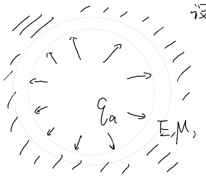
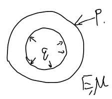
压力隧洞问题的求解

Monday, February 13, 2023   4:58 PM



设有内压为 p_a 的压力隧洞：厚壁圆筒埋在无限大
给出圆筒弹性模量 E 和泊松比 ν，以及无限大介质弹性模量 E′ 和泊松比 ν′

此时：有：设圆筒内压 q，外压 P，则 $\phi = A\ln r + Cr^2$



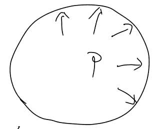
$$\sigma_r = \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r} = \frac{1}{r}\cdot\frac{A}{r} + 2C = \frac{A}{r^2} + 2C$$

$$\sigma_\theta = \frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} = -\frac{A}{r^2} + 2C$$

有：①：应力条件；

$$\begin{cases} \sigma_r|_{r=a} = \frac{A}{a^2} + 2C = -q & ① \\ \sigma_r|_{r=b} = \frac{A}{b^2} + 2C = -P & ② \end{cases}$$

此时：由边界连续条件：
对外部圆：



$$\begin{cases} \sigma_r|_{r=b} = \frac{A'}{b^2} + 2C' = -P & ③ \\ \sigma_r|_{r=\infty} = 2C' = 0, & ④ \end{cases}$$

基本思路 ~~一类~~ 先列基本方程

共5个未知数，4个方程，需1个补充方程；
其中应力连续已列入；
故有位移连续条件：$u_r = u_{r_2}$

※ $\boxed{\text{平面应变下的位移计算公式}}$

$$\begin{cases} u_r = \frac{1-\nu^2}{E}\left[-\left(1+\frac{\nu}{1-\nu}\right)\frac{A}{r} + 2\left(1-\frac{\nu}{1-\nu}\right)Cr\right] + I\sin\theta + K\cos\theta \\ u_r' = \frac{1-\nu'^2}{E'}\left[-\left(1+\frac{\nu'}{1-\nu'}\right)\frac{A'}{r} + 2\left(1-\frac{\nu'}{1-\nu'}\right)C'r\right] + I'\sin\theta + K'\cos\theta \end{cases}$$

有：提入 $1-\nu$：则：

$$\begin{cases} u_r = \frac{1+\nu}{E}\left[-\frac{A}{r} + (2(1-2\nu))Cr\right] + I\sin\theta + K\cos\theta \\ u_r' = \frac{1+\nu'}{E'}\left[-\frac{A'}{r} + (2(1-2\nu'))C'r\right] + I'\sin\theta + K'\cos\theta \end{cases}$$

且 $C' = 0$

利用：$u_r|_b = u_r'|_b$，

则：①为了让 $u_r = u_r'$ 在θ取任何值时成立，有：

$$I = I',\ K = K'$$

且有：

$$\frac{1+\nu}{E}\left[-\frac{A}{r} + 2(1-2\nu)Cr\right] = \frac{1+\nu'}{E'}\left[-\frac{A'}{r}\right]$$

由于 $r=b$ 时位移相同，
其中：$r=b$

即：

$$2(1-2\nu)Cr = \frac{A}{r} - \frac{E}{E'}\frac{1+\nu'}{1+\nu}\cdot\frac{A'}{r} \quad ①$$

代 $r=b$ 即：$2C = \frac{1}{(1-2\nu)b^2}\left[A - \frac{1+\nu'}{1+\nu}A'\right]$

与上式联立

$$\begin{cases} \frac{A}{a^2} + 2C = -q & ② \\ \frac{A}{b^2} + 2C = -P & ③. \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{A'}{b^2} = -P & ④ \\ \cdots\ x \end{cases}$$

此时令 $\frac{E(1+\nu')}{E'(1+\nu)} = \frac{1}{n}$，
即：$n = \frac{E'(1+\nu)}{E(1+\nu')}$

解方程求解未知数：
则：④→③：

$$\frac{A}{b^2} + 2C = \frac{A'}{b^2} \longrightarrow \frac{A'-A}{\cancel{b^2}} = 2C = \frac{1}{\cancel{b^2}(1-2\nu)}\cdot\left[A - \frac{1+\nu'}{1+\nu}A'\right] \quad ①$$

则：$\left[2(1-2\nu)Cr - \frac{A}{r}\right] = -\frac{1}{n}\frac{A'}{r}$

$$\frac{A}{b^2}+2C=\frac{A'}{b^2} \longrightarrow \frac{A-A'}{b^2}=2C=\frac{1}{b^2(1-2\nu)}\cdot\left[A-\frac{1+\nu}{1+\nu}A\right] \quad ①$$

$$-\frac{1}{n}\frac{A'}{r}$$

而：$A\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)=p-q \Rightarrow -\frac{A'}{b^2}-q$ ② （q已知）

$$\begin{cases} A\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)=-\frac{A'}{b^2}-q & ① \\ n\left[2C(1-2\nu)-\frac{A}{b^2}\right]+\frac{A'}{b^2}=0 \end{cases}$$

$$n\left[2(1-2\nu)C-\frac{A}{b^2}\right]+\frac{A'}{b^2}=0$$

其中：$2C=\frac{A'-A}{b^2} \xrightarrow{\text{代入}} n\left[(1-2\nu)\frac{A'-A}{b^2}-\frac{A}{b^2}\right]+\frac{A'}{b^2}=0$

得：$(1-2\nu)\frac{A'-A}{\cancel{b^2}}=-\frac{1}{n}\frac{A'}{\cancel{b^2}}+\frac{A}{\cancel{b^2}}$

$\therefore (1-2\nu+\frac{1}{n})A'=(1-2\nu+1)A$，又：$A\left(\frac{b^2-a^2}{a^2b^2}\right)=-\frac{A'}{b^2}-q$

$$-qb^2(1-2\nu+\frac{1}{n})-\left(\frac{b^2}{a^2}-1\right)A(1-2\nu+\frac{1}{n})=2(1-\nu)A \qquad A'=-qb^2-\left(\frac{b^2-a^2}{a^2}\right)A$$

$$-qb^2(1-2\nu+\frac{1}{n})=\left[2(1-\nu)+\frac{b^2}{a^2}(1-2\nu+\frac{1}{n})-(1-2\nu+\frac{1}{n})\right]A$$

$$=\left[1-\frac{1}{n}+\frac{b^2}{a^2}(1-2\nu+\frac{1}{n})\right]A$$

$$\therefore \boxed{A=\frac{-qb^2(1-2\nu+\frac{1}{n})}{1-\frac{1}{n}+\frac{b^2}{a^2}(1-2\nu+\frac{1}{n})}}$$

$$=-q\frac{[(1-2\nu)n+1]b^2}{n-1+\frac{b^2}{a^2}[(1-2\nu)n+1]}$$

$$\boxed{=-q\frac{[1+(1-2\nu)n]b^2}{[1+(1-2\nu)n]\frac{b^2}{a^2}-(1-n)}} \quad A$$

$$A'=-qb^2-\frac{b^2-a^2}{a}A$$

$$=-qb^2\left[1-\left(\frac{b^2}{a^2}-1\right)\times\frac{(1-2\nu+\frac{1}{n})}{1-\frac{1}{n}+\frac{b^2}{a^2}(1-2\nu+\frac{1}{n})}\right]$$

$$=\frac{-qb^2}{1-\frac{1}{n}+\frac{b^2}{a^2}(1-2\nu+\frac{1}{n})}\left[1-\frac{1}{n}+\cancel{\frac{b^2}{a^2}(1-2\nu+\frac{1}{n})}-\cancel{\frac{b^2}{a^2}(1-2\nu+\frac{1}{n})}+(1-2\nu+\frac{1}{n})\right]$$

$$=\frac{-qb^2\cdot 2(1-\nu)}{1-\frac{1}{n}+\frac{b^2}{a^2}(1-2\nu+\frac{1}{n})}=-q\frac{2(1-\nu)nb^2}{(n-1)+\frac{b^2}{a^2}[(1-2\nu)n+1]}$$

$$\boxed{=-q\frac{[2(1-\nu)n]b^2}{[1+(1-2\nu)n]\frac{b^2}{a^2}-(1-n)}} \quad A'$$

而：$2C=\frac{A'-A}{b^2}=\frac{1}{\text{分母}}\cdot\left[2(1-\nu)n-1-(1-2\nu)n\right]$

$$=\frac{1}{\text{分母}}\left[2n-\cancel{2n\nu}-1-n+\cancel{2\nu n}\right]=\frac{1}{\text{分母}}[n-1]=\boxed{\frac{-q[n-1]}{[1+(1-2\nu)n]\frac{b^2}{a^2}-(1-n)}}$$

2C

则：

$$\begin{cases} \sigma_r=\frac{A}{r^2}+2C \\ \quad =-q\frac{[1+(1-2\nu)n]\frac{b^2}{r^2}-(1-n)}{[1+(1-2\nu)n]\frac{b^2}{a^2}-(1-n)} \\ \sigma_\theta=-\frac{A}{r^2}+2C \\ \quad =q\frac{[1+(1-2\nu)n]\frac{b^2}{r^2}+(1-n)}{[1+(1-2\nu)n]\frac{b^2}{a^2}-(1-n)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma_r'=\frac{A'}{r^2}=\frac{-q[2(1-\nu)n]\frac{b^2}{r^2}}{[1+(1-2\nu)n]\frac{b^2}{a^2}-(1-n)} \\ \sigma_\theta'=-\sigma_r' \text{（略）} \end{cases}$$

$$\Gamma'(1+\nu)$$

其中：$n = \dfrac{E'(1+\nu)}{E(1+\nu')}$