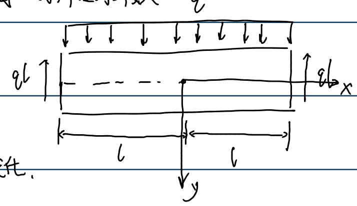
# 简支梁受均布载荷的问题求解

Friday, February 24, 2023 10:54 AM

对于简支梁受均布载荷问题，有：分析应力函数：




$$\begin{cases} \sigma_x \to \text{由弯矩引起} \\ \tau_{xy} \to \text{由剪力引起、} \\ \sigma_y \to \text{由挤压应力 } q \text{ 引起、} \end{cases}$$

在全梁中，$q=constant$，且不随梁的x变化而变化。

因此我们认为：$\sigma_y$ 不随x的变化而变化，

即：$\sigma_y = f(y)$、 积分可得：$\phi = \frac{x^2}{2}f(y) + xf_1(y) + f_2(y)$

即：$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = f(y)$ 其中，$f(y), f_1(y), f_2(y)$ 为待定函数

此时：有：

$$\sigma_x = \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = \frac{x^2}{2}f''(y) + xf_1''(y) + f_2''(y)、$$

首先：①：由相容方程：有 $\nabla^4\phi = 0$，即：$2f''(y) + \frac{x^2}{2}f^{(4)}y + xf_1^{(4)}y + f_2^{(4)}(y) = 0$

注意中间为 $2\frac{\partial^4\phi}{\partial x^2\partial y^2} = 2f''(y)$

此时：$\nabla^4\phi = \frac{x^2}{2}f^{(4)}(y) + xf_1^{(4)}(y) + f_2^{(4)}(y) + 2f^{(2)}(y) = 0.$

由高等代数理论，必须有：x的各个幂次项的系数同时为0，

即有：$f^{(4)}(y) = 0$，$f_1^{(4)}y = 0$，$f_2^{(4)}y + 2f^{(2)}(y) = 0$，

此时：由 $\sigma_x = \frac{x^2}{2}f''(y) + xf_1'(y) + f_2(y)$ 我们设出：

$$\begin{cases} f(y) = Ay^3 + By^2 + Cy + D \\ f_1(y) = Ey^3 + Fy^2 + Gy \end{cases}$$

$\longrightarrow 2f^{(2)}(y) = 2\times[6Ay + 2B] = 4\times[3Ay + B] = -f^{(4)}(y)$

(加减一次项不影响)

此时由于：$f_2^{(4)}(y) = -[12Ay + 4B]$ ← 注意符号；

$\xrightarrow{\text{积分：}}$

$f_2^{(3)}(y) = -6Ay^2 - 4By + H$

$f_2^{(2)}(y) = -2Ay^3 - 2By^2 + Hy + K$

$f_2^{(1)}(y) = -\frac{1}{2}Ay^4 - \frac{2}{3}By^3 + \frac{1}{2}Hy^2 + Ky$

$f_2(y) = -\frac{1}{10}Ay^5 - \frac{1}{6}By^4 + \frac{1}{6}Hy^3 + \frac{1}{2}Ky^2$ 忽略一次，常数项、

则得到：

$$f_2(y) = -\frac{1}{10}A^5 - \frac{1}{6}By^4 + Hy^3 + Ky^2$$

← 系数放到H,K中，

联立并代入 $\phi$ 中，有：

$$\phi = \frac{x^2}{2}f(y) + xf_1(y) + f_2(y)$$

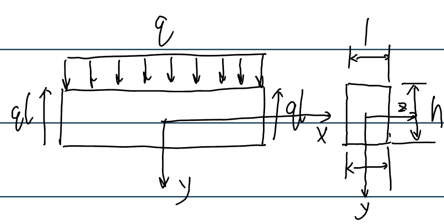
$$= \frac{x^2}{2}[Ay^3 + By^2 + Cy + D] + x[Ey^3 + Fy^2 + Gy] + [-\frac{1}{10}Ay^5 - \frac{1}{6}By^4 + Hy^3 + Ky^2]$$

含有A~K共9个待定常数项；

② 应力函数的确定：

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} - f_x x, \\ \sigma_y = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} - f_y y \\ \tau_{xy} = -\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y} \end{cases}$$

(忽略体力)




则代入有：$\sigma_x = \frac{x^2}{2}[6Ay + 2B] + x[6Ey + 2F] + [-2Ay^3 - 2By^2 + 6Hy + 2K]$

此时：$\sigma_y = [Ay^3 + By^2 + Cy + D]$

$$\tau_{xy} = -\left([x(3Ay^2 + 2By + C) + [3Ey^2 + 2Fy + G]\right)$$

$$= -(3Axy^2 + 2Bxy + Cx + 3\cancel{Ey^2 + 2F}y + G)$$

$$= -\left(3Axy^2+2Bxy+Cx+\cancel{3Ey^2+2Fy+G}\right)$$

③ 应用对称条件：由于载荷此时（成边界条件对称）是左右对称的：

故：$\sigma_x$, $\sigma_y$ 为 $x$ 的偶函数，

而：$\tau_{xy}$ 为 $x$ 奇函数

有条件：$6Ey+2F=0$,

$3Ey^2+2Fy+G=0$. $\rightarrow E=F=G=0$.

代入边界条件：$\begin{cases}\sigma_y|_{y=\frac{h}{2}}=0\\ \sigma_y|_{y=-\frac{h}{2}}=-q\end{cases}$ $\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\tau_{xy}|_{x=l}=-ql$.

代有：

$\tau_{xy}|_{y=\pm\frac{h}{2}}=0$ 注意这个边界：

先考虑：上下边界

$$\begin{cases}\frac{Ah^3}{8}+\frac{Bh^2}{4}+C\cdot\frac{h}{2}+D=0\\ -\frac{Ah^3}{8}+\frac{Bh^2}{4}-C\cdot\frac{h}{2}+D=-q\\ \frac{3Ah^2}{4}x\pm Bxh+C=0\end{cases}$$

此时有：$2D+\frac{Bh^2}{2}=-q$，$4D+Bh^2=-2q$.

（主要边界）

$\therefore$ 有：

即：$\frac{3}{4}Ah^2+Bxh+C=0$

$\frac{3}{4}Ah^2-Bxh+C=0$

$\rightarrow$ 得：$\begin{cases}B=0\\ \frac{3}{4}Ah^2+C=0\end{cases}$ $\xrightarrow{\text{代回上方}}$ 有：$D=-\frac{q}{2}$,

而有：$\frac{Ah^3}{4}+Ch=q$ ①，$B=0$，$D=-\frac{q}{2}$，$\frac{3}{4}Ah^2+C=0$ ③

$\frac{Ah^2}{2}=-\frac{q}{h}$.

有 $A=-\frac{2q}{h^3}$ 则：$C=\frac{q}{h}-\frac{Ah^2}{4}$

$=\frac{q}{h}+\frac{q}{2h}$

$=\frac{3q}{2h}$

而左右边界条件为：（次要边界）

① $\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\tau_{xy}|_{x=l}=-ql=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}-\left(3Axy^2+2Bxy+Cx\right)\Big|_{x=l}$

$\xrightarrow{\text{代}B=0}=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}-3Aly^2-Cl=-Aly^3\Big|_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}-Cly\Big|_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}$

$=-\frac{1}{4}Alh^3-Chl=-ql$, 得：$\frac{1}{4}Ah^3+Ch=q$（符合①）

令 $x=-l\rightarrow$ 相同（自然满足条件）

得到解：

$$\begin{cases}A=-\frac{2q}{h^3}\\ B=0\\ C=\frac{3q}{2h}\\ D=-\frac{q}{2},\end{cases}$$

$E=F=G=0$

---

此时有应力函数为：

$\sigma_x=\frac{\partial^2}{\partial y^2}(\Phi y)-2Ay^3+6Hy+2K$

$=3Ax^2y-2Ay^3+6Hy+2K$

$$\begin{cases}\sigma_x=\frac{4q}{h^3}y^3-\frac{6qx^2}{h^3}y+6Hy+2K\\ \sigma_y=-\frac{2q}{h^3}y^3+\frac{3q}{2h}y-\frac{q}{2}\\ \tau_{xy}=-x\left[3Ay^2+2By+C\right]-\left(3Ey^2+2Fy+G\right)\end{cases}$$

$$=-x\left[-\frac{6q}{h^3}y^2+\frac{3q}{2h}\right]$$

注意：对于次要边界，应当使用圣维南原理。即：而不是整个边界强制满足

不是 $\sigma_x|_{x=\pm l}=0$，而是：

$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\left(\frac{4q}{h^3}y^3-\frac{6ql^2}{h^3}y+6Hy+\cancel{2K}\right)dy$

奇函数对称积分为0，则

$=2K\cdot y\Big|_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}=2kh=0$,

则有：$K=0$,

而有弯矩：$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\left(\frac{4q}{h^3}y^3-\frac{6ql^2}{h^3}y+6Hy\right)y\,dy=0$

$$= -x\left[-\frac{6q}{h^3}y^2+\frac{3q}{2h}\right]$$

即得到常数：$K=0$，

$$H=-\frac{q}{10h}+\frac{ql^3}{h^3}$$

则有：$K=0$，

而有弯矩：$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\left(\frac{4q}{h^3}y^3-\frac{6ql^2}{h^3}y+6Hy\right)y\,dy=0$

得：$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\left[\frac{4q}{h^3}y^4-\frac{6ql^2}{h^3}y^2+6Hy^2\right]dy$

$$=\frac{4q}{5h^3}\times2\left(\frac{h}{2}\right)^5-\frac{2ql^2}{h^3}\times2\left(\frac{h}{2}\right)^3+2H\times2\left(\frac{h}{2}\right)^3=0$$

$$=\frac{qh^5}{20h^3}-\frac{ql^2}{2}+\frac{Hh^3}{2}=0$$

$$\therefore H=-\frac{q}{10h}+\frac{ql^2}{h^3}$$

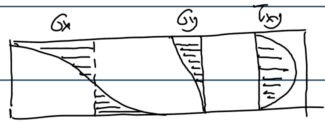
综上代入得到 均布载荷梁的弹性力学解为：

$$\begin{cases}\sigma_x=\frac{4q}{h^3}y^3-\frac{6qx^2}{h^3}y-\frac{3q}{5h}y+\frac{6ql^2}{h^3}y=\frac{6q}{h^3}(l^2-x^2)y+\frac{4q}{h^3}y^3-\frac{3q}{5h}y\\ \sigma_y=-\frac{2q}{h^3}y^3+\frac{3q}{2h}y-\frac{q}{2}\\ \tau_{xy}=\frac{6q}{h^3}xy^2-\frac{3qx}{2h}\end{cases}$$

继续整理可以得到：

$$\begin{cases}\sigma_x=\frac{6q}{h^3}(l^2-x^2)y+q\frac{y}{h}\left(4\frac{y^2}{h^2}-\frac{3}{5}\right)\\ \sigma_y=-\frac{q}{2}\left(1+\frac{y}{h}\right)\left(1-\frac{2y}{h}\right)^2\\ \tau_{xy}=-\frac{6q}{h^3}x\left(\frac{h^2}{4}-y^2\right)\end{cases}$$

可得截面应力分布为：




---

将上式：

$$\begin{cases}\sigma_x=\frac{6q}{h^3}(l^2-x^2)y+q\frac{y}{h}\left(4\frac{y^2}{h^2}-\frac{3}{5}\right)\\ \sigma_y=-\frac{q}{2}\left(1+\frac{y}{h}\right)\left(1-\frac{2y}{h}\right)^2\\ \tau_{xy}=-\frac{6q}{h^3}x\left(\frac{h^2}{4}-y^2\right)\end{cases}$$

与材料力学解的结果进行比较，有：

材料力学解：

$$\begin{cases}\sigma_x=\frac{My}{I},\\ \sigma_y=0\\ \tau_{xy}=\frac{F_s\cdot S_z^*}{bI_z}\end{cases}$$

其中 $F_s=-qx$。

$S_z^*$为静矩 $=\left(\frac{h^2}{8}-\frac{y^2}{2}\right)b$

弯矩为 $M=\frac{q}{2}(l^2-x^2)$

$I$为横截面对中性轴的截面二次矩，$=\frac{bh^3}{12}\xrightarrow{b=1}\frac{h^3}{12}$

代入得到：

材力：$\tau_{xy}=\frac{-qx\cdot\left(\frac{h^2}{8}-\frac{y^2}{2}\right)}{\frac{h^3}{12}}=-\frac{3qx}{2h}+\frac{6qxy^2}{h^3}$

则剪力⇒材力解与弹性力学解相同，

可以发现：

弹力
$$\begin{cases}\sigma_x=\frac{My}{EI}+\underbrace{q\frac{y}{h}\left(4\frac{y^2}{h^2}-\frac{3}{5}\right)}_{\text{修正项}}\\ \sigma_y=\underbrace{-\frac{q}{2}\left(1+\frac{y}{h}\right)\left(1-\frac{2y}{h}\right)^2}_{\text{挤压应力导致}}\\ \tau_{xy}=\frac{F_sS_z^*}{bI_z},\end{cases}$$