积商与最值的分布公式证明

Thursday, November 30, 2023 10:59 AM

① 设 (X,Y) 是二维随机变量，有概率密度 $f(x,y)$，则 $Z=\frac{Y}{X}$，$Z=XY$ 仍然为连续型随机变量，概率密度分别为：

$$f_{Y/X}(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}|x|f(x,xz)\,dx \xrightarrow{独立} f(x,xz)=f_X(x)f_Y(xz)$$

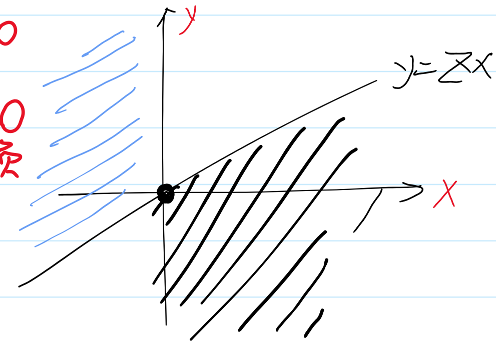
$$f_{XY}(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{|x|}f\left(x,\frac{z}{x}\right)dx \xrightarrow{独立} f\left(x,\frac{z}{x}\right)=f_X(x)f_Y\left(\frac{z}{x}\right)$$

证明：对 $Z=\frac{Y}{X}\le z$，即：$Y\le zX \leftarrow X>0$

$Y\ge zX \leftarrow X<0$ 此处修改

设分布函数为 $F(x,y)$，则

$$P(Y\le zX)=\int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{zx}f(x,y)\,dy\,dx+\int_{-\infty}^{0}\int_{zx}^{+\infty}f(x,y)\,dy\,dx$$



只需换元：$u=\frac{y}{x}$，$dy=x\cdot du$

由 $ux=+\infty$，x 为负

$$\int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{z}xf(x,ux)\,du+\int_{-\infty}^{0}\int_{z}^{-\infty}xf(x,ux)\,du\,dx$$

$$=\int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{z}xf(x,ux)\,du+\int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{z}(-x)f(x,ux)\,du\,dx.$$

$$F(z)=\int_{-\infty}^{z}\left[\int_0^{+\infty}xf(x,ux)\,du+\int_{-\infty}^{0}(-x)f(x,ux)\,du\right]dx=\int_{-\infty}^{z}\int_{-\infty}^{+\infty}|z|f(x,ux)\,dx.$$

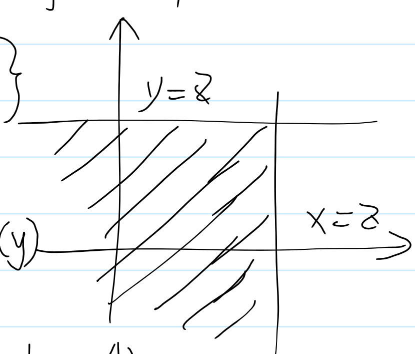
$\therefore$ 有：

$$f(z)=\frac{dF(z)}{dz}=\int_{-\infty}^{+\infty}|z|f(x,zx)\,dx \quad (由变上限求导)$$

② 对于 $M=\max\{X,Y\}$，$N=\min\{X,Y\}$ 的分布（其中 X,Y 独立）

1) $F_{max}(z)=P\{M<z\}=P\{X<z,Y<z\}$

$\xrightarrow{独立}=P\{X<z\}P\{Y<z\}$

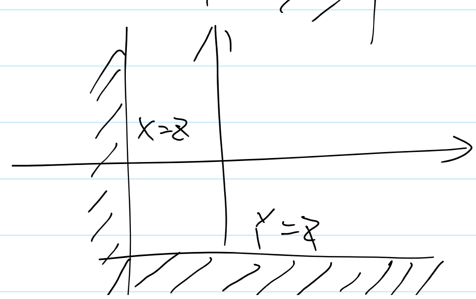


$F(M)=P\{M<z\}=P\{X<z\}P\{Y<z\}=F_X(x)F_Y(y)$

2). $F_{min}(z)=1-P\{X\ge z,Y\ge z\}$

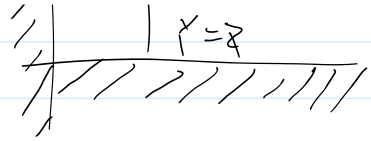
$=1-(1-P\{X<z\})(1-P\{Y<z\})$

$=P\{X<z\}+P\{Y<z\}-P\{X<z\}P\{Y<z\}$



故：

$$= P\{X<z\}+P\{Y<z\}-P\{X<z\}P\{Y<z\}$$



故: $F(N) = F_X(z)+F_Y(z)-F_X(z)F_Y(z)$

$$= 1-(1-F_X(z))(1-F_Y(z))$$