数学期望的性质证明(+方差公式)

Tuesday, December 5, 2023 3:33 PM

① $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$

解：对于二维随机变量 (X,Y)，我们设 (X,Y) 的概率密度 $f(x,y)$ 且边缘概率密度为 $f_X(x)$，$f_Y(y)$，由 $E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)\,dx$

从而有：

$$E(X+Y)=\iint (x+y)f(x,y)\,dx\,dy$$

$$=\iint x f(x,y)\,dx\,dy+\iint y f(x,y)\,dx\,dy$$

$$=E(X)+E(Y)$$

② 需说明若 X，Y 相互独立，则 $f(x,y)=F_X(x)F_Y(y)$

有 $E(XY)=\iint xy f(x,y)\,dx\,dy=\iint xy F_X(x)F_Y(y)\,dx\,dy$.

$$=\left[\int_{-\infty}^{+\infty} x F_X(x)\,dx\right]\left[\int_{-\infty}^{+\infty} y F_Y(y)\,dy\right]=E(X)E(Y)$$

※ 笔记：对于二维随机变量，其数学期望可以通过

$E(X)=\iint x f(x,y)\,dx\,dy$ 求解

也可由：

$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x F_X(x)\,dx$ 求解，而两变量 X，Y 函数

$\Rightarrow$ 一般用 $E(Q)=\iint Q f(x,y)\,dx\,dy$

但若使 $E(Q)$ 为 X、Y 其中一量的函数，则

$$E(Q)(x)=\int Q f_Y(x)\,dy$$

③ 对于方差，定义为：

$D(x)=E\{[X-E(X)]^2\}$，从而对于

$$D(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}[X-E(X)]^2 f(x)\,dx$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[X^2-2XE(X)+E^2(X)\right]f(x)\,dx$$

$$=\int^{+\infty} x^2 f(x)\,dx+E^2(X)\int^{+\infty} f(x)\,dx-2\int^{+\infty} xE(X)\,dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx + E^2(X)\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx}_{=1} \underbrace{- 2\int_{-\infty}^{+\infty} x E(x)\,dx}_{-2E^2(X)}$$

$$= E(X^2) - E^2(X)$$ 为方差公式