谐波平衡法(部分推导)

Wednesday, June 4, 2025 7:36 PM

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + f(t) = F(t)$$

取duffing 系统方程：

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_0\dot{x} + k_1 x + k_3 x^3 = A\cos(\omega t)$$

设 x 为：

$$x = a(t)\sin\omega t + b(t)\cos\omega t$$

则 $\dot{x}(t) = \dot{a}(t)\sin\omega t + \dot{b}(t)\cos\omega t$

$+ a(t)\omega\cos\omega t - b(t)\omega\sin\omega t$

$= (\dot{a}(t) - b(t)\omega)\sin\omega t$

$+ (\dot{b}(t) + a(t)\omega)\cos\omega t$

$\ddot{x}(t) = (\ddot{a}(t) - \dot{b}(t)\omega - \dot{b}(t)\omega - a(t)\omega^2)\sin\omega t$

$+ (\dot{a}(t)\omega - b(t)\omega^2 + \ddot{b}(t) + \dot{a}(t)\omega)\cos\omega t$

$= (\ddot{a}(t) - 2\dot{b}(t)\omega - \omega^2 a(t))\sin\omega t$

$+ (2\dot{a}(t)\omega + \ddot{b}(t) - b(t)\omega^2)\cos\omega t$

我们认为，a,b为慢变时间参数 $\Rightarrow \ddot{a}(t) = \ddot{b}(t) = 0$

则：$[-a(t)\omega^2 - 2\dot{b}(t)\omega]\cos\omega t$

$+ [-b(t)\omega^2 + 2\dot{a}(t)\omega]\sin\omega t$

而：$\ddot{x} + 2\xi\omega_0 x + k_1 x + k_3 x^3 = A\cos\omega t$.

① $\sin\omega t = \sin 2\omega t\cos\omega t - \cos 2\omega t\sin\omega t$

① $\sin\omega t = \sin 2\omega t\cos\omega t - \cos 2\omega t\sin\omega t$

② $\sin 3\omega t = \sin 2\omega t\cos\omega t + \underline{\cos 2\omega t\sin\omega t}$

①-②

$-2\cos 2\omega t \cdot \sin\omega t = \sin\omega t - \sin 3\omega t$

$\sin^3\omega t = (1-\cos^2\omega t)\sin\omega t$

$= \frac{1}{2}(1-\cos 2\omega t)\sin\omega t$

由 $\cos 2\omega t = 2\cos^2\omega t - 1 \Rightarrow \cos^2\omega t = \frac{1}{2}(1+\cos 2\omega t)$

由 $\underline{\cos 2\omega t\sin\omega t} = -\frac{1}{2}(\sin\omega t - \sin 3\omega t)$，代回.

$= \frac{1}{2}\sin\omega t + \frac{1}{4}(\sin\omega t - \sin 3\omega t)$

$= \frac{3}{4}\sin\omega t - \frac{1}{4}\sin 3\omega t$ (1-6)

同理：$(1-\cos^2\omega t)\cos\omega t$

由 $= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\omega t\right)\cos\omega t$

由 $\cos\omega t = \cos 2\omega t\cos\omega t + \sin 2\omega t\sin\omega t$

$\cos 3\omega t = \cos 2\omega t\cos\omega t - \sin 2\omega t\sin\omega t$

$\Rightarrow \underline{\cos 2\omega t\cos\omega t} = \frac{1}{2}(\cos\omega t + \cos 3\omega t)$

代回：

$= \frac{1}{2}\cos\omega t - \frac{1}{2}\cos 2\omega t\cos\omega t$

$= \frac{1}{4}\cos\omega t - \frac{1}{4}\cos 3\omega t$ (1-7)

其余略。

$\therefore x^3 = (a\sin\omega t + b\cos\omega t)^3$

$= a^3\sin^3\omega t + 3ab^2\sin\omega t\cos^2\omega t$

$+ 3a^2b\sin^2\omega t\cos\omega t + b^3\cos^3\omega t$

$= \frac{3a^3}{4}\sin\omega t + \frac{3ab^2}{4}\sin\omega t + \frac{3a^2b}{4}\cos\omega t + \frac{3b^3}{4}\cos\omega t$ ☆

$\Rightarrow$ 代入：

$\Rightarrow$ 代入：

$$-(2\dot{b}+a\omega)\omega\sin\omega t+(2\dot{a}-b\omega)\omega\cos\omega t$$
$$+2\xi\omega_0[(\dot{a}-b\omega)\sin(\omega t)+(\dot{b}+a\omega)\cos\omega t]$$
$$+k_1(a\sin\omega t+b\cos\omega t)+\star\cdot k_3=A\cos\omega t$$

有：① sin 项：

$$\begin{cases}-a\omega^2-2\dot{b}\omega+2\xi\omega_0(\dot{a}-b\omega)+k_1a+\frac{3k_3}{4}a^3+\frac{3k_3}{4}ab^2=0\\ \text{② cos 项：}\\ (2\dot{a}-b\omega)\omega+2\xi\omega_0(\dot{b}+a\omega)+k_1b+\frac{3a^2b}{4}k_3+\frac{3b^3}{4}k_3=A\end{cases}$$

如何解 a, b？

我们可设 a, b 为常数：$\dot{a}=\dot{b}=0$

对应：

① $(k_1-\omega^2)a-2\xi\omega_0\omega b+\frac{3}{4}k_3a(a^2+b^2)=0$

② $(k_1-\omega^2)b+2\xi\omega_0a\omega+\frac{3}{4}k_3b(a^2+b^2)=0$

取 $a^2+b^2=r^2$，

$$(k_1-\omega^2+\tfrac{3}{4}k_3r^2)a-2\xi\omega_0\omega b=0$$
$$(k_1-\omega^2+\tfrac{3}{4}k_3r^2)b+2\xi\omega_0\omega a=A$$

两式显然仅取平方和，由于中间异号 $\Rightarrow$ 消去，有：

$$\boxed{(k_1-\omega^2+\tfrac{3}{4}k_3r^2)^2r^2+4\xi^2\omega_0^2\omega^2r^2=A^2}\quad ⊗$$