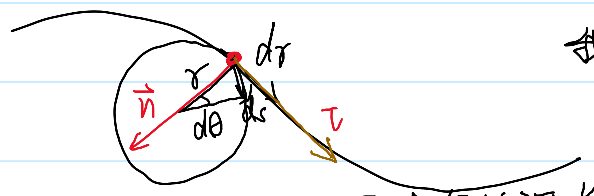
Frenet标架与切向量公式建立推导

Thursday, October 12, 2023 7:42 PM

① 首先：对于空间曲面，用 x, y, z 难以表示其相关参量，则使用一个从原点到曲线点的 $\vec{r}$（向径），我们希望建立一个坐标架表示加速度等量。

平面曲线



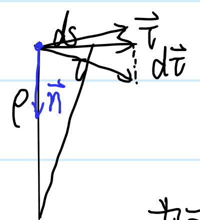
我们考虑一个无 a_τ 的物体，有：

$$\vec{a}=\frac{d^2 r}{dt^2}=\frac{v^2}{\rho}\cdot(-\vec{n})$$

而设经过弧长为 $ds = v\,dt$，

$\therefore \frac{d\vec{r}}{ds}=\frac{d\vec{r}}{dt}\cdot\frac{dt}{ds}=v\cdot\vec{\tau}\cdot\frac{1}{v}=1\cdot\vec{\tau}$ 为切向量 $\Longrightarrow$ 取 $\vec{\tau}=\frac{d\vec{r}}{ds}$ 为切向量。

$$\frac{d^2 r}{ds^2}=\frac{d}{ds}(1\cdot\vec{\tau})=\frac{d}{dt}\vec{\tau}\cdot\frac{dt}{ds}$$



有：$\frac{d\tau}{1}=\frac{ds}{\rho}\cdot\vec{n}$，则：$\frac{d^2 r}{dt^2}=\frac{\vec{n}}{\rho}\cdot\frac{ds}{dt}\cdot\frac{dt}{ds}=\frac{1}{\rho}\vec{n}=K\cdot\vec{n}$

（取 $\vec{n}$ 为指向圆心的方向）

为求 $\frac{d\vec{n}}{ds}$，由 $\langle n,\tau\rangle=0$，求得：$\frac{d\vec{n}}{ds}\cdot\tau+\frac{d\vec{\tau}}{ds}\cdot\vec{n}=0$，由：$\frac{d\vec{\tau}}{ds}=K\cdot\vec{n}$

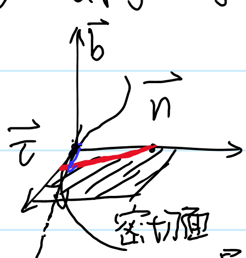
故 $\frac{d\vec{n}}{ds}\vec{\tau}+K=0 \longrightarrow \frac{d\vec{n}}{ds}=-K\cdot\vec{\tau}$ （显然：由 $\frac{d}{ds}\langle n,n\rangle=0$，$\frac{d\vec{n}}{ds}\cdot\vec{n}=0$）

即 $\vec{n}$ 分量为0

显然：得到 $\frac{d\vec{r}}{ds}=1\cdot\vec{\tau}$，$\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}=\frac{d\vec{\tau}}{ds}=K\vec{n}$，$\frac{d\vec{n}}{ds}=-K\cdot\vec{\tau}$

Frenet第一式

② 而对于空间曲线而言：



我们取另外一个标架

$$b=\vec{\tau}\times\vec{n}$$

定义密切面是与切线 $\vec{\tau}$ 垂直的平面，且有 $\vec{\tau},\vec{n}$ 均在平面内。

显然 $\frac{d\vec{r}}{ds}=\vec{\tau}$ 仍然成立。

则：由于 τ 及其邻域内的点均在密切面内，仍然有：

$\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}=\frac{d\vec{\tau}}{ds}=K\cdot\vec{n}$ 仍然成立：①

由：$\langle\vec{\tau}\cdot\vec{n}\rangle=0 \rightarrow \frac{d\vec{\tau}}{ds}\cdot\vec{n}+\frac{d\vec{n}}{ds}\cdot\vec{\tau}=0$，则：$\frac{d\vec{n}}{ds}\cdot\vec{\tau}=-K$

$\langle\vec{n}\cdot\vec{n}\rangle=0 \longrightarrow 2\frac{d\vec{n}}{ds}\cdot\vec{n}=0$

$\langle\vec{b}\cdot\vec{n}\rangle=0 \longrightarrow \frac{d\vec{b}}{ds}\cdot\vec{n}+\frac{d\vec{n}}{ds}\cdot\vec{b}=0$，$\frac{d\vec{n}}{ds}\cdot\vec{b}=\lambda$

$\Longrightarrow$ 从而有 $\frac{d\vec{n}}{ds}=-K\vec{\tau}+\lambda\vec{b}$ ②

我们定义 $-\langle\frac{d\vec{b}}{ds},\vec{n}\rangle=\lambda$ 称为挠率，则：（代）

我们定义 $-\langle \frac{db}{ds}, \vec{n} \rangle = \lambda$ 称为挠率，则：/代入

求导 $\langle \vec{\tau} \cdot \vec{b} \rangle = 0 \rightarrow \frac{d\vec{\tau}}{ds} \cdot \vec{b} + \frac{d\vec{b}}{ds} \cdot \vec{\tau} = 0$，而代入 $\frac{d\vec{\tau}}{ds} = K \cdot \vec{n}$，得：$\frac{d\vec{b}}{ds} \cdot \vec{\tau} = 0$

从而：$\frac{d\vec{b}}{ds} = -\lambda \vec{n}$，

整理得到公式：

$$\begin{bmatrix} \frac{d\vec{\tau}}{ds} \\ \frac{d\vec{n}}{ds} \\ \frac{d\vec{b}}{ds} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & K & \\ -K & & \lambda \\ & -\lambda & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{\tau} \\ \vec{n} \\ \vec{b} \end{bmatrix},$$

其中：$\vec{\lambda} = -\langle \frac{d\vec{b}}{ds}, \vec{n} \rangle$ 为挠率