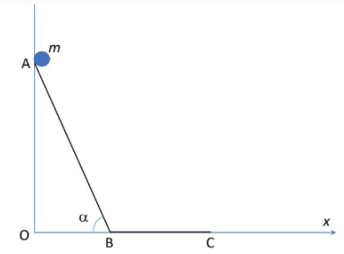
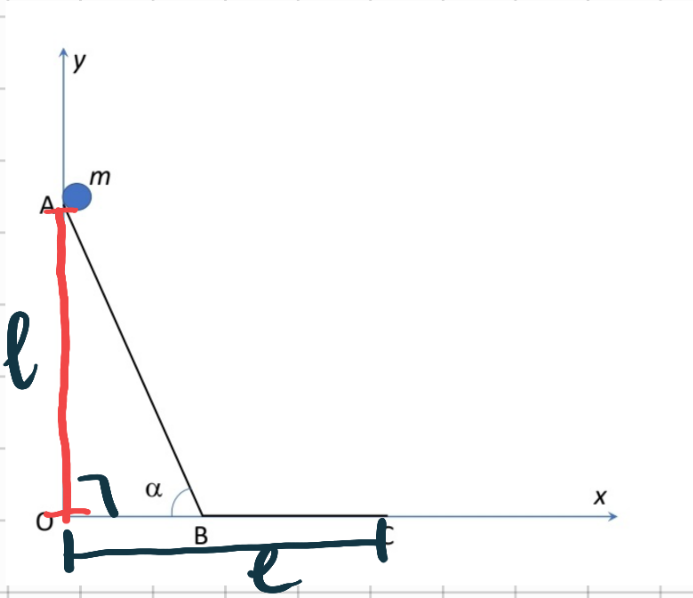
1. Un punto materiale di massa m viene lasciato scivolare da fermo dal punto A lungo un piano inclinato con angolo di inclinazione α come indicato in figura, per poi continuare a partire dal punto B il suo moto lungo un supporto orizzontale. Nell'potesi in cui sia il piano inclinato che il supporto orizzontale siano entrambi scabri con coefficiente di attrito dinamico $0 < \mu < 1$ e che i due segmenti OA e OC siano di uguale lunghezza l, calcolare la velocità di arrivo nel punto C in funzione di α per $\pi/4 \leq \alpha < \pi/2$.



$$\Delta E_M = L_{NC}$$

$$E_{M_a} = mgh_A$$

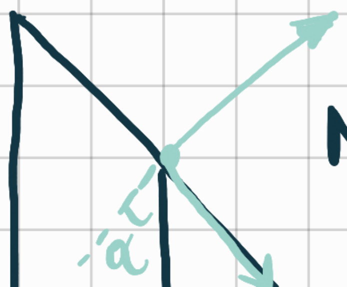
$$E_{M_B} = \frac{1}{2} m v_B^2$$



$$OB = l \cos\alpha$$

$$AB = l \operatorname{cotg}\alpha$$

$$L_{NC} = F \cdot s \cdot \cos\alpha = \mu N \cdot AB \cos 180$$
$$= -\mu N \cdot AB$$
$$= -\mu mg \cos\alpha \, AB$$



$$N = mg\cos\alpha$$

$$\frac{1}{2}\cancel{m}v_B^2 - \cancel{m}g\,l - \mu m g\cos\alpha\, AB$$

$$v_B^2 = 2\left(g\,l - \mu \cancel{m} g\cos\alpha\,\frac{l}{\sin\alpha}\right)$$

$$v_B^2 = 2gl(1-\mu g\,\text{cotg}\,\alpha)$$

$$\frac{1}{2}\cancel{m}v_C^2 - \frac{1}{2}\cancel{m}v_B^2 = -\mu m g\, BC$$

$$v_C^2 = -2\mu g BC + v_B^2$$

$$v_C^2 = -2\mu g BC + 2gl(1-\mu g\,\text{cotg}\,\alpha)$$

$$BC = OC - OB$$

$$BC = l - l\,\text{cotg} = l(1-\text{cotg}\,\alpha)$$

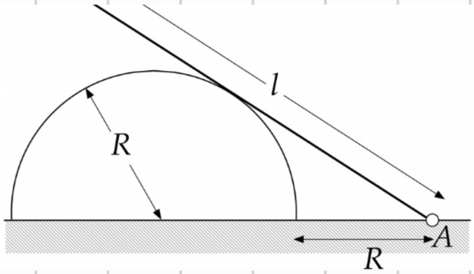
$$v_C^2 = -2\mu g\, l(1-\text{cotg}\,\alpha) + 2gl(1-\mu\,\text{cotg}\,\alpha)$$

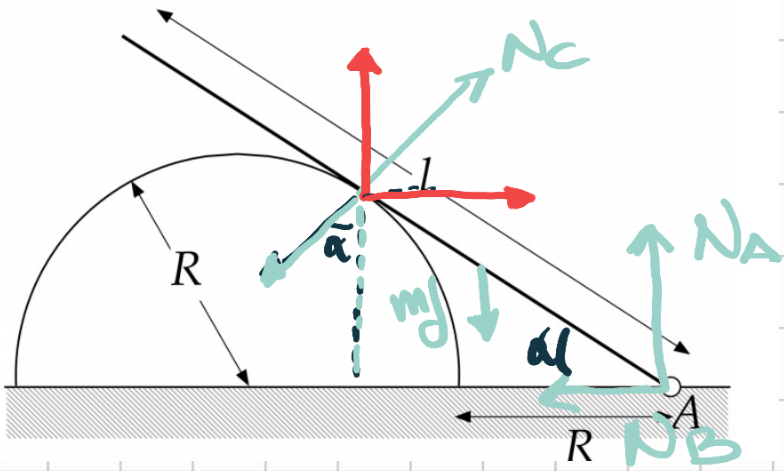
$$v_C^2 = -2\mu g\,l(1-\cot g\,\alpha) + 2gl(1-\mu g \cot g\,\alpha)$$

$$= -2\mu g l + \cancel{2\mu g l \cot g\,\alpha} + 2gl - \cancel{2\mu g \cot g\,\alpha}$$

$$= -2\mu g l + 2gl = 2gl(1-\mu)$$

2. Un'asta omogenea di lunghezza $l = 30$ cm e peso di 4 N è incernierata per l'estremo A a un pavimento orizzontale e appoggiata su una superficie semicilindrica (raggio $R = 10$ cm) perfettamente liscia saldata al pavimento, come mostrato in figura. Sapendo che la distanza tra il centro del semicilindro e la cerniera è pari a 20 cm, calcolare le reazioni vincolari agenti sull'asta.





$$N_{C_x} = N_C \sin 30$$

$$N_{C_y} = N_C \cos 30$$

CALCOLO α

$$h = 2R \sin\alpha$$

$$\frac{R}{\;} = \sin\alpha$$

$$\frac{\quad}{2R}$$

$0.5 = \sin\alpha$

$\alpha = 30°$

lungo x

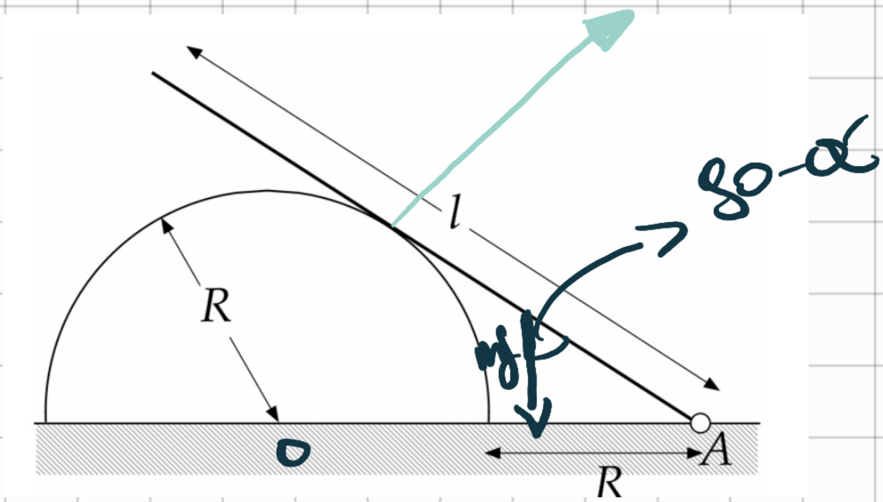
$-N_B + N_C \sin 30 = 0$

$N_B = N_C \sin 30$

lungo y

$-mg + N_C \cos 30 + N_A = 0$

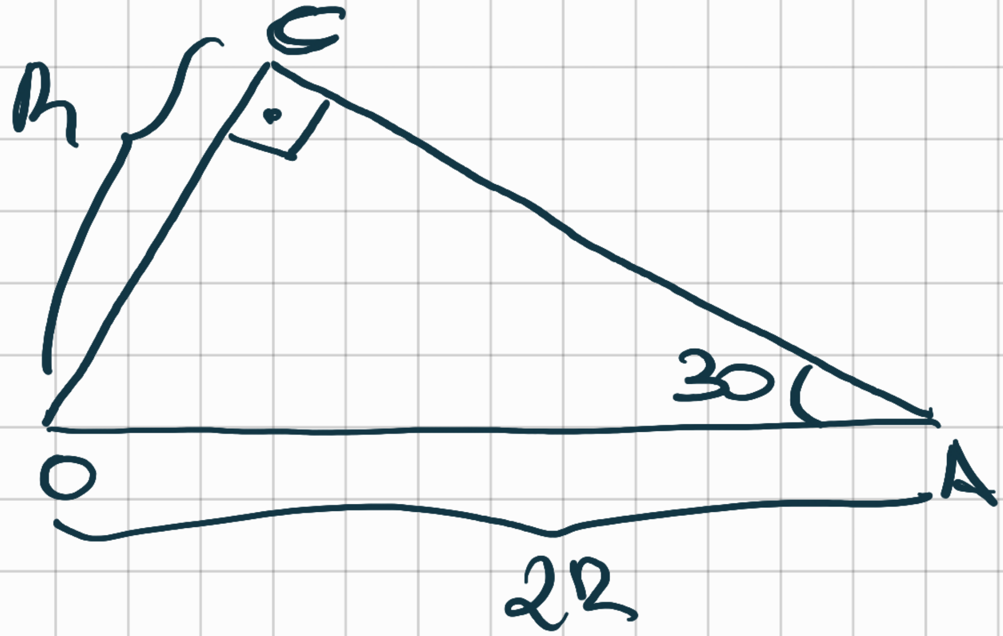
CALCOLO MOMENTI (A)



$M_{mg} = mg \frac{l}{2} \sin(90 - \alpha)$

$= mg\, l/_2 \cos\alpha$

$M_{N_C} = N_C\, AC \sin 90$



$OA^2 = CA^2 + CO^2$

$CA^2 = OA^2 - CO^2$

$CA = \sqrt{OA^2 - CO^2}$

$= \sqrt{4R^2 - R^2} = \sqrt{3R^2}$

$= R\sqrt{3}$

$l = 3R$

$M_{N_C} = N_C\, R\sqrt{3}$

$$N_C R\sqrt{3} = mg\,\ell/2\,\cos\alpha$$

$$N_C = mg\,\frac{3\cancel{R}}{2}\cos\alpha\,\frac{1}{\cancel{R}\sqrt{3}} = 3$$

$$N_B = N_C \sin\alpha$$

$$N_B = mg\,\frac{3}{2}\cos\alpha\,\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\sin\alpha \qquad \cos\alpha \to \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= mg\,\frac{3}{2}\,\frac{\cancel{\sqrt{3}}}{2}\cdot\frac{1}{\cancel{\sqrt{3}}} = \frac{3}{4}\,mg$$

$$= 3\sin\alpha = 1.5\ N$$

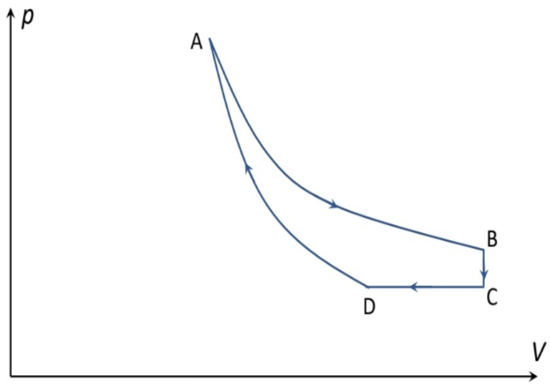
$$-mg + N_C\cos 30 + N_A = 0$$

$$N_A = -N_C\cos 30 + mg$$

$$N_A = -3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + mg = -2.59 + 4$$

$$= 1{,}41\ N$$

3. Un gas perfetto esegue il ciclo $ABCDA$ reversibile indicato in figura, il quale si compone delle seguenti trasformazioni: (i) da A a B il gas espande in maniera isoterma con $V_B = 2V_A$; (ii) da B a C il gas compie una trasformazione isocora con $P_C = 0.9\ P_B$; (iii) da C a D il gas esegue una trasformazione isobara; (iv) da D ad A il gas esegue una trasformazione adiabatica. Calcolare i rendimenti del ciclo termodinamico nei due casi di gas monoatomico e di gas biatomico.



$$Q_{AB} = n c_V \ln \frac{V_B}{V_A} = n c_V \ln 2$$

$$Q_{BC} = n c_V \Delta T = n c_V (T_C - T_B)$$

$$P_B V_B = nRT_B \qquad T_B = T_A$$

$$P_C V_C = nRT_C \qquad V_C = V_B$$

$$\frac{P_B}{P_C} = \frac{T_B}{T_C} \qquad P_C = 0.9 P_B$$

$$\frac{P_A V_A}{NR} = NRT_A$$

$$P_B V_B = NRT_A \Rightarrow$$

$$P_B V_B = \cancel{NR} \frac{P_A V_A}{\cancel{NR}} \Rightarrow P_B V_B = P_A V_A$$

$$\frac{P_B V_B}{\ } = 1$$

$P_A V_A$

$$P_B = \frac{P_A}{2}$$

$$\frac{P_B}{P_A} = \frac{V_A}{V_B} = 1/2$$

$$P_C = 0.9 P_B \Rightarrow P_C = \frac{0.9}{2} P_A = 0.45 P_A$$

$$\frac{P_B}{P_C} = \frac{T_B}{T_C} \Rightarrow \frac{\cancel{P_A}}{2} \cdot \frac{1}{0.45 \cancel{P_A}} = \frac{T_B}{T_C}$$

$$\frac{1}{0{,}9} = \frac{T_B}{T_C} \Rightarrow T_B = \frac{T_C}{0.9}$$

$$0{,}9 T_B = T_C$$

$$T_B = T_A \Rightarrow T_C = 0{,}9 T_A$$

$$Q_{BC} = n c_v \Delta T = n c_v (T_C - T_B)$$

$$= n c_v (0{,}9 T_A - T_A)$$

$$= n c_v (-0{,}1)$$

$$Q_{CD} = n c_p \Delta T$$

$$= n c_p (T_D - T_C)$$

$$P_C = P_D$$

$$P_C V_C = NRT_C$$

$$P_D V_D = NRT_D$$

$$\Rightarrow \frac{V_C}{V_D} = \frac{T_C}{T_D}$$

ADIABATICA D-A

$$P_A V_A^{\gamma} = P_D V_D^{\gamma}$$

$$V_D^{\gamma} = \frac{P_A}{P_D} V_A^{\gamma}$$

$$V_B = 2V_A$$

$$V_D = \left(\frac{P_A}{P_D}\right)^{1/\gamma} V_A$$

$$P_D = P_C = 0.45 P_A$$

$$V_D = \left(\frac{P_A}{0.45 P_A}\right)^{1/\gamma} V_A \Rightarrow 1.61 V_A$$

$$\frac{5}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$$

MONOATOMICO

$$\frac{V_C}{V_D} = \frac{T_C}{T_D} \qquad \frac{V_B}{V_D} = \frac{T_C}{T_D} =$$

$$\frac{2V_A}{1.61 V_A} = \frac{T_C}{T_D}$$

$$1{,}24 = \frac{T_C}{T_D}$$

$$T_C = 1.24\, T_D$$

$$T_C = 0{,}9\, T_A$$

$$T_D = \frac{T_C}{1.24} \qquad T_D = 0.72\, T_A$$

$$Q_{CD} = n c_p \Delta T =$$

$$= n c_p (T_D - T_C)$$

$$= n c_p (0.72 T_A - 0{,}9 T_A)$$

$$= ncp(-0,18T_A)$$

$$\eta = 1 - \frac{Q_{CED}}{Q_{ASS}}$$

$$Q_{CED} = |ncp(-0.18T_A) + ncv(-0.1T_A)|$$

$$Q_{ASS} = ncv \ln 2$$

$$\frac{ncp0.18\cancel{T_A} + ncv0.1\cancel{T_A}}{nR\ln 2\cancel{T_A}}$$

$$\frac{\cancel{n}\frac{5}{2}\cancel{R}0.18 + \cancel{n}\frac{3}{2}\cancel{R}0.1}{n\cancel{R}\ln 2}$$

$$\frac{0.45 + 0.15}{0,7} = \frac{0.6}{0,7} = 0.85$$

$$\eta = 1 - 0.85 = 0.142\,\%$$