例题部分1 张量分析基础

Wednesday, May 10, 2023 11:49 AM

$$\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w}) = u_i\vec{e}_i\cdot(v_j\vec{e}_j w_k\vec{e}_k)$$

$$= u_i\vec{e}_i(v_j w_k \varepsilon_{jkl}\vec{e}_l)$$

$$= u_i v_j w_k \delta_{il}\varepsilon_{jkl} = \underline{u_l v_j w_k \varepsilon_{jkl}}$$

$$\vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w}) = u_i\vec{e}_i\times(v_j\vec{e}_j\times w_k\vec{e}_k)$$

$$= u_i\vec{e}_i\times(v_j w_k \vec{e}_j\times\vec{e}_k)$$

$$= u_i\vec{e}_i\times v_j w_k \varepsilon_{jkm}\vec{e}_m$$

$$= u_i v_j w_k \varepsilon_{jkm}\vec{e}_i\times\vec{e}_m$$

$$= u_i v_j w_k \varepsilon_{jkm}\varepsilon_{imn}\vec{e}_n$$

说明：取 $i,j,k=1,2,3$ 则 $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk}=6=3!$

若：$\varepsilon_{mjk}\neq 0$，i 有3种 → j 2种 k 1种，$=3\times2\times1=6$

将上式进行简化

为了求解：$\varepsilon_{jkm}\cdot\varepsilon_{imn} = \varepsilon_{mjk}\cdot\varepsilon_{mni}$

~~我们以如下求解为例~~：

求：$\varepsilon_{ijk}\cdot\varepsilon_{lmn}$ 则引入矩阵

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}$$

令 $\Lambda^{(1)}=\begin{bmatrix} a_{1m} & a_{1n} & a_{1l}\\ a_{2m} & \cdots & a_{2l}\\ a_{3m} & \cdots & a_{3l}\end{bmatrix}$

$m=1, n=2, l=3$

我们可以将 ε_{ijk} 想成一个 $3\times3\times3$ 的矩阵，其中有元素相同时即为0.

若想从 A 代为 $|\Lambda|^{(1)}$ 则显然从行列式表示有：

$\det A = \det|\Lambda|^{(1)}\varepsilon_{mnl}$

或 $\det|\Lambda|^{(1)} = \det A\,\varepsilon_{mnl}$

对于

$$\boxed{\Lambda^{(2)}=\begin{bmatrix} A_{im} & A_{in} & A_{il}\\ A_{jm} & A_{jn} & A_{jl}\\ A_{km} & A_{kn} & A_{kl}\end{bmatrix}}$$

则在 $m=1, n=2, k=3$ 时，$\Lambda^{(2)}$ 退化为 $\Lambda^{(1)}$

有：$\Lambda^{(1)} = \Lambda^{(2)}\cdot\varepsilon_{ijk}$ （换行和换列特性）

其中 $i,j,k,l,m,n=1,2,3$，

$= |A|\,\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{mnl}$ （行 ijk 列 lmn）

故：$\det\Lambda^{(2)} = \det\Lambda^{(1)}\varepsilon_{ijk} = \det(A)\cdot\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{mnl}$，

因于 $A=\begin{vmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{vmatrix}$ 我们取 $|A|=1$，即：A 取单位阵

有：$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn} = \det\begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in}\\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn}\\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn}\end{vmatrix}$

我们计算上式，则：

$$\boxed{\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn} = \delta_{il}\delta_{jm}\delta_{kn} + \delta_{im}\delta_{jn}\delta_{kl} + \delta_{in}\delta_{jl}\delta_{km}}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{lmn} = {} & \delta_{il}\,\delta_{jm}\,\delta_{kn} + \delta_{im}\,\delta_{jn}\,\delta_{kl} + \delta_{in}\,\delta_{jl}\,\delta_{km} \\ & - \delta_{kl}\,\delta_{jm}\,\delta_{in} - \delta_{km}\,\delta_{jn}\,\delta_{il} - \delta_{kn}\,\delta_{jl}\,\delta_{im}\end{aligned}}$$

此时说明几种特殊情况:

①: $i=l$ 时: 有:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{imn} = {} & \delta_{ii}\,\delta_{jm}\,\delta_{kn} + \delta_{im}\,\delta_{jn}\,\delta_{ki} + \delta_{in}\,\delta_{ji}\,\delta_{km} \\ & - \delta_{ki}\,\delta_{jm}\,\delta_{in} - \delta_{km}\,\delta_{jn}\,\delta_{ii} - \delta_{kn}\,\delta_{ji}\,\delta_{im}\end{aligned}$$

其中: $\delta_{ii}=3$ ⟶ 在连乘中进行换标

$$= 3(\delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{km}\delta_{jn}) + (\delta_{km}\delta_{jn} - \delta_{jm}\delta_{kn}) + (\delta_{jn}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kn})$$

$$= 3(\delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{km}\delta_{jn}) - (\delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{km}\delta_{jn}) - (\delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{km}\delta_{jn})$$

$$= \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}$$

$$j\,k\;m\,n \quad - \quad j\,k\;m\,n$$

②: 取: $i=l,\ j=m$,

有: $\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{ijn} = \delta_{jj}\,\delta_{kn} - \delta_{kj}\,\delta_{nj}$

$$= 3\delta_{kn} - \delta_{kn} = 2\delta_{kn}$$

③: 当 $i=l,\ j=m,\ k=n$ 时;

$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} = 2\delta_{kk} = 6 = 3!$ 其原理: 对 $\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{ijk}$ 3种 2种 1种、

可推广到: $\varepsilon_{ijk\cdots m}\,\varepsilon_{ijk\cdots m} = m!$

规律: $\varepsilon_{2143} = 1$ $\begin{smallmatrix}1\,2 & 3\,4\\ 2\,1 & 4\,3\end{smallmatrix}$ 偶数个交点(换标偶数次) $= 1$

$$\vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w}) = u_i\vec{e}_i\times(v_j\vec{e}_j\times v_k\vec{e}_k)$$

$$= u_i\vec{e}_i\times(v_j v_k\,\varepsilon_{jkm}\,\vec{e}_m)$$

$$= u_i v_j w_k\;\varepsilon_{jkm}\cdot\varepsilon_{imn}\,\vec{e}_n$$

$= u_i \vec{e}_i \times (v_j w_k \varepsilon_{jkm} \vec{e}_m)$

$= u_i v_j w_k \; \varepsilon_{jkm} \cdot \varepsilon_{imn} \vec{e}_n$

$= u_i v_j w_k \; \varepsilon_{mjk} \cdot \varepsilon_{mni} \vec{e}_n$

因：$\varepsilon_{mjk} \cdot \varepsilon_{mni} = \delta_{jn}\delta_{ki} - \delta_{kn}\delta_{ji}$，代入得到，

$= u_i v_j w_k [\delta_{jn}\delta_{ki} - \delta_{kn}\delta_{ji}] \vec{e}_n$，使用$\delta$进行换标，有：

$= (u_i w_i v_n \vec{e}_n - w_n u_i v_i \vec{e}_n) = (u_i w_i v_n - u_i v_i w_n)\vec{e}_n$

如果换n为j，得：$\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = u_i (w_i v_j - v_i w_j) \vec{e}_j$

$= u_i w_i \vec{v} - u_i v_i \vec{w}$

$u \times (v \times w) = (\vec{u} \cdot \vec{w}) \vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v}) \vec{w}$