幅角原理及对数留数例题

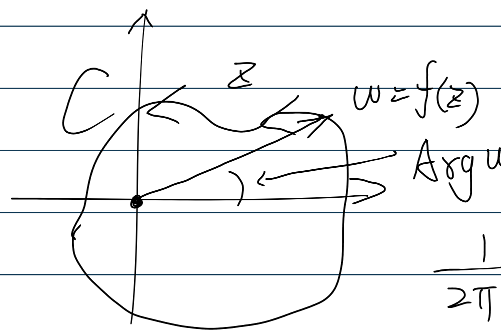
Sunday, October 22, 2023 12:15 PM

①: 对于对数留数 $\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz$，考虑 $w=f(z)$

当 z 沿 C 正向环绕一周后，

则对应 w 在 w 平面内画出连续曲线 Γ（显然是闭合的）

由于 $f(z)$ 在 C 上不为零，故 Γ 不过原点



由 $d\,\mathrm{Ln}f(z)=\frac{f'(z)}{f(z)}dz$，

则有：

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz=\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \mathrm{Ln}f(z)$$

$$\| $$

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \ln f(z)$$

因为 $\ln z=\ln|z|+i\arg z$

而 $|z|$ 在 $z\neq 0$ 时总是正的，故：$\ln z$ 的奇点为 $z=0$。

又：$\oint_\Gamma |\ln f(z)|+i\arg(f(z))dz$ 显然：$\oint_\Gamma |\ln f(z)|=0$。

而：

$\oint_\Gamma i\cdot\arg(f(z))dz$ 即绕原点的圈数（±号取法：逆时针取正，顺负）

故：$\oint_C \frac{f(z)}{f(z)}dz=i\cdot K$，即：$N-P=\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{f'(z)}{f(z)}dz=\frac{1}{2\pi}\Delta_{C^+}\mathrm{Arg}f(z)$

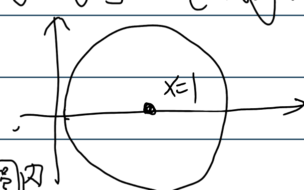
虚数乘：相角相加

而：对 Rouche 定理：当 $f(z)>g(z)$ 时：

$f(z)+g(z)=f(z)\left[1+\frac{g(z)}{f(z)}\right]$，则：$\Delta_{C^+}\mathrm{Arg}[f(z)+g(z)]=\Delta_{C^+}\mathrm{Arg}f(z)+\Delta_{C^+}\left[1+\frac{g(z)}{f(z)}\right]$

故有：

令 $w=\left|1+\frac{g(z)}{f(z)}\right|$，则 $|w-1|=\left|\frac{g(z)}{f(z)}\right|<1$



则：w 在右侧单位圆内

故：$\Delta_{C^+}\left[1+\frac{g(z)}{f(z)}\right]=0$，故 $f(z)$ 与 $f(z)+g(z)$ 在 C 的零点个数相同。

即：$\Delta_{C^+}[f(z)+g(z)]=\Delta_{C^+}[f(z)]$（要求在C内解析）+上

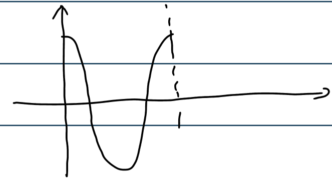
P177. 例2. 求函数 $f(z)=\frac{1+z^2}{1-\cos 2\pi z}$ 关于 $|z|=\pi$ 的对数留数。

有：$1-\cos 2\pi z$

$1-\cos 2\pi z$ …

有：$1-\cos 2\pi z$

极点 $z=0,1,-1,\pm2,\pm3$.



而：$1+z^2$ 有零点：$z=\pm i$,

$\therefore N=2,\ P=7$.

$\therefore \ \mathrm{Res}_{l_n} f(z) = \mathrm{Res}\left[\frac{f'(z)}{f(z)}, C\right] = N-P = \cancel{-5}$,

需注意零点极数 $\Longrightarrow$ 2个一级零点.

而：$1-\cos 2\pi z \longrightarrow$ 在 $z=0$ 处展开 $1-\left(1-\frac{1}{2!}z^2+\frac{1}{4!}z^4-\cdots\right)=\frac{z^2}{2}$.

※ 则每个 $2k\pi$ 为 2π，共7个二级极点：$N-P=2-7\times2=-12$.

P177. 例1. 证：$a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n=0$ 有n个根

证明：正解：令 $f(z)=a_0z^n$，$g(z)=a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n$

则 $\frac{g(z)}{f(z)} \le \left|\frac{a_1}{a_0}\right|\cdot\frac{1}{|z|}+\left|\frac{a_2}{a_0}\right|\frac{1}{|z|^2}+\cdots+\left|\frac{a_n}{a_0}\right|\frac{1}{|z|^n}$

取：$z \geq R$ 充分大时，$\frac{g(z)}{f(z)}<1$，由 Rouche 定理，

则 $f(z)$ 与 $f(z)+g(z)$ 零点个数相同，显然：$f(z)$ 有n个零点 $\longrightarrow$ 即上述方程有n个根