相关变量下转换为独立变量的公式推导

Sunday, March 3, 2024 10:04 AM

首先，取 $X=[X_1, X_2 \cdots X_n]^T \in R^n$，且具有正态分布 $N(\mu, C_X, \psi)$，

此时，我们考虑一个线性变换 $Y = AX + b$

即：
$$\begin{cases} Y_1 = A_{11}X_1 + A_{12}X_2 + \cdots + A_{1n}X_n + b \\ Y_2 = A_{21}X_1 + \cdots\cdots + A_{2n}X_n + b \\ \vdots \\ Y_n = A_{n1}X_1 + \cdots\cdots + A_{nn}X_n + b \end{cases}$$

显然 $\mu_Y = A \cdot \mu_X + b$，

取 $\mu_Y = 0$，则：$b = -A \cdot \mu_X$。

根据协方差定义，有：

$$Cov(X_1, X_2) = E\{(X_1 - \mu_{X_1})(X_2 - \mu_{X_2})\}$$

法一：代入，有：

$$Cov(Y_i, Y_j) = E\{(Y_i - \mu_{Y_i})(Y_j - \mu_{Y_j})\}$$

A_i, A_j 为第 i, j 行；

$$= E\{A_i(X-\mu_X) \cdot A_j(X-\mu_X)\}$$

$$= A_i A_j E\{(X-\mu_X)(X-\mu_X)\} \Rightarrow = A \cdot Cov(X) A^T$$

法二：矩阵理解

$$C_X = \underbrace{E[(X-\mu_X)(X-\mu_X)^T]}$$，（其中 X, μ_X 均列向量）。

（矩阵定义）

则：
$$C_Y = E[(Y-\mu_Y)(Y-\mu_Y)^T]$$

$$= E[\{A(X-\mu_X)\}\{A(X-\mu_X)\}^T]$$

$$= E\left[\{A(x-\mu_x)\}\{A(x-\mu_x)\}'\right]$$

$$= A C_x A^T .$$