

Reti di code

Reti di code aperte

Metodo di risoluzione di un generico esercizio:

- 1) Solitamente come prima cosa da fare quando viene dato un esercizio bisogna calcolarsi i lambda effettivi (scrivendo il sistema di equazioni e risolvendolo). Ricordo che il generico lambda effettivo della stazione j-esima si calcola come:

$$\lambda'_j = \lambda_j + \sum_{k=1}^M P_{kj} \cdot \lambda'_k$$

- 2) Calcolo i vari v_j di ciascuna stazione che servono sia per calcolare l' x_T sia per calcolare i tempi (ne parlerò successivamente). Il v_j della j-esima stazione si calcola con la seguente formula:

$$v_j = \frac{\lambda'_j}{\sum \lambda_{esterni}}$$

- 3) Come terzo passo bisogna accertarsi che sia verificata la condizione di stazionarietà. Sia nelle reti aperte che nelle reti chiuse il sistema è stazionario se $x_R < x_T$. In particolar modo nelle reti aperte poiché x_R è dato dalla somma dei lambda esterni ($x_R = \sum \lambda_{esterni}$) e x_T è dato dal minimo tra gli $\frac{s_j \mu_j}{v_j}$ la disequazione diventa:

$$\sum \lambda_{esterni} < \frac{s_j \mu_j}{v_j}$$

Ma poiché: $v_j = \frac{\lambda'_j}{\sum \lambda_{esterni}}$ Sostituendo ottengo:

$$\sum \lambda_{esterni} < \frac{s_j \mu_j}{\frac{\lambda'_j}{\sum \lambda_{esterni}}}$$

Che diventa:

$$\sum \lambda_{esterni} < s_j \mu_j \cdot \frac{\sum \lambda_{esterni}}{\lambda'_j}$$

Semplifico ambo i membri per $\sum \lambda_{esterni}$ ed ottengo:

$$1 < \frac{s_j \mu_j}{\lambda'_j}$$

Dunque:

$$\lambda'_j < s_j \mu_j$$

Perciò per ciascun lambda effettivo verifico che questo sia minore della sua rispettiva velocità di servizio moltiplicata per i suoi serventi.

In caso abbia lambda effettivi parametrici (cioè dipendenti da λ) allora otterrò che la condizione di stazionarietà è verificata dalla disequazione: $\lambda < C$ dove C è un numero. Cioè ho un sistema stazionario per tutti i lambda che scelgo minori di C. A questo punto so che lambda massimo è proprio pari a C, perciò l' x_T oltre ad essere il minimo tra i vari $\frac{s_j \mu_j}{v_j}$ può anche essere calcolato in quest'altro modo, infatti x_T è proprio uguale a lambda massimo (moltiplicato per il numero di entrate nel sistema), cioè se ho n frecce entranti nel sistema dall'esterno con parametro λ allora:

$$x_T = n \cdot \lambda_{\text{massimo}}$$

In sostanza n è lo stesso coefficiente che trovo davanti il lambda parametrico dell' x_R .

Solitamente in caso di lambda parametrico viene data un'equazione, ad esempio viene detto "il sistema lavora ad un terzo della sua produttività massima" ciò significa che $x_R = \frac{x_T}{3}$ quindi calcolandosi l' x_T con uno dei due modi visti sopra sapendo che x_R dipende da λ si ottiene un'equazione dove lambda è l'unica incognita. Una volta risolta l'equazione e trovato un valore per lambda si procede alla sostituzione del lambda nelle formule dei lambda effettivi per ottenere un valore numerico.

- 4) A questo punto si procede rispondendo alla domanda. Se viene chiesto l' x_R di una stazione specifica questo è:

$$x_{Rj} = \frac{\lambda'_j}{v_j}$$

Se viene chiesto x_T di una specifica stazione ho:

$$x_T = \frac{s_j \mu_j}{v_j}$$

Se viene chiesto un valore atteso, come ad esempio quello del tempo medio speso in coda dal cliente, rispetto ad una specifica stazione, si usano le formule relative alla stazione (M/M/1 se è monoservente, M/M/S in caso contrario o M/M/1/K). Se si calcola il valore atteso di tempi bisogna sempre ricordarsi di moltiplicare per v . Quindi, ad esempio, il tempo medio speso in coda da un cliente nella stazione j è pari a: $v_j \cdot W_{qj}$

Se chiede un valore atteso riguardante l'intero sistema esso si calcola sommando i valori attesi delle singole stazioni (e moltiplicati per v se si tratta di tempi). Ad esempio il tempo medio speso in coda da un cliente nell'intero sistema è dato da:

$$W_q = \sum_{j=1}^M v_j W_{qj}$$

Se viene chiesta la probabilità che un sistema si trovi in un determinato stato si procede utilizzando il teorema di Jackson. La cui tesi è:

$$P(x, y, z) = f_1(x) \cdot f_2(y) \cdot f_3(z)$$

In questo caso ho supposto di avere 3 macchine. Quindi Jackson mi dice che le probabilità che nel sistema ci siano x clienti nella macchina 1, y clienti nella macchina 2, z clienti nella macchina 3 è

pari al prodotto delle singole probabilità (NOTA: gli $f_j(n_j)$ in Jackson corrispondono a delle probabilità, in Gordon a dei tempi). Quindi mi calcolo le singole probabilità e ne faccio il prodotto. Per calcolare le probabilità mi devo ricordare che:

$$f_j(n_j) = \begin{cases} \frac{1}{n_j!} \cdot \left(\frac{\lambda'_j}{\mu_j}\right)^{n_j} \cdot f_j(0) & \text{Se } n_j \leq s_j \\ \frac{1}{s_j! \cdot s_j^{n_j-s_j}} \cdot \left(\frac{\lambda'_j}{\mu_j}\right)^{n_j} \cdot f_j(0) & \text{Se } n_j \geq s_j \end{cases}$$

$f_j(0)$ sarebbe p_0 e si calcola in maniera diversa in base al sistema nel quale ci troviamo, ad esempio per i sistemi M/M/1 corrisponde a:

$$p_0 = \left(1 - \frac{\lambda'_j}{\mu_j}\right)$$

Reti di code chiuse

- 1) Analogamente a come facevo con i lambda effettivi nelle reti aperte nelle reti chiuse come prima cosa mi calcolo i v di ciascuna stazione. Obbligatoriamente un v deve essere noto, quindi se non specificato, di default il v relativo alla stazione di carico/scarico si pone pari ad 1 e facendo il sistema di equazione ci si ricava il valore numerico degli altri.
- 2) A questo punto mi calcolo gli x di ciascuna stazione, dove x non indica il throughput ma il tempo medio speso dal cliente in quella stazione ed è dato da:

$$x_j = \frac{v_j}{\mu_j}$$

- 3) Una volta che ho calcolato i vari x posso fare la tabella per calcolarmi il $G(M,N)$. Prima di tutto mi calcolo i vari $f_j(n_j)$ usando Gordon (questi numeri li dovrò inserire nella tabella). Quindi per ogni stazione calcolo: $f_j(0), f_j(1), f_j(2), \dots, f_j(k)$ dove k è il numero di clienti (che in una rete chiusa è un numero che viene dato nel testo del problema).

In Gordon ricordo che gli $f_j(n_j)$ non sono probabilità come in Jackson ma tempi, e si calcolano similmente in questo modo:

$$f_j(n_j) = \begin{cases} \frac{1}{n_j!} \cdot x_j^{n_j} & \text{Se } n_j \leq s_j \\ \frac{1}{s_j! \cdot s_j^{n_j-s_j}} \cdot x_j^{n_j} & \text{Se } n_j \geq s_j \end{cases}$$

$f_j(0)$ per definizione fa 1.

Una volta che me li sono calcolati costruisco la tabella. Come prima riga scrivo le macchine ponendo per ultima la macchina su cui il problema mi chiede di calcolarne qualcosa (ad esempio se l'esercizio mi chiede di calcolare la lunghezza della coda della stazione j quest'ultima la metto per ultima). La prima colonna rappresenta la prima macchina, la seconda le prime due macchine e l' n -esima colonna rappresenta le prime n macchine. Nella prima colonna posiziono uno sotto l'altro il numero di clienti, cioè costruisco mettendo nella prima riga 0, nella seconda 1 e così via fino a raggiungere il numero di clienti indicato dall'esercizio. Una volta che ho questa tabella la riempio usando gli $f_j(n_j)$ calcolati prima. Per la prima colonna (contenente i valori veri e propri, quindi non mi riferisco a quella dove abbiamo scritto il numero crescente di clienti) copio pari pari uno appresso all'altro i valori di $f_j(n_j)$ riferiti alla prima macchina. Nelle altre colonne, invece, quando devo inserire un elemento prendo l'elemento della stessa riga ma della colonna precedente e lo moltiplico per $f_j(0)$ poi lo sommo con il prodotto dato tra l'elemento della riga precedente (sempre della colonna prima) e tra $f_j(1)$ poi lo sommo con gli altri valori che sono prodotti fra gli elementi della colonna prima ma ogni volta "salgo di una riga" moltiplicati per un indice crescente fino a che non arrivo alla prima riga (cioè sono tornato all'inizio della tabella). Il risultato sarà il valore da inserire.

- 4) A questo punto ci possono essere varie domande, comunque al 99% per procedere occorrerà calcolarsi il throughput ovvero x_R che in una stazione chiusa è dato da:

$$x_R = \frac{G(M, N - 1)}{G(M, N)}$$

Invece l' x_T si calcola sempre allo stesso modo delle reti aperte (ovviamente non usando il metodo del lambda massimo poiché non ce li abbiamo nelle reti chiuse, quindi usando l'altro metodo).

- 5) Se viene chiesto l' x_R di una stazione specifica questo è dato da:

$$x_{Rj} = v_j \cdot x_R$$

Se viene chiesto un qualsiasi valore atteso (in genere sempre riferito ad una stazione specifica) si utilizzano le leggi di Little. Nelle reti chiuse l'unica cosa che ci possiamo calcolare direttamente è N , tutti gli altri valori attesi si ricavano usando le formule di Little basandosi su N .

N si calcola nel seguente modo:

$$N_j = 1 \cdot P(n_j = 1) + 2 \cdot P(n_j = 2) + 3 \cdot P(n_j = 3) + 4 \cdot P(n_j = 4) + \dots + k \cdot P(n_j = k)$$

Nelle leggi di Little bisogna prestare attenzione perchè λ non esiste, quindi il λ delle leggi di little diventa uguale a $v_j x_R$

Dove k è pari all' N iniziale dato come parametro. L' N dato all'inizio indica il numero di clienti che circolano, ma non so quanti clienti in media ho nella stazione j , è per questo che mi serve calcolarlo. Quindi sommo N volte facendo ogni volta dei prodotti tra dei "coefficienti" che vanno da 1 a N e delle probabilità.

La probabilità singola $P_j(k)$, cioè la probabilità di avere k clienti nella macchina j , si calcola come:

$$P(k) = f_j(k) \cdot \frac{G(M-1, N-k)}{G(M, N)}$$

Se viene chiesto di calcolare la probabilità di uno stato $P(x, y, z)$ si applica Gordon la cui tesi dice che:

$$P(x, y, z) = \frac{f_1(x) \cdot f_2(y) \cdot f_3(z)}{G(M, N)}$$

Anche in questo caso ho fatto finta che le macchine fossero 3. Le singole $f_j(n_j)$ sono tempi e perciò li normalizzo con la costante facendoli diventare probabilità.

Se viene chiesto un valore atteso riguardante l'intero sistema si utilizzano le seguenti formule:

$$W = \sum_{j=1}^M v_j W_j = \frac{N}{x_R}$$

$$W_s = \sum_{j=1}^M v_j W_{s_j} = \sum_{j=1}^M x_j$$

$$W_q = \sum_{j=1}^M v_j W_{q_j} = \frac{N}{x_R} - \sum_{j=1}^M x_j$$

Se viene chiesto un valore atteso riguardante una specifica stazione prima si calcola N di quella stazione, poi si trovano gli altri valori o con Little o con le seguenti formule:

$$W_j = \frac{N_j}{x_R}$$

$$W_{s_j} = x_j$$

$$W_{q_j} = \frac{N_j}{x_R} - x_j$$

Attenzione: Queste formule sono i tempi effettivi (cioè già moltiplicati per il visit-count).

Dimostrazione:

$$W_j = W_{s_j} + W_{q_j} \rightarrow W_{q_j} = W_j - \frac{1}{\mu_j} = \frac{N_j}{\lambda_j} - \frac{1}{\mu_j} = \frac{N_j}{v_j \cdot x_R} - \frac{1}{\mu_j}$$

Moltiplico ambo i membri per il visit count:

$$v_j \cdot W_{q_j} = \frac{N_j}{x_R} - \frac{v_j}{\mu_j} = \frac{N_j}{x_R} - x_j$$

In maniera analoga si dimostrano le formule per gli altri tempi.

Esercizi Svolti

Esercizio 1

Esame di Automazione Industriale I

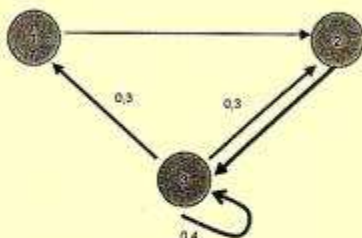
COMPITO D

23 aprile 2009

Nome e Cognome Matricola:

ESERCIZIO

Il sistema manifatturiero che si vuole esaminare è rappresentato in figura. Nel sistema sono presenti 4 pezzi; tutti i tempi di servizio sono esponenzialmente distribuiti. Il tempo di servizio dei vari centri sono rispettivamente 3 minuti per il centro 1, 2 minuti per 2, 50 pezzi/ora per 3.
Il centro 1 è l'unico dotato di tre serventi ed è il centro di riferimento.



1. Quanto tempo spende in attesa un cliente nel centro 3?
2. Scrivere l'equazione di equilibrio dello stato (4,1,2)
3. Quanto tempo mediamente un cliente spende in coda nell'intero sistema?

Sistemi M/M/1

$$N = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$$

Sistemi M/M/1/K

$$N = \frac{\frac{\gamma}{\mu}}{1 - \frac{\gamma}{\mu}} - \frac{(K+1) \left(\frac{\gamma}{\mu}\right)^{K+1}}{1 - \left(\frac{\gamma}{\mu}\right)^{K+1}} \quad \varepsilon = \frac{1 - \left(\frac{\gamma}{\mu}\right)^K}{1 - \left(\frac{\gamma}{\mu}\right)^{K+1}}$$

Sistemi M/M/S

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{i=0}^{s-1} \frac{1}{i!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i + \frac{1}{s!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s \frac{s\mu}{s\mu - \lambda}}$$

$$L = \frac{1}{s!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s P_0 \frac{\rho}{(1-\rho)^2} \quad \rho = \frac{\lambda}{s\mu}$$

Reti APERTE

$$f_i(n_i) = \begin{cases} \frac{\phi_i^{n_i}}{n_i!} f_i(0) & n_i \leq s_i \\ \frac{\phi_i^{n_i}}{s_i! s_i^{n_i-s_i}} f_i(0) & n_i \geq s_i \end{cases}$$

Reti CHIUSE

$$f_i(n_i) = \begin{cases} \frac{x_i^{n_i}}{n_i!} & n_i \leq s_i \\ \frac{x_i^{n_i}}{s_i! s_i^{n_i-s_i}} & n_i \geq s_i \end{cases}$$

$$Pr(n_M=k) = f_M(k) \frac{G(M-1; N-k)}{G(M; N)}$$

Soluzione 1

Dati: $N = 4, W_{s_1} = 3 \text{ min}, W_{s_2} = 2 \text{ min}, \mu_3 = 50 \text{ p/h}, s_1 = 3, s_2 = s_3 = 1$

Domande: $W_{q_3} = ? n = (4,1,2)? W_q?$

Svolgimento:

Come prima cosa mi calcolo i v . Dato che il centro di riferimento è la stazione 1 allora $v_1 = 1$

Scrivo il sistema di equazioni:

$$v_2 = v_1 + 0,3v_3$$

$$v_3 = 0,4v_3 + v_2$$

Risolvendo ottengo: $v_1 = 1, v_2 = 2, v_3 = 3,33$

A questo punto mi calcolo gli x di ciascuna stazione (bisogna prestare attenzione al fatto che $w_{s_j} = \frac{1}{\mu_j}$):

$$x_1 = \frac{v_1}{\mu_1} = v_1 \cdot \frac{1}{\mu_1} = v_1 \cdot w_{q_1} = 3 \quad x_2 = 2 \cdot 2 = 4 \quad x_3 = \frac{3,33}{0,833} = 4$$

μ_3 era espresso in pezzi ora, perciò l'ho diviso per 60 trasformandolo in pezzi al minuto poiché devo lavorare con la stessa unità di misura.

Ora mi calcolo i vari $f_j(n_j)$ usando Gordon:

$$f_1(0) = 1 \quad f_1(1) = 3 \quad f_1(2) = \frac{1}{2!} \cdot 3^2 = 4,5 \quad f_1(3) = \frac{1}{3!} \cdot 3^3 = 4,5 \quad f_1(4) = \frac{1}{3! \cdot 3^{4-3}} \cdot 3^4 = 4,5$$

$$f_2(0) = 1 \quad f_2(1) = 4 \quad f_2(2) = 16 \quad f_2(3) = 64 \quad f_2(4) = 256$$

$$f_3(0) = 1 \quad f_3(1) = 4 \quad f_3(2) = 16 \quad f_3(3) = 64 \quad f_3(4) = 256$$

Ora costruisco la tabella (mettendo per ultima la macchina di cui ci chiede il valore atteso ossia la 3):

| | 1 | 1,2 | 1,2,3 |
|---|-----|-------|--------|
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 3 | 7 | 11 |
| 2 | 4,5 | 32,5 | 76,5 |
| 3 | 4,5 | 134,5 | 440,5 |
| 4 | 4,5 | 542,5 | 2304,5 |

$$G(1,1) = 3 \quad G(2,1) = 3 + 4 = 7 \quad G(3,1) = 7 + 4 = 11 \quad G(1,2) = 4,5$$

$$G(2,2) = 4,5 + 3 \cdot 4 + 1 \cdot 16 = 32,5$$

$$G(3,2) = 32,5 + 7 \cdot 4 + 1 \cdot 16 = 76,5 \quad G(2,3) = 4,5 + 4,5 \cdot 4 + 3 \cdot 16 + 64 = 134,5$$

$$G(3,3) = 134,5 + 32,5 \cdot 4 + 7 \cdot 16 + 64 = 440,5$$

$$G(2,4) = 4,5 + 4,5 \cdot 4 + 4,5 \cdot 16 + 3 \cdot 64 + 256 = 542,5$$

$$G(3,4) = 542,5 + 134,5 \cdot 4 + 32,5 \cdot 16 + 7 \cdot 64 + 256 = 2304,5$$

Quindi a questo punto so che:

$$x_R = \frac{G(M, N-1)}{G(M, N)} = \frac{440,5}{2304,5} = 0,19$$

Ora mi calcolo W_{q_3} grazie alle leggi di Little:

$$W = W_q + \frac{1}{\mu} \rightarrow W_q = W - \frac{1}{\mu}$$

Sapendo che:

$$N = \lambda W \rightarrow W = \frac{N}{\lambda}, \quad \lambda = v \cdot x_R$$

Ottengo:

$$W_{q_3} = \frac{N_3}{v_3 \cdot x_R} - \frac{1}{\mu_3}$$

Però non mi devo dimenticare di moltiplicare per il v_3 perciò la vera formula è:

$$W_{q_3} = \left(\frac{N_3}{v_3 \cdot x_R} - \frac{1}{\mu_3} \right) \cdot v_3$$

Perciò prima mi devo calcolare N_3 nel seguente modo:

$$N_3 = 1 \cdot P(1) + 2 \cdot P(2) + 3 \cdot P(3) + 4 \cdot P(4)$$

$$P(1) = f_3(1) \cdot \frac{G(M-1, N-K)}{G(M, N)} = 4 \cdot \frac{G(2,3)}{G(3,4)} = 4 \cdot \frac{134,5}{2304,5} = 0,23$$

$$P(2) = f_3(2) \cdot \frac{G(2,2)}{G(3,4)} = 16 \cdot \frac{32,5}{2304,5} = 0,23$$

$$P(3) = f_3(3) \cdot \frac{G(2,1)}{G(3,4)} = 64 \cdot \frac{7}{2304,5} = 0,19$$

$$P(4) = f_3(4) \cdot \frac{G(2,0)}{G(3,4)} = 0,11$$

Dunque:

$$N_3 = 1,7$$

Sostituendolo nella formula precedentemente trovata ottengo:

$$W_{q_3} = \left(\frac{1,7}{3,33 \cdot 0,19} - \frac{1}{0,833} \right) \cdot 3,33 = 4,95$$

Alternativamente:

$$W_{q_3} = \frac{N_3}{x_R} - x_3 = \frac{1,7}{0,19} - 4 = 4,95$$

Procedo ora con la scrittura dell'equazione di equilibrio per lo stato (4,1,2) prestando attenzione a mantenere l'ordine che ho dato alle macchine quando ho costruito la tabella, ciò significa (in questo caso) che 4 clienti li do alla macchina 1, 1 cliente lo do alla macchina 2, 2 clienti li do alla macchina 3. Se ad esempio come ultima macchina nella tabella avessi messo la 2, allora i 2 clienti li avrei dovuti assegnare alla macchina 2 e 1 cliente alla macchina 3.

$$U = (3\mu_1 + \mu_2 + 0,6\mu_3) \cdot P(4,1,2)$$

$$E = 3\mu_1 \cdot P(5,0,2) + \mu_2 \cdot P(4,2,1) + 0,3\mu_3 \cdot P(4,0,3) + 0,4\mu_3 \cdot P(4,1,2) + 0,3\mu_3 \cdot P(3,1,3)$$

Ora mi calcolo W_q dell'intero sistema con le leggi di Little sapendo che i clienti medi nel sistema sono 4:

$$W_q = \frac{N}{x_R} - \sum_{j=1}^M x_j = \frac{4}{0,19} - (3 + 4 + 4) = 10$$

Esercizio 2

Esame di Automazione Industriale I

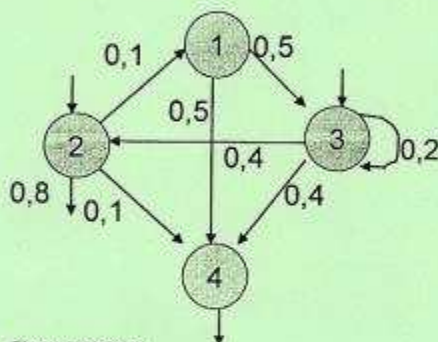
COMPITO A

23 aprile 2009

Nome e Cognome _____ Matricola: _____

Problema 1

Il sistema manifatturiero che si vuole esaminare è rappresentato in figura. Gli arrivi dall'esterno alle stazioni sono poissoniani con parametro $\lambda_3 = 2\lambda_1$, tutti i tempi di servizio sono esponenzialmente distribuiti. Le velocità di servizio dei vari centri sono rispettivamente 20 pezzi/minuto per il centro 1, 30 pezzi/minuto per 2, 15 pezzi/minuto per 3, 25 pezzi al minuto per il centro 4. Il centro 3 è l'unico dotato di tre serventi (gli altri sono monoserventi).



Supponendo che il sistema lavori alla metà della sua produttività massima

- 1_ Dire quanto tempo mediamente un pezzo trascorre in coda nel sistema?
- 2_ Scrivere l'eq. di equilibrio per lo stato (0,3,4,2)
- 3_ Quali parametri variereste e di quanto per aumentare la produttività reale e teorica.

Sistemi M/M/1

$$N = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$$

Sistemi M/M/1/K

$$N = \frac{\frac{\gamma}{\mu}}{1 - \frac{\gamma}{\mu}} - \frac{(K+1) \left(\frac{\gamma}{\mu}\right)^{K+1}}{1 - \left(\frac{\gamma}{\mu}\right)^{K+1}} \varepsilon = \frac{1 - \left(\frac{\gamma}{\mu}\right)^K}{1 - \left(\frac{\gamma}{\mu}\right)^{K+1}}$$

Sistemi M/M/S

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{i=0}^{s-1} \frac{1}{i!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i + \frac{1}{s!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s \frac{s\mu}{s\mu - \lambda}}$$

$$L = \frac{1}{s!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s P_0 \frac{\rho}{(1-\rho)^2} \quad \rho = \frac{\lambda}{s\mu}$$

Reti APERTE

$$f_i(n_i) = \begin{cases} \frac{\phi_i^{n_i}}{n_i!} f_i(0) & n_i \leq s_i \\ \frac{\phi_i^{n_i}}{s_i! s_i^{n_i-s_i}} f_i(0) & n_i \geq s_i \end{cases}$$

Reti CHIUSE

$$f_i(n_i) = \begin{cases} \frac{x_i^{n_i}}{n_i!} & n_i \leq s_i \\ \frac{x_i^{n_i}}{s_i! s_i^{n_i-s_i}} & n_i \geq s_i \end{cases}$$

$$Pr(n_M=k) = f_M(k) \frac{G(M-1; N-k)}{G(M; N)}$$

Soluzione 2

Dati: $\lambda_3 = 2\lambda_2, \mu_1 = 20 \text{ p/min}, \mu_2 = 30 \text{ p/min}, \mu_3 = 15 \text{ p/min}, \mu_4 = 25 \text{ p/min}, s_3 = 3, x_R = \frac{x_T}{2}$

Domande: $W_q = ? n = (0,3,4,2)? x_R, x_T?$

Svolgimento:

Mi calcolo i lambda effettivi che saranno parametrici, infatti $\lambda_2 = \lambda$ e $\lambda_3 = 2\lambda$. Già so che:

$$x_R = \sum \lambda_{esterni} = 3\lambda$$

Scrivo il sistema di equazioni:

$$\lambda'_1 = 0,1\lambda'_2$$

$$\lambda'_2 = \lambda + 0,4\lambda'_3$$

$$\lambda'_3 = 2\lambda + 0,2\lambda'_3 + 0,5\lambda'_1$$

$$\lambda'_4 = 0,5\lambda'_1 + 0,4\lambda'_3 + 0,1\lambda'_2$$

$$\text{Ottengo quindi: } \lambda'_1 = 0,2\lambda \quad \lambda'_2 = 2\lambda \quad \lambda'_3 = 2,63\lambda \quad \lambda'_4 = 1,35\lambda$$

Verifico le condizioni di stazionarietà:

$$\lambda'_1 < s_1\mu_1 \rightarrow 0,2\lambda < 1 \cdot 20 \rightarrow \lambda < 100$$

$$\lambda'_2 < s_2\mu_2 \rightarrow 2\lambda < 1 \cdot 30 \rightarrow \lambda < 15$$

$$\lambda'_3 < s_3\mu_3 \rightarrow 2,63\lambda < 3 \cdot 15 \rightarrow \lambda < 17,11$$

$$\lambda'_4 < s_4\mu_4 \rightarrow 1,35\lambda < 1 \cdot 25 \rightarrow \lambda < 18,52$$

Poiché devono essere verificate tutte contemporaneamente prendo la condizione più stringente cioè:

$$\lambda < 15$$

A questo punto so che: $\lambda_{massimo} = 15$ e quindi:

$$x_T = 3\lambda_{massimo} = 45$$

Sostituendo nell'equazione data mi trovo il valore di λ :

$$x_R = \frac{x_T}{2} \rightarrow 3\lambda = \frac{45}{2} \rightarrow \lambda = \frac{45}{6} = 7,5$$

Quindi ora lo sostituisco nei lambda effettivi ottenendo:

$$\lambda'_1 = 1,5 \quad \lambda'_2 = 15 \quad \lambda'_3 = 19,73 \quad \lambda'_4 = 10,13$$

$$x_R = 3\lambda = 22,5$$

Un altro modo per calcolarsi x_T consisteva nel fare il minimo tra i vari $\frac{s_j\mu_j}{v_j}$, perciò ora mi calcolo i v_j :

$$v_1 = \frac{\lambda'_1}{\sum \lambda_{esterni}} = \frac{0,2\lambda}{3\lambda} = \frac{0,2}{3} = 0,067$$

$$v_2 = \frac{2\lambda}{3\lambda} = 0,67 \quad v_3 = \frac{2,63\lambda}{3\lambda} = 0,877 \quad v_4 = \frac{1,35\lambda}{3\lambda} = 0,45$$

Calcolo l'x teorico:

$$x_T = \min\left\{\frac{1 \cdot 20}{0,067}; \frac{1 \cdot 30}{0,67}; \frac{3 \cdot 15}{0,877}; \frac{1 \cdot 25}{0,45}\right\} = \min\{298,5; 44,78; 51,31; 55,56\} = 44,78 \cong 45$$

Calcoliamo ora W_q dell'intero sistema che è dato da:

$$W_q = \sum_{j=1}^M v_j W_{q_j}$$

Quindi prima mi calcolo i W_{q_j} di ogni singola stazione:

Per le stazioni 1,2,4 uso la formula dei sistemi M/M/1:

$$W_{q_1} = \frac{1}{\mu_1 - \lambda'_1} - \frac{1}{\mu_1} = \frac{1}{20 - 1,5} - \frac{1}{20} = 0,004$$

$$W_{q_2} = \frac{1}{30 - 15} - \frac{1}{30} = 0,033$$

$$W_{q_4} = \frac{1}{25 - 10,13} - \frac{1}{25} = 0,027$$

Per la stazione 3 uso la formula dei sistemi M/M/S:

Da Little so che:

$$L_3 = \lambda'_3 W_{q_3} \rightarrow W_{q_3} = \frac{L_3}{\lambda'_3}$$

L_3 me lo calcolo con la formula riportata nell'esercizio usando μ_3 e λ'_3 al posto di μ e λ . Quindi risulta:

$$p_0 = 0,26 \text{ e quindi } L_3 = 0,14$$

$$W_{q_3} = \frac{0,14}{19,73} = 0,00693$$

$$W_q = 0,067 \cdot 0,004 + 0,67 \cdot 0,033 + 0,877 \cdot 0,00693 + 0,45 \cdot 0,027 = 0,04$$

Calcolo l'equazione di equilibrio:

$$U = (\lambda_2 + \lambda_3 + \mu_2 + 3\mu_3 + 0,8 + \mu_4) \cdot P(0, 3, 4, 2)$$

$$E = \lambda_2 P(0, 2, 4, 2) + \lambda_3 P(0, 3, 3, 2) + 0,8 \mu_2 P(0, 4, 4, 2) + \mu_4 P(0, 3, 4, 3) + 0,5 \mu_1 P(1, 3, 3, 2) + \\ 0,2 \mu_3 P(0, 3, 4, 2) + 0,4 \mu_3 P(0, 3, 5, 1) + 0,4 \mu_3 P(0, 2, 5, 2) + 0,1 \mu_2 P(0, 4, 4, 1) + 0,5 \mu_1 P(1, 3, 4, 1)$$

Per aumentare la produttività teorica devo aumentare il μ del collo di bottiglia fino a raggiungere il secondo collo di bottiglia, perciò:

$$\frac{s_2 \mu_2}{v_2} = 51,31$$

$$\mu'_2 = (51,31 \cdot 0,67) = 34,38$$

Con μ'_2 sto indicando il valore del nuovo μ quindi deve aumentare di:

$$\mu'_2 - \mu_2 = 34,38 - 30 = 4,38$$

Per aumentare la produttività reale devo aumentare il λ cioè la frequenza degli arrivi tenendo conto che la produttività reale non deve superare quella teorica.

Esercizio 3

Esame di Automazione Industriale I

COMPITO C

18-04-2008

Nome e Cognome _____ Matricola: _____

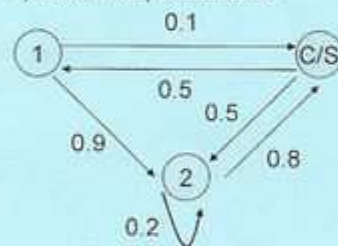
Domanda soglia

(Le matricole che hanno superato la domanda soglia saranno postate sul forum)

Definizione di throughput, throughput reale e teorico. Quali parametri variereste per aumentare il throughput reale e quello teorico senza modificare la rete, sia nelle code aperte che nelle code chiuse. Motivare le risposte.

Esercizio

In un'officina automatizzata arrivano dei grezzi che subiscono il seguente iter: vengono preparati nella stazione di carico/scarico (per il montaggio/smontaggio da un pallet), quindi sono avviati a uno dei due centri di lavorazione (1 o 2) dove vengono lavorati e trasformati in prodotti finiti o semilavorati. Il sistema è rappresentato in figura. Tutti i tempi di servizio sono esponenzialmente distribuiti. I valori attesi dei tempi di lavorazione per un pezzo sono: 3 minuti per la stazione di carico; 4 minuti per 1; mentre per la stazione B la velocità di servizio è pari a 14,25 pezzi l'ora. Il centro C/S è dotato di 3 serventi, mentre tutti gli altri centri sono monoserventi. Considerando che nel sistema sono presenti 4 pezzi contemporaneamente:



- 1) Calcolare la probabilità di trovarsi nello stato $(c/s=0, C1=2, C2=2)$
- 2) Quanto mediamente un cliente spende in coda nell'intero sistema
- 3) Con che probabilità nel centro C/S ci sono 4 clienti

Sistemi M/M/1/K

Sistemi M/M/1

$$N = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{\lambda}{\mu-\lambda}$$

$$N = \frac{\frac{\lambda}{\mu}}{1 - \frac{\lambda}{\mu}} - \frac{(K+1) \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{K+1}}{1 - \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{K+1}} \quad \varepsilon = \frac{1 - \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^K}{1 - \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{K+1}}$$

Sistemi M/M/S

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{i=0}^{s-1} \frac{1}{i!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i + \frac{1}{s!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s \frac{s\mu}{s\mu - \lambda}}$$

$$L = \frac{1}{s!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s P_0 \frac{\rho}{(1-\rho)^2} \quad \rho = \frac{\lambda}{s\mu}$$

$$f_j(n_j) = \begin{cases} \frac{(\lambda_j/\mu_j)^{n_j}}{n_j!} f_j(0) & n_j \leq s_j \\ \frac{(\lambda_j/\mu_j)^{n_j}}{s_j! s_j^{n_j-s_j}} f_j(0) & n_j \geq s_j \end{cases}$$

Reti CHIUSE

$$Pr(n_M = k) = f_M(k) \frac{G(M-1; N-k)}{G(M; N)}$$

Soluzione 3

Dati: $W_{c/s} = W_{s_3} = 3 \text{ min}$, $W_{s_1} = 4 \text{ min}$, $\mu_2 = 14,25 \text{ p/h} = 0,24 \text{ p/min}$, $s_3 = 3$, $N = 4$

Domande: $P(2, 2, 0)$? W_q ? $P(c/s = 4)$?

Svolgimento:

Per comodità chiamo la stazione c/s con il nome di stazione 3 e ho riordinato le macchine nel seguente modo: 1,2,3 ovvero con la stazione di carico scarico per ultima, è per questo che ho scambiato i posti nella probabilità di avere un determinato stato, poiché la macchina di scarico/carico l'ho messa per ultima e dato che a essa erano associati 0 clienti per comodità e per non sbagliarmi ho scritto 0 all'ultimo posto.

Mi calcolo i v :

$$v_3 = 1$$

$$v_1 = 0,5v_3$$

$$v_2 = 0,2v_2 + 0,9v_1 + 0,5v_3$$

$$\text{Ottengo: } v_1 = 0,5 \quad v_2 = 1,19 \quad v_3 = 1$$

Calcolo i vari x :

$$x_1 = \frac{v_1}{\mu_1} = 0,5 \cdot 4 = 2 \quad x_2 = \frac{1,19}{0,24} = 5 \quad x_3 = 1 \cdot 3 = 3$$

Mi calcolo gli $f_j(n_j)$:

$$f_1(0) = 1 \quad f_1(1) = 2 \quad f_1(2) = 4 \quad f_1(3) = 8 \quad f_1(4) = 16$$

$$f_2(0) = 1 \quad f_2(1) = 5 \quad f_2(2) = 25 \quad f_2(3) = 125 \quad f_2(4) = 625$$

$$f_3(0) = 1 \quad f_3(1) = 3 \quad f_3(2) = \frac{1}{2!} \cdot 3^2 = 4,5 \quad f_3(3) = \frac{1}{3!} \cdot 3^3 = 4,5 \quad f_3(4) = \frac{1}{3! \cdot 3^{4-3}} \cdot 3^4 = 4,5$$

Faccio la tabella:

| | 1 | 1,2 | 1,2,3 |
|---|----|------|--------|
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 2 | 7 | 10 |
| 2 | 4 | 39 | 64,5 |
| 3 | 8 | 203 | 356 |
| 4 | 16 | 1031 | 1851,5 |

$$G(2, 1) = 2 + 5 = 7 \quad G(3, 1) = 7 + 3 = 10 \quad G(2, 2) = 4 + 2 \cdot 5 + 25 = 39$$

$$G(3, 2) = 39 + 7 \cdot 3 + 4,5 = 64,5 \quad G(2, 3) = 8 + 4 \cdot 5 + 2 \cdot 25 + 125 = 203$$

$$G(3, 3) = 203 + 39 \cdot 3 + 7 \cdot 4,5 + 4,5 = 356$$

$$G(2, 4) = 16 + 8 \cdot 5 + 4 \cdot 25 + 2 \cdot 125 + 625 = 1031$$

$$G(3, 4) = 1031 + 203 \cdot 3 + 39 \cdot 4,5 + 7 \cdot 4,5 + 4,5 = 1851,5$$

Rispondo ora alla prima domanda. Gordon mi dice:

$$P(2,2,0) = \frac{f_1(2) \cdot f_2(2) \cdot f_3(0)}{G(M,N)} = \frac{4 \cdot 25 \cdot 1}{1851,5} = 0,054$$

Sapendo che:

$$W_q = \frac{N}{x_R} - \sum_{j=1}^M x_j$$

E che:

$$x_R = \frac{G(M, N-1)}{G(M, N)} = \frac{356}{1851,5} = 0,192$$

Allora:

$$W_q = \frac{4}{0,192} - (2 + 5 + 3) = 10,83$$

La probabilità che nella stazione 3 ci siano 4 clienti è pari a:

$$P(n_3 = 4) = f_3(4) \cdot \frac{G(M-1, N-k)}{G(M, N)} = 4,5 \cdot \frac{G(2,0)}{G(3,4)} = 4,5 \cdot \frac{1}{1851,5} = 0,00243$$

Esercizio 4

Esame di Automazione Industriale I

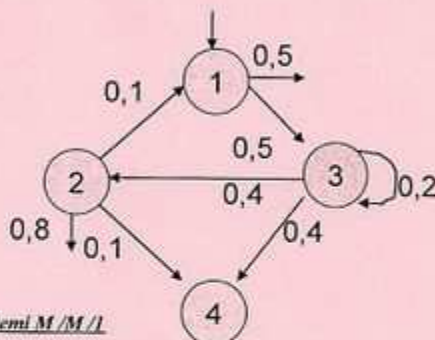
COMPITO C

23 aprile 2009

Nome e Cognome _____ Matricola: _____

Problema 1

Il sistema manifatturiero che si vuole esaminare è rappresentato in figura. Gli arrivi dall'esterno alle stazioni sono poissoniani con parametro $\lambda_1 = 4$ pezzi/ora; tutti i tempi di servizio sono esponenzialmente distribuiti. Le velocità di servizio dei vari centri sono rispettivamente 10 pezzi/minuto per il centro 1, 20 pezzi/minuto per 2, 30 pezzi/minuto per 3, 8 pezzi al minuto per il centro 4. Il centro 4 è l'unico dotato di quattro serventi (gli altri sono monoserventi).



- 1_ Dire quanto produce il sistema in un minuto e quanto potrebbe produrre se lavorasse alla sua massima capacità?
- 2_ Calcolare la probabilità di trovarsi nello stato lo stato (3,0,5,2)
- 3_ Quanto tempo spende un cliente nell'intero sistema

Sistemi M/M/1

$$N = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{\lambda}{\mu-\lambda}$$

Sistemi M/M/1/K

$$N = \frac{\frac{\gamma}{\mu}}{1 - \frac{\gamma}{\mu}} - \frac{(K+1) \left(\frac{\gamma}{\mu}\right)^{K+1}}{1 - \left(\frac{\gamma}{\mu}\right)^{K+1}} \varepsilon = \frac{1 - \left(\frac{\gamma}{\mu}\right)^K}{1 - \left(\frac{\gamma}{\mu}\right)^{K+1}}$$

Sistemi M/M/S

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{i=0}^{s-1} \frac{1}{i!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i + \frac{1}{s!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s \frac{s\mu}{s\mu - \lambda}}$$

$$L = \frac{1}{s!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s P_0 \frac{\rho}{(1-\rho)^2} \quad \rho = \frac{\lambda}{s\mu}$$

Reti APERTE

$$f_i(n_i) = \begin{cases} \frac{\phi_i^{n_i}}{n_i!} f_i(0) & n_i \leq s_i \\ \frac{\phi_i^{n_i}}{s_i! s_i^{n_i-s_i}} f_i(0) & n_i \geq s_i \end{cases}$$

Reti CHIUSE

$$f_i(n_i) = \begin{cases} \frac{x_i^{n_i}}{n_i!} & n_i \leq s_i \\ \frac{x_i^{n_i}}{s_i! s_i^{n_i-s_i}} & n_i \geq s_i \end{cases}$$

$$Pr(n_M=k) = f_M(k) \frac{G(M-1; N-k)}{G(M; N)}$$

Soluzione 4

Dati:

$$\lambda_1 = 4 \text{ p/h} = 0,067 \text{ p/min}, \mu_1 = 10 \text{ p/min}, \mu_2 = 20 \text{ p/min}, \mu_3 = 30 \text{ p/min}, \mu_4 = 8 \text{ p/min}, s_4 = 4$$

Domande: x_R ? x_T ? $P(3,0,5,2)$? W ?

Svolgimento:

Poiché la produttività reale coincide con la somma dei lambda esterni:

$$x_R = \lambda_1 = 0,067$$

Per la produttività teorica mi calcolo i lambda effettivi:

$$\lambda'_1 = 0,067 + 0,1\lambda'_2$$

$$\lambda'_2 = 0,4\lambda'_3$$

$$\lambda'_3 = 0,2\lambda'_3 + 0,5\lambda'_1$$

$$\lambda'_4 = 0,1\lambda'_2 + 0,4\lambda'_3$$

$$\text{Ottenendo: } \lambda'_1 = 0,0687 \quad \lambda'_2 = 0,017 \quad \lambda'_3 = 0,043 \quad \lambda'_4 = 0,0189$$

Poiché ogni lambda effettivo è minore del corrispondente $s_j\mu_j$ allora il sistema è stazionario.

Ora mi calcolo i visit count:

$$v_1 = \frac{\lambda'_1}{\lambda} = \frac{0,0687}{0,067} = 1 \quad v_2 = \frac{\lambda'_2}{\lambda} = \frac{0,017}{0,067} = 0,254 \quad v_3 = \frac{0,043}{0,067} = 0,64 \quad v_4 = \frac{0,0189}{0,067} = 0,282$$

Adesso posso procedere al calcolo della produttività teorica:

$$x_T = \min\left\{\frac{1 \cdot 10}{1}; \frac{1 \cdot 20}{0,254}; \frac{1 \cdot 30}{0,64}; \frac{4 \cdot 8}{0,282}\right\} = \min\{10; 78,74; 46,88; 113,48\} = 10$$

Grazie a Jackson so che:

$$P(3, 0, 5, 2) = f_1(3) \cdot f_2(0) \cdot f_3(5) \cdot f_4(2)$$

Per le macchine 1,2,3 ho che:

$$f_1(3) = \left(\frac{\lambda'_1}{\mu_1}\right)^3 \cdot \left(1 - \frac{\lambda'_1}{\mu_1}\right) = 0,000000322$$

$$f_2(0) = \left(\frac{\lambda'_2}{\mu_2}\right)^0 \cdot \left(1 - \frac{\lambda'_2}{\mu_2}\right) = 1$$

$$f_3(5) = \left(\frac{\lambda'_3}{\mu_3}\right)^5 \cdot \left(1 - \frac{\lambda'_3}{\mu_3}\right) = 6 \cdot 10^{-15}$$

poiché monoserventi.

Invece per calcolare $f_4(2)$ uso:

$$f_4(2) = \frac{1}{n_4!} \cdot \left(\frac{\lambda'_4}{\mu_4} \right)^{n_4} \cdot f_4(0)$$

Dove al posto di $f_4(0)$ devo usare la formula p_0 data nel formulario. Quindi facendo i calcoli si ottiene:

$$f_4(0) = 0,998 \rightarrow f_4(2) = 0,000002784$$

Dunque ottengo:

$$P(3, 0, 5, 2) = 5,38 \cdot 10^{-27}$$

Per calcolarmi il tempo speso da un cliente nell'intero sistema mi faccio prima il calcolo di W di ciascuna stazione moltiplicato per v e li sommo.

Per le prime tre stazioni poiché sono di tipo M/M/1 ho:

$$W_1 = \frac{1}{\mu_1 - \lambda'_1} = \frac{1}{10 - 0,0687} = 0,1 \quad W_2 = \frac{1}{20 - 0,017} = 0,05 \quad W_3 = \frac{1}{30 - 0,043} = 0,033$$

Per la stazione 4 grazie a Little so:

$$W_4 = \frac{L_4}{\lambda'_4} + \frac{1}{\mu_4}$$

L_4 me lo calcolo usando le formule dei sistemi M/M/S.

Facendo i calcoli ottengo che:

$$L_4 = 7,66 \cdot 10^{-16}$$

$$W_4 = 0,125$$

$$W = 1 \cdot 0,1 + 0,254 \cdot 0,05 + 0,64 \cdot 0,033 + 0,282 \cdot 0,125 = 0,17$$

Software per la risoluzione di reti di code:

<http://autolab.altervista.org/>