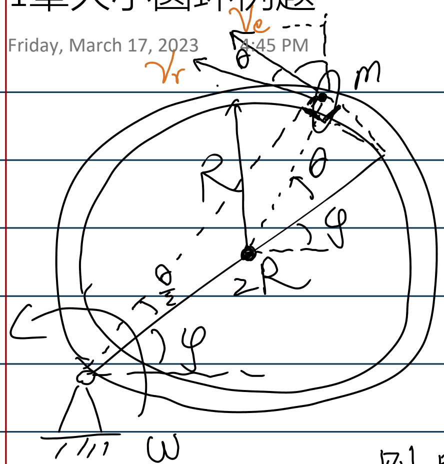
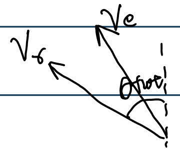


如图：半径为R的大圆环，在水平面内以匀角速度ω绕O点转动，质量为m的小环在其上无摩擦滑动，求运动微分方程的第一积分

①：先确定自由度：我们设（小环相对）转过θ角，

则 由于ω知：仅有单自由度θ，



有：$v_r = R\dot{\theta}$

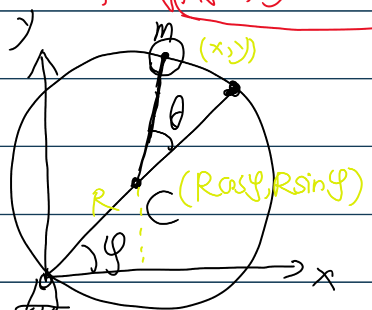
而：$v_e = 2R\cdot\cos\frac{\theta}{2}\cdot\omega$

则有：

$$V_y = R\dot{\theta}\cos(\theta+\omega t) + 2R\omega\cos\frac{\theta}{2}\cdot\cos\left(\frac{\theta}{2}+\omega t\right)$$

$$V_x = -R\dot{\theta}\sin(\theta+\omega t) - 2R\omega\cos\frac{\theta}{2}\cdot\sin\left(\frac{\theta}{2}+\omega t\right)$$

我们用x，y直接表示圆环坐标后进行求得：



有 $\begin{cases} x = R(\cos\varphi + \cos(\theta+\varphi)) \\ y = R(\sin\varphi + \sin(\theta+\varphi)) \end{cases}$ 其中 $\varphi = \omega t$

其中θ为广义坐标；

约束方程为：

$$(x-R\cos\omega t)^2 + (y-R\sin\omega t)^2 = R^2$$

由于显含t，为非定常完整约束。

有：$\frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial t} = 0$

$$2(x-R\cos\omega t)\cdot\dot{x} + 2(y-R\sin\omega t)\cdot\dot{y} + 2(x-R\cos\omega t)\cdot\omega R\sin\omega t - 2(y-R\sin\omega t)R\omega\cos\omega t$$

$$= 2(x-R\cos\omega t)(\dot{x}+\omega R\sin\omega t) + 2(y-R\sin\omega t)(\dot{y}-R\omega\cos\omega t) = 0$$

对于整个系统，为保守系统，而计算：$L = T - V$

有：$T = \frac{1}{2}m(x'^2+y'^2) = \frac{1}{2}mR^2\left[\omega\sin(\omega t) + (\omega+\dot{\theta})\sin(\omega t+\theta)\right]^2$,

有：$T=\frac{1}{2}m(x'^2+y'^2)=\frac{1}{2}mR^2\left[\omega\sin(\omega t)+(\omega+\dot\theta)\sin(\omega t+\theta)\right]^2$
$+\frac{1}{2}mR^2\left[\omega\cos\omega t+(\omega+\dot\theta)\cos(\omega t+\theta)\right]^2$

$$=\frac{1}{2}mR^2\left[\omega^2+(\omega+\dot\theta)^2+2\omega(\omega+\dot\theta)\left(\underbrace{\sin\omega t\sin(\omega t+\theta)+\cos\omega t\cos(\omega t+\theta)}\right)\right]$$

由 $\cos a\cos b+\sin a\sin b=\cos(a-b)$
$=\cos\theta$

$$=\frac{1}{2}mR^2\left[\omega^2+(\omega+\dot\theta)^2+2\omega(\omega+\dot\theta)\cos\theta\right]$$

$$=\frac{1}{2}mR^2\dot\theta^2+mR^2\omega^2+mR^2\omega(\omega+\dot\theta)\cos\theta$$

$$=\boxed{\frac{1}{2}mR^2\dot\theta^2+mR^2\dot\theta\omega\cos\theta+mR^2\omega^2(1+\cos\theta)}=L$$

（而 $V=0$）

则运动方程的第一积分为

$\underline{T+V=\text{constant}}$ 代入并代入初条件 $\theta|_{t=0}=0$，$\dot\theta|_{t=0}=0$，有：

$2mR^2\omega^2=C_1$，代入 C_1 得到：

$$\boxed{\frac{1}{2}mR^2\dot\theta^2+mR^2\dot\theta\omega\cos\theta+mR^2\omega^2(\cos\theta-1)=0}$$

为系统的 Lagrange 第一积分（广义能量积分）

而循环积分显含 θ 项，无循环积分。