# Capitolo 4

# Metodi

## 4.1 Introduzione

Questo capitolo affronta lo sviluppo degli algoritmi di soluzione per i problemi descritti nei capitoli precedenti basandosi sulle proprietà dimostrate nei capitoli 2 e 3. In particolare, nel §4.2 viene descritto l'*algoritmo di Gauss-Jordan* per la diagonalizzazione di una matrice e il suo componente fondamentale noto come *operazione di pivot*, quest'ultima è anche il mattone fondamentale di molti algoritmi, tra cui l'algoritmo del simplesso descritto in §4.4. In §4.3 viene descritto il *metodo di eliminazione di Fourier-Motzkin* e la sua applicazione come metodo alternativo al metodo del simplesso per la soluzione di problemi di programmazione lineare. In §4.5 viene descritta una versione specializzata del metodo del simplesso, che prende il nome di *simplesso su reti*, per la soluzione di problemi di flusso di costo minimo.

## 4.2 Algoritmo di Gauss-Jordan

L'algoritmo di Gauss-Jordan, così detto dai matematici tedeschi Carl Friedrich Gauss (30 aprile 1777 — 23 febbraio 1855) e Wilhelm Jordan (1 marzo 1842 — 17 aprile 1899), consente di trasformare una matrice quadrata non singolare $(m \times m)$ in un matrice identità $I \in \Re^{(m \times m)}$. L'idea è di effettuare la trasformazione una colonna alla volta, arrestando il calcolo qualora si dimostri che la matrice data è singolare. Il metodo può applicarsi anche a $m$ colonne di una matrice $A$ rettangolare $(m \times n)$, $n \geq m$, restituendo la matrice $A$ premoltiplicata per l'inversa della matrice formata dalle $m$ colonne scelte.

### 4.2.1 Descrizione del metodo

L'operazione in grado di trasformare la colonna $j$ di una matrice $A$ nella colonna $h$ della matrice identità si dice *operazione di pivot* sull'elemento $a_{hj} \neq 0$ della matrice $A$, ed è riportata in figura 4.1.

**Procedure** $pivot(a_{hj})$
  **begin**
    **for**$(i = 1, \ldots, m)$ **and** $(i \neq h)$ **do**
      **begin**
        $a_i^T := a_i^T - \frac{a_{ij}}{a_{hj}} a_h^T$;
      **end**
    $a_h^T := \frac{1}{a_{hj}} a_h^T$;
  **end**

**Figura 4.1:** Operazione di pivot sull'elemento in riga $h$ e colonna $j$

In pratica l'ultima istruzione rende uguale a 1 l'elemento in riga $h$ colonna $j$ di $A$ mentre l'istruzione **for** annulla tutti i coefficienti della colonna $j$ ad eccezione dell'$h$-esimo. L'algoritmo di Gauss-Jordan consiste nell'applicare l'operazione di pivot $m$ volte scegliendo $m$ righe e $m$ colonne di $A$. In particolare, se all'iterazione $i$ si effettua il pivot sull'elemento in riga $i$ e colonna $i$, allora le prime $m$ colonne di $A$ si trasformano nella matrice identità.

**Procedure** *Gauss-Jordan*$(A)$
  **begin**
    **for**$(i = 1, \ldots, m)$ **do**
      **begin**
        **if** $a_{ii} = 0$
        **then begin**
          **if** $\exists\ h > i : a_{hi} \neq 0$
          **then** scambia riga $h$ con riga $i$
          **else** STOP, colonna $i$ linearmente dipendente dalle prime $i - 1$ colonne;
          **end**
        $pivot(a_{ii})$;
      **end**
  **end**

**Figura 4.2:** Algoritmo di Gauss-Jordan

### 4.2.2 Applicazioni

Il metodo nasce essenzialmente per risolvere sistemi di equazioni lineari e per il calcolo dell'inversa di una matrice quadrata.

Dato un sistema di $m$ equazioni in $n \geq m$ incognite $Ax = b$, l'algoritmo di Figura 4.2 applicato alla matrice $[A \quad b]$ esplicita le $m$ equazioni rispetto alle prime $m$ variabili oppure trova una colonna linearmente dipendente dalle precedenti. Quest'ultimo caso si può verificare se all'$i$-esima iterazione risulta $a_{hi} = 0,\ h = i, \ldots, m$. Poiché per la $k$-esima delle prime $i-1$ colonne si ha $a_{kk} = 1$ e $a_{jk} = 0$ per $j \neq k$, risulta evidentemente:

$$A_i = \sum_{k=1}^{i-1} a_{ki} A_k.$$

Se invece l'algoritmo esegue $m$ operazioni di pivot fornendo come risultato la matrice $[\overline{A} \quad \overline{b}]$, il sistema si può riscrivere come:

$$\begin{cases} x_1 & & & + & \overline{a}_{1(m+1)} + & \ldots + & \overline{a}_{1n} & = & \overline{b}_1 \\ & x_2 & & + & \overline{a}_{2(m+1)} + & \ldots + & \overline{a}_{2n} & = & \overline{b}_2 \\ & & \ddots & + & \vdots \quad + & \ldots + & \vdots & = & \vdots \\ & & & x_m + & \overline{a}_{m(m+1)} + & \ldots + & \overline{a}_{mn} & = & \overline{b}_m \end{cases}$$

da cui è immediato trovare una soluzione fissando liberamente le variabili (dette *indipendenti*) $x_{m+1} \ldots x_n$ e ottenendo di conseguenza il valore delle variabili (dipendenti) $x_1 \ldots x_m$.

Il calcolo dell'inversa di una matrice quadrata $A \in \Re^{(m \times m)}$ si può effettuare invece applicando l'algoritmo di Figura 4.2 alla matrice $(m \times 2m)$: $[A \quad I]$, dove $I$ è la matrice identità $(m \times m)$. Poiché il metodo restituisce la matrice $[A \quad I]$ premoltiplicata per l'inversa di $A$, troveremo la matrice $A^{-1}$ nelle ultime $m$ colonne della matrice risultante, cioè

$$[A \quad I] \Rightarrow [I \quad A^{-1}].$$

## 4.3 Algoritmo di Fourier-Motzkin

Il *metodo di eliminazione* di Fourier-Motzkin, così detto dai matematici Joseph Fourier (21 marzo 1768 — 16 maggio 1830) and Theodore Samuel Motzkin (26 marzo 1908 — 15 dicembre 1970), stabilisce un'equivalenza tra un sistema di disequazioni in $n$ variabili $x_1, \ldots, x_n$ e un sistema di disequazioni in $n-1$ variabili ottenuto per *proiezione* o *eliminazione* della variabile $x_j$. In particolare, se il primo sistema ammette soluzione

$x_1, \ldots, x_n$ il secondo ammette soluzione $x_1, \ldots x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n$ e se il secondo sistema ammette soluzione $x_1, \ldots x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n$ allora esiste un valore $\bar{x}_j$ tale che il primo sistema ammette soluzione $x_1, \ldots x_{j-1}, \bar{x}_j, x_{j+1}, \ldots, x_n$. Il metodo nasce per risolvere sistemi di disequazioni attraverso la proiezione in successione di tutte le variabili tranne una, ottenendo così un sistema di una sola variabile che può essere risolto per ispezione. Tuttavia, il metodo può essere facilmente adattato per risolvere un problema di PL.

### 4.3.1 Descrizione del metodo

Dato un sistema di $m$ disequazioni in $n$ variabili, possiamo distinguere due casi significativi:

1. il sistema contiene l'equazione $h$-esima in cui il coefficiente della variabile $x_j$ è diverso da zero, è quindi possibile riscrivere l'equazione come $x_j = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} a_{hi} x_i$. In questo caso è possibile proiettare $x_j$ *per sostituzione*, cioè eliminando dal sistema l'equazione $h$-esima e sostituendo tutte le occorrenze di $x_j$ nelle altre $m-1$ disequazioni con l'espressione $\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} a_{hi} x_i$.

2. la variabile $x_j$ appare con coefficiente diverso da zero solo nelle disequazioni proprie del sistema. In questo caso dobbiamo raggruppare le $m$ disequazioni in tre gruppi. Il primo gruppo contiene le $m_1$ disequazioni del tipo: $x_j \leq \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} a_{hi} x_i$, per $h = 1, \ldots, m_1$. Il secondo gruppo contiene le $m_2$ disequazioni del tipo: $x_j \geq \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} a_{ki} x_i$, per $k = m_1 + 1, \ldots, m_1 + m_2$. Il terzo gruppo contiene le $m - m_1 - m_2$ disequazioni del tipo: $\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} a_{hi} x_i \geq 0$, per $h = m_1 + m_2 + 1, \ldots, m$. Si noti che eventuali equazioni presenti nel sistema sono confinate al terzo gruppo di disequazioni. Il sistema proiettato in $n-1$ variabili è il seguente:

$$\begin{cases} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} a_{hi} x_i \geq \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} a_{ki} x_i & \forall h = 1, \ldots, m_1; k = m_1 + 1, \ldots, m_1 + m_2 \\ \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} a_{hi} x_i \geq 0 & h = m_1 + m_2 + 1, \ldots, m. \end{cases}$$

Il sistema risultante è quindi composto da $m_1 \cdot m_2 + (m - m_1 - m_2)$ disequazioni. Quindi nel caso in cui $m_1 = 0$ oppure $m_2 = 0$ il sistema proiettato conterrà solo le $(m - m_1 - m_2)$ disequazioni del terzo gruppo.

### 4.3.2 Applicazioni

Il metodo di eliminazione consente di risolvere un sistema di disequazioni eliminando progressivamente tutte le variabili tranne una (diciamo $x_1$), pervenendo quindi a un sistema di disequazioni finale del tipo

$$\begin{cases} x_1 \leq a_1 \\ x_1 \geq a_2 \end{cases}$$

che può essere risolto per ispezione. Se $a_2 > a_1$ il sistema finale è incompatibile, e quindi lo è anche il sistema iniziale. Se invece $a_2 \leq a_1$, qualsiasi soluzione $a_1 \geq x_1 \geq a_2$ è ammissibile. Qualsiasi soluzione del sistema iniziale si ottiene scegliendo un valore $\bar{x}_1$ nell'intervallo $[a_2, a_1]$. Quindi si sostituisce $x_1 = \bar{x}_1$ nel sistema in due variabili del passo precedente, che così diventa un sistema in un'unica variabile e può essere risolto per ispezione. Procedendo all'indietro si arriva a trovare una soluzione per la prima variabile proiettata e quindi per il sistema iniziale. Per esempio, si vuole risolvere il sistema:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 \geq 5 \\ x_1 + 2x_2 = 3 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 6 \\ x_1 + x_3 \geq 1 \end{cases}$$

Vogliamo proiettare, per esempio, la variabile $x_3$. In questo caso il primo gruppo contiene la sola disequazione $x_3 \leq 3 - \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2$, il secondo gruppo contiene le due disequazioni $x_3 \geq 5 - 2x_1 + 3x_2$ e $x_3 \geq 1 - x_1$, mentre il terzo gruppo contiene l'equazione $x_1 + 2x_2 = 3$. Riscriviamo quindi il sistema come segue:

$$\begin{cases} x_3 \leq 3 - \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 \\ x_3 \geq 5 - 2x_1 + 3x_2 \\ x_3 \geq 1 - x_1 \\ x_1 + 2x_2 = 3 \end{cases}$$

Il sistema proiettato diventa:

$$\begin{cases} 5 - 2x_1 + 3x_2 \leq 3 - \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 \\ 1 - x_1 \leq 3 - \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 \\ x_1 + 2x_2 = 3 \end{cases}$$

A questo punto proiettiamo $x_2$, che può essere proiettata per sostituzione ponendo $x_2 = \frac{1}{2}(3 - x_1)$, ottenendo il sistema proiettato:

$$\begin{cases} \frac{3}{2}x_1 - \frac{5}{2}\left[\frac{1}{2}(3 - x_1)\right] \geq 2 \\ \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(3 - x_1)\right] \geq -2 \end{cases}$$

che riscritto diventa:

$$\begin{cases} x_1 \geq \frac{23}{11} \\ x_1 \geq -11 \end{cases}$$

che ammette le infinite soluzioni $x_1 \geq \frac{23}{11}$. Scegliendone una qualsiasi, per esempio $x_1 = 3$ si ottiene dal passo precedente: $x_2 = \frac{1}{2}(3 - x_1) = 0$ e ancora dal sistema orginale:

$$\begin{cases} 2 \cdot 3 - 3 \cdot 0 + x_3 \geq 5 \\ 3 + 2 \cdot 0 = 3 \\ 3 - 0 + 2x_3 \leq 6 \\ 3 + x_3 \geq 1 \end{cases}$$

Questo sistema ammette soluzioni per $x_3 \in [-1, \frac{1}{2}]$. Se scegliamo $x_3 = 0$, una soluzione del sistema dato è:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Il metodo di eliminazione di Fourier-Motzkin si pu adattare facilmente alla soluzione di un problema di PL del tipo $\min\{c^T x : Ax \geq b\}$. Allo scopo è sufficiente preservare il costo di una soluzione ad ogni operazione di proiezione, in modo tale che il minimo del problema originale coincida con quello del problema proiettato. Il modo più semplice per ottenere questo risultato è di proiettare una variabile $x_j$ con costo $c_j = 0$, per cui il costo di una qualsiasi soluzione del sistema proiettato sia uguale a quello delle corrispondenti soluzioni del problema originale. Se la funzione obiettivo ha tutti costi diversi da zero si può sempre riscrivere il sistema utilizzando una variabile di appoggio $z$, pari al valore della funzione obiettivo, e risolvendo il problema:

$$\begin{array}{ll} \min & z \\ & \begin{cases} z = c^T x \\ Ax \geq b \end{cases} \end{array}$$

A questo punto si procede proiettando tutte le variabili orginali $x_1 \dots x_n$, restando così con un problema nella sola variabile $z$, del tipo:

$$\begin{array}{ll} \min & z \\ & \begin{cases} z \leq a_1 \\ z \geq a_2 \end{cases} \end{array}$$

Se $a_2 > a_1$ il problema finale è inammissibile, e quindi lo è anche il problema iniziale. Se invece $a_2 \leq a_1$, la soluzione ottima del problema finale è $z^* = a_2$, che è anche l'ottimo del problema iniziale. La soluzione ottima $x^*$ del problema iniziale si ottiene una variabile alla volta in ordine inverso rispetto all'ordine di proiezione, come per i sistemi di disequazioni. Per esempio, si vuole risolvere il problema:

$$\begin{aligned} \min \quad & 2x_1 - 3x_2 \\ & \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 \geq 3 \\ x_1 - 2x_2 \geq 4 \\ x_1 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Allo scopo, introduciamo la variabile $z = 2x1 - 3x2$:

$$\begin{aligned} \min \quad & z \\ & \begin{cases} z = 2x_1 - 3x_2 \\ 4x_1 + 2x_2 \geq 3 \\ x_1 - 2x_2 \geq 4 \\ x_1 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Proiettiamo $x_2$ per sostituzione: $x_2 = \frac{1}{3}(2x_1 - z)$. Si ottiene:

$$\begin{aligned} \min \quad & z \\ & \begin{cases} 4x_1 + 2\frac{1}{3}(2x_1 - z) \geq 3 \\ x_1 - 2\frac{1}{3}(2x_1 - z) \geq 4 \\ x_1 \geq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \min \quad & z \\ & \begin{cases} x_1 \leq 2z - 12 \\ x_1 \geq \frac{9}{16} + \frac{1}{8}z \\ x_1 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Proiettiamo $x_1$. Si ottiene:

$$\begin{aligned} \min \quad & z \\ & \begin{cases} 2z - 12 \geq \frac{9}{16} + \frac{1}{8}z \\ 2z - 12 \geq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \min \quad & z \\ & \begin{cases} z \geq \frac{201}{30} = 6,7 \\ z \geq 6 \end{cases} \end{aligned}$$

Che ammette soluzione ottima $z^* = 6,7$. Tornando indietro si ottiene

$$\begin{cases} x_1^* \leq 2 \cdot 6,7 - 12 = 1,4 \\ x_1^* \geq \frac{9}{16} + \frac{1}{8} \cdot 6,7 = 1,4 \\ x_1^* \geq 0 \end{cases}$$

Che ammette l'unica soluzione $x_1^* = 1,4$.
Tornando indietro si ottiene $x_2^* = \frac{1}{3}(2 \cdot 1,4 - 6,7) = -1,3$.
Quindi la soluzione ottima del problema è unica e vale:

$$\begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,4 \\ -1,3 \end{pmatrix}$$