常见分布与分布函数的数学期望

Friday, December 1, 2023 2:25 PM

①：若 $X \sim \Pi(\lambda)$，即：

$$P(X=k)=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

数学期望：

$$E(X)=\sum_{k=1}^{\infty} k P(X=k) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{(k-1)!}$$

$$=\lambda e^{-\lambda}\boxed{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}} = e^{\lambda}$$

注意：$e^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}$

故：$E(X)=\lambda$

② 均匀分布的数学期望

设 $X\sim U(a,b)$，则 $P(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, & x\in(a,b] \\ 0, & 其它\end{cases}$

$$\int_a^b x P(x)\,dx = \frac{1}{2}\frac{b^2-a^2}{b-a}=\frac{a+b}{2}.$$

(3). 随机变量函数的数学期望：

设 $Y=g(X)$，且 $E(X)=E_1$，求 Y 的数学期望 E_2

解：$E_1=\int_{-\infty}^{+\infty} x f_1(x)\,dx$，从而有：设 y 的概率密度 $f_2(y)$

故有：$Y=g(X)$ 的分布函数：

此处要求 $g(x)$ 恒 >0 或 <0

$F(Y)=\{P(g(x)\le y)\} = P\{X\le g^{-1}(y)\} = F_X(g^{-1}(y))$，其中 F_X 是 X 的分布函数，

从而：$f_Y(y)=F_X'(g^{-1}(y))[g^{-1}(y)]' = f[h(y)]\,h'(y) \xrightarrow[\text{均有：}]{\text{对 } g(x)>0,\ g(x)<0} f_Y(y)=f[h(y)]\,|h'(y)|$

从而有： ← 设 α,β 为变换后的上下限

$$E(Y)=\int_\alpha^\beta y f[h(y)]\,|h'(y)|\,dy = \pm\int_\alpha^\beta y f[h(y)]\,dh(y) = E[h(y)]$$

☆ 代换：$y=g(x)$

$$\pm\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x)\,dx.$$

即：当 $g(x)$ 恒 >0 时，$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x)\,dx$，

$g(x)$ 恒 <0 时，$E(Y)=-\int_{+\infty}^{-\infty} g(x) f(x)\,dx$ （此时 α 对应 $+\infty$，β 对应 $-\infty$）

$$=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x)\,dx$$

上述方法证明了 $g(x)>0$ 和 $g(x)$ 恒 <0 的情况，该公式推广到 $g(x)$

$= \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x)\, dx$

上述方法证明了 $g'(x) > 0$ 和 $g'(x)$ 恒 < 0 的情况，该公式推广到 $g'(x)$ 为其它时也是成立的。