

牵连运动为定点运动的加速度合成定理及刚体空间一般运动推导

Tuesday, April 18, 2023 1:52 PM

设一动系相对于定系 $Ox_0y_0z_0$ 绕点 O 运动, 其角速度 ω , 角加速度 ε , 而点 M 为任一动点,

对于牵连运动的速度有:

$$\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r \quad \text{而 牵连运动为动系统 } O \text{ 点的定点运动}$$

$$\text{故 } \vec{v}_e = \vec{\omega}_e \times \vec{r}$$

$$\vec{v}_a = \vec{\omega}_e \times \vec{r} + \vec{v}_r$$

此时:

$$\frac{d\vec{v}_a}{dt} = \frac{d\vec{\omega}_e}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega}_e \times \frac{d\vec{r}}{dt} + \boxed{\frac{d\vec{v}_r}{dt}}$$

$$\text{显然 } \frac{d\vec{v}_r}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} + \vec{\omega}_e \times \vec{v}_r$$

$$= \boxed{\frac{d\vec{\omega}_e}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega}_e \times \vec{v} + \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} + \vec{\omega}_e \times \vec{v}_r}$$

$$\text{我们由 } \vec{v} = \vec{v}_e + \vec{v}_r,$$

$$\text{有: } \frac{d\vec{v}_a}{dt} = \vec{a}_a = \frac{d\vec{\omega}_e}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega}_e \times \vec{v}_e + \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} + 2\vec{\omega}_e \times \vec{v}_r$$

$$\text{其中: } \frac{d\vec{\omega}_e}{dt} = \vec{\varepsilon}_e, \quad \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{a}_r$$

代入有:

$$\vec{a}_a = \vec{\varepsilon}_e \times \vec{r} + \vec{\omega}_e \times (\vec{\omega}_e \times \vec{r}) + \vec{a}_r + 2\vec{\omega}_e \times \vec{v}_r$$

2.14. 刚体的空间一般运动:

对于空间一般运动的刚体, 由点的速度合成定理

$$\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r$$

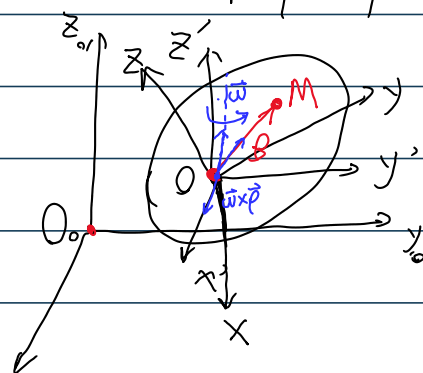
设某刚体相对于 $Ox_0y_0z_0$ 系做空间一般运动, 并选取刚体上一点 O 作为基点, 以基点为原点建立 $Ox_1y_1z_1$ 和平动坐标系 $Ox'y'z'$, 其中轴 Ox' , Oy' , Oz' 始终分别平行于固定轴 $Ox_0y_0z_0$ 和 $Ox_0y_0z_0$,

并将刚体的空间一般运动分解为 $Ox'y'z'$ 相对 $Ox_0y_0z_0$ 的平动和

O 相对于 O 的转动 并将六个 r, v 坐标 $(x, y, z, \psi, \theta, \varphi)$

并将刚体的空间一般运动分解为 $Oxyz$ 相对 $Ox_0y_0z_0$ 的平动和 $Oxyz$ 相对 $Oxyz$ 的转动, 并将六个广义坐标 $(x, y, z, \psi, \theta, \varphi)$ 表示为时间函数:

$$\begin{cases} X_0 = X_0(t), & Y_0 = Y_0(t), & Z_0 = Z_0(t) \\ \psi = \psi(t), & \theta = \theta(t), & \varphi = \varphi(t) \end{cases}$$



对刚体中任意一点 M ,

$$\text{由 } \vec{v}_M = \vec{v}_O + \vec{v}_r$$

而 \vec{v}_r 为定点运动, 有:

$$\vec{v}_r = \vec{\omega} \times \vec{\rho}, \text{ 故: } \vec{v}_M = \vec{v}_O + \vec{\omega} \times \vec{\rho}$$

也可写为矩阵:

将上式在 OM 方向进行投影, 有: $\{v_M\} = \{v_O\} + [\tilde{\omega}] \{p\}$

$$[v_M]_{om} = [v_O]_{om} + [\omega \times \rho]_{om} \quad \text{显然 } [\omega \times \rho]_{om} = 0$$

显然:

$$[\omega \times \rho]_{om} = 0, \text{ 故: } [v_M]_{om} = [v_O]_{om}$$

表明: 刚体上任意两点速度在其连线上的投影相等

→ 速度投影定理

对于 M 点的加速度, 利用加速度合成定理: (是 $Oxyz$ 平动和绕 $Oxyz$ 的定点运动的合成)

$$\vec{a}_M = \vec{a}_O + \vec{a}_r \quad \rightarrow \quad \frac{d\vec{v}_r}{dt} = \frac{d\vec{v}_r}{dt}$$

有:

$$\vec{a}_O = \vec{a}_0 \text{ 并考虑到}$$

$$\vec{a}_r = \vec{\varepsilon} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho})$$

定点运动刚体上一点的加速度表达式

得到:

$$\vec{a}_M = \vec{a}_0 + \vec{\varepsilon} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho})$$

写成矩阵形式即:

$$\{a_M\}_0 = \{a_0\}_0 + ([\tilde{\varepsilon}] + [\tilde{\omega}][\tilde{\omega}])\{p\}_0$$