Antonio Fuduli

Appunti del corso di

RICERCA OPERATIVA

3. L'algoritmo del Simplesso

25 maggio 2006

Lezione 3

L'algoritmo del Simplesso

Il Simplesso risolve problemi di Programmazione Lineare in forma standard, ricercando (se esiste) una soluzione ottima fra le soluzioni ammissibili di base. Il problema a cui, da ora in avanti, faremo riferimento è il seguente:

$$P_s \begin{cases} \min\limits_x \quad z = & c^T x & \\ & Ax & = b \\ & x & \geq 0 \end{cases},$$

con $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $rg(A) = m < n$.

Riduzione alla forma standard

1. $\max\limits_x c^T x \Leftrightarrow -\min\limits_x -c^T x$;

2. $a_i^T x \geq b_i$. Si aggiunge una variabile ausiliaria $x_{n+1} \geq 0$ (variabile di surplus) e si riscrive il vincolo nel seguente modo:
$$a_i^T x - x_{n+1} = b_i;$$

3. $a_i^T x \leq b_i$. Si aggiunge una variabile ausiliaria $x_{n+1} \geq 0$ (variabile slack) e si riscrive il vincolo nel seguente modo:
$$a_i^T x + x_{n+1} = b_i;$$

4. $x_j \gtreqless 0$. Si pone $x_j = x_j^+ - x_j^-$ (con $x_j^+ \geq 0$ e $x_j^- \geq 0$), sostituendo poi opportunamente nella funzione obiettivo e nei vincoli.

Soluzioni di base

Definizione 3.1 (Matrice di base). Una matrice di base per P_s (o semplicemente base) è una sottomatrice $B \in \mathbb{R}^{m\times m}$ di A invertibile.

Definizione 3.2 (Soluzione di base). Un punto $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ è una soluzione di base per P_s se esiste una matrice di base B, tale che $\bar{x}$ possa essere scritto nel seguente modo:

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} \bar{x}_B = B^{-1}b \\ \bar{x}_N = 0 \end{bmatrix}.$$

Il vettore $\bar{x}_B$ contiene le componenti "in base" di $\bar{x}$, mentre il vettore $\bar{x}_N$ contiene le componenti "fuori base" di $\bar{x}$.

Nota 3.3. Una soluzione di base $\bar{x}$ soddisfa sempre il sistema di vincoli $Ax = b$.

Dim.
Nota la matrice B, A può essere riscritta nel seguente modo:

$$A = [B\ N].$$

Quindi.

$$A\bar{x} = [B\ N] \begin{bmatrix} \bar{x}_B \\ \bar{x}_N \end{bmatrix} = B\bar{x}_B + N\bar{x}_N = BB^{-1}b + N \cdot 0 = b.$$

■

Definizione 3.4 (Soluzione di base ammissibile). Una soluzione di base

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} \bar{x}_B = B^{-1}b \\ \bar{x}_N = 0 \end{bmatrix}$$

è ammissibile per P_s se $\bar{x}_B \geq 0$.

Nota 3.5. Poichè una soluzione di base è definita in corrispondenza di una data matrice di base B, il numero di soluzioni di base per P_s è pari al massimo a:

$$\begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix} = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Un altro possibile modo per definire una soluzione di base è il seguente.

Definizione 3.6 (Soluzione di base). Un punto $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ è una soluzione di base per P_s se verifica le seguenti due condizioni:

- $A\bar{x} = b$;
- le colonne di A corrispondenti alle componenti non nulle di $\bar{x}$ sono linearmente indipendenti.

Nota 3.7. Tenendo conto che $rg(A) = m$, dalla definizione 3.6 discende la seguente implicazione:

$\bar{x}$ è una soluzione di base per $P_s \Rightarrow \bar{x}$ contiene al massimo m componenti non nulle.

Teorema 3.8. Sia X la regione ammissibile di P_s. Un punto $\bar{x}$ è una soluzione ammissibile di base per P_s se e solo se $\bar{x}$ è un punto estremo di X.

Teorema 3.9 (Teorema fondamentale della Programmazione Lineare).

1. Se esiste una soluzione ammissibile per P_s, allora esiste almeno una soluzione ammissibile di base per P_s;
2. se esiste una soluzione ottima per P_s, allora esiste almeno una soluzione ottima di base per P_s.

Il metodo del Simplesso

- Determina una soluzione ammissibile di base iniziale per P_s;
- verifica l'ottimalità della soluzione di base corrente;
- calcola una nuova soluzione di base "non peggiore" della precedente, a partire da quella corrente.

Ottimalità di una soluzione di base

Sia

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} \bar{x}_B = B^{-1}b \\ \bar{x}_N = 0 \end{bmatrix} \geq 0$$

una soluzione ammissibile di base per P_s. Il punto $\bar{x}$ è una soluzione ottima per P_s se:

$$\underbrace{c^T\bar{x}}_{\bar{z}} \leq \underbrace{c^T x}_{z} \quad \text{per ogni } x \in X.$$

Il vettore dei costi c può essere partizionato secondo le componenti in base e fuori base di $\bar{x}$, nel seguente modo:

$$c^T = [c_B^T \; c_N^T],$$

da cui segue che

$$\bar{z} = c^T \bar{x} = [c_B^T \; c_N^T] \begin{bmatrix} \bar{x}_B \\ \bar{x}_N \end{bmatrix} = c_B^T B^{-1} b + c_N^T 0 = c_B^T B^{-1} b.$$

Ora, sia $x \in X$ un qualsiasi punto ammissibile per P_s, in corrispondenza del quale quindi $Ax = b$. Partizionando la matrice A e il vettore x in funzione della matrice di base B corrispondente a $\bar{x}$, otteniamo:

$$A = [B \; N] \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix}.$$

Quindi:

$$Ax = b \;\Leftrightarrow\; [B \; N] \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} = b,$$

cioè:

$$Bx_B + Nx_N = b \;\Leftrightarrow\; x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N.$$

Quindi il punto x può essere riscritto nel seguente modo:

$$x = \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B^{-1}b - B^{-1}Nx_N \\ x_N \end{bmatrix}.$$

Adesso possiamo calcolare il valore z di f.o. in x; otteniamo:

$$\begin{aligned} z \; &= c^T x = [c_B^T \; c_N^T] \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} = \\ &= [c_B^T \; c_N^T] \begin{bmatrix} B^{-1}b - B^{-1}Nx_N \\ x_N \end{bmatrix} = \\ &= \underbrace{c_B^T B^{-1} b}_{\bar{z}} - c_B^T B^{-1} N x_N + c_N^T x_N = \bar{z} + \hat{c}_N^T x_N, \end{aligned}$$

dove il vettore $\hat{c}_N^T = c_N^T - c_B^T B^{-1} N$ è detto vettore dei costi ridotti fuori base (cioè corrispondente alle componenti fuori base di $\bar{x}$). Vale allora il seguente teorema.

Teorema 3.10. Sia

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} \bar{x}_B = B^{-1}b \\ \bar{x}_N = 0 \end{bmatrix} \geq 0$$

una soluzione ammissibile di base per P_s. Se $\hat{c}_N^T \geq 0$, allora il punto $\bar{x}$ è una soluzione ottima per P_s.

Dim.
Tenendo conto che $z = \bar{z} + \hat{c}_N^T x_N$ e $x_N \geq 0$, quando $\hat{c}_N^T \geq 0$, si ha $z \geq \bar{z}$. ■

Nota 3.11. In analogia con la definizione del vettore $\hat{c}_N^T$ dei costi ridotti fuori base, il vettore $\hat{c}_B^T$ dei costi ridotti in base è definito nel seguente modo:

$$\hat{c}_B^T = c_B^T - c_B^T B^{-1} B,$$

da cui segue che $\hat{c}_B^T = 0^T$.

Nota 3.12. Tenendo conto della nota 3.11, si vede facilmente che il criterio di ottimalità del simplesso, espresso dal teorema 3.10, è anche scrivibile come $\hat{c}^T \geq 0$, dove con $\hat{c}^T$ indichiamo il seguente vettore:

$$\hat{c}^T = [\hat{c}_B^T \;\; \hat{c}_N^T].$$

Calcolo di una nuova soluzione di base ammissibile

Sia

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} \bar{x}_B = B^{-1}b \\ \bar{x}_N = 0 \end{bmatrix} \geq 0$$

una soluzione ammissibile di base, non ottima per P_s.

- Obiettivo: determinare, a partire da $\bar{x}$, una nuova soluzione di base x ammissibile per P_s e "migliore" di $\bar{x}$;
- siano β e $\mathcal{N}$ gli insiemi degli indici di base e degli indici fuori base, corrispondenti a $\bar{x}$;
- se $\bar{x}$ non è una soluzione ottima, esiste un indice $j \in \{1, \ldots, n-m\}$ tale che $\hat{c}_{\mathcal{N}(j)} < 0$;
- poichè il nuovo punto x deve soddisfare i vincoli $Ax = b$, esso può essere scritto nel seguente modo:

  $$x = \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B^{-1}b - B^{-1}Nx_N \\ x_N \end{bmatrix},$$

  dove tutte le quantità sono note, ad eccezione del vettore x_N,

- nel passare dal punto corrente $\bar{x}$ al nuovo punto x, si vuole fare in modo che x_N assuma la seguente forma:
$$x_N = e_j \delta_j,$$
dove $e_j \in \mathbb{R}^{n-m}$ è il vettore le cui componenti sono tutte nulle, ad eccezione della j-esima, che è pari a 1; δ_j invece è uno scalare positivo;

- a questo punto, il vettore x diventa:
$$x = \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B^{-1}b - B^{-1}Ne_j\delta_j \\ e_j\delta_j \end{bmatrix}$$
e, ponendo $d = B^{-1}Ne_j$,
$$x = \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{x}_B - \delta_j d \\ e_j\delta_j \end{bmatrix}$$

- δ_j viene scelto in maniera tale da migliorare il più possibile la funzione obiettivo di P_s e garantendo, nel contempo, l'ammissibilità del nuovo punto x. Poichè $z = \bar{z} + \hat{c}_N^T x_N$, sostituendo il valore di x_N, otteniamo:
$$z = \bar{z} + \hat{c}_N^T e_j \delta_j = \bar{z} + \hat{c}_{\mathcal{N}(j)}\delta_j, \tag{3.1}$$
da cui si vede che più alto è il valore di δ_j, più piccolo diventa il valore di z;

- per garantire l'ammissbilità del nuovo punto x, dobbiamo scegliere δ_j in modo da garantire che
$$x_{\beta(i)} \geq 0 \quad i = 1, \dots, m,$$
cioè
$$\bar{x}_{\beta(i)} - \delta_j d_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m. \tag{3.2}$$
Due casi possibili:

    1. $d \leq 0$: in tal caso tutte le disuguaglianze (3.2) sono soddisfatte, purchè δ_j sia positivo. Poichè si vuole fare in modo che δ_j sia il più grande possibile, allora $\delta_j = +\infty$; quindi, tenendo conto della (3.1), si ha $z = -\infty$. In tal caso quindi il problema P_s risulta illimitato;
    2. esiste almeno un indice i tale che $d_i > 0$. In tal caso si ha:
    $$\bar{x}_{\beta(i)} - \delta_j d_i \geq 0, \quad i \mid d_i > 0,$$
    cioè
    $$\delta_j \leq \frac{\bar{x}_{\beta(i)}}{d_i}, \quad i \mid d_i > 0,$$
    cioè
    $$\delta_j \leq \min_{i \mid d_i > 0} \frac{\bar{x}_{\beta(i)}}{d_i}. \tag{3.3}$$

Allora il valore più grande di δ_j, compatibile con la (3.3), è:

$$\bar{\delta}_j = \min_{i \mid d_i > 0} \frac{\bar{x}_{\beta(i)}}{d_i}; \tag{3.4}$$

Quindi l'espressione finale del nuovo punto x è:

$$x = \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{x}_B - \bar{\delta}_j d \\ e_j \bar{\delta}_j \end{bmatrix}$$

Nota 3.13. La variabile $x_{\mathcal{N}(j)}$, che in $\bar{x}$ era fuori base, nel nuovo punto entra in base con valore $\bar{\delta}_j$.

Nota 3.14. Sia $\bar{\imath}$ l'indice i in corrispondenza del quale si attesta il minimo nella (3.4); allora:

$$\bar{\delta}_j = \frac{\bar{x}_{\beta(\bar{\imath})}}{d_{\bar{\imath}}},$$

per cui:

$$x_{\beta(\bar{\imath})} = \bar{x}_{\beta(\bar{\imath})} - \bar{\delta}_j d_{\bar{\imath}} = \bar{x}_{\beta(\bar{\imath})} - \frac{\bar{x}_{\beta(\bar{\imath})}}{d_{\bar{\imath}}} d_{\bar{\imath}} = 0.$$

Quindi la variabile $x_{\beta(\bar{\imath})}$, che nel punto $\bar{x}$ era in base, nel nuovo punto esce dalla base.

Algoritmo del simplesso

1. Determina una soluzione ammissibile* di base
$$\bar{x} = \begin{bmatrix} \bar{x}_B = B^{-1}b \\ \bar{x}_N = 0 \end{bmatrix} \geq 0$$
iniziale per P_s;

2. calcola $\hat{c}_N^T = c_N^T - c_B^T B^{-1} N$. Se $\hat{c}_N^T \geq 0$, STOP: $x^* := \bar{x}$;

3. se $\hat{c}_N^T \ngeq 0$, sia $j \in \{1, \dots, n-m\}$ un indice tale che $\hat{c}_{\mathcal{N}(j)} < 0$; calcola $d = B^{-1} N e_j$; se $d \leq 0$, STOP: P_s è illimitato;

4. se $d \nleq 0$, calcola
$$\bar{\delta}_j = \min_{i \ | \ d_i > 0} \frac{\bar{x}_{\beta(i)}}{d_i}$$
e
$$x = \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{x}_B - \bar{\delta}_j d \\ e_j \bar{\delta}_j \end{bmatrix};$$

5. poni $\bar{x} := x$ e vai al passo 2.

*Si fa l'ipotesi che il problema sia ammissibile.

Tabella in forma canonica (tableau)

$$P_s \begin{cases} \min\limits_{x} & z = & c^T x & \\ & & Ax & = b \\ & & x & \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \min\limits_{x,z} & & z & \\ & Ax & & = b \\ & c^T x & -z & = 0 \\ & x & & \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{cc|c} A & 0 & b \\ \hline c^T & -1 & 0 \end{array}; \qquad \begin{array}{c|c} A & b \\ \hline c^T & 0 \end{array}$$

$$A = [B\ N]; \quad c^T = [c_B^T\ c_N^T]$$

$$M = \begin{array}{cc|c} B & N & b \\ \hline c_B^T & c_N^T & 0 \end{array}$$

Premoltiplicando M per $\begin{bmatrix} B^{-1} & 0 \\ -c_B^T B^{-1} & 1 \end{bmatrix}$, otteniamo la seguente tabella in forma canonica:

$$T = \begin{array}{cc|c} I & B^{-1}N & \bar{x}_B \\ \hline 0^T & \hat{c}_N^T & -\bar{z} \end{array}.$$