线性空间定理证明

Tuesday, September 24, 2024 2:37 PM

1、零元素和负元素唯一

解：假设 0_1、0_2 均为零元素

则

$$0_1 = 0_1 + 0_2 = 0_2 \quad (\text{零元素唯一})$$

而：对 $\vec{a}$ 假设 a_1，a_2 均负元素

则 $a_1 + 0 = a_1 + (a + a_2) = a_1$

同时减 a $\longrightarrow (a_1 + a) + a_2 = a_1$

2. 设 $x = (x_1, x_2, x_3 \cdots x_n)$ 为线性空间 V 的一个基，而 $y = (y_1, y_2 \cdots y_m)$ 为 V 上的一组元素，且 $b_1, b_2 \cdots b_m$ 为元素在基下的坐标，证：$y_1, y_2 \cdots y_m$ 的线性相关性与 $b_1, b_2, \cdots b_m$ 相同。

证：由于 y 是 V 的元素，即：

$$y_1 = b_{11} x_1 + b_{12} x_2 + \cdots\cdots + b_{1n} x_n$$

$$y_2 = b_{21} x_1 + \cdots \qquad + b_{2n} x_n$$

$$y_n = b_{n1} x_1 + \cdots \qquad + b_{nn} x_n$$

则：取 $B = (b_1, b_2 \cdots\cdots b_n)$，有：

$$y^T = B^T x^T \text{，两边转置有：}$$

$$y = xB,$$

此时：由于 x 线性无关：由 $\det(AB) = \det A \det B$。

则：显有 $\det(x) \neq 0$。

此时：若 b 相关，则 $\det B = 0$，$\Rightarrow y$ 也相关

若 b 无关 $\rightarrow \det B \neq 0 \longrightarrow y$ 也无关

③ 坐标变换公式的证明：

坐标变换公式：$y = C^{-1} x$ 或 $x = Cy$

由于：

$$(\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n) C$$

设：$\vec{V} \in V^n$，有：

$$\vec{V} = \underbrace{(\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n)(x_1, x_2, \cdots x_n)}_{} = \alpha \cdot X = \alpha^T X$$

取 $\varepsilon = (1, 1, 1 \cdots 1)$ 为坐标)

设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n$ 为元素组，即：$\alpha_1 = (\alpha_{11}, \alpha_{12}, \cdots \alpha_{1n})$

$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n)$

则 $\vec{V}$ 在 ε 基下坐标为：

$$\varepsilon_1 = \alpha_{11} x_1 + \alpha_{21} x_2 + \cdots + \alpha_{n1} x_n$$

由 $X = (x_1, x_2 \cdots x_n)^T$

$$\varepsilon_2 = \alpha_{12} x_1 + \alpha_{22} x_2 + \cdots + \alpha_{n2} x_n$$

则：$\varepsilon = \alpha X = \beta y$

$$\vdots$$

$$\varepsilon_n = \alpha_{1n} x_1 + \cdots \qquad + \alpha_{nn} x_n$$

$\varepsilon_2 = \alpha_{12}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \cdots + \alpha_{n2}x_n$ 则：$\varepsilon = \alpha X = \beta y$

$\varepsilon_n = \alpha_{1n}x_1 + \cdots + \alpha_{nn}x_n$

由：$\beta = \alpha C$

$\alpha x = \alpha C y$ 同乘 α^{-1} $\xRightarrow{\text{由于}\alpha\text{是基,可逆}}$ $x = Cy$ 得证.

$V = \beta y = \alpha x \longrightarrow \alpha x = \alpha C y$

C矩阵的可逆性证明：

设C不可逆，则 $Cx=0$ 有非零解，则

$x_{10}\beta_1 + x_{20}\beta_2 + \cdots + x_{n0}\beta_n = \boxed{(\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_n)\vec{x_0}} = \alpha C \vec{x_0} = \boxed{0}$

而由于β是基，即线性无关矛盾；

故C必定可逆。

证：若 V_1, V_2 为数域K中线性空间的两个子空间. 子空间相关

则 $V_1 \cap V_2$ 为V的子空间.

取 $\alpha, \beta \in V_1 \cap V_2$

则 $\alpha+\beta \in V_1$, $\alpha+\beta \in V_2$, 显 $\alpha+\beta \in V_1 \cap V_2$.

另：$k\alpha \in V_1 \cap V_2$.

则 $V_1 \cap V_2$ 为V子空间

定理：若 V_1, V_2 均为V子空间，则 V_1+V_2 也子空间.

证明：(1)加和 设 $\alpha \in V_1+V_2$, $\beta \in V_1+V_2$

取 V_1, V_2 分量 $\alpha = \alpha_1+\alpha_2$, $\beta = \beta_1+\beta_2$

而 $\alpha+\beta = (\alpha_1+\beta_1) + (\alpha_2+\beta_2) \in V_1+V_2$ (显然成立)

(2)乘积性 取 $\alpha = \alpha_1+\alpha_2 \in V_1+V_2$.

$k\alpha = k(\alpha_1+\alpha_2) = k\alpha_1 + k\alpha_2 \in V_1+V_2$

故 V_1+V_2 为V的子空间 (和空间)

证明：(子空间的扩展性)：

线性空间 V^n 的m维子空间 W 的任何一个基均可扩展为V的一个基。

证：设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_m$ 为W的一个基，由于 V^n 的维数为n，当 $n-m=0$ 时，有：$W=V$，显然成立。首先假设 $n-m=k$ 时定理成立，此时当 $n-m=k+1$ 时，此时：

$\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_m$ 显然线性无关，但不是V的基。

故必然 $\exists\, \alpha_{m+1} \in V$ 且 α_{m+1} 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_m$ 线性表示.

则 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_m, \alpha_{m+1}$ 线性无关. 此时有：

$span\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_{m+1}\}$ 为 $m+1$ 维子空间，并有：

$n-(m+1) = n-m-1 = k$

而：$n-(m+1)=k$ 时根据假设，$\alpha_1, \cdots \alpha_{m+1}$ 可扩展为V的基。

因而 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_m$ 可以扩展为V的基.

维数公式的证明：

设 V 为数域 K 上的线性空间，V_1, V_2 为 V 的子空间。

则有：

$$\dim V_1 + \dim V_2 = \dim(V_1+V_2) + \dim(V_1 \cap V_2)$$

证明：

设 V_1 的基为 $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_m) \in V$.

V_2 的基为 $(\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_n) \in V$

而：

V_1+V_2 基可以为 $(\gamma_1, \gamma_2, \cdots \gamma_l) \in V_2$.

显然：

$V_1 \cap V_2 \subset V_1$ 且 $V_1 \cap V_2 \subset V_2$，则：

∴ 取：$V_1 \cap V_2$ 的基 $(\delta_1, \delta_2 \cdots \delta_r)$

则：

$\dim V_1 = m = r + (m-r) \longrightarrow$ 扩充 $m-r$ 个 $u_1, u_2 \cdots u_{m-r}$ $(u \in V_1, u \notin V_2)$

$\dim V_2 = n = r + (n-r) \longrightarrow$ 扩充 $n-r$ 个 $v_1, v_2, \cdots v_{n-r}$ $(v \notin V_1, v \in V_2)$

而：$\dim(V_1+V_2)$ 可以采用 $\gamma_1, \gamma_2 \cdots \gamma_l$ 表示，显然任一元素可用

$\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_m, \beta_1, \beta_2 \cdots \beta_n$ 表示，而：我们只需取

δ, u, v，则 $r + m - r + n - r = l$，显然线性无关并且能够完整表达。故 $m+n = r+l$

正解：取 $V_1 \cap V_2$ 的基 $\delta_1, \delta_2 \cdots \delta_r$，并将其扩充为 V_1 的基 $\delta_1, \delta_2 \cdots \delta_r, \alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_{m-r}$；以及 V_2 的基 $\delta_1, \delta_2 \cdots \cdots \delta_r\ \beta_1, \beta_2 \cdots \beta_{n-r}$；

①：证明：$\delta_1, \delta_2, \cdots \delta_r, \alpha_m \alpha_{\cdots}, \cdots \alpha_m, \beta_1, \beta_2 \cdots \beta_{n-r}$ 线性无关，

我们可设：

$k_1\delta_1 + k_2\delta_2 + \cdots + k_r\delta_r + l_1\alpha_1 \cdots + l_{m-r}\alpha_{m-r} + p_1\beta_1 + \cdots + p_{n-r}\beta_{n-r} = 0$

此时，我们取

$\alpha = p_1\beta_1 + \cdots + p_{n-r}\beta_{n-r} = -(k_1\delta_1 + k_2\delta_2 + \cdots + k_r\delta_r + l_1\alpha_{m-r} + \cdots + l_{m-r}\alpha_{m-r})$

显然 $\alpha \in V_2$，而由于 α 可由 $\delta_1 \sim \delta_r$ 和 $\alpha_{m-r} \sim \alpha_m$ 表示则 $\alpha \in V_1$ 也成立。

(显然两边都线性不相关，则必有所有系数不为0)

由 $\alpha \in V_1, \alpha \in V_2 \Longrightarrow \alpha \in V_1 \cap V_2$ 即 α 可由 $\delta_1, \delta_2, \cdots \delta_r$ 线性表出，

则有：$\alpha = q_1\delta_1 + q_2\delta_2 + \cdots + q_r\delta_r$ 也成立；故代入

$\alpha = q_1\delta_1 + q_2\delta_2 + \cdots + q_r\delta_r = -(k_1\delta_1 + k_2\delta_2 + \cdots + k_r\delta_r) + l_1\alpha_1 + \cdots + l_{m-r}\alpha_{m-r}$

$\alpha = \underbrace{q_1\delta_1 + q_2\delta_2 + \cdots + q_r\delta_r} = -(k_1\delta_1 + k_2\delta_2 + \cdots + k_r\delta_r) + l_1\alpha_1 + \cdots + l_{m-r}\alpha_{m-r}$

$= \underbrace{p_1\beta_1 + \cdots + p_{n-r}\beta_{n-r}}$

此时：

$q_1\delta_1 + q_2\delta_2 + \cdots + q_r\delta_r - p_1\beta_1 - \cdots - p_{n-r}\beta_{n-r} = 0$

显然有：$q_1 = q_2 = \cdots = q_r = p_1 = p_2 = \cdots p_{n-r} = 0$，代入知：

$k_1\delta_1 + k_2\delta_2 + \cdots + k_r\delta_r + l_1\alpha_1 + \cdots + l_{m-r}\alpha_{m-r} = 0$

此时由于 $\delta_1 \cdots \alpha_1 \cdots \alpha_{m-r}$ 是 V_1 的基，则有：

$k_1 = \cdots = k_m = l_1 = l_2 = \cdots = l_{m-r} = 0.$

因此：$\delta_1 \cdots \delta_r, \alpha_1 \cdots \alpha_{m-r}, \beta_1 \cdots \beta_{n-r}$ 线性无关成立。

又：显然：$W_1 + W_2 = span\{\delta_1, \delta_2, \cdots \delta_r, \alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_{m-r}, \beta_1, \beta_2, \cdots \beta_{n-r}\}$

故：$l = \dim(W_1 + W_2) = r + (m-r) + (n-r)$

$= m + n - r.$

即：$l + r = m + n$，$\dim(V_1 + V_2) + \dim(V_1 \cap V_2) = \dim V_1 + \dim V_2.$

另：当 $r = 0$ 时，显然 $\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_m$，$\beta_1, \cdots \beta_n$ 是 $V_1 + V_2$ 的基，仍然维数公式成立。