上三角行列式和次上三角行列式的计算

Friday, April 7, 2023 9:47 PM

对于 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}$ 我们需找带有非零项的排列项：

显然：当 p_n 仅能取 n 时 $p_1, p_2 \cdots p_{n-1}$ 不能取 n，仅有 $p_{n-1}=n-1$ 时，乘积不为 0，

次小：同理得：

$$\sum (-1)^{\tau(p_1 p_2 \cdots p_n)} a_{1,p_1} a_{2,p_2} \cdots a_{n,p_n} = \underbrace{(-1)^{\tau(1,2\cdots n)}}_{=1} a_{11} a_{22} \cdots a_{nn} = a_{11} \cdots a_{nn}$$

同理：对

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & & ⋰ & \\ \vdots & ⋰ & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\tau(n,n-1,\cdots 1)} a_{n1} a_{n-1,2} \cdots a_{1n}$$

因 $\tau(n,n-1,\cdots 1) = n-1+\cdots+1 = \frac{n(n-1)}{2}$ 得

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{n1} a_{n-1,2} \cdots a_{1n}$$