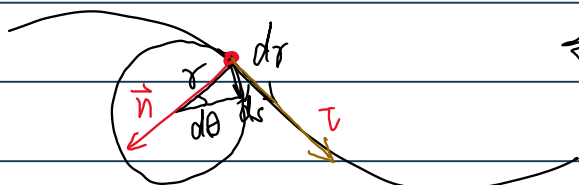


# Frenet标架与切向量公式建立推导

Thursday, October 12, 2023 7:42 PM

平面曲线

①首先：对于空间曲面，用 $x, y, z$ 难以表示其相关参量，  
则使用一个从原点到曲线点的 $\vec{r}$ （向径），我们希望换一个坐



我们考虑一个无 $a_c$ 的物体，有：

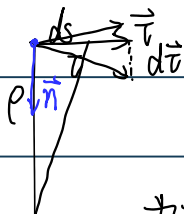
标架表示  
加速度等量。

$$\vec{a} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \frac{v^2}{\rho} \cdot (\vec{n})$$

而设经过弧长为  $ds = v dt$ ,

$$\therefore \frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = v \cdot \vec{t} \cdot \frac{1}{v} = 1 \cdot \vec{t} \text{ 为切向量} \Rightarrow \text{取 } \vec{t} = \frac{d\vec{r}}{ds} \text{ 为切向量}$$

$$\frac{d^2 \vec{r}}{ds^2} = \frac{d}{ds} (1 \cdot \vec{t}) = \frac{d}{dt} \vec{t} \cdot \frac{dt}{ds}$$



$$\text{有: } \frac{d\vec{t}}{dt} = \frac{ds}{p} \cdot \vec{n}, \text{ 则: } \frac{d^2 \vec{r}}{ds^2} = \frac{\vec{n}}{p} \cdot \frac{ds}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{1}{p} \vec{n} = \kappa \cdot \vec{n}$$

(取 $\vec{n}$ 为指向圆心的方向)

$$\text{为求 } \frac{d\vec{n}}{ds}, \text{ 由 } \langle \vec{n}, \vec{t} \rangle = 0, \text{ 求得: } \frac{d\vec{n}}{ds} \cdot \vec{t} + \frac{d\vec{t}}{ds} \cdot \vec{n} = 0, \text{ 由: } \frac{d\vec{t}}{ds} = \kappa \cdot \vec{n}$$

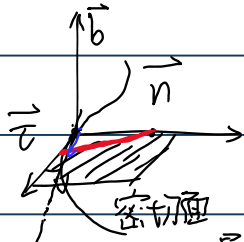
$$\text{故 } \frac{d\vec{n}}{ds} \cdot \vec{t} + \kappa = 0 \rightarrow \frac{d\vec{n}}{ds} = -\kappa \cdot \vec{t} \text{ (显然: 由 } \frac{d}{ds} \langle \vec{n}, \vec{n} \rangle = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{n}}{ds} \cdot \vec{n} = 0 \text{) 即 } \vec{n} \text{ 分量为 } 0$$

显然:

$$\text{得到 } \frac{d\vec{r}}{ds} = 1 \cdot \vec{t}, \frac{d^2 \vec{r}}{ds^2} = \frac{d\vec{t}}{ds} = \kappa \vec{n}, \frac{d\vec{n}}{ds} = -\kappa \vec{t}$$

②而对于空间曲线而言:

我们取另外一个标架



$$\vec{b} = \vec{t} \times \vec{n}$$

定义密切面是与切线 $\vec{t}$ 垂直的平面，显然 $\vec{t}, \vec{n}$ 均在平面内。

显然  $\frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{t}$  仍然成立。

则：由于 $\vec{t}$ 及其邻域内的点均在密切面内，仍然有：

$$\frac{d^2 \vec{r}}{ds^2} = \frac{d\vec{t}}{ds} = \kappa \cdot \vec{n} \text{ 仍然成立: ①}$$

$$\text{由: } \langle \vec{t}, \vec{n} \rangle = 0 \rightarrow \frac{d\vec{t}}{ds} \cdot \vec{n} + \frac{d\vec{n}}{ds} \cdot \vec{t} = 0, \text{ 则: } \frac{d\vec{n}}{ds} \cdot \vec{t} = -\kappa$$

$$\langle \vec{n}, \vec{n} \rangle = 0 \rightarrow 2 \frac{d\vec{n}}{ds} \cdot \vec{n} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{n}}{ds} = -\kappa \vec{t} + \lambda \vec{b}$$

$$\langle \vec{b}, \vec{n} \rangle = 0 \rightarrow \frac{d\vec{b}}{ds} \cdot \vec{n} + \frac{d\vec{n}}{ds} \cdot \vec{b} = 0, \frac{d\vec{n}}{ds} \cdot \vec{b} = \lambda$$

②

我们定义  $-\langle \frac{d\vec{b}}{ds}, \vec{n} \rangle = \lambda$  称为挠率，则：

我们定义  $-\langle \frac{d\vec{b}}{ds}, \vec{n} \rangle = \lambda$  称为挠率, 则:

$$\text{另由 } \langle \vec{t}, \vec{b} \rangle = 0 \rightarrow \frac{d\vec{t}}{ds} \cdot \vec{b} + \frac{d\vec{b}}{ds} \cdot \vec{t} = 0, \text{ 而代入 } \frac{d\vec{t}}{ds} = K \cdot \vec{n} \text{ 得: } \frac{d\vec{b}}{ds} \cdot \vec{t} = 0$$

$$\text{从而: } \frac{d\vec{b}}{ds} = -\lambda \vec{n},$$

整理得到公式:

$$\begin{bmatrix} \frac{d\vec{t}}{ds} \\ \frac{d\vec{n}}{ds} \\ \frac{d\vec{b}}{ds} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & K & \\ -K & & \lambda \\ & -\lambda & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{t} \\ \vec{n} \\ \vec{b} \end{bmatrix},$$

其中:  $\lambda = -\langle \frac{d\vec{b}}{ds}, \vec{n} \rangle$   
为挠率