弹性力学位移变分方程与极小势能原理

Thursday, March 23, 2023 3:05 PM

假设物体产生的虚位移为 $\delta u, \delta v$，并分别引起外力功的变分 δW，以及外力势能的变分 δV.

则由 $W = \int_A f_x u + f_y v \, dxdy + \int_{S_\sigma} \bar{f}_x u + \bar{f}_y v \, ds$

故有: $\delta W = \int_A f_x \delta u + f_y \delta v \, dxdy + \int_{S_\sigma} \bar{f}_x \delta u + \bar{f}_y \delta v \, ds$

而: $\delta V = -\delta W = -\left[\int_A f_x \delta u + f_y \delta v \, dxdy + \int_{S_\sigma} \bar{f}_x \delta u + \bar{f}_y \delta v \, ds\right]$

而对于虚位移

$\delta u, \delta v$ 引起虚应变: $\varepsilon_x = \frac{\partial}{\partial x}(\delta u)$ $\varepsilon_y = \frac{\partial}{\partial y}(\delta v)$ $\gamma_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}(\delta u) + \frac{\partial}{\partial x}(\delta v)$

代入则引起的引变能:

$$\delta U = \iint_A \left[\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \tau_{xy} \gamma_{xy}\right] dxdy$$

$$= \iint_A \left[\sigma_x (\delta \varepsilon_x) + \sigma_y (\delta \varepsilon_y) + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy}\right] dxdy$$

按照弹性体在发生虚位移中无温度与速度的改变。

由能量守恒定理，$\underbrace{\text{应变能增加}}_{(=-\delta V)}$ = 外力势能减少量 ☆

= $\boxed{\text{外力做功}}$ (虚功)

$\delta U = \delta W$ 则得到:

$$\boxed{\delta U = \iint_A (f_x \delta u + f_y \delta v) dxdy + \iint_{S_\sigma} (\bar{f}_x \delta u + \bar{f}_y \delta v) ds} \quad (5-23)$$

上式为位移变分方程.

由上式出发可推导最小势能原理，即将上式代入: $\delta U + \delta V = 0$

$\delta U + \delta V = 0$，其中 $\delta V = -\left[\iint_A (f_x \delta u + f_y \delta v) dxdy + \iint_{S_\sigma} (\bar{f}_x \delta u + \bar{f}_y \delta v) ds\right]$ (δV 为外力势能)，

而对于 $\delta U = \iint_A (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy}) dxdy$

代入: $\sigma_x = \frac{\partial U_1}{\partial \varepsilon_x}$ 化简 $\delta U = \iint_A \left(\frac{\partial U_1}{\partial \varepsilon_x} \delta \varepsilon_x + \frac{\partial U_1}{\partial \varepsilon_y} \delta \varepsilon_y + \frac{\partial U_1}{\partial \gamma_{xy}} \delta \gamma_{xy}\right) dxdy$

代入：$\sigma_x = \frac{\partial U_1}{\partial \varepsilon_x}$ 代入得 $\delta U = \iint_A \left(\frac{\partial U_1}{\partial \varepsilon_x} \delta \varepsilon_x + \frac{\partial U_1}{\partial \varepsilon_y} \delta \varepsilon_y + \frac{\partial U_1}{\partial \gamma_{xy}} \delta \gamma_{xy} \right) dx dy$

$\sigma_y = \frac{\partial U_1}{\partial \varepsilon_y}$

$= \delta \iint_A U_1 dx dy$，（其中：$U_1$ 为应变能密度）

显然有：

$$\delta U = \iint_A \left(\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} \right) dx dy \quad \text{（应变能差分）}$$

故：

$$\boxed{\delta [U+V] = \delta E_p = 0}$$

→ 定义：总势能 = 应变能 + 外力势能

即：总势能差分 = 应变能差分 + 外力势能差分 = 0

$\delta E_p = \delta [U+V] = 0$

上式即为极小势能原理

我们利用位移变分方程：将 δU, δV 分别代入上式，得到：

$$\delta U = \boxed{\iint_A \left(\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} \right) dx dy = \iint_A \left(f_x \delta u + f_y \delta v \right) dx dy + \int_{S_\sigma} \left(\bar{f}_x \delta u + \bar{f}_y \delta v \right) ds}$$

该式称为虚功方程；其物理意义：

若在虚位移发生之前，弹性体处于平衡状态，则在虚位移过程中，外力在虚位移上的虚功等于应力在虚应变上的虚功