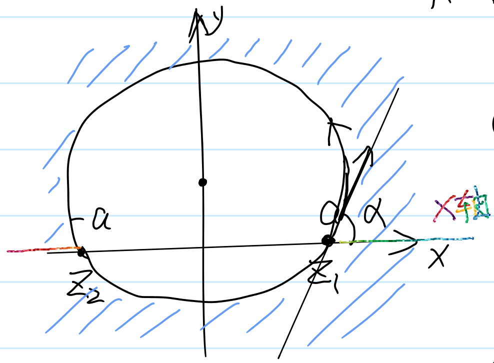
茹科夫斯基映射推导

Thursday, October 26, 2023 3:17 PM



(1) 函数在除 $z=0$, $z=\pm a$ 外均是解析的：

由三个映射 $\xi=\frac{z-a}{z+a}$，$t=\xi^2$，$\frac{w-a}{w+a}=t$

① 对 $\xi=\frac{z-a}{z+a}$，当 $z=a$ 时 $\xi=0$，而 $z=-a$ 时，$\xi=\infty$

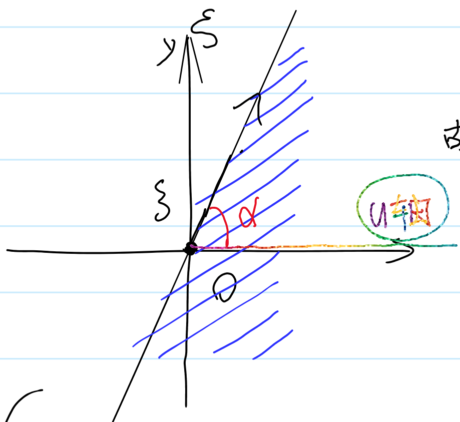
由于有无穷远点 则考察过 $z=a$, $z=-a$ 的圆

由于保圆性，映射为一条过原点的直线

z 为实数时，ξ 也为实数 → 即 x轴映射为 u轴

有：$\frac{d\xi}{dz}=\frac{1\cdot(z+a)-(z-a)}{(z+a)^2}=\frac{2a}{(z-a)^2}>0$.

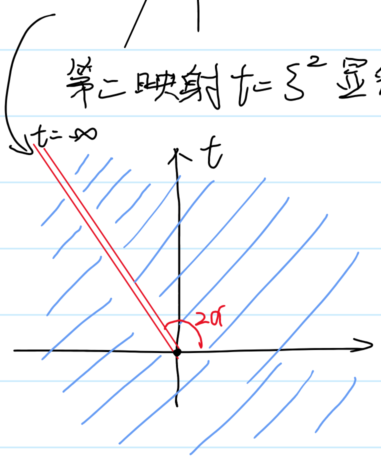
故在 z 在 $z=a$ 处向右移动时 ξ 沿 $\xi=0$ 向右移动



由保角性，与x轴的夹角应等于与u轴之间的夹角

即：α相同（由 $x=a$ 处切线确定）

第二映射 $t=\xi^2$ 显然为如图的映射，且割痕在 2α 处。



$w=a\frac{1+t}{1-t}$

而：$\frac{w-a}{w+a}=t$，则 $t=0\rightarrow w=a$

$t=\infty$ 时 $w=-a$，又∵实数映实数 → 2α 相等

直线割痕 → 映射成圆弧