卷积公式的证明

Friday, November 24, 2023 11:55 AM

首先,对于两个随机变量 X,Y,其分布函数为 $F_Z(z)$,$Z=X+Y$,

则:

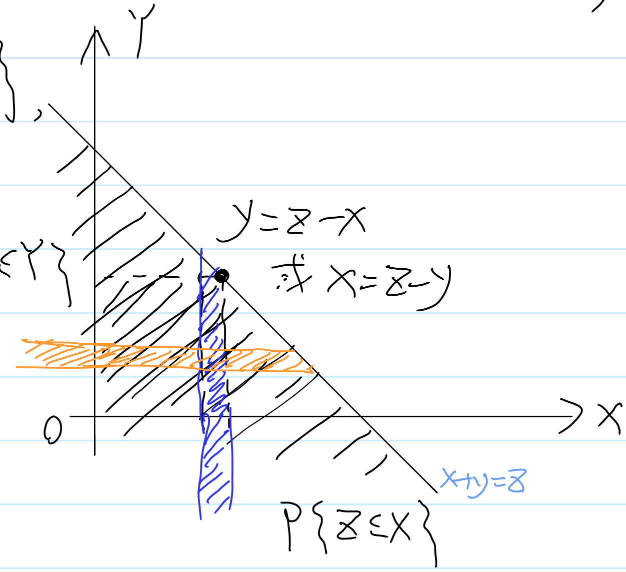
$$P\{Z\le z\} = P\{X+Y\le z\},$$

由二重积分的定义,显然有

$$P\{X+Y\le z\} = \iint_S f(x,y)dy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{z-x} f(x,y)dy\right]dx \quad ①$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{z-y} f(x,y)dx\right]dy \quad ②$$



在②式中进行变量替换,取 $u=x+y$,则

$$P\{Z\le z\} = \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{z} f(u-y,y)dz\right]dy = F(z)$$

变限 $\longrightarrow$ $P(Z\le z) = \int_{-\infty}^{z}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(u-y,y)dy\right]du = F(z)$

根据分布函数的定义:

※ $F(z)=\int_{-\infty}^{z} f(t)dt$

则:可取:

$f(u)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(u-y,y)dy$,将其写成 $f(z)$ 形式,即

$$\boxed{f(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y,y)dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-x)dx}$$

为概率密度的定义式,

当 $f(x)$,$f(y)$ 相互独立时,则

$f_X(x)f_Y(y)=f(x,y)$ 即:$f(z-y,y)=f_X(z-y)f_Y(y)$,

$f(x,z-x)=f_X(x)f_Y(z-x)$,

即得第二式。