轴对称位移条件的确定过程

Sunday, February 12, 2023 3:38 PM

已求得：
$$\begin{cases} \sigma_r = \dfrac{A}{r^2} + B(1+2\ln r) + 2C \\ \sigma_\theta = -\dfrac{A}{r^2} + B(3+2\ln r) + 2C \\ \tau_{r\theta} = \tau_{\theta r} = 0 \end{cases}$$

法一：若无 B：σ_r, σ_θ 当 $r \to 0$ 时 $\to \infty$，不符合事实，故 $B=0$。

也可通过下列积分说明。

对于平面应力问题，有物理方程：（左侧为几何方程）

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} = \varepsilon_r = \frac{1}{E}(\sigma_r - \mu\sigma_\theta)$$
$$= \frac{1}{E}\left(\frac{A}{r^2} + B(1+2\ln r) + 2C + \frac{\mu A}{r^2} - \mu B(3+2\ln r) - 2C\mu\right)$$
$$= \frac{1}{E}\left[(1+\mu)\frac{A}{r^2} + (1-3\mu)B + 2(1-\mu)B\ln r + 2C(1-\mu)\right] \quad ①$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} = \varepsilon_\theta = \frac{1}{E}[\sigma_\theta - \mu\sigma_r]$$
$$= \frac{1}{E}\left[-\frac{A}{r^2} + B(3+2\ln r) + 2C - \mu\frac{A}{r^2} - \mu B(1+2\ln r) - 2C\mu\right]$$
$$= \frac{1}{E}\left(-(1+\mu)\frac{A}{r^2} + B(3-\mu) + 2(1-\mu)\ln r\, B + 2C(1-\mu)\right) \quad ②$$

$$\gamma_{r\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} = 0 \quad ③$$

$$\int \ln x = x\ln x - x + C$$

则由①积分有

$$u_r = \frac{1}{E}\left[(1+\mu)\cdot -\frac{A}{r} + (1-3\mu)Br + 2(1-\mu)B(r\ln r - r) + 2C(1-\mu)r\right]$$
$$= \frac{1}{E}\left[(1+\mu)\cdot -\frac{A}{r} + 2(1-\mu)Br(\ln r - 1) + (1-3\mu)Br + 2(1-\mu)Cr\right] + f(\theta)$$

代入②：

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} = \frac{r}{E}\left[\cancel{-(1+\mu)\frac{A}{r^2}} + B(3-\mu) + \cancel{2(1-\mu)B\ln r} + \cancel{2C(1-\mu)}\right]$$
$$- \frac{r}{E}\left[\cancel{-(1+\mu)\frac{A}{r^2}} + 2(1-\mu)B(\cancel{\ln r}-1) + (1-3\mu)B + \cancel{2(1-\mu)C}\right] - f(\theta)$$
$$= \frac{r}{E}\left[(3-\mu)B + 2(1-\mu)B - (1-3\mu)B\right] - f(\theta)$$

$3 - \cancel{\mu} + 2 - \cancel{2\mu} - 1 + \cancel{3\mu} = 4$

$$= \frac{4Br}{E} - f(\theta)$$

故有：$u_\theta = \dfrac{4Br\theta}{E} - \displaystyle\int f(\theta)\,d\theta + f_1(r)$ （偏积分）

代入：$\gamma_{r\theta} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u_r}{\partial \theta} + \dfrac{\partial u_\theta}{\partial r} - \dfrac{u_\theta}{r} = 0$

则：
$$\frac{1}{r}f'(\theta) + f_1'(r) - \frac{4B\theta}{E} + \frac{1}{r}\int f(\theta)\,d\theta - \frac{f_1(r)}{r} = 0$$

得：$-rf_1'(r)+f_1(r)=\int f(\theta)d\theta+f'(\theta)-\frac{4Br\theta}{E}$

此时：左边仅r函数，右边仅θ函数，故仅能等于常数F

$$\begin{cases} f_1(r)-rf_1'(r)=F & ① \\ \dfrac{df(\theta)}{d\theta}+\int f(\theta)d\theta-\dfrac{4Br\theta}{E}=F, & ② \end{cases}$$

我们得$B=0$

此时：若 $B\neq 0$，则θ是变动的，故该式$\neq$常数，不满足位移单值条件，因此有：$B=0$

对①式积分：有：

$$\frac{df_1}{f_1(r)-F}=\frac{dr}{r}$$ 即：$\ln(f_1(r)-F)=\ln Cr$

$\therefore f(\theta)=F+Cr=Hr+F$，其中$H$为常数

对于②式，代入：$B=0$，有：

$$\frac{df(\theta)}{d\theta}+\int f(\theta)d\theta=F$$

则：$\frac{d^2f(\theta)}{d\theta^2}+f(\theta)=0 \xrightarrow{通解} \boxed{f(\theta)=I\cos\theta+K\sin\theta}$

得到位移表达式：

$$\begin{cases} u_\theta=\cancel{\dfrac{4Br\theta}{E}}-\int(\cancel{I\cos\theta}+\cancel{K\sin\theta})d\theta+\cancel{Hr}+\cancel{F} \\ u_r=\dfrac{1}{E}\left[(1+\mu)\cdot\left(-\dfrac{A}{r}\right)+\cancel{2(1-\mu)Br(\ln r-1)+(1-3\mu)Br}+(1-2\mu)Cr\right]+\cancel{I\cos\theta+K\sin\theta} \end{cases}$$

其中：代入$B=0$，而在轴对称应力情况下：

有 $u_\theta=0$，则此时 $\Rightarrow I=K=H=F=0$，

则：有位移表达式：

则：有位移表达式：

$$\boxed{\begin{cases} u_r = \frac{1}{E}\left[-(1+\mu)\frac{A}{r} + 2(1-\mu)Cr\right] \\ u_\theta = 0 \end{cases}}$$