刚体角速度多种形式表达式的推导

Monday, April 17, 2023 10:41 PM

①: 方向余弦矩阵表示

设某一刚体相对固定坐标系 $Ox_0y_0z_0$ 绕 O 运动，角速度为 $\vec{\omega}$

$Oxyz$ 为刚体连体坐标系，且

由于角速度 $\vec{\omega}$ 则

速度 $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$，使用矩阵方法得到

有:

$$\{v\}_0 = \{\dot{r}\}_0 = [\tilde{\omega}]_0\{r\}_0$$

而由 $Ox_0y_0z_0$ 转到 $Oxyz$ 中，

有 $\{r_0\} = [C]\{r\}$

而: $\{\dot{r}_0\} = [\dot{C}]\{r\}$

联立，有:

$$\{\dot{r}_0\} = [\tilde{\omega}]_0[C]\{r\}$$

此时: $([\tilde{\omega}]_0[C] - [\dot{C}])\{r\} = 0$

由于 $\{r\}$ 的选则有任意性 则必有:

$$\boxed{[\tilde{\omega}]_0[C] = [\dot{C}]}$$ ☆

考虑到 C 为正交阵，左右同乘 $[C^T]$（右乘）得到角速度的方向余弦表达式）为:

$$[\tilde{\omega}]_0 = [\dot{C}][C]^T$$

而在 xyz 系中的观测角速度为: $[\tilde{\omega}]_0 = [C][\tilde{\omega}][C]^T$

方向余弦矩阵性质

代入即得:

$$[\tilde{\omega}] = [C]^T[\dot{C}] \Longrightarrow$$ 为观测角速度表达（连体坐标系中）

上两式可通过代入坐标矩阵计算，则:

$$\begin{bmatrix} \omega_x^0 \\ \omega_y^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{21}\dot{C}_{31} + C_{22}\dot{C}_{32} + C_{23}\dot{C}_{33} \\ C_{31}\dot{C}_{11} + C_{32}\dot{C}_{12} + C_{33}\dot{C}_{13} \end{bmatrix}$$ 及: $$\begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{13}\dot{C}_{12} + C_{23}\dot{C}_{22} + C_{33}\dot{C}_{32} \\ C_{11}\dot{C}_{13} + C_{21}\dot{C}_{23} + C_{31}\dot{C}_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \omega_x^\circ \\ \omega_y^\circ \\ \omega_z^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{21}\dot{C}_{31} + C_{22}\dot{C}_{32} + C_{23}\dot{C}_{33} \\ C_{31}\dot{C}_{11} + C_{32}\dot{C}_{12} + C_{33}\dot{C}_{13} \\ C_{11}\dot{C}_{21} + C_{12}\dot{C}_{22} + C_{13}\dot{C}_{23} \end{bmatrix} \quad \text{及：} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{13}\dot{C}_{12} + C_{23}\dot{C}_{22} + C_{33}\dot{C}_{32} \\ C_{11}\dot{C}_{13} + C_{21}\dot{C}_{23} + C_{31}\dot{C}_{33} \\ C_{12}\dot{C}_{11} + C_{22}\dot{C}_{21} + C_{32}\dot{C}_{31} \end{bmatrix}$$

②：欧拉角表示：

将 $C_{11}, C_{12} \cdots$ 等方向余弦矩阵表达式代入，进行计算即可得出