正态分布积分公式的证明

Thursday, November 16, 2023 9:56 AM

证明: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$, 其中: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ $-\infty < x < +\infty$, μ, σ为常数。

我们取 $t = \frac{x+\mu}{\sigma}$, 则: $dx = \sigma \cdot dt$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cdot\sigma\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$$

对于 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$

※ 换元法 → 利用极坐标进行代换, 取:

$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$, 其中我们令 $I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$,

则: $I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy$

显然相乘得: $I^2 = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\,dx\,dy \xrightarrow[\substack{x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta}]{\text{代换:}} \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-\frac{r^2}{2}}\cdot r\,dr\,d\theta$

$= 2\pi\cdot\int_0^{\infty} r e^{-\frac{r^2}{2}}\,dr$

此时

$I^2 = 2\pi\cdot\left(-e^{-\frac{r^2}{2}}\right)\Big|_0^{\infty} = 2\pi \longrightarrow I = \sqrt{2\pi}$, 则

原式 $= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times \sqrt{2\pi} = 1$. 即: $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,dx = 1$