

# 平均法推导弱非线性系统的自由振动

Monday, June 19, 2023 10:35 AM

对于一般的弱非线性系统，自由振动方程：

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \varepsilon f(x, \dot{x})$$

此时：若  $\varepsilon = 0$ ，则  $\ddot{x} = 0$  成为：

解：
$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad \text{则 } x = A \cos(\omega_0 t - \theta)$$

因而有 ①  $x = A \cos(\omega_0 t - \theta)$ ， $A, \theta$  取决于初始条件。

②  $\dot{x} = -A \omega_0 \sin(\omega_0 t - \theta)$  当  $\varepsilon$  充分小时：

我们可以将  $A, \theta$  视为时间的函数，则此时有：

将 ① 取微分，并视  $A, \theta$  均为时间的函数，则

$$(1) \quad \dot{x} = \dot{A} \cos(\omega_0 t - \theta) - A(\omega_0 - \dot{\theta}) \sin(\omega_0 t - \theta)$$

取 (1) ②，有：

$$\dot{A} \cos(\omega_0 t - \theta) - A(\omega_0 - \dot{\theta}) \sin(\omega_0 t - \theta) + A \omega_0 \sin(\omega_0 t - \theta) = 0$$

$$\dot{A} \cos(\omega_0 t - \theta) + A \dot{\theta} \sin(\omega_0 t - \theta) = 0$$

取  $\omega_0 t - \theta = \psi$ ，则有：

$$\dot{A} \cos \psi + A \dot{\theta} \sin \psi = 0 \quad (1)$$

而取 ② 的微分，有：
$$\ddot{x} = -\dot{A} \omega_0 \sin \psi - A \omega_0 (\omega_0 - \dot{\theta}) \cos \psi$$
  
(考虑  $A, \theta$ )

代入：
$$\ddot{x} + \omega_0^2 A \cos \psi = \varepsilon f(x, \dot{x})$$

得：

$$-\dot{A} \omega_0 \sin \psi + A \omega_0 \dot{\theta} \cos \psi = \varepsilon f(x, \dot{x})$$

$$-\dot{A} \sin \psi + A \dot{\theta} \cos \psi = \frac{\varepsilon}{\omega_0} f(x, \dot{x}) \quad (2)$$

使用 A

由 ①, ②，则可以得到：系统的微分方程： $\rightarrow$  解出  $A, \theta$ 。

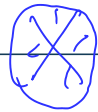
即:  $\dot{\alpha}^2 + \dot{\theta}^2$ , 有:

$$\dot{A}^2 + A^2 \dot{\theta}^2 = \frac{\varepsilon^2}{\omega_0^2} f(x, \dot{x}) \text{ 又有: } A \dot{\theta} = -\dot{A} \frac{\cos \psi}{\sin \psi}$$

$$\dot{A} \left( 1 + \frac{\cos^2 \psi}{\sin^2 \psi} \right) = \frac{\varepsilon^2}{\omega_0^2} f(x, \dot{x}), \text{ 则: } \dot{A}^2 = \frac{\varepsilon^2}{\omega_0^2} f(x, \dot{x}) \sin^2 \psi$$

得平均法微分方程为:

$$\begin{cases} \dot{A} = -\frac{\varepsilon}{\omega_0} f(x, \dot{x}) \sin \psi \\ \dot{\theta} = \frac{\varepsilon}{a \omega_0} f(x, \dot{x}) \cos \psi \end{cases}$$



也可写成:  $\begin{cases} \dot{a} = -\frac{\varepsilon}{\omega_0} f(a \cos \psi, -a \omega_0 \sin \psi) \sin \psi \\ \dot{\theta} = \frac{\varepsilon}{\omega_0} f(a \cos \psi, -a \omega_0 \sin \psi) \cos \psi \end{cases}$

此时: 若  $\varepsilon$  充分小, 则  $a, \theta$  是在常数附近缓慢变化的函数,  
将  $\dot{a}$  和  $\dot{\theta}$  使用  $\psi$  在一个周期中的平均值近似代替。

$$\text{取: } \dot{a} = -\frac{\varepsilon}{2\omega_0} P(a, \theta)$$

$$\dot{\theta} = \frac{\varepsilon}{2\omega_0 a} Q(a, \theta)$$

$$\text{其中: 有: } P = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(a \cos \psi, -a \omega_0 \sin \psi) \cos \psi d\psi$$

(周期内的影响作为平均)

$$Q = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(a \cos \psi, -a \omega_0 \sin \psi) \sin \psi d\psi$$

此方法即为平均法求解系统运动微分方程的全部过程。