二维正态分布的边缘密度函数

Tuesday, November 21, 2023 2:33 PM

二维正态分布函数有概率密度：

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}\boxed{-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}}\right]\right\}$$

$(x,y\in(-\infty,+\infty))$

求其边缘概率密度

解：结构对x, y形式对称，仅求x概率密度：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,dy$$

因于 $\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\rho^2\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}=\left(\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}-\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2$,

代换上方的后面一部分，有：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,dy=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\cdot\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\left[\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}-\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right]^2+(1-\rho^2)\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\cdot e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)-\rho\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)\right]^2\right\}dy.$$

此时：取 $t=\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\left[\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)-\rho\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)\right]$

$\therefore dt=\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\cdot\frac{1}{\sigma_2}dy$, $\to dy=\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}\cdot dt$

得：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,dy=\frac{1}{2\pi\sigma_1\cancel{\sigma_2}\cancel{\sqrt{1-\rho^2}}}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}\cdot\cancel{\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

由公式：$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\sqrt{2\pi}$，则

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}$$ 即正态分布函数.

对于二维正态随机变量

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

而 $f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}$, $f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}e^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}$

显然：$f_X(x)f_Y(y)=f(x,y)$ 仅有当 $\rho=0$ 时成立，即 $\rho=0$ 时，$f_X(x)$, $f_Y(y)$ 相互独立.