特征多项式与特征值的性质证明

Thursday, September 14, 2023　　11:33 PM

①：特征值与行列式，

因 $Ax=\lambda x$，即 $(A-\lambda I)x=0$

这个是一个线性方程组形式，因 $\vec{x}\neq 0$

(即非零向量)，则：$(A-\lambda I)x=0$ 有非零解，

此时显然 $\det(A-\lambda I)<n$，

即：$|A-\lambda I|=0$，

②、$a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}=\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n$

证：由于在 A 的特征多项式 $\det(A-\lambda E)$ 中，

其中一项是 $(a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)\cdots(a_{nn}-\lambda)$

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}$$

展开式的其余各项最多包含 $n-2$ 个主对角线元素

$\Downarrow$

(此时当含有 a_{ij} 时，不含：$a_{ii}-\lambda$，和 $a_{jj}-\lambda$)

此时：特征多项式中的 n 次项和 $n-1$ 次的 λ 项仅在主对角线乘积中出现，即有：

$\det(A-\lambda I)=(-\lambda)^n+(-\lambda)^{n-1}(a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn})$

显然有 $=(-1)^n[\lambda^n-\lambda^{n-1}(a_{11}+\cdots+a_{nn})]$

$\det(A-\lambda I)=(\lambda_1-\lambda)(\lambda_2-\lambda)\cdots(\lambda_n-\lambda)$

不是 $(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots$

★ $=(-1)^n[\lambda^n-\lambda^{n-1}(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)]+\cdots$

$\star = (-1)^n[\lambda^n - \lambda^{n-1}(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)] + \cdots$
$+ \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$

则显因比较得：$a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn} = \lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n$

③、在 $\star$ 式中令 $\lambda=0$，则得：
$\det(A-0I) = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$ 成立。

④：证明：不同特征值对应特征向量线性无关。
通过数学归纳说明：显然对1个特征值成立，设其对 $m-1$ 个特征值，对应向量线性无关成立。
我们设方阵 A 有 m 个互不相同特征值 $\lambda_1, \lambda_2 \cdots \lambda_m$ 使得：存在一组 $k_1, k_2 \cdots k_m$，使对应特征向量为 $P_1, P_2, \cdots P_m$，

$$k_1P_1 + k_2P_2 + \cdots + k_mP_m = 0 \quad ①$$

由于 $AP_i = \lambda P_i$，上式同时左乘 A 得到

$$k_1\lambda_1P_1 + k_2\lambda_2P_2 + \cdots + k_m\lambda_mP_m = 0 \quad ②$$

联立：① $\times \lambda_m -$ ②，得到：

$$k_1(\lambda_m-\lambda_1)P_1 + k_2(\lambda_m-\lambda_2)P_2 + \cdots + k_{m-1}(\lambda_m-\lambda_{m-1})P_{m-1} = 0$$

因于线性无关且 $\lambda_m - \lambda_i \neq 0$，则此式仅有 $k_1 = k_2 = \cdots = k_{m-1} = 0$ 时，才有解，

代入①中得：$k_mP_m = 0$ $P_m \neq 0$，即：$k_m = 0$

代入①中得：$k_m p_m = 0 \xrightarrow{p_m \neq \vec{0}}$ 即：$k_m = 0$

则显然，线性无关对于 m 个不同特征值仍成立