第四章作业

Thursday, February 16, 2023 4:57 PM

已知：工程弹性常数 G, E，推导 K, μ, λ, M 以及 C_{11}, C_{22} 表达式。

解：由广义胡克定律：

$$G=\frac{E}{2(1+\nu)} \quad 即：\nu=\frac{E}{2G}-1.$$

有：K 为体积模量：$K=\frac{E}{3(1-2\nu)}=\frac{E}{3}\times\frac{1}{1+\frac{E}{G}-2}$

$$=\frac{E}{3(\frac{E}{G}-1)}=\frac{EG}{3(E-G)}$$

①：由：

$$\begin{cases}\varepsilon_x=\frac{1}{E}\sigma_x-\frac{\nu}{E}\sigma_y-\frac{\nu}{E}\sigma_z,\\ \varepsilon_y=-\frac{\nu}{E}\sigma_x+\frac{1}{E}\sigma_y-\frac{\nu}{E}\sigma_z\\ \varepsilon_z=\cdots\end{cases}$$

可导出广义胡克定律的应力-应变式：即：

$$\sigma_x=\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1-\nu)\varepsilon_x+\nu\varepsilon_y+\nu\varepsilon_z\right]$$

即：$C_{11}=\frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}$，$C_{22}=\frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$.

此时，分别代入：$\nu=\frac{E-2G}{2G}$

则

$$\begin{cases}C_{11}=\dfrac{2-\frac{E}{2G}}{\frac{E}{2G}\left(3-\frac{E}{2G}\right)}=\dfrac{4G-E}{E(3-\frac{E}{2G})}=\dfrac{8G^2-2EG}{6G-E}\\ C_{22}=\dfrac{\frac{E-2G}{2G}}{\frac{E}{2G}\cdot(3-\frac{E}{2G})}=\dfrac{E-2G}{E(3-\frac{E}{2G})}=\dfrac{2EG-4G^2}{6G-E}\end{cases}$$

其中，有：令 $C_{11}=a$，$C_{22}=b$，则：

$$\lambda=b=\frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \qquad \mu=\frac{1}{2}(a-b)=\frac{E}{2(1+\nu)}=\frac{E}{2\cdot\frac{E}{2G}}=G$$

则：

$$\begin{cases}\lambda=\dfrac{2EG-4G^2}{6G-E}\\ \mu=G.\end{cases}$$

②：由：

$$\sigma_{ij}=(a-b)\varepsilon_{ij}+b\theta.$$
$$=2\mu\varepsilon_{ij}+\lambda\theta\cdot\delta_{ij}$$

即：$\sigma_{ij}=\lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij}+2\mu\varepsilon_{ij}$ （分量式），

则：$\sigma_{kk}=\lambda\theta+2\mu\cdot\varepsilon_{kk}$

和式：$\sigma_{kk}=3\lambda\theta+2\mu\varepsilon_{ii}$.

$$=(3\lambda+2\mu)\theta=(3\lambda+2\mu)\varepsilon_{kk}.$$

约束模量

$$M=\lambda+2\mu$$
$$=2G+\frac{2EG-4G^2}{6G-E}$$
$$=\frac{8G^2}{6G-E}$$