第四, 五章例题题目

Thursday, October 12, 2023 10:58 PM

例1. 把 $\frac{1}{(1+z)^2}$ 展开成 z 幂级数.

方法1:

解: $f'(z) = -2\cdot\frac{1}{(1+z)^3}$

$$f''(z) = (-2)(-3)\frac{1}{(1+z)^4}$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(z) = (-1)^n (n+1)!\,\frac{1}{(1+z)^{n+2}}$$

则在 $z=-1$ 时有奇点,

此时: 取 $z_0=0$, 有: $f^{(n)}(z_0)=(-1)^n(n+1)!$

∴有:

$$\frac{1}{(1+z)^2} = 1+\frac{1}{1!}(-2)z+\cdots+\frac{1}{n!}(-1)^n(n+1)!$$

$$= 1-2z+3z^2-\cdots+(-1)^n z^n\cdot(n+1)$$

$$= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k z^k\cdot(k+1)$$

$|z|<1$. 必须写收敛半径.

方法2. $|z|<1$ 内解析

直换 换 z 为 $-z$,

即得:

$\frac{1}{1-z} = 1-z+z^2\cdots$

则平方即得;

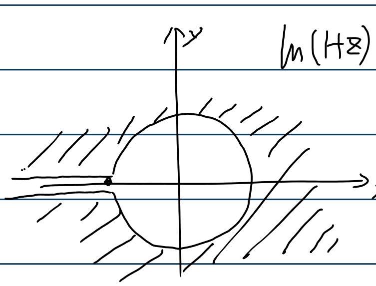
例2. 求对数函数的主值 $\ln(1+z)$ 在 $z=0$ 的展开式:

解: $\ln 1+\frac{1}{1}\frac{1}{1+z_0}\cdot z-\frac{1}{2!}\frac{1}{(1+z_0)^2}z^2+\frac{1}{3!}\frac{2!}{(1+z_0)^3}z^3+\cdots$

$$=0+z-\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{3}z^3-\cdots+\frac{1}{n}z^n\cdot(-1)^{n+1}$$

其中 $|1-z|>0$. $|z|<1$.

需要说明 $\ln z=\ln|z|+i\arg z$, 其中: $\arg z\in[0,\pi)$



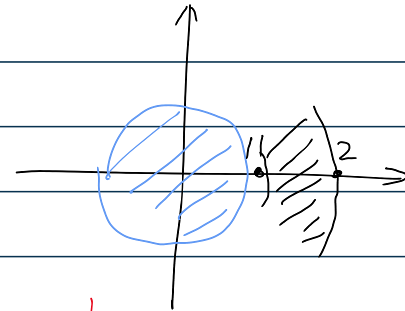
$\ln(1+z)$ 在 x 负半轴剪开的平面上是解析的, -1 是奇点,

即: 由 $z_0=0$, 而 -1 为奇点, 则在 $R<1$ 处,

均可展开为泰勒级数, 即: 收敛半径 $|z|=1$.

P132 例1. $f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)}$ 在圆环域展开;

P132 例1、$f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)}$ 在圆环域展开：



(1) $0<|z|<1$

解：

有：区域内解析，则 $\frac{1}{z^2-3z+2}$

正解：

仍然考虑拆分为分式 $=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{2}}+\frac{1}{1-z}$

$=-\frac{1}{2}\cdot\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{z}{2}\right)^n+\sum_{i=0}^{n}z^n$

(2)、$1<|z|<2$，有：由区域内解析但1,2点均不解析，由于 $\boxed{\text{区域内有不解析点} z=1}$，

则：$\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}$ 中：$\frac{1}{z-1}$ 不能展开，而 $\frac{1}{z-2}$ 仍可以展开；

∴ $\frac{1}{z-2}=-\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}}=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n$ 仍可展开。→ $\left|\frac{z}{2}\right|<1$，即收敛

$\frac{1}{z-1}=\frac{1}{z}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{z}}\right)=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n$

由于 $|z|>1$，则 $\frac{1}{1-z}$ 不收敛 $q=|z|>1$， ↳此时：$q=\left|\frac{1}{z}\right|<1$ 收敛

展开为洛朗级数 $=\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\cdots$，则原式展开为：$-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n$，

(3)、$|z|>2$ 时：$\frac{1}{1-\frac{z}{2}}$，$\frac{1}{1-z}$ 均不收敛，需单独展开.

从而有：

$$\frac{1}{z}\left(\frac{1}{1-\frac{2}{z}}\right)-\frac{1}{z}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{z}}\right)=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^n-\frac{1}{z}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n=\sum_{n=0}^{n}\left(\frac{2^n}{z^{n+1}}-\frac{1}{z^{n+1}}\right)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n-1}{z^{n+1}}=0+\frac{1}{z^2}+\frac{3}{z^3}+\frac{7}{z^4}+\cdots$$

例2. 将：

$z=z^3e^{\frac{1}{z}}$ 在 $0<|z|<+\infty$ 内展开成洛朗级数.

解：函数在除 $z=0$ 以外处处解析、

$e^{\frac{1}{z}}$ 仍可展开：由 $e^{\frac{1}{z}}=e^t=1+t+\frac{1}{2!}t^2+\frac{1}{3!}t^3+\cdots+\frac{1}{n!}t^n$

在 $z=0$ 时，$\frac{1}{z}\Big|_{z=0}$ 无定义，则 代换 $\frac{1}{z}=t$，在 $z=+\infty$ 即 $t=0$ 时 展开

∴ $z^3\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!}\frac{1}{z^2}+\frac{1}{3!}\frac{1}{z^3}+\cdots+\frac{1}{n!}\frac{1}{z^n}\right)$

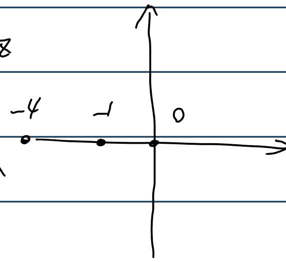
$=\left(z^3+z^2+\frac{1}{2!}z+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}\frac{1}{z}+\cdots\right)$

$z\left(1+z+\frac{1}{2!}z^2+\frac{1}{3!}z^3 \cdots \frac{1}{n!}z^n\right)$

$= \left(z^3+z^2+\frac{1}{2!}z+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}\frac{1}{z}+\cdots\right)$

例3. 求积分的值.

1) $\oint_{|z|=3} \frac{1}{z(z+1)(z+4)}dz = \oint_{|z|=3} \frac{1}{z}\left[\frac{1}{z+1}-\frac{1}{z+4}\right]\times\frac{1}{3}dz$



为了求闭曲线积分:全部展开成 $\frac{a}{z}+\frac{b}{z+4}+\frac{c}{z+1}$ 形式

$\frac{(z+4)(z+1)-az(z+1)-bz(z+4)}{z(z+1)(z+4)} = const$

$z^2+5z+4-(az^2+az)-(bz^2+4bz)$

有 $\begin{cases} a+b=1 \\ a+4b=5 \end{cases}$，∴取 $b=\frac{4}{3}$. $a=-\frac{1}{3}$ 有:

$1=\frac{1}{4}\left[(z+4)(z+1)-\frac{1}{3}z(z+1)-\frac{4}{3}z(z+4)\right]$

上式 $=\oint_{|z|=3}\frac{1}{4}\left[\frac{1}{z}-\frac{1}{3}\frac{1}{z+4}-\frac{4}{3}\frac{1}{z+1}\right]$　$\rightarrow 0$

由于 $\oint_{|z|=3}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\right)\cdot 2\pi i = -\frac{1}{12}\times 2\pi i = -\frac{\pi i}{6}$

2). $\oint_{|z|=2}\frac{ze^{\frac{1}{z}}}{1-z}dz$

方法: $e^{\frac{1}{z}} = 1+\frac{1}{1!}\frac{1}{z}+\frac{1}{2!}\frac{1}{z^2}+\cdots+\frac{1}{n!}\cdot\frac{1}{z^n}$.

$=\oint_{|z|=2}\frac{1}{1-z}\left(z+1+\frac{1}{2!}\frac{1}{z}+\frac{1}{3!}\frac{1}{z^2}+\cdots\right)$

$=\oint -\frac{1}{z}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{z}}\right)\left(z+1+\frac{1}{2!}\frac{1}{z}+\cdots\right) = \oint -\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{1}{z}\right)^n$.

即: $f(z) = -\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\cdots+\frac{1}{z^n}\right)\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!}\frac{1}{z^2}+\cdots\right) \rightarrow \frac{1}{2z^2}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^2}$

$=-\left[1+\frac{2}{z}+\frac{5}{2z^2}+\cdots\right]$,

※ 方法:

由 $C_{-1}=\oint_c f(z)dz = 2\pi i C_{-1} = 2\pi i\cdot -2 = -4\pi i$