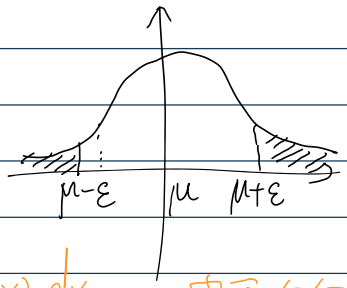
切比雪夫不等式推导

Sunday, December 10, 2023 8:32 PM

我们取连续型随机变量 X，设其概率密度 $f(x)$，则

$$P\{|X-\mu|\geq\varepsilon\}=\int_{|x-\mu|\geq\varepsilon} f(x)\,dx$$

由 $|X-\mu|\geq\varepsilon$，则 $\dfrac{|X-\mu|}{\varepsilon}\geq 1$.



上式 $\leq\int_{|x-\mu|\geq\varepsilon}\dfrac{|x-\mu|^2}{\varepsilon^2}f(x)\,dx=\dfrac{1}{\varepsilon^2}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)^2 f(x)\,dx$，由于右侧为 $E[(X-\mu)^2]=D(X)$

$=\dfrac{D(X)}{\varepsilon^2}=\dfrac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$

得证.（其中 $\varepsilon>0$）