应力理论

Monday, June 26, 2023 4:16 AM

复习 ①：力的表达式 $df = \sigma \cdot da = P dA$ ，其中：$P = PK_1$ 为第一类 Peora-Kichoff 应力.

其中：$P = J\sigma F^{-T} = [\tau] F^{-T}$

而第二类 Peora-Kichoff 应力为：

$$T = F^{-1} P = F^{-1} J \sigma F^{-T}$$ (对称张量).

②：功共扼的概念：

取：$W_{总} = \int_v \dot{w} \cdot dv$ 其中：$\dot{w}$ 为应变能密度

显有：$\dot{w} = \sigma : l$ ，l 为应变率：$l = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)$

其中：l 可以分解为对称和反对称两部分，即：$l = d + g$，d 为对称部分，g 为反对称部分

$$\begin{cases} d = \frac{1}{2}(l + l^T) \\ g = \frac{1}{2}(l - l^T) \end{cases}$$

显然由 σ 对称：$\sigma : g = 0$

则：$\sigma : l = \sigma : (d + g) = \sigma : d$

需要说明的是：应变率可以计算为：

$$l = \nabla v_x = \nabla \dot{u} = \nabla \cdot \frac{\partial u}{\partial t} \xrightarrow{一维} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}$$

其中：X 是另一个坐标系下的坐标.

我们使用变换：$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial X} F^{-1}$

则：$l = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial X}\right)\frac{\partial X}{\partial x} \Longrightarrow$ 其中：u 为位移，有：$\dot{u} = \dot{x} = \dot{F} X$? ?

则：$\boxed{l = \dot{F}\frac{\partial X}{\partial x} = \dot{F} F^{-1}}$ ☆ (得到 l 的计算公式)

通过体积变换

故 $w = \int_v \sigma : l \, dv = \int \sigma : l \, [J] \, dV = \int_V \dot{w}_V \, dV$

通过体积变换

故 $w = \int_v \sigma : l \, dv = \int_V \sigma : l \, [J] \, dV = \int_V \dot{w}_V \, dV$

我们有 $\boxed{\text{Kichoff 应力为 } \sigma[J] = [\tau]}$，则

功的密度表达式为：

$\dot{w}_V = [\tau] : l = [\tau] : d$ 而 $\dot{w} = [\sigma] : l$

我们代入 l 的表达式：有

$$\dot{w}_V = T : l = T : \dot{F}F^{-1} \xrightarrow[\text{重要性质}]{\text{双点积}} TF^{-T} : \dot{F}$$

$$\xrightarrow[\text{表达式}]{\text{一开始的}} = P : \dot{F}$$

由 $T = F^{-1}P$ $\to P = FT$

$AC^T : B = B^T A : C$

$$= FT : \dot{F} = tr(FT\dot{F}^T) = tr$$

$$= \dot{F}^T F : T = T : (\dot{F})^T F$$

分开 ①②③

$$w_V = T : \frac{1}{2}[(\dot{F}^T F) + (\dot{F}^T F)^T]$$

$$= T : \frac{1}{2}[F^T \dot{F} + \dot{F}^T F]$$

右 Cauchy Green 应变

由第二类 Green 应变为：$E = \frac{1}{2}(F^T F - I)$

则：$\dot{E} = \left(\frac{1}{2}\dot{F}^T F + \frac{1}{2} F^T \dot{F}\right)$

故有：$\boxed{w_V = T : \dot{E}}$，其中：$E = \frac{1}{2}(C - I) = \frac{1}{2}(F^T F - I)$

☆

为第二类 Green 应变

另外说明：$e = \frac{1}{2}(I - B^{-1})$