# 向量的线性相关判定定理证明

Thursday, September 14, 2023 4:33 PM

①向量组线性相关充要条件是至少有一个向量可由剩余m-1向量线性表示

必要性：由 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0$ 有不全为0的解使 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0$，从而：

可设 $k_1\neq 0$，

则 $\alpha_1=-\frac{1}{k_1}(k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m)$ 成立，

充分

若：$\alpha_1=k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m\neq 0$，

显移项得 $\alpha_1\ \alpha_2\cdots\alpha_m$ 线性相关

②：证：由 $\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_m,\beta$ 线性相关知，

存在一组数 $k_1,k_2,\cdots k_{m+1}$ 不全为0，使得

$$k_1\alpha_1+\cdots+k_m\alpha_m+k_{m+1}\beta=0$$

我们假设 $k_{m+1}=0$，

则 $k_1\alpha_1+\cdots+k_m\alpha_m=0$，与题设矛盾，故 $k_{m+1}\neq 0$，

所以 $\beta=-\frac{1}{k_{m+1}}(k_1\alpha_1+\cdots+k_m\alpha_m)$ 即可以线性表示

对于唯一性的证明：

我们可设 $\beta=t_1\alpha_1+t_2\alpha_2+\cdots t_m\alpha_m$，

$\beta=t_1'\alpha_1+\cdots+t_m'\alpha_m$. 相减得 $t_i=t_i'$，

即表达式唯一.

③ 取其余 $k=0$，则相关性得到证明.

(P78) 对于矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，

①：A的行向量组线性相关

此时，我们考虑A的行向量组

$\alpha_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots a_{in})$，$i=1,2,3,4\cdots m$.

并取一组数 $k_1,k_2\cdots k_m$，行向量组线性相关，则有：

$$k_1\vec{\alpha}_1+k_2\vec{\alpha}_2+\cdots+k_m\vec{\alpha}_m=0,$$

即：

$$\Longrightarrow\begin{bmatrix} a_{11}k_1+a_{21}k_2+\cdots a_{m1}k_m & 0 \\ a_{12}k_1+a_{22}k_2 \quad a_{m2}k_m= & \vdots \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots & \\ a_{1n}k_1+a_{2n}k_2\cdots a_{mn}k_m & 0 \end{bmatrix}.$$

写成矩阵形式即：

$$\underbrace{A^T(k_1,k_2\cdots k_m)^T=0}_{\text{该式有非零解：则 } \mathrm{rank}A^T<m}，$$

由推论3.5得到：

$\mathrm{rank}(A^T)<m$，即：$\mathrm{rank}A<m$，同理对列向量线性无关时，$\mathrm{rank}A^T<n$.

第2部分

推论3的说明：

设有两个向量组

$\alpha_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots a_{ir})$，$\beta_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots a_{i,r},a_{ir+1}\cdots a_{in})$

当T，线性无关，则有：

当T，线性无关，则有：

$k_1\alpha_{i1}+k_2\alpha_{i2}+\cdots+k_r\alpha_{ir}=0$ 仅有零解，

我们设 $\alpha_i$，$\beta_j$ $(i=1,2,3,\cdots m)$ 分别为矩阵A和B的行向量

即：

$$A=\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_r\end{bmatrix}\quad B=\begin{bmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \vdots\\ \beta_r\end{bmatrix},$$

由于A满秩，显然B满秩

(或：B左半部分显然与A相同，故行向量不能互相表出。

$\text{rank}(A)=r \Rightarrow \text{rank}B=r$

因而B行向量组必线性无关

定理4.5的证明：

显：$D_r\neq0$ $\text{rank}\,D_r=r$，则线性无关，

①：对于极大线性无关组，取其中的一个r阶行列式不为0，显然这个行列式中对应的行向量或列向量线性无关，此时由任意r+1线性相关（任取 $D_{r+1}$，则 $\det(D_{r+1})=0$，得该线性组是极大无关组

4.7证明：

若A可经初等行变换得B，则A，B列向量

若A可经初等行变换得B,则A,B列向量线性相关性相同;

解:我们首先设A,B列向量分别$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_n)$,$(\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_n)$,

显然经过初等行变换:

$$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_n)\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix} 与 (\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_n)\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}$$

同解,

则线性相关性显然相同。

即:行变换不改变A,B列向量的秩

矩阵

同理:列变换不改变行向量组的秩