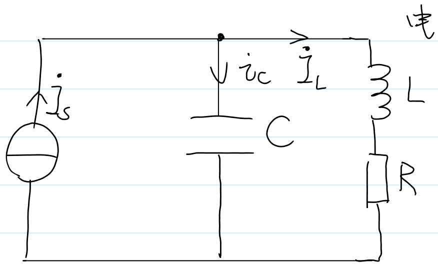
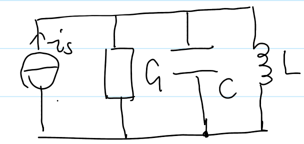
工程实际并联谐振电路的参数推导

Tuesday, November 21, 2023 9:22 PM

对于工程中实际谐振电路，结构可等效为下图





电路发生谐振时，有：

$$Y = G + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)$$

当 $\omega C - \frac{1}{\omega L} = 0$ 时

有：$\omega = \frac{1}{\sqrt{CL}}$

由 $X_L = j\omega L$，

$\therefore Y_L = \frac{1}{jX_L} = -j\frac{1}{\omega L}$

$Y_C = \frac{1}{-j\frac{1}{\omega C}} = j\omega C$.

此时：$I_S = U \cdot G \rightarrow U_0 = \frac{I_S}{G}$

$$I_L = I_C = U_0 \cdot \omega_0 C = \frac{U_0}{\omega L} = \frac{I_S}{G\omega_0 L} \Rightarrow \frac{I_L}{I_S} = \frac{1}{G}\cdot\omega_0 C = \frac{1}{G}\sqrt{\frac{C}{L}} = R\sqrt{\frac{C}{L}} = Q$$

$R / \sqrt{\frac{L}{C}}$

为一般并联谐振模型品质因数

而对于上图的实际谐振模型，我们将L、R串联组合等效为 G和L′的并联

则：

$$Z = R + j\cdot\omega L,\quad 故\ Y = \frac{1}{R+j\omega L} = \frac{R - j\omega L}{R^2+\omega^2 L^2} = \boxed{\frac{R}{R^2+\omega^2L^2} - j\left(\frac{\omega L}{R^2+\omega^2L^2}\right)}$$

$$= G + jB,$$

$\approx \frac{R}{\omega^2 L^2} - j\left(\frac{1}{\omega L}\right)$（近似导纳）

$$-j\frac{1}{X_L'} = -j\frac{1}{\omega L'}$$

$$取\ R' = \frac{R^2+\omega^2L^2}{R},\quad L' = \frac{R^2+\omega^2L^2}{\omega^2 L}$$

有：$\frac{1}{\omega L'} = \frac{\omega L}{R^2+\omega^2L^2} \rightarrow L' = \frac{R^2+\omega^2L^2}{\omega^2 L}$

则：谐振频率：

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L'C}} \Rightarrow \omega_0^2 = \frac{\omega_0^2 L}{(R^2+\omega_0^2L^2)C}$$

则解出：

$$(R^2+\omega_0^2L^2)C = L,\quad 有：\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{L}\right)^2}$$

在实际工程中，R往往很小，而 R′极大，

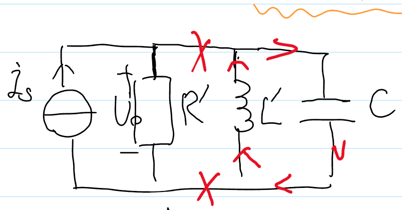
故：有关系：$\boxed{\omega_0 L >> R}$，即：$\boxed{\frac{\omega_0 L}{R} >> 1}$，代入有：$R^2\left(\cancel{1} + \frac{\omega_0^2L^2}{R^2}\right)C = L$

$\rightarrow \omega_0^2 L^2 = \frac{L}{C} \rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

另外，通过近似关系，我们得到

$$R' = R + \frac{\omega^2L^2}{R} = R\left(1 + \frac{\omega^2L^2}{R^2}\right) \approx \frac{\omega^2L^2}{R},$$

$\omega = \omega_0$ 时：$\boxed{R_0 \approx \frac{L}{RC}}$



$$L' = \frac{R^2+\omega^2L^2}{\omega^2 L} = L\left(1 + \frac{R^2}{\omega^2L^2}\right) \approx L,$$

1) 谐振阻抗：$Z_0 = \frac{1}{G_0} = \frac{RC}{L}$，　2) 特征阻抗：$\rho = X_L = \omega_0 L = \sqrt{\frac{L}{C}}$.

3) 从而品质因数为 $Q = \frac{1}{G_0}\sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{L}{RC}\sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$ ⇒ 谐振时 C，L之间有电流 而 R′与C，L′无电流

4) 通过 L′，C 的电流为：

$$I = U_0 \cdot \omega_0 C = \frac{1}{G}\omega_0 C I_0$$

其中：在谐振时，$B = 0$，则 $I_S = U_0 \cdot G$

$$= \frac{1}{G}\sqrt{\frac{C}{L}} I_0 = Q I_0$$

$$=\frac{1}{G}\sqrt{\frac{C}{L}}I_0=QI_0$$

我们推导并联谐振电路阻抗模频特性，

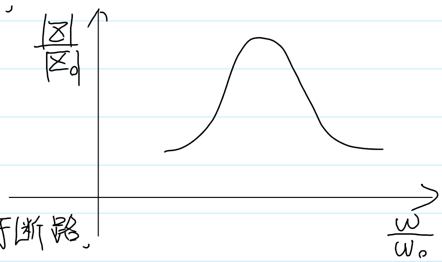
有：$Z=(R+j\omega L)\,||\,-j\left(\frac{1}{\omega C}\right)=\frac{(R+j\omega L)\cdot\left(-j\frac{1}{\omega C}\right)}{R+j\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)}$，由 $R\ll\omega L$，则忽略上方 R，

得：$Z=\frac{L/C}{R+j\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)}$，故：由 $Z_0=R_0=\frac{L}{RC}$，则：$\frac{Z}{Z_0}=\frac{R}{R+j\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)}$

从而：$\frac{|Z|}{|Z_0|}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{R^2}\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}}$　　由 $\omega L-\frac{1}{\omega C}\xrightarrow{\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}}$ 有：$\frac{\omega}{\omega_0}\cdot\sqrt{\frac{L}{C}}-\frac{\omega_0}{\omega}\cdot\sqrt{LC}\cdot\frac{1}{C}$
$=\sqrt{\frac{L}{C}}$

即：$\frac{|Z|}{|Z_0|}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{R^2}\frac{L}{C}\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}$，从而由 $Q=\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$，代入有：

$$\frac{|Z|}{|Z_0|}=\frac{1}{\sqrt{1+Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+Q^2\left(\frac{f}{f_0}-\frac{f_0}{f}\right)^2}}$$



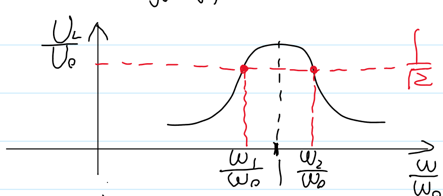
在发生谐振过程中，由于

$U\cdot Y=I$　而并联谐振 $Y\to\infty$，则 $I=0$，即右侧相当于断路，

此时：$U_{R'}=I\cdot Z_0=U_0$ 为谐振电压

在一般情况：$U_L=IZ=I\,Z_0\frac{1}{\sqrt{1+Q^2\left(\frac{f}{f_0}-\frac{f_0}{f}\right)^2}}$　得：$U_L=\frac{U_0}{\sqrt{1+Q\left(\frac{f}{f_0}-\frac{f_0}{f}\right)^2}}$

一般用 U 表示 U_L，



对于并联谐振电路仍有选择性与通频带概念

我们取电路的通频带满足：

$U=\frac{1}{\sqrt{2}}U_0$，对应 ω_1,ω_2，则 $\Delta W=\frac{\omega_2}{\omega_1}=\frac{\omega_0}{Q}$（同理可推）

$\Delta f=\frac{f_0}{Q}$，