

Eddition张量的相关证明

Monday, May 6, 2024 1:20 PM

取 $\varepsilon_{ijk} = [\vec{g}_i, \vec{g}_j, \vec{g}_k] = \vec{g}_i \cdot \vec{g}_j \times \vec{g}_k$ 显有:

$\varepsilon_{ijk} = \beta_i^r \vec{g}_r \cdot \beta_j^s \vec{g}_s \times \beta_k^t \vec{g}_t = \beta_i^r \beta_j^s \beta_k^t \varepsilon_{rst}$, 故显然是三阶张量的协变分量 (逆变略)

另外: g_{ir}, g_{js}, g_{kt} 也有 Eddition 张量换标作用。

$$\text{对: } \varepsilon_{rst} = \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{rst} = \begin{vmatrix} \delta_r^i & \delta_s^i & \delta_t^i \\ \delta_r^j & \delta_s^j & \delta_t^j \\ \delta_r^k & \delta_s^k & \delta_t^k \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{展开}} \delta_r^i \delta_s^j \delta_t^k + \delta_s^i \delta_t^j \delta_r^k + \delta_t^i \delta_r^j \delta_s^k - \delta_t^i \delta_s^j \delta_r^k - \delta_r^i \delta_t^j \delta_s^k - \delta_s^i \delta_r^j \delta_t^k$$

一对指标相同:

$\gamma=1$ 时: 第一项为哑指标

$$\begin{aligned} \text{① } \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ist} &= \delta_r^i \delta_s^j \delta_t^k + \delta_s^i \delta_t^j \delta_r^k + \delta_t^i \delta_r^j \delta_s^k - \delta_t^i \delta_s^j \delta_r^k - \delta_r^i \delta_t^j \delta_s^k - \delta_s^i \delta_r^j \delta_t^k \\ &= 2\delta_s^j \delta_t^k + \delta_t^j \delta_s^k - \delta_s^j \delta_t^k - 2\delta_t^j \delta_s^k \\ &= \delta_s^j \delta_t^k - \delta_t^j \delta_s^k \end{aligned}$$

注意: $\delta_s^i \delta_t^j \delta_r^k = \delta_s^i \delta_r^j \delta_t^k$
 \downarrow
 $= \delta_s^j \delta_t^k$
 而不是把两个 i 消得 $\delta_s^k \delta_t^j$!!!

② 两对相同:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ijt} &= \delta_j^i \delta_t^k - \delta_t^j \delta_i^k \\ &= (3-1)\delta_t^k = 2\delta_t^k \end{aligned}$$

有 δ_i^i 时

$$\star \delta_j^j = 3$$

③ 三对相同:

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ijk} = 2 \times \delta_k^k = 6 \quad (\text{即 } 3!)$$