APRILE 2011

COMPITO A

DOMANDA :
Illustrare le definizioni di vertice e soluzione base ammissibile. Dimostrare che una soluzione ammissibile di un problema di PL in forma standard è un vertice del poliedro delle soluzioni ammissibili se e solo se è una soluzione base ammissibile.

RISPOSTA:
Definizione base ammissibile*:*

Ponendo che la soluzione di un sistema Ax=b sia x = $\begin{bmatrix} x_B \\ x_F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B^{-1}b - B^{-1}F_{xF} \\ x_F \end{bmatrix}$

La soluzione base (e, per estensione, la base B stessa) si dice soluzione base ammissibile, o SBA , se $x_B=B^{-1}b\geq 0$.

Definizione vertice*:*
-Un punto x di un poliedro P si dice punto di estremo o vertice di P se non può essere espresso come una combinazione convessa stretta di altri due punti del poliedro, cioè non esistono y.z ϵ P, y≠z e λϵ(0,1) tali che x=λy+(1-λ)z.
-Un punto x ϵ P è un vertice del poliedro non vuoto P: ={x≥0 : Ax=b} se e solo se x è una soluzione base ammissibile del sistema Ax=b.
Dimostrazione:
Dimostriamo prima l'implicazione x SBA→ x vertice. Supponiamo per assurdo che una soluzione x ϵ P sia una SBA e non un vertice P. Senza perdita di generalità possiamo raggruppare le componenti positive di x e quelle nulle, ovvero assumiamo:

$x=[\underbrace{x_1,\dots,x_K}_{\textit{positive}},0,\dots,0]^T$

dove k rappresenta il numero di componenti non nulle(cioè positive) di x. Ne consegue che le colonne $A_1,\dots,A_k$ devono fare parte di una qualsiasi base B associata alla SBA x, insieme eventualmente ad altre colonne(SOLUZIONE DEGENERE).

-Se x non è un vertice di P, esistono due punti :
$y=[y_1,\dots,y_K,0,\dots 0]^T$ ϵ P
$z=[z_1,\dots,z_K,0,\dots 0]^T$ ϵ P

con y≠z, tale che x=λy+(1-λ)z, per un qualche λϵ(0,1).
Si noti che y e z devono necessariamente avere le ultime componenti a zero, altrimenti la loro combinazione convessa non potrebbe dare x. Per ipotesi si ha allora:
y ϵ P →Ay=b → $A_1y_1+\dots+A_Ky_K=b$
z ϵ P →Az=b → $A_1z_1+\dots+A_Kz_K=b$
sottraendo la seconda equazione dalla prima si ottiene $(y_1-z_1)A_1+\dots+(y_K-z_K)A_K=\alpha_1A_1+\dots+\alpha_KA_K=0$, ove si è posto $\alpha_i=y_i-z_i$, i=1,…,k. Esistono quindi scalari αi ,…, α_K non tutti nulli(dato che y≠z) tale che $\sum_{i=1}^{k} \alpha_1 A_1 = 0$,

pertanto le colonne $A_1,\ldots,A_K$ sono linearmente dipendenti, e non possono fare parte di una fase, contraddicendo l'ipotesi x SBA.
Dimostriamo ora l'implicazione x vertice→x SBA.
Per dimostrare l'implicazione è sufficiente che x vertice→x soluzione base. Il fatto che la soluzione base sia anche ammissibile deriva infatti dall'ipotesi $x \in P$.
Supponiamo per assurdo che x sia un vertice di P, ma non una soluzione base del sistema Ax=b.
Ipotizzando come prima $x=[x_1,\ldots,x_K,0,\ldots,0]^T$, con $x_1,\ldots, x_K >0$, si ha che $x \in P \rightarrow Ax=b \rightarrow A_1x_1+\ldots+ A_Kx_K=b$, le colonne $A_1 ,\ldots,A_K$ sono linearmente dipendenti, e quindi esistono k coefficienti $\alpha_1,\ldots, \alpha_K$ non tutti nulli tali che: $\alpha_1A_1+\ldots+ \alpha_KA_K=0$. Sommando la prima equazione e la seconda moltiplicate per $\varepsilon>0$ si ottiene:
$A_1(\alpha_1+ \varepsilon\, \alpha_1)+\ldots+A_K(\alpha_K+ \varepsilon\, \alpha_K)=b$.

COMPITO B

DOMANDA :
Illustrare le definizioni di vertice e direzione estrema. Enunciare il teorema di Minkowski-Weyl e utilizzarlo per dimostrare che se un problema di PL in forma standard ammette soluzione ottima, allora ammette soluzione ottima su un vertice.

RISPOSTA:
Definizione vertice*:*
Vedi compito A.

Definizione direzione estrema*:*
Un vettore $d \in R^n$ di norma unitaria(cioè tale che $||d||=1$) si dice direzione di un poliedro P se $\forall u\geq 0$, $x \in P \rightarrow x+ud \in P$.
Una direzione $d \in R^n$ di un poliedro P si dice direzione estrema di P se non può essere espressa come una combinazione conica stretta di altre due direzioni di P.

Teorema di Minkowski-Weyl:
Ogni punto di un poliedro dotato di almeno un vertice si può ottenere come somma di una combinazione convessa dei suoi vertici e di una combinazione conica delle sue direzioni estreme.
Teorema:
Dato un PL $\min\{C^Tx : x \in P\}$, con P poliedro contenente almeno un vertice, se esiste una soluzione ottima del problema, esiste un vertice di P ottimo.
Dimostrazione:
Siano $x^1,\ldots,x^K$ i vertici di P e siano $d^1,\ldots,d^h$ le sue direzioni estreme. Sia infine $z^*=\min\{C^Tx^i : i=1,\ldots,k\}$.
Per dimostrare la tesi del teorema basta dimostrare che, dato un qualunque $y \in P$, si ha $c^Ty\geq z^*$.
Dal lemma si ha che $c^Td_i\geq 0$, per $i=1,\ldots,h$.
Devono esistere moltiplicatori $u_1,\ldots u_h\geq 0$ e $\lambda_1,\ldots, \lambda_K\geq 0$, $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$, tali che $y=\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x^i + \sum_{i=1}^{h} u_i d^i$. Si ha allora $c^Ty=c^T\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x^i + \sum_{i=1}^{h} u_i d^i\right) = \sum_{i=1}^{k}\left(\lambda_i\, c^T x^i\right) + \sum_{i=1}^{h} u_i (c^T d^i) \geq \sum_{i=1}^{k} \lambda_i z^* = z^*$.

COMPITO C = COMPITO A

COMPITO D

DOMANDA :
Illustrare le definizioni di insieme convesso, funzione convessa, problema di programmazione convessa, punto di minimo locale e di minimo globale. Dimostrare che nei problemi di Programmazione Convessa un punto di minimo locale è anche punto di minimo globale.

RISPOSTA:
***Definizione minimo globale**:*
Una soluzione $x^* \in X$ si dice punto di minimo globale per f(x), o soluzione ottima, se: $f(x^*) \leq f(x)\ \forall x \in X$.
In questo caso $f(x^*)$ si dice minimo globale di f(x) in X.
Un punto di minimo globale è stretto se $f(x^*)<fx)\ \forall\ x \in X,\ x \neq x^*$.

Definizione minimo locale:
Una soluzione $\bar{x} \in X$ si dice punto di minimo locale per f(x) se: $\exists\ \epsilon>0 : f(\bar{x}) \leq f(x)\ \forall x \in X : ||x-\bar{x}||<\epsilon$.
Un punto di minimo locale è stretto se $f(x^*)<f(x)\ \forall x \in X : ||x-\bar{x}||<\epsilon,\ x \neq \bar{x}$.

Definizione di insieme convesso e funzione convessa:
L'intersezione di k insiemi convessi $X_1,\ldots,X_K \subseteq R^n$ è un insieme convesso. Un insieme $X \subseteq R^n$ si dice convesso se: $\forall x, y\ \in X,\ \lambda \in [0,1] \rightarrow z=\lambda x+(1-\lambda)y \in X$.
Dati un insieme convesso X e una funzione $f:x \rightarrow R^n$, si dice che f è una funzione convessa su X se comunque presi due punti $x,y \in X$ e uno scalare $\lambda \in [0,1]$ e detto $z=\lambda x+(1-\lambda)y$, si ha che: $f(z) \leq \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$.

Definizione di Programmazione Convessa:
Un PM si dice problema di Programmazione convessa se l'insieme ammissibile x è convesso e la funzione obiettivo f(x) è convessa su x.

Un punto di minimo locale è anche detto di minimo globale(solo nella programmazione convessa) :
Sia $\bar{x}$ un punto di minimo locale, ovvero tale che $\exists\ \varepsilon>0 : f(\bar{x}) \leq f(x)\ \forall x\ \varepsilon\ X: ||x-\bar{x}||<\varepsilon$. Sia y ε X una generica soluzione ammissibile. Dalla convessità di x discende il fatto che $\forall \lambda\ \varepsilon\ [0,1]$ il punto $z=\lambda\bar{x}+(1-\lambda)y\ \varepsilon\ X$.
E' sempre possibile scegliere un valore di x sufficientemente vicino a 1 tale che sia verificata la condizione $||z-\bar{x}||<\varepsilon$, il che implica $f(\bar{x}) \leq f(x)$, la convessità di f implica: $f(z) \leq \lambda f(\bar{x})+(1-\lambda)f(y)$.
Unita alla precedente: $f(\bar{x}) \leq \lambda f(\bar{x})+(1-\lambda)f(y)$. Portando $\lambda f(\bar{x})$ a primo membro e dividendo per $(1-\lambda)$ segue la tesi.