正规摄动法求解Duffing方程受迫振动

Thursday, June 22, 2023 5:36 PM

解：①：Duffing方程自由振动方程为：

$$\ddot{x}+\omega_0^2(x+\varepsilon x^3)=0$$

展开 x 为幂级数形式

$$x=x_0+\varepsilon x_1+\varepsilon^2 x_2+\cdots$$

则：$\ddot{x}$ 直接代入展 x^3，

$$\ddot{x}_0+\varepsilon\ddot{x}_1+\varepsilon^2\ddot{x}_2+\omega_0^2(x_0+\varepsilon x_1+\varepsilon^2 x_2+$$
$$\varepsilon x_0^3+3\varepsilon^2 x_0^2 x_1+3\varepsilon^3 x_0 x_1^2+3\varepsilon^3 x_1^3+3\varepsilon^3 x_0^2 x_2+)=0$$

由 ε 同次幂系数相同，有：

$$\begin{cases}\ddot{x}_0+\omega_0^2 x_0=0 & ①\\ \ddot{x}_1+\omega_0^2 x_1+\omega_0^2 x_0^3=0 & ②\\ \ddot{x}_2+\omega_0^2 x_2+3x_0^2 x_1=0 & ③\end{cases}$$

对于 Duffing 方程受迫振动 新方程：$\boxed{\ddot{x}_0+\omega_0^2 x_0=F\cos\omega t}$ 即有：

$$☆\begin{cases}\ddot{x}_0+\omega_0^2 x_0=F\cos\omega t & ①\\ \ddot{x}_1+\omega_0^2 x_1=-\omega_0^2 x_0^3 & ②\\ \ddot{x}_2+\omega_0^2 x_2=-3x_0^2 x_1 & ③\end{cases}$$

$\longrightarrow$ ① 解：$x_0=\dfrac{F}{\omega_0^2-\omega^2}\cos\omega t$.

代入②中：

$$\ddot{x}_1+\omega_0^2 x_1=-A^3\omega_0^2\cos^3\omega t$$

，由 $\cos^3\omega t=\frac{3}{4}\cos\omega t+\frac{1}{4}\cos 3\omega t$，

$$\ddot{x}_1+\omega_0^2 x_1=-A^3\omega_0^2\left(\frac{3}{4}\cos\omega t+\frac{1}{4}\cos 3\omega t\right)$$

$$\ddot{x}_1+\omega_0^2 x_1=-\frac{3A^3\omega_0^2}{4}\cos\omega t-\frac{1}{4}A^3\omega_0^2\cos 3\omega t$$

设：$\boxed{x_1=B_1\cos\omega t+B_2\cos 3\omega t}$

$$\therefore\ B_1(\omega_0^2-\omega^2)\cos\omega t+B_2(\omega_0^2-9\omega^2)\cos 3\omega t=-\frac{3A^3\omega_0^2}{4}\cos\omega t-\frac{1}{4}A^3\omega_0^2\cos 3\omega t$$

分别令 $\cos\omega t$, $\cos 3\omega t$ 系数为 0

$$B_1=-\frac{3A^3\omega_0^2}{4(\omega_0^2-\omega^2)}\qquad B_2=-\frac{A^3\omega_0^2}{4(\omega_0^2-9\omega^2)}$$

同样地，可解出 x_2 的系数：

$$\ddot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 = -3\omega_0^2 A^2 \cos^2\omega t\left(-\frac{3A^3\omega_0^2}{4(\omega_0^2-\omega^2)}\cos\omega t - \frac{A^3\omega_0^2}{4(\omega_0^2-9\omega^2)}\cos 3\omega t\right)$$

$$= -3\omega_0^2 A^2 \cos^2\omega t\,(B_1\cos\omega t + B_2\cos 3\omega t)$$

$\cos^2\omega t\cos 3\omega t = \frac{1}{4}\cos 5\omega t + \frac{1}{2}\cos 3\omega t + \frac{1}{4}\cos\omega t$

$$= -3\omega_0^2 A^2\left(\frac{3}{4}B_1\cos\omega t + \frac{1}{4}B_1\cos 3\omega t\right) - 3\omega_0^2 A^2 B_2\left(\frac{1}{4}\cos 5\omega t + \frac{1}{2}\cos 3\omega t + \frac{1}{4}\cos\omega t\right)$$

$$= -\frac{9}{4}B_1\omega_0^2 A^2\cos\omega t - \frac{3}{4}B_1\omega_0^2 A^2\cos 3\omega t - \frac{3}{4}B_2\omega_0^2 A^2\cos 5\omega t + \frac{3B_2}{2}\omega_0^2 A^2\cos 3\omega t + \frac{3\omega_0 A^2 B_2}{4}\cos\omega t$$

$$= \left[-\frac{9}{4}B_1\omega_0^2 A^2 + \frac{3\omega_0^2 A^2 B_2}{4}\right]\cos\omega t + \left[\frac{3B_2\omega_0^2 A^2}{2} - \frac{3B_1\omega_0^2 A^2}{4}\right]\cos 3\omega t - \frac{3}{4}B_2\omega_0^2 A^2\cos 5\omega t$$

我们令

$x_2 = C_1\cos\omega t + C_2\cos 3\omega t + C_2\cos 5\omega t$，则有： $\ddot{x}_2 = -C_1\omega^2\cos\omega t - 9C_2\omega^2\cos 3\omega t - 25C_3\omega^2\cos 5\omega t$

$$C_1 = \frac{\omega_0^2 A^2}{4(\omega_0^2-\omega^2)}(-9B_1+3B_2) \quad C_2 = \frac{\omega_0^2 A^2}{4(\omega_0^2-9\omega^2)}[6B_2-3B_1],\ C_3 = \frac{-3\omega_0^2 A^2 B_2}{4(\omega_0^2-25\omega^2)}$$