例题4.1

Friday, February 10, 2023 11:23 PM

例4.1 试证：增量理论边界值问题解的唯一性

已知物体的初始状态，沿加载路径将各个时间的增量进行积分，可确定物体整体在最终载荷下的状态。

解：物体的边界条件为：

$$\begin{cases} d\sigma_{ij} n_j = d\bar{P}_i & (S_\sigma) \\ du_i = d\bar{u}_i & (S_u) \end{cases}$$

若在上述边界条件下的解非唯一解，分别为：$(d\sigma_{ij}^{(1)}, d\varepsilon_{ij}^{(1)}, du_{ij}^{(1)})$ 和：$(d\sigma_{ij}^{(2)}, d\varepsilon_{ij}^{(2)}, du_{ij}^{(2)})$，

解 → 应力，应变，位移

显然两解均满足平衡方程：

$$\sigma_{ij,j} + F_{bi} = 0 \rightarrow d\sigma_{ij,j} + dF_i = 0$$

几何方程：$d\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(du_{i,j} + du_{j,i})$

此时：我们考虑：两组解之差，

有：$d\sigma_{ij} = d\sigma_{ij}^{(1)} - d\sigma_{ij}^{(2)}$，$d\varepsilon_{ij}^{(1)} - d\varepsilon_{ij}^{(2)} = d\varepsilon_{ij}$

$du_i = du_i^{(1)} - du_i^{(2)}$

有：由于上述方程是线性的，有：

边界条件：dP_i 给定

故有线性方程组的唯一解，即：

$d\sigma_{ij} n_j = 0$ （S_σ 部分

$d\sigma_{ij,j} = 0$ （体积内）

对应的两组位移解有：

$\boxed{du_i = 0}$ （S_u上）位移边界条件一致

将虚功率原理应用两解之差

注：此时：体力边界上外力做的虚功为0

即：$\int_V d\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} \, dV = 0$

为使该式在任何情况均成立，则有：

$$(d\sigma_{ij}^{(1)} - d\sigma_{ij}^{(2)})(d\varepsilon_{ij}^{(1)} - d\varepsilon_{ij}^{(2)}) = 0$$

将应变增量分为 $d\varepsilon_{ij}^p$ 和 $d\varepsilon_{ij}^e$，

$$\int_V (d\sigma_{ij}^{(1)} - d\sigma_{ij}^{(2)})(d\varepsilon_{ij}^{e(1)} - d\varepsilon_{ij}^{e(2)})$$

其中：$(d\varepsilon_{ij}^{e(1)} - d\varepsilon_{ij}^{e(2)}) = (d\sigma_{kl}^{(1)} - d\sigma_{kl}^{(2)}) / C_{ijkl}$

则：弹性应变增量部分：

$$[d\sigma_{ij}^{(1)} - d\sigma_{ij}^{(2)}](d\sigma_{kl}^{(1)} - d\sigma_{kl}^{(2)}) / C_{ijkl} \geqslant 0$$

而与塑性应变有关部分为：

$$(d\sigma_{ij}^{(1)} - d\sigma_{ij}^{(2)})(d\varepsilon_{ij}^{p(1)} - d\varepsilon_{ij}^{p(2)}) = d\sigma_{ij}^p d\varepsilon_{ij}^p \geqslant 0$$

由Drucker公设不等式，塑性应变增量与应力增量同向。

因此由该式，必有：

$d\sigma_{ij}^{(1)} = d\sigma_{ij}^{(2)}$ 应力的唯一性得证。

对于强化材料，给定应力和加载历史，则知道各点的塑性应变时，可以证明，最终状态下产生的应力是唯一确定的。

载荷条件

假设两组不同的应力解 $\sigma_{ij}^{(1)}, \sigma_{ij}^{(2)}$，取其差为 $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(1)} - \sigma_{ij}^{(2)}$，则两式相减即得：

σ_{ij} 是满足没有体力作用的平衡方程式，即：$d\sigma_{ij,j} = 0$

且在边界 S_σ 上，差值满足 $\sigma_{ij} n_j = 0$（应力场）

另有关系：满足：$d\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(du_{i,j} + du_{j,i})$ 其 $\varepsilon_{ij}^{(1)} - \varepsilon_{ij}^{(2)}$ 可求出，

再应用虚功原理，有：

$$\int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV = \int_V (\sigma_{ij}^{(1)} - \sigma_{ij}^{(2)})(\varepsilon_{ij}^{e(1)} - \varepsilon_{ij}^{e(2)}) \, dV = 0 \quad ①$$

（体力与表面力所做虚功为0）

其中：$(\varepsilon_{ij}^{e(1)} - \varepsilon_{ij}^{e(2)}) = (\sigma_{kl}^{(1)} - \sigma_{kl}^{(2)}) / C_{ijkl}$

或 $\varepsilon_{ij}^e = C^{-1} \sigma_{kl}$

则上式除 $\sigma_{ij}^{(1)} = \sigma_{ij}^{(2)}$ 外均取正值，$\xrightarrow{\text{又 ①=0}}$ 得：$\sigma_{ij}^{(1)} = \sigma_{ij}^{(2)}$，

应力唯一性成立。