分式线性映射的性质推导

Monday, October 23, 2023 7:31 PM

①: 我们知道,任何一个分式线性映射总可拆成如下复合:

(1) $w=z+b$ $\frac{dw}{dz}=1$ $z\neq+\infty$,共形 (2) $w=az$ $\frac{dw}{dz}=a$, $z\neq+\infty$,共形 (3) $w=\frac{1}{z}$

显然:对 $w=z+b$, $w=az$, 是处处解析的.

而: $w=\frac{1}{z}$ 在除 $z=0$, $z=+\infty$ 外处处解析(即处处共形)

讨论 $\frac{1}{z}$ 在0和∞的共形情况:

首先规定:两条伸向无穷远曲线夹角与映射后 $\xi=\frac{1}{z}$ 通过 $\xi=0$ 的两夹角 → 此时,有: $w=\frac{1}{z}$ 在 $\xi=0$ 处解析,即: $w=\xi$ 在 $z=\infty$ 处是共形的。此时:由于 $z=\frac{1}{w}$, 为逆变换 → 在 $w=0$ 处共形,故 $\frac{1}{z}$ 在 $z=0$, $z=\infty$ 时,也共形 → $\frac{1}{z}$ 为一一共形映射.

而:对 $w=z+b$ 和 $w=az$,

我们取 $\eta=\frac{1}{w}$, $\xi=\frac{1}{z}$, 则:

$\frac{1}{\eta}=\frac{1}{\xi}+b$, $\frac{1}{\eta}=\frac{a}{\xi}$ 则 $z=+\infty$ 时, $\xi=0$.

$\eta=\frac{\xi}{b+\xi}=0$ $\eta=\frac{\xi}{a}=0$, 在 $\xi=0$ 处解析,

$\frac{d\eta}{d\xi}=\frac{b+\xi-\xi}{(b+\xi)^2}=\frac{b}{(b+\xi)^2}\neq0$. 且 $\frac{d\eta}{d\xi}=\frac{1}{a}\neq0$

故这两个映射在 $z=\infty$ 也是共形的。

由于三种映射均为共形映射,复合映射共形 ⇒ 保角性,伸缩率不变的 ✓

②:保圆性:显然 $w=z+b$, $w=az$ 均有保圆性;只需说明 $w=\frac{1}{z}$ 即可.

取:圆方程 $z=x+iy$, $w=\frac{1}{z}=\frac{x-iy}{x^2+y^2}=\frac{x}{x^2+y^2}-\frac{y}{x^2+y^2}i$

$=u+vi$

而 z平面上一般圆方程为: $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$ $(r>0)$.

$x^2+y^2-2(xx_0+yy_0)+x_0^2+y_0^2=r^2$, 即: $a(x^2+y^2)+bx+cy+d=0$

代入: $u=\frac{x}{x^2+y^2}$ $v=-\frac{y}{x^2+y^2}$ ⇒ 即: $x=\frac{u}{u^2+v^2}$, $y=-\frac{v}{u^2+v^2}$.

得: $a(\frac{1}{\ldots})+\frac{u}{\ldots}\ldots\frac{v}{\ldots}c+d=0 \Rightarrow a+bu+cv+d(u^2+v^2)=0$

得: $a\left(\frac{1}{u^2+v^2}\right)+b\frac{u}{u^2+v^2}-\frac{v}{u^2+v^2}c+d=0 \longrightarrow a+bu+cv+d(u^2+v^2)=0$

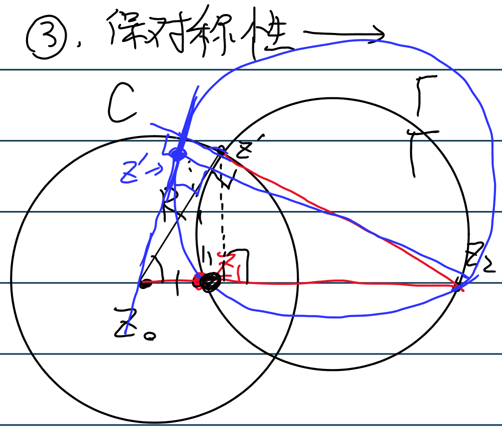
显然还是圆方程, 但 $d=0$ 时: $\frac{x_0^2+y_0^2}{r^2}-1=0 \longrightarrow$ 此时: 对于 $x_0^2+y_0^2=r^2$

方程变为: $x^2+y^2+2bx+2cy=0$, 代入: $1+2bu+2cv=0$.

为直线方程(半径视为 ∞ 的圆).

若 $a=0$, $d\neq 0$ 时, 则将直线映射成圆周.

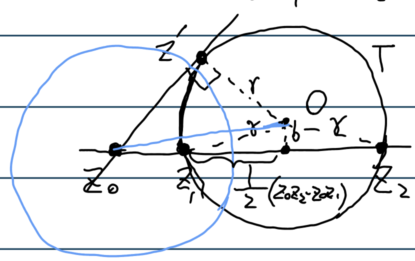
③. 保对称性 $\longrightarrow$



先说明: z_1, z_2 是圆周 $C: |z-z_0|=R$ 的一对对称点的充要条件是经过 z_1, z_2 的任何圆周 Γ 与 C 正交。

解: 过 z_1, z_2 做圆周 Γ, 并做: z_0z' 与 Γ 相切, 此时只需证明 $z_0z'=R$ 即可说明正交性

由 $z_0z_1\cdot z_0z_2=R^2$, 则有: 由于 Γ 过 z_1, z_2,



$Oz'=Oz_1=Oz_2=r$

计算 z_0z' 长度:

$z_0z'^2=Oz_0^2-r^2$

而: $Oz_0^2=\left(z_1z_0+\frac{z_0z_2-z_0z_1}{2}\right)^2+r^2-\left(\frac{z_0z_2-z_0z_1}{2}\right)^2$ 代入:

$z_0z'^2=\left(\frac{z_1z_0}{2}+\frac{z_2z_0}{2}\right)^2-\left(\frac{z_2z_0-z_1z_0}{2}\right)^2=\frac{1}{2}\times(z_1z_0)(z_2z_0)\times 2$

$=z_1z_0\cdot z_2z_0=R^2$, 故有: $z_0z'=R$, 切线即为半径 ✓

此时: 为说明对称点不变, 设经过 w_1, w_2 的任一圆周是经过 z_1, z_2 点的圆周 Γ 映射出的, 则 $\Longrightarrow$ (设为 Γ')

由于 Γ 与 C 正交, 变换后的所有 Γ' 因保角性仍与 C' 正交

$\Longrightarrow$ 得到 w_1, w_2 仍为对称点的结论,