)+(n^2/b^2)\right]^2}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}$$

$P=1$时 $\Longrightarrow = k(x,y,\xi,\eta)$

其中 k 为影响函数，对于一个作用在 (ξ,η) 处的集中力 P 产生挠度为：

$$w=P(\xi,\eta)\,k(x,y,\xi,\eta)$$