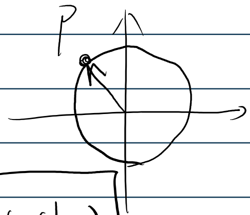
Helmholtz 方程系数求解

Wednesday, June 25, 2025 11:56 PM

设对于声场压强 $P(r,\phi)$，有：

$P=R(r)\Phi(\phi)$



$\because y(x=0)=AH_0^{(1)}(kr)\sim\boxed{\frac{2i}{\pi}A\ln(kr)}$

由非齐次 Helmholtz 方程：有：

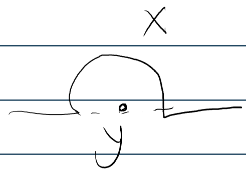
$$P(x)=\int_V \gamma(y)G_0(x,y)dV+\int_S \tilde{p}'(y)\frac{\partial G_0(x,y)}{\partial n}dS$$

其中 G_0 为自由空间 Green 函数；

解为 $P(\gamma,y)=R(\gamma)\Phi(y)$，取 $R(r)=y(x)$，其中 $x=kr$

故 $x=0\Rightarrow$ 说明 $x\to y$ $=AH_0^{(1)}(kr)$

因 $(\nabla^2+k^2)G_0(x,y,\omega)=-\delta(x-y)$



其中：齐次方程通解为：

$$G_0(r)=AH_0^{(1)}(kr)$$

当考虑 $k\to 0$ 时有：$\nabla^2 G_0=-\delta(r)$，退化为泊松方程解

由于二维空间中：$G_0(r)=-\frac{1}{2\pi}\ln r+C$

$\therefore G_0(r)=-\frac{1}{2\pi}\ln r+C=A\cdot\frac{2i}{\pi}\ln(kr)$

由于 $\ln(kr)=\ln k+\ln r$，只配 $\ln r$ 前系数，有：

$-\frac{1}{2\pi}=A\frac{2i}{\pi}$ $\therefore A=-\frac{1}{4i}=\frac{i}{4}$

故得：$G_0=\frac{i}{4}H_0^{(1)}(kr)$