平均法推导弱非线性系统的自由振动

Monday, June 19, 2023 10:35 AM

对于一般的弱非线性系统，自由振动方程：

$$\ddot{x}+\omega_0^2 x=\varepsilon f(x,\dot{x})$$

此时：若 $\varepsilon=0$，则成为：

$$\ddot{x}+\omega_0^2 x=0,\quad \text{则通解: } x=A\cos(\omega_0 t-\theta)$$

因而有：① $x=A\cos(\omega_0 t-\theta)$， A,θ 取决于初始条件，

② $\dot{x}=-A\omega_0\sin(\omega_0 t-\theta)$ 当 ε 充分小时：

我们可以将 A、θ 视为时间的函数，则此时有：

将①取微分，并视 A、θ 均为t的函数，则

(1) $$\dot{x}=\dot{A}\cos(\omega_0 t-\theta)-A(\omega_0-\dot{\theta})\sin(\omega_0 t-\theta)$$

取(1)②，有：

$$\dot{A}\cos(\omega_0 t-\theta)-A(\omega_0-\dot{\theta})\sin(\omega_0 t-\theta)+\cancel{A\omega_0\sin(\omega_0 t-\theta)}=0$$

$$\dot{A}\cos(\omega_0 t-\theta)+A\dot{\theta}\sin(\omega_0 t-\theta)=0$$

取 $\omega_0 t-\theta=\psi$，则有：

$$\boxed{\dot{A}\cos\psi+A\dot{\theta}\sin\psi=0} \quad ①$$

而取②的微分，有：（考虑 A,θ）

$$\ddot{x}=-\dot{A}\omega_0\sin\psi-A\omega_0(\cancel{\omega_0}-\dot{\theta})\cos\psi$$

代入：$\ddot{x}+\omega_0^2 A\cos\psi=\varepsilon f(x,\dot{x})$

得：

$$\boxed{-\dot{A}\omega_0\sin\psi+A\omega_0\dot{\theta}\cos\psi=\varepsilon f(x,\dot{x})}$$

$$\boxed{-\dot{A}\sin\psi+A\dot{\theta}\cos\psi=\frac{\varepsilon}{\omega_0}f(x,\dot{x})} \quad ☆ ②$$

由①，②，则可以得到：系统的微分方程： ⟶ 使用 A 解出 $\dot{A}$，$\dot{\theta}$.

即: ①²+②², 有:

$$\dot A^2 + A^2\dot\theta^2 = \frac{\varepsilon^2}{\omega_0^2} f(x,\dot x)$$ 又有: $$A\dot\theta = -\dot A\,\frac{\cos\psi}{\sin\psi}$$

$$\dot A\left(1+\frac{\cos^2\psi}{\sin^2\psi}\right) = \frac{\varepsilon^2}{\omega_0^2} f(x,\dot x)$$, 则: $$\dot A^2 = \frac{\varepsilon^2}{\omega_0^2} f(x,\dot x)\sin\psi$$

$$\dot\theta = -\frac{\dot A}{A}\,\frac{\cos\psi}{\sin\psi}$$

得平均法微分方程为:

注意: 用②得负号

$$\boxed{\begin{cases} \dot A = -\dfrac{\varepsilon}{\omega_0} f(x,\dot x)\sin\psi \\ \dot\theta = \dfrac{\varepsilon}{a\omega_0} f(x,\dot x)\cos\psi \end{cases}}$$

。也可写成:

$$\begin{cases} \dot a = -\dfrac{\varepsilon}{\omega_0} f(a\cos\psi, -a\omega_0\sin\psi)\sin\psi \\ \dot\theta = \dfrac{\varepsilon}{\omega_0} f(a\cos\psi, -a\omega_0\sin\psi)\cos\psi \end{cases}$$

此时: 若 ε 充分小, 则 a, θ 是在常数附近缓慢变化的函数, 将 $\dot a$ 和 $\dot\theta$ 使用 ψ 在一个周期中的平均值近似代替。

取: $$\dot a = -\frac{\varepsilon}{2\omega_0} P(a,\theta)$$
$$\dot\theta = \frac{\varepsilon}{2\omega_0 a} Q(a,\theta)$$

其中: 有: $$P = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(a\cos\psi, -a\omega_0\sin\psi)\cos\psi\, d\psi$$

(周期内的影响作为平均)

$$Q = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(a\cos\psi, -a\omega_0\sin\psi)\sin\psi\, d\psi$$

此方法即为平均法求解系统运动微分方程的全部过程。