Matrici

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1q} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{iq} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pj} & \dots & a_{pq} \end{pmatrix}$$

DEFINIZIONE

Una matrice a coefficenti reali a p righe e q colonne e' una tabella di numeri reali disposti su p righe e q colonne

p, q → DIMENSIONI della matrice di tipo (p,q)

esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & \sqrt{2} & -5 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$a_{11} = 3$ $a_{12} = \sqrt{2}$ $a_{13} = -5$

$a_{21} = 1$ $a_{22} = 0$ $a_{23} = 1$

$M(p, q, \mathbb{R})$ → insieme delle matrici a coefficenti reali di tipo (p,q)

$A \in M(p, q, \mathbb{R})$ → una di queste matrici

MATRICI QUADRATE

$M(n,n,\mathbb{R})$ → Insieme delle matrici quadrate di ORDINE n a coefficienti reali

DIAGONALE PRINCIPALE → $a_{11}, a_{22}, \dots a_{nn}$

esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

ordine 3

TRIANGOLARE SUPERIORE → Gli elementi sotto la diagonale principale sono nulli.

$(a_{ij} = 0 \quad \forall i > j)$

$\mathbb{T}^{\mathbb{R}}(n) = \{A = (a_{ij}) \in M(n,n,\mathbb{R}) \mid a_{ij} = 0 \quad \forall i > j\}$

TRIANGOLARE INFERIORE → Gli elementi sopra la diagonale principale sono nulli

$T_{\mathbb{R}}(n) : \{A = (a_{ij}) \in M(n,n,\mathbb{R}) \mid a_{ij} = 0 \quad \forall i < j\}$

MATRICE DIAGONALE → Tutti gli elementi non appartenenti alla diagonale principale sono nulli.

$D(n,\mathbb{R}) = \{A = (a_{ij}) \in M(n,n,\mathbb{R}) \mid a_{ij} = 0 \quad \forall i \neq j\}$

MATRICE SIMMETRICA → $S(n,\mathbb{R}) = \{A = (a_{ij}) \in M(n,n,\mathbb{R}) \mid a_{ij} = a_{ji}\}$

MATRICE TRASPOSTA

DEFINIZIONE

Data una matrice $A = (a_{ij})$ a p righe e q colonne, si dice TRASPOSTA di A la matrice a q righe e p colonne avente come elemento di posto (j, i) l'elemento di posto (i, j) di A.

$^tA = b_{ji}$ (con $b_{ji} = a_{ij}$)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & \sqrt{2} & -5 \\ 1 & 0 & 7 \end{pmatrix} \qquad {}^tA = B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ \sqrt{2} & 0 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}$$

PROPRIETA'

1. $A \in T^{\mathbb{R}}(n) \iff {}^tA \in T_{\mathbb{R}}(n)$
2. ${}^t({}^tA) = A$

MATRICE SOMMA

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 7 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 2+1 & 5+0 & 1+1 \\ 1+7 & 3+4 & 0+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 8 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

$A + B = (c_{ij})$ con $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

Si possono sommare solo le matrici dello stesso tipo

PROPRIETA'

1. **ASSOCIATIVA**

   $(A+B)+C = A+(B+C)$

2. **COMMUTATIVA**

   $A+B = B+A$

3. **ESISTENZA DELLO ZERO**

   $A+0 = A$ (0 matrice nulla tipo p,q)

4. **ESISTENZA DELL' OPPOSTO**

   $A+(-A) = 0$ ($-A$ matrice opposta)

- se $A+C = B+C \Rightarrow A = B$
- ${}^tA + {}^tB = {}^t(A+B)$

MATRICE PRODOTTO

$A = (a_{ik}) \in M(p, q, \mathbb{R})$

$B = (b_{kj}) \in M(q, r, \mathbb{R})$

$A \cdot B = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \dots + a_{iq} b_{qj}$

Il numero delle righe di A deve essere uguale al numero di colonne di B.

A · B e' una matrice a p righe (A) e r colonne (B).

esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 8 & 7 \\ 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2\cdot3 + 0\cdot0 & 2\cdot2 + 0\cdot4 & 2\cdot1 + 0\cdot(-1) \\ 8\cdot3 + 7\cdot0 & 8\cdot2 + 7\cdot4 & 8\cdot1 + 7\cdot(-1) \\ 1\cdot3 + 0\cdot0 & 1\cdot2 + 0\cdot4 & 1\cdot1 + 0\cdot(-1) \\ 1\cdot3 + 3\cdot0 & 1\cdot2 + 3\cdot4 & 1\cdot1 + 3\cdot(-1) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & 4 & 2 \\ 24 & 44 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 3 & 14 & -2 \end{pmatrix}$$

4 righe (A)

3 colonne (B)

MATRICE IDENTITA'

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Moltiplicando qualsiasi matrice per la matrice identità si ottiene la matrice stessa.

DEFINIZIONE

Se, date due matrici quadrate A e B dello stesso ordine, $AB = BA$, le matrici **COMMUTANO** o **PERMUTANO**.

Matrici e Sistemi

$$S: \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 1 \\ x_1 + 9x_2 + 7x_3 = 0 \end{cases}$$

MATRICE DEI COEFFICENTI DI S

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 9 & 7 \end{pmatrix}$$

MATRICE COLONNA DELLE INCOGNITE DI S

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

MATRICE COLONNA DEI TERMINI NOTI DI S

$$B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overline{X_1} = \begin{pmatrix} -12 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow A\overline{X_1} = B$$

quindi il sistema e' risolto e $\overline{X_1}$ e' la soluzione

DETERMINANTE

MATRICE QUADRATA

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$$

ha soluzione se e solo se $ad - bc \neq 0$

$ad - bc \rightarrow$ DETERMINANTE

$\det A = ad - bc$

SISTEMI DI N EQUAZIONI IN N INCOGNITE

hanno un'unica soluzione se e solo se il determinante della matrice dei coefficienti A e' $\neq 0$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ 5 & 9 & 7 \end{pmatrix}$$

MATRICE AGGIUNTA

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 9 & 7 \end{pmatrix}$$

se $n = 1$

$A = a_{11}$ $\quad \det A = a_{11}$

se $n = 2$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad \det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

se $n = 3$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad \det A = a_{11} \det A_{11} - a_{12} \det A_{12} + a_{13} \det A_{13}$$

esempio:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & 6 \\ 3 & 8 & 7 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 8 & 7 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot (4 \cdot 7 - 6 \cdot 8) - 2 \cdot (0 \cdot 7 - 6 \cdot 3) + 5 \cdot (0 \cdot 8 - 4 \cdot 3) = -44$$

DETERMINANTE SECONDO LA i-ESIMA RIGA

$$\det A = (-1)^{i+1} a_{i1} \det A_{i1} + (-1)^{i+2} a_{i2} \det A_{i2} + \ldots + (-1)^{i+n} a_{in} \det A_{in}$$

- Scegliere le righe con il maggior numero di zeri

DETERMINANTE SECONDO LA i-ESIMA COLONNA

$$\det A = (-1)^{1+j} a_{1j} \det A_{1j} + (-1)^{2+j} a_{2j} \det A_{2j} + \ldots + (-1)^{n+j} a_{nj} \det A_{nj}$$

- Scegliere le colonne con il maggior numero di zeri

PROPRIETA'

1. Se una riga o una colonna di A ha tutti gli elementi pari a zero, allora $\det A = 0$

2. Se A e' triangolare, $\det A =$ prodotto degli elementi sulla diagonale principale.

3. $\det A = \det {}^t A$

4. Una matrice quadrata con 2 righe e 2 colonne uguali ha $\det A = 0$

5. TEOREMA DI BINET

Date due matrici quadrate dello stesso ordine si ha che

$\det(AB) = \det A \cdot \det B$

$\det(A+B) \neq \det A + \det B$ (non vale per la matrice somma)

6. Data una matrice A di ordine 2 e un numero reale K,

$\det(KA) = K^2 \det A$ e quindi in generale:

$\det(KA) = K^n \det A$

7. Se una matrice quadrata A ha una riga (o una colonna) multipla di un'altra, allora $\det A = 0$

Matrice inversa

MATRICE UNITA'

Sappiamo che dato un numero reale $a \neq 0$, esiste b tale che $ab = 1$, e b e' unico.

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ la matrice unita' ha tutti 1 sulla diag. principale e poi tutti zeri

$\det I = 1$ $(1 \cdot 1 \cdot \ldots 1)$

$A I_n = A$ con n righe o colonne

MATRICE INVERSA

Una matrice quadrata si dice INVERTIBILE se esiste B dello stesso ordine tale che $AB = BA = I$

$GL(n, \mathbb{R}) \to$ insieme delle matrici invertibili o

GRUPPO LINEARE

- $A \neq 0$
- $\det A \neq 0$

La matrice inversa e' unica, se $AB = BA = I$ e $AC = CA = I$, allora $B = C$

$A^{-1} \to$ inversa di A

CALCOLO DELLA MATRICE INVERSA

se $n = 1$ e $A = (a_{11}) \longrightarrow A^{-1} = (a_{11}^{-1})$

se $n > 1$ allora $b_{ij} = \frac{\det A_{ji}}{\det A} (-1)^{i+j}$

esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \det A = 3$$

$$b_{11} = (-1)^{1+1} \frac{\det A_{11}}{\det A} = \frac{3}{3} = 1$$

$$b_{12} = -\frac{2}{3}$$

$$b_{21} = -\frac{0}{3} = 0$$

$$b_{22} = \frac{1}{3}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

PROPRIETA' DELL' INVERSA

1. $(A^{-1})^{-1} = A$ — l'inversa e' invertibile
2. $(AB)^{-1} = A^{-1} B^{-1}$ — se due matrici sono invertibili anche il loro prodotto e' invertibile
3. $({}^{t}A)^{-1} = {}^{t}(A^{-1})$ — data una matrice invertibile la trasposta e' invertibile.
4. $A \in (GL)$, $B, C \in (M)(n, r, \mathbb{R})$

   se $AB = AC \Rightarrow B = C$

TEOREMA DI CRAMER

Dato un sistema di n equazioni in n incognite

$$AX = B \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

$X = A^{-1}B$ unica soluzione

SOLUZIONE $\longrightarrow$ $x_i = \dfrac{\det A(i)}{\det A}$ $\quad 1 \leq i \leq n$

esempio:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + z = 1 \\ x + y = 2 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \det A = 1$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{\det A} = 2 \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}}{\det A} = 0 \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{\det A} = -1$$

$(2, 0, -1)$ unica soluzione del sistema

Rango

Sia A una matrice di tipo (p,q). Sia n un intero positivo tale che $n \leq p$ e $n \leq q$.
Un minore di ordine n e' una matrice che si ottiene scegliendo n righe e n colonne di A e prendendo gli elementi che ci si trovano su entrambe

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

esempio:
minore di ordine 2 $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$

I minori di una matrice sono sempre matrici quadrate, possiamo quindi calcolare il determinante.

RANGO

Una matrice ha rango uguale a n se:

1. Esiste almeno un minore di A di ordine n con $\det \neq 0$
2. Tutti i minori di A con ordine $> n$ hanno $\det = 0$

Se tutti i minori di A hanno $\det = 0$, allora $rk A = 0$
(la matrice e' nulla)

PROPRIETA' DEL RANGO

1. $rk\,A = rk\,{}^tA$
2. Se tutti i minori di A di un ordine n hanno det = 0, allora i minori di ordine > n hanno det = 0.

TEOREMA DELL' ORLARE

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 6 \\ 8 & 4 & 6 & 12 \end{pmatrix}$$

aggiungiamo un'altra riga e un'altra colonna di A e B:

minore B $= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ minore C $= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 8 & 6 & 12 \end{pmatrix}$

Sia A una matrice e B un suo minore con det ≠ 0, se tutti gli orlati di B hanno det = 0, allora rk A = ordine del minore B.

NUMERO DI ORLATI = $(p-s)(q-s)$

(con $A \in M(p, q, \mathbb{R})$ e N minore di ordine s)

Sistemi di equazioni lineari

Un sistema in n equazioni in n incognite ha una sola soluzione se la matrice dei coefficienti e' invertibile.

STUDIAMO IL CASO GENERALE

- Sistema di p equazioni in q incognite
- Matrice dei coefficienti non invertibile

$$S = \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1q}x_q = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2q}x_q = b_2 \\ \dots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \dots + a_{pq}x_q = b_p \end{cases}$$

MATRICE DEI COEFFICENTI

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1q} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2q} \\ \dots & \dots & & \dots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pq} \end{pmatrix}$$

(p, q)

MATRICE COMPLETA

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1q} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2q} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pq} & b_p \end{pmatrix}$$

$(p, q+1)$

MATRICE INCOGNITE

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_q \end{pmatrix}$$

$(q, 1)$

MATRICE TERMINI NOTI

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_p \end{pmatrix}$$

$(p, 1)$

Sol (S) $\rightarrow$ insieme delle soluzioni

S: $AX = B$ in forma matriciale

TEOREMA DI ROUCHÉ - CAPELLI

S: sistema lineare

A: matrice dei coefficenti

A': matrice completa

è risolubile solo se $rkA = rkA'$

PROCEDIMENTO

$$S: \begin{cases} 2x + 3y - 2z - 3w = 1 \\ 4x + 6y + z + w = 2 \\ 6x + 9y - z - 2w = 3 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & -3 \\ 4 & 6 & 1 & 1 \\ 6 & 9 & -1 & -2 \end{pmatrix} \qquad A' = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & -3 & 1 \\ 4 & 6 & 1 & 1 & 2 \\ 6 & 9 & -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$rkA = 2$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$ minore di A

$\det B \neq 0$

Calcoliamo il rango della matrice A', calcoliamo quindi i determinanti degli orlati di B con l'ultima colonna di A'

$rkA' = 2$ $\rightarrow$ il sistema è risolubile

Consideriamo il sistema ridotto SR, formato dalle n equazioni i cui coefficienti formano il minore B

SR e' equivalente ad S

$$SR: \begin{cases} 2x + 3y - 2z - 3w = 1 \\ 4x + 6y + z + w = 2 \end{cases}$$

portiamo a destra i membri che non formano B.

$$SR: \begin{cases} 2x - 2z = 1 - 3y + 3w \\ 4x + z = 2 - 6y - w \end{cases}$$

assegniamo dei parametri alle incognite di destra

$y = h \qquad w = K$

$$SR: \begin{cases} 2x - 2z = 1 - 3h + 3K \\ 4x + z = 2 - 6h - K \end{cases}$$

risolviamo il sistema parametrico Crameriano

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1-3h+3K & -2 \\ 2-6h-K & 1 \end{vmatrix}}{\det B} = \frac{5 - 15h + K}{10}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1-3h+3K \\ 4 & 2-6h-K \end{vmatrix}}{\det B} = -\frac{7}{5}K$$

OSSERVAZIONE

le soluzioni dipendono da q-n parametri

$$Sol(S): \begin{cases} x = \dfrac{5 - 15h + K}{10} \\ y = h \\ z = -\dfrac{7}{5}K \\ w = K \end{cases}$$

Metodo di Gauss

Metodo alternativo per un sistema di p equazioni in q incognite.

Si tratta di rimpiazzare il sistema di cui si cercano le eventuali soluzioni con un sistema avente le stesse soluzioni più facile da risolvere.

MATRICI A SCALINI

UNICA SOLUZIONE
(se esiste)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

PARAMETRICO

$x_4 = h_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

PARAMETRICO

$x_3 = h_1$, $x_4 = h_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

MATRICI QUADRATE A SCALINI $\rightarrow$ matrici triangolari

(Altezza 1)

esempio:

$$S: \begin{cases} x + 2y = 4 \\ x + 5y = 6 \end{cases} \qquad x = 4 - 2y$$

$$S': \begin{cases} x + 2y = 4 \\ 3y = 2 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

unica soluzione: $\left(\frac{8}{3}, \frac{2}{3}\right)$

OPERAZIONI ELEMENTARI DI RIGA

- Sommare alla riga i-esima della matrice la riga j-esima moltiplicata per un numero reale K, con $i \neq j$.
- Scambiare 2 righe della matrice.

MATRICI EQUIVALENTI PER RIGA

Due matrici si dicono equivalenti per riga se si può passare da una all'altra con un numero finito di operazioni elementari di riga.

DETERMINANTE

$$\det A' = (-1)^m \det A \iff \det A = (-1)^m \det A'$$

m = numero di operazioni di scambio di righe

RANGO

$rkA' = rkA = n$

Il rango di una matrice a scalini è uguale al numero di scalini. (n = numero di scalini)

Vettori geometrici

NEL PIANO

O : origine

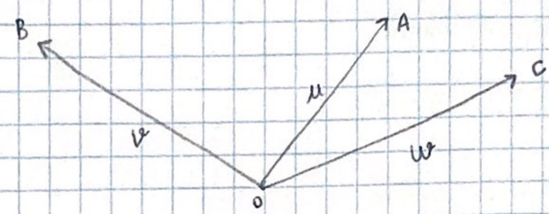
P : punto nel piano

$\overrightarrow{OP}$: vettore con origine in O

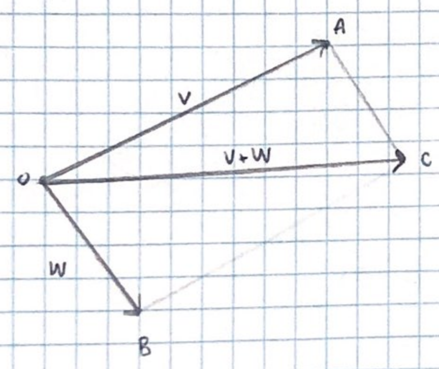
$V^2(O)$: insieme dei vettori applicati in O

$\overrightarrow{OO}$: vettore nullo $= 0$

$v = \overrightarrow{OP}$

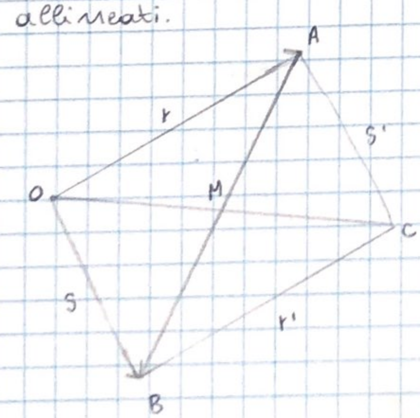


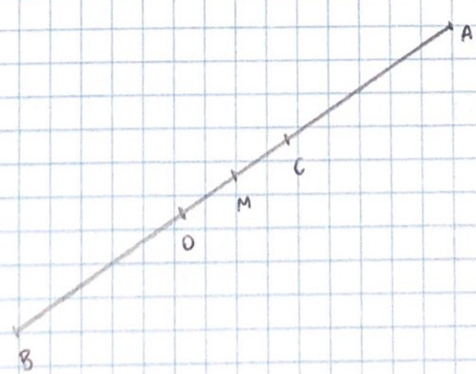
ADDIZIONE DI VETTORI



Regola del parallelogramma

Non ~~possiamo~~ applicare il procedimento se O, A, B sono allineati.





$d(O,A) = d(B,C)$ e $d(O,B) = d(A,C)$

1. Determiniamo il punto medio M dei punti A e B.

2. Determiniamo il punto C simmetrico di O rispetto a M.

PARALLELOGRAMMA NON DEGENERE $\longrightarrow$ A, B, D non sono allineati

PARALLELOGRAMMA DEGENERE $\longrightarrow$ A, B, D sono allineati e anche C,

e $d(A,B) = d(C,D)$ e $d(B,C) = d(D,A)$

$\overrightarrow{OC}$: vettore somma $v + w$

PROPRIETA' DELL' ADDIZIONE DI VETTORI

1. ASSOCIATIVA

$(u + v) + w = u(v + w) \qquad \forall u, v, w \in V^2(O)$

2. COMMUTATIVA

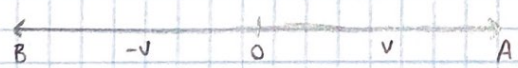
$v + w = w + v \qquad \forall v, w \in V^2(O)$

3. ESISTENZA DELLO ZERO

$v + 0 = v \qquad \forall v \in V^2(O)$

4. OPPOSTO

$v + (-v) = 0$



MOLTIPLICAZIONE DI UN VETTORE PER UNO SCALARE

Dato un vettore $v = \overrightarrow{OP}$ e h = scalare, $hv \in V^2(O)$.

- se $v = 0 \rightarrow h0 = 0$
- se $v \neq 0 \rightarrow$ O e P determinano una retta r

r_1 = semiretta contenente P

r_2 = semiretta non contenente P

$$h\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ}$$

- se $h = 0 \rightarrow Q = 0$
- se $h > 0 \rightarrow Q \in r_1$ e $d(O,Q) = hd(O,P)$
- se $h < 0 \rightarrow Q \in r_2$ e $d(O,Q) = -hd(O,P)$

PROPRIETA'

1. $1v = v$
2. $h(kv) = (kv)h$
3. $(h+k)v = hv + kv$
4. $h(v+w) = hv + hw$

vettori nello spazio

I vettori nello spazio definiscono l'addizione e la moltiplicazione per uno scalare analogamente a quelli nel piano, e godono dunque delle stesse proprietà.

RETTE E PIANI PER L'ORIGINE

r : retta

O : origine

$A, B \in r \rightarrow M$ (punto medio tra A e B) $\in r$

C : simmetrico di O rispetto a M $\in r$

FORMULA PUNTO MEDIO

$$\vec{OM} = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OB})$$