Antonio Fuduli

Appunti del corso di

RICERCA OPERATIVA

2. Introduzione alla Programmazione Lineare ed elementi di geometria convessa

12 maggio 2006

Lezione 2

Introduzione alla Programmazione Lineare ed elementi di geometria convessa

Esempio 2.1. Un'azienda produce giornalmente n tipi di prodotti, avendo a disposizione ogni giorno m risorse. I dati a disposizione sono i seguenti:

- c_j: profitto unitario derivante dalla vendita di un prodotto di tipo j; $j = 1, \ldots, n$.
- b_i: quantità di risorsa i disponibile giornalmente; $i = 1, \ldots, m$;
- a_{ij}: quantità di risorsa i necessaria per produrre un prodotto di tipo j; $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$.

Volendo pianificare la produzione giornaliera con l'obiettivo di massimizzare il profitto complessivo giornaliero derivante dalle vendita dei prodotti, definiamo le seguenti variabili decisionali:

x_j: quantità di prodotto di tipo j da produrre giornalmente; $j = 1, \ldots, n$.

La formulazione matematica del problema è:

$$P\left\{\begin{array}{lccccc}
\displaystyle\max_{x_1,\ldots,x_n} \quad z = & c_1x_1 & +c_2x_2 & +\ldots & +c_nx_n & \\
 & a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +\ldots & +a_{1n}x_n & \leq b_1 \\
 & a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +\ldots & +a_{2n}x_n & \leq b_2 \\
 & \ldots & & \ldots & \ldots & \ldots \\
 & a_{m1}x_1 & +a_{m2}x_2 & +\ldots & +a_{mn}x_n & \leq b_m \\
 & x_1, & x_2, & ,\ldots, & x_n & \geq 0
\end{array}\right.$$

Il problema P è un esempio di problema di Programmazione Lineare (PL). Esso può essere riscritto in forma compatta nel seguente modo:

$$P\begin{cases} \max\limits_{x} \quad z = & c^T x \\ & Ax \quad \leq b \\ & x \quad \geq 0 \end{cases},$$

con

- $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$ (matrice dei coefficienti tecnologici)

- $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ (vettore delle variabili decisionali)

- $c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$ (vettore dei costi)

- $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$ (vettore delle risorse)

Infine, se indichiamo con a_i^T la riga $i-$esima di A, il problema P può essere ulteriormente riscritto nella seguente forma:

$$P\begin{cases} \max\limits_{x} \quad z = & c^T x & \\ & a_i^T x \quad \leq b_i & i = 1, \dots, m \\ & x_j \quad \geq 0 & j = 1, \dots, n \end{cases}$$

Forma generale di un problema di PL

$$P \begin{cases} \min\limits_x \quad z = & c^T x & & \\ & a_i^T x & \leq b_i & i = 1, \ldots, m_1 \\ & a_i^T x & = b_i & i = m_1 + 1, \ldots, m_2 \\ & a_i^T x & \geq b_i & i = m_2 + 1, \ldots, m \\ & x_j & \geq 0 & j = 1, \ldots, n_1 \\ & x_j & \gtreqless 0 & j = n_1 + 1, \ldots, n \end{cases}$$

Nota 2.2. Un problema di PL, nella sua forma generale, non necessariamente deve essere un problema di minimizzazione; esso può essere anche un problema di massimizzazione.

Forma standard di un problema di PL

$$P_s \begin{cases} \min\limits_x \quad z = & c^T x & \\ & Ax & = b \\ & x & \geq 0 \end{cases} .$$

Un problema in forma standard ha le seguenti caratteristiche:

- è un problema di minimizzazione;
- tutti i vincoli individuati dalla matrice A sono vincoli di eguaglianza;
- tutte le variabili sono vincolate a essere ≥ 0.

Nota 2.3. Ogni problema di PL può essere riscritto in forma standard. Di conseguenza, da qui in avanti, faremo sempre riferimento (senza perdita di generalità) a un problema di PL scritto in forma standard.

Definizione 2.4 (Regione ammissibile). Si definisce regione ammissibile X (o insieme di ammissibilità) di P_s il seguente insieme:

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax = b, x \geq 0\}.$$

Definizione 2.5 (Problema ammissibile). Il problema P_s è detto ammissibile se $X \neq \emptyset$.

Definizione 2.6 (Problema inammissibile). Il problema P_s è detto inammissibile se $X = \emptyset$.

Definizione 2.7 (Punto ammissibile). Un punto $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ è detto ammissibile per P_s se $\bar{x} \in X$.

Definizione 2.8 (Soluzione ottima). Un punto $x^* \in \mathbb{R}^n$ è una soluzione ottima per P_s se $x^* \in X$ e

$$\underbrace{c^T x^*}_{z^*} \quad \leq \quad \underbrace{c^T x}_{z} \quad \text{per ogni } x \in X.$$

Definizione 2.9 (Problema illimitato). Il problema P_s è illimitato se per ogni $k \in \mathbb{R}$ esiste $\bar{x} \in X$ tale che $c^T \bar{x} < k$.

Elementi di geometria convessa

Definizione 2.10 (Combinazione convessa). Dati due vettori $x \in \mathbb{R}^n$ e $y \in \mathbb{R}^n$, il vettore

$$w = \lambda x + (1 - \lambda) y, \quad \text{con } \lambda \in [0, 1],$$

è detto combinazione convessa di x e y.

Definizione 2.11 (Insieme convesso). Un insieme $E \subseteq \mathbb{R}^n$ è convesso se, per ogni coppia di punti $x \in E$ e $y \in E$, il vettore

$$w = \lambda x + (1 - \lambda) y$$

appartiene ad E per ogni $\lambda \in [0, 1]$.

Nota 2.12. L'intersezione di insiemi convessi è un insieme convesso.

Nota 2.13. L'unione di insiemi convessi può non essere un insieme convesso.

Definizione 2.14 (Punto estremo). Dato un insieme convesso $E \subset \mathbb{R}^n$, un punto $w \in E$ è un punto estremo di E se non esiste nessuna coppia di punti $x \in E$ e $y \in E$, con $x \neq y$, tale che

$$w = \lambda x + (1 - \lambda)y$$

per qualche $\lambda \in]0, 1[$.

Definizione 2.15 (Iperpiano). Dati $\alpha \in \mathbb{R}^n$ e $\beta \in \mathbb{R}$, con $\alpha \neq 0$, si definisce iperpiano in corrispondenza di α e β il seguente insieme:

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n | \alpha^T x = \beta\}.$$

Nota 2.16. Un iperpiano è un insieme convesso.

Nota 2.17. In corrispondenza di un iperpiano H, è possibile definire due semispazi affini

$$H^+ = \{x \in \mathbb{R}^n | \alpha^T x \geq \beta\}$$

e

$$H^- = \{x \in \mathbb{R}^n | \alpha^T x \leq \beta\}.$$

Nota 2.18. Gli insiemi H^+ e H^- sono convessi.

Definizione 2.19 (Poliedro). Un poliedro è l'intersezione di un numero finito di iperpiani e semispazi affini.

Nota 2.20. Di conseguenza, un poliedro, essendo l'intersezione di insiemi convessi, è un insieme convesso.

Definizione 2.21 (Politopo). È un poliedro limitato.

Teorema 2.22. La regione ammissibile X di un problema di PL è un poliedro.

Dim.

Il problema P_s può essere scritto nel seguente modo:

$$P_s \begin{cases} \min\limits_{x} \quad z = & c^T x \\ & a_i^T x \quad = b_i \quad i = 1, \ldots, m \\ & x_j \quad \geq 0 \quad j = 1, \ldots, n \end{cases}$$

Si vede facilmente che la regione ammissibile X di P_s non è altro che l'intersezione di m iperpiani ($a_i^T x = b_i$, $i = 1, \ldots, m$) e n semispazi affini ($x_j \geq 0$, $j = 1, \ldots, n$). ■