矩阵相似对角化的部分定理推导

Friday, September 15, 2023 11:21 AM

定理5.5，①：n阶方阵可对角化条件是A具有n个线性无关的特征向量，

证：

1.必要性：若A与对角矩阵相似，即有在n阶可逆矩阵P，使：

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}=\Lambda \quad ①$$

我们令矩阵P的n个列向量$P_1,P_2,\cdots P_n$，即有：

$$P=(P_1,P_2,\cdots P_n)$$

由①式左乘P，得 $AP=P\Lambda$，则有：

$$A(P_1,P_2,\cdots P_n)=(P_1,P_2,\cdots P_n)\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix} \quad ②$$

$$=[\lambda_1P_1,\lambda_2P_2,\cdots,\lambda_nP_n] \quad ③.$$

我们有：

$AP_i=\lambda_iP_i$，且λ_i为A的特征值，

故$P_1,P_2,\cdots P_n$是对应于λ_i的特征向量。

这就说明了列向量$P_1,P_2,\cdots P_n$是A的特征向量。

即P是A的特征列向量排成的矩阵

又因为P可逆，从而$P_1,P_2,\cdots P_n$线性无关。

（线性相关则秩不为n，不可逆），

2，充分性：

设$\lambda_1,\lambda_2,\cdots\lambda_n$是矩阵A的特征值，而$P_1,P_2,\cdots P_n$为对应特征向量，则有

线性无关

$$AP_i=\lambda_iP_i$$

$$AP=A(P_1,P_2,\cdots P_n)$$

$$=(\lambda_1P_1,\lambda_2P_2,\cdots,\lambda_nP_n)$$

$$=(P_1,P_2,\cdots P_n)\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}$$

$=P\Lambda$，由于P_i线性无关，则P可逆，

有：$P^{-1}AP=\Lambda$。

A与Λ相似，

二、相似矩阵的一般性质

①：相似矩阵，特征值相同，特征多项式也相同。

只需说明特征多项式相同

由：$A\sim B$，则 $B=P^{-1}AP$，

由：$A \sim B$，则 $B = P^{-1}AP$，

由：$\det(B-\lambda I) = \det(P^{-1}AP - \lambda P^{-1}P)$

由 P可逆 $\det P \neq 0$，

$= \cancel{\det}(P^{-1}) \cdot \det(A-\lambda I)\ \cancel{\det(P)}$

$= \det(A-\lambda I) \Rightarrow$ 即特征多项式相同