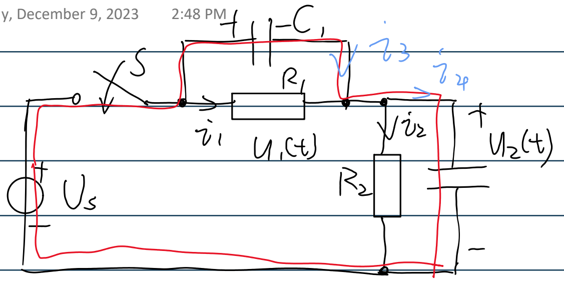
电荷守恒定律和磁链守恒定律的推导

Saturday, December 9, 2023 2:48 PM



解：如图电路：

在换路前，有：$i_1R_1+i_2R_2=0$。

换合：$i_1R_1+i_2R_2=U_S$，

由于 $i_1R_1=U_1$，$i_2R_2=U_2$，显然 U_1,U_2 在瞬间发生改变，故电容电压在换路前后不相等。

我们考虑纯电容回路：设换路时 C_1 C_2 两端电压为 U_1,U_2，仍由关系，有：

$U_1+U_2=U_S$　又：$U_1=\frac{1}{C_1}\int_{0^-}^{0^+} i_3\,dt+0$，而 $U_2=\frac{1}{C_2}\int i_4\,dt+0$

又：$i_1=\frac{U_1}{R_1}=\frac{1}{R_1C_1}\int_{0^-}^{0^+} i_3\,dt$，同理：$i_2=\frac{U_2}{R_2}=\frac{1}{R_2C_2}\int_{0}^{0^+} i_4\,dt$

由KCL定律：$i_1+i_3=i_2+i_4$，从而有：

$$\frac{1}{R_1C_1}\int_{0^-}^{0^+} i_3\,dt+i_3=\frac{1}{R_2C_2}\int_{0^-}^{0^+} i_4\,dt+i_4$$

→ $\frac{u_1}{R_1}+i_3=\frac{u_2}{R_2}+i_4$　换 i_3 为 u_1 则　　又：$U_1+U_2=U_S$ ②

得：⟹ $\boxed{\frac{u_1}{R_1}+C_1\frac{du_1}{dt}=\frac{u_2}{R_2}+C_2\frac{du_2}{dt}}$ ☆ 对此式进行积分，有：

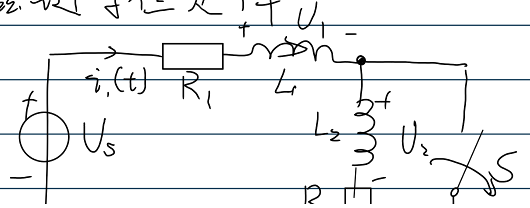
$$\frac{1}{R_1}\int_{0^-}^{0^+} u_1\,dt + C_1(u_1^+-u_1^-)=\frac{1}{R_2}\int_{0^-}^{0^+}u_2\,dt+C_2(u_2^+-u_2^-)$$

此外，由于电容的电压为有限值 → 则：$\int_{0^-}^{0^+} u\,dt=0$，

→ 得：$C_1(u_1^+-u_1^-)=C_2(u_2^+-u_2^-)$

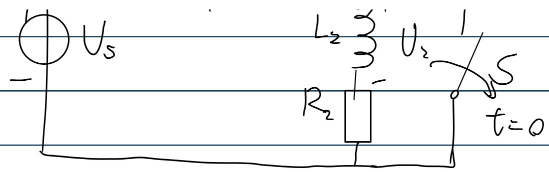
即：$C_1\Delta U_1=C_2\Delta U_2$　　$\Delta Q_1=\Delta Q_2$

磁链守恒定律：



设S在 $t=0^-$ 时闭合，$t=0^+$ 时打开。

则：若 i_1,i_2 不变 ⟹ 显然不符合KCL定律，



则：若 i_1, i_2 不变 $\Rightarrow$ 显然不符合KCL定律，从而 i_1, i_2 突变.

有：$U_S = i_1R_1 + L_1\frac{di_1}{dt} + L_2\frac{di_2}{dt} + i_2R_2$，其中：由于 L_1, L_2 受冲激电压激励，故 U_1, U_2 为 ∞，但 i_1, i_2 有限.

$$\int_{0^-}^{0^+} U_S\,dt = \int_{0^-}^{0^+} i_1R_1 + L_1[I_1(0^+)-I_1(0^-)] + \int_{0^-}^{0^+} i_2R_2 + L_2[I_2(0^+)-I_2(0^-)]$$

故有：$L_1[I_1(0^+)-I_1(0^-)] + L_2[I_2(0^+)-I_2(0^-)] = 0$，

即：$\Delta\psi_1 + \Delta\psi_2 = 0$，磁链守恒定律.