度量张量的相关证明

Monday, May 6, 2024 8:52 AM

①、对一组协变和逆变基,有:分解式

$$\vec{g}_i = g_{ij}\vec{g}^j \qquad \vec{g}^i = g^{ij}\vec{g}_j \rightarrow$$

其中有关系:

$$g_{ij} = \vec{g}_i \cdot \vec{g}_j \qquad g^{ij} = \vec{g}^i \cdot \vec{g}^j \quad ①$$

显有:$g_{ij} = g_{ji}$ $g^{ij} = g^{ji}$,即关于指标对称,并有:$g^{ij} g_{jk} = \delta^i_k$

(1). 证:关系①

$\vec{g}_i = g_{ij}\vec{g}^j$,分量 g_{ij},由 $\vec{g}_i \vec{g}^j = \delta_i^j$,两边同乘 $\vec{g}^j$

得:$\vec{g}_i \cdot \vec{g}^j = g_{ij}\, \vec{g}^j \cdot \vec{g}^j = g_{ij}$. 得证,其余同理

(2). 证:$g^{ij} g_{jk} = \delta^i_k$

证明:作协变基矢与逆变基矢点积:

$$\delta^i_k = \vec{g}^i \cdot \vec{g}_k = g^{ij}\vec{g}_j \cdot g_{jk}\vec{g}^j = g^{ij} g_{jk}$$ 即:$[g^{ij}][g_{jk}] = [\delta^i_k]$,

两矩阵互逆

(3) 证:g_{ij} 是某二阶张量的协变分量,而 g^{ij} 是某二阶张量逆变分量

证明:考虑新基下的 $\vec{g}_{i'}$ 和 $\vec{g}^{i'}$,并有:

$$\vec{g}_{i'} = \beta^i_{i'}\vec{g}_i,\quad \vec{g}^{i'} = \beta^{i'}_i \vec{g}^i$$

则:$g_{i'j'} = (\beta^i_{i'} \cdot \beta^j_{j'}) \cdot (\vec{g}_i \cdot \vec{g}_j) = \beta^i_{i'}\beta^j_{j'} g_{ij} \Rightarrow$ 由于满足二次 β 转换关系,为协变分量

并显有:$g^{i'j'} = \beta^{i'}_i \beta^{j'}_j g^{ij} \Rightarrow$ 满足二次逆变基转换,为逆变分量

☆:证是几阶的分量,→ 证满足下标转换

此时,取 $\vec{G} = g_{ij}\vec{g}^i\vec{g}^j$,则:(~~协变换分解~~)

$$\vec{G} = g_{ij}\vec{g}^i\vec{g}^j = g_{ij}(g^{ik}\vec{g}_k)(g^{jm}\vec{g}_m) = \underline{g_{ij}g^{ik}}\,\underline{g^{jm}}\,\vec{g}_k\vec{g}_m$$

$$\xrightarrow{\delta\text{关系}} = g^{km}\vec{g}_k\vec{g}_m$$,则 $\vec{G} = g^{ij}\vec{g}_i\vec{g}_j$,就证明了是其逆变分量

---

(4). 显:

$$\vec{G} = g_{ij}\vec{g}^i\vec{g}^j = g_{ij}\, g^{ik}\vec{g}_k\vec{g}^j = \underline{\delta^k_j \vec{g}_k \vec{g}^j} = \delta^i_j \vec{g}_i \vec{g}^j$$

即有混变分量 $G = \delta^i_j \vec{g}_i\vec{g}^j = \delta^j_i \vec{g}^i \vec{g}_j$,混变分量为:$\begin{cases} g_i^{\cdot j} = \delta_i^j \\ g^i_{\cdot j} = \delta^i_j \end{cases}$

即有混变分量 $G = \delta^i_j g_i g^j = \delta_i^j g^i g_j$，混变分量为：$\begin{cases} g_i^{\cdot j} = \delta_i^j \\ g^i_{\cdot j} = \delta^i_j \end{cases}$