二次型内容的证明

Saturday, September 16, 2023 10:46 PM

6.1 $A \simeq B$，若A对称，证：B也对称，且 $\mathrm{rank}A = \mathrm{rank}B$。

①：由于 $A \simeq B$，由定义知：∃可逆矩阵C，

有：$C^TAC = B$

又：B为对称矩阵，则：$A = A^T$，

∴先证：B对称：$B^T = (C^TAC)^T$

∴B显对称；$= C^TA^TC = C^TAC = B$

由：C可逆 ⇒ 可以表示成初等变换的乘积 ⟶ AB等价

则：$\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}B$。

而：

我们考虑：$x = Cy$，代入：$B = C^TAC$

代入：由：

$$f = x^TAx = (Cy)^TA(Cy)$$
$$= y^T(C^TAC)y = y^TBy$$

此时：如果A为实对称阵，上述证明可说明：B也为实对称阵 ⇒ 此时：（二次型主针对实对称矩阵），故合同二次型总是将二次型变换为二次型。

6.5（惯性定理）

我们仅讨论规范型的唯一性，

我们仅讨论规范型的唯一性，

①：我们设秩 r 的 n 元二次型 $f=x^TAx$ 经过可逆线性变换 $x=Cy$ 和 $x=\tilde{C}z$ 化为规范型

$$f=y_1^2+y_2^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-\cdots-y_r^2$$

$$f=z_1^2+z_2^2+\cdots+z_q^2-z_{q+1}^2-\cdots-z_r^2$$

我们只需说明 $p=q$，我们假设 $p>q$，并用反证法，

则有：$y_1^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-\cdots-y_r^2=z_1^2+\cdots+z_q^2-z_{q+1}^2-\cdots-z_r^2$ ★

此时：由 $x=Cy$，$x=\tilde{C}z$，有：

$$z=\tilde{C}^{-1}x=\tilde{C}^{-1}Cy=Gy，\text{其中 } G=\tilde{C}^{-1}C=g_{ij}(n\times n)$$

此时代入，有：

$$\begin{cases} z_1=g_{11}y_1+g_{12}y_2+\cdots+g_{1n}y_n \\ z_2=g_{21}y_1+g_{22}y_2+\cdots+g_{2n}y_n \\ \vdots \\ z_n=g_{n1}y_1+g_{n2}y_2+\cdots+g_{nn}y_n \end{cases} \xrightarrow{\text{此时，我们考察齐次线性方程组}} \begin{cases} g_{11}y_1+g_{12}y_2+\cdots+g_{1n}y_n=0 \\ g_{21}y_1+\cdots=0 \\ \vdots \\ g_{q1}y_1+g_{q2}y_2+\cdots+g_{qn}y_n=0 \\ y_{p+1}=0 \\ \vdots \\ y_n=0 \end{cases}$$

右侧方程组为 n 个未知量，$n+q-p<n$，即 右侧方程组 有非零解。

此时：我们设其一个非零解为：$y_1=k_1, y_2=k_2 \cdots y_p=k_p$，而 $y_{p+1}\sim y_n=0$

代入★中，有：$k_1^2+k_2^2+\cdots+k_p^2=z_1^2+z_2^2+\cdots+z_n^2$ ← 由 $z_i=0$，显然右侧为0，

即：$k_1^2+k_2^2+k_p^2$ 应 $=0$，无非零解。因而有 $p=q$ 成立。

6.8（Sylwester 定理）

证明：构造二次形 $f=x^TAx=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$，

①：已知 f 正定时：我们取：

$$f_k(x_1,x_2,\cdots x_k)=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}a_{ij}x_ix_j \qquad k=1,2,\cdots n，$$

则对于任意的 $(x_1,x_2\cdots x_k)^T\neq0$，满足：

$$f_k(x_1,x_2,\cdots x_k)=f(x_1,x_2,\cdots x_k,0,0,\cdots 0)>0$$

从而 $f_k(x_1,x_2,\cdots x_k)$ 是 k 元正定二次型，显然由 $\det>0$，对应显然

顺序主子式 $\Delta_k>0$

从而 $f_k(x_1, x_2, \cdots x_k)$ 是 k 元正定二次型，显然由 $\det > 0$，对应显然，顺序主子式 $\Delta_k > 0$

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & & & & 0 \end{vmatrix}$$

必要性得证。

②：充分性证明：对 n 做数学归纳。$n=1$ 时显成立。设 $f = a_{11}x_1^2$ 对 $n-1$ 元二次型成立，证明 n 元二次型情形，使用配方法，得出：

由：$f = \frac{1}{a_{11}}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n)^2 + \sum_{i=2}^{n}\sum_{j=2}^{n} b_{ij}x_ix_j$ ☆

其中：$b_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{1i}a_{1j}}{a_{11}}$，$i=2,3,\cdots n$，

显然：☆中第一项是正定的 → 我们只需证 $\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=2}^{n} b_{ij}x_ix_j$ 正定即可，

因假设 $\Delta_{n-1} > 0$，而 $\Delta_k = a_{11} \begin{vmatrix} b_{22} & \cdots & b_{2k} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{k2} & \cdots & b_{kk} \end{vmatrix} > 0$，$\Rightarrow$ $\boxed{\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=2}^{n} b_{ij}x_ix_j} > 0$，

行变换 由 $r_i - \frac{a_{1i}}{a_{11}}r_1$，

提出 又 $a_{11} > 0$。

故而 $\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=2}^{n} b_{ij}x_ix_j > 0$ 成立，即第二项正定。

因而 $\Delta_n > 0 \xRightarrow{可得} f$ 为正定的，即正定对于 n 阶矩阵的二次型仍成立。