SISTEMA DI TELECOMUNICAZIONE (TLC): è un sistema complesso che ha il compito di trasmettere informazioni

Si può schematizzare così

SORGENTE → TRASDUTTORE IN INGRESSO → TRASMETTITORE Tx → CANALE

DESTINATARIO ← TRASDUTTORE IN USCITA ← Ricevitore Rx ←

TRASDUTTORI: elementi che si occupano di trasformare un segnale. SONO 2:

- IN ENTRATA: trasforma il segnale che normalmente è analogico in elettrico per consentirne la trasmissione
- IN USCITA: trasforma il segnale elettrico in analogico per esser fruito

NOI LAVOREREMO SU UN TRATTO, OSSIA:

Tx → Canale → Rx

- Supponiamo che sia il trasmettitore sia il ricevitore siano ideali ossia che non creino errori
- Supponiamo che la sorgente crei segnali che possono essere direttamente trasmessi e riprodotti
- Di conseguenza gli errori saranno introdotti solo dal canale (o mezzo) di comunicazione

Gli errori (rumori) generati sono:
- Rumore termico
- INTERFERENZA
- DISTORSIONE

- Lo scopo ultimo del sistema di TLC è dunque quello di riprodurre una replica "accettabile" ossia col minor numero di errori presenti in ricezione.

- un sistema tlc reale sarà sempre affetto da errori (sotto forma di rumore aggiunto al segnale utile)

- Poichè non si può avere un sistema privo di errori allora occorre correggerli tramite operazioni di irrobustimento del segnale.

- Tali operazioni sono effettuate da trasmettitore e ricevitore

TRASMETTITORE
- amplificazione
- codifica
- filtraggio
- modulazione

RICEVITORE
- amplificazione
- de-codifica
- filtraggio inverso
- de-modulazione

- Più un sistema tlc diventa scalabile, ossia più servizi a valore aggiunto offre più si complicano le informazioni trasmesse. La divisione che si ottiene in canale, blocco trasmissivo e blocco ricettivo ci permette di studiare il problema + facilmente

- Raggruppando tutto ciò che ha a che fare con i rumori nel "Canale" ci semplifica il calcolo delle prestazioni dei vari sistemi. Infatti immaginando di avere un sistema che trasmette su doppino telef. qualora si passasse a fibra ottica mantenendo il sistema uguale si dovrebbe solo adattare la formula al nuovo canale.

DESCRIZIONE DEI RUMORI DI CANALE

DISTORSIONE: Sono presenti quando le apparecchiature tlc non lavorano in regime lineare.
Ex. volume troppo alto → qualità si abbassa.
Si cerca di ridurla con l'uso di equalizzatori
è presente solo se è presente un segnale.

INTERFERENZE: dovute dal fatto che le antenne riceventi intercettano più segnali contemporaneamente (interferenza multi-utente)
è presente solo se è presente il segnale
Si cerca di ridurre con l'uso di filtri e codifiche

RUMORE TERMICO: Componente sempre presente in ogni sistema TLC (anche in assenza di segnale), dovuto agli imprevedibili e casuali segnali elettrici prodotti da fenomeni naturali interni o esterni al sistema.

OPERAZIONI SU SEGNALI

CODIFICA: operazione atta a trasformare il segnale da trasmettere in una sequenza di simboli (simbol processing operation)

I tipi di codifica sono 3
- SORGENTE
- CANALE
- LINEA

SORGENTE: si interfaccia con la sorgente e ha il compito di ridurre il numero di simboli da trasmettere, ossia comprime l'informazione

$\xrightarrow{N}$ $\boxed{\text{CODIFICA}}$ $\xrightarrow{K}$ $\quad K < N$

le operazioni di codifica di canale e di codifica di sorgente sono in contrasto tra loro quindi occorre trovare il giusto bilanciamento (trade off) tra quella che è la capacità di comprimere al meglio l'informazione e quella che aggiunge l'informazione di ridondanza

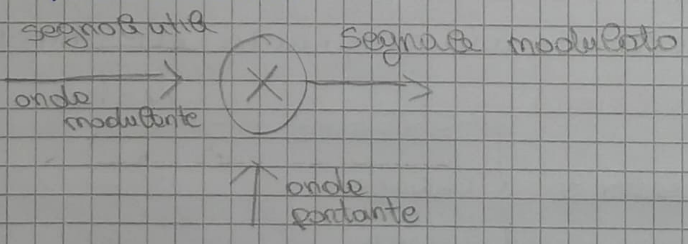
CANALE: protegge le informazioni (sconosciute sia al trasmettitore sia al ricevitore) dai disturbi e per fare ciò introduce informazioni in più (+ simboli) stavolta conosciute dal ricevitore così che questo sia in grado di individuare e correggere gli errori. (error detection and error recovery (correction)

LINEA: modifica forma e ampiezza del segnale per renderlo + facilmente trasmissibile nel mezzo

→ Analogamente il ricevitore (Rx) farà le medesime operazioni ma inverse

MODULAZIONE: operazione che ha come scopo quello di migliorare la forma di trasmissione.
Coinvolge 2 forme d'onda ossia il segnale modulante (messaggio da trasmettere) e l'onda portante (segnale dipendente dal tipo di applicazione scelta).

- Il modulatore in pratica altera la portante in corrispondenza delle variazioni del segnale modulante



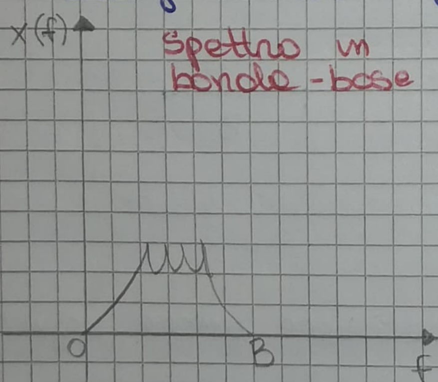
- Se ho a che fare con una modulazione di ampiezza avrò un certo tipo di onda portante, se ho a che fare con una modulazione di fase o frequenza avrò a che fare con un altro tipo di onda.

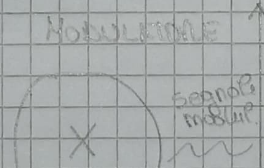
Esempio: modulazione d'ampiezza.

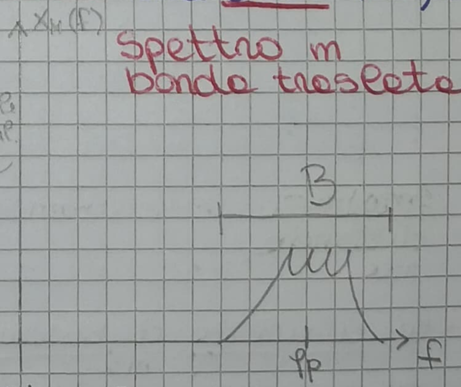
- L'ampiezza dell'onda portante sarà modificata al cambiare del valore del segnale modulante. Se il segnale modulante è un segnale composto da zeri e uni e lo devo modulare in ampiezza, vuol dire che la portante cambierà la sua ampiezza a seconda che ci sia un 1 o uno 0 da trasmettere.
- in presenza di 1 bit pari ad 1 l'onda portante avrà ampiezza positiva, mentre in presenza di un bit pari a 0 la portante potrebbe avere un'ampiezza negativa o nulla

VANTAGGI DELLA MODULAZIONE

→ Il segnale che si genera si adatta al particolare mezzo trasmissivo scelto per la comunicazione. Infatti la modulazione ha come effetto finale sul segnale modulato quello di spostare il contenuto energetico del segnale dalle basse alle alte frequenze.







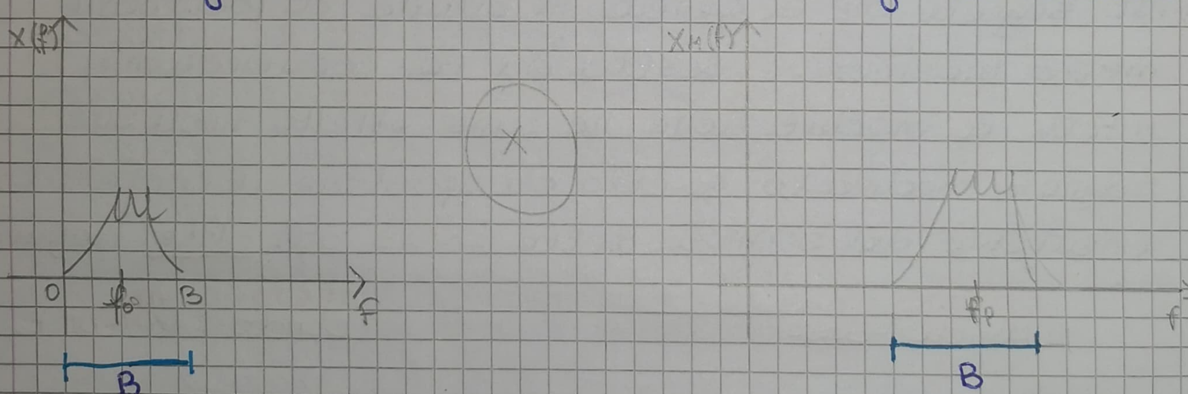
Spettro di un segnale: rappresentazione in frequenza del segnale considerato

Spettro in banda base: contiene le frequenze attigue all'origine.

alte frequenze: lontane dall'origine

- Spostando lo spettro ossia innalzando le frequenze si ha il vantaggio di eliminare tutte le distorsioni che i mezzi trasmissivi introducono maggiormente nelle frequenze vicine all'origine. infatti la frequenza uguale a 0 (o frequenza continua) è la più distruttiva dal punto delle interferenze

- Perché per ricevere un segnale un'antenna deve avere una grandezza paragonabile a quella della lunghezza d'onda del segnale incidente e perché la lunghezza d'onda è inversamente proporzionale alla frequenza, tanto maggiore è la frequenza del segnale tanto minore è la sua lunghezza d'onda



larghezza di banda

- la larghezza di banda dopo la modulazione rimane uguale, ma non è più centrata su una frequenza f_0 ma su una frequenza f_p (con $f_p \gg f_0$). Ciò significa che la lunghezza d'onda del segnale modulato è molto minore di quella del segnale di partenza → di conseguenza ho bisogno di un'antenna molto più piccola per ricevere un segnale modulato larghezza di banda: intervallo di frequenze che rappresenta l'occupazione delle frequenze sul semiasse positivo ($f \geq 0$). → È un insieme di frequenze

f_0 - f_p = sono frequenze centrali (o portanti) ossia attorno alle quali il segnale si concentra. (massimo contenuto energetico)

- L'operazione di de-modulazione è la medesima ma inversa

→ Segnale vocale: 4 kHz banda → lento nel tempo
→ Segnale tv: 12 MHz banda → veloce nel tempo

- Larghezza di banda, significato qualitativo: misura della velocità, ossia quanto quel segnale vari nel tempo (variazione)

→ Banda larga: segnale veloce nel tempo
→ Banda stretta: segnale con variazione lenta

→ Per trasmettere un segnale in banda larga devo usare un sistema altrettanto veloce nel tempo, altrimenti perderei informazioni. Ossia per far trasmettere un segnale a 12 MHz ad un sistema che ne supporta 10 introduco distorsioni.

FILTRAGGIO SEGNALE

- Quando si parla di filtraggio si fa riferimento al dominio delle frequenze. L'operazione equivalente nel tempo si chiama Convoluzione.
- Se io filtro un segnale in pratica sto moltiplicando il suo spettro con qualcun'altro spettro, ossia un prodotto di frequenze
- L'operazione di filtraggio e analisi è importante, perchè studiando il segnale posso capire che frequenze assolutamente

devo filtrare e quali informazioni potrei perdere se filtrassi male

→ al variare del sistema variano i parametri delle operazioni, ma le operazioni da svolgere sono le stesse

LIMITI SISTEMA TLC

- Tecnologici:
  - DISPONIBILITÀ HARDWARE
  - DISPONIBILITÀ INVESTIMENTO
  - REGOLAMENTAZIONE INTERNAZIONALE

Regolamentazione internazionale:

limite massimo di potenza che si può emettere in quel sistema tlc (imposto per legge).

→ limitando la potenza si riduce l'inquinamento elettromagnetico, di contro dobbiamo quindi strutturare meglio i sistemi per proteggere al massimo il segnale al momento del loro invio.

- fisici:
  - LARGHEZZA DI BANDA
  - RUMORE

Rumore: in presenza di forte rumore le prestazioni del sistema degradano fortemente

CALCOLO PRESTAZIONI

TRAMITE CAPACITÀ DI CANALE: devo capire quanta informazione in unità di tempo è possibile trasmettere in quella banda.

$$C = B \cdot \log_2 (1 + S/N)$$

B = larghezza banda

S = potenza segnale utile

N = potenza rumore

+ il rumore è forte - Capacità di canale no

(signal to noise Ratio)

S/N = rapporto segnale rumore (o SNR)

non si lavora con un SNR in scala lineare (SNR_{LIN})
ma con SNR in scala logaritmica (SNR_{db} - decibel)

$$SNR_{db} = 10 \log_{10} SNR_{LIN}$$

- la scala in db ci permette di individuare subito il rapporto S/N

EX

$\log_{10} b = 0$ $\quad 10^0 = b$ $\quad \log 1 = 0$ $\quad \Rightarrow \log_{10}(b) = c \rightarrow 10^c = b$

$SNR_{db} = 0\,db \rightarrow SNR_{LIN} = 1 \Rightarrow P_S = P_N$

- $SNR_{db} > 0\,db \Rightarrow P_S > P_N$
- $SNR_{db} < 0\,db \Rightarrow P_S < P_N$ (sist wireless)

ESERCIZIO PER CASA:

Calcola il rapporto S/N quando si ha un $SNR_{db} = \pm 3\,db$

quanto vale il rapporto S/N con $\Delta SNR_{db} = 20\,db$ → diminuzione segnale quando passo un muro

$\log_{10}(b) = 3 \rightarrow 10^3$

$SNR_{db} = +3\,db \rightarrow SNR_{LIN} \Rightarrow 10 \log_{10} SNR_L = 3 \rightarrow \log_{10} SNR_L = 3/10$

$P_S > P_N$ $\quad \log_{10} SNR_L = \frac{3}{10} \Rightarrow 10^{3/10} = SNR_L \rightarrow SNR_L = \sqrt[10]{10^3} = 1{,}995$

$SNR_{db} = -3\,db \rightarrow SNR_{LIN} \Rightarrow 10 \log_{10} SNR_L = -3 \rightarrow \log_{10} SNR_L = -\frac{3}{10}$

$\Rightarrow 10^{-3/10} = SNR_L \rightarrow SNR_L = \sqrt[10]{10^{-3}} = \sqrt[10]{0{,}001} = 0{,}5$

$P_S < P_N$

$SNR_{db} = +23\,db \rightarrow SNR_L \Rightarrow 10 \log_{10} SNR_L = 23 \rightarrow \log_{10} SNR_L = 2{,}3$

$\Rightarrow 10^{2{,}3} = SNR_L = 199{,}5$

$P_S > P_N$

$SNR_{db} = +17 \rightarrow SNR_L \Rightarrow 10 \log_{10} SNR_L = +17 \rightarrow \log_{10} SNR_L = 1{,}7$

$10^{1{,}7} = SNR_L = 50$ $\quad P_S > P_N$

$SNR_{db} = -23 \rightarrow SNR_L \Rightarrow 10 \log_{10} SNR_L = -23 \rightarrow \log_{10} SNR_L = -2{,}3$

$\rightarrow 10^{-2{,}3} = SNR_L = 0{,}005$ $\quad P_S < P_N$

06/10/2020

- In tlc tutti i segnali studiati saranno analizzati tramite uno spettro ossia si riporterà il segnale da quello che in origine era un dominio temporale ad un dominio di frequenza. $x(t) \rightarrow x(f)$
- Non tutti i segnali possono essere studiati nel dominio delle frequenze, ma solo alcuni che ne rappresentano una sottoclasse: i segnali di energia

Segnali di energia: segnali propri di tutti i sistemi di tlc, e questi segnali sono tutti ad energia limitata ossia possono essere ad energia >0, $\neq 0$, ma sempre $\neq \infty$, quindi devono assolutamente convergere.

$$\boxed{E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = n \in \mathbb{R} < +\infty}$$

formula che permette di calcolare l'energia di un segnale x.

Se quest'energia converge, allora questo segnale può essere studiato nel dominio delle derivate ossia ammette i trasformata di Fourier.

Tutti i segnali limitati nel tempo sono segnali di energia, però non è vero che tutti i segnali di energia sono limitati. => esistono segnali di durata illimitata che anche ammettono fourier.

TRASFORMATA DI FOURIER

- operazione reversibile in quanto posso passare da tempo a frequenza e poi posso tornare indietro

$x(t) \rightarrow X(f) \Rightarrow x$ è di energia

$x(t)$ ↓ piccolo per segnale espresso in tempo

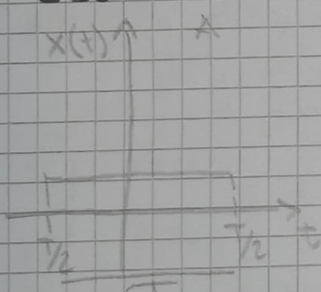
$X(f)$ ↳ maiuscolo per segnale trasformato / spettro

① $X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt$ trasformata fourier passo da tempo a frequenza

② $x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{+j2\pi ft} dt$ antitrasformata di fourier passo da frequenza a tempo

- ho a che fare con gli esponenziali complessi perchè la trasformata di fourier scompone il segnale nel tempo su una base composta da infiniti esponenziali complessi (poichè siamo nel continuo)

Esercizio



- funzione costante con estensione $-\frac{T}{2} \to \frac{T}{2}$
- So che è di energia perchè è limitata nel tempo. voglio comunque dimostrare che sia di energia perciò devo applicare la formula per calcolarmi E_x.

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt$$

poichè il segnale al di fuori di $-T/2$ e di $T/2$ è nullo e tra $-T/2$ e $T/2$ vale A devo limitare il dominio dell'integrale tra $-T/2$ e $T/2$.

$$\Downarrow$$

$$E_x = \int_{-T/2}^{+T/2} |x(t)|^2 dt =$$

poichè $x(t)$ nel suo dominio vale A

porto fuori costanti

$$\int_{-T/2}^{T/2} dt = t \Big|_{-T/2}^{T/2}$$

$$\Downarrow$$

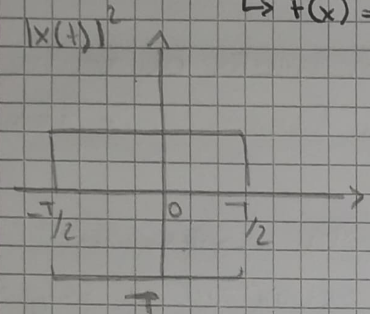
$$E_x = \int_{-T/2}^{T/2} |A|^2 dt = \int_{-T/2}^{T/2} A^2 dt = A^2 \int_{-T/2}^{T/2} dt = A^2 t \Big|_{-T/2}^{T/2} = \boxed{A^2 T}$$

$\frac{T}{2} - (-\frac{T}{2}) = (\frac{T}{2} + \frac{T}{2}) = T$

con $A \in \mathbb{R}, T \in \mathbb{R} \Rightarrow E_x < \infty \Rightarrow$ ammette trasformata

• fare l'integrale di $|A|^2$ in dt significa calcolare l'area di $f(x)$ del segnale in T

$$\hookrightarrow F(x) = |x(t)|^2 \Rightarrow |A|^2$$



• segnale di altezza A^2

• con base T

l'energia è l'area del segnale

$$\Rightarrow B \cdot H \Rightarrow \boxed{A^2 \cdot T}$$

- Dato che è un segnale limitato applico Fourier.

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt$$

poiché al di fuori di $-T/2$ e $T/2$ la $f(x)$ vale zero posso studiare l'integrale tra $-T/2$ e $T/2$

$$\Downarrow$$

porto fuori costanti

$$\int_{-T/2}^{T/2} A\, e^{-j2\pi f t}\, dt \Rightarrow A \cdot \int_{-T/2}^{T/2} e^{-j2\pi f t}\, dt = A \cdot \frac{e^{-j2\pi f t}}{-j2\pi f}\Bigg|_{-T/2}^{T/2} =$$

cambio segno e semplifico

$$\Rightarrow A \cdot \frac{e^{-j2\pi f T/2} - e^{j2\pi f T/2}}{-2j\pi f} \Rightarrow A \cdot \frac{e^{j\pi f T} - e^{-j\pi f T}}{2j\pi f}$$

sono in frequenze

$$\sin a = \frac{e^{ja} - e^{-ja}}{2j}$$

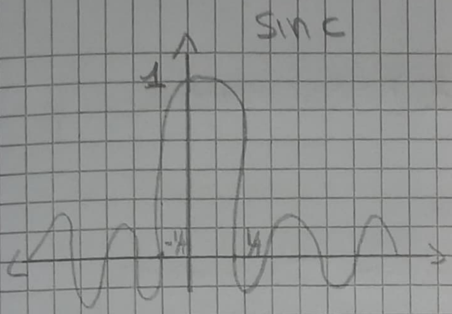
espressione di seno con esponenziale complessi

$$\hookrightarrow \frac{e^{j\pi f T} - e^{-j\pi f T}}{2j\pi f} = \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f}$$

$$\Rightarrow A \cdot \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f} \cdot \frac{T}{T} = AT \cdot \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T} = \begin{cases} 1 \text{ se } f = 0 \\ 0 \text{ se } \sin = 0 \rightarrow f = \frac{k}{T} \\ \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T} \quad \forall f \neq 0,\ f \neq \frac{k}{T} \end{cases}$$

sin cardinale (sinc) $= \frac{\sin(\pi a)}{\pi a}$

$$X(f) = A \cdot T\, \text{sinc}(fT)$$



- ammette trasformata di fourier perchè ha energia finita nonostante sia una f(x) infinita.
- nel tempo ha lunghezza di banda finita.
- nelle frequenze ha larghezza di banda infinita (sinc $\to +\infty$)

Per poterlo trasmettere $\Leftarrow$ devo avere un sistema con infinita banda, ma non è possibile perciò so a priori di interferenze, in fase di comunicazione, distorsioni.

- È la rappresentazione analitica di un bit, ma tuttavia è ideale perchè il grafico a 2 salti quello che passa da 0 ad A e l'altro da A a zero istantaneamente

$$\begin{cases} A, & |T| > T/2 \rightarrow -T/2 < T < T/2 \\ 0 & \forall a \neq T/2, -T/2 \end{cases}$$

$A \cdot Rect_T(t)$ anti trasformata di Fourier

Sono 2 trasformate notevoli ossia 2 trasformate che ricorreranno spesso

A è l'altezza, T a pedice è la larghezza della base (durata temporale) e t è il punto in cui il segnale è centrato ossia si annulla.

Esempio

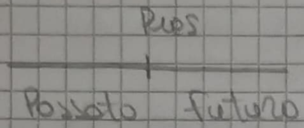
$z(t) = A \cdot rect_T(t - \tau)$ $\quad \tau > 0$

ampiezza segnale

$T = \tau$ minimo di annullamento

centrato nel punto $t = T$

Per rect non centrati in 0?



$\tau > 0 \rightarrow \tau < 0$

segnale causale, fisicamente realizzabile trasmissione di T secondi arriva dopo T sec.

$\tau < 0 \rightarrow \tau > 0$

segnale anticausale, irrealizzabile

$$\begin{cases} \tau & \text{ritardo } T>0 \\ -\tau & \text{anticipo } T<0 \end{cases}$$

$y(t) = A \cdot rect_T(t+\tau) \quad \tau>0$

Si possono riscrivere $z(t)$ e $y(t)$ come traslazioni di $x(t)$ sull'asse dei tempi

$z(t) = x(T-\tau) \rightarrow$ ritardo

$y(t) = x(T+\tau) \rightarrow$ anticipo

non trasf ph ho 2 variabili quindi
$(T-\tau) = k$
$T = k+\tau$
$dt = dk$

esistono le trasformate?

$$Z(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} z(t) e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau) e^{-j2\pi ft} dt$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} x(k) e^{-j2\pi f(k+\tau)} dk = \int_{-\infty}^{\infty} x(k) e^{-j2\pi fk} \cdot e^{-j2\pi f\tau} dk$$

$$\Rightarrow \underbrace{e^{-j2\pi f\tau}}_{\text{esponenziale con peso pari al ritardo}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x(k) e^{-j2\pi fk} dk}_{\text{trasformata in } X(t) \text{ centrata in } 0} =$$

$y(t) = X(f) \cdot e^{+j2\pi f t}$

- le trasformate non centrate in 0 hanno tutte la stessa forma ossia: $X(f)$ con f centrata in zero moltiplicato ad un esponenziale complesso che, nel caso di anticipo hanno segno dell'esponenziale positivo, nel caso di ritardo negativo

Regole fondamentali

- la trasformata diretta ha segno negativo nell'esp.
- la trasformata inversa ha segno positivo nell'esp.

- Se il segnale $x(t)$ è reale e pari $\Rightarrow f(-x) = f(x)$
  $\Downarrow$ $\quad \begin{cases} Im\, z = 0 \\ Re\, z \neq 0 \end{cases}$
  la sua trasformata è reale pura e pari (fa)

- Se il segnale $x(t)$ è reale e dispari $\Rightarrow f(-x) = -f(x)$
  $\Downarrow$ $\quad \begin{cases} Im\, z \neq 0 \\ Re\, z = 0 \end{cases}$
  la sua trasformata è immaginaria pura e dispari

- Se $x(t)$ non è né pari né dispari (causale o anticausale)
  $\Downarrow$ $\quad \begin{cases} Im\, z \neq 0 \\ Re\, z \neq 0 \end{cases}$
  la sua trasformata è complessa

Relazione segnale (tempo) - spettro

$x(t) \quad t = 0 \Rightarrow X(f) = ?$ $\quad \Rightarrow e^{-j2\pi(0)t} = e^{0}$

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{0} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)$$

Spettro: si riduce al calcolo dell'area.

• controllo la correttezza della trasformata sostituendo f con 0

$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} A \cdot t \ \text{sinc}(ft) \Rightarrow A \cdot t$ (area $B \times H$)

$\text{sinc}(0t) = \text{sinc}(0) = 1$

$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(f) \ e^{+j2\pi f t} \, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \, df =$ area

$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} A \, \text{Rect}_T(t) = \int_{-\infty}^{\infty} A \cdot 1 = A$ (area)

• in entrambi i domini accade lo stesso cosa

Richiami numeri complessi

espressione n. complessi come seno e coseno

$J \sqrt{i}$ = unità immaginaria

$e^{+j\alpha} = \underbrace{\cos\alpha}_{Re} + j \underbrace{\sin\alpha}_{Im}$

$e^{-j\alpha} = \cos\alpha - j \sin\alpha$

$e^{i0} = \cos(0) + i\sin(0) = 1 + i(0) = 1$ angoli assoluti

$e^{i\pi} = \cos(\pi) + i\sin(\pi) = -1 + i(0) = -1$

$e^{-i\pi} = \cos(-\pi) + i\sin(-\pi) = \cos(\pi) - \sin(\pi) = -1 + i(0) = -1$

$e^{-3/2\pi} = \cos(-\frac{3}{2}\pi) + i\sin(-\frac{3}{2}\pi) = \cos(\frac{3}{2}\pi) - i\sin(\frac{3}{2}\pi) = 0 + i(-1) = +i$

- formule di Eulero

$\cos a = \dfrac{\varepsilon^{ja} + \varepsilon^{-ja}}{2}$

$\sin a = \dfrac{\varepsilon^{ja} - \varepsilon^{-ja}}{2j}$

$e^{j2\pi} = \cos(2\pi) - i\sin(2\pi)$

$1 - 0$

08/10/2020

$y(t) = x(t) \cdot e^{-j2\pi f_0 t}$ dt $\quad f_0 > 0$ e $f_0 \in \mathbb{R}$

$y(f) = ?$ supponendo $x(t)$ segnale noto con trasf. $X(f)$

formula per la trasformata

$$y(f) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t) \cdot e^{-j2\pi f t} \, dt$$

Sostituisco $y(t)$ con $x(t) \cdot e^{-j2\pi f_0 t}$

$$y(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j2\pi f_0 t} \cdot e^{-j2\pi f_0 t} \, dt$$

$$e^{i(\text{arg}_1)} \cdot e^{i(\text{arg}_2)} = e^{i(\text{arg}_1 + \text{arg}_2)}$$

$$e^{-i(2\pi f_0 t) - i(2\pi f)t} = e^{-i(2\pi f_0 + 2\pi f)t}$$

$$\Downarrow$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j2\pi(f+f_0)t} \, dt$$

-> Se la confronto con la formula della trasformata vedo che ho la stessa variabile di integrazione t ma al posto della variabile di uscita f troviamo la variabile composta $(f+f_0)$

-> $f+f_0$ = traslazione sull'asse di frequenze

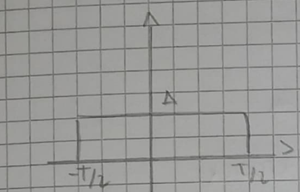
-> trasformata di fourier di $(f+f_0)$, centrata in (f_0) ossia traslazione a bassa frequenze

$y(t) = x(t) \cdot e^{+j2\pi f_0 t}$ dt $\quad f_0 > 0$ e $f_0 \in \mathbb{R}$

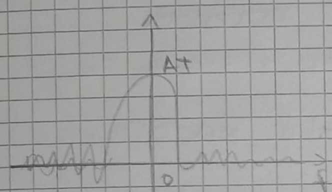
$y(f) = x(t) \cdot e^{-2j\pi(f-f_0)t}$ $\quad$ alte freq. (centro in $+f_0$)

Si nota dunque che la trasformata di Fourier di una funzione $x(t)$ x un esponenziale complesso, ha lo stesso andamento di $X(f)$ ma centrato in $(f-f_0)$ o $(f+f_0)$ ossia traslato ad alte o a bassa frequenze

- I segni sono discordi, al contrario di trasf. su tempo:
  - esponenziale negativo corrisponde a segno negativo nell'argomento della trasformata.
  - esponenziale positivo segno neg. in trasf.



$$x(t) = A\,Rect_T(t)$$



$$x(f) = AT\,\text{sinc}(fT)$$

- oscillazioni sempre più piccole per $f \to +\infty$ o $f \to -\infty$
- in 0 vale AT

→ più aumento il tempo in $x(t)$ più la larghezza dei lobi si restringe in frequenza dunque:

$\lim_{T \to \infty} x(t) =$ segnale di durata illimitata e con valore costante pari ad A

- la sinc per $T \to \infty$ si restringerà fino a 0 ($f \to 0$), in altezza tende a $+\infty$

Con così definite specifiche avremmo un segnale di larghezza infinitesima e altezza infinita ossia un segnale impulsivo. (δ)

Il segnale impulsivo è ideale.

$$\delta(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t = 0 \\ 0 & \text{se } t \neq 0 \end{cases}$$

→ è la sua area ottenuta come $b \times h$ dove $b \to 0$ e $H \to \infty$

Segnale delta

o

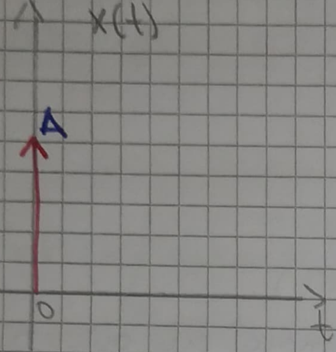
delta di Dirac

- $\delta(t) = \lim_{T \to \infty} T \cdot \text{sinc}(fT)$

$$\boxed{\text{Se } x(t)=A \Rightarrow X(f)=A\cdot\delta(f)}$$

trasformate notevoli

→ Se T>0 avrò segnale impulsivo nel tempo perciò assume valore ≠0 solo in origine



delta di area A

$$\boxed{\begin{array}{l} x(t)=A\cdot\delta(t) \\ X(f)=A \end{array}}$$ trasf notevoli

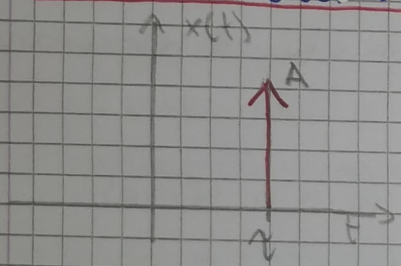
• le trasformate per T>0 si allunga fino ad arrivare alla frequenza massima.

t notevole

ESEMPIO

$\boxed{x(t)=A\cdot\delta(t-\tau)}$ $\tau>0$ ritardo

centro: $(t-\tau)=0 \Rightarrow t=\tau$



$X(f)=A$ → = ampiezza di delta

↳ $X(f)=1$ → se A non è presente

$x(t-\tau) \xrightarrow{f} X(f) = X(f) * e^{-2j\pi f\tau}$

↳ trasf notevole per un segnale ritardato

$X(f)=?$

$$\boxed{\begin{array}{l} X(f)=A\cdot 1\cdot e^{-2\pi j f\tau} \\ \hookrightarrow A\cdot e^{-2\pi j f t} \end{array}}$$

$X(f)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-2j\pi f t}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} A\,\delta(t-\tau)\cdot e^{-2j\pi f t}\,dt$

⇓

$A\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-\tau)\,e^{-2j\pi f t}\,dt =$

⇓ ampiezza della delta =1 ; t notevole

$A\cdot 1\cdot e^{-2\pi j f\tau}$

delta è un segnale causale senza simmetrie

⇓

la sua trasformata deve essere complessa.

⇓

esprimo $e^{+2j\pi f t}$ come combinazione di sin e cos

t. notevoli

$$\boxed{\begin{array}{l} y(t) = A \cdot \delta(t - \tau) \\ y(f) = A \cdot e^{+2j\pi f\tau} \end{array}}$$

centro (a τ)

2) $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$ $f_0 > 0$

$x(f) = ?$

Applico il coseno in formule di eulero: $\cos(x) = \dfrac{e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}}{2}$

$$x(t) = \frac{e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t} \cdot \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} x(f) = A \Rightarrow x(f) = A\delta(t) \\ x(t)\cdot e^{\pm j2\pi f_0 t} \Rightarrow x(f \mp f_0) \end{array}}$$

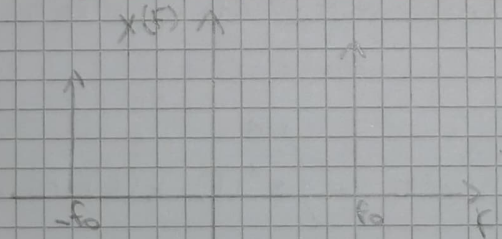
$$\Downarrow$$

$$A \cdot e^{+j2\pi f_0 t} + A \cdot e^{-j2\pi f_0 t}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{2} \cdot \delta(f - f_0) + \frac{1}{2} \cdot \delta(f + f_0)$$

$$\boxed{\begin{array}{l} x(t) = \cos(2\pi f_0 t) \\ x(f) = \frac{1}{2}\,\delta(f - f_0) + \frac{1}{2} \cdot \delta(f + f_0) \end{array}}$$



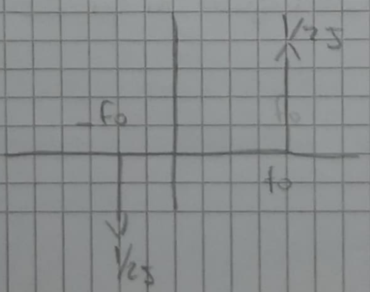
reale e pari

3) $\boxed{y(t) = \sin(2\pi f_0 t)} \longrightarrow \sin = \dfrac{e^{j2\pi f_0 t} - e^{j2\pi f_0 t}}{2j}$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\frac{1}{2j} \cdot \delta(f - f_0) - \frac{1}{2j} \cdot \delta(f + f_0)}$$

immaginario puro



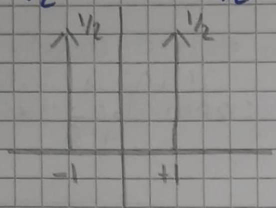
reale e dispari

$z(t) = \cos(2\pi T)$

per capire quanto vale f_0: uguaglio questo argomento con quello generico ossia $2\pi f_0 T$

$$2\pi T = 2\pi f_0 T \Rightarrow 1 = f_0$$

$$Z(f) = \frac{1}{2}\,\delta(f-1) + \frac{1}{2}\,\delta(f+1)$$



- Dato un $x(t)$ con $X(f)$ la sua energia è

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \, dt$$

come mettere in relazione energia e spettro

Teorema di Rayleigh

- cerco di riscrivere il modulo^2 esplicitando $x(t)$ in termini di trasformata di fourier

$x(t) \rightarrow$ complesso

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |(-j)|^2 \, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t) \cdot x(t) \, dt$$

posso esprimere $x(t)$ in termini del suo spettro tramite antitrasformata di fourier

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\, e^{+j2\pi f t} \, df =$$

Svolgo ora il complesso coniugato di questo

$$x^*(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X^*(f)\, e^{-j2\pi f t} \, df$$

Sostituisco in E_x al posto di $\int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)\cdot x(t)\,dt$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} X^*(f)\, e^{j2\pi ft}\, df \cdot x(t)\, dt$$

$\Downarrow$ scambio ordine integrazione

$$\int_{-\infty}^{\infty}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j2\pi ft}\, dt}_{X(f)\ \text{t. fourier}} \cdot X^*(f)\, df$$

$\Downarrow$ il segnale e il complesso coniugato $= |X(f)|^2$ x se stesso

$$\int_{-\infty}^{\infty} X(f)\cdot X^*(f)\, df$$

$\Downarrow$

$$E_x = \boxed{\int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2\, df}$$

energia nel dominio di frequenza

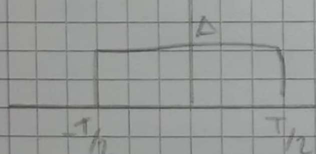
$\Rightarrow$ $|X(f)|^2$ = funzione di f che rappresenta per ogni frequenza il valore di energia

$\Downarrow$

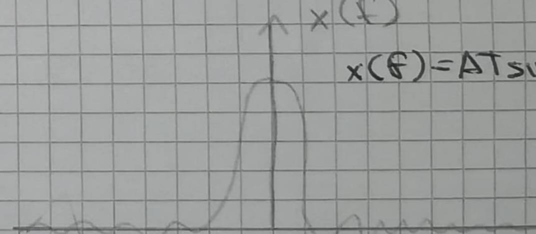
$E_{xx}(f)$

[ESD - energy spectral density] densità spettrale di energia

$x(t) = A\, rect_T(t)$

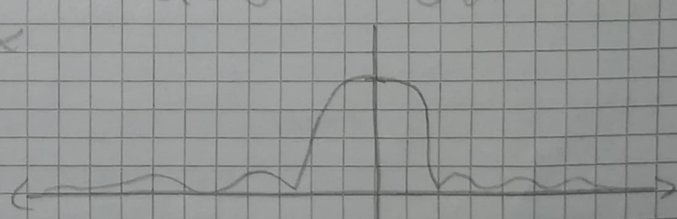


$X(f) = AT\, sinc(fT)$



$E_x = \int E_{xx}$

$|X(f)|^2 = A^2 T^2 \cdot sinc^2(fT)$

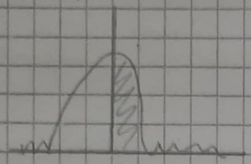


poichè la l. di banda di sinc è infinita avremmo bisogno di un sistema a l. di banda infinita.

ENUNCIATO TH

→ Se voglio trasmettere tutta l'energia devo trasmettere tutta la densità di energia ($sinc^2$) perchè l'energia si distribuisce tra $(-\infty,+\infty)$

-> Raileygh ci dice che l'errore che commettiamo in una trasmissione.



segno più reale

posso calcolare, calcolando l'area di questo lobo, il contenuto energetico del 1° lobo.

92% energia

-> cioè l'energeticamente più importante

-> larghezza banda >0

$0 \to \frac{1}{4} \to 0 \to -\frac{1}{4}$ (stessa banda)

-> numeri complessi + difficile da elaborare

Esercizio

$h(t) = A \cdot \cos(2\pi f_0 t + \phi)$ con $A \neq 1 \neq 0 \Rightarrow A = 2$

$$\cos(2\pi f_0 t + \phi) = \frac{e^{j(2\pi f_0 t + \phi)} + e^{-j(2\pi f_0 t + \phi)}}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{e^{j2\pi f_0 t} \cdot e^{j\phi} + e^{-j2\pi f_0 t} \cdot e^{-j\phi}}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{2} A \left(\underbrace{e^{j2\pi f_0 t}}_{\delta(f-f_0)} \cdot e^{j\phi} + \underbrace{e^{-j2\pi f_0 t}}_{\delta(f+f_0)} \cdot e^{-j\phi} \right)$$

$$= \frac{1}{2} A \left(e^{j\phi} \cdot \delta(f-f_0) + \delta(f+f_0)\, e^{-j\phi} \right)$$