l'andamento del filtro dipende dal parametro γ (ROLL-OFF) ossia quanta banda in più mi serve per realizzare filtro reale rispetto a quello ideale

$\gamma [0, 1]$

$\gamma = 0 \rightarrow$ filtro ideale

$1 < \gamma < 1$

$\gamma = 1 \rightarrow$ filtro reale con banda massima

$B_1 = 2B$

filtro a coseno rialzato: ph ha andamento simile a un coseno ma rialzato tra 0 e 1 esclusi dunque i valori negativi

29/10/2020

Teorema Campionamento

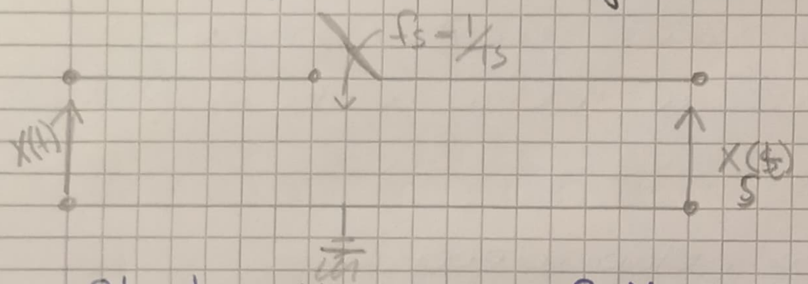
Come passare dal segnale analogico a campioni continui x(t), ossia rappresentato da un numero infinito di valori, ad un segnale x(n) con n variabile discreta.

$\rightarrow$ Indice di tempo discreto ($\in \mathbb{Z}$)

$$x(t) \xrightarrow[\leftarrow \text{RICOSTRUZIONE}]{\text{CAMPIONAM}} x(n)$$

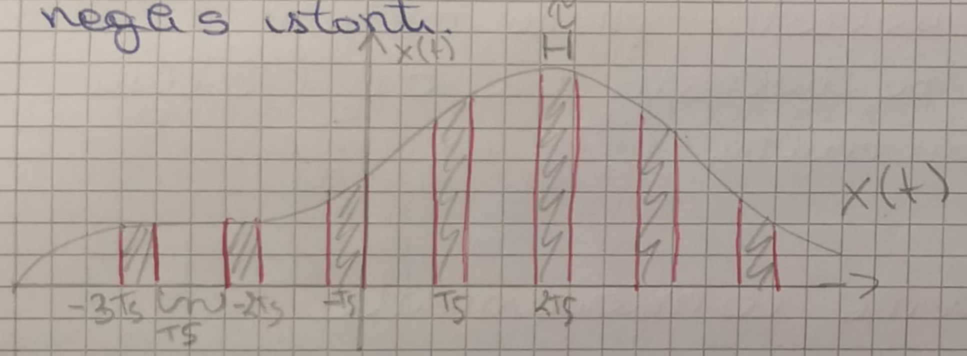
$\rightarrow$ Posso cioè rappresentare un qualsiasi segnale con n campioni dove n è finito. E facendolo questo sto campionando il segnale originale. Se campionamento risulta corretto allora è sempre possibile tornare indietro al segnale non campionato

Esempio di campionamento su circuito elettrico



S = sampled

L'interruttore di fatto campiona il segnale di tensione applicato in ingresso poichè commutando il circuito da aperto a corto circuito con una certa f_s, permette di sapere il valore di x negli istanti.



Solo negli istanti τ, in cui l'interruttore è chiuso, il segnale transiterà in uscita

ANALOGICO ⇝ DIGITALE

$x(t) \longrightarrow x_s(t)$

segnale treno di Rect. il segnale transita solo dove il rect vale 1

$$x_s(t) = x(t) \cdot s(t)$$

campionam. per rect

$$X_s(f) = X(f) * S(f)$$

↳ segnale noto

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 1\,\mathrm{Rect}_\tau(t - nT_s)$$

armoniche con portante f_s

serie fourier

$$S(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n\, e^{j2\pi n f_s t}$$

spettro a righe

$$C_n = f_s\tau \cdot \mathrm{sinc}(n f_s \tau)$$

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [f_s\tau \cdot \mathrm{sinc}(n f_s \tau)] \cdot e^{j2\pi n f_s t}$$

Reale e pari

$$C_n = \begin{cases} C_0 = f_s\tau \\ \forall n \neq 0 \quad C_n = C_{-n} \end{cases}$$

$$s(t) = C_0 \cdot e^{\overset{n=0}{j2\pi n f_s t}} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{j2\pi n f_s t} + \sum_{n=-1}^{-\infty} C_n e^{j2\pi n f_s t}}$$

Somma esponenziale $\Rightarrow 2C_n \cos(2\pi n f_s t)$

$$= C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2C_n \cos(2\pi n f_s t)$$

$$X_s(t) = x(t) \cdot s(t)$$

Spettro a righe con righe uguali 2 a 2

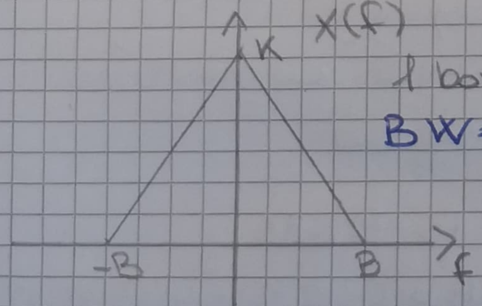
$$X_s(f) = X(f) * S(f) = C_0\,\delta(f) + \sum_{n=1}^{\infty} C_n [\delta(f-nf_s) + \delta(f+nf_s)]$$

$$= X(f) * \left[C_0\,\delta(f) + \sum_{n=1}^{\infty} C_n\,\delta(f-nf_s) + C_n\,\delta(f+f_s n)\right]$$

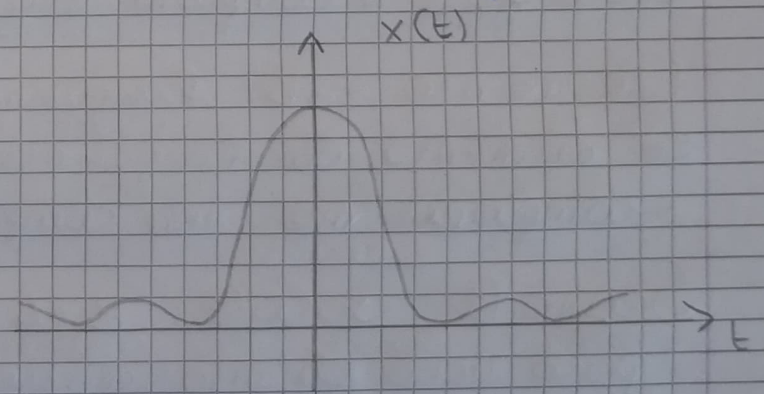
commutativa

$$= \boxed{C_0 \cdot X(f) + \sum_{n=1}^{+\infty} C_n X(f-nf_s) + C_n X(f+nf_s)}$$

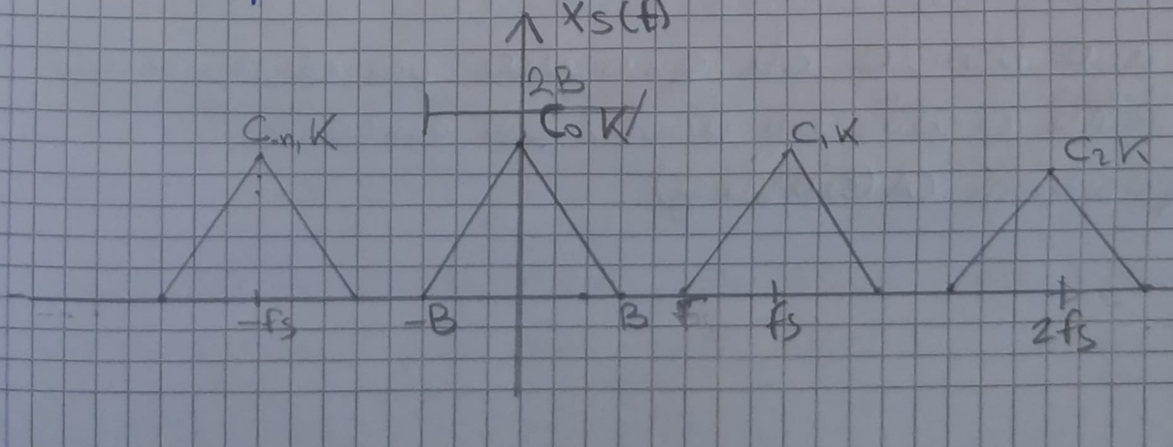
lo spettro campionato è uguale allo spettro del segnale analogico ($C_0 \cdot f_s$) più infinite copie centrate nelle armoniche nf_s $\rightarrow$ spettro periodico



l banda
$BW = B$

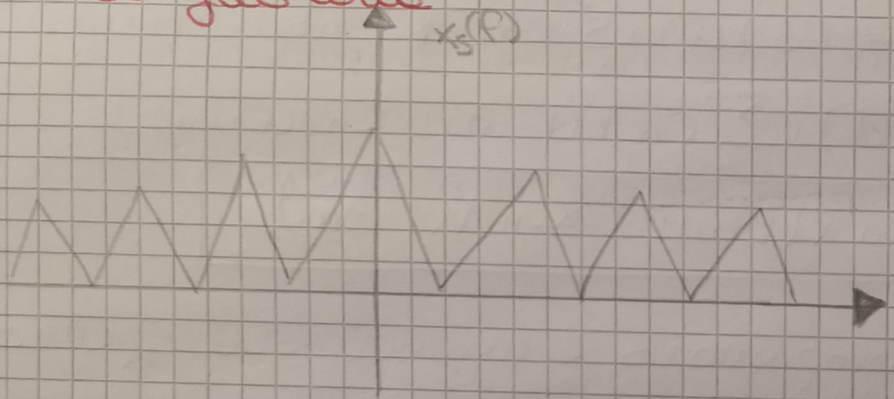


- Se nel tempo il segnale è analogico $[-\infty < t < \infty]$ allora in frequenza avrà banda limitata.



Posso riconvertirlo ad analogico usando un filtro passa basso con $H(f) = 1/c_0$ a condizione che:

1) $x(t)$ ha banda limitata $\Rightarrow X(f)$ per $|f| \geq B$
2) la frequenza di campionamento $f_s \geq 2B$
ossia tra la fine di una replica e l'inizio di un'altra esiste uno spazio cioè la banda di guardia



$f_s = 2B$
$B_g = 0$

→ frequenza di campionamento: in ogni secondo estraggo n campioni segnali

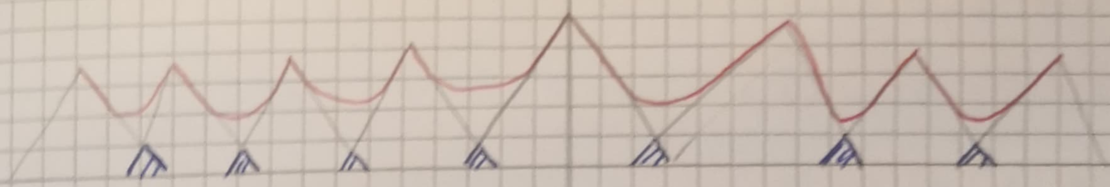
frequenza = 2B frequenza di Nyquist
Se aumento la frequenza aumenta aumentano i campioni ma non campiono meglio

Segnale vocale: $B = 4\,kHz$ $f_s = 8\,kHz$
poco ricco di informazione $\Rightarrow$ 8 bit $\rightarrow R = 64000$ bit/s
64 Kbit/s

Segnale musicale: $B \approx 22\,KHz \rightarrow f_s = 44.100\,Hz$
BG

Lascio una banda di guardia per distanziare le repliche (+ campioni usati) per evitare sovrapposizioni (Aliasing)

aliasing

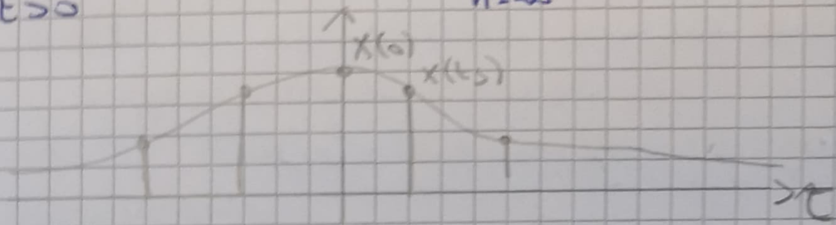


L'aliasing muta distruttivamente lo spettro e rende impossibile tornare al segnale continuo

IDEALMENTE

treno delta

$$\lim_{\tau \to 0} s(t) \Rightarrow S_\delta(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-nT_s)$$



gli istanti di campionamento sono gli unici istanti in cui vediamo il segnale

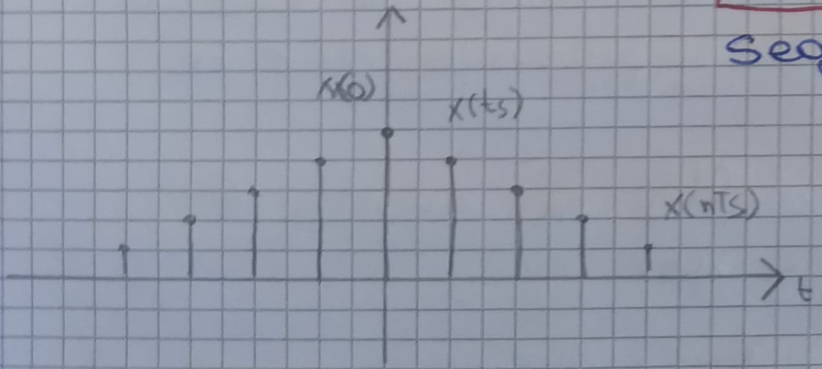
⇓

voglio sapere con precisione in istanti perciò che succede tra un istante e l'altro è irrilevante

Solo il campione ci permette di passare dal digitale ad analogico

$$x_s(t) = x_s(t) \cdot S_\delta(t) = x(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT_s) = \boxed{\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) \cdot \delta(t-nT_s)}$$

segnale più semplice digitale



segnale a righe nel tempo campionato e spettro periodico

Da digitale ad analogico (Ricostruzione)

$x_s(t) \to x(t)$

filtro in frequenza con filtro passa basso di ampiezza T pari ad uno, rect di base fs centrato in f

Area spettro 1 $\quad K = \frac{1}{f_s}$

$H_{lpf}(f) = K \, Rect_{fs}(f)$

$X(f) = X_s(f) \cdot H_{lps}(f)$

$x(t) = x_s(t) * h_{lpf}(t)$ — conosco i valori dei campioni non nulli (ex in 0 vale 1)

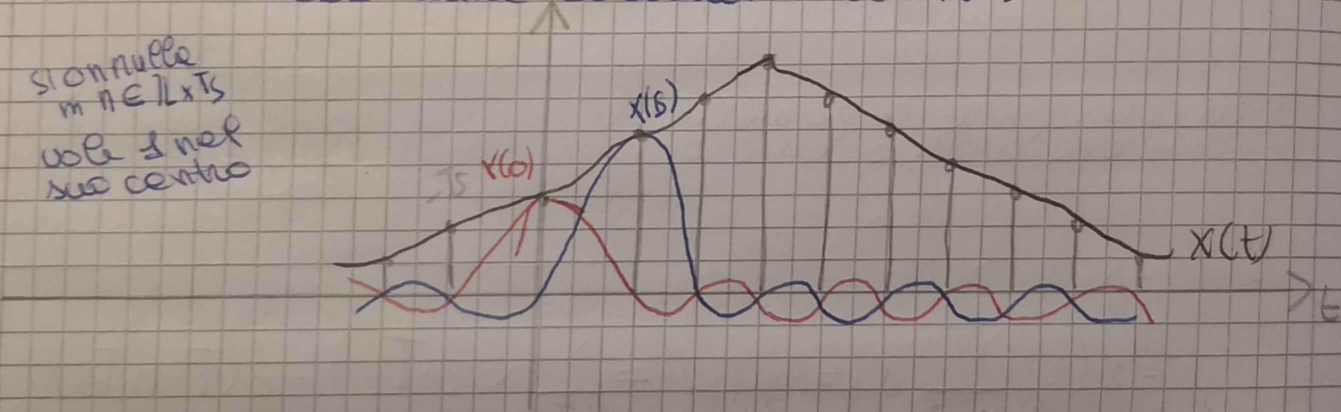
$= \sum_n x(nT_s) \, \delta(t - nT_s) * \text{sinc}(f_s t)$

applico campionamento ideale

$$\boxed{= \sum x(nT_s) \cdot \text{sinc}[f_s(T - nT_s)]}$$

↳ comb lineare di sinc centrato in nT_s e ampiezza $x(nT_s)$, mi assicurano di ricostruire correttamente $x(t)$

si annulla in $n \in \mathbb{Z} \times T_s$ vale 1 nel suo centro



le loro code non influenzano il valore del campione, infatti in presenza di δ le sinc si annulla.

la somma delle sinc mi riporta il segnale analogico $x(t)$

- il filtro sopra citato è il filtro ricostruttore
- sinc: funzion interpolatrice (com'è fatto il segnale tra un campione e l'altro)

03/11/2020

$$x(t) = \sum_{K=-\infty}^{+\infty} \underbrace{a_K}_{\to x(KTs)} \cdot P(t-KTs)$$ → treno di impulsi

La forma con cui rappresentiamo il segnale può essere qualunque, purché dato che

$$P(t) = \begin{cases} 1, & t=0 \\ 0, & t = \pm KTs \end{cases}$$

- Il segnale si può conoscere solo in tempi caratteristici infatti negli altri punti vale 0 così da evitare interferenze
- Il campione così avrà una certa forma definita da $P(t)$, chiamato formatore di impulsi, deve rispettare però alcune condizioni.

Ex : $K = M$ ($t = MTs$) $\quad \sum_K a_K P(T-KTs)$

$$x(MTs) = a_M \underbrace{P(MTs-MTs)}_{a_M} + \underbrace{\sum_{K \neq M} a_K P(MTs-KTs)}_{0,\ \text{no contributo}}$$

$= a_M$

Il segnale può essere rappresentato come una comb lineare di simboli a_K x formatore di impulsi

$x(t) = \sum_K a_K \cdot P(t-KTS)$ => onda Pam (Pulse amplitude modulation)

↓

L'informazione si trova nell'ampiezza dell'impulso

• Il segnale può essere di qualsiasi forma, anche distorto, ma deve essere uguale al campione nell'istante di campionamento

• Scelgo $\tilde{P}(t)$ in base alle caratteristiche del mezzo trasmissivo, in modo tale da migliorare la trasmissione.

• CODIFICA DI LINEA: ogni mezzo ha una sua codifica e varia in base a come associo $P(t)$ ad a_k

• BINARIA: segnale campionato caratterizzato da 2 campioni diversi

2 simboli → a_0: ad ogni segnale corrisponde un bit 0
2 bit → a_1 => 1

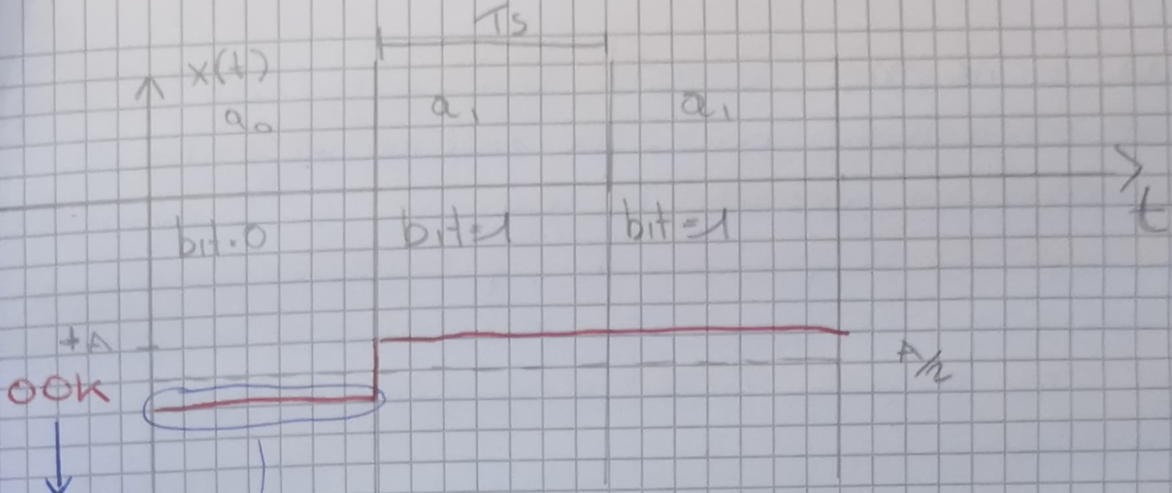
Ad ogni simbolo posso associare + bit

$P(t) = Rect_{T_S}(t)$ => si avranno diverse codifiche in base a come associo Rect ad a_k

↳ tempo campionamento / tempo durata simbolo
$T_S = T_b$

CODIFICHE A LIVELLO: L'informazione associata al bit è legata al valore di tensione con cui il segnale è trasmesso

UNIPOLARI: unico livello di tensione: trasmetto rettangolo di tensione = 0 in corrispondenza di bit = 0 e trasmetto rettangolo con ampiezza A se bit = 1



uniforme che non ritorna a 0

OOK → on/off keying

posso trasmettere anche una −A ma diventerà bipolare

CARATTERISTICHE CODIFICA DI LINEA EFFICIENTE:

1. assenza della componente in continua $f=0 \Rightarrow A=0$ poiché in $f=0$ si ha la distorsione maggiore e quindi bisogna fare in modo che $|X(f)|^2=0$

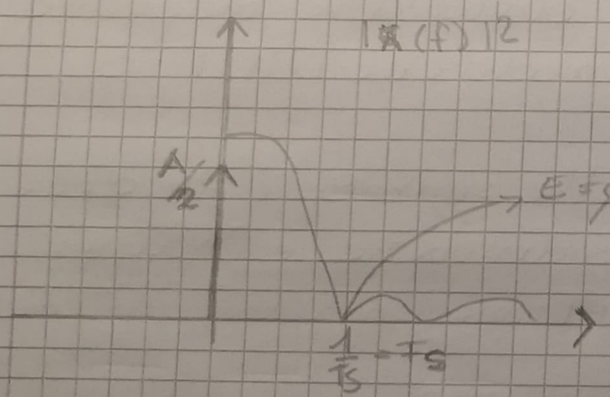
2. sincronismo: Tx trasmette simboli e Rx deve sapere quando inizia e finisce un simbolo, altrimenti ci sono interferenze

3. bassa probabilità di errore

4. semplicità: poco onerosa dal punto di vista computazionale

Quando si hanno lunghe sequenze di '0' Rx perde il sincronismo perché Tx rimane spento per tempo incognito e quando Tx comincia a trasmettere '1', non sapendo il periodo Ts, potrebbe perdere il sincronismo (a meno che non abbiamo un sistema esterno che ne tenga conto) e si genererebbe interferenza

Numero bit trasmesso da sorgente è sempre molto elevato, anche il 50% sarà pari a 1 (Per $n \to \infty$ il n. di bit 0 e n. di bit 1 sarà 50%). Avrò dunque 50% di segnale con ampiezza +A e 50% con ampiezza 0 e perciò mediamente un segnale con ampiezza A/2 la cui trasformata risulta essere una delta in continua

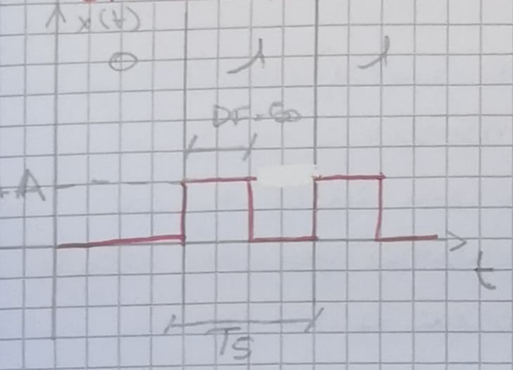


Come si nota dal grafico la componente in frequenza continua ha ampiezza A/2 perciò, non essendo trascurabile, verrà necessariamente trasmessa generando interferenza. La frequenza del simbolo non viene trasmessa, quindi non ho modo di recuperare il sincronismo.

=> Sistema non efficace

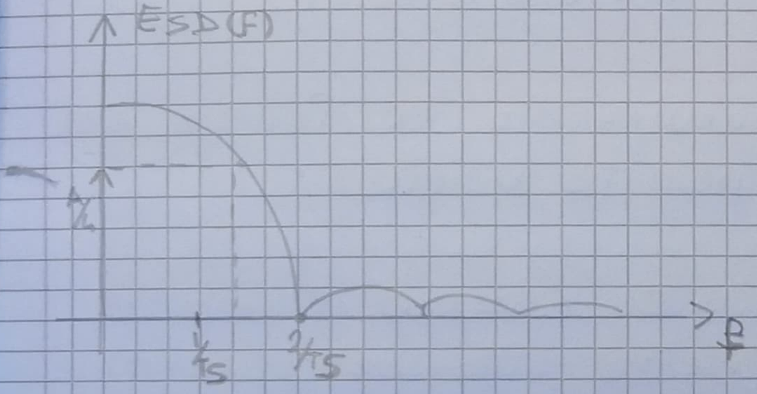
(RZ)

UNIPOLARE IN CUI IL SIMBOLO TORNA A ZERO (bit non costante nell'intervallo)



il bit pari a 0 assegno una ampiezza nulla, mentre il bit pari a 1 assegno un valore $\neq 0$ per un $t < T_S$ stabilito dal duty factor (DF)

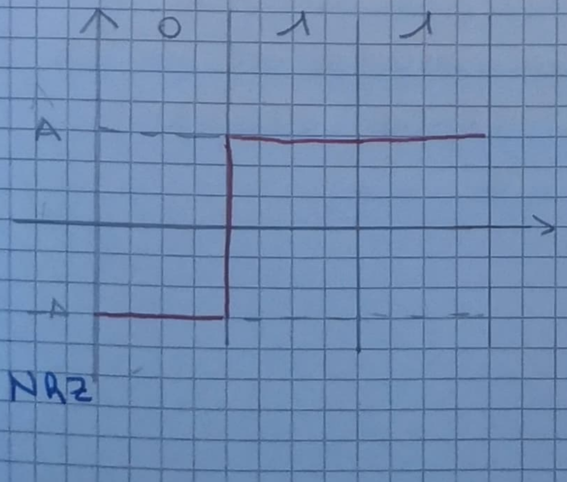
↳ [0, 100] %



la frequenza di campionamento ($1/T_S$) viene trasmessa quindi in presenza di una serie di 1 è sempre possibile recuperare sincronismo. a 0 invece non recupero mai sincronismo.

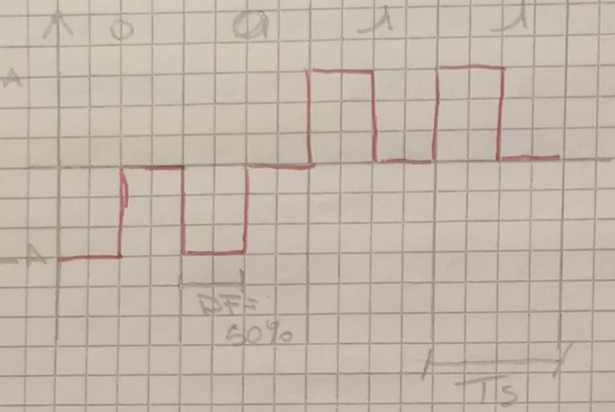
- mediamente trasmetto A/4 in continua ⇒ non trascurabile

- CODIFICA BIPOLARE: trasmetto con due polarità ossia associo al bit 0 un rettangolo con ampiezza −A e al bit pari a 1 un rettangolo con ampiezza A.



componente in continua è nulla perché 50% rect sono −A e l'altro 50% rect sono +A.
Perdo il sincronismo con una lunga sequenza di 1 o di zeri, otterrò uno spettro di energia che si annulla in $\frac{nf_s}{T_S}$ ⇒ non trasmetto

BIPOLARE RZ

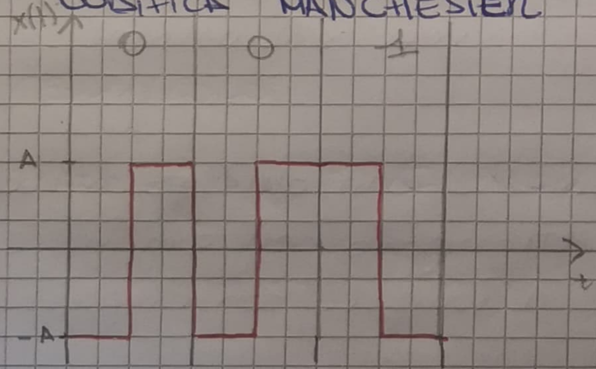


non ho componente in continua.
Recupero sempre il sincronismo perché ogni bit torna a 0 prima della fine del simbolo.

Recupero sincronismo riducendo la forma nel tempo => aumentando però la banda

- CODIFICHE A TRANSIZIONE: associo il simbolo alla transizione da livello alto-basso (bit = 1) e viceversa (bit = 0)

CODIFICA MANCHESTER



onda quadra => codifica più efficiente fra tutte perché ho assenza di componente in continua già nel singolo bit.
recupero inoltre il sincronismo bit per bit
=> banda doppia

CODIFICA MULTILIVELLO: i simboli a_k che estraggo dal segnale iniziale appartengono ad un alfabeto a M simboli

$$x(t) = \sum_k a_k P(t - KTs)$$

→ M simboli

per ogni codifiche

Esempio:

sorgente che trasmette 4 simboli, ho necessità di 2 bit per codificarne in digitale

$a_0 \to 00$
$a_2 \to 01$
$a_3 \to 11$
$a_4 \to 10$

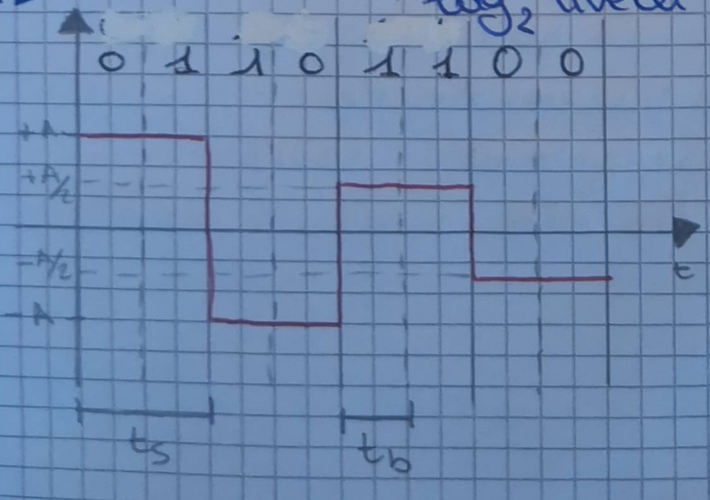
posso da una parola di codice alla successiva cambiando solo 1 simbolo: Codifica di Gray, permette una capacità di errore più bassa

Ts sempre uguale, il tempo di bit è uguale ma dura 2 bit

→ $Ts = M\,Tb$

→ $\log_2$ livelli = bit per ciascun simbolo

NRZ



se i livelli di tensione A e -A sono massimi allora gli altri valori li trovo a valori intermedi

$T_S = 2T_b$

la banda si modifica perché nel tempo la forma che rappresenta il simbolo è aumentata (pari a $2t_b$) e quindi la banda è più piccola rispetto alla banda binaria.

$$B^{ML} = \frac{B^{BIN}}{\log_2 \text{LIVELLI}}$$

- Quindi più aumento i livelli associati ai simboli trasmetterò + info con un solo simbolo e perciò ho bisogno meno banda
- Avrò molti livelli alcuni dei quali saranno completamente coperti dal rumore perciò non saranno + trasmissibili => interferenza

05/11/2020

~~onda pam~~

$x(t) = \sum_K a_K \cdot P(t - KT_S)$ → NO RUMORE, passa basso → Banda ($B \in \mathbb{R}$) → $t \to \infty$

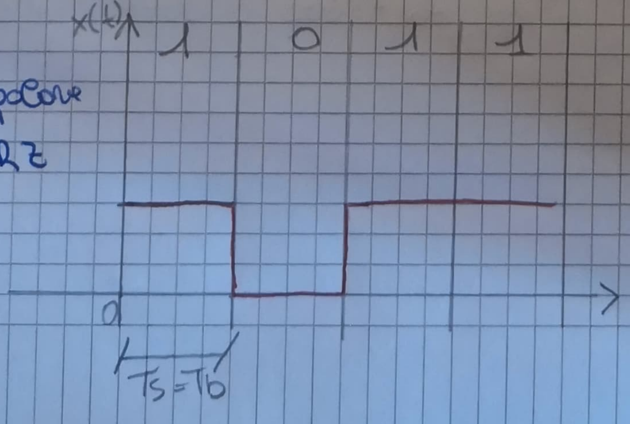
$x(t)$ → CANALE $\xrightarrow{y(t)}$ $y(t) = x(t) * h(t)$

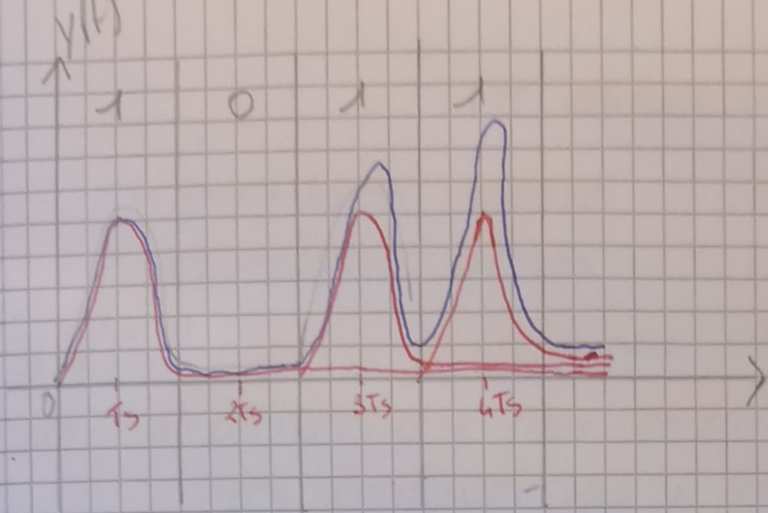
distorsioni segnale perché non ho tutta la banda necessaria per trasmetterlo

=> Interferenza intersimbolica (ISI)

- Interferenza generata dai simboli della stessa trasmissione

unipolare NRZ





y(t): segnale ricevuto filtrato con passa basso

Simboli a durata temporale ∞ => hanno delle code che si ripercuotono sui simboli successivi

Il valore estratto dal campione nei vari istanti Ts successivi al primo non saranno mai pari al valore effettivo del segnale ma risentiranno della coda del precedente. Cambia dunque il valore non il grafico.

Difetto di progettazione non di trasmissione

$$x(t) = \sum_k a_k P(t - kTs)$$

ritardo di propagazione

$$x(t) = y(t) * h(t) \Rightarrow y(t) = \sum_k a_k \cdot P_F(t - kTs - Td)$$

$$P_F(t) = P(t) \cdot h(t)$$

$t = MTs + Td$ => campioniamo con ritardo

$$y(MTs + Td) = \sum_k a_k \cdot P_F(MTs + \cancel{Td} - kTs - \cancel{Td})$$

$$= a_M \cdot \underbrace{P_F(MTs - MTs)\Big|_{k=M}}_{\text{passa basso}} + \sum_{k=M} a_k \cdot P_F(MTs - kTs)$$

$$\text{Se } P_F(0) = 1 \xrightarrow{\text{allora}} y(MTs + Td) = \underbrace{a_1}_{\text{valore effettivo simbolo}} + \sum_{k \neq M} a_k \cdot P_F(MTs - kTs)$$

combinazione lineare code di altri simboli

=> ISI

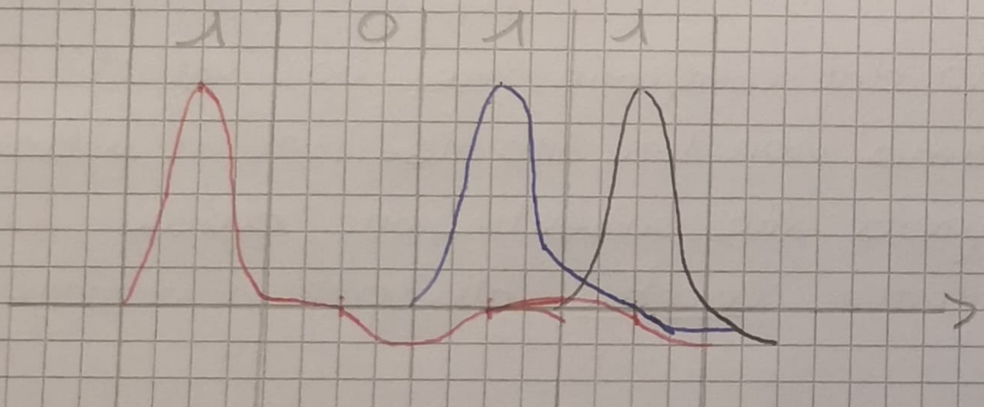
CONDIZIONI PER ANNULLARE ISI

- $P_F(0) = 1$
- $P_F(t) = \begin{cases} 1, & t=0 \\ 0, & t = \pm K t_s \end{cases}$

stesse condizioni della trasmissioni

$\Longrightarrow P_F(f) = 0 \quad |f| \geq B$ banda limitata

$\rightarrow$ le code dei simboli non si annullano ma intersecano l'asse x nei multipli KT_s



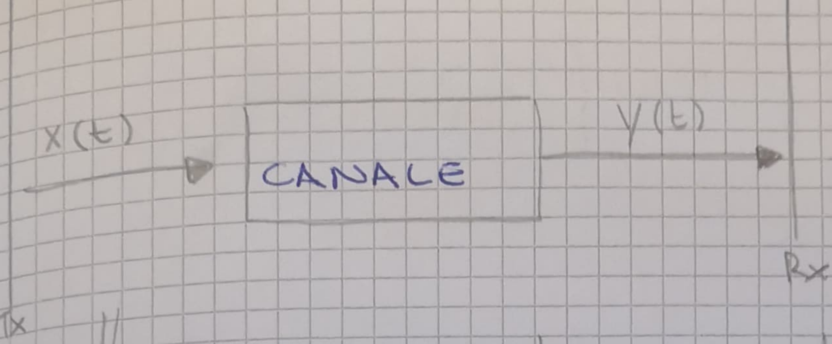
$\boxed{ISI = 0}$

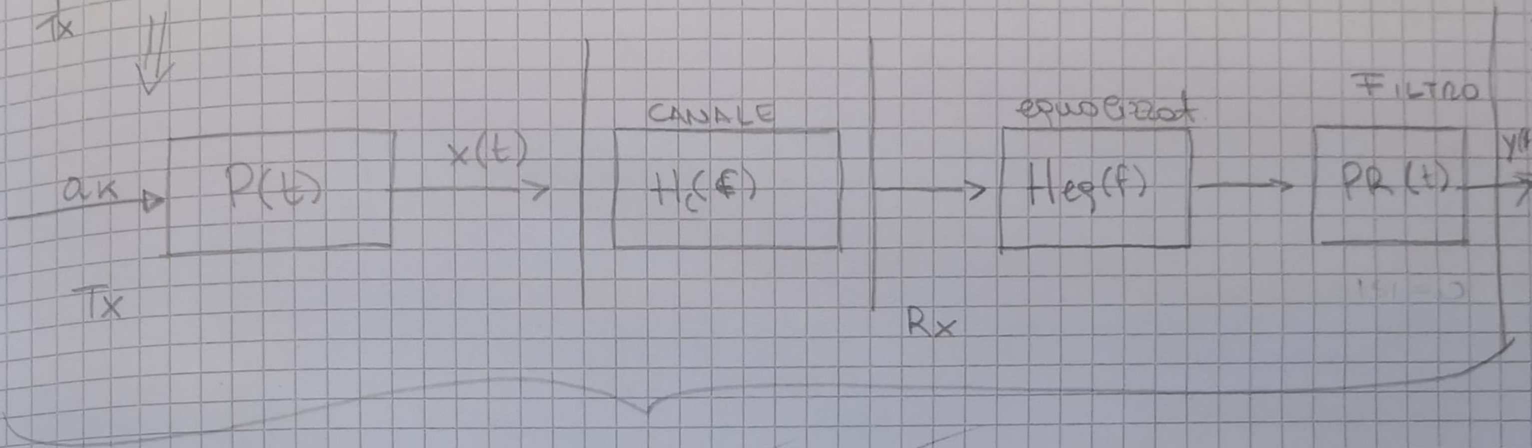
$P_F(t)$ deve essere a forma di coseno rialzato

ideale $n(t) = 0$

Se c'è rumore l'isi non si può abbattere.

$\Rightarrow$ • non voglio sapere cosa accade tra T_s e $2T_s$





$$H(f) = Pt(f) \cdot \underbrace{Hc(f) \cdot Heq(f)} \cdot Pr(f)$$

$$Heq(f) = \frac{1}{Hc(f)}$$ senza rumore

$$H(f) = Pt(f) \cdot P_R(f) = \boxed{\begin{cases} H(t) = Pt(t) * P_R(t) \\ H(f) = 0 \,, |f| \geq B \end{cases}} = \begin{cases} 1 \,, t = 0 \\ 0 \,, t = \pm kTs \end{cases}$$

La cascata dei filtri deve rispettare queste regole (non solo in ricezione o in trasmissione)

- filtro a coseno rialzato, ho bisogno che $H(f)$ sia a coseno rialzato. Poiché $H(f) = P_t(t) * P_R(t)$ posso usare un unico filtro sia in ricezione sia in trasmissione che sia la comb. lineare dei 2.

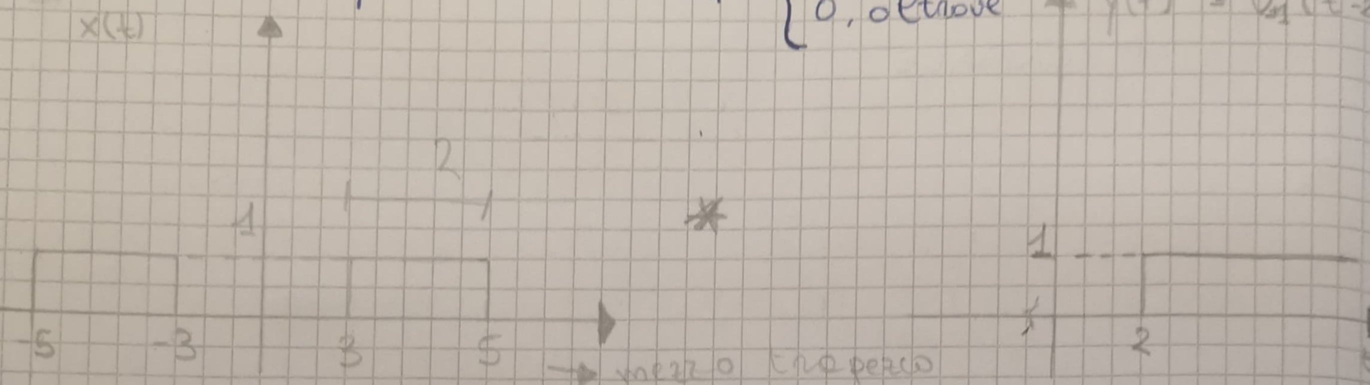
$\Rightarrow P_T(f) = P_R(f) \Rightarrow$ filtro a radice di coseno rialzato $= \sqrt{H(f)}$

La trasmissione a radice di coseno rialzato ha ISI ma questo viene annullato dopo il filtraggio operato dal ricevitore ($\sqrt{H(f)}$)
$\Rightarrow$ rispetto i vincoli, equipartendo la difficoltà computazionale ric./trasm.

Esercizio

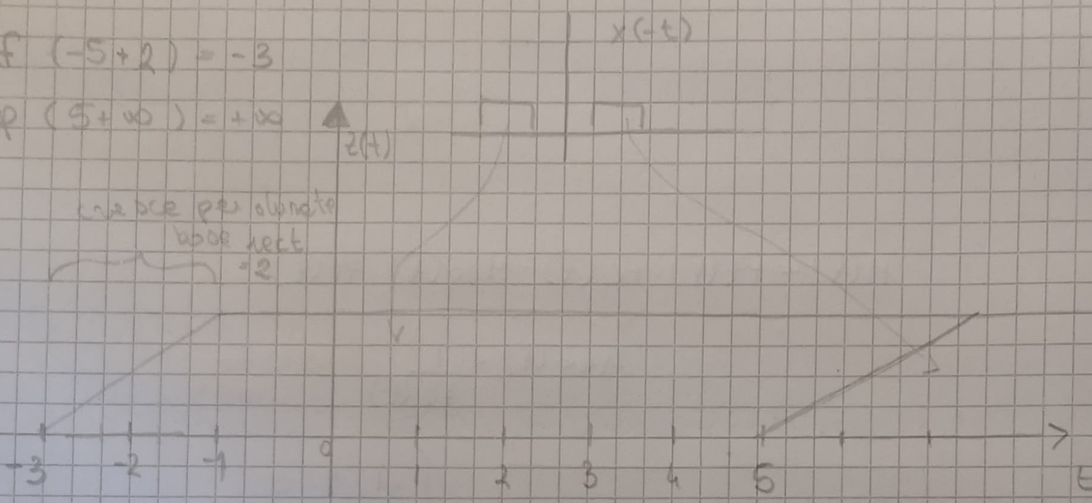
$z(t) = x(t) * y(t)$ $\qquad U_{-1}(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & \text{altrove} \end{cases}$

meglio lavorare sul tempo

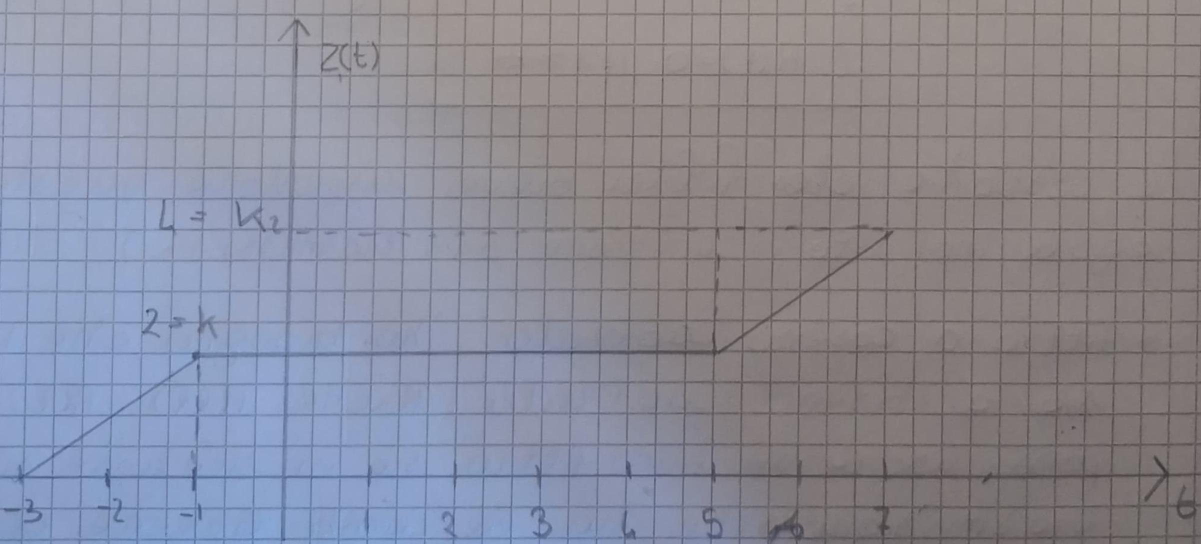


inf $(-5+2) = -3$

sup $(5+\infty) = +\infty$



Riscrivo tenendo conto di sovrapposizioni



$K_2 = 2K_1 = 4$

$K_1 = (1 \times 1) \times 2 = 2$

ESEMPIO

$z(t) = x(t) * y(t)$

$y(t) = U_{-1}(t)$

$Z(f) = ?$