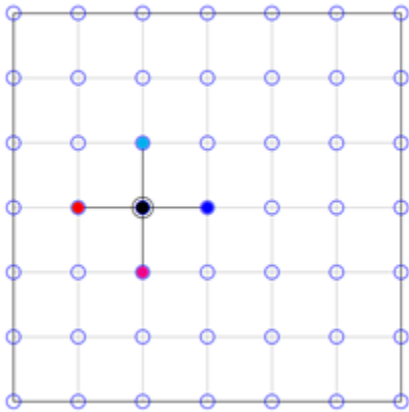
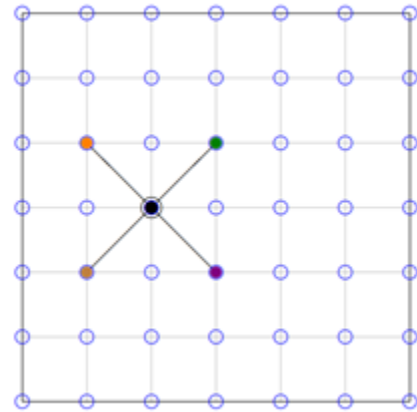


# HOCHSCHULE HEILBRONN

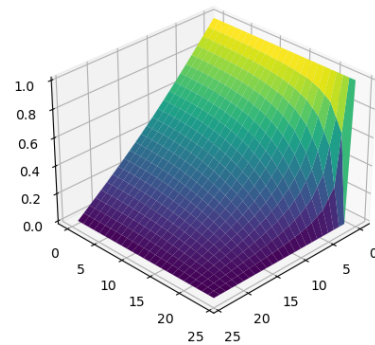
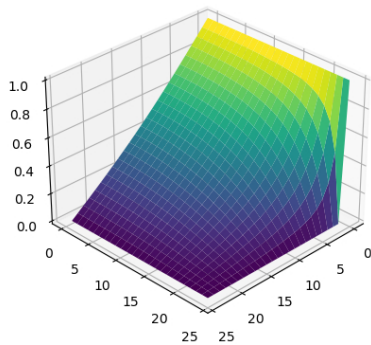
## MODELING AND SIMULATION



Conventional difference star



Alternative difference star



## Wärmeleitung mit alternativem Differenzenstern

*Fabian Reinwald*

Betreuer: Prof. M. Scholle

Zeitraum: WS 2020/21

26. Februar 2021

## Inhaltsverzeichnis

<b>1 Aufgabenstellung</b>	<b>3</b>
<b>2 Einleitung</b>	<b>3</b>
<b>3 Diskretisierung des Laplace-Operators</b>	<b>4</b>
<b>4 Diskretisierung einer homogenen Neumann-Randbedingung</b>	<b>6</b>
<b>5 Implementierung in Python</b>	<b>6</b>
<b>6 Vergleich der Differenzensterne</b>	<b>6</b>
6.1 Intuition . . . . .	7
6.2 Rechenperformance . . . . .	7
6.3 Modellperformance . . . . .	7
6.3.1 Abstand der Nachbarpunkte . . . . .	8
6.3.2 Ecken des Felds . . . . .	8
6.4 Fazit . . . . .	8

## 1 Aufgabenstellung

Das Standard-Verfahren zur Lösung der 2D Laplace-Gleichung basiert auf einer Mittelwertbildung der Werte der 'direkten Nachbarn', so wie auf dem Titelbild links veranschaulicht. Dabei werden als 'direkte Nachbarn' aber nur diejenigen in horizontaler und vertikaler Richtung angesehen, woraus der bekannte 'Differenzenstern' in Form eines Plus-Zeichens resultiert.

Was aber ist mit den 'diagonalen Nachbarn'? Könnte man nicht auch ein alternatives Verfahren, so wie auf dem Titelbild rechts angedeutet, allein mit den diagonalen Nachbarn mit einem X-förmigen Differenzenstern verwenden?

Ziel der Aufgabe ist es, genau dies zu testen und z.B. auf das in der Vorlesung behandelte Wärmeleitproblem anzuwenden und mit den vorherigen Ergebnissen zu vergleichen.

## 2 Einleitung

Um das stationäre Problem der Temperaturverteilung über einen 2-dimensionalen Bereich numerisch lösen zu können, muss das Gebiet in eine Menge von Knotenpunkten unterteilt werden. Mit einer finiten Differenzenmethode kann nun ein Temperaturverlauf ermittelt werden und es wird kein analytisches Lösen einer Laplacegleichung benötigt. Für diese Differenzen wird ein „Differenzenstern“ verwendet wie er in Abbildung 2.1 zu sehen ist.

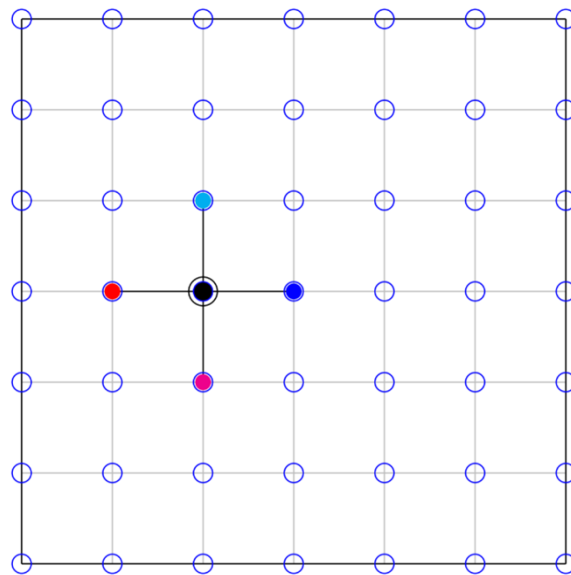


Abbildung 2.1: Konventioneller Differenzenstern direkter Nachbarn in einem diskretisiertem Gebiet

Um nun den mittleren Wert zu bestimmen, lässt sich einfach der Mittelwert der vier markierten angrenzenden Punkte berechnen. Nun ist es nicht unbedingt notwendig genau diese vier Punkte zu verwenden, stattdessen kann man auch die vier diagonal angrenzenden Punkte verwenden, was einen um 45° rotiertes Differenzenstern ergibt wie in 2.2 zu sehen.

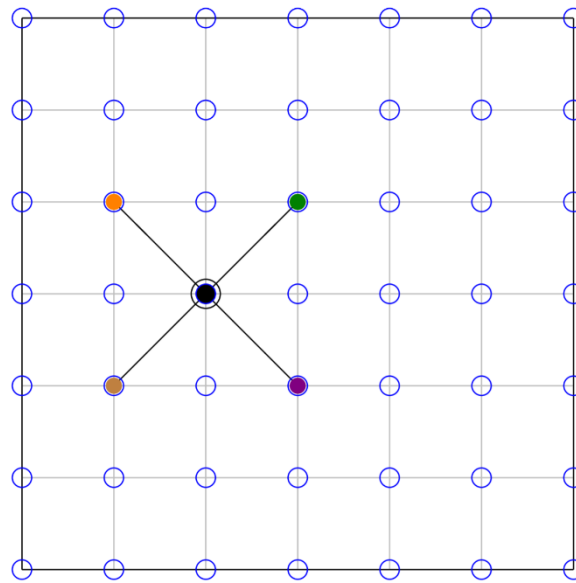


Abbildung 2.2: Alternativer Differenzenstern diagonalen Nachbarn in einem diskretisiertem Gebiet

### 3 Diskretisierung des Laplace-Operators

Rein instinktiv würde man nun davon ausgehen, dass der Mittelpunkt weiterhin vom Mittelwert der vier angrenzenden Punkte berechnet wird. Um dies jedoch zu beweisen muss der Laplace-Operator der Wärmeleitung per Taylor diskretisiert werden. Der Vollständigkeit halber wird hier auch die Diskretisierung des bisherigen Verfahrens dargestellt. Eine ausführlichere Version findet sich in den [Lecture Notes](#) des Modeling and Simulation Kurses.

Der Laplace-Operator der Wärmeleitung in zwei Dimensionen mit  $T=T(x,y)$ :

$$\nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (3.1)$$

Das vollständige Verständnis dieser Funktion ist für die numerische Lösung nicht erforderlich. Allerdings müssen nun für die beiden partiellen Ableitungen entsprechende Gleichungen gefunden werden. Dafür wird angenommen, dass sich die Temperatur linear zwischen denen von uns festgelegten Gitterpunkten ändert. Nun betrachtet man die Punkte zwischen diesen Gitterpunkten um Gleichungen für eine partielle Ableitung aufzustellen.

*Konventionell:*

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{i-\frac{1}{2},j} = \frac{T_{i,j} - T_{i-1,j}}{\Delta x} \quad (3.2)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{i+\frac{1}{2},j} = \frac{T_{i+1,j} - T_{i,j}}{\Delta x} \quad (3.4)$$

*Alternativ:*

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{i-\frac{1}{2},j} = \frac{T_{i,j} - \frac{1}{2}(T_{i-1,j+1} + T_{i-1,j-1})}{\Delta x} \quad (3.3)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{i+\frac{1}{2},j} = \frac{\frac{1}{2}(T_{i+1,j+1} + T_{i+1,j-1}) - T_{i,j}}{\Delta x} \quad (3.5)$$

Dabei wird bei beiden Verfahren gleich vorgegangen: Für die Ableitung am Punkt  $T(i+\frac{1}{2},j)$  wird die Differenz von  $T(i,j)$  und  $T(i-1,j)$  durch die Schrittweite  $\Delta x$  geteilt. Mit dem gedrehten Stern muss der

Punkt  $T(i-1,j)$  erst mit Hilfe der gegebenen Punkte hergeleitet werden. Dafür werden die angrenzenden Punkte arithmetisch gemittelt. Dieser Vorgang ist in Abbildung 3.1 veranschaulicht.

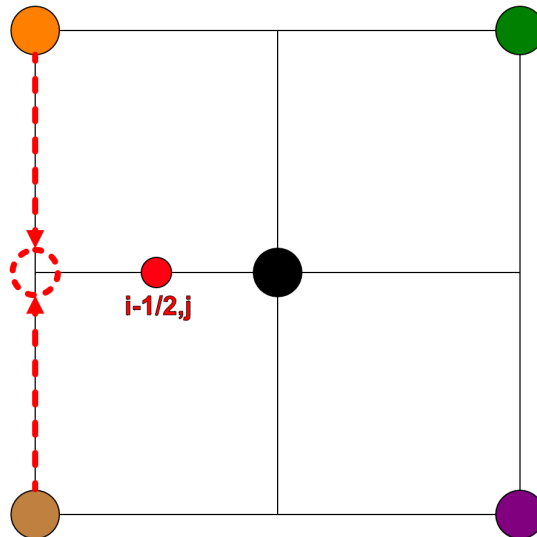


Abbildung 3.1: Herleiten eines 'virtuellen' Punktes zur Berechnung der partiellen Ableitung

Dieser Vorgang wird nun für die y-Richtung wiederholt.

$$\left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{i-\frac{1}{2},j} = \frac{T_{i,j} - T_{i,j-1}}{\Delta y} \quad (3.6) \quad \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{i-\frac{1}{2},j} = \frac{T_{i,j} - \frac{1}{2}(T_{i-1,j-1} + T_{i+1,j-1})}{\Delta y} \quad (3.7)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{i+\frac{1}{2},j} = \frac{T_{i,j+1} - T_{i,j}}{\Delta y} \quad (3.8) \quad \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{i+\frac{1}{2},j} = \frac{\frac{1}{2}(T_{i-1,j+1} + T_{i+1,j+1}) - T_{i,j}}{\Delta y} \quad (3.9)$$

Mit der Annahme, dass die Temperaturgradienten linear zwischen den Knoten verlaufen, dann gilt:

$$\left. \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right|_{i,j} = \frac{\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{i+\frac{1}{2},j} - \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{i-\frac{1}{2},j}}{\Delta x} \quad (3.10)$$

Durch Einsetzen der obigen Gleichungen ergibt sich jeweils (analog in y-Richtung):

*Konventionell:*

$$\left. \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right|_{i,j} = \frac{T_{i+1,j} + T_{i-1,j} - 2T_{i,j}}{\Delta x^2} \quad (3.11)$$

$$\left. \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right|_{i,j} = \frac{T_{i,j+1} + T_{i,j-1} - 2T_{i,j}}{\Delta y^2} \quad (3.12)$$

*Alternativ:*

$$\left. \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right|_{i,j} = \frac{\frac{1}{2}(T_{i+1,j+1} + T_{i+1,j-1} + T_{i-1,j+1} + T_{i-1,j-1}) - 2T_{i,j}}{\Delta x^2} \quad (3.13)$$

$$\left. \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right|_{i,j} = \frac{\frac{1}{2}(T_{i+1,j+1} + T_{i+1,j-1} + T_{i-1,j+1} + T_{i-1,j-1}) - 2T_{i,j}}{\Delta y^2} \quad (3.14)$$

Auffällig ist hier, dass beim konventionellen Differenzenstern jeweils nur zwei der Nachbarpunkte in pro Dimension einfließen. Bei der alternativen Methode hingegen werden alle benachbarten Punkte benötigt. Setzt man die obigen Gleichungen nun in die anfangs gegebene Laplace-Gleichung (3.1) ein und stellt diese nach  $T(i,j)$  um, so erhält man eine Formel zur Bestimmung des Mittelwert des Kreuzes mit Hilfe der angrenzenden Punkte - eben mit finiten Differenzen.

*Konventionell:*

$$T_{i,j} = \frac{1}{4}(T_{i+1,j} + T_{i-1,j} + T_{i,j+1} + T_{i,j-1}) \quad (3.15)$$

*Alternativ:*

$$T_{i,j} = \frac{1}{4}(T_{i+1,j+1} + T_{i+1,j-1} + T_{i-1,j+1} + T_{i-1,j-1}) \quad (3.16)$$

Die Gleichung (3.16) zeigt, dass unsere anfängliche Überlegung korrekt war und der Punkt  $T(i,j)$  weiterhin durch das arithmetische Mittel der angrenzenden Punkte beschrieben werden kann. Dieser Aspekt lässt sich nun ohne Probleme in ein Python Programm implementieren.

## 4 Diskretisierung einer homogenen Neumann-Randbedingung

Nun muss noch eine genauere Betrachtung der Neumann-Randbedingung erfolgen, diese besagt, dass die Ableitung des Feldes an der Grenze Null beträgt. Doch wie kann man dieses Problem lösen ohne Punkte ausserhalb des Feldes zu Rate zu ziehen (welche nicht existieren).

Bei der konventionellen Methode befindet sich an einer Grenze immer einer der vier Punkte außerhalb, dieser wird nun nach innen 'gespiegelt' indem man den Punkt gegenüber von ihm doppelt zählt. Bei dem um 45° gedrehten Stern befinden sich nun sogar zwei Punkte außerhalb, aus Symmetriegründen verdoppelt man nun die verbleibenden zwei Punkte um dies auszugleichen. An der Grenze  $T(0,0:N-1)$  sähe die Formel für  $T(0,j)$  nun wie folgt aus:

$$T_{0,j} = \frac{1}{4}(2T_{1,j-1} + 2T_{1,j+1}) \quad (4.1)$$

Auch dieser Aspekt lässt sich für beliebige Seiten in ein Python Programm implementieren.

## 5 Implementierung in Python

Ein Python Programm welches die beiden Verfahren vergleicht ist entweder diesem Dokument beigelegt oder ist ansonsten auf [Github](#) zu finden.

## 6 Vergleich der Differenzensterne

Eine Betrachtung der erzeugten Plots zeigt, dass auch der gedrehte Differenzenstern eine numerische Lösung möglich macht. Auf den ersten Blick erscheinen die Ergebnisse auch sehr ähnlich wie in Abbildung 6.1 zu sehen. Da stellt sich jetzt die Frage warum man in Literatur oder Anwendungen nicht zu Gesicht bekommt. Dafür gibt es verschiedene plausible Gründe.

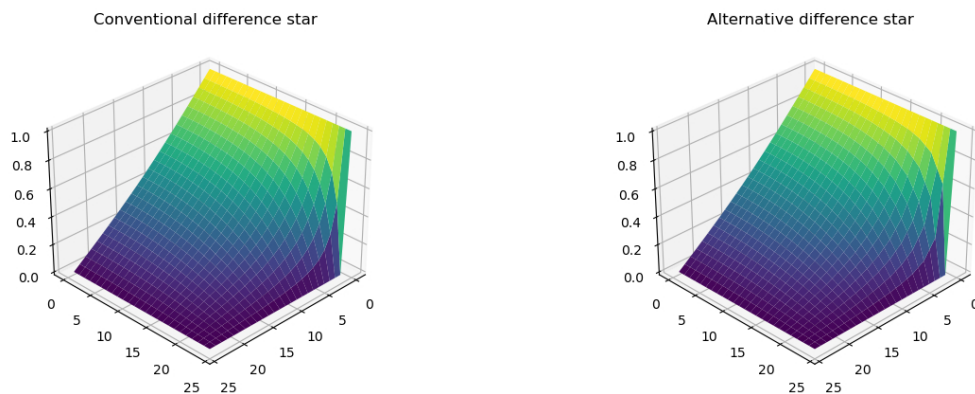


Abbildung 6.1: Darstellung des Temperaturverlauf mit konventionellem und alternativem Differenzenstern

## 6.1 Intuition

Vermutlich eines der besten Argumente gegen den X-Stern ist, dass er nicht intuitiv für den Anwender ist. Weshalb sollte er einen Stern über sein Feld wandern lassen, welcher um  $45^\circ$  zu diesem gedreht ist? Die etablierte Methode lässt sich da deutlich leichter nachvollziehen, da die verwendeten Felder auch wirklich einen direkten Kontakt zum Gesuchten haben.

## 6.2 Rechenperformance

Wie im Python Skript zu sehen braucht der X-Stern zwar weniger Rechenschritte als der +-Stern, für diese aber so viel länger, dass er insgesamt langsamer ist. Bei numerischen Lösungen ist die Recheneffizienz sehr wichtig wenn die Modelle größer und genauer werden.

## 6.3 Modellperformance

Im Vergleich zum +-Stern sieht in Abbildung 6.2 man beim X-Stern Abweichungen von bis zu 25%, gerade bei starken Temperaturänderungen. Natürlich könnte man nun im Detail analysieren welches der beiden Modelle genauer ist und näher an die Realität herankommt - allerdings lässt sich dies auch logisch erklären ohne die exakte Lösung zu kennen. Denn gerade zwei Aspekte müssen den X-Stern an sich automatisch zum schlechteren Modell als den konventionellen Differenzenstern machen.

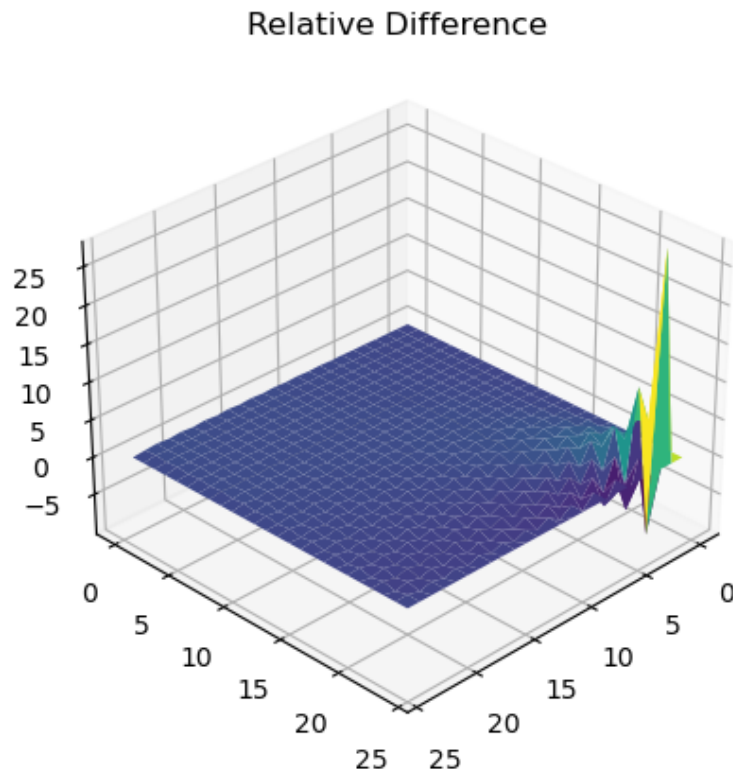


Abbildung 6.2: Relative Abweichung des alternativen Differenzenstern zum Konventionellen

### 6.3.1 Abstand der Nachbarpunkte

Bei unserem X-förmigen Stern sind die benachbarten Punkte, welche wir zur Berechnung verwenden um ca. 40% weiter vom Zentrum entfernt. Dies ist der Geometrie des Gitters geschuldet. Bei einem Abstand von 1 der Punkte, so ist der Abstand beim +-Stern weiterhin 1, aber beim X-Stern verwenden wir Punkte mit einem Abstand von  $\sqrt{2}$ .

### 6.3.2 Ecken des Felds

Um einen Wert in der Ecke des Feldes berechnen zu können, so befinden sich beim +-Stern zwei der vier Punkte außerhalb des Feldes, was noch durch Verdoppelung der restlichen zwei Punkte ausgeglichen werden kann.

Bei unserem X-Stern befinden sich stattdessen drei der vier Punkte außerhalb, was nicht ausgeglichen werden kann. Somit muss die Performance dieser Randwerte als schlecht angesehen werden, was sich auch auf das restliche Feld auswirkt.

## 6.4 Fazit

Zusammengefasst lässt sich sagen, dass ein gedrehter Differenzenstern zwar ein akzeptables Ergebnis liefert, die herkömmliche Methode aber zu bevorzugen ist und zu Recht deutlich populärer ist.