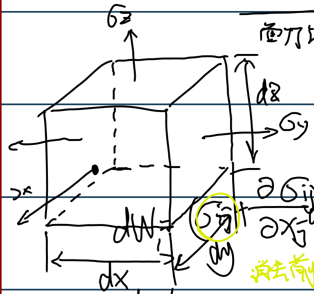
应变能函数表达式的推导

Saturday, February 25, 2023 12:40 AM

设弹性体变形时，外力做的功为 dW，则有：

$$dW = \underbrace{dW_1}_{面力功} + \underbrace{dW_2}_{体力功} = \iiint_V \left[\sigma_{ij,j}\, du_i + \sigma_{ij}\frac{\partial(du_i)}{\partial x_j}\right] dV + \iiint_V F_{bi}\, du_i\, dV$$

$$= \iiint_V (\sigma_{ij,j}+F_{bi})\, du_i\, dV + \iiint_V \sigma_{ij}\frac{\partial(du_i)}{\partial x_j}\, dV$$



以x方向所做功

$$dW = \left(\sigma_{ij} + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}dx\right)\left(du_i + \frac{\partial du_i}{\partial x_j}dx\right)dydz - \sigma_{ij}\, dydz \cdot du_i$$

略去前两项，有：

$$dW = du_i \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} dxdydz + \sigma_{ij}\frac{\partial(du_i)}{\partial x_j} dxdydz$$

$$= \left(\sigma_{ij,j}\, du_i + \sigma_{ij}\frac{\partial(du_i)}{\partial x_j}\right) dV$$

由平衡方程，有：$\sigma_{ij,j} + F_{bi} = 0$，

则：

$$W = \iiint_V \sigma_{ij}\frac{\partial(du_i)}{\partial x_j} dV$$

$$= \iiint_V \sigma_{ij}\, d\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) dV$$

$$= \iiint_V \sigma_{ij}\, d\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) + \sigma_{ji}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\right] dV$$

由互等定理有：$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$

$$= \iiint_V \sigma_{ij}\, d\,\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) dV$$

$$= \iiint_V \sigma_{ij}\, d\varepsilon_{ij}\, dV$$

---

② 应变能

因热力学第一定律：对于绝热过程，有：

$$dW = dU$$

即：$\iiint_V \sigma_{ij}\, d\varepsilon_{ij}\, dV = \iiint_V dU_0\, dV$ ⟹ 弹性 应变能函数：$U_0 = \frac{1}{2}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}$

对线弹性性成立

可得：$dU_0 = \sigma_{ij}\, d\varepsilon_{ij}$

由于：$U_0 = \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_{ij}} d\varepsilon_{ij}$

定义 $\boxed{U_0 = \int_0^{\varepsilon_{ij}} \sigma_{ij}\, d\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}}$ ☆

为应变能。

一般情况即：$\boxed{U_0 = \frac{1}{2}(\sigma_x\varepsilon_x + \sigma_y\varepsilon_y + \sigma_z\varepsilon_z + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{xz}\gamma_{xz} + \tau_{yz}\gamma_{yz})}$

注意：由于 σ_x 为ε_x函数，引入广义 Hook 定律：

①：$U_0 = \frac{1}{2E}(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - \frac{\nu}{E}(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_x\sigma_z) + \frac{1}{2G}(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2)$

有：$\frac{\partial U_0}{\partial \sigma_{ij}} = \varepsilon_{ij}$ 成立。 由 $\varepsilon_x = \frac{\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)}{E}$　$\frac{\tau_{xy}}{G} = \gamma_{xy}$

同理有：

$$U_0 = \frac{1}{2}\left[\lambda e^2 + 2G(\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2) + G(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{xz}^2 + \gamma_{yz}^2)\right]$$

故：又：$\frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_{ij}} = \sigma_{ij}$，仍成立，（也可使用 $U_0 = \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_{ij}}\varepsilon_{ij} = \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}$ 证明）

可以写为：

$$\boxed{\begin{array}{lll} \sigma_x = \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_x}, & \sigma_y = \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_y}, & \sigma_z = \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_z} \\ \tau_{xy} = \frac{\partial U_0}{\partial \gamma_{xy}}, & \tau_{yz} = \frac{\partial U_0}{\partial \gamma_{yz}}, & \tau_{zx} = \frac{\partial U_0}{\partial \gamma_{xz}} \end{array}}$$

为应变能的 Green公式，