正态分布的均值方差估计

Friday, January 5, 2024 7:26 PM

P161

例1.设有总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，σ^2为已知，μ未知，设有样本$X_1,X_2,\cdots X_n$，是来自X的样本，求μ的置信水平$1-\alpha$的置信区间，

解：有：$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ 为μ的无偏估计，参考正态分布的性质，则得到：

$$\bar{X}\sim N(\mu,\frac{\sigma^2}{n})\text{，因此有：}\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$$

∴上$\frac{\alpha}{2}$分位点为$z_{\frac{\alpha}{2}}$，则μ的分布可看成：

$$P\left\{\left|\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right|<z_{\frac{\alpha}{2}}\right\}=1-\alpha$$

，其中$z_{\frac{\alpha}{2}}$为上,下$\frac{\alpha}{2}$分位点。

∴有：$\bar{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}}<\mu<\bar{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}}$

即：置信区间：$\left(\bar{X}\pm\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}}\right)$

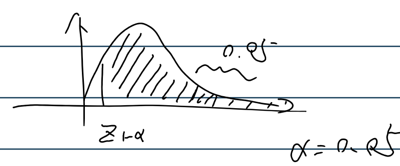
例如：求 $n=16$, $\sigma=1$, 则95%置间求解

$\mu\in\left(\bar{X}\pm\frac{1}{4}z_{\frac{\alpha}{2}}\right)$，其中 $z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0.025}=0.9\cancel{8}75$

得：$z_{\frac{\alpha}{2}}=2.\cancel{24}$ 01，因此有：$\mu\in(\bar{X}\pm0.\cancel{50})$ 0.5025 为95%置信区间.

二、对于σ^2为未知时，我们可以使用

$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$ 代替σ^2，并有性质：



① $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)\longrightarrow$得 σ^2的估计为：$P\left\{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}>z_{1-\alpha}\right\}=1-\alpha$

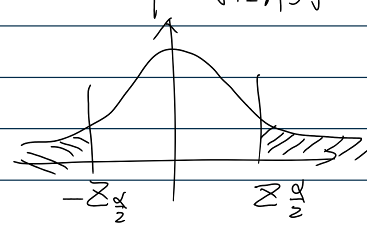
∴有$P\{0<\sigma^2<\frac{(n-1)}{z_{1-\alpha}}S^2\}=1-\alpha$

即σ^2的估计为：$\left(0,\frac{(n-1)}{z_{1-\alpha}}S^2\right)$

② $\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$

则：

$$P\left\{\left|\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\right|<t_{\frac{\alpha}{2}}\right\}=1-\alpha.$$



∴有：$\bar{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}<\mu<\bar{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}$

∴有：
$$\bar{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}<\mu<\bar{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}$$

---

①：我们设 $X\sim N_1(\mu_1,\sigma_1^2)$ $Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$，显然：

$Z=X-Y\sim(\mu_1-\mu_2,\ \sigma_1^2+\sigma_2^2)$，（其中，$\sigma_1,\sigma_2$ 均为已知）

当分析 $\bar{X}-\bar{Y}$ 时，$\bar{X}\sim(\mu_1,\frac{\sigma_1^2}{n_1})$，$\bar{Y}\sim(\mu_2,\frac{\sigma_2^2}{n_2})$

则有：
$$\frac{(\bar{X}-\mu_1)-(\bar{Y}-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}\sim N(0,1)\longrightarrow 故：\mu_1-\mu_2\in\bar{X}-\bar{Y}\pm\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\,Z_{\frac{\alpha}{2}}$$

②
若有 $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$，其中 σ 未知时 利用：
$$\frac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2)\quad 则：\mu_1-\mu_2\in\bar{X}-\bar{Y}\pm S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\cdot t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)$$
$$其中 S_w^2=\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$$

③，两正态总体方差比置信区间：

利用 $\frac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2}\sim F(n_1-1,n_2-1)$ 其中F不依赖任何参数。

有：
$$F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)<\frac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2}<F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)$$

故得：$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 关系：
$$\frac{S_1^2/S_2^2}{F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)}<\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}<\frac{S_1^2/S_2^2}{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)}$$

补充：F分布的性质有：$\frac{1}{F}\sim F(n_2,n_1)$

与：$F_{1-\alpha}(n_1,n_2)=\frac{1}{F_\alpha(n_2,n_1)}$