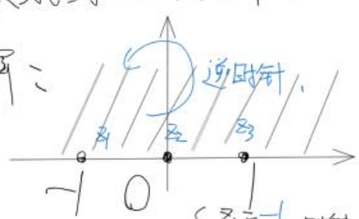
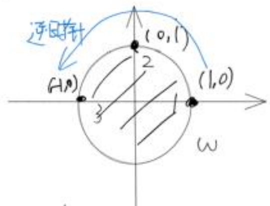
第六章例题

Thursday, October 26, 2023 8:40 AM

例2. 求将上半平面 $Im(z)>0$ 映射为单位圆 $|w|=1$ 的分式线性映射.

解：





解：任取三点：$\begin{cases} z_1=-1 \\ z_2=0 \\ z_3=1 \end{cases}$ $\xRightarrow[\text{到}w]{\text{映射}}$ $\begin{cases} w_1=1 \\ w_2=i \\ w_3=-1 \end{cases}$ （※绕向相同必须考虑）

即顺/逆时针必须一致.

由分式线性映射公式：

$$\frac{w-w_1}{w-w_2}\cdot\frac{w_3-w_2}{w_3-w_1}=\frac{z-z_1}{z-z_2}\frac{z_3-z_2}{z_3-z_1}$$

$$\frac{w-1}{w-i}\cdot\frac{-1-i}{-2}=\frac{z+1}{z}\frac{1-0}{1-(-1)}$$

得 移项 $\frac{w-1}{w-i}=\frac{z+1}{z(1+i)}=\frac{(z+1)(1-i)}{2z}$

$$(w-1)z=(w-i)\cdot\left(\frac{1-i}{2}z+\frac{1-i}{2}\right)$$ 少+1!

$$w\left(\frac{1+i}{2}z-\frac{1-i}{2}\right)=-i\left(\frac{1+i}{2}z+\frac{1-i}{2}\right)+z$$

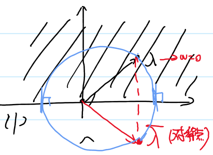
别忘 $\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)^2}{2}=-i$

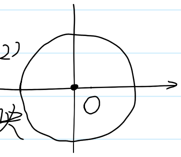
$$w=\frac{\frac{1-i}{2}z+\frac{-1-i}{2}}{\frac{1+i}{2}z-\frac{1-i}{2}}=\frac{\frac{1-i}{1+i}z-1}{z-\frac{1-i}{1+i}}=\frac{-iz-1}{z+i}$$ 为解.

我们先给出此题的解法2：

首先将(1)看成半径无穷大的圆域

而将(1)中的部分映射到(2)





由分式线性映射有保圆性，将 $Im(z)>0$ 映射为 $|w|<1$，我们设平面上的 λ 点映射后为圆心 $w=0$，

利用保对称性，$w=0$，$w=\infty$ 是一对对称点，

则 $z=\bar{\lambda}$ 是对称点（说明：显然仅有 $\bar{z}$ 对称点为 $\bar{z}$ 时，做出的圆才是正交的），

此时，$w=0$ 对称点 $w=\infty$，则所求分式线性映射为

$$w=k\left(\frac{z-\lambda}{z-\bar{\lambda}}\right)$$

此时：由 $|w|=|k|\left|\frac{z-\lambda}{z-\bar{\lambda}}\right|$ 而实轴上的点 z 对应 $w=1$ 上的点

则有：

$$|k|\left|\frac{z-x}{z-x}\right|=|k|=1\rightarrow$$ 取 $k=e^{i\theta}$，其中 θ 任意实数

得到

$$\boxed{w=e^{i\theta}\left(\frac{z-\lambda}{z-\bar{\lambda}}\right)}$$，$Im(z)>0$ 这是本题中分式线性映射的一般形式.

上半平面 $\xrightarrow{\text{映射}}$ 圆（形如该式的映射必将 $Im(z)>0$ 映射为 $|z|<1$）

例3. 求将 $Im(z)>0$ 映射成 $|w|<1$ 且满足 $w(2i)=0$，$\arg w'(2i)=0$ 的分式线性映射.

解：

由于一般形式为：$w=e^{i\theta}\left(\frac{z-\lambda}{z-\bar{\lambda}}\right)$

代入：$z=2i$ 时，$w=0$，有：$\lambda=2i$

而 $w=e^{i\theta}\left(\frac{z-2i}{z+2i}\right)\Rightarrow w'=e^{i\theta}\frac{(z+2i)-(z-2i)}{(z+2i)^2}\xrightarrow[z=2i]{\text{代入}}e^{i\theta}\frac{4i}{(4i)^2}=\frac{1}{4i}e^{i\theta}$ 显然 $\theta=0°$

不需要 i，由于是对 z 求

则得 $w=\frac{z-2i}{z+2i}$

$$=\frac{1}{4}e^{i\theta}\cdot(-i)=\frac{1}{4}e^{i(\theta-\frac{\pi}{2})}$$

$\theta=\frac{\pi}{2}$

例4. 求将单位圆 $|z|<1$ 映射为 $|w|<1$ 的分式线性映射的一般形式

解：设 $|z|<1$ 中 $\therefore$ z 点映射为 $w=0$，则由对称点为 $\frac{1}{z}$ $\frac{1}{\bar{z}}$，映射为 ∞

则一般形式：$w=k\frac{z-\lambda}{z-\frac{1}{\bar{\lambda}}}$ 此时：当 $|z|=1$ 时，映射为 $|w|=1$

故：$k\left|\frac{z-\lambda}{z-\frac{1}{\bar{\lambda}}}\right|$ $k\sqrt{\frac{z^2+\lambda^2}{z^2+(\frac{1}{\bar{\lambda}})^2}}$，则 $k\cdot\sqrt{\frac{z^2+\lambda^2}{z^2+(\frac{1}{\bar{\lambda}})^2}}\rightarrow$ 有：$k^2\frac{1+|\lambda|^2}{1+(\frac{1}{|\lambda|})^2}=1$

$$\rightarrow k^2\cdot\lambda^2=1$$

即：$|k|\cdot|\lambda|=1$. 取 $|k|=\frac{1}{|\lambda|}e^{i\varphi}$ 即可

故：代入 $k=\frac{1}{|\lambda|}e^{i\varphi}$ 一般形式为

$$w=\frac{1}{|\lambda|}e^{i\varphi}\frac{z-\lambda}{z-\frac{1}{\bar{\lambda}}}=e^{i\varphi}\frac{\bar{\lambda}}{|\lambda|}\cdot\frac{z-\lambda}{\bar{\lambda}z-1}.$$

显有 $\frac{\bar{\lambda}}{|\lambda|}=e^{i\theta}$，可以和 φ 合并，

说明：形为：

$w=e^{i\varphi}\frac{z-\lambda}{\bar{\lambda}z-1}$ 形式 得到一般形式：

$w=e^{i\varphi}\frac{z-\lambda}{}$ 为解

说明：形如

$w=e^{i\varphi}\dfrac{z-\lambda}{\bar{\lambda}z-1}$ 形式 得到一般形式：

的映射必定将 $|z|<1$ 映射为 $|w|<1$

且有：$\dfrac{\lambda}{|\lambda|}=e^{i\theta}$，可以和 φ 合并，

$w=e^{i\varphi}\dfrac{z-\lambda}{\bar{\lambda}z-1}$. 为解、

例5. 求将单位圆映射为单位圆且满足 $w(\frac{1}{2})=0$，$w'(\frac{1}{2})>0$ 的分式线性映射.

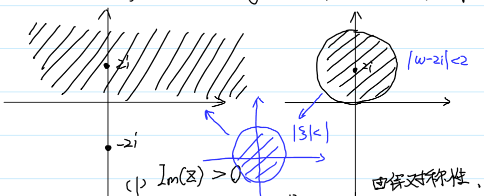
解：由通式：

$$w=e^{i\varphi}\frac{z-\lambda}{\bar{\lambda}z-1}=e^{i\varphi}\left(\frac{\frac{1}{2}-\lambda}{\frac{1}{2}\bar{\lambda}-1}\right)=0\text{，有：}\lambda=\frac{1}{2}\text{，}$$

$$\text{则：}w=e^{i\varphi}\frac{z-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}z-1}=\frac{2z-1}{z-2}e^{i\varphi}\longrightarrow w'=\frac{2(z-2)-(2z-1)}{(z-2)^2}=\frac{-3}{(z-2)^2}e^{i\varphi}$$

$$w'(\tfrac{1}{2})=-\frac{3}{\frac{9}{4}}e^{i\varphi}\longrightarrow\text{取}\varphi=\pi\text{：}=\frac{4}{3}>0\ \checkmark\text{，则代}\lambda\text{：}w=-\frac{z-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}z-1}=\frac{1-2z}{z-2}$$

例6，求将 $Im(z)>0$ 映射成 $|w-2i|<2$ 且满足 $w(2i)=2i$，$\arg w'(2i)=-\frac{\pi}{2}$ 的分式线性映射.



①：因 $w(2i)=2i$，即将 $2i$ 映射成圆心，则：$w(-2i)=\infty$

设映射形式 $w=k\dfrac{z-2i}{z+2i}$，由 $Im(z)=0$ 时，$|w-2i|=2$.

∴设 $z=x$，有：

$$\left|k\frac{x-2i}{x+2i}-2i\right|=2\quad\text{得：}\left|\frac{(k-2i)x-2ki-4i}{x+2i}\right|=2\ \text{对任意}x\text{均成立.}$$

x较烦琐.

我们采用一个中间映射.先考虑，将 $|w-2i|<2$ 映射为 $|\xi|<1$ 的映射.

容易求出为 $\xi=\dfrac{w-2i}{2}$，而将 $Im(z)>0$ 映射为 $|\xi|<1$，则：已得通式

为：$\xi=e^{i\theta}\dfrac{z-\lambda}{z+\lambda}$，故有 $\dfrac{w-2i}{2}=e^{i\theta}\dfrac{z-\lambda}{z+\lambda}$，

得 $w=2e^{i\theta}\dfrac{z-\lambda}{z+\lambda}+2i$ → 为满足 $-2i$ 时∞，$w(2i)=2i$ → 容易得：$\lambda=2i$ $\boxed{w=2e^{i\theta}\dfrac{z-2i}{z+2i}+2i}$

从而：$w'=2e^{i\theta}\dfrac{(z+\lambda)-(z-\lambda)}{(z+\lambda)^2}=\dfrac{4\lambda e^{i\theta}}{(z+\lambda)^2}=\dfrac{8ie^{i\theta}}{(z+2i)^2}$

则有：$w'(2i)=\dfrac{8ie^{i\theta}}{-16}=-\frac{1}{2}ie^{i\theta}=\frac{1}{2}e^{i(\theta-\frac{\pi}{2})}$ $\arg w'(2i)=-\frac{\pi}{2}\to\theta=0$.

$$w=2\frac{z-2i}{z+2i}+2i=2\left(\frac{z+iz-2i+i(2i)}{z+2i}\right)=2\frac{z-2}{z+2i}(1+i)$$