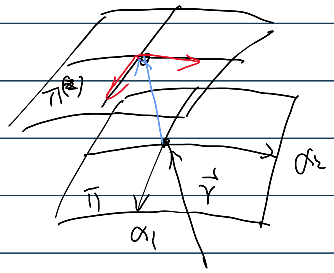
平行曲面的相关推导

Sunday, November 5, 2023　　12:35 AM



设有平行曲面 Π 和 $\Pi^{(z)}$，且 Π 的向量方程为 $r=r(\alpha_1,\alpha_2)$，并使用 $r^{(z)}$ 表示到 Π_2 向径

$$r^{(z)}=r(\alpha_1,\alpha_2)+z e_3(\alpha_1,\alpha_2)$$

此时，在 $r^{(z)}$ 上，有与 α_1,α_2 唯一对应的坐标 $\vec{e}_1^{(z)},\vec{e}_2^{(z)},\vec{e}_3^{(z)}$

则：
$$\begin{cases}\dfrac{\partial \vec{r}^{(z)}}{\partial \alpha_1}=\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha_1}+z\dfrac{\partial \vec{e}_3}{\partial \alpha_1}\\[2mm] \dfrac{\partial \vec{r}^{(z)}}{\partial \alpha_2}=\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha_2}+z\dfrac{\partial \vec{e}_3}{\partial \alpha_2}\end{cases}$$

且：$\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha_1}=A_1\vec{e}_1$，$\dfrac{\partial \vec{e}_3}{\partial \alpha_1}=\dfrac{A_1}{R_1}\vec{e}_1$

$\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha_2}=A_2\vec{e}_2$，$\dfrac{\partial \vec{e}_3}{\partial \alpha_2}=\dfrac{A_2}{R_2}\vec{e}_2$

则：$\dfrac{\partial \vec{r}^{(z)}}{\partial \alpha_1}=\left(1+\dfrac{z}{R_1}\right)A_1\vec{e}_1$，$\dfrac{\partial \vec{r}^{(z)}}{\partial \alpha_2}=\left(1+\dfrac{z}{R_2}\right)A_2\vec{e}_2$

沿坐标轴平行面的基向量是完全相同的，则有：$\vec{e}_1^{(z)}=\vec{e}_1$，$\vec{e}_2^{(z)}=\vec{e}_2$，$\vec{e}_3^{(z)}=\vec{e}_3$

此时：$A_1^{(z)}=\left|\dfrac{\partial r}{\partial \alpha_1}\right|=\left(1+\dfrac{z}{R_1}\right)A_1$，$A_2^{(z)}=\left(1+\dfrac{z}{R_2}\right)A_2$，

$$L^{(z)}=-\frac{\partial r^{(z)}}{\partial \alpha_1}\cdot\frac{\partial e_3^{(z)}}{\partial \alpha_1}=-\left(1+\frac{z}{R_1}\right)\frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha_1}\frac{\partial e_3^{(z)}}{\partial \alpha_1}=\left(1+\frac{z}{R_1}\right)L,$$

同理 $M^{(z)}=\left(1+\dfrac{z}{R_1}\right)M$，

$N^{(z)}=\left(1+\dfrac{z}{R_2}\right)N$，

需要说明：主曲率变为：$\dfrac{1}{R_1^{(z)}}=-\dfrac{L^{(z)}}{A_1^{(z)2}}=\dfrac{1}{\left(1+\frac{z}{R_1}\right)}\cdot\dfrac{L}{A^2}=\dfrac{1}{R_1+z}$，

同理有：$\dfrac{1}{R_2^{(z)}}=\dfrac{1}{R_2+z}$

而：距离中面为 z 处的位移分量 $\Delta^{(z)}=u^{(z)}\vec{e}_1+v^{(z)}\vec{e}_2+w^{(z)}\vec{e}_3$

$=u\vec{e}_1+v\vec{e}_2+w\vec{e}_3$

在任一曲面上的 $u^{(z)}$，$v^{(z)}$ 有关系：$\vec{r}^{(z)}=\vec{r}(\alpha_1,\alpha_2)+z\vec{e}_3(\alpha_1,\alpha_2)$

$u^{(z)}=u+\boxed{z\dfrac{\partial \vec{e}_3'}{\partial \vec{e}_1}}$，$v^{(z)}=v+z\dfrac{\partial \vec{e}_3'}{\partial \vec{e}_2}$

★取 $\vec{e}_3$ 在 $\vec{e}_1,\vec{e}_2$ 方向上的作用增量 ⇒ 此时是原系 $\vec{e}_1,\vec{e}_2$ 下看到的位移分量

对于下一节条件，可推导出

有
$$\begin{cases}\vec{e}_1'=\vec{e}_1+\omega_1\vec{e}_2+\theta\vec{e}_3\\ \vec{e}_2'=\omega_2\vec{e}_1+\vec{e}_2+\psi\vec{e}_3\\ \vec{e}_3'=-\theta\vec{e}_1-\psi\vec{e}_2+\vec{e}_3\end{cases}\Longrightarrow \text{则有：}\boxed{\begin{cases}u^{(z)}=u-z\cdot\theta\\ v^{(z)}=v-z\psi\\ w^{(z)}=w\end{cases}}$$

为位移公式

$u^{(z)}$，$v^{(z)}$，$w^{(z)}$ → 分别沿 $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$ 方向。