泊松定理的证明

Wednesday, November 15, 2023 8:58 PM

证：$\lim\limits_{n\to\infty} C_n^k p^k (n-p)^{1-k} = \dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$，其中：$\lambda = np$

证明：

$$\lim_{n\to\infty} C_n^k p^k (n-p)^{1-k} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{k!(n-k)!} \times p^k \times (1-p)^{n-k}$$

代入：$p = \dfrac{\lambda}{n}$，

$$\therefore = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{k!(n-k)!} \times \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \times \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k},$$

此时，拆开后面 $n-k$，有，

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{k!(n-k)!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\cdot(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!\cdot n^k}\cdot\lambda^k\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n\cdot\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}$$

我们拆开中间一项；

$$= \frac{\lambda^k}{k!}\lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k}\cdot\lambda^k\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^k$$

，其中蓝色一项 $=\left[1\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\right]$

当 $n\to\infty$ 时，$\left[1\cdot\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\right]\to 1$，而：$\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)\to$ 由 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\to e$

则：$\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^k \to 1-\frac{k\lambda}{n}\to 1$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n \to e^{-\lambda}$，代入得：

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\lambda^k}{k!}\cdot e^{-\lambda}$$ 得证