第五章例题

Monday, October 16, 2023 5:17 PM

例5.1 函数 $\frac{1}{\sin z}$ 有何奇点？是极点,指出极数

解：$z=0$，$z=\cancel{2}k\pi$ 时,均为奇点. $|k|\leq 1$

①在 $z=0$ 邻域内 $\sin z = z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\cdots$

得：$\frac{1}{\sin z}=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}-\cdots}=\frac{1}{z}g(z)$

显然 $g(z)$ 在 $z=0$ 时 $=1$，则 $z=0$ 是一级极点.

②：$z=k\pi$ 时：显然均为孤立奇点.

由 $(\sin z)'\big|_{z=k\pi}=\cos z\big|_{z=k\pi}=(-1)^k\neq 0\longrightarrow$ 则均为1级极点

例2. $f(z)=\frac{(z^2-1)(z-2)^3}{(\sin\pi z)^3}$ 在扩充平面内有何类型奇点,若极点,指出其极

解：$\frac{(z-1)(z+1)(z-2)^3}{(\sin\pi z)^3}$ 有：$z=1$，$z=-1$ 是2极极点。$z=2$ 是可去奇点,而：$z=0,-2,\pm3,\pm4\cdots$ 时均为3极极点,

正解：$f(z)$ 在除使分母为0的点外,在 $|z|<+\infty$ 内均解析,

由于 $\underbrace{(\sin\pi z)'=\pi\cos\pi z\neq 0}_{}$，(在 $0,\pm1,\pm2,\cdots$ 处) 利用导数说明

※重要 $\Longrightarrow$ 说明：此时这些点均为 $\sin\pi z$ 的一级零点 $\Longrightarrow$ 是 $\sin^3\pi z$ 的三级零点,

故 $\frac{(z^2-1)(z-2)^3}{(\sin\pi z)^3}$ 在 $z\neq\pm1,2$ 处,是 z 的三级极点

此时易知：$z=1,-1$ 是2级极点，$z=2$ 是可去奇点,而 $z\neq\pm1,2$,则 z 为整数时是2级极点,

另外：考察 $z\to+\infty$ 时的情况：$z\longrightarrow\infty$ 时,取 $\xi=\frac{1}{z}\longrightarrow z=\frac{1}{\xi}$，代入有：

$$f\left(\frac{1}{\xi}\right)=\frac{\left(\frac{1}{\xi}-1\right)\left(\frac{1}{\xi}+1\right)\left(\frac{1}{\xi}-2\right)^2}{\left(\sin\frac{\pi}{\xi}z\right)^3}$$ 在 $\xi\to0$ 时：上方 >0。

$$=\frac{(1-\xi)(1+\xi)(1-2\xi)^3}{\xi^5\left(\sin\frac{\pi}{\xi}z\right)^3}$$

则当 $\xi\to0$ 时,有 $\xi=\frac{1}{n}$ 使得分母为0,

即：$\xi=\frac{1}{n}$ 是 $f(\frac{1}{\xi})$ 的极点,但显然

由于邻域内总有不解析点 $\longrightarrow$ 不是孤立奇点.

P157，例1. 计算积分：$\oint_C\frac{ze^z}{z^2-1}dz$ 其中 z 为正向圆周 $|z|=2$。

解：

P157，例1. 计算积分：$\oint_C \frac{ze^z}{z^2-1}dz$ 其中 z 为正向圆周 $|z|=2$。

解：

对 $f(z)=\oint_C \frac{ze^z}{z^2-1}dz$ 有：$\oint_C f(z)dz = 2\pi i \operatorname{Res}[f(z),-1]+2\pi i \operatorname{Res}[f(z),1]$，

2个奇点（$z=\pm 1$）

而留数可以计算为：

$$\operatorname{Res}[f(z),-1] = \lim_{z\to -1}(z+1)\frac{ze^z}{z^2-1} = \left.\frac{ze^z}{z-1}\right|_{z=-1} = \frac{-\frac{1}{e}}{-2} = \frac{1}{2e}$$

而有：

$$\operatorname{Res}[f(z),1] = \lim_{z\to 1}(z-1)\frac{ze^z}{z^2-1} = \left.\frac{ze^z}{z+1}\right|_{z=1} = \frac{1}{2}e$$

$$\therefore \oint_C f(z)dz = 2\pi i\left(\frac{1}{2e}+\frac{e}{2}\right) = \pi i\left(\frac{1}{e}+e\right) = \underline{2\pi i \operatorname{ch}1}$$

P158. 例4. 计算 $\oint_C \frac{z}{z^4-1}dz$，其中 C 为正向圆周 $|z|=2$

解：$z^4-1=0 \to (z^2+1)(z^2-1)=0$ 有奇点：$\pm i, \pm 1$，均为一级极点.

规则3 $\to$ 由 $\frac{P}{Q'}$，则：$\frac{z}{4z^3} = \frac{1}{4z^2}$.

$$\therefore \sum_{i=1}^{4}\operatorname{Res}[f(z),z_i] = \left.\frac{1}{4z^2}\right|_{z=i} + \left.\frac{1}{4z^2}\right|_{z=-i} + \left.\frac{1}{4z^2}\right|_{z=1} + \left.\frac{1}{4z^2}\right|_{z=-1}$$

$$= -\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4} = 0.$$

则 $\oint_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{i=1}^{4}\operatorname{Res}[f(z),z_i]=0$.

P158. 计算：$\oint_C \frac{e^z}{z(z-1)^2}dz$

$= 2\pi i\,[\operatorname{Res}(f(z),0)+\operatorname{Res}(f(z),1)]$. 显然在 $z=0$ 处和 $z=1$ 处有极点

（若分子 e^z-1 注意）$z=1$ 处

由 $\operatorname{Res}[f(z),0] = \lim_{z\to 0} \cancel{z}\frac{e^z}{\cancel{z}(z-1)^2}dz = 1$

$$\operatorname{Res}[f(z),1] = \lim_{z\to 1}\frac{d}{dz}\left[\frac{e^z}{z\cancel{(z-1)^2}}\cancel{(z-1)^2}\right] = \left.\frac{ze^z-e^z}{z^2}\right|_{z=1} = 0$$

$\oint_C f(z)dz = 2\pi i\cdot(1+0) = 2\pi i$.

P159. to $\frac{z-\sin z}{z^6} = \frac{z-\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\cdots\right)}{z^6} = \frac{\frac{1}{3!}-\frac{z^2}{5!}+\cdots}{z^3} \to$ 在 $z=0$ 处，3级极点

$= \frac{1}{3!z^3}-\frac{1}{5!z}$

留数为 $C_{-1}=-\frac{1}{5!}$，

P162. 例4.利用无穷积分计算 $\oint_C \frac{z}{\cdots}dz$ 其中 $|z|=2$.

P162. 例4. 利用无穷积分计算 $\oint_C \frac{z}{z^4-1}dz$，其中 $|z|=2$.

解：$\oint_C \frac{z}{z^4-1}dz+\oint_{C_2}\frac{z}{z^4-1}dz=0$，其中 C_2 包围无穷奇点的负向曲线 留数和为0

显然除 ∞ 外全部解析，

则：$-\oint_{C_2^-}\frac{z}{z^4-1} = -\text{Res}\left(\frac{t}{1-t^4},0\right)\cdot 2\pi i=0$，

dz 换 $\frac{1}{t^2}dt$

正向曲线　　$t=\frac{1}{z}$

也可由规则4. $\text{Res}[f(z),\infty)=\text{Res}[f(\frac{1}{z})\cdot\frac{1}{z^2},0]$

$=\text{Res}[\frac{z}{1-z^4},0]=0$，

P162. 例5，计算 $\oint_C \frac{dz}{(z+i)^{10}(z-1)(z-3)}$ C为 $|z|=2$。

解：利用无穷远点：

$\oint_C \frac{dz}{(z+i)^{10}(z-1)(z-3)}+\oint_{C^-}\frac{dz}{\cdots}+\oint_{C_2}\frac{dz}{\cdots}=0$

要考虑其余奇点 $z=3$（在 $|z|=2$ 以外

即：$\oint_C f(z)dz=-2\pi i\,\text{Res}[f(z),+\infty]-2\pi i\cdot\text{Res}[f(z),3]$

第一项 $=-2\pi i\cdot\text{Res}\left[f(\frac{1}{z})\cdot\frac{1}{z^2},0\right]=-2\pi i\,\text{Res}\left[\frac{1}{(1+\frac{i}{z})^{10}(1-\frac{1}{z})(1-\frac{3}{z})}\cdot\frac{1}{z^2},0\right]$

由 $\text{Res}\left[\frac{z^{10}}{(z+i)^{10}(z-1)(z-3)}\cdot\frac{1}{z^2},0\right]=0$，→第一项为0

而：$\text{Res}[f(z),3]=\frac{1}{(3+i)^{10}\cdot 2}$　∴ $\oint_C f(z)dz=-\pi i\cdot\frac{1}{(3+i)^{10}}$ 。