16.1.Н. Матрицы.

Оглавление

16.1.01.Н. Матрицы – Введение.

Матрицей называют прямоугольную таблицу, заполненную числами, например:

$$\begin{pmatrix} 7 & 0 & -2 \\ 1 & 13 & -7 \\ -9 & 5 & 5 \end{pmatrix}, \text{ или } \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & -6 \\ 0 & 4 & 7 & 2 \end{pmatrix}, \text{ или } \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Важнейшие характеристики матрицы – **число строк и число столбцов**. Так, у первой матрицы 3 строки и три столбца, у второй – 2 строки и 4 столбца, а у третьей – 4 строки и 1 столбец. Если у матрицы одинаковое число строк и столбцов, ее называют **квадратной**.
Обозначают матрицы большими латинскими буквами, например:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & -2 \\ 1 & 13 & -7 \\ -9 & 5 & 5 \end{pmatrix}.$$

Сами числа называют **элементами матрицы** и характеризуют их положением в матрице, задавая номер строки и номер столбца и записывая их в виде двойного индекса, причем вначале записывают номер строки, а затем столбца. Например, a_{14} есть элемент матрицы, стоящий в первой строке и четвертом столбце, a_{32} стоит в третьей строке и втором столбце. Итак, у матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & -6 \\ 0 & 4 & 7 & 2 \end{pmatrix}$ элемент $a_{12} = 4$, $a_{23} = 7$, $a_{11} = 1$, а a_{32} не существует. В общем случае элемент a_{ik} есть число, стоящее в *i*-той строке и *k*-том столбце. Иногда матрицы записывают в общем виде через элементы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

В этой матрице *m* строк и *n* столбцов.

Матрицы допустимо также обозначать через совокупность элементов: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \{a_{ik}\}$.

Итак, потренируемся.

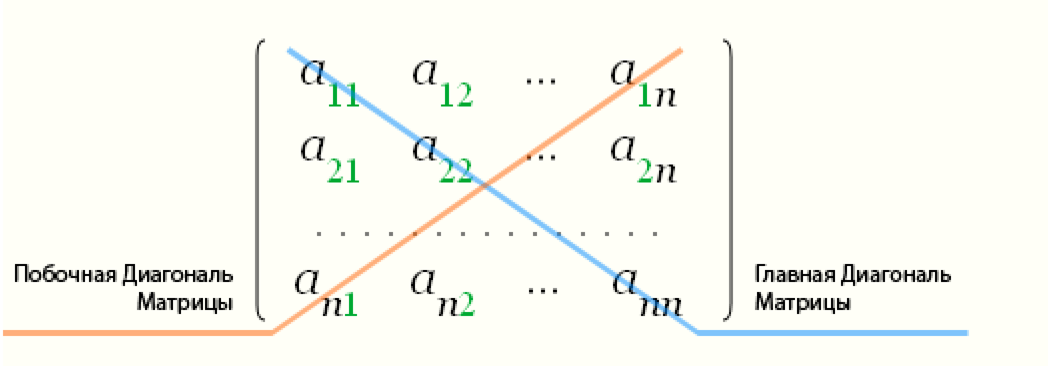
ПРИМЕР. У матрицы $A = \begin{pmatrix} 5 & -6 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & -3 \\ -1 & -1 & -1 & 9 \\ 4 & 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ определить значение выражения $a_{12} + a_{24} \cdot a_{21} - (a_{33})^2 + a_{42}$.

ОТВЕТ: –7.

Самостоятельно найдите для той же матрицы значение выражений

1) $(a_{13} - a_{31})(a_{12} + a_{43})$. Ответ: –12
2) $(a_{31} \cdot a_{12} \cdot a_{34})^{a_{32}}$. Ответ: $\dfrac{1}{54}$
3) $a_{21} + a_{22} \cdot a_{23} - a_{31}$. Ответ: 2

Главной диагональю квадратной матрицы называют элементы, имеющие одинаковые индексы, то есть те элементы, у которых номер строки совпадает с номером столбца. Это элементы a_{11}, a_{22}, … . **Побочная диагональ** идет «перпендикулярно» главной диагонали (см. рисунок).



Особую важность представляют собой так называемые **единичные матрицы**. Это квадратные матрицы, у которых на главной диагонали стоят 1, а все остальные числа равны 0. Обозначают единичные матрицы E или реже I.

$$E = (1) \text{ – единичная матрица размера 1 на 1,}$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ – единичная матрица размера 2 на 2,}$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ – единичная матрица размера 3 на 3,}$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \text{ – единичная матрица размера } n \text{ на } n.$$

Матрицы называют **равными**, если у них равны число строк, число столбцов, и все элементы, имеющие одинаковые индексы, равны.
Матрица называется нулевой, если все ее элементы равны 0. Обозначается нулевая матрица O (буква «о», а не цифра 0).

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \text{ – нулевая матрица размера } m \text{ на } n.$$

16.1.02.Н. Простейшие действия с матрицами.

УМНОЖЕНИЕ МАТРИЦЫ НА ЧИСЛО. Для этого необходимо умножить каждый элемент матрицы на данное число.

ПРИМЕР. Пусть $A=\begin{pmatrix} 7 & 0 & -2 \\ 1 & 13 & -7 \\ -9 & 5 & 5 \end{pmatrix}$. Найти $5A$. $5A=5\cdot A=\begin{pmatrix} 35 & 0 & -10 \\ 5 & 65 & -35 \\ -45 & 25 & 25 \end{pmatrix}$.

СЛОЖЕНИЕ МАТРИЦ. Складывать можно только матрицы одинакового размера, то есть имеющие одинаковое число строк и одинаковое число столбцов. При сложении матриц соответствующие их элементы складываются.

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pn} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{p1} & b_{p2} & \cdots & b_{pn} \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{p1}+b_{p1} & a_{p2}+b_{p2} & \cdots & a_{pn}+b_{pn} \end{pmatrix}$$

ПРИМЕР. Пусть $A=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & -6 \\ 0 & 4 & 7 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 & 1 \\ 5 & -3 & 2 & 9 \end{pmatrix}$. Найти $C=A+B$.

Сразу обратим внимание, что матрицы имеют по 2 строки и по 4 столбца, значит, их можно складывать. Для определения значения элемента матрицы C, стоящего, скажем, на пересечении 2 строки и 3 столбца, необходимо взять элементы матриц A и B, стоящие в 2 строке и 3 столбце, и сложить их. Итак:

$$c_{23}=a_{23}+b_{23}=7+2=9.$$

Аналогично получаем формулу для любого элемента матрицы C:

$$c_{ik}=a_{ik}+b_{ik}.$$

Тогда:

$$C=A+B=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & -6 \\ 0 & 4 & 7 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 & 1 \\ 5 & -3 & 2 & 9 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1+0 & 4-2 & 5-2 & -6+1 \\ 0+5 & 4-3 & 7+2 & 2+9 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -5 \\ 5 & 1 & 9 & 11 \end{pmatrix}.$$

ВЫЧИТАНИЕ МАТРИЦ. Выполняется аналогично сложению.

ПРИМЕР. Пусть $A=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & -6 \\ 0 & 4 & 7 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 & 1 \\ 5 & -3 & 2 & 9 \end{pmatrix}$. Найти $C=A-B$.

Сразу обратим внимание, что матрицы имеют по 2 строки и по 4 столбца, значит, их можно вычитать. Для определения значения элемента матрицы C, стоящего, скажем, на пересечении 2 строки и 3 столбца, необходимо взять элементы матриц A и B, стоящие в 2 строке и 3 столбце, и сложить их. Итак:

$$c_{23}=a_{23}-b_{23}=7-2=5.$$

Аналогично получаем формулу для любого элемента матрицы C:

$$c_{ik}=a_{ik}-b_{ik}.$$

Тогда:

$$C=A-B=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & -6 \\ 0 & 4 & 7 & 2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 & 1 \\ 5 & -3 & 2 & 9 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1-0 & 4+2 & 5+2 & -6-1 \\ 0-5 & 4+3 & 7-2 & 2-9 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 6 & 7 & -7 \\ -5 & 7 & 5 & -7 \end{pmatrix}.$$

ТРАНСПОНИРОВАНИЕ МАТРИЦЫ. При транспонировании у матрицы строки становятся столбцами и наоборот. Полученная матрица называется транспонированной и обозначается A^T.

ПРИМЕР. Пусть $A=\begin{pmatrix}1&4&5&-6\\0&4&7&2\end{pmatrix}$. Тогда: $A^T=\begin{pmatrix}1&0\\4&4\\5&7\\-6&2\end{pmatrix}$.

Справедливы свойства:

1. $(k\cdot A)^T=k\cdot A^T$, где: k – число.
2. $(A+B)^T=A^T+B^T$,
3. $(A-B)^T=A^T-B^T$.
4. $(A^T)^T=A$.
5. $E^T=E$

ТЕСТ 16.1.02.

1. $\begin{pmatrix}1&0\\0&-2\\-1&4\\3&2\end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix}-2&2\\-1&0\\0&1\\2&1\end{pmatrix}$

2. $\left(\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}\right)^T$

3. Пусть $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}$. Найти $\left(A+B-2C-D^T\right)^T$.

4. Пусть $A=\begin{pmatrix}1&2\\2&2\\3&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0&0\\3&6&2\end{pmatrix}$. Вычислить $A+B$.

5. Пусть $A=\begin{pmatrix}1&2\\2&2\\3&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0&0\\3&6&2\end{pmatrix}$. Вычислить $A-B$.

6. Пусть $A=\begin{pmatrix}1&2\\2&2\\3&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0&0\\3&6&2\end{pmatrix}$. Вычислить $A+B^T$.

7. Пусть $A=\begin{pmatrix}1&2\\2&2\\3&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0&0\\3&6&2\end{pmatrix}$. Вычислить A^T+B.

8. Пусть $A=\begin{pmatrix}1&2\\2&2\\3&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0&0\\3&6&2\end{pmatrix}$. Вычислить A^T+B^T.

9. Пусть $A=\begin{pmatrix}1&2\\2&2\\3&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0&0\\3&6&2\end{pmatrix}$. Вычислить $\left(A^T-B\right)^T\cdot 4$.

10. Найти матрицу *X*, если $2\begin{pmatrix}-1&3\\2&4\\0&5\end{pmatrix}+X=\begin{pmatrix}1&-7\\2&8\\-3&9\end{pmatrix}$.

11. Найти матрицу *X*, если $2\begin{pmatrix}1&-1\\-1&0\end{pmatrix}-X^T=3\begin{pmatrix}0&1\\2&4\end{pmatrix}$.

ОТВЕТЫ:

1. $\begin{pmatrix}-3&4\\-2&-2\\-1&6\\7&4\end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix}0&2&5\\0&4&6\\1&4&8\end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&-1&-2\\-1&-2&-2\end{pmatrix}$

4. Невозможно.

5. Невозможно.

6. $\begin{pmatrix}2&5\\2&8\\3&4\end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix}2&2&3\\5&8&4\end{pmatrix}$

8. Невозможно.

9. $\begin{pmatrix}0&-4\\8&-16\\12&0\end{pmatrix}$

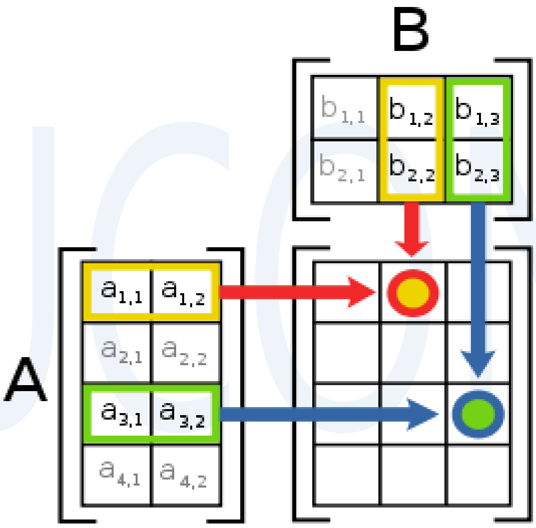
10. $\begin{pmatrix}3&-13\\-2&0\\-3&-1\end{pmatrix}$

11. $\begin{pmatrix}2&-8\\-5&-12\end{pmatrix}$

16.1.03.Н. Умножение матриц.

Если Вы научитесь быстро и без ошибок умножать матрицы, то в ближайшее время не встретите ничего сложного. Итак.

1. Умножать можно матрицы, если **число столбцов первой матрицы равно числу строк второй матрицы.**
2. В результате **получится матрица, число строк которой равно числу строк первой матрицы, а число столбцов равно числу столбцов второй матрицы.**
3. Умножение матриц **некоммутативно**. Не бойтесь. Это значит, что $A\cdot B \neq B\cdot A$. Это первый случай в математике, когда умножение некоммутативно. Более того, если можно посчитать произведение $A\cdot B$, это совсем не означает, что можно посчитать произведение $B\cdot A$.
4. Пусть $C = A\cdot B$. Для определения элемента матрицы *C*, стоящего в *i*-той строке и *k*-том столбце необходимо взять *i*-тую строку первой умножаемой матрицы и *k*-тый столбец второй. Далее поочередно брать элементы этих строки и столбца и умножать их. Берем первый элемент из строки первой матрицы и умножаем на первый элемент столбца второй матрицы. Далее берем второй элемент строки первой матрицы и умножаем на второй элемент столбца второй матрицы и т.д. А потом все эти произведения надо сложить. Поняли? Конечно, нет. Смотрите.



$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}\bullet\begin{vmatrix}b_{11}&b_{12}\\b_{21}&b_{22}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11}\cdot b_{11}+a_{12}\cdot b_{21} & a_{11}\cdot b_{12}+a_{12}\cdot b_{22}\\ a_{21}\cdot b_{11}+a_{22}\cdot b_{21} & a_{21}\cdot b_{12}+a_{22}\cdot b_{22}\end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}\bullet\begin{vmatrix}b_{11}&b_{12}\\b_{21}&b_{22}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11}\cdot b_{11}+a_{12}\cdot b_{21} & a_{11}\cdot b_{12}+a_{12}\cdot b_{22}\\ a_{21}\cdot b_{11}+a_{22}\cdot b_{21} & a_{21}\cdot b_{12}+a_{22}\cdot b_{22}\end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}\bullet\begin{vmatrix}b_{11}&b_{12}\\b_{21}&b_{22}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11}\cdot b_{11}+a_{12}\cdot b_{21} & a_{11}\cdot b_{12}+a_{12}\cdot b_{22}\\ a_{21}\cdot b_{11}+a_{22}\cdot b_{21} & a_{21}\cdot b_{12}+a_{22}\cdot b_{22}\end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}\bullet\begin{vmatrix}b_{11}&b_{12}\\b_{21}&b_{22}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11}\cdot b_{11}+a_{12}\cdot b_{21} & a_{11}\cdot b_{12}+a_{12}\cdot b_{22}\\ a_{21}\cdot b_{11}+a_{22}\cdot b_{21} & a_{21}\cdot b_{12}+a_{22}\cdot b_{22}\end{vmatrix}$$

ПРИМЕР. Найти произведение матриц $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 8 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Вначале определим, каким будет размер полученной матрицы. Она будет содержать столько же строк, что и первая матрица (то есть, 3), и столько же столбцов, что и вторая матрица (то есть, 3).

Определим элемент a_{11} новой матрицы. Для этого возьмем первую строку матрицы $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 8 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, то есть последовательность чисел 2 и 5, и первый столбец матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, то есть последовательность чисел 1 и 2. Попарно перемножим первые из этих чисел и вторые из них. Сложим полученные произведения. Получим $a_{11} = 2 \cdot 1 + 5 \cdot 2 = 12$.

Определим элемент a_{12} новой матрицы. Для этого возьмем первую строку матрицы $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 8 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, то есть последовательность чисел 2 и 5, и второй столбец матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, то есть последовательность чисел 2 и 0. Попарно перемножим первые из этих чисел и вторые из них. Сложим полученные произведения. Получим $a_{12} = 2 \cdot 2 + 5 \cdot 0 = 4$.

Продолжим аналогичные рассуждения.

$$a_{11} = 2 \cdot 1 + 5 \cdot 2 = 12,$$
$$a_{12} = 2 \cdot 2 + 5 \cdot 0 = 4,$$
$$a_{13} = 2 \cdot 1 + 5 \cdot (-1) = -3,$$
$$a_{21} = 2 \cdot 1 + 8 \cdot 2 = 18,$$
$$a_{22} = 2 \cdot 2 + 8 \cdot 0 = 4,$$
$$a_{23} = 2 \cdot 1 + 8 \cdot (-1) = -6,$$
$$a_{31} = 3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 = 11,$$
$$a_{32} = 3 \cdot 2 + 4 \cdot 0 = 6,$$
$$a_{11} = 3 \cdot 1 + 4 \cdot (-1) = -1.$$

Составляем матрицу, вспомнив, что первый индекс у элемента определяет номер строки, а второй – номер столбца.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 4 & -3 \\ 18 & 4 & -6 \\ 15 & 6 & -1 \end{pmatrix}$$

Итак:

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 8 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 4 & -3 \\ 18 & 4 & -6 \\ 11 & 6 & -1 \end{pmatrix}$$

ПРИМЕР. Найти произведение матриц $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 8 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Заметим, что пример такой же, как и в предыдущем случае, только матрицы переставлены местами. Вначале определим, каким будет размер полученной матрицы. Она будет содержать столько же строк, что и первая матрица (то есть, 2), и столько же столбцов, что и вторая матрица (то есть, 2). Вычислим элементы полученной матрицы:

$$a_{11} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 3 = 9,$$

$$a_{12} = 1 \cdot 5 + 2 \cdot 8 + 1 \cdot 4 = 25,$$

$$a_{11} = 2 \cdot 2 + 0 \cdot 2 + (-1) \cdot 3 = 1,$$

$$a_{11} = 2 \cdot 5 + 0 \cdot 8 + (-1) \cdot 4 = 6.$$

Итак:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 8 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 25 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$$

Обратите внимание, что при перестановке сомножителей получился другой результат.

ПРИМЕР. Найти произведение $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 8 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$. Такое произведение вычислить невозможно, так как число столбцов первой матрицы (их 2) не равно числу строк второй матрицы (а их 3).

СВОЙСТВА ПРОИЗВЕДЕНИЯ МАТРИЦ:

1. $k \cdot (A \cdot B) = (kA) \cdot B = A \cdot (kB)$, где: k – число.
2. $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$.
3. $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$.
4. $(A - B) \cdot C = A \cdot C - B \cdot C$.
5. Произведение матрицы на единичную матрицу подходящего размера не изменяет матрицу:
$$A \cdot E = E \cdot A = A.$$
6. Произведение матрицы на нулевую матрицу подходящего размера равно нулевой матрице:
$$A \cdot O = O \cdot A = O.$$
7. Произведение матриц некоммутативно:
$$A \cdot B \neq B \cdot A.$$

ТЕСТ 16.1.03.

1. Найти произведение $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 9 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

2. Найти произведение $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 9 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

3. Найти c_{23}, если $C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.

Найти произведение матриц:

4. $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$

6. $\begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -3 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

8. $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

9. $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & 7 \\ 4 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

Вычислить:

10. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2$

11. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^3$

12. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^4$

ОТВЕТЫ:

1. $\begin{pmatrix} -5 \\ 36 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} -1 & -4 & 6 \\ 42 & 75 & 70 \end{pmatrix}$

3. 18

4. (-4)

5. $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 39 & 5 \end{pmatrix}$

6. $\begin{pmatrix} 11 \\ 8 \\ 30 \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} 8 & 11 & 1 \\ 9 & 6 & -8 \\ -6 & -9 & -8 \end{pmatrix}$

8. $\begin{pmatrix} -1 \\ -8 \\ -1 \end{pmatrix}$

9. $\begin{pmatrix} 39 & -14 & -1 \\ 48 & -8 & 38 \\ 37 & 22 & 149 \\ 112 & -32 & 32 \end{pmatrix}$

10. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

11. $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

12. $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

16.1.04.Н. Определитель матрицы.

Определителем (детерминантом) квадратной матрицы A называется число, которое обозначается $\det A$ или реже $|A|$ и вычисляется определённым образом. **Для матрицы размера 1 на 1** определителем является сам единственный элемент матрицы.

ПРИМЕР. Найти определитель матрицы $A=(13)$.

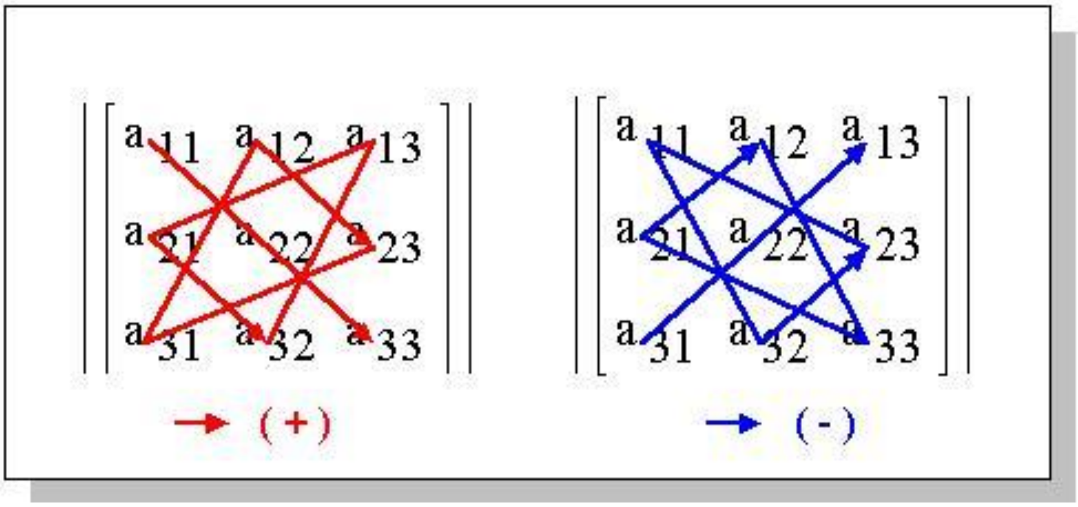
$$\det A=13$$

Для матрицы размера 2 на 2 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ определитель находят как $\det A=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$.

ПРИМЕР. Найти определитель матрицы $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

$$\det A=1\cdot(-1)-3\cdot 2=-7.$$

Для матрицы размера 3 на 3 существуют сложные формулы, но удобнее применять графический метод:



Обратите внимание, что на двух картинках изображены либо прямые, либо равнобедренные треугольники. Слева нарисована главная диагональ матрицы и два треугольника, основания которых параллельны главной диагонали. Справа нарисована побочная диагональ матрицы и два треугольника, основания которых параллельны побочной диагонали. Каждая прямая или треугольник «закрашивает» по три элемента матрицы.

Все три элемента, которые «закрашены» одной прямой или треугольником, надо перемножить. Получится шесть произведений. Те из них, которые относятся к левой картинке (связаны с главной диагональю), надо взять так, как они и получились. Те, которые относятся к правой картинке (связаны с побочной диагональю), надо взять с обратным знаком (то есть, домножить на –1). А потом все произведения надо сложить.

ПРИМЕР. Найти определитель матрицы $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.

$$\det A=1\cdot5\cdot9+2\cdot6\cdot7+3\cdot4\cdot8-3\cdot5\cdot7-2\cdot4\cdot9-1\cdot6\cdot8=0.$$

Существуют способы вычисления определителей и более высоких порядков.

ТЕСТ 16.1.04.

Вычислить определители:

1. $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$

2. $\begin{vmatrix} 7 & -5 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$

3. $\begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 0 & -5 \end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

5. $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 7 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix}$

6. $\begin{vmatrix} -4 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 5 & -2 & 4 \end{vmatrix}$

7. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & b & a \\ a & b & c \end{vmatrix}$

8. $\begin{vmatrix} a & b \\ ka & kb \end{vmatrix}$

9. $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a+kc & b+kd \\ c & d \end{vmatrix}$

10. При каком значении x равен нулю определитель $\begin{vmatrix} 1 & x \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$?

11. При каком значении x равен нулю определитель $\begin{vmatrix} 3-x & 2 \\ 2 & -x \end{vmatrix}$?

12. При каком значении x равен нулю определитель $\begin{vmatrix} 1 & 2 & x \\ -1 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix}$?

13. При каком значении x равен нулю определитель $\begin{vmatrix} 3-x & 0 & 0 \\ 2 & x & 0 \\ 10 & -5 & 1 \end{vmatrix}$?

14. При каком значении x равен нулю определитель $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 7 & x \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$?

15. Пусть А – квадратная матрица второго порядка, и $\det A = 13$. Найти $\det(2A)$.

16. Пусть А – квадратная матрица третьего порядка, и $\det A = 6$. Найти $\det(3A)$.

ОТВЕТЫ:

1.	11	**5.**	55	**9.**	0	**13.**	0 или 3.
2.	34	**6.**	–31	**10.**	5/3	**14.**	Ни при каком.
3.	–15	**7.**	0	**11.**	–1 или 4.	**15.**	52
4.	22	**8.**	0	**12.**	–3	**16.**	162

16.1.05.Н. Миноры и алгебраические дополнения.

Рассмотрим матрицу A. Выберем в ней s строк и s столбцов. Составим квадратную матрицу из элементов, стоящих на пересечении полученных строк и столбцов. **Минором матрицы A порядка s** называют определитель полученной матрицы. Понятно? Конечно, нет. Смотрите. Пусть мы рассматриваем матрицу:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 & 0 & 6 \\ 0 & -2 & 4 & -1 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & -1 & 5 & 3 & 1 \\ 4 & 4 & 1 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Минором первого порядка, построенным на второй строке и третьем столбце, называют определитель квадратной матрицы, составленной из элемента, стоящего во второй строке и третьем столбце исходной матрицы, то есть $|4| = 4$.

Минором первого порядка, построенным на четвертой строке и шестом столбце, называют определитель квадратной матрицы, составленной из элемента, стоящего в четвертой строке и шестом столбце исходной матрицы, то есть $|0| = 0$.

Минором второго порядка, построенным на первой, второй строках и первом, втором столбцах, называют определитель $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -2$.

Минором второго порядка, построенным на первой, четвертой строках и первом, пятом столбцах, называют определитель $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 0$.

Миноры, построенные на первых строках и столбцах (начиная с левого верхнего угла матрицы) называют главными угловыми минорами. У нашей матрицы есть 4 главных угловых минора:

- первого порядка $|1| = 1$,
- второго порядка $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -2$,
- третьего порядка $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ (можете рассчитать его сами),
- и четвертого порядка $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -2 & 4 & -1 \\ -2 & 1 & -1 & 5 \\ 4 & 4 & 1 & -2 \end{vmatrix}$ (его вы научитесь считать немного позже).

Кстати, если матрица квадратная, то ее определитель тоже является ее минором максимально возможного порядка.

ПРИМЕР. Найти все миноры второго порядка матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Миноры второго порядка получаются при вычеркивании двух строк и двух столбцов (то есть, в нашем случае всех столбцов). Очевидно, что вычеркнуть две строки мы можем тремя различными способами. Получаем три минора второго порядка:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1,\ \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \text{ и } \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1.$$

Рассмотрим **квадратную** матрицу A. Выберем в ней s строк и s столбцов. **Дополнительным минором к минору порядка** $\boldsymbol{s}$ называют определитель, составленный из элементов, оставшихся после вычеркивания данных строк и столбцов.

$$A=\begin{pmatrix} \boxed{a_{11}} & a_{12} & \boxed{a_{13}} & a_{14} & \boxed{a_{15}} & \boxed{a_{16}} \\ a_{21} & \boxed{a_{22}} & a_{23} & \boxed{a_{24}} & a_{25} & a_{26} \\ \boxed{a_{31}} & a_{32} & \boxed{a_{33}} & a_{34} & \boxed{a_{35}} & \boxed{a_{36}} \\ a_{41} & \boxed{a_{42}} & a_{43} & \boxed{a_{44}} & a_{45} & a_{46} \\ \boxed{a_{51}} & a_{52} & \boxed{a_{53}} & a_{54} & \boxed{a_{55}} & \boxed{a_{56}} \\ \boxed{a_{61}} & a_{62} & \boxed{a_{63}} & a_{64} & \boxed{a_{65}} & \boxed{a_{66}} \end{pmatrix},$$

$$P=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{15} & a_{16} \\ a_{31} & a_{33} & a_{35} & a_{36} \\ a_{51} & a_{53} & a_{55} & a_{56} \\ a_{61} & a_{63} & a_{65} & a_{66} \end{pmatrix}, \qquad Q=\begin{pmatrix} a_{22} & a_{24} \\ a_{42} & a_{44} \end{pmatrix}.$$

В матрице A минор четвертого порядка, построенный на 1, 3, 5 и 6 строках и столбцах – это определитель матрицы P. А дополнительный минор к нему – это определитель матрицы Q.

Рассмотрим матрицу $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -2 & 4 & -1 \\ -2 & 1 & -1 & 5 \\ 4 & 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Минор второго порядка, построенный на второй, третьей строке и втором, третьем столбце – это определитель $\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2$.

А дополнительный минор к нему – это определитель $\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -18$.

В частности, **дополнительным минором к элементу** a_{ik} **квадратной матрицы** $\boldsymbol{A}$ называют определитель матрицы, полученной из матрицы A при вычеркивании i-той строки и k-того столбца.

ПРИМЕР. Найти дополнительный минор к элементу a_{13} матрицы $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.

Вычеркиваем первую строку и третий столбец матрицы A и считаем определитель $\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -3$.

ПРИМЕР. Найти дополнительный минор к элементу a_{22} матрицы $A=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&1&6&7\\0&0&1&8\\0&0&0&1\end{pmatrix}$.

Вычеркиваем вторую строку и второй столбец матрицы A и считаем определитель $\begin{vmatrix}1&3&4\\0&1&8\\0&0&1\end{vmatrix}=1$.

Алгебраическим дополнением к элементу a_{ik} **квадратной матрицы** A называют дополнительный минор к этому элементу, умноженный на $(-1)^{i+k}$, где $i+k$ есть сумма номеров строки и столбца элемента a_{ik}. Обозначают алгебраическое дополнение A_{ik}.

ПРИМЕР. Найти алгебраическое дополнение A_{23} матрицы $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}$.

Вычеркиваем вторую строку и третий столбец и считаем определитель $\begin{vmatrix}1&2\\7&8\end{vmatrix}=-6$. Не забудьте умножить на $(-1)^{i+k}$. Получаем:

$$A_{23}=(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix}1&2\\7&8\end{vmatrix}=6$$

ТЕСТ 16.1.05.

1. Дана матрица $\begin{pmatrix}2&-1&3&4\\0&7&2&-3\\5&4&3&1\\-1&1&2&6\\1&-1&4&8\end{pmatrix}$. Найти ее минор, выбрав вторую и четвертую строки, первый и третий столбцы.
2. Для той же матрицы найти ее минор, выбрав первую и вторую строки, первый и четвертый столбцы.
3. Дана матрица $\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\\a_{41}&a_{42}&a_{43}&a_{44}\end{pmatrix}$. Записать минор, дополнительный к минору M, если элементы минора M расположены в первой и третьей строках, втором и четвертом столбцах.
4. Дана матрица $\begin{pmatrix}2&0&-1&4&5\\1&2&3&0&7\\4&1&-4&3&5\\1&2&5&-1&4\\3&0&7&1&5\end{pmatrix}$. Найти минор, дополнительный к минору M, если элементы минора M расположены во второй, четвертой и пятой строках, первом, третьем и пятом столбцах.

5. Дана матрица $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$ и ее минор $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$. Найти дополнительный минор для этого минора.

6. Дана матрица $\begin{pmatrix} 3 & 4 & -7 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & 2 \\ 3 & -1 & 4 & 6 \\ -7 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$. Найти алгебраическое дополнение элемента 6.

7. Дана матрица $\begin{pmatrix} 3 & 4 & -7 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & 2 \\ 3 & -1 & 4 & 6 \\ -7 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$. Найти алгебраическое дополнение элемента 0.

ОТВЕТЫ:

1	2	3	4	5	6	7
2	–6	$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{41} & a_{43} \end{vmatrix}$	–4	$\begin{vmatrix} a_{23} & a_{24} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$	214	101

16.1.06.Н. Вычисление определителя матрицы через алгебраические дополнения.

Рассмотрим квадратную матрицу A. Для вычисления ее определителя необходимо выбрать любую ее строку или столбец и найти произведения каждого элемента этой строки или столбца на алгебраическое дополнение к нему. А дальше надо просуммировать все эти произведения. Когда будете считать алгебраические дополнения, не забывайте про множитель $(-1)^{i+k}$. Чтобы счет был более простым, выбирайте ту строку или столбец матрицы, который содержит наибольшее число нулей.

ПРИМЕР. Найти определитель матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ через алгебраические дополнения.

Выберем первую строку. Она состоит из элементов 1 и 2. Алгебраическое дополнение к элементу 1 равно $(-1)^{1+1}|4| = 4$. Алгебраическое дополнение к элементу 2 равно $(-1)^{1+2}|3| = -3$. Считаем произведения $1 \cdot 4$ и $2 \cdot (-3)$ и суммируем их. Получаем:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = 1 \cdot 4 + 2 \cdot (-3) = -2.$$

ПРИМЕР. Найти определитель матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ через алгебраические дополнения.

Выберем второй столбец (там есть 0). Можно было выбирать и первую строку. Итак, второй столбец состоит из трех элементов.

1. Элемент 0. Алгебраическое дополнение к нему равно $(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -3$. Его, естественно, можно было и не считать, так как их произведение равно 0.
2. Элемент 3. Алгебраическое дополнение к нему равно $(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$. Произведение опять равно 0.
3. Элемент 4. Алгебраическое дополнение к нему равно $(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3$. Их произведение равно 12.

Суммируем все произведение и получаем, что определитель матрицы равен 12.

ПРИМЕР. Найти определитель матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Будем раскладывать по второй строке. Опустим нулевые элементы (произведения будут равны 0) и посчитаем оставшиеся произведения.

1. Элемент 1. Алгебраическое дополнение к нему равно $(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$. Рассчитать определитель третьего порядка Вы, конечно, смогли сами. Произведение равно 0.

2. Элемент -1. Алгебраическое дополнение к нему равно $(-1)^{2+4}\begin{vmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 2\\ 1 & 1 & -1\end{vmatrix}=-3$. Произведение равно 3.

Суммируем все произведения и получаем, что определитель матрицы равен 3.

ТЕСТ 16.1.06.

Рассчитать определители:

1. $\begin{vmatrix}-2 & 1 & 3\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 5\end{vmatrix}$

2. $\begin{vmatrix}3 & 1 & -7 & 2\\ 0 & 0 & 2 & 0\\ 3 & 1 & -4 & 5\\ 2 & 3 & 7 & 0\end{vmatrix}$

3. $\begin{vmatrix}-4 & 3 & 7 & 2\\ 2 & 2 & 0 & -8\\ 1 & 1 & 0 & 1\\ 5 & 3 & 0 & 4\end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix}2 & -4 & 9 & 11 & 1\\ 0 & 3 & 15 & 17 & 6\\ 0 & 0 & 1 & -4 & -78\\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5\end{vmatrix}$

5. $\begin{vmatrix}0 & 0 & 0 & 4\\ 0 & 0 & 2 & -10\\ 0 & 1 & 3 & 17\\ -2 & 4 & 5 & 6\end{vmatrix}$

6. $\begin{vmatrix}-2 & 2 & 3 & 3\\ 0 & 3 & -1 & 2\\ 3 & -1 & 4 & 6\\ 1 & 2 & 0 & 1\end{vmatrix}$

7. $\begin{vmatrix}2 & 3 & -1 & 4\\ 1 & 2 & 3 & 5\\ -1 & 2 & 0 & 1\\ 5 & 8 & 1 & 1\end{vmatrix}$

ОТВЕТЫ:

1. –15 **2.** 42 **3.** 140 **4.** –30 **5.** –16 **6.** 110 **7.** 300

16.1.07.Н. Обратная матрица.

Рассмотрим квадратную матрицу A. **Матрица A^{-1} называется обратной к матрице A,** если их произведения равны единичной матрице: $A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=E$. Обратная матрица существует только для квадратных матриц. Обратная матрица существует, только если матрица A невырождена, то есть ее определитель не равен нулю $\det A\neq 0$. В противном случае обратную матрицу посчитать невозможно.

ПРИМЕР. Являются ли обратными матрицы $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$?

Считаем произведение матриц $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot1+0\cdot(-1) & 1\cdot1+0\cdot0\\ 0\cdot1+(-1)\cdot(-1) & 0\cdot1+(-1)\cdot0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$.

Поскольку полученная матрица не является единичной, то матрицы не являются обратными.

ПРИМЕР. Являются ли обратными матрицы $\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix}2 & -1\\ -3 & 2\end{pmatrix}$?

Считаем произведение $\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & -1\\ -3 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot2+1\cdot(-3) & 2\cdot(-1)+1\cdot2\\ 3\cdot2+2\cdot(-3) & 3\cdot(-1)+2\cdot2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

Не вздумайте сказать, что матрицы обратны!

Считаем произведение $\begin{pmatrix}2 & -1\\ -3 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$!

И вот только теперь отвечаем, что матрицы являются обратными.

ПРИМЕР. Существует ли матрица, обратная для матрицы $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}$?

Поскольку определитель матрицы $\det\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}=4-4=0$, то матрица вырождена, и обратная к ней не существует.

Для построения обратной матрицы необходимо:

1. Найти определитель матрицы A. Обозначим его Δ.
2. Найти алгебраическое дополнение A_{ik} для каждого элемента a_{ik} матрицы A.
3. Построить матрицу из алгебраических дополнений и **обязательно транспонировать ее.** Часто про транспонирование забывают.
4. Умножить полученную матрицу на $\dfrac{1}{\Delta}$.

Таким образом, в случае, если матрица A имеет размер 3 на 3, обратная к ней имеет вид:

$$A^{-1}=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{pmatrix}$$

ПРИМЕР. Найти обратную матрицу для матрицы $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$.

1. Считаем определитель матрицы: $\Delta=\det A=2$.
2. Считаем алгебраические дополнения к элементам матрицы:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}|2|=2,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}|0| = 0,$$
$$A_{21} = (-1)^{2+1}|1| = -1,$$
$$A_{22} = (-1)^{2+2}|1| = 1.$$

3. Составляем матрицу из алгебраических дополнений, не забывая ее транспонировать:
$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
4. Обратная матрица равна:
$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

ПРИМЕР. Найти обратную матрицу для матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Считаем определитель матрицы: $\Delta = \det A = 1$.
2. Считаем алгебраические дополнения к элементам матрицы:
$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$
$$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$
$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$
$$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$
$$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$
$$A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$
$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0,$$
$$A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1,$$
$$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$
3. Составляем матрицу из алгебраических дополнений, не забывая ее транспонировать:
$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
4. Обратная матрица равна:
$$A^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

ТЕСТ 16.1.07.

1. Являются ли взаимно обратными матрицы $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$?

2. Найти матрицу, обратную матрице $\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -3 & 5\end{pmatrix}$.

3. Найти матрицу, обратную матрице $\begin{pmatrix}2 & -3\\ 1 & -4\end{pmatrix}$.

4. Найти матрицу, обратную матрице $\begin{pmatrix}-3 & 1\\ 15 & -5\end{pmatrix}$.

5. Найти матрицу, обратную матрице $\begin{pmatrix}0 & 3\\ -5 & 4\end{pmatrix}$.

6. Пусть матрица B обратная матрице $A=\begin{pmatrix}-3 & 2 & 6\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & 7 & 1\end{pmatrix}$. Найти элемент b_{32}.

7. Найти матрицу, обратную для матрицы $A=\begin{pmatrix}3 & 0 & 1\\ -1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 1\end{pmatrix}$.

8. Найти матрицу, обратную для матрицы $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 3\\ 4 & 2 & -5\\ 6 & 1 & -2\end{pmatrix}$.

9. Найти матрицу, обратную для матрицы $A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 1/2 & 0\\ 0 & 0 & 1/3\end{pmatrix}$.

10. Найти матрицу, обратную для матрицы $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 1 & 1 & -2\\ 1 & 1 & 4\end{pmatrix}$.

11. Найти матрицу, обратную для матрицы $A=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 1/3\\ 0 & 0 & 1/4 & 0\\ 0 & 1/6 & 0 & 0\\ 1/12 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

12. Найти матрицу, обратную для матрицы $A=\begin{pmatrix}1 & -3 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

13. Найти матрицу, обратную для матрицы $A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-1&1&0&0\\1&-1&1&0\\-1&1&-1&1\end{pmatrix}$.

14. При каком значении x существует матрица, обратная данной $\begin{pmatrix}2&4&-1\\0&0&3\\x-2&2&1\end{pmatrix}$?

15. При каком значении x существует матрица, обратная данной $\begin{pmatrix}x&x^2-1&0\\1&x&0\\3&4&2\end{pmatrix}$?

ОТВЕТЫ:

1. Да.

2. $\begin{pmatrix}5&-2\\3&-1\end{pmatrix}$

3. $-\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-4&3\\-1&2\end{pmatrix}$

4. Не существует.

5. $\frac{1}{15}\begin{pmatrix}4&-3\\5&0\end{pmatrix}$

6. $\frac{19}{3}$

7. $-\frac{1}{38}\begin{pmatrix}-10&4&-2\\7&1&-10\\-8&-12&6\end{pmatrix}$

8. Не существует.

9. $\begin{pmatrix}1/2&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$

10. $\frac{1}{6}\begin{pmatrix}3&3&0\\-3&1&2\\0&-1&1\end{pmatrix}$

11. $\begin{pmatrix}0&0&0&12\\0&0&6&0\\0&4&0&0\\3&0&0&0\end{pmatrix}$

12. $\begin{pmatrix}1&3&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&-1\\0&0&-1&2\end{pmatrix}$

13. $\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}$

14. При $x\neq 3$.

15. При любом x.

16.1.08.Н. Матричные уравнения.

1. Уравнения типа $A\cdot X=B$. Все матрицы предполагаются «хорошими».
Для решения надо домножить обе части уравнения на матрицу A^{-1} слева:
$$A^{-1}\cdot A\cdot X=A^{-1}\cdot B.$$
Вспомним, что умножение матриц некоммутативно, и важен порядок умножения. Теперь видим, что $A^{-1}\cdot A=E$. Тогда:
$$E\cdot X=A^{-1}\cdot B,$$
$$X=A^{-1}\cdot B.$$
Итак, вам придется найти обратную матрицу для матрицы A и выполнить умножение двух матриц.
2. Уравнения типа $X\cdot A=B$. Все матрицы предполагаются «хорошими».
Для решения надо домножить обе части уравнения на матрицу A^{-1} справа:
$$X\cdot A\cdot A^{-1}=B\cdot A^{-1}.$$
Вспомним, что умножение матриц некоммутативно, и важен порядок умножения. Теперь видим, что $A\cdot A^{-1}=E$. Тогда:
$$X\cdot E=B\cdot A^{-1},$$
$$X=B\cdot A^{-1}.$$
Итак, вам придется найти обратную матрицу для матрицы A и выполнить умножение двух матриц.
3. Уравнения типа $A\cdot X\cdot B=C$. Все матрицы предполагаются «хорошими».
Для решения надо домножить обе части уравнения на матрицу A^{-1} слева и на матрицу B^{-1} справа:
$$A^{-1}\cdot A\cdot X\cdot B\cdot B^{-1}=A^{-1}\cdot C\cdot B^{-1}.$$
Вспомним, что умножение матриц некоммутативно, и важен порядок умножения. Теперь видим, что $A^{-1}\cdot A=B\cdot B^{-1}=E$. Тогда:
$$E\cdot X\cdot E=A^{-1}\cdot C\cdot B^{-1},$$
$$X=A^{-1}\cdot C\cdot B^{-1}.$$

Если Вы поняли логику, то более сложные уравнения тоже сможете решить легко и непринужденно.

ТЕСТ 16.1.08.

Решите матричные уравнения:

1. $X\cdot\begin{pmatrix}10 & 26\\ -10 & -7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 4\\ -1 & 5\end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix}2 & 3\\ -1 & 4\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}9 & 10\\ 1 & -5\end{pmatrix}$

3. $X\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & 4 & -2\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -2 & 5\\ 1 & 14 & -7\\ 1 & 20 & -12\end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot X\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & -12\\ 1 & -4\end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 2 & 4 & -1\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}\cdot X+\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -1 & 4\\ 0 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 6\\ -1 & 2\\ 5 & 12\end{pmatrix}$

ОТВЕТЫ:

1	2	3	4	5
$\begin{pmatrix}1/10 & -2/10\\ 3/10 & 4/10\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3 & 5\\ 1 & 0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\ 1 & 3 & 0\\ 2 & 4 & -1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & -1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}5/13 & 3\\ 5/13 & -1\\ 30/13 & 4\end{pmatrix}$