

概率角辐射度（Probabilistic Angular Radiance）——一种实时 2D 场景直接光照渲染方法

Qiu ZhengYu¹

¹ Independent Researcher

摘要

高质量的实时光照算法对提升游戏画面的表现力与艺术性至关重要。然而，基于传统光线步进方法的渲染过程常因巨大的采样计算开销而难以满足实时性要求。现有工作大多依赖降噪与采样优化策略，但仍难以在保持视觉质量的前提下实现稳定的高帧率渲染。针对这一问题，本文提出一种基于概率角辐射度（Probabilistic Angular Radiance）的实时渲染算法。该方法通过概率模型直接估计光源对场景点的辐射度贡献，以避免传统蒙特卡洛采样中的采样计算，在显著提升渲染效率的同时，保持了光照细节的丰富性与视觉一致性。实验结果表明，该算法在多种光照条件下均能够实现高质量的实时渲染效果，为高动态场景下的实时图形应用提供了一种新的解决方案。

1. 引入

在传统的光线步进（Ray Marching）方法 [1] 背景下，在 2D 场景的渲染的通常的做法是以目标点为圆心，向圆的四周发射光线进行采样（Sampling）。并更具采样方法不同选择合适的手段取得均值。

这本质上是对渲染方程

$$L_o(x, \omega_o, \lambda, t) = L_e(x, \omega_o, \lambda, t) + \int_{\Omega} f_r(x, \omega_i, \omega_o, \lambda, t) L_i(x, \omega_i, \lambda, t) (\omega_i \cdot n) d\omega_i \quad (1)$$

的蒙特卡洛采样（Monte Carlo Samping）过程。

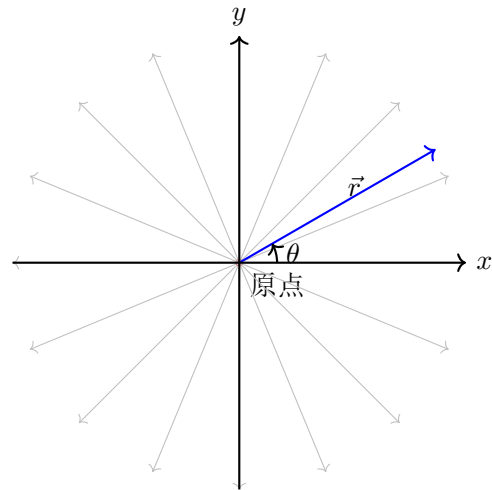


图 2. Ray Marching 的采样过程

在只考虑直接光的渲染背景下，我们可以把二维平面内某一点 P 受到的光照 L_P 以如下形式表示：

$$L_P = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \text{Trace}(\theta) d\theta \quad (2)$$

其中， $\text{Trace}(\theta)$ 表示在方向 θ 上采样的结果。当我们假设场景中有且只有一个光源 A ，光源 A 的辐射照度为 e 。定义可见函数 $V_{XP}(\theta)$ 如下：

$$V_{XP}(\theta) = \begin{cases} 1, & \text{光源 X 相对于 P 在 } \theta \text{ 角下可见} \\ 0, & \text{光源 X 相对于 P 在 } \theta \text{ 角下不可见} \end{cases}$$

我们这里假设所有光源对于每个角度的辐射照度都是均匀的，则可以把公式 2 改写成如下形式

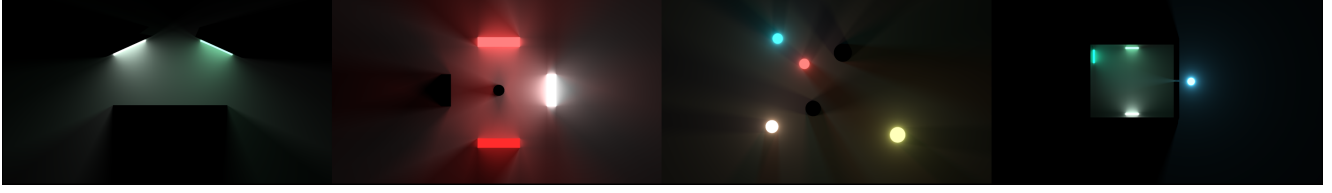


图 1. 图是使用 PAR 方法渲染得到的 2D 场景结果图，该图展现了 PAR 方法的视觉正确性

$$L_a = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} V_{Aa}(\theta) e d\theta \quad (3)$$

我们定义点 a 关于光源 A 的概率角域为所有使得 $V_{Aa} = 1$ 的角度 θ 所构成的集合，记作 $\Theta_A(a)$ 。该集合的 Lebesgue 测度记作 $\mu(\Theta_A(a))$ ，Lebesgue 测度表示该角域的大小（弧度），于是公式 3 可以改写成如下形式：

$$L_a = \frac{1}{2\pi} \int_{\Theta} e d\theta = \frac{\mu(\Theta_A(a))}{2\pi} e \quad (4)$$

由于场景中只有一个光源 A ，我们并不考虑遮挡，因此这个角域应为一个连续的域 $\Theta_A(a) = [\theta_1, \theta_2]$ ，其测度 $\mu(\Theta_A(a)) = \theta_2 - \theta_1$ ，代入公式 4 就可以得到：

$$L_a = \frac{\theta_2 - \theta_1}{2\pi} e$$

其中 $\frac{\theta_2 - \theta_1}{2\pi}$ ，便是从某个随机的方向 θ 发射一条射线击中该光源的概率，记作 p_{hit} 。于是一般地，我们可以用从某个随机的方向 θ 发射一条射线击中该光源的概率来估计一个均匀发光体 X 在某一点 a 的辐射照度 L_{aX} ：

$$L_{aX} = p_{hit} c_X \quad (5)$$

这便是 PAR 的核心思想——使用概率来描述光源，通过使用概率来刻画光源，并解析地直接求出概率，便可以跳过采样过程，直接解析地求解光照。

2. 方法概述

2.1. 概率角域

概率角域 (Probabilistic Angle) 定义为：给定平面内一凸多边形（顶点集为 \mathcal{A} ）及一点 P ，从 P 出发

的所有与该多边形相交的射线对所构成的角域记作 $\Theta_X(P)$ ，其中使得 $\mu(\Theta_X(P))$ 最大值的角域为点 P 关于该凸多边形的概率角域。具体地，若射线 $\overrightarrow{PA_m}$ 和 $\overrightarrow{PA_n}$ 与多边形相交于两点，且对任意多边形的其他点对 A_x, A_y ，均满足 $\angle A_x P A_y \leq \angle A_m P A_n$ ，则 $\mu(\Theta_X(P)) = \angle A_m P A_n$ 。

在该定义下，如前文所述，有 $p_{hit} = \frac{\mu(\Theta_X(P))}{2\pi}$ ，从而 $L_{aX} = p_{hit} \cdot c_X$ 。

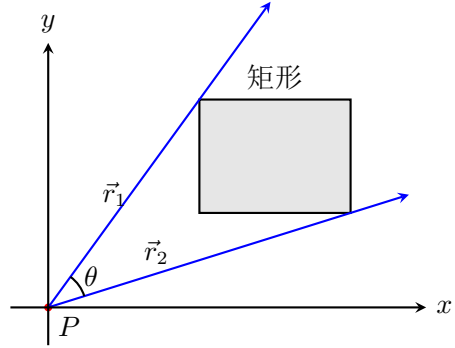


图 3. 概率角示意图

在 PAR 中，概率角域使用构成概率角的一个向量对 r_1, r_2 表示，记作 (r_1, r_2) 。有 $\mu(\Theta_X(P)) = \arccos\left(\frac{r_1 \cdot r_2}{|r_1||r_2|}\right)$ 。

通过概率角域的建模，场景中多个不同形状的几何体便可以抽象为多对向量，以便后续的光照计算。

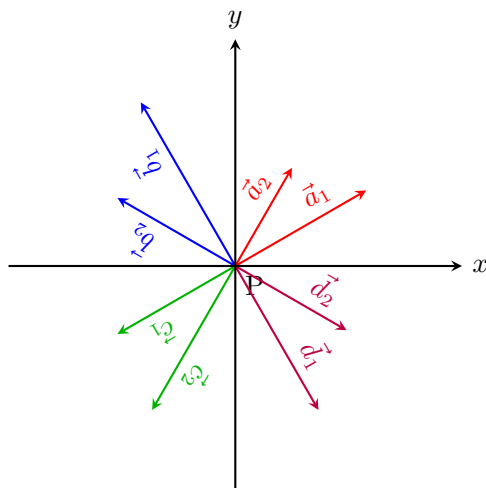


图 4. 用概率角建模光源和遮挡物

2.2. 遮挡物对击中概率的影响

遮挡物剔除. 在上一节中, 我们使用概率角重建了光源和遮挡物, 而想要正确地生成阴影, 还需要将遮挡物的概率角从光源的概率角中剔除。图 2.2 展示了遮挡物和光源概率角可能存在的位置关系:

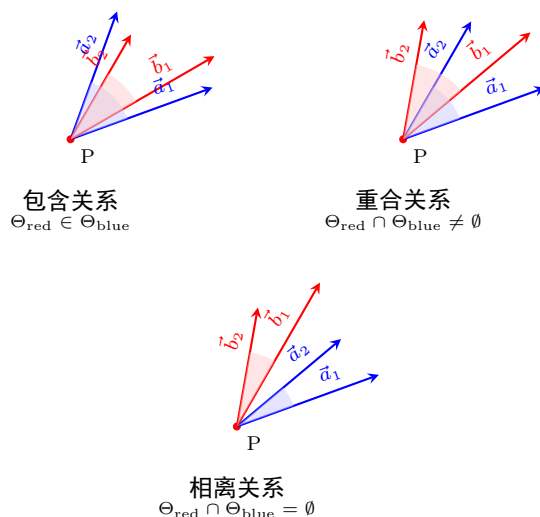


图 5. 角域关系示意图: 包含、重合和相离

在实现上, 我们利用广义点乘计算二维向量的点乘来判断各个向量间的位置关系, 并通过位置关系来确定重叠的概率角域 $\Theta_{V\text{overlap}} = \Theta_V \cap \Theta_B$ 。点 \mathbf{x} 关于光源 L 的实际可见角域 Θ_{visible} 为光源角域与所有遮挡物角域差集的交集:

$$\Theta_{\text{visible}} = \Theta_L(\mathbf{x}) \setminus \bigcup_{B \in \mathcal{B}} \Theta_B(\mathbf{x})$$

上式中 \mathcal{B} 为遮挡物集合, Θ_L 、 Θ_B 分别表示光源和遮挡物的概率角域, 其测度 $\mu(\Theta_{\text{visible}})$ 决定了最终的击中概率 $p_{\text{hit}} = \frac{\mu(\Theta_{\text{visible}})}{2\pi}$ 。

遮挡概率角合并. 但如果直接将光源的概率角减去遮挡物的概率角, 可能会在遮挡物概率角重合的情况下导致重复计算的问题, 如图 2.2 和图 2.2 所示。即, 我们需要处理的是集合的并集测度 $\mu(\bigcup_{B \in \mathcal{B}} \Theta_B)$ 而非简单求和 $\sum \mu(\Theta_B)$ 。

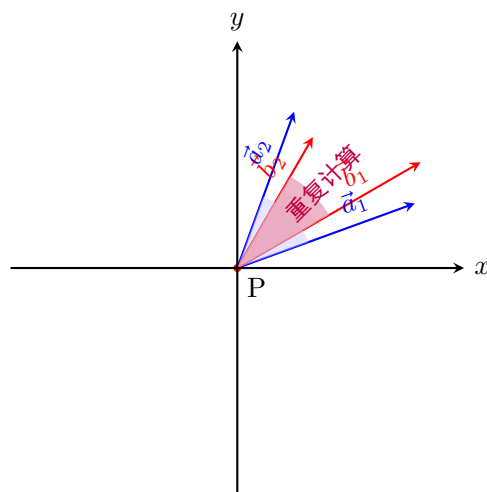
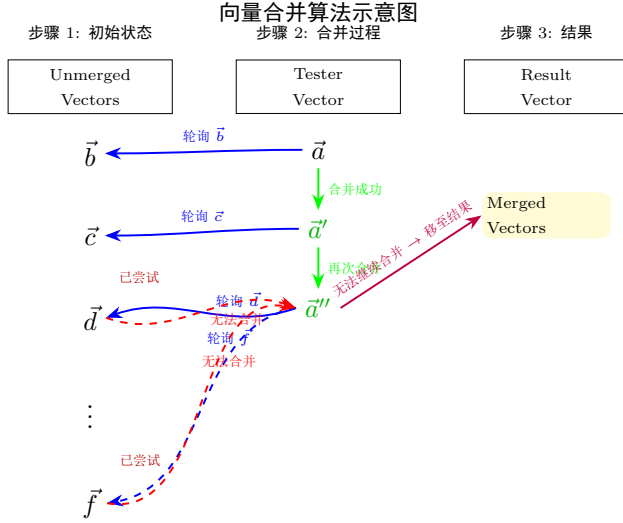


图 6. 重复计算遮挡角域测度示意图。直接减去 $\mu(\Theta_{B1}) + \mu(\Theta_{B2})$ 会重复计算交集部分 $\mu(\Theta_{B1} \cap \Theta_{B2})$ 。



图 7. 重复计算的遮挡概率角导致的部分遮挡概率角发生重叠的区域出现了错误

为了解决这个问题，我们引入了遮挡概率角合并机制，在从光源概率角中剔除遮挡概率角以前，先对所有遮挡概率角进行合并，即计算所有遮挡物角域的并集 $\Theta_B = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} \Theta_B$ 。合并的算法采用轮询设计，每次从未合并列表选取一个元素进行轮询，不断迭代合并直到彻底无法合并为止。该过程实质上是计算一组集合的并集。



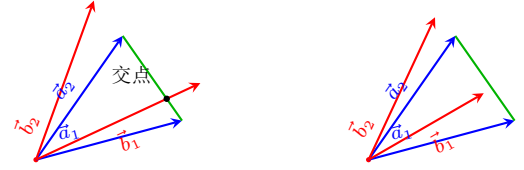
遮挡物深度判断。 除了关注遮挡概率角以外，一个遮挡物是否在事实上遮挡住了光源也是一个需要讨论的事情。这可以分为三种情况来讨论。

1. 光源和遮挡物的概率角是相离的。即 $\Theta_L \cap \Theta_B = \emptyset$ 。这种情况下，遮挡物绝对没有可能遮挡住光源，因此直接忽略该遮挡物对光源角域造成的影响。

2. 光源和遮挡物的概率角出现了重合。即 $\Theta_L \cap \Theta_B \neq \emptyset$ 。这种情况下，遮挡物既有可能遮挡住光源，也有可能没有遮挡住光源。这个时候我们关注光源的两条向量和遮挡物的两条向量终点形成的线段的关系。如果光源的两条向量和遮挡物的两条向量终点形成的线段存在交点，那么这个遮挡物一定遮挡住了光源，否则一定没有遮挡住光源。

情况一：发生遮挡

情况二：未发生遮挡



关键光线击中遮挡物，发生遮挡 关键光线无法击中遮挡物，未发生遮挡

图 8. 角域重合时，通过几何测试判断实际遮挡情况

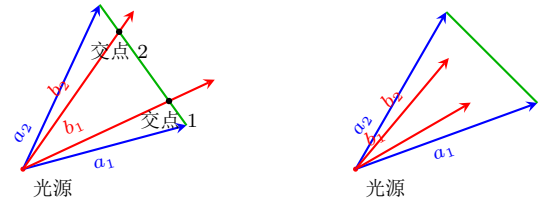
3. 光源和遮挡物的概率角相互包含。这可分为两种情况讨论，第一种情况是光源的角域被遮挡物的角域包含 ($\Theta_L \subset \Theta_B$)。第二种情况是遮挡物的角域被光源的角域包含 ($\Theta_B \subset \Theta_L$)。

假如是 $\Theta_L \subset \Theta_B$ ，此时需要检测光源的两条关键光线是否与遮挡物两个关键光线向量端点形成的线段存在交点。如果存在交点，则光源被该遮挡物遮挡，否则没有产生遮挡。

如果是 $\Theta_B \subset \Theta_L$ ，处理方式与上述几乎一致，但需要判断的是遮挡物的两条关键光线是否与光源两个关键光线向量端点形成的线段存在交点。如果存在交点，则该遮挡物一定在光源之后，不会产生遮挡，否则该遮挡物对光源有遮挡作用。

情况一：发生遮挡

情况二：未发生遮挡



关键光线击中遮挡物，发生遮挡 关键光线无法击中遮挡物，未发生遮挡

图 9. 角域包含时，通过几何测试判断实际遮挡情况

2.3. 总结

根据上文的讨论，我们可以写出 PAR 的最终渲染着色公式。假设场景中有若干个光源 \mathcal{L} 和遮挡物 \mathcal{B} 。对于 2D 场景内某一点 \mathbf{x} 的最终辐射照度 $L_{\mathbf{x}}$ 有：

$$L_{\mathbf{x}} = \sum_{L \in \mathcal{L}} e_L \cdot \frac{\mu(\Theta_L(\mathbf{x}) \setminus \bigcup_{B \in \mathcal{B}} \Theta_B(\mathbf{x}))}{2\pi} \quad (6)$$

其中 e_L 表示光源的辐射照度, Θ_L 是点 \mathbf{x} 关于光源 L 的可见角域, Θ_B 是点 \mathbf{x} 关于遮挡物 B 的可见角域, μ 表示 Lebesgue 测度。

3. 总结与展望

本文提出了一种基于概率角辐射度 (Probabilistic Angular Radiance, PAR) 的实时 2D 场景直接光照渲染方法。该方法通过概率模型直接估计光源对场景点的辐射度贡献, 避免了传统蒙特卡洛采样中的高计算开销, 在保持视觉质量的同时显著提升了渲染效率。实验结果表明, PAR 方法在多种光照条件下均能实现高质量的实时渲染效果, 适用于高动态场景下的图形应用。

尽管 PAR 方法在实时性与视觉一致性方面表现出色, 但仍存在一定的局限性:

首先, 当前方法仅处理了直接光照, 未考虑间接光照与全局光照效果, 因此在某些复杂光照场景中可能显得不够真实。在极端密集遮挡情况下, 角域的合并与剔除算法可能带来额外的计算负担, 影响实时性能。此外, 由于 PAR 方法需对每个点进行逐光源可见性测试, 因此对光源数量展现出高敏感性。

参考文献

- [1] J. Hart. Sphere tracing: A geometric method for the antialiased ray tracing of implicit surfaces. The Visual Computer, 12, 06 1995. 1