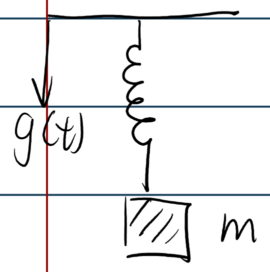
# 初始值问题和边界值问题

Thursday, June 26, 2025 12:09 PM

①：初始值问题




有：$m\dfrac{d^2y}{dt^2}+ky(t)=F(t)=F_0\cos\omega t$

$\rightarrow \ddot{y}+\omega_0^2 y(t)=F_0\cos\omega t$.

取 $y=A\cos\omega t$.

$A(\omega_0^2-\omega^2)\cos\omega t=F_0\cos\omega t$.

$\rightarrow A=\dfrac{F_0}{\omega_0^2-\omega^2} \rightarrow y=\dfrac{F_0}{\omega_0^2-\omega^2}\cos\omega t$,

其中 $\omega$ 为激动频率。

上式仅为一特解，因而对实际情况需考虑通解

$m\dfrac{d^2y}{dt^2}+ky(t)=0 \Rightarrow y=A\cos\omega_0 t$.

$\rightarrow y=A\cos\omega_0 t+\dfrac{F_0}{\omega_0^2-\omega}\cos\omega t$

考虑：对于脉冲函数 $F(t)=I_0\delta(t)$. $\delta(t)=\begin{cases}0, & t>0^+\\ \infty, & t=0\end{cases}$

$$\begin{cases} m\dfrac{d^2y}{dt^2}+ky(t)=I_0\delta(t) \\ y(0)=0, \quad \dot{y}(0)=0. \end{cases}$$

我们认为给定初始条件

$t\rightarrow 0^+ \begin{cases} y(0)=0 \\ \dot{y}(0)=\dfrac{I_0}{m} \end{cases}$ 而通解 $A\sin\omega_0 t+B\cos\omega t$,

代初条件

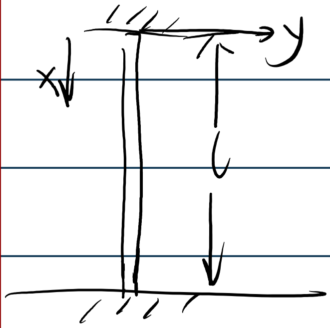
有 $A\omega_0=\dfrac{I_0}{m} \rightarrow$ 得：$y=\dfrac{I_0}{m\omega_0}\sin\omega_0 t=\dfrac{I_0}{\sqrt{mk}}\sin\sqrt{\dfrac{k}{m}}\,t$.

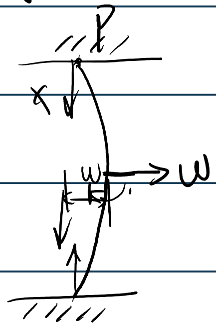
$E=\dfrac{1}{2}mv_0^2=\dfrac{1}{2}\dfrac{I_0^2}{m}$

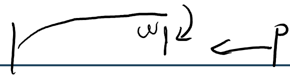
②. 边界值问题

## ② 边界值问题

对于压杆稳定问题：设变形y可看成弯曲变形，有：




$$\frac{d^2w}{dx^2}=\frac{M}{EI},$$

而：$M=-P\cdot w$,

得：$$\frac{d^2w}{dx^2}+\frac{P}{EI}w=0 \Rightarrow \frac{d^2w}{dx^2}+\lambda w=0$$

$$w=\sin(\sqrt{\lambda}x)=\sin\sqrt{\frac{P}{EI}}x \quad (\text{b.c. } y(0)=y(l)=0)$$

其中：$\lambda=\frac{P_c}{EI}$,

当有：

$$\lambda_n=\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \text{ 时，} (n=1,2,3,\cdots)$$

有：

$$P_c=\lambda EI=EI\frac{n^2\pi^2}{l^2} \longrightarrow P_{c_1}=\frac{\pi^2EI}{l^2}$$

此即为一阶临界应力公式；