经验分布函数及其性质说明

①：对于 χ^2 分布的由来，对于标准正态分布函数

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt,\quad \phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

则：

$$\Phi(X^2)=P\{X^2\le x\}=P\{-\sqrt{x}\le X\le\sqrt{x}\}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\sqrt{x}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

对其求导得 X^2 的概率密度为：

$$\phi(X^2)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot e^{-\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{\pi}}x^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{x}{2}}$$

$$=\frac{1}{2^{\frac{1}{2}}\cdot\Gamma(\frac{1}{2})}x^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{x}{2}}\Rightarrow\chi^2(1)$$

即：$X_i^2\sim\chi^2(1)$

由于 $\chi^2(1)=\Gamma(\frac{1}{2},2)$，则 $X_i^2\sim\Gamma(\frac{1}{2},2)$

仍成立，由 Γ 分布性质：有：

$$\Gamma(X_1^2+X_2^2+\cdots+X_n^2)\sim\Gamma(\frac{n}{2},2)=\begin{cases}0, & 其它\\ \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})}x^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}, & x>0\end{cases}$$

我们只需 $\chi^2(n)=\Gamma(\frac{n}{2},2)=\frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})}y^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{y}{2}}$ 为 χ^2 分布

则 χ^2 分布即为一个新的分布，表征了正态样本 $X_1^2+X_2^2+\cdots+X_n^2$ 的分布。

其均值为 $E(X_1^2+X_2^2+\cdots+X_n^2)=nE(X_1^2)$

由 $E(X_i^2)-E^2(X)=D(X)=1$
而：$E(X)=0\Rightarrow E(X_i^2)=1$.

因此有：$E(X_1^2+\cdots+X_n^2)=n$，

而：$D(X_1^2+\cdots+X_n^2)=nD(X_1^2)$，由：$D(X_1^2)=E(X_1^4)-E^2(X_1^2)$

故：$D(X_1^2)=E(X_1^4)-1$　　其中：$E(X_1^4)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^4\phi(x)dx$

函数期望性质

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}x^4\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

上式 $:=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int -x^3d(e^{-\frac{x^2}{2}})=\cancel{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}x^3e^{-\frac{x^2}{2}}\Big|_{-\infty}^{+\infty}}+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot3\int x^2e^{-\frac{x^2}{2}}dx$

$= 3\cdot E(X^2) = 3$.　　　　故：$E(\chi^2(n)) = n$,

$\therefore D(X_i^2) = 2$，则 $D(X_1^2+X_2^2+\cdots+X_n^2) = 2n$　　　　$D(\chi^2(n)) = 2n$.

③. 对于F分布：重要的是利用定义：

$F=\frac{U/n_1}{V/n_2}$，其中：$U\sim\chi^2(n_1)$，$V\sim\chi^2(n_2)$

则：$\frac{1}{F}=\frac{V/n_2}{U/n_1}$ 显然 $\frac{1}{F}\sim \boxed{F(n_2,n_1)}$

即$\frac{1}{X}$的分布与X的分布在参数不同时的相等关系

新随机变量Y，实际是 $\frac{X_1^2+X_2^2+\cdots+X_{n_2}^2}{X_1^2+X_2^2+\cdots+X_{n_1}^2}$ 上下为独立正态分布

该随机变量服从$F(n_2,n_1)$分布。

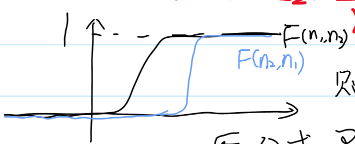
我们说明分布函数：$F(X)=P(x\le X)$ 的意义：

实际上我们取 $Z_1=\frac{X_1^2+\cdots+X_{n_1}^2}{X_1^2+\cdots+X_{n_2}^2}$，则 $Z_1\sim F(n_1,n_2)$

另外，取 $Z_2=\frac{X_1^2+\cdots+X_{n_2}^2}{X_1^2+\cdots+X_{n_1}^2}$ 则 $Z_2\sim F(n_2,n_1)$

$\Rightarrow$ 只是自变量关系

而$F(n_1,n_2)$，$F(n_2,n_1)$是完全不同的两个分布函数，不是分布函数关系☆



则有：$F_\alpha(n_1,n_2)=P\{Z_1\le\alpha\}$

原公式：$P\{X\ge F_\alpha(n_1,n_2)\}=\alpha$

利用自变量关系，有：$P\{Y\ge F_\alpha(n_2,n_1)\}=\alpha$

代入 $Y=\frac{1}{X}$，则 $P\{\frac{1}{X}\ge F_\alpha(n_2,n_1)\}=P\{X\le\frac{1}{F_\alpha(n_2,n_1)}\}=\alpha$

$\longrightarrow \boxed{P\{X\ge \frac{1}{F_\alpha(n_1,n_2)}\}=1-\alpha}$ ①

此时再 $\boxed{P\{X\ge F_{1-\alpha}(n_1,n_2)\}=1-\alpha}$ ② $\rightarrow$ 比较①，②对任意X成立，

则得：$F_{1-\alpha}(n_1,n_2)=\frac{1}{F_\alpha(n_1,n_2)}$