第三章例题

Tuesday, November 21, 2023 11:16 AM

例1. X在(1,2,3,4)中随机取一个值,而Y在1~X中等可能取一值,求(X,Y)分布律:

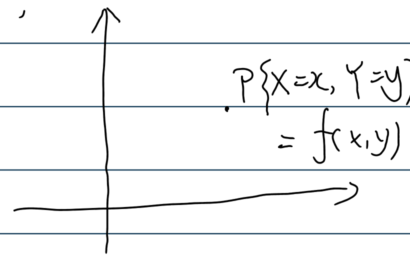
Y \ X	1	2	3	4
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{16}$
2		$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{16}$
3		$\cancel{\frac{1}{12}}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{16}$
4	$\cancel{\frac{1}{16}}$	$\cancel{\frac{1}{16}}$	$\cancel{\frac{1}{8}}$	$\frac{1}{16}$

※ 这个是概率密度 ⇒ 即分布律.

画反 ⇓ Y应当由X一列向下画

例2. 设二维随机变量(X,Y)有概率密度:

$$f(x,y)=\begin{cases}2e^{-(2x+y)} & x>0,\ y>0\\ 0 & 其它.\end{cases}$$



(1). 求 $F(x,y)$, (2). 求 $P\{Y\le X\}$

解:

$$F(x,y)=\int_0^y e^{-y}\int_0^x 2e^{-2x}\,dx\,dy$$, 此时有:

$$F(x,y)=-e^{-y}\Big|_0^y\cdot -e^{-2x}\Big|_0^x$$

$$=(1-e^{-y})(1-e^{-2x})$$

则 $F(x,y)=\begin{cases}(1-e^{-2x})(1-e^{-y}), & x,y>0\\ 0, & 其它.\end{cases}$

(2). 由于 $\iint f(x,y)\,dx\,dy=F(x,y)=P\{X\le x, Y\le y\}$,

也可理解为:

而 $P\{Y\le X\}=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{x}P\{X=x,Y=y\}\,dy\,dx$

又: $P\{X=x,Y=y\}=f(x,y)=2e^{-(2x+y)}$

$$\therefore \int_0^{+\infty}\int_0^x 2e^{-2x}\cdot e^{-y}\,dy\cdot dx=\int_0^{+\infty}2e^{-2x}(1-e^{-x})\,dx$$

$$=\int_0^{+\infty}2e^{-2x}-2e^{-3x}=-e^{-2x}\Big|_0^{+\infty}+\frac{2}{3}e^{-3x}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{3}$$ ✓

例3. 一整数N等可能地在1~10中任取一值,设D=D(N)是整除N的正整数个数,F=F(N)是整除N素数个数(1不是素数),求D,F的联合分布律与边缘分布律:

1 2 1 3 1 4 1 5 1 2 3 6 1 7 1 2 4 8 1 3 9 1 2 5 10

边缘分布律：

	12	13	14	15	1236	17	1248	139	125 10
N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
D	1	2	2	3	2	~~3~~ 4	2	4	3	~~3~~ 4
F	0	1	1	1	1	~~1~~ 2	1	1	1	2

此时：共10种情况：

F \ D	1	2	3	4
0	1			
1		4	2	1
2				2

F \ D	1	2	3	4
0	$\frac{1}{10}$			
1		$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$
2				$\frac{1}{5}$

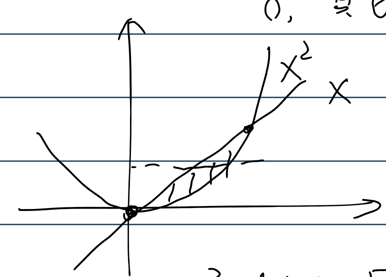
边缘分布律为，

D	1	2	3	4
P_k	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$

F	0	1	2
P_k	$\frac{1}{10}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{1}{5}$

例2、设随机变量 X、Y有联合概率密度：$f(x,y)=\begin{cases}6, & x^2\le y\le x\\ 0, & 其它\end{cases}$

求 $f_X(x)$，$f_Y(y)$



解：首先画平面区域：在 $x^2<x$ 区间

有 $x\in(0,1)$，而 $y\in(0,1)$

则：$f_X(x)=\int_{x^2}^{x} f(x,y)\,dy$

$=6(x-x^2)=6x(1-x)$，由：$x^2\le y\le x$，则：$y\le x\le\sqrt{y}$。

$f_Y(y)=\int_{y}^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx = 6(\sqrt{y}-y)$，

答：$f_X(x)=\begin{cases}6x(1-x), & x\in[0,1]\\ 0 & 其它,\end{cases}$　$f_Y(y)=\begin{cases}6(\sqrt{y}-y), & y\in[0,1]\\ 0 & 其它,\end{cases}$

P68，例4．在汽车生产中，机器人需紧固3只螺栓和焊接2处焊点，其中设X为螺栓紧固不良数目，而Y为焊点焊接不良数目，分布律如下表。

Y \ X	0	1	2	3	$P\{Y=j\}$
0	0.840	0.030	0.020	0.010	0.900
1	0.060	0.010	0.008	0.002	0.080
2	0.010	0.005	0.004	0.001	0.020
$P\{X=i\}$	0.910	0.045	0.032	0.013	1.000

(1) 求 X=1 条件下 Y 分布律. (2) Y=0 条件下 X 分布律.

$P(X=1)=0.045$.

$P(Y=0|X=1)=\frac{0.03}{0.045}=\frac{2}{3}$

$P(Y=1|X=1)=\frac{0.01}{0.045}=\frac{2}{9}$

$P(Y=2|X=1)=\frac{0.005}{0.045}=\frac{1}{9}$.

$P(Y=0)=0.9$

$\therefore P(X=0|Y=0)=0.93=\frac{14}{15}$

$P(X=1|Y=0)=0.033=\frac{1}{30}$

$P(X=2|Y=0)=\frac{1}{45}$

$P(X=3|Y=0)=\frac{1}{90}$

$Y=k$	0	1	2
$P\{Y=k\|X=1\}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

$X=k$	0	1	2	3
$P\{X=k\|Y=0\}$	$\frac{84}{90}$	$\frac{3}{90}$	$\frac{2}{90}$	$\frac{1}{90}$

② 设一射击手，击中概率p，射击直至击中两次，X为首次击中目标的射击次数而Y为击中第二次时射击次数，求X,Y联合分布律与条件分布律.

解：$P(n_1=X)=(1-p)^{n_1-1}\cdot p$

$P(n_2=Y)=C_{n_2-1}^{1}\,p\,(1-p)^{n_2-2}\cdot p$

$=(n_2-1)\,p^2(1-p)^{n_2-2}$

(X) 不对

$P(X=m,Y=n)$ 显然是2次击中，其余未击中，

$\therefore P(X=m,Y=n)=p^2(1-p)^{n-2}$

正解：

先由 $P(X=m,Y=n)=p^2(1-p)^{n-2}$，有：

$P\{X=m\}=\sum_{n=m+1}^{\infty}P\{X=m,Y=n\}$

$=\sum_{n=m+1}^{\infty}p^2q^{n-2}=p^2\cdot q^{m-1}(1+q+q^2+\cdots+q^{\infty})$

$=p^2\cdot q^{m-1}\cdot\frac{1-q^{\infty}}{1-q}=\boxed{p^2q^{m-1}\cdot\frac{1}{1-q}}$

$$=p^2\cdot q^{m-1}\cdot\frac{1-q^{\infty}}{1-q}=\boxed{p^2q^{m-1}\cdot\frac{1}{1-q}}$$
$$=p\cdot(1-p)^{m-1} \quad (m=1,2,\cdots)$$

而 $P\{Y=n\}=\sum_{m=1}^{n-1}p^2(1-p)^{n-2}=(n-1)p^2(1-p)^{n-2}$. $n=2,3,\cdots$

此时：$P\{X=m|Y=n\}$ 计算为：

$$\frac{p^2(1-p)^{n-2}}{(n-1)p^2(1-p)^{n-2}}=\frac{1}{n-1}$$

别代成 $P\{Y=n\}$

$$P\{Y=n|X=m\}=\frac{p^2(1-p)^{n-2}}{p(1-p)^{m-1}}=p(1-p)^{n-m-1}$$
$(n=m+1,m+2,\cdots)$

P71 例3、设 G 为平面上有界区域，面积为 A，若二维随机变量 (X,Y) 有概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{A}, & (x,y)\in G\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

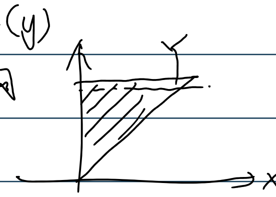
$x=\pm\sqrt{1-y^2}$

则称 $f(x,y)$ 在 G 上服从均匀分布，设 (X,Y) 在 $x^2+y^2<1$ 服从均匀分布，求 $f_{X|Y}(x|y)$

解：在 $y=y$ 时 x 为 x 的概率 $=\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\dfrac{\frac{1}{\pi}}{\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}\frac{1}{\pi}dx}$

$$f_{X|Y}(x|y)=\begin{cases}\frac{1}{2\sqrt{1-y^2}}, & y\in(-1,1),\ x\in(-\sqrt{1-y^2},\sqrt{1-y^2})\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

4、X 在 $(0,1)$ 随机取值，而 Y 在 $(x,1)$ 随机取值，求 $f_Y(y)$



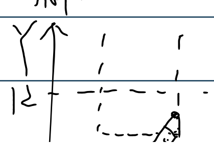
解：$f(x,y)=\frac{1}{1}\times\frac{1}{1-x}$，由于 $x\leq Y$，则 x 区间 $(0,y)$

$$\therefore f_Y(y)=\int_0^y f(x,y)\,dx=-\ln(1-x)\Big|_0^y$$
$$=-\ln(1-y)$$

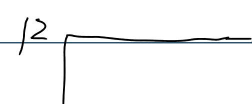
则 $f_Y(y)=\begin{cases}-\ln(1-y), & 0<y<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

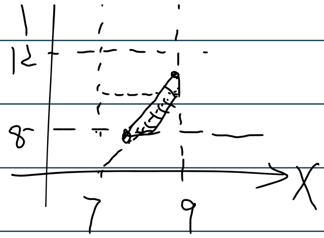
例5、一负责人到办公室的时间均匀分布在8-12时，负责人2到达时间均布在7-9时，且相互独立，求其到达办公室的时间相差不超过5分钟的概率

解：设1到达时间为X，2到达时间为Y，从而

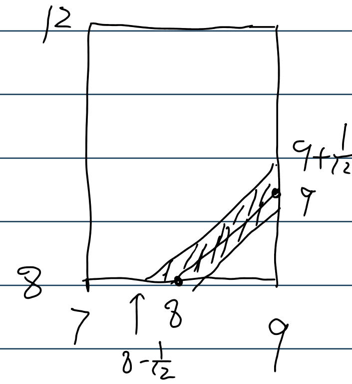


有：
$$|X-Y|\leq\frac{1}{12}$$





问: $|X-Y| \le \frac{1}{12}$,



方法1, $S_{总} = 2\times 4 = 8$.

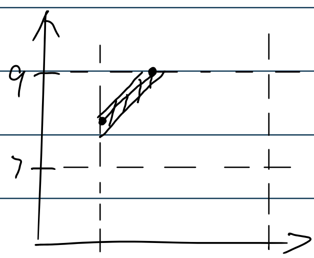
此时,

$$S_2 = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{12}\right)\left(1+\frac{1}{12}\right) - \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{12}\right)\left(1-\frac{1}{12}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\times\left(\frac{169}{144} - \frac{121}{144}\right) = \frac{24}{144} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$\therefore P_{总} = \frac{1}{8}\times\frac{1}{6} = \frac{1}{48}$$

正解: 仍然利用上图, 有: $f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & 8<x<12 \\ 0, & 其它 \end{cases}$ $f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & 7<y<9 \\ 0, & 其它 \end{cases}$.



而: $P\{|X-Y| \le \frac{1}{12}\} = \iint_G f(x,y)\,dx\,dy$

$$= \frac{1}{8}\times S_G = \frac{1}{48}.$$