常系数线性单波方程的精确解推导

计算流体力学中的基本方程可以分为椭圆形，抛物形和双曲型三大类, 其中常用的是**常系数线性单波方程**, 其中, c为波速

$$\frac{\partial u}{\partial t}+c\frac{\partial u}{\partial x}=0$$

其中初值$u(x,0)=\varphi(x)$, 精确解可以通过如下方法进行求解(下面的解法由我使用GPT生成, 或许有问题, 但傅里叶变换是一种很好的思路):

1. 对方程两边进行Fourier变换:

   $$F(u_t)+cF(u_x)=0$$

   其中$F(u)$表示u的Fourier变换。由Fourier变换的性质知,$\mathcal{F}(u_t)=i\omega\mathcal{F}(u)$, 以及$F(u_x)=-ikF(u)$,所以上式可写为:

   $$i\omega F(u)-ikcF(u)=0\rightarrow(i\omega-ikc)\mathcal{F}(u)=0$$

   由上式可知,$\mathcal{F}u$在$\omega=kc$时不为零， 其余均为0，因而取原函数为阶跃δ函数, 所以方程的Fourier变换为

   $$\mathcal{F}(u)=C\delta(\omega-kc)$$

   其中C为任意常数,δ为Dirac delta 函数。
2. 对上式进行Fourier逆变换,可得方程的**精确解**为:

   $$u(x,t)=Cf(x-ct)$$

   其中$f(x)$为任意函数。
3. 由**给定的初始条件**$u(x,0)=\varphi(x)=Cf(x)$, 代入$t=0$可以确定$Cf(x)=\varphi(x)$(t=0), 即有:

   $$C=\left.\frac{\varphi(x)}{f(x)}\right|_{t=0}$$

   这个是不能完全确定$u(x,t)$的解的, 因此还需要一个边界条件，我们只需要假设$C=1$即可得到$x=0$处可以满足方程的一个边界条件为$u(0,t)=f(-ct)$即可。

因此有一解

$$u(x,t)=\varphi(x-ct)$$

为满足方程的解。