Probabilidade e Estatística: Variáveis Aleatórias Discretas (Unidade III)

Felipe Quintino

felipe.quintino@unb.br

Departamento de Estatística-EST
Universidade de Brasília-UnB

02/2025

1. Variáveis Aleatórias Discretas
   - Variáveis aleatórias discretas; função de probabilidade
   - Função de distribuição
   - Média e variância de variáves aleatórias discretas
   - Principais modelos probabilísticos discretos
   - Aproximação Poisson à binomial

2. Referências

Atenção: Proibido Registrar Imagens ou Áudios Durante as Aulas

Variáveis aleatórias discretas; função de probabilidade

Definição 1

Uma função $X : \Omega \to \mathcal{X}$ definida no espaço amostral e assumindo valores reais é chamada uma **variável aleatória**.

(i) *No caso em que $\mathcal{X}$ é um conjunto enumerável (i.e., podemos contar o número de elementos), chamaremos X de* **variável aleatória discreta**;

(b) *Caso contrário, diremos que X é* **contínua**.

Exemplo 2

1. *Considere o experimento de lançar uma moeda e observar o resultado.*
2. *O espaço amostral apropriado é*

$$\Omega = \{Cara, Coroa\}.$$

3. *Defina a variável aleatória discreta*

$$X = \begin{cases} 1, & \textit{se o resultado do lançamento é cara,} \\ 0 & \textit{caso contrário.} \end{cases}$$

Exemplo 3

- *Considere o experimento de lançar uma moeda repetidas vezes (de forma independente) até se obter a primeira cara.*
- *O espaço amostral apropriado é*

$$\Omega = \{C, KC, KKC, KKKC, \cdots\}.$$

- *Podemos definir a variável aleatória discreta X que descreve o* **número de lançamentos até obter a primeira cara**.
- *Os possíveis valores de X são números naturais:*

$$1, 2, 3, \cdots$$

Exemplo 4

- *Considere o experimento modelado pela variável aleatória discreta N que descreve o* **número de ligações recebidas em um central telefônica** *(num intervalo de tempo fixado).*
- *Os possíveis valores que N pode assumir são números inteiros não-negativos:*

$$0, 1, 2, \cdots$$

Exemplo 5

- *Defina a variável aleatória (contínua)* T *que descreve o* **tempo de vida de um determinado componente eletrônico***.*
- *Observe que* T *pode assumir qualquer valor real positivo, ou seja,* T *assume valores no intervalo* $[0, \infty)$*.*

Conhecendo as “leis” de probabilidade associadas a cada variável aleatória, somos capazes de calcular qualquer probabilidade de interesse. Para isso, serão estudadas

- função de probabilidade/densidade;
- função de distribuição.

Função de probabilidade

Uma variável aleatória (v.a.) discreta X estará bem caracterizada se indicarmos os possíveis valores $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ que ela pode assumir e as respectivas probabilidades $P(X = x_1), \cdots, P(X = x_n), \cdots$

Função de probabilidade

Uma variável aleatória (v.a.) discreta X estará bem caracterizada se indicarmos os possíveis valores $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ que ela pode assumir e as respectivas probabilidades $P(X = x_1), \cdots, P(X = x_n), \cdots$

Definição 6

Chamamos **função de probabilidade** *da v.a. discreta* X, *que assume os valores* $x_1, x_2, \cdots, x_n$ *a função* $\{(x_i, p(x_i)), i = 1, 2, \cdots\}$, *que a cada valor de* x_i *associa a sua probabilidade de ocorrência, isto é,*

$$p(x_i) = P(X = x_i) = p_i.$$

Observação 7

Se a função $p(x)$ *é uma função de probabilidade associada a uma v.a. discreta* X *que assume valores em* $\{x_1, \cdots, x_n, \cdots\}$*, temos que*

(i) $0 \leq p(x_i) \leq 1$, *para* $i = 1, 2, \cdots$

(ii) $\sum_{i=1}^{\infty} p(x_i) = 1$.

Voltando ao Exemplo 2, podemos notar que a função de probabilidade é completamente caracterizada quando conhecemos a probabilidade p de que a moeda lançada resulte em cara ($X = 1$), ou seja,

$$P(X = 1) = p \ \text{ e } \ P(X = 0) = 1 - p,$$

onde consideramos $0 \leq p \leq 1$.

Voltando ao Exemplo 2, podemos notar que a função de probabilidade é completamente caracterizada quando conhecemos a probabilidade p de que a moeda lançada resulte em cara ($X = 1$), ou seja,

$$P(X = 1) = p \ \text{ e } \ P(X = 0) = 1 - p,$$

onde consideramos $0 \leq p \leq 1$.

Observação 8

Dizemos que o valor p é um **parâmetro**.

Voltando ao Exemplo 3, as probabilidades ficam completamente caracterizadas quando obtemos cada $P(X = x)$ onde $x = 1, 2, 3, \cdots$

- Como os lançamentos ocorrem de forma independentes, obtemos

$$\begin{array}{rcl} P(X=1) & = & p, \\ P(X=2) & = & (1-p)p, \\ P(X=3) & = & (1-p)^2 p, \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

- Podemos resumir essa função de probabilidade em

$$P(X = x) = (1-p)^{x-1} p, \ x = 1, 2, \cdots$$

Voltando ao Exemplo 3, as probabilidades ficam completamente caracterizadas quando obtemos cada $P(X = x)$ onde $x = 1, 2, 3, \cdots$

- Como os lançamentos ocorrem de forma independentes, obtemos

$$
\begin{array}{rcl}
P(X=1) & = & p, \\
P(X=2) & = & (1-p)p, \\
P(X=3) & = & (1-p)^2 p, \\
\vdots & \vdots & \vdots
\end{array}
$$

- Podemos resumir essa função de probabilidade em

$$P(X = x) = (1-p)^{x-1} p, \;\; x = 1, 2, \cdots$$

Exercício

Verifique que $P(X = x)$ satisfaz (i) e (ii) da Observação 7.

Exercícios

Verifique que as seguintes $p(x)$ satisfazem (i) e (ii) da Observação 7

1. $p(x) = \left(\begin{array}{c} n \\ x \end{array} \right) p^x (1-p)^{n-x}$, para $x = 0, \cdots, n$ e $0 < p < 1$;
2. $p(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$, para $x = 0, 1, 2, \cdots$ e $\lambda > 0$;
3. $p(x) = \frac{1}{k}$, para $x = 1, 2, \cdots, k$.

Exercício

- Uma linha de fabricação de um equipamento de precisão é interrompida na primeira ocorrência de um defeito.
- A partir da manutenção, o equipamento tem probabilidade de 0.01 de apresentar defeito em um dia qualquer.
- Deseja-se planejar o programa de manutenção preventiva e, para tal, decidiu-se avaliar probabilisticamente a espera até a produção ser interrompida.
- Defina X a v.a. que conta o número de dias que antecedem a interrupção.

Admitindo que o desempenho nos dias sucessivos sejam independentes, calcule a probabilidade de uma interrupção no sexto dia.

Exercício

- Uma linha de fabricação de um equipamento de precisão é interrompida na primeira ocorrência de um defeito.
- A partir da manutenção, o equipamento tem probabilidade de 0.01 de apresentar defeito em um dia qualquer.
- Deseja-se planejar o programa de manutenção preventiva e, para tal, decidiu-se avaliar probabilisticamente a espera até a produção ser interrompida.
- Defina X a v.a. que conta o número de dias que antecedem a interrupção.

Admitindo que o desempenho nos dias sucessivos sejam independentes, calcule a probabilidade de uma interrupção no sexto dia.

Resposta: $0.01x0.99^5 = 0.0095$.

Exercício

Determine a constante $c \in \mathbb{R}$ de modo que a função a seguir seja uma função de probabilidade de alguma variável aleatória discreta

$$p(x) = c(x-2)^2, \quad x = 3, 4, 5, 6.$$

Exercício

Determine a constante $c \in \mathbb{R}$ de modo que a função a seguir seja uma função de probabilidade de alguma variável aleatória discreta

$$p(x) = c(x-2)^2, \quad x = 3, 4, 5, 6.$$

Resposta: $c = 1/30$.

Função de Distribuição

Definição 9

Dada a variável aleatória X, *chamaremos de* **função de distribuição (acumulada)** $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$ *à função*

$$F(x) = P(X \leq x).$$

Propriedades da função de distribuição

Algumas propriedades da função de distribuição $F(x)$ são:

(P1) $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ e $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$;

(P2) F é contínua à direita;

(P3) F é não-decrescente, isto é, $F(x) \leq F(y)$ sempre que $x \leq y$, para todos $x, y, \in \mathbb{R}$.

Retornando ao Exemplo 2, a função de distribuição associada à v.a. X é

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad x < 0, \\ 1 - p & \text{se} \quad 0 \leq x < 1, \\ 1 & \text{se} \quad x \geq 1. \end{cases}$$

Exemplo 10

- *Considere dois lançamentos independentes de uma moeda equilibrada.*
- *Então o espaço de probabilidade usual é*

$$\Omega = \{CC, CK, KC, KK\},$$

onde C *indica ocorrência de cara e* K *coroa.*

- *Defina a v.a. discreta* X *como sendo o número de caras nos dois lançamentos.*
- *A função de probabilidade de* X *é*

X	0	1	2
$p(x)$	1/4	1/2	1/4

Continuação do Exemplo 10

A função de distribuição (f.d.) é dada por

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad x < 0, \\ 1/4, & \text{se} \quad 0 \leq x < 1, \\ 3/4, & \text{se} \quad 1 \leq x < 2, \\ 1, & \text{se} \quad x \geq 2. \end{cases} \tag{1}$$

Representação gráfica da função de distribuição (f.d.)

A f.d. (1) pode ser representada por

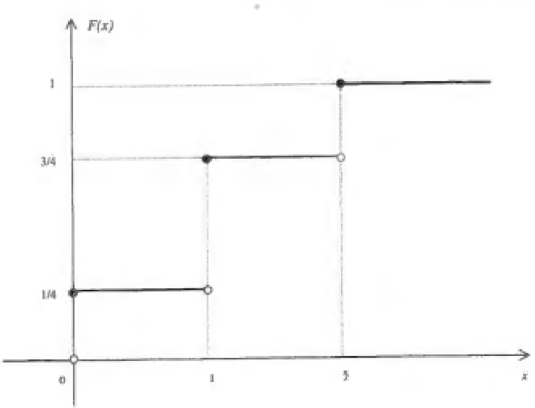

Figure: Figura 2.1 em Magalhães (2006).

Relação entre as funções de probabilidade e distribuição

Seja X uma v.a. discreta assumindo os possíveis valores $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$, com função de probabilidade $p(x) = P(X = x)$ e função de distribuição $F(x) = P(X \leq x)$. Observe que:

(a)

$$F(x) = \sum_{i; x_i \leq x} p(x_i) = \sum_{i; x_i \leq x} P(X = x_i);$$

(b) para todo índice $i \in \{1, 2, \cdots\}$

$$p(x_i) = P(X = x_i) = F(x_i) - F(x_i^-),$$

onde x^- representa o limite à esquerda, ou seja, $F(x^-) = \lim_{y \to x^-} F(y)$.

Observação 11

Uma v.a. X *com função de distribuição* $F(\cdot)$ *será classificada como* **contínua**, *se existir uma função não-negativa* f *tal que*

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt, \quad \textit{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

A função $f(\cdot)$ é denominada **função de densidade** (e será estudada na Unidade IV).

Exercícios

Sabe-se que a v.a. X assume os valores $1, 2$ e 3 e que sua f.d. $F(x)$ é tal que

$$
\begin{aligned}
F(1)–F(1–) &= 1/3, \\
F(2)–F(2–) &= 1/6, \\
F(3)–F(3–) &= 1/2.
\end{aligned}
$$

Obtenha a distribuição de X, a f.d. $F(x)$ e os gráficos respectivos.

Exercícios

Suponha que X seja uma v.a. discreta, com f.p. $p(x) = 2^{-x}$, $x = 1, 2, \cdots$. Calcule:

1. $P(X \text{ ser par})$
2. $P(X \leq 3)$
3. $P(X > 10)$

Assim como na Unidade I (Estatística Descritiva) estavamos interessados no estudo de Média e Variância, no caso de variáveis aleatórias tal estudo também será importante.

Considere o experimento de lançar uma moeda. Defina a v.a. X por

$$X = \begin{cases} 1 & \text{se o resultado for cara,} \\ 0 & \text{se o resultado for coroa.} \end{cases}$$

Então a função de probabilidade de X é dada na tabela

X	1	0
$P(X = x)$	p	$1 - p$

onde $0 < p < 1$ indica a probabilidade de obter cara.

Pergunta

Se repetirmos esse experimento n vezes, qual seria o número esperado de caras?

- Considere o experimento de lançar uma moeda honesta 4 vezes. Defina a v.a. X que indica o número de caras obtidas nos 4 lançamentos.
- Os possíveis valores de que X pode assumir são $0, 1, 2, 3, 4$.
- Então a função de probabilidade de X é dada na tabela

X	0	1	2	3	4
$P(X = x)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$

Considerando as probabilidades $p_x = P(X = x)$ como frequência relativa, a "média" de X é dada por

$$\bar{X} = \sum_{x=0}^{4} x p_x = 1 \cdot \frac{4}{16} + 2 \cdot \frac{6}{16} + 3 \cdot \frac{4}{16} + 4 \cdot \frac{1}{16} = \frac{32}{16} = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2.$$

Ou seja, o número esperado (médio) de caras é 2.

Definição 12

Seja X uma v.a. discreta assumindo os valores $x_1, x_2, \cdots, x_n$ e com função de probabilidade representada na tabela a seguir

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
$p_i = P(X = x_i)$	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

Definimos o **valor esperado** *(esperança, ou média) de X por*

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i.$$

Observação 13

O conceito de esperança pode ser estendido para uma v.a. discreta X *assumindo infinitos valores, digamos* $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$, *em que*

$$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i.$$

Variância de v.a.'s discretas

De modo análogo ao conceito de esperança, podemos estender a noção de variância estudada na Unidade I para v.a.'s discretas.

Definição 14

Seja X *uma v.a. discreta assumindo os valores* $x_1, x_2, \cdots, x_n$ *e com função de probabilidade representada na tabela a seguir*

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
$p_i = P(X = x_i)$	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

Considere a média de X *como sendo* $E(X) = \mu$*. Definimos a* **variância** *de* X *por*

$$Var(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 p_i.$$

Definição 14

Seja X *uma v.a. discreta assumindo os valores* $x_1, x_2, \cdots, x_n$ *e com função de probabilidade representada na tabela a seguir*

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
$p_i = P(X = x_i)$	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

Considere a média de X *como sendo* $E(X) = \mu$*. Definimos a* **variância** *de* X *por*

$$Var(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 p_i.$$

O conceito de variância pode ser estendido para o caso da v.a. X assumir infinitos valores $x_1, x_2, \cdots$.

Observe que a variância de uma v.a. discreta X pode ser reescrita

1. em função da média $E(X) = \mu$ e de $x_1^2, x_2^2, \cdots, x_n^2$ como

$$Var(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - \mu^2;$$

2. em termos de esperança

$$Var(x) = E[(X - E(X))^2] = E(X^2) - [E(X)]^2.$$

Propriedades da esperança e da variância

Sejam X e Y v.a.'s discretas e a, b constantes. Então são válidas:

(P1) $E(aX + b) = aE(X) + b$;

(P2) $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$;

(P3) Se $X \leq Y$, então $E(X) \leq E(Y)$;

(P4) $Var(aX + b) = a^2 Var(X)$.

Provas. Feitas em aula.

Exercício

Uma pequena cirurgia dentária pode ser realizada por três métodos diferentes cujos tempos de recuperação (em dias) são modelados pelas variáveis X_1, X_2 e X_3. Admita que suas funções de probabilidade são dadas por

X_1	0	4	5	6	10
p_i	$0,2$	$0,2$	$0,2$	$0,2$	$0,2$

X_2	1	5	9
p_i	$1/3$	$1/3$	$1/3$

X_3	4	5	6
p_i	$0,3$	$0,4$	$0,3$

Calcule a média e a variância de X_1, X_2 e X_3.

Observação 15

Considere uma função contínua $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *e uma v.a. discreta* X *assumindo os valores* $x_1, x_2, \cdots$ *com função de probabilidade* $p(x_i) = P(X = x_i)$. *Então a* $g(X)$ *é uma v.a. discreta e*

$$E[g(X)] = \sum_{i=1}^{\infty} g(x_i)p(x_i).$$

Observação 15

Considere uma função contínua $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *e uma v.a. discreta* X *assumindo os valores* $x_1, x_2, \cdots$ *com função de probabilidade* $p(x_i) = P(X = x_i)$*. Então a* $g(X)$ *é uma v.a. discreta e*

$$E[g(X)] = \sum_{i=1}^{\infty} g(x_i)p(x_i).$$

Pergunta

O que ocorre se g não for uma função contínua?

Exercícios

Uma moeda perfeita é lançada quatro vezes. Seja Y o número de caras obtidas.

1. Calcule $P(Y = 2)$.
2. Determine EY e $VarY$.

Principais modelos probabilísticos discretos

- Uma variável aleatória fica completamente caracterizada pela sua função de distribuição.
- No caso discreto, podemos também usar a função de probabilidade com o mesmo objetivo.
- Por essa razão, nos modelos para variáveis discretas que iremos apresentar, estaremos sempre indicando, na definição, sua função de probabilidade.

Modelo uniforme discreto

Uma v.a. segue o modelo **uniforme discreto**, comvalores $x_1, \cdots, x_k$, se tem função de probabilidade dada por

$$p(x_i) = \frac{1}{k}, \quad i = 1, \cdots, k.$$

Usaremos a notação $X \sim U(E)$, sendo E o conjunto de seus valores.

O modelo uniforme discreto representa situações em que todos os possíveis valores da v.a. são equiprováveis.

Exemplo 16

- *Lançamos um dado equilibrado e observamos sua face. Sendo* X *essa v.a., então* $X \sim U(E)$ *com* $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- *Sua função de probabilidade é*

$$p(x) = \frac{1}{6}, \quad x = 1, \cdots, 6.$$

Modelo Bernoulli

Uma v.a. segue o modelo Bernoulli se assume apenas os valores 0 ou 1. Sua função de probabilidade é dada por

$$
\begin{aligned}
p(1) &= P(X=1) = p, \\
p(0) &= P(X=0) = 1-p.
\end{aligned}
$$

A notação utilizada será $X \sim \text{Bernoulli}(p)$

O Exemplo 2 é um exemplo clássico da distribuição de Bernoulli.

Modelo Geométrico

Considere uma sequência de ensaios de Bernoulli independentes. Defina a v.a. X como o número de ensaios até a ocorrência do primeiro sucesso. A variável X segue o modelo geométrico com parâmetro p, $0 < p < 1$, tem função de probabilidade dada por

$$p(x) = p(1-p)^{x-1}, \quad x = 1, 2, \cdots$$

Usaremos a notação $X \sim Geo(p)$.

Um exemplo de v.a. com distribuição geométrica foi dado no Exemplo 3.

Modelo Binomial

Seja X o número total de sucessos obtidos, na realização de n ensaios de Bernoulli independentes. Diremos que X segue o modelo Binomial com parâmetros n e p e sua função de probabilidade é dada por

$$p(x) = \left(\begin{array}{c} n \\ x \end{array} \right) p^x (1-p)^{n-x}, \quad x = 0, 1, \cdots, n,$$

onde $\left(\begin{array}{c} n \\ x \end{array} \right) = \frac{n!}{x!(n-x)!}$.
A notação utilizada será $X \sim Bin(n, p)$.

Exemplo 17

- *A taxa de imunização de uma vacina é 80%. Se um grupo de 20 pessoas foram vacinadas, desejamos saber o comportamento probabilístico do número de pessoas imunizadas desse grupo.*
- *Seja* X *a variável de interesse. Para cada pessoa do grupo, a probabilidade de estar imunizada é* $p = 0,8$ *e admitimos, ainda, independência entre os resultados das várias pessoas vacinadas.*
- *Teremos* $X \sim Bin(n = 20, p = 0,8)$, *em que sucesso corresponde à imunização.*

No Exemplo 17, a probabilidade de 15 estarem imunizados é dada por:

$$P(X = 15) = \left(\begin{array}{c} 20 \\ 15 \end{array} \right) 0,8^{15}(1 - 0,8)^{20-15} = 0,175.$$

Modelo de Poisson

Uma v.a. X segue o **modelo de Poisson** de parâmetro $\lambda > 0$, se sua função de probabilidade for a seguinte

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \cdots$$

Usaremos a notação $X \sim Poisson(\lambda)$. O parâmetro λ indica a taxa/média de ocorrência por unidade de medida.

Exemplo 18

- *O número de mensagens eletrônicas (em centenas) recebidas por um provedor em horário comercial foi modelado por uma v.a.* X *com distribuição de Poisson com taxa de* $\lambda = 15$ *por dia.*
- *As instalações disponíveis podem atender, com o padrão de qualidade desejado, até 2 mil mensagens diárias.*
- *Você diria que tem havido muita reclamação pelo serviço do provedor?*
    - *Precisamos avaliar a probabilidade de serem recebidas mais de 2 mil mensagens, ou 20 centenas na unidade estabelecida.*
    - *Se ela for alta, teremos uma indicação de que o serviço deve estar perdendo qualidade e, portanto, sendo passível de reclamações dos usuários.*

Dessa forma, podemos calcular

$$P(X > 20) = 1 - P(X \leq 20) = 1 - \sum_{k=1}^{20} \frac{e^{-15} 15^k}{k!} = 0,083.$$

Essa probabilidade indica que, em 8,3% dos dias, o serviço estará trabalhando abaixo da qualidade desejada, devido ao excesso de mensagens.

Modelo Hipergeométrico

- Considere um conjunto com n objetos dos quais m são do tipo I e $n - m$ são do tipo II.
- Uma amostra é escolhida, ao acaso e sem reposição, com tamanho $r \quad (r < n)$ e definimos X como o número de objetos com a caracteóstica I, na amostra.
- Nesse caso, diremos que a v.a. X segue o modelo **Hipergeométrico** de parâmetros m, n e r, com notação $X \sim Hgeo(m, n, r)$, e função de probabilidade dada por:

$$P(X = k) = \frac{\begin{pmatrix} m \\ k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n - m \\ r - k \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix}}$$

sendo k inteiro e tal que $max\{0, r - (n - m)\} \leq k \leq min\{r, m\}$.

Exemplo 19

Considere que, num lote de 20 peças, existam 4 defeituosas. Selecionando-se 5 dessas peças, sem reposição, qual seria a probabilidade de 2 defeituosas terem sido escolhidas?
Seja X *o número de peças defeituosas na seleção. Então* $X \sim Hgeo(m, n, r)$ *e*

$$P(X = 2) = \frac{\binom{4}{2}\binom{16}{3}}{\binom{20}{5}} = 0,217.$$

Esperança e variância das v.a.'s discretas

Na tabela a seguir, apresentamos o valor esperado e a variância de algumas distribuições discretas:

Distribuição	Esperança	Variância
Bernoulli(p)	p	$p(1-p)$
Binomial(n, p)	np	$np(1-p)$
Poisson (λ)	λ	λ
Geométrica(p)	$\frac{1-p}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
Uniforme($1, k$)	$\frac{1+k}{2}$	$\frac{k^2-1}{12}$

Aproximação Poisson à binomial

Seja $X \sim Bin(n, p)$. Vamos discutir condições para a aproximação desse modelo para o de Poisson.

Aproximação Poisson à binomial

Seja $X \sim Bin(n, p)$. Vamos discutir condições para a aproximação desse modelo para o de Poisson. Temos que

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = \frac{(n)_x}{x!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^x \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-x},$$

em que $(n)_x = n(n-1)\cdots(n-x+1)$ e definimos $\lambda = np$.

Reagrupando os termos, obtemos

$$P(X = x) = \frac{\lambda^x}{x!} \frac{(n)_x}{n^x} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-x} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n.$$

Considere agora que a probabilidade p seja tão pequena que, quando n se aproxima do infinito, λ possa ser considerado como aproximadamente constante.

Considere agora que a probabilidade p seja tão pequena que, quando n se aproxima do infinito, λ possa ser considerado como aproximadamente constante.
Observe que

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-x}=1 \text{ e } \lim_{n\to\infty}\frac{(n)_x}{n^x}=1$$

e que

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n}=e^{-\lambda}.$$

Então

$$\lim_{n\to\infty} P(X = x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}, \tag{2}$$

que corresponde à função de probabilidade $Poisson(\lambda)$. Esse resultado se refere ao comportamento limite de distribuições (estudaremos mais resultados desse tipo nas Unidades seguintes).

Exemplo

Uma situação prática de interesse na qual a aproximação Poisson à binomial é empregada diz respeito à desintegração de substâncias radioativas.

- Considere o urânio 238 (U238), por exemplo. Cada núcleo de U238 tem uma probabilidade muito pequena, $p = 4,9x10^{-18}$, de se desintegrar, emitindo uma partícula α, em um segundo.
- Considere, agora, um número grande n de núcleos e a v.a.

$$N = \text{número de núcleos que se desintegram.}$$

Exemplo

- Admitindo-se que a desintegração de um núcleo não afeta a probabilidade de desintegração de qualquer outro núcleo (independência), a v.a. N tem uma distribuição binomial, com parâmetros n e p.
- Logo, estamos numa situação em que podemos usar (2), ou seja, aproximar probabilidades binomiais por probabilidades de Poisson.

Em $0,30$mg de U238 temos aproximadamente $n = 7,6x1017$ átomos, logo $\lambda = np = 3,7$ e

$$P(N = k) \approx \frac{e^{-3,7} 3,7^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \cdots$$

Observação 20

Seria interessante avaliar se a distribuição de Poisson realmente é um modelo razoável para essa situação apresentada no Exemplo anterior (para mais detalhes, veja Bussab e Morettin, Exemplo 6.16).

Principais Referências Bibliográficas

M.N. Magalhães, A.C.P. De Lima.
Noções de probabilidade e estatística.
Vol. 5. Editora da Universidade de São Paulo, 2002.

P.A. Morettin, W.O. Bussab.
Estatística básica.
Saraiva Educação SA; 2017.

M.N. Magalhães,
Probabilidade e variáveis aleatórias.
Edusp, 2006.

Ross S.
Probabilidade: um curso moderno com aplicações
Bookman Editora; 2009.

R. Lasson, B. Farber.
Estatística Aplicada,
4a edição, Ed. Pearson, São Paulo, 2010.