双点积重要性质证明

Monday, June 26, 2023 2:58 PM

性质：$A:BC=B^TAC=AC^T:B$ 后边整体编号，

证明：$A:\boxed{BC}=B^TA:C=AC^T:B$。

证：$A:BC=A_{ij}e_ie_j:B_{kl}e_ke_lC_{mn}e_me_n$

有：对等效两点积 使用迹的性质进行证明：

$$A:B=A_{ij}B_{ij}=tr(AB^T)=tr(A^TB)$$

$$AB^T=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_{11}&b_{21}&b_{31}\\b_{12}&b_{22}&b_{32}\\b_{13}&b_{23}&b_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}b_{11}+a_{12}b_{12}+a_{13}b_{13}&?&?\\?&a_{21}b_{21}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{23}&?\\?&?&a_{31}b_{31}+a_{32}b_{32}+a_{33}b_{33}\end{bmatrix}$$

显然有 $tr(AB^T)=tr(A^TB)=A:B$

代入原式：有：

$$A:BC=tr(A(BC)^T)=tr(AC^TB^T)=AC^T:B$$

而：$A:BC=tr(A^TBC)=tr((B^TA)^TC)=B^TA:C$

上式得证