莱布尼兹积分规则推导

考虑：$\int_{a(t)}^{b(t)} f(x,t,u)\,du$ ，where $u=u(t)$

由导数：$\frac{df}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}$

其中：$f(t+\Delta t)=f(x,t+\Delta t,u+\Delta u)$

代入，根据定义有

$$\frac{df}{dt}=I(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\int_{a(t+\Delta t)}^{b(t+\Delta t)} f(x,t+\Delta t,u)-\int_{a(t)}^{b(t)} f(x,t,u)}{\Delta t}$$

将 $\int_{a(t+\Delta t)}^{b(t+\Delta t)} f(x,t,u)$ 拆分：

$$=\int_{b(t)}^{b(t+\Delta t)} f(x,t+\Delta t,u)+\int_{a(t+\Delta t)}^{a(t)} f(x,t+\Delta t,u)$$

$$+\int_a^b f(x,t+\Delta t,u)$$

其中：

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\int_a^b f(x,t+\Delta t,u)dt-\int_a^b f(x,t,u)dt}{\Delta t}$$

$$+\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\int_{b(t)}^{b(t+\Delta t)} f(x,t+\Delta t,u)dt-\int_{a(t)}^{a(t+\Delta t)} f(x,t+\Delta t,u)dt}{\Delta t}$$

$\Rightarrow$ 第一项：$=\int_a^b \lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(x,t+\Delta t,u)-f(x,t,u)}{\Delta t}dt=\int_a^b \frac{\partial}{\partial t}f(x,t,u)\,dt$

第二项：$= \frac{d}{dt}\int_{b(t)}^{b(t+\Delta t)} f(x,t+\Delta t,u)\,dt - \int_{a(t)}^{a(t+\Delta t)} f(x,t+\Delta t,u)\,dt$

$$\xrightarrow[\text{由于与 } t \text{ 无关}]{\text{变限积分}} f(x,t,u)\Big|_{t=b} b'(t) - f(x,t,u)\,a'(t)$$

相加有：

$$\int_{a(t)}^{b(t)} f(x,t,u) = \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial}{\partial t} f(x,t,u)\,dt + f(x,t,u)\Big|_{t=b} b'(t)$$
$$- f(x,t,u)\Big|_{t=a} a'(t)$$