哈密顿-凯莱定理的证明

Saturday, September 16, 2023 1:22 PM

我们设：$f(\lambda)=\det(A-\lambda E)=a_n\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0$

又设 $B(\lambda)$ 是 $A-\lambda E$ 的伴随矩阵，则有：

$$B(\lambda)(A-\lambda E)=(\det(A-\lambda E))\cdot E$$

配凑E,

因上式，由伴随矩阵定义，有：$A^*=A^{-1}|A|$ 即：$A^*A=|A|$，

$B(\lambda)$ 的元素都是 $\det(A-\lambda E)$ 的元素的代数余子式，显然有：(次数不超 n-1)

$$B(\lambda)=B_{n-1}\lambda^{n-1}+B_{n-2}\lambda^{n-2}+\cdots+B_1\lambda+B_0$$

故有：$B(\lambda)(A-\lambda E)=(B_{n-1}\lambda^{n-1}+B_{n-2}\lambda^{n-2}+\cdots+B_1\lambda+B_0)(A-\lambda E)$

$$=a_n\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0.$$

此时有：
$$\begin{cases}-B_{n-1}=a_nE\\ B_{n-1}A-B_{n-2}=a_{n-1}\\ B_{n-2}A-B_{n-3}=a_{n-2}\\ \vdots\\ B_1A-B_0=a_1E\\ B_0A=a_0E\end{cases}$$

比同幂次 → $-A^nB_{n-1}=a_nEA^n$

A的n-1次 → $B_{n-1}A^n-B_{n-2}A^{n-1}=a_{n-1}A^{n-1}$

将左边的全部相加，得到：

$\Downarrow$

$$O=a_nA^n+a_{n-1}A^{n-1}+a_{n-2}A^{n-2}+\cdots+a_1A+a_0$$

即：$f(A)=O$.