全概率公式和贝叶斯公式的证明

Wednesday, October 25, 2023 9:36 AM

①: 全概率公式: 若样本空间 S, 而 $B_1, B_2, \cdots B_n$ 为事件 S 的一个划分, 则:

$$P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + \cdots + P(A|B_n)P(B_n)$$

证明: 由于是事件的划分, 则

$B_1 \cup B_2 \cup \cdots = S$, 此时: $\sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A \cdot B_i)$

由 $B_1, B_2 \cdots$ 互不相交.

则: $P(A) = P(A \cap S) = P(A \cap (B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n))$

$= P(AB_1 \cup AB_2 \cup \cdots \cup AB_n)$

由于 $B_1, B_2 \cdots$ 互不相交, 则: $(AB_i)(AB_j) = \emptyset$, 此时有:

$P(AB_1 \cup AB_2 \cup \cdots \cup AB_n) = \sum_{i=1}^{n} P(AB_i)$

$= \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i)$

② Bayes 公式: 设试验 E 的样本空间为 S, A 为 E 的事件, $B_1, B_2, \cdots$ 为 S 的一个划分, 且有 $P(A)>0$, $P(B_i)>0$, 则有:

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A|B_j)P(B_j)}$$

解: 有

$P(A) = P(A \cap S) = P[A \cap (B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n)]$

$= P(AB_1) + P(AB_2) + \cdots + P(AB_n)$

$= \sum_{j=1}^{n} P(A|B_j)P(B_j)$

而: $P(AB_i) = P(A|B_i)P(B_i)$, 则: $P(B_i|A) = \frac{P(AB_i)}{P(A)}$ un 成立