方差的性质证明

Sunday, December 10, 2023　3:58 PM

1、C为常数，则

$$D(C)=E(X-E(X))=E(C-C)=0$$

2、X为随机变量，C为常数，则：

$$D(CX)=C^2D(X),\ D(X+C)=D(X)$$

①有：$D(CX)=E(C^2X^2)-E^2(CX)$，　由于 $E(CX)=\int_{-\infty}^{+\infty}cxf(x)dx=CE(X)$

则：$=C^2\int x^2f(x)dx-C^2E^2(x)$

$$=C^2[E(x^2)-E^2(x)]=C^2D(X)$$

②、$D(X+C)=E(X^2+C)-E^2(X+C)$

$$=E(X^2)-E(X)=D(X)$$

3、对于两个随机变量X，Y，有：

$$D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2E\{(X-E(X))(Y-E(Y))\}$$

证：$D(X+Y)=E[(X+Y)^2]-E^2(X+Y)$

$$=E[X^2]+E[Y^2]+E[2XY]-[E(X)+E(Y)]^2$$

均值有线性性质 $\xrightarrow{}$ $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$

$$=E[X^2]-E^2(x)+E(Y^2)-E^2(Y)+E(2XY)-2E(X)E(Y)$$

若独立 $E(X)E(Y)=E(XY)$

$$=\underline{D(X)+D(Y)+2\{E(XY)-E(X)E(Y)\}}\quad ①$$

又有：$E[(X-E(X))(Y-E(Y))]=E(XY)-E(X)E(Y)\cancel{-E(Y)E(X)+E(X)E(Y)}$

故 $=\underline{D(X)+D(Y)+2E((X-E(X))(Y-E(Y)))}\quad ②$

独立时，显：$D(X+Y)=D(X)+D(Y)$

4. $D(X)=0$ 充要条件是X以概率1取$E(X)$，

充分为显然满足，即：当 $X=E(X)$ 时，$D(X)=E(X-E(X))=0$ √

必要性：由切比雪夫不等式：

$P\{|X-\mu|<\varepsilon\}\geqslant 1-\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$，我们设一分的 $D(X)=0$，证 $X=E(X)$

显然：由于 $D(x)=0$，则 $\forall\varepsilon$，有：

$P\{|X-\mu|<\varepsilon\}\geqslant 1$，此时仅 $|X-\mu|=0$ 时，对任意 $\varepsilon>0$ 才成立