刚体空间运动部分的推导

Sunday, April 9, 2023 10:00 AM

①:叉乘公式

设有坐标列阵 $a=[a_1,a_2,a_3]^T$,

坐标方阵

$$[\tilde{a}]=\begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix}$$

则:

$e_1\ e_2\ e_3$ ← 标准证明应为:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}=\vec{i}(a_2b_3-a_3b_2)-(a_1b_3-a_3b_1)\vec{j}+(a_1b_2-a_2b_1)\vec{k}$$

而:
$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_2b_3-a_3b_2 \\ a_3b_1-a_1b_3 \\ a_1b_2-a_2b_1 \end{bmatrix}$$

即证明了 $\{c\}=[\tilde{a}]\{b\}$

②: 方向余弦矩阵的性质

$C_{11}=\cos\langle 1_i,1_j\rangle$, $C_{12}=\cos\langle 1_j,2_i\rangle$

$C_{21}=\cos\langle 1_i,2_j\rangle$

1) 方向余弦矩阵为正交阵,行列式为 1

$$[C^{ij}]^{-1}=[C^{ij}]^T=[C^{ji}],\quad \det[C^{ij}]=1$$

证明: ①:明确: C^{ij} 是 j 中坐标在 i 中的方向余弦,故有:

$$\begin{cases} e_1^j=C_{11}e_1^i+C_{21}e_2^i+C_{31}e_3^i & (\text{投到各轴上}) \\ e_2^j=C_{12}e_1^i+C_{22}e_2^i+C_{32}e_3^i \\ e_3^j=C_{13}e_1^i+C_{23}e_2^i+C_{33}e_3^i \end{cases}$$

⟶ 显然有: $C_{1m}C_{1n}+C_{2m}C_{2n}+C_{3m}C_{3n}=\begin{cases}1 & m=n\text{ 时} \\ 0 & m\neq n\text{ 时}\end{cases}$

$\parallel$

$e_m^j\cdot e_n^j=\delta_{mn}$

则有:

$$[C_{ij}]\cdot[C_{ij}]^T=\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}=I,$$

则: $[C_{ij}]^T=[C_{ij}]^{-1}$, 即矩阵正交;

而有:

$$\det[C_{ij}]=\begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{vmatrix}=C_{11}\begin{vmatrix} C_{22} & C_{23} \\ C_{32} & C_{33} \end{vmatrix}-C_{21}\begin{vmatrix} C_{12} & C_{13} \\ C_{32} & C_{33} \end{vmatrix}+C_{31}\begin{vmatrix} C_{12} & C_{13} \\ C_{22} & C_{23} \end{vmatrix}$$

$$=(C_{11}\vec{e}_1^i+C_{21}\vec{e}_2^i+C_{31}\vec{e}_3^i)\cdot\left[\begin{vmatrix} C_{22} & C_{23} \\ C_{32} & C_{33} \end{vmatrix}e_1^i-\begin{vmatrix} C_{12} & C_{13} \\ C_{32} & C_{33} \end{vmatrix}e_2^i+\begin{vmatrix} C_{12} & C_{13} \\ C_{22} & C_{23} \end{vmatrix}e_3^i\right]$$

$$= (C_{11}e_1^i + C_{21}e_2^i + C_{31}e_3^i)\begin{vmatrix} e_1^i & e_2^i & e_3^i \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{vmatrix}$$

就是 e_1^j

$$= (C_{11}, C_{21}, C_{31}) \cdot [(C_{12}, C_{22}, C_{32}) \times (C_{13}, C_{23}, C_{33})]$$

$$= e_1^j \cdot [e_2^j \times e_3^j] = 1 \quad \text{显然为}$$

性质②：任一矢量 a 在坐标系 $Ox_iy_iz_i$，Ox_j 坐标系中的坐标列阵满足关系：

$$\boxed{\begin{aligned} \{a\}_i &= [C_{ij}]\{a\}_j \quad (1) \\ [\tilde{a}]_i &= [C_{ij}][\tilde{a}_j][C_{ij}]^T \quad (2) \end{aligned}}$$

性质1证明：

$$\{a\}_j = \begin{Bmatrix} a_j^1 \ (x_j) \\ a_j^2 \ (y_j) \\ a_j^3 \ (z_j) \end{Bmatrix}$$ 则：$a_i = a_j^1\cos\langle x_j, x_i\rangle + a_j^2\cos\langle y_j, x_i\rangle + a_j^3\cos\langle z_j, x_i\rangle$

$+ a_j^1 \cdot \cos\langle x_j, y_i\rangle$

$+ a_j^1\cos\langle x_j, z_i\rangle$

$= [C_{ij}]\{a_j\}$ ✓

$x_j \to i$ 坐标

也可：

因：$\{e_1^j\}_i = [C_{11}, C_{21}, C_{31}]^T$，
$\{e_2^j\}_i = [C_{12}, C_{22}, C_{32}]^T$
$\{e_3^j\}_i = [C_{13}, C_{23}, C_{33}]^T$

$$\{a\}_i = \begin{bmatrix} e_{1i}^j\{a_j\} \\ e_{2i}^j\{a_j\} \\ e_{3i}^j\{a_j\} \end{bmatrix} = [C_{ij}]\{a_j\}$$

性质2的证明：

而：
$$[\tilde{a}]_i = \begin{bmatrix} 0 & -a_{3i} & a_{2i} \\ +a_{3i} & 0 & -a_{1i} \\ -a_{2i} & +a_{1i} & 0 \end{bmatrix} \quad [\tilde{a}_j] = \begin{bmatrix} 0 & -a_{3j} & a_{2j} \\ -a_{3j} & 0 & -a_{1j} \\ a_{2j} & -a_{1j} & 0 \end{bmatrix}$$

有：$[C_{ij}][a_j][C_{ij}]^T$

$$= \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -a_{3j} & a_{2j} \\ a_{3j} & 0 & -a_{1j} \\ -a_{2j} & a_{1j} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -a_{2j}C_{13}+a_{3j}C_{12} & -C_{11}a_{3j}+C_{13}a_{ij} & C_{11}a_{2j}-C_{12}a_{ij} \\ -a_{2j}C_{23}+a_{3j}C_{22} & -C_{21}a_{3j}+C_{23}a_{ij} & C_{21}a_{2j}-C_{22}a_{ij} \\ -a_{2j}C_{33}+a_{3j}C_{32} & -C_{31}a_{3j}+C_{33}a_{ij} & C_{31}a_{2j}-C_{32}a_{ij} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{bmatrix}$$

$$b_{11}=C_{11}(-a_{2j}C_{13}+a_{3j}C_{12})+C_{12}(a_{ij}C_{13}-a_{3j}C_{11})+C_{13}(a_{2j}C_{11}-a_{ij}C_{12})$$

$$= -\begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ a_{ij} & a_{2j} & a_{3j} \\ C_{11} & C_{12} & C_{13} \end{vmatrix} = 0 \quad \checkmark$$

同理：$b_{22}=b_{33}=0$

Cramer 法则：

$C_{31} = \begin{vmatrix} \end{vmatrix}$ …

而：$b_{21} = -C_{11}\begin{vmatrix} a_{2j} & a_{3j} \\ C_{22} & C_{23} \end{vmatrix} + C_{12}\begin{vmatrix} a_{ij} & a_{3j} \\ C_{21} & C_{23} \end{vmatrix} - C_{13}\begin{vmatrix} a_{ij} & a_{2j} \\ C_{21} & C_{22} \end{vmatrix}$

$$= -\begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ a_{ij} & a_{2j} & a_{3j} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ a_{ij} & a_{2j} & a_{3j} \end{vmatrix} = a_{3i}\cdot 1$$

为特征值

同理证得其余行列。

性质3、对任意三套坐标系，记为 $Ox_iy_iz_i$，$Ox_jy_jz_j$，$Ox_ky_kz_k$，方向余弦满足：

$$[C^{ik}]=[C^{ij}][C^{jk}]$$

解：利用：

$\{a\}_i=[C^{ij}]\{a_j\}$，$\{a_j\}=[C^{jk}]\{a_k\}$ 直接代入可得

$\{a\}_i=[C^{ij}][C^{jk}]\{a_k\}$ 则：$[C^{ik}]=[C^{ij}][C^{jk}]$

性质4. 方向余弦阵存在等于1的特征值。

利用特征值求解方法：$|M-\lambda E|=0$

只需证 $\det([E]-[C^{ij}])=0$，此时：利用 C^{ij} 的正交性，有：

$E=[C^{ij}][C^{ij}]^T$

此时有：$\det([C^{ij}]\cdot([C^{ij}]^T-[E]))=0$ 又：利用性质 $\det(AB)=\det A\det B$

而 $\det([C^{ij}])=1$，

$\det(A^T)=\det A$.

$=\det([C^{ij}]^T-[E]) = \det(([C^{ij}]-[E])^T)$

$=\det([C^{ij}]-[E]) = -\det(E-[C^{ij}])$

则：$\det(E-[C^{ij}])=0$，即存在为1的特征值。

$= \det([C^{ij}] - [E]) = -\det([E] - [C^{ij}])$

则：$\det([E] - [C_{ij}]) = 0$，即存在为1的特征值.

推论：对任意两套坐标 $Ox_iy_iz_i$，必存在一矢量P，使得矢量在两套坐标系中的坐标列阵相等：

故：设矢量为$\{P_i\}$，若$\{P_i\}$为特征向量，则：

$\{P_i\} = [C_{ij}]\{P_j\} = \{P_j\}$ ，故对于$[C^{ij}]$的特征向量，则此矢量在 $Ox_iy_iz_i$ 和 $Ox_jy_jz_j$ 的列阵相等.

$\longrightarrow$ 此即为 $Ox_iy_iz_i \rightarrow Ox_jy_jz_j$ 的转动轴.