牵连运动为定点运动的加速度合成定理及刚体空间一般运动推导

Tuesday, April 18, 2023 1:52 PM

设一动系相对于定系 $Ox_0y_0z_0$ 绕点 O 运动，其角速度 ω，角加速度 ε，而点 M 为任一动点，

对于牵连运动的速度，有：

$$\vec{V}_a = \vec{V}_e + \vec{V}_r$$

而 牵连运动为动系绕 O 点的定点运动，

故 $V_e = \vec{\omega}_e \times \vec{r}$

$$\vec{V}_a = \vec{\omega}_e \times \vec{r} + \vec{V}_r$$

此时：

$$\frac{d\vec{V}_a}{dt} = \frac{d\vec{\omega}_e}{dt}\times\vec{r} + \vec{\omega}_e \times \frac{d\vec{r}}{dt} + \boxed{\frac{d\vec{V}_r}{dt}}$$

显然 $\dfrac{d\vec{V}_r}{dt} = \dfrac{\tilde{d}\vec{V}_r}{dt} + \vec{\omega}_e \times \vec{V}_r$

$$= \boxed{\frac{d\vec{\omega}_e}{dt}\times\vec{r} + \vec{\omega}_e \times \vec{V} + \frac{\tilde{d}\vec{V}_r}{dt} + \vec{\omega}_e \times \vec{V}_r}$$

我们由 $\vec{V} = \vec{V}_e + \vec{V}_r$，

有：

$$\frac{d\vec{V}_a}{dt} = \vec{a}_a = \frac{d\vec{\omega}_e}{dt}\times\vec{r} + \vec{\omega}_e \times \vec{V}_e + \frac{\tilde{d}\vec{V}_r}{dt} + 2\vec{\omega}_e \times \vec{V}_r$$

其中：$\dfrac{d\vec{\omega}_e}{dt} = \vec{\varepsilon}_e$，$\dfrac{\tilde{d}\vec{V}_r}{dt} = \vec{a}_r$

代入有：

$$\vec{a}_a = \vec{\varepsilon}_e \times \vec{r} + \vec{\omega}_e \times (\vec{\omega}_e \times \vec{r}) + \vec{a}_r + 2\vec{\omega}_e \times \vec{V}_r$$

2.14. 刚体的空间一般运动：

对于空间一般运动的刚体，由点的速度合成定理

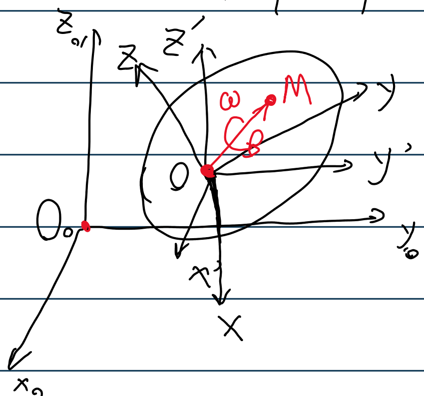
$$V_a = V_e + V_r$$

设某刚体相对于 $Ox_0y_0z_0$ 系做空间一般运动，并选取刚体上一点 O 作为基点，以基点为原点建立 $Oxyz$ 和平动坐标系 $Ox'y'z'$，其中轴 Ox'，Oy'，Oz' 始终分别平行于固定轴 $O_0x_0y_0z_0$ 和 O_0z_0，

并将刚体的空间一般运动分解为 $Ox'y'z'$ 相对 $Ox_0y_0z_0$ 的平动和 $Oxyz$ 相对于 $Ox'y'z'$ 的转动，并将六个广义坐标（x, y, z，欧拉角 ψ, θ, φ）

并将刚体的空间一般运动分解为 $Ox'y'z'$ 相对 $O_0x_0y_0z_0$ 的平动和 $Oxyz$ 相对于 $Ox'y'z'$ 的转动，并将六个广义坐标 $(x, y, z$, 欧拉角 $\psi, \theta, \varphi)$ 表示为时间函数：

$$\begin{cases} x_0 = x_0(t), & y_0 = y_0(t), & z_0 = z_0(t) \\ \psi = \psi(t), & \theta = \theta(t), & \varphi = \varphi(t) \end{cases}$$



对刚体中任意一点M，

由 $\vec{V}_M = \vec{V}_e + \vec{V}_r$

而 $\vec{V}_r$ 为定点运动，有：

$\vec{V}_r = \vec{\omega} \times \vec{\rho}$，故：$\vec{V}_M = \vec{V}_O + \vec{\omega} \times \vec{\rho}$

也可写为矩阵：

将上式在 OM 方向进行投影，有：$\{V_M\} = \{V_O\} + [\tilde{\omega}]\{\rho\}$

$$\boxed{[V_M]_{OM} = [V_O]_{OM} + [\omega \times \rho]_{OM}}$$

显然：

$[\omega \times \rho]_{OM} = 0$，故：$[V_M]_{OM} = [V_O]_{OM}$

表明：刚体上任意两点速度在其连线上的投影相等 $\longrightarrow$ 速度投影定理。

对于M点的加速度，利用加速度合成定理：（是 $Ox'y'z'$ 平动和绕 $Ox'y'z'$ 的定点运动的合成）

$\vec{a}_M = \vec{a}_e + \vec{a}_r \longrightarrow \dfrac{dv_r}{dt} = \dfrac{\tilde{d}v_r}{dt}$

有：

$\vec{a}_e = \vec{a}_O$ 并考虑到

$$\boxed{\vec{a}_r = \vec{\varepsilon} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho})}$$

定点运动刚体上一点的加速度表达式。

得到：

$$\boxed{\vec{a}_M = \vec{a}_O + \vec{\varepsilon} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho})}$$

写成矩阵形式即：

$$\boxed{\{a_M\}_0 = \{a_O\}_0 + \left([\tilde{\varepsilon}_0] + [\tilde{\omega}][\tilde{\omega}]\right)\{\rho\}_0}$$