行列式的性质证明

Friday, April 7, 2023 10:24 PM

①：转置行列式的值：

设：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(p_1p_2\cdots p_n)} (-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)} a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}\cdots a_{np_n}$$

而

$$D^T=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & & & \\ a_{1n} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(q_1q_2\cdots q_n)} (-1)^{\tau(q_1q_2\cdots q_n)} a_{q_11}a_{q_22}\cdots a_{q_nn}$$

② 互换行列式两行/列，变号：

由于

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_j\cdots p_i\cdots p_n)} a_{p_11}a_{p_22}\cdots a_{p_jj}a_{p_ii}\cdots a_{p_nn}$$

由于对换后 ⟹ 变号

$$= -\sum (-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_ip_j\cdots p_n)} \underline{a_{p_11}a_{p_22}\cdots a_{p_jj}a_{p_ii}a_{p_nn}}$$

$$= -\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots \\ a_{i1} & \\ a_{j1} & \\ a_{n1} & \cdots \end{vmatrix}$$

即行列式变号

由此可推出 ⟹ 将相同的两行互换之后变号，故显然结果为 0

故同理由于系数 k 可提出，因此可以将一行结果叠加到另一行 ——> 因为最终可拆分且得数为 0

其余性质容易推出