等价向量组的相关定理证明

Thursday, September 14, 2023 9:08 PM

①：定理4.9.

我们设 $T_1=\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_r$，$T_2=\beta_1,\beta_2\cdots\beta_s$ 且 $r\le s$

其中 T_1 无关且可由 T_2 表示

∴ 由 T_1 线性无关，显然

$\operatorname{rank}(T_1)$ 至少为 r　又：$\operatorname{rank}(T_2)\ge\operatorname{rank}T_1$，

又：T_1 可以由 T_2 进行线性表示：

则：$\operatorname{rank}(T_1)\le\operatorname{rank}(T_2)\le S$，又：$\operatorname{rank}T_1=r$，

则 $r\le S$ 成立。

②：由于向量组 T_1 和 T_2 可以互相表示出

由类似证法有：

$$\operatorname{rank}(T_1)\le\operatorname{rank}(T_2)$$

$$\operatorname{rank}(T_2)\le\operatorname{rank}(T_1)$$

$\longrightarrow$ 则 $r(T_2)=r(T_1)$

定理4.10.

我们设两个基：

(I)：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_r$，　(II) $\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_r$

且过渡阵为 C

即有：$\beta=\alpha C$　　非零

即有：$\beta = \alpha C$，

我们采用反证法，若 $\det C = 0$，则存在 r 维非零列向量 $x = (k_1, k_2, \cdots, k_r)$，使得

$$Cx = 0，（即有非零解）$$

则有：用 x 与 β 进行点积有：

$$\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_r x_r = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r) C x = 0，$$

此时：$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_r$ 线性相关，矛盾，故 $\det C \neq 0$，即 C 可逆。