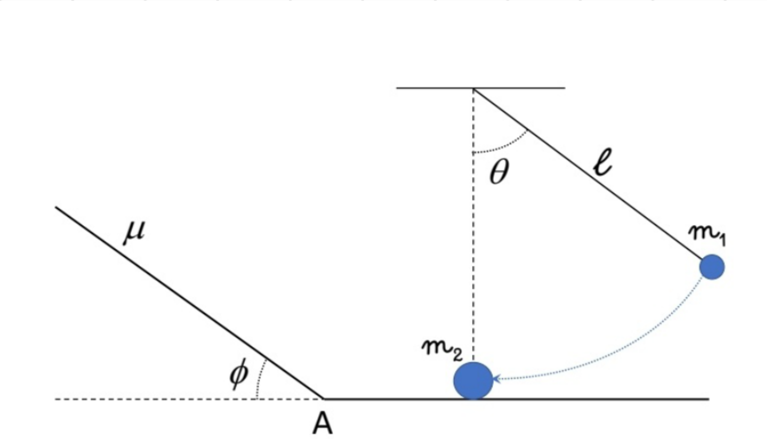
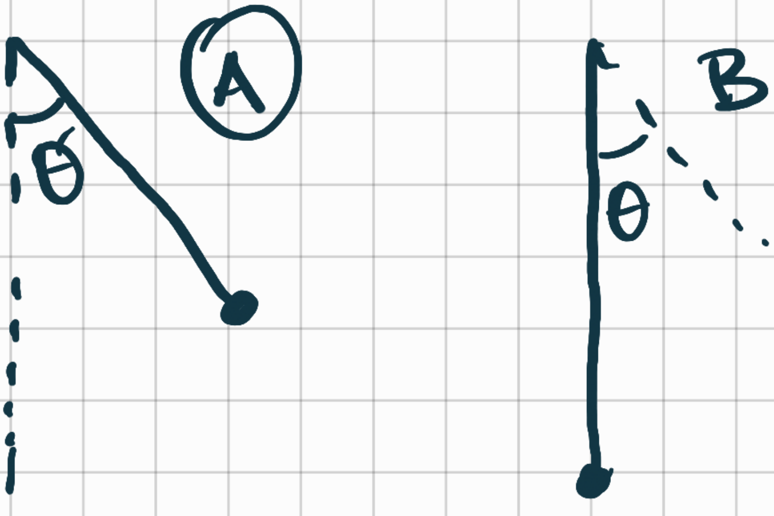
1. Un punto materiale di massa $m_2 = 1$ kg è fermo su un piano orizzontale perfettamente liscio in corrispondenza della verticale di un pendolo semplice di lunghezza $l = 1$ m recante un'identica massa $m_1 = 1$ kg, come mostrato in figura. Il pendolo viene lasciato libero di oscillare, a partire da fermo, da un angolo iniziale pari a $\theta = \pi/3$. Sapendo che l'urto tra m_1 ed m_2 è perfettamente elastico e che il piano inclinato di $\phi = \pi/4$ sull'orizzontale presenta un coefficiente di attrito dinamico pari a $1/\sqrt{3}$ (il coefficiente di attrito statico è minore di uno), calcolare:

(i) la massima quota raggiunta da m_2 durante il moto;

(ii) l'ampiezza massima di oscillazione del pendolo a partire da questa situazione.



Non ho attrito durante il moto del pendolo quindi l'energia meccanica si conserva $\Rightarrow E_{mA} = E_{mb}$



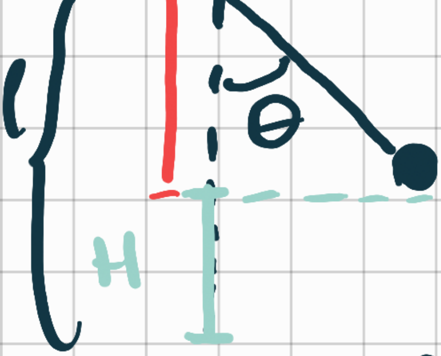
in B il pendolo si trova nella sua posizione di riposo ossia sulla verticale. Assumo questo come riferimento per il calcolo di energia potenziale

$\Rightarrow E_{pB} = 0$

$$E_{mB} = mgh_B + \frac{1}{2} m v_B^2$$

$$= 0 + \frac{1}{2} m v_B^2$$

In A il pendolo parte da fermo perciò $v_A = 0 \Rightarrow E_{cA} = 0$ ma si trova ad una certa altezza rispetto alla sua pos. di riposo



$$h = l - l\cos\theta$$

$$h = l(1-\cos\theta)$$

$$mgh = mgl(1-\cos\theta)$$

$$E_{mA} = mgl(1-\cos\theta)$$

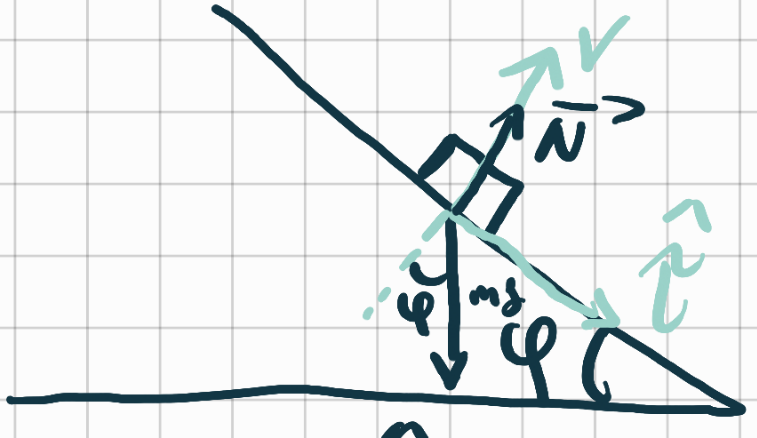
$$E_{mA} = E_{mB}$$

$$\cancel{m}gl(1-\cos\theta) = \frac{1}{2}\cancel{m}v_B^2$$

$$v_B^2 = 2gl(1-\cos\theta)$$

Sul piano inclinato ho attrito perciò l'energia meccanica non si può conservare $\Rightarrow \Delta E_m = L_{nc}$

$L_{NC} = -\mu_d N s$

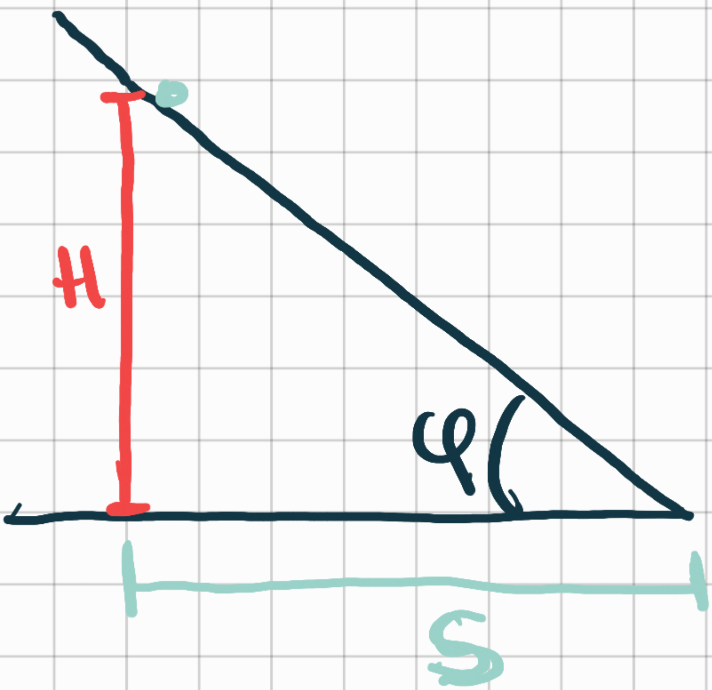


lungo $\hat{t}$

$-mg \sin\varphi = ma$

lungo $\hat{v}$

$-mg\cos\varphi + N = 0 \quad N = mg\cos\varphi$

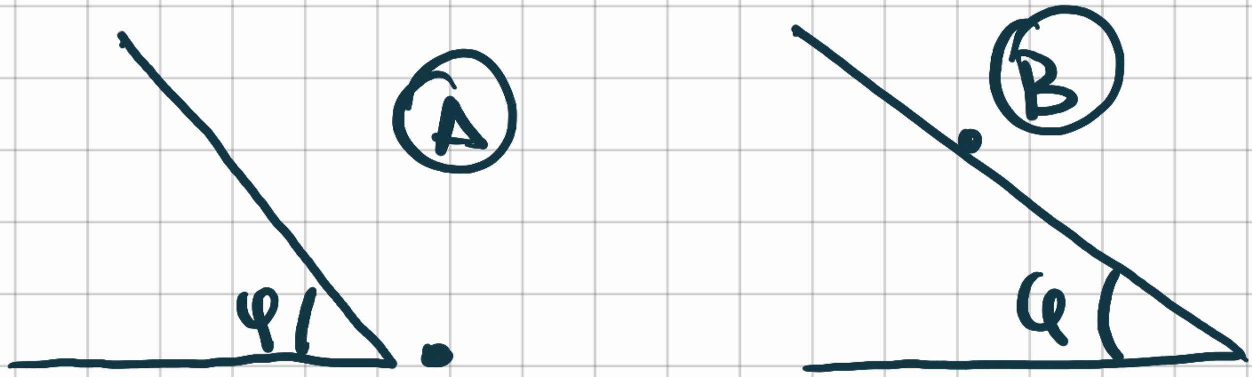


$H = s\sin\varphi$

$\Rightarrow s = \frac{H}{\sin\varphi}$

$L_{NC} = -\mu_d mg\cos\varphi \cdot H$

$\sin\varphi$



In A mi trovo allo stesso livello del punto a potenziale zero $\Rightarrow mgh=0$

$$E_{m_A} = \frac{1}{2} m v_A^2$$

Appena arrivo in B mi fermo (altrimenti non sarei a massima quota) $\Rightarrow v_B = 0$

$$E_{m_B} = mgh_B$$

$$\Delta E_m = mgh_B - \frac{1}{2} m v_A^2$$

Per trovare v_A devo risolvere equazioni urto elastico

$$\begin{cases} \cancel{m}_1 v_1 + \cancel{m}_2 \cancel{v_2} = \cancel{m}_1 \cancel{U_1} + \cancel{m}_2 U_2 \\ \cancel{\frac{1}{2}} \cancel{m}_1 v_1^2 + \cancel{\frac{1}{2}} \cancel{m}_2 \cancel{v_2}^2 = \cancel{\frac{1}{2}} \cancel{m}_1 \cancel{U_1}^2 + \cancel{\frac{1}{2}} \cancel{m}_2 U_2^2 \end{cases}$$

$V_2 = 0 \quad U_1 = 0$

quindi $\quad v_1 = U_2$

$$\Delta E_m = mgh_B - \frac{1}{2} m v_A^2$$

$$\cancel{m}gh - \frac{1}{2} \cancel{m} v_A^2 = -\mu d \cancel{m} g \cos\varphi \frac{h}{\sin\varphi}$$

$$gh + \mu d g \cos\varphi \frac{h}{\sin\varphi} = \frac{1}{2} v_A^2$$

$$2gh(1 + \mu d \cos a) = v_A^2$$

$$\frac{\quad}{\sin\varphi}$$

$$h = \frac{V_A^2}{2g\left(1+\mu_d \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}\right)}$$

$$h = \frac{2\cancel{g}\ell(1-\cos\theta)}{2\cancel{g}\left(1+\mu_d \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}\right)} = \frac{0.5}{1+0.57}$$

$$= \frac{0.5}{1.57} = 0.32\ m$$

DISCENDE SE $\mu_s < tg\varphi$

DISCESA PENDOLO

ho attrito quindi non si conserva energia meccanica

A

$$E_{mA} = mgh_A$$

$$E_{mB} = \frac{1}{2} m v_B^2$$

$$\frac{1}{2}\cancel{m} v_B^2 - \cancel{m} g h_A = -\mu d \cancel{m} g \cos\varphi \cdot \frac{H}{\sin\varphi}$$

$$\frac{1}{2} v_B^2 = -\mu d g \cot\varphi \cdot H + gh$$

$$v_B^2 = 2gh(-\mu d \cot\varphi + 1)$$

Dopo l'unto ho che m_1 si muove con la stessa velocità di m_2 che invece si ferma

$$E_{mA} = E_{mB}$$

$$E_{mA} = \frac{1}{2} m v_A^2$$ (il pendolo in A si trova a riposo e viene urtato)

$$E_{mB} = mgl(1-\cos\theta)$$

$$\frac{1}{2} \cancel{m} v_A^2 = \cancel{m} gl(1-\cos\theta)$$

$$\frac{1}{2} v_A^2 = gl - gl\cos\theta$$

$$\frac{1}{2} v_A^2 - gl = -gl\cos\theta$$

$$1 - \frac{1}{2} \frac{v_A^2}{gl} = \cos\theta$$

$$1 - 1\frac{\cancel{g}h(-\mu_d \cot\varphi + 1)}{2\cancel{g}\ell}$$

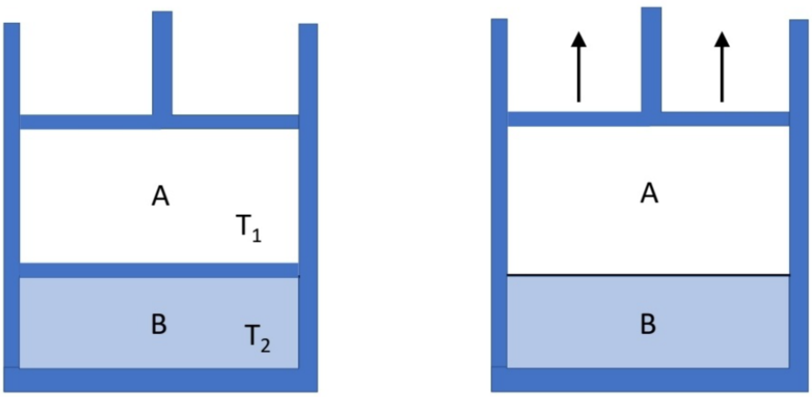
$$\cos(\theta) = 0.87$$

$$\theta \simeq 30^\circ$$

3. Un recipiente a pareti adiabatiche (ossia termicamente isolanti) è suddiviso in due parti A e B, inizialmente separate da una parete anch'essa adiabatica. La parte B è occupata da una massa $m = 1$ kg di acqua alla temperatura di 350 K, mentre la parte A è occupata da una mole di gas perfetto monoatomico. La parete adiabatica superiore è costituita da un pistone di massa trascurabile e libero di scorrere senza attrito in modo che il gas sia in equilibrio, alla temperatura di 200 K, con la pressione atmosferica esterna, pari a 1 atm. La parete di separazione adiabatica tra le parti A e B viene quindi sostituita da una semplice parete rigida diatermica (ossia termicamente conduttrice). Sapendo che il calore specifico dell'acqua è pari a $c \simeq 4$ KJ/(K kg) e che 1 atm $\simeq 10^5$ Pa, calcolare:

   (i) la temperatura e il volume del gas all'equilibrio;

   (ii) le variazioni di entropia dell'acqua e del gas.



Acqua è inizialmente in equilibrio

$$M c_A (T_A - T_e) = n c_p (T_e - T_g)$$

$$M c_A T_A - M c_A T_e = n c_p T_e - n c_p T_g$$

$$M c_A T_A + n c_p T_g = n c_p T_e + M_A c_A T_e$$

$$T_e (n c_p + M_A c_A) = M c_A T_A + n c_p T_g$$

$$T_e = \frac{M c_A T_A + n c_p T_g}{n c_v + M_A c_p}$$

$$8{,}31 \ \frac{J}{mol \cdot K} \Rightarrow 8310 \ \frac{kJ}{mol \cdot K}$$

$C_A = 4\,kJ \qquad m = 1 \qquad n = 1$

$C_V = \frac{3}{2} R$

$$T_e = \frac{M C_A T_A + n c_p T_g}{n c_p + M_A C_A}$$

$$T_e = \frac{4000 \cdot 350 + \frac{5}{2}\, 8{,}310\ 200}{8{,}310 \cdot \frac{5}{2} + 4000}$$

$$= \frac{1400000 + 4155}{4020}$$

$T_e = 349\ K$

$$PV = NRT_e$$

$$V = \frac{NRT_e}{P_e} =$$

$$R = 0{,}082 \ \frac{atm \cdot \ell}{mol \cdot K}$$

$$V = \frac{1 \cdot 0.082 \cdot 349}{1} = 29 \ \ell$$

$$V = \frac{1 \cdot 8314 \cdot 349}{10^5} = 29 \ \ell$$

$$8{,}31 \ \frac{J}{K \ mol} \Rightarrow 8{,}31 \ \frac{\ell \cdot KPA}{K \ mol}$$

$$8314 \quad \ell \cdot PA$$

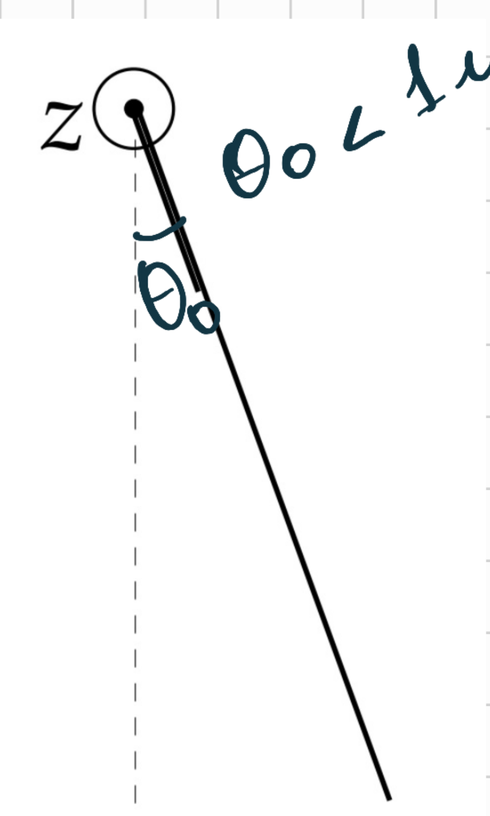
$$\overline{\quad K \text{ mol} \quad}$$

$$\Delta S_{gas} = \frac{\Delta Q}{\Delta T}$$

$$= n c_p \ln\left(\frac{T_{eq}}{T_1}\right) = 11.6\,J$$

$$\Delta S = m c_A \ln\left(\frac{t_e}{t_A}\right) = -5.72\,J$$

2. Due aste omogenee lunghe rispettivamente 60 cm e 15 cm possono oscillare senz'attrito attorno a un comune asse orizzontale z, come mostrato nella figura. Esse vengono lasciate andare contemporaneamente, a partire da ferme, dalla identica posizione iniziale. Supponendo valida l'approssimazione delle piccole oscillazioni, stimare dopo quanti secondi le due aste torneranno nuovamente a contatto.



$\theta_0 < 1$ rad

$$\theta_1(t) = \theta_2(t)$$

per incontrarsi devo avere che le 2 eq del moto si uguagli, ma essendo ω diverso devo trovare i tempi che li rendono uguali

$$\omega = \sqrt{\frac{MGD}{I_Z}} = \sqrt{MG\frac{L}{2}\cdot\frac{3}{ML^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{3G}{2L}}$$

$\omega_1 =$ $= 5$ rad/s

$\omega_2 =$ $= 9$ rad/s

$$\omega = \frac{2\pi}{t} \qquad t = \frac{2k\pi}{\omega}$$

$$\frac{\cancel{2}k_1\cancel{\pi}}{\omega_1} = \frac{\cancel{2}k_2\cancel{\pi}}{\omega_2}$$

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{k_2}{k_1} \Rightarrow 2 = \frac{k_2}{k_1}$$

$$k_2 = 2k_1$$

$$t_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{5} = 1,25\ s$$

$$t_2 = \frac{2 \cdot \cancel{2}\pi}{10} = 1,25\ s$$

$$t = \frac{2}{3} T_2$$

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{2l}{3G}}$$