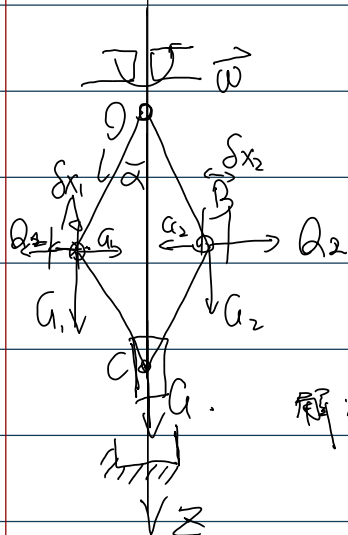


例题1.1

Friday, March 10, 2023 4:20 PM

伯特离心调速器如图，以匀角速度 ω 沿 z 轴转动，其中A、B质量 m ，套筒C质量为 M ，可沿 z 上下移动，杆长为 l ，质量略去，求稳态时杆的张角 α 。



① 动力学普遍方程为： $\sum_{i=1}^n (F_i - m_i a_i) \delta r_i = 0$ 利用虚功原理：

有： $G_1 \delta z_1 + G_2 \delta z_2 + Q_1 \delta x_1 + Q_2 \delta x_2 + G \delta z_3 = 0$ ，其中 Q_1, Q_2 为惯性力， Q_1, Q_2 为惯性力。

为整个系统的 Lagrange 方程。

解：A、B 在水平面内作匀速圆周运动，加速度大小

$a = \omega^2 \cdot (l \sin \alpha)$ ，则 AB 的惯性力

大小为 $Q_1 = m a = m \omega^2 (l \sin \alpha) = Q_2$

此时：由动力学普遍方程，则：

$$G_{1,z} \delta z_1 + G_{2,z} \delta z_2 + G \delta z_3 + Q_1 \delta x_1 + Q_2 \delta x_2 = 0$$

而由 $x_1 = l \sin \alpha, x_2 = l \sin \alpha, z_3 = 2l \cos \alpha$ ，以 α 为广义坐标，

$$\text{则：} \delta z_1 = -l \sin \alpha = \delta z_2 \quad \delta z_3 = -2l \sin \alpha, \quad \delta x_1 = l \cos \alpha = \delta x_2$$

代入有：

$$-(G_1 + G_2) l \sin \alpha - 2G l \sin \alpha + 2m \omega^2 (l \sin \alpha) l \cos \alpha = 0$$

$$\text{则：} l \sin \alpha (-G_1 - G_2 - 2G + 2m \omega^2 l \cos \alpha) = 0$$

$$\text{解：} \alpha = 0 \quad \text{得：} 2m \omega^2 l \cos \alpha = G_1 + G_2 + 2G$$

$$\text{得：} \begin{cases} \text{解1: } \alpha = 0 \\ \text{解2: } \alpha = \arccos \frac{G_1 + G_2 + 2G}{2m \omega^2 l} \end{cases}$$

$$\text{由 } G_1 = G_2 = g, \quad G = M \quad \Rightarrow \quad \alpha = \arccos \left(\frac{m + M}{m \omega^2 l} \right)$$