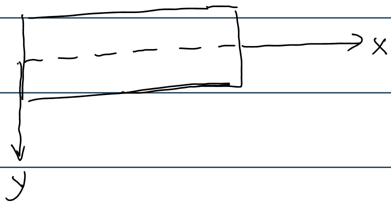
梁的纯弯曲的位移分量求解

Friday, February 24, 2023 9:13 AM

以矩形梁的纯弯曲问题为例说明通过应力求解相应位移分量：

①：对纯弯曲问题，有：$\Phi = \dfrac{My^3}{6I}$



$$\begin{cases} \sigma_x = \dfrac{My}{I} \\ \sigma_y = 0. \\ \tau_{xy} = 0, \end{cases}$$

本构方程

并有：
$$\begin{cases} \varepsilon_x = \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y) \\ \varepsilon_y = \dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x) \\ \gamma_{xy} = \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{\tau_{xy}}{G} \end{cases}$$

则：$\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{My}{EI}$，$\dfrac{\partial v}{\partial y} = -\dfrac{\nu My}{EI}$

而：$\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x} = 0$，

$\xrightarrow{\text{对此式进行积分}}$ 有：
$$\begin{cases} u = \dfrac{Mxy}{EI} + f_1(y) + u_0 \\ v = -\dfrac{\nu My^2}{2EI} + f_2(x) + v_0 \end{cases}$$

其中：$\dfrac{Mx}{EI} + f_1'(y) + f_2'(x) = 0$，

分离左右

由于 $f_1'(y) = -f_2'(x) - \dfrac{Mx}{EI}$，两边仅能等于常数 $-w$。

$$\begin{cases} f_1'(y) = -w \\ f_2'(x) = w - \dfrac{Mx}{EI} \end{cases} \xrightarrow[\text{则有}]{\text{此时}} \begin{cases} f_1(y) = -wy \\ f_2(x) = wx - \dfrac{Mx^2}{2EI} \end{cases} \quad (\text{含}C)$$

分别将下式代入 u, v

则有：
$$\begin{cases} u = \dfrac{Mxy}{EI} - wy + u_0 \\ v = -\dfrac{\nu My^2}{2EI} + wx - \dfrac{Mx^2}{2EI} + v_0, \end{cases}$$

其中：u_0, v_0, w 由边界条件确定。

另外：讨论：

(1)
$$\begin{cases} u = \dfrac{M}{EI}xy - wy + u_0 \\ v = -\dfrac{\nu M}{2EI}y^2 - \dfrac{M}{2EI}x^2 + wx + v_0 \end{cases}$$
$\longrightarrow$ 有：$\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{Mx}{EI} - w$ (转角)，若 $x = x_0 = \text{constant}$，

则显有 $\left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{x=x_0} = \text{constant}$，即材料力学"平面假设"成立

(横截面上各铅垂线转角相同)。

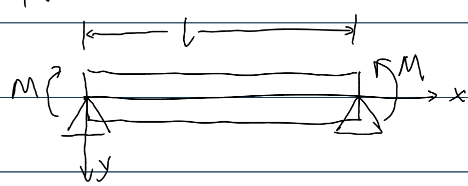
(2)：将第二式对 x 求二阶导数。

有：$\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -\dfrac{M}{EI} = \dfrac{1}{\rho} = \text{constant}$，则在微小位移下，梁纵向纤维的曲率相同，

即：$\dfrac{1}{\rho} = -\dfrac{M}{EI}$，为材料力学中的挠曲线微分方程。

(3). 不同的边界条件的应用：

①：两端简支：可令：



$$\begin{cases} u\big|_{\substack{x=0\\y=0}} = 0 \\ v\big|_{\substack{x=0\\y=0}} = 0 \end{cases}$$ 代入上式有：$u_0 = 0, v_0 = 0$，

$$\begin{cases} u\big|_{\substack{x=l\\y=0}} = 0 \\ v\big|_{\substack{x=l\\y=0}} = 0, \end{cases}$$ $-\dfrac{Ml^2}{2EI} + wl = 0$，得：$w = \dfrac{Ml}{2EI}$

因此有：简支梁位移方程：
$$\begin{cases} u = \dfrac{M}{EI}xy - \dfrac{Ml}{2EI}y = \dfrac{M}{EI}\left(x - \dfrac{l}{2}\right)y \\ v = -\dfrac{\nu M}{2EI}y^2 + \dfrac{Mx}{2EI}(l - x) \end{cases}$$

上式与材料力学中解得结果相同。

②：右端固定的悬臂梁：令：

$$\begin{cases} u\big|_{\substack{x=l\\y=0}} = 0 \\ v\big|_{\substack{x=l\\y=0}} = 0 \end{cases}$$ 则 $\left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{\substack{x=l\\y=0}} = \dfrac{Ml}{EI} - w = 0 \longrightarrow w = \dfrac{Ml}{EI}$，

得到：$\{ u_0 = 0, \; Ml^2$ $\qquad Ml^2 \quad ,l \qquad Ml^2$

$\Big|_{y=0} \qquad\qquad \Big|_{y=0}$

得到：$\begin{cases} u_0 = 0, \\ v = -\dfrac{Ml^2}{2EI} + wl + v_0 = 0 \end{cases}$ 代入有：$v_0 = \dfrac{Ml^2}{2EI} - wl = -\dfrac{Ml^2}{2EI}$

故代入得到悬臂梁位移公式为：

$$\begin{cases} u = \dfrac{M}{EI}xy - \dfrac{Ml}{EI}y \\ v = -\dfrac{\nu M}{2EI}y^2 - \dfrac{M}{2EI}x^2 + \dfrac{Mlx}{EI} - \dfrac{Ml^2}{2EI} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u = \dfrac{My}{EI}(x-l) = -\dfrac{M}{EI}(l-x)y \\ v = -\dfrac{M}{2EI}(x-l)^2 - \nu\dfrac{My^2}{2EI} = -\dfrac{M}{2EI}(l-x)^2 - \nu\dfrac{My^2}{2EI} \end{cases}$$

挠曲线方程为：

$v\big|_{y=0} = -\dfrac{M}{2EI}(l-x)^2$，与材力中的结果相同，