带权拟阵的贪心算法证明

Tuesday, September 17, 2024 11:55 PM

引理1：$M=\{S,I\}$ 为有权函数 W 的带权拟阵，$x\in S$ 使 $\{x\}$ 为独立子集，
则 S 存在最优子集 A 且 $x\in A$

证：若不存在 $x\in S$，使得 S 为独立子集，则显然上式不成立。
当有元素时，设有一非空最优子集 B，由 $B\in I$，显然 B 中任一单个元素 y 组成的子集均为独立子集。

此时，因于 x 是 S 中的第一个单元素独立子集，则 $\forall y\in B$，$W(x)\geq W(y)$ 成立。

显然：$x\in B$ 时，取 $A=B$，则定理成立；若 $x\notin B$，构造独立子集如下：
每次取 $y_i\in B$，$y_i\notin A$ 加入 A 并维持 A 的独立性，直到 $|B|=|A|$。
此时，显然最后有一元素 y，$y\in B$，$y\notin A$

$$W(A)=W(B)+W(x)-W(y)\geq W(B)$$

$\longrightarrow W(x)\geq W(y)$，显然 $W(A)\geq W(B)$ 成立，而由 B 是最优子集，单元素其权已经最大；则 $W(A)=W(B)$，即 A 也是最优子集，得证。

注意：在独立集中具有最大权的元素，是首次被选用的元素

引理2：设 $M=(S,I)$ 是拟阵，若 S 中 x 不是空集 $\emptyset$ 的可扩展元素，则 x 不可能是任一独立子集 A 的可扩展元素，即：$A\cup\{x\}\in I$。

反证法：设 x 不是 $\emptyset$ 的可扩展元素，而 x 是独立子集 A 的可扩展元素；$A\cup\{x\}\in I$，则由 I 的遗传性可推出 x 是独立的，与 x 不是空集可扩展元素矛盾。

引理3：拟阵的最优子结构性质

设 x 是带权拟阵 $M=(S,I)$ 的子集贪心算法选择的元素，即 S 中第一个元素，则：构造拟阵 $M'=(S',I')$，原问题转化为 M' 的最优子集性质，其中有：

$$S'=\{y\mid y\in S \text{ 且 } \{x,y\}\in I\}$$

$$I'=\{B\mid B\subseteq S-\{x\} \text{ 且 } B\cup\{x\}\in I\}$$

证若 A 是包含 M 元素 x 的最大权独立子集，则 $A'=A-\{x\}$ 依然为 M' 的独立子集，若不是，则满足 $A=A'\cup\{x\}$ 均为 S 的子集。

因此两种均有：$W(A)=W(A')+W(x)$，即：M 包含 x 的子集包含 M' 的最优子集，具有最优子结构性质。