齐次线性方程组的通解推导

Sunday, September 3, 2023 4:03 PM

对于线性方程组：$Ax=b$，我们取其增广矩阵

$$\hat{A}=\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & \cdots & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} & b_n \end{array}\right]$$

系数矩阵A的秩为r，则（行变换），将其变换成行阶梯型矩阵。（假设左上角r阶子式不为零）

则我们得行变换结果为：（显然 $\operatorname{rank}A\leq\operatorname{rank}\hat{A}$）

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & & & b_{1,r+1} & d_1 \\ & 1 & & b_{2,r+1} & d_2 \\ & & 1 & b_{r,r+1} & d_r \\ & & & & d_{r+1} \\ & & & & 0 \\ & & & & 0 \end{array}\right]$$

下方可由d_{r+1}消去

①：首先：$d_{r+1}\neq0$时，若：

$\operatorname{rank}A<\operatorname{rank}\hat{A}$

对应情况为第$r+1$行式中为 $0x_1+0x_2+\cdots+0x_n=d_{n+1}\neq0$，显然无解，

②：$d_{r+1}=0$时，若有：

$\operatorname{rank}\hat{A}=\operatorname{rank}A=r$，对应的同解方程组即为：

$$\begin{cases} x_1+b_{1,r+1}x_{r+1}+\cdots+b_{1n}x_n=d_1 \\ x_2+b_{2,r+1}x_{r+1}+\cdots+b_{2n}x_n=d_2 \\ \vdots \\ x_r+\underbrace{b_{r,r+1}x_{r+1}+\cdots+b_{rn}x_n}_{n-r}=d_n \end{cases}$$

由于系数矩阵是满秩的，此时 → 分情况

注意：r

即：

(1)：$\operatorname{rank}A=\operatorname{rank}\hat{A}=r=n$，此时方程直接变为：

是r行，$n-r$列的方程组

$$r\text{行}\left\{\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}}_{n\text{列}}\right.\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix}$$

解为：$\Rightarrow(x_1,x_2\cdots x_n)=(b_1,b_2,\cdots b_n)$.

$x_1=d_1$ $x_2=d_2$ $\cdots$ $x_n=d_n$ 为唯一解，

$\underbrace{\qquad\qquad}_{n\text{列}}$ $\begin{bmatrix} \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$

$x_1 = d_1 \quad x_2 = d_2 \quad \cdots \quad x_n = d_n$ 为唯一解，

(2)：$\operatorname{rank} \hat{A} = \operatorname{rank} A = r < n$ （✗）

此时：右端有 $x_{r+1}, x_{r+2}, \cdots x_n$ 项，则方程变为

$$\begin{cases} x_1 = d_1 - b_{1,r+1}x_{r+1} - \cdots - b_{1n}x_n \\ x_2 = d_2 - b_{2,r+1}x_{r+1} - \cdots - b_{2n}x_n \\ \vdots \\ x_r = d_r - b_{r,r+1}x_{r+1} - \cdots - b_{rn}x_n \end{cases} \Rightarrow$$

★此时我们取解为 $x_{r+1} = k_1$，
$x_{r+2} = k_2$
$\vdots$
$x_n = k_{n-r}$，则

则：得到方程组的通解；

$$\begin{cases} x_1 = d_1 - b_{1,r+1}k_1 - \cdots - b_{1n}k_{n-r} \\ x_2 = d_2 - b_{2,r+1}k_1 - \cdots - b_{2n}k_{n-r} \\ \vdots \\ x_r = d_r - b_{r,r+1}k_1 - \cdots - b_{rn}k_{n-r} \\ x_{r+1} = k_1 \\ \vdots \\ x_n = k_{n-r} \end{cases}$$

其中：$k_1, k_2, \cdots k_{n-r}$ 为任意常数