Probabilidade e Estatística: Variáveis Aleatórias Contínuas (Unidade IV)

Felipe Quintino

felipe.quintino@unb.br

Departamento de Estatística-EST
Universidade de Brasília-UnB

Disciplina: **Probabilidade e Estatística**

02/2025

Atenção: Proibido Registrar Imagens ou Áudios Durante as Aulas

Recordemos a definição de v.a.

Definição 1

Uma função $X : \Omega \to \mathcal{X}$ definida no espaço amostral e assumindo valores reais é chamada uma **variável aleatória** *(v.a.).*

(i) *No caso em que $\mathcal{X}$ é um conjunto enumerável (i.e., podemos contar o número de elementos), chamaremos X de* **variável aleatória discreta***;*

(b) *Caso contrário, diremos que X é* **contínua***.*

Exemplos

São exemplos de v.a.'s contínuas:

1. Salário dos trabalhadores de uma empresa;
2. Altura dos estudantes;
3. Tempo de vida de um componente eletrônico.

- Assim como no caso discreto, em termos probabilísticos, a v.a. contínua é completamente caracterizada pela sua função de distribuição.
- No caso contínuo, também teremos a função densidade de probabilidade que terá “papel” análogo à função de probabilidade do caso discreto.

Função densidade de probabilidade

Definição 2

Dizemos que uma função $f(x)$ *é uma* **função densidade de probabilidade** *para uma v.a. contínua* X *se satisfaz*

(i) $f(x) \geq 0$ *para todo* $x \in (-\infty, \infty)$*;*

(ii) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$*.*

Tudo o que se deseja saber sobre a v.a. contínua X pode ser respondido em termos de f. Por exemplo:

(a) $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$, se $a \leq b$;

(b) $P(X = a) = \int_a^a f(x)dx = 0$;

(c) $P(X < a) = P(X \leq a) = \int_{-\infty}^a f(x)dx$;

Exemplo 3

Suponha que X seja uma v.a. contínua cuja função densidade de probabilidade é dada por

$$f(x) = \begin{cases} C(4x - 2x^2) & 0 < x < 2, \\ 0 & \textit{caso contrário.} \end{cases}$$

(a) *Qual é o valor de C?*

(b) *Determine $P(X > 1)$.*

Solução.

(a) Como f é a função densidade de probabilidade, devemos ter $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$, o que implica

$$C \int_0^2 4x - 2x^2 dx = 1,$$

de onde segue que

$$C \left[2x^2 - \frac{2}{3}x^3 \right]_{x=0}^{2} = 1.$$

Portanto,

$$C = \frac{3}{8}.$$

(b) $P(X > 1) = \int_1^{\infty} f(x)dx = \frac{3}{8} \int_1^2 (4x - 2x^2)dx = \frac{1}{2}$.

Exemplo 4

Suponha que a quantidade de tempo em horas que um computador funciona sem estragar é uma variável aleatória contínua com função densidade de probabilidade

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-x/100} & x \geq 0, \\ 0 & x < 0. \end{cases}$$

Qual a probabilidade de que

(a) *o computador funcione entre* 50 *e* 150 *horas antes de estragar?*

(b) *ele funcione menos de* 100 *horas?*

Solução.

(a) Como $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$, obtemos $\lambda = \frac{1}{100}$.
Portanto, a probabilidade de que um computador funcione entre 50 e 150 horas antes de estragar é dada por

$$P(50 < X < 150) = \int_{50}^{150} \frac{1}{100} e^{-x/100} dx = e^{-1/2} - e^{-3/2} \approx 0.384$$

(b) Similarmente,

$$P(X < 100) = \int_{0}^{100} \frac{1}{100} e^{-x/100} dx = 1 - e^{-1} \approx 0.633$$

Em outras palavras, em aproximadamente 63.3% das vezes um computador estragará antes de 100 horas de uso.

Relação entre a função distribuição e a função densidade de probabilidade

A relação entre a função distribuição F e a função densidade de probabilidade f é dada por

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt. \tag{1}$$

Derivando ambos os lados de (1), temos

$$\frac{d}{dx}F(x) = f(x). \tag{2}$$

Relação entre a função distribuição e a função densidade de probabilidade

A relação entre a função distribuição F e a função densidade de probabilidade f é dada por

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt. \tag{1}$$

Derivando ambos os lados de (1), temos

$$\frac{d}{dx}F(x) = f(x). \tag{2}$$

Observação 5

A equação (2) é válida para valores x tais que a derivada de $F(x)$ exista.

Se a e b forem números reais tais que $a \leq b$, temos

$$P(a < X \leq b) = F(b) - F(a).$$

Esse resultado não será afetado se incluirmos ou não os extremos a e b na desigualdade entre parênteses.

Atividades

Mostre que as seguintes funções são densidades de probabilidade:

1. (Modelo Uniforme Contínuo)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{se} \quad x \in [a, b] \\ 0 & c.c., \end{cases}$$

   para $a < b$.

2. (Modelo Exponencial)

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{se} \quad x > 0 \\ 0 & c.c., \end{cases}$$

   para $\lambda > 0$.

3. (Modelo Gama)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} & \text{se} \quad x > 0 \\ 0 & c.c., \end{cases}$$

para $\alpha > 0$ e $\beta > 0$, onde

$$\Gamma(\alpha) := \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx$$

e satisfaz

P1. $\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)\Gamma(\alpha - 1)$;

P2. para valores inteiros de $\alpha = n$, tem-se

$$\Gamma(n) = (n-1)!;$$

P3. $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ e $\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

Atividades

4. (Modelo Normal)

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

para $\lambda > 0$.

Função de uma variável aleatória

Se X é uma v.a. contínua com função distribuição F_X, e função densidade f_X, determine a função densidade de $Y = 2X$.

Função de uma variável aleatória

Se X é uma v.a. contínua com função distribuição F_X, e função densidade f_X, determine a função densidade de $Y = 2X$.

Vamos deduzir a função de distribuição de Y e em seguida derivá-la. Primeiramente,

$$
\begin{aligned}
F_Y(y) &= P(Y \leq y) \\
&= P(2X \leq y) \\
&= P(X \leq y/2) \\
&= F_X(y/2).
\end{aligned}
$$

Agora, a derivada dessa função é

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) = \frac{1}{2} f_X(y/2).$$

Observação 6

Pelo exemplo anterior, podemos deduzir um método geral de geração de novas funções densidades de probabilidade.

Função de uma variável aleatória

Seja X uma v.a. contínua com função densidade de probabilidade f_X e função de distribuição F_X. Suponha que $g(x)$ seja uma função estritamente monotônica (crescente ou decrescente) e derivável (portanto contínua). Desejamos determinar a função densidade de probabilidade da variável aleatória $Y = g(X)$.

Função de uma variável aleatória

Seja X uma v.a. contínua com função densidade de probabilidade f_X e função de distribuição F_X. Suponha que $g(x)$ seja uma função estritamente monotônica (crescente ou decrescente) e derivável (portanto contínua). Desejamos determinar a função densidade de probabilidade da variável aleatória $Y = g(X)$.

Solução. Vamos considerar quando $g(x)$ é uma função crescente. Suponha que $y = g(x)$ para x qualquer. Então, com $Y = g(X)$

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(g(X) \leq y) \\ &= P(X \leq g^{-1}(y)) \\ &= F_X(g^{-1}(y)). \end{aligned}$$

Calculando a derivada, obtemos

$$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \frac{d}{dy} g^{-1}(y) = f_X(g^{-1}(y)) \frac{1}{g'(g^{-1}(y))}. \tag{3}$$

Observe que $\frac{d}{dy}g^{-1}(y) > 0$ pois g^{-1} é não-decrescente, logo sua derivada é não-negativa. No caso em que g seja descrescente, obtem-se

$$F_Y(y) = 1 - F_X(g^{-1}(y))$$

.

Lembre que

- Se uma função f é derivável no intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$ e $f' > 0$ em I, então f é crescente no intervalo I.
- Suponha que a função f tem derivada no intervalo $I \subset \mathbb{R}$ e que esta derivada nunca se anula. Então a função inversa f^{-1} existe, é derivável e

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)},$$

em que $a \in dom(f)$ é tal que $f(a) = b$.

Exemplo

Seja X uma variável aleatória contínua não negativa com função densidade f_X, e $Y = X^n$. Determine f_Y, a função densidade de probabilidade de Y.

Exemplo

Seja X uma variável aleatória contínua não negativa com função densidade f_X, e $Y = X^n$. Determine f_Y, a função densidade de probabilidade de Y.

Se $g(x) = x^n$, então $g^{-1}(y) = y^{1/n}$ e $\frac{d}{dy}g^{-1}(y) = \frac{1}{n}y^{1/n-1}$. Por (3), obtemos

$$f_Y(y) = \frac{1}{n}y^{1/n-1}f_X(y^{1/n}).$$

Para $n = 2$, teríamos

$$f_Y(y) = \frac{1}{2}y^{1/2-1}f_X(y^{1/2}).$$

Atividades

Mostre que

1. Suponha que X seja uniformemente distribuído ao longo do intervalo $(0, 1)$. Então a função densidade de probabilidade de $Y = X^n$é dada por

$$f_Y(y) = \frac{1}{n} y^{1/n-1}.$$

2. Se X é uma variável aleatória contínua com densidade de probabilidade f_X, então a distribuição de $Y = X^2$ é dada por

$$f_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} \left[f_X(\sqrt{y}) + f_X(-\sqrt{y}) \right], \quad \text{se} \quad y \geq 0.$$

3. Se X é uma variável aleatória contínua com densidade de probabilidade f_X, então a distribuição de $Y = |X|$ é dada por

$$f_Y(y) = f_X(y) + f_X(-y), \quad \text{se} \quad y \geq 0.$$

Valor esperado

Seja X uma v.a. contínua com função de densidade f. Definimos o **valor esperado** ou **esperança** ou **média** de X por

$$E(X) := \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx, \tag{4}$$

desde que a integral esteja bem definida.

Exemplo 7

Determine $E(X)$ *quando a função densidade de* X *é*

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq 1. \\ 0, & c.c. \end{cases}$$

Exemplo 7

Determine $E(X)$ *quando a função densidade de* X *é*

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq 1. \\ 0, & c.c. \end{cases}$$

Solução.

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{1} 2x^2 dx + \int_{1}^{\infty} 0dx \\ &= \left[\frac{2x^3}{3}\right]_{x=0}^{1} \\ &= \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Exemplo 8

A v.a. X tem função de distribuição dada por

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{x^2}{4}, & 0 \leq x < 1, \\ \frac{2x-1}{4}, & 1 \leq x < 2, \\ -\frac{x^2-6x+5}{4}, & 2 \leq x < 3, \\ 1, & x > 3. \end{cases}$$

Calcule o valor esperado de X.

Exemplo 8

A v.a. X tem função de distribuição dada por

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{x^2}{4}, & 0 \leq x < 1, \\ \frac{2x-1}{4}, & 1 \leq x < 2, \\ -\frac{x^2-6x+5}{4}, & 2 \leq x < 3, \\ 1, & x > 3. \end{cases}$$

Calcule o valor esperado de X.

Solução. A função de densidade de X é dada por

$$f(x) = \frac{1}{2}xI_{[0,1)}(x) + \frac{1}{2}I_{[1,2)}(x) - \frac{x-3}{2}I_{[2,3)}(x),$$

em que $I_A(x) = 1$ se $x \in A$ ou $I_{[0,1)}(x) = 0$ se $x \notin A$ é a função indicadora.

Solução (continuação). A esperança de X é obtida por

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \int_0^1 \frac{1}{2}x^2dx + \int_1^2 \frac{1}{2}xdx - \int_2^3 \frac{x^2-3x}{2}dx \\
&= \left[\frac{x^3}{6}\right]_{x=0}^{1} + \left[\frac{x^2}{4}\right]_{x=1}^{2} - \left[\frac{x^3}{6} - \frac{3x^2}{4}\right]_{x=2}^{3} \\
&= \frac{1}{6} + \frac{4-1}{4} - \left(\frac{27-8}{6} - \frac{27-12}{4}\right) \\
&= \frac{-18}{6} + \frac{18}{4} = \frac{54-36}{12} = \frac{18}{12} = \frac{3}{2}.
\end{aligned}
$$

Exemplo 9

Considere uma v.a. contínua $Y = e^X$, *em que a função de densidade de* X *é dada por*

$$f_X(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & c.c. \end{cases}$$

Calcule $E(Y)$.

Solução. Primeiramente, vamos obter a função de densidade de Y.

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(e^X \leq y) \\ &= P(X \leq \log(y)) \\ &= \int_{-\infty}^{\log(y)} f_X(x)dx \\ &= \log(y), \quad \text{se} \quad \log(y) \in [0,1]. \end{aligned}$$

Assim, se $1 \leq y \leq e^1$,

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy}\log(y) = \frac{1}{y}.$$

Solução (continuação). Agora, podemos calcular $E(Y)$ por (4).

$$
\begin{aligned}
E(Y) &= \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y) dy \\
&= \int_1^e y \frac{1}{y} dy \\
&= e - 1.
\end{aligned}
$$

Baseados no exemplo anterior, podemos estar interessados em um método geral para obtenção de esperança de uma v.a. Y que seja escrita como função de uma v.a. X. Tal resultado é apresentado a seguir:

Baseados no exemplo anterior, podemos estar interessados em um método geral para obtenção de esperança de uma v.a. Y que seja escrita como função de uma v.a. X. Tal resultado é apresentado a seguir:

Teorema 10

Se X é uma variável aleatória contínua com função densidade de probabilidade $f(x)$, então, para qualquer função de valor real g,

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx.$$

Voltando ao Exemplo 9, aplicando o Teorema 10 poderiamos obter o resultado diretamente

$$
\begin{aligned}
E(Y) &= E(e^X) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^x f(x) dx \\
&= \int_0^1 e^x dx \\
&= e - 1.
\end{aligned}
$$

Observação 11

Nem sempre a esperança (4) existe!

Observação 11

Nem sempre a esperança (4) existe!

Considere X uma v.a. com função de densidade

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, x \in \mathbb{R}.$$

Para o cálculo do valor esperado, repartimos a integral em duas partes

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_{-\infty}^{0} xf(x)dx + \int_{0}^{\infty} xf(x)dx.$$

Temos

$$\int_{0}^{\infty} xf(x)dx = \int_{0}^{\infty} \frac{2x}{2\pi(1+x^2)}dx = \frac{1}{2\pi}\left[\log(1+x^2)\right]_0^{\infty} = \infty.$$

De modo análogo, $\int_{-\infty}^{0} xf(x)dx = -\infty$. Logo, o valor esperado não existe.

Proposisição 12

Sejam X e Y v.a.'s cujo valor esperado existe. São válidos:

(i) $E(aX + b) = aE(X) + b$;

(ii) *Se* $X \leq Y$, $E(X) \leq E(Y)$;

(iii) *Se* g *é uma função convexa, então*

$$E(g(X)) \geq g(E(X)).$$

Atividades

Determine o valor esperado de uma v.a. X seguindo o modelo:

1. Uniforme contínua no intervalo $[a, b]$;
2. Exponencial com parâmetro $\lambda > 0$;
3. Gamma com parâmetros $\alpha > 0$ e β;
4. Normal.

(Veja as densidades nas Atividades da Seção *Função de densidade* no slide 16.)

Atividades

Suponha que se você estiver adiantado s minutos para um compromisso, então você tem que arcar com o custo cs. Do contrário, se estiver atrasado s minutos, você incorre no custo ks.
Suponha também que o tempo de viagem de onde você está no momento para o local de seu compromisso é uma variável aleatória contínua com função densidade de probabilidade f. Determine o momento em que você deve sair se você quiser minimizar o seu custo esperado.

Variância: definição

Sendo $E(X) = \mu < \infty$, definimos **variância** da v.a. X como

$$Var(X) = \sigma^2 = E[(X - \mu)^2];$$

a raiz quadrada da variância é denominada **desvio-padrão**.

Variância: observações

- Existem muitas outras medidas de variabilidade, mas a variância é a mais utilizada delas;
- O desvio-padrão tem a mesma unidade de medida da variável original e, assim, é muito útil para avaliar a amplitude dos possíveis valores da variável;
- A informação sobre a variância da variável de interesse auxilia a escolha da técnica adequada de análise e modelagens estatísticas;

Variância: propriedades

Proposisição 13

Se a e b são constantes quaisquer, então

$$Var(aX+b) = a^2 Var(X).$$

Prova. Por definição da variância e linearidade da média, temos que

$$\begin{aligned}
Var(aX+b) &= E[(aX+b-E(aX+b))^2] \\
&= E[(aX+b-aE(X)-b)^2] \\
&= E[(aX-aE(X))^2] \\
&= E[a^2(X-E(X))^2] \\
&= a^2E[(X-E(X))^2].
\end{aligned}$$

Variância: expressão alternativa

Observe que

$$\begin{aligned} Var(X) &= E[(X - E(X))^2] \\ &= E[(X^2 - 2XE(X) + E(X)^2)]. \end{aligned}$$

Como $E(X) = \mu$ é constante, obtemos

$$Var(X) = E(X^2) - 2\mu E(X) + \mu^2.$$

Logo, concluímos a validade da seguinte expressão alternativa para variância

$$Var(X) = E(X^2) - \mu^2.$$

Observação 14

Observe que para $Var(X)$ *ser finita, é necessário que* $E(X^2)$ *também seja finita.*

Atividades

Considere uma v.a. X com distribuição normal padrão, i.e., a função de densidade de X é dada por

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Dados $\mu \in \mathbb{R}$ e $\sigma > 0$, verifique que

1. $E(X) = 0$ e $Var(X) = 1$;
2. $E(\mu + \sigma X) = \mu$ e $Var(\mu + \sigma X) = \sigma^2$.

Atividades

Determine a variância de uma v.a. X seguindo o modelo:

1. Uniforme contínua no intervalo $[a, b]$;
2. Exponencial com parâmetro $\lambda > 0$;
3. Gamma com parâmetros $\alpha > 0$ e β;

(Veja as densidades nas Atividades da Seção *Função de densidade* no slide 16.)

Principais modelos probabilísticos contínuos

De modo geral, podemos dizer que as v.a. cujos valores resultam de algum processo de mensuração são v.a. contínuas. Alguns exemplos são:

(a) o peso ou a altura das pessoas de uma cidade;
(b) a demanda diária de arroz num supermercado;
(c) o tempo de vida de uma lâmpada;
(d) o diâmetro de rolamentos de esferas; e
(e) erros de medidas em geral, resultantes de experimentos em laboratórios.

Principais modelos probabilísticos contínuos

Dada uma v.a. contínua X, interessa saber qual a f.d. de X. Alguns modelos são freqüentemente usados para representar a f.d. de v.a. contínuas. Alguns dos mais utilizados serão descritos a seguir e, para uniformizar o estudo desses modelos, iremos em cada caso analisar:

(a) definição;

(b) gráfico da função de densidade;

(c) função de distribuição;

(d) momentos: $E(X)$,$Var(X)$.

Modelo uniforme contínuo

Dizemos que X é uma v.a. **uniforme** no intervalo (α, β) se e a função densidade de probabilidade de X é dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta-\alpha}, & \text{se } x \in (\alpha, \beta), \\ 0, & c.c. \end{cases}$$

A função distribuição de uma variável aleatória uniforme no intervalo (α, β) é dada por

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < \alpha, \\ \frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}, & \text{se } \alpha \leq x < \beta, \\ 1, & \text{se } x \geq \beta. \end{cases}$$

A média e a variância de X são dadas por

$$E(X) = \frac{\beta+\alpha}{2} \text{ e } Var(X) = \frac{(\beta-\alpha)^2}{12}.$$

Modelo uniforme contínuo

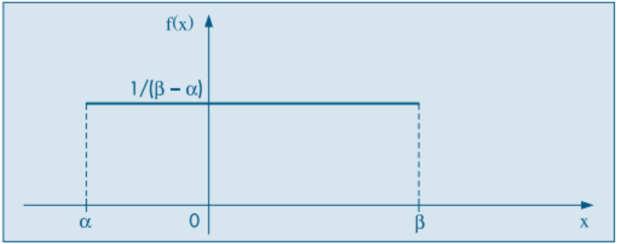

Figure: Função de densidade uniforme

Modelo uniforme contínuo: exemplo

Exemplo 15

Ônibus chegam em uma determinada parada em intervalos de 15 *minutos começando as 7:00. Isto é, eles chegam às 7:00, 7:15, 7:30, 7:45, e assim por diante. Se um passageiro chega na parada em um instante de tempo que é uniformemente distribuído entre 7:00 e 7:30, determine a probabilidade de que ele espere*

(a) *menos que* 5 *minutos por um ônibus;*

(b) *mais de* 10 *minutos por um ônibus.*

Solução. Suponha que X represente o número de minutos após as 7:00 em que o passageiro chega na parada. Como X é uma v.a. uniforme ao longo do intervalo $(0, 30)$, tem-se que o passageiro terá que esperar menos que 5 minutos se (e somente se) ele chegar entre 7:10 e 7:15 ou entre 7:25 e 7:30. Assim,

$$P(10 < X < 15) + P(25 < X < 30) = \int_{10}^{15} \frac{1}{30} dx + \int_{25}^{30} \frac{1}{30} dx = \frac{1}{3}.$$

Similarmente, ele teria que esperar mais de 10 minutos se ele chegasse entre 7:00 e 7:05 ou entre 7:15 e 7:20, e a probabilidade desejada seria

$$P(0 < X < 5) + P(15 < X < 20) = \frac{1}{3}.$$

Modelo exponencial

Uma variável aleatória contínua cuja função densidade de probabilidade é dada, para algum $\lambda > 0$, por

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{se } \; x > 0, \\ 0, & c.c. \end{cases}$$

é chamada de v.a. **exponencial** com parâmetro λ.
A função distribuição de uma v.a. exponencial é dada por

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0, \\ 1 - e^{-\lambda x}, & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

A média e a variância de X são dadas por

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} \;\text{ e }\; Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Modelo exponencial: exemplo

Exemplo 16

Suponha que a duração de um telefonema, em minutos, seja uma v.a. exponencial com parâmetro $\lambda = 1/10$*. Se alguém chega logo na sua frente em uma cabine telefônica, determine a probabilidade de que você tenha que esperar*

(a) *mais de 10 minutos;*

(b) *entre 10 e 20 minutos.*

Solução. Seja X a duração da chamada feita pela pessoa na cabine. Então, as probabilidades desejadas são

(a)
$$P(X > 10) = 1 - F(10) = e^{-1} \approx 0.368;$$

(b)
$$P(10 < X < 20) = F(20) - F(10) = e^{-1} - e^{-2} \approx 0.233.$$

Dizemos que X é uma v.a. **gama** com parâmetros (α, β), $\alpha, \beta > 0$, se e a função densidade de probabilidade de X é dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}, & \text{se } x > 0, \\ 0, & c.c., \end{cases}$$

onde $\Gamma(\alpha)$ é definida como

$$\Gamma(\alpha) := \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx,$$

e satisfaz as propriedades

P1. $\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)\Gamma(\alpha - 1)$;

P2. Se $\alpha = n$ inteiro, $\Gamma(n) = (n-1)!$;

P3. $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

Modelo gama: propriedades

A função distribuição de uma v.a. gama **NÃO** tem forma fechada!

A média e a variância de X são dadas por

$$E(X) = \frac{\alpha}{\beta} \ \text{ e } \ Var(X) = \frac{\alpha}{\beta^2}.$$

Modelo gama: propriedades

A função distribuição de uma v.a. gama **NÃO** tem forma fechada!

A média e a variância de X são dadas por

$$E(X) = \frac{\alpha}{\beta} \quad \text{e} \quad Var(X) = \frac{\alpha}{\beta^2}.$$

Observação 17

Observe que o modelo exponencial é um caso particular da gama, quando $\alpha = 1$ *e* $\beta = \lambda$.

Modelo normal

Dizemos que X é uma v.a. **normal** com parâmetros (μ, σ), $\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$, se e a função densidade de probabilidade de X é dada por

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{ -\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} \right\}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

A média e a variância de X são dadas por

$$E(X) = \mu \quad \text{e} \quad Var(X) = \sigma^2.$$

Notação: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

Modelo normal padrão

Uma v.a. Z com distribuição **normal padrão** é obtida como caso particular do modelo normal, onde $\mu = 0$ e $\sigma = 1$. Logo, a função de densidade é dada por

$$f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{z^2}{2}\right\}, \quad z \in \mathbb{R}.$$

Modelo normal

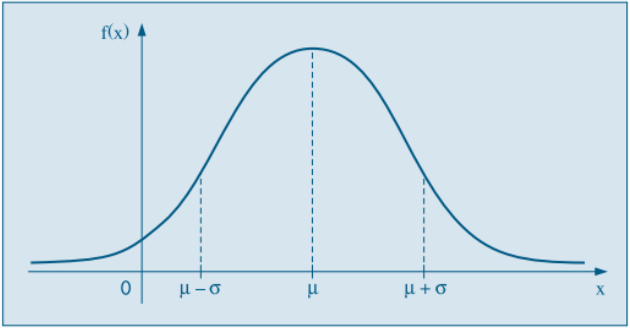

Figure: Função de densidade normal

Observação 18

A função distribuição de uma v.a. normal **NÃO** *tem forma fechada! Entretanto, os valores da função de distribuição normal padão são tabelados.*

É comum denotarmos

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{z^2}{2}\right\} dz.$$

Modelo normal padrão

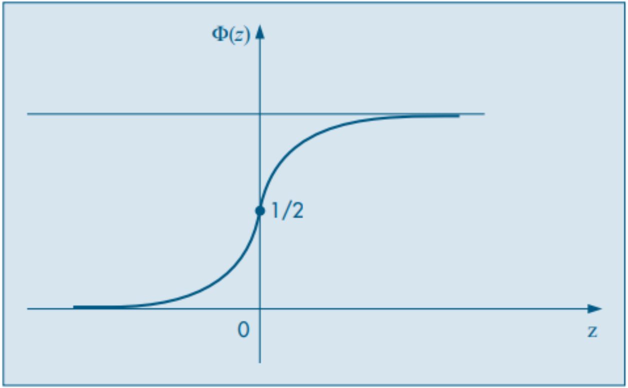

Figure: Função de distribuição normal padrão

Seja X uma v.a. normal com média μ e variância σ^2. Então a v.a. $Z = (X - \mu)/\sigma$ é uma v.a. normal padrão e para números reais $a < b$ podemos obter

$$
\begin{aligned}
P(a < X < b) &= P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{b-\mu}{\sigma}\right) \\
&= P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} < Z < \frac{b-\mu}{\sigma}\right) \\
&= \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right).
\end{aligned}
$$

Exemplo 19

Se X é uma variável aleatória normal com parâmetros $\mu = 3$ e $\sigma^2 = 9$, determine

(a) $P(2 < X < 5)$;

(b) $P(X > 0)$;

(c) $P(X \leq 3)$;

(d) $P(|X - 3| > 6)$.

Solução:

(a)

$$\begin{aligned} P(2 < X < 5) &= P\left(\frac{2-3}{3} < Z < \frac{5-3}{3}\right) = P\left(-\frac{1}{3} < Z < \frac{2}{3}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{2}{3}\right) - \Phi\left(-\frac{1}{3}\right) = \Phi\left(\frac{2}{3}\right) - \left[1 - \Phi\left(\frac{1}{3}\right)\right] \\ &\approx 0.74857 - [1 - 0.62930] = 0.3779 \end{aligned}$$

(b)

$$P(X > 0) = P(Z > -1) = 1 - \Phi(-1) = 1 - [1 - \Phi(1)] = 0.84134$$

(c)

$$P(X \leq 3) = P(Z \leq 0) = \Phi(0) = 0.5$$

(d)

$$\begin{aligned} P(|X-3| > 6) &= 1 - P(|X-3| \leq 6) = 1 - P(-6 \leq X - 3 \leq 6) \\ &= 1 - P\left(-\frac{6}{3} \leq Z \leq \frac{6}{2}\right) = 1 - [\Phi(2) - \Phi(-2)] \\ &= 1 - [\Phi(2) - (1 - \Phi(2))] \\ &= 2 - 2\Phi(2) = 2 - 2x0.97725 = 0.0455 \end{aligned}$$

Atividade

Exemplo 20

Os depósitos efetuados no Banco da Ribeira durante o mês de janeiro são distribuídos normalmente, com média de \$10000.00 *e desvio padrão de* \$1500.00. *Um depósito é selecionado ao acaso dentre todos os referentes ao mês em questão. Encontrar a probabilidade de que o depósito seja:*

(a) \$10000.00 *ou menos;*

(b) *pelo menos* \$10000.00*;*

(c) *um valor entre* \$12000.00 *e* \$15000.00*;*

(d) *maior do que* \$20000.00.

Respostas: (a) 0.5; (b) 0.5; (c) 0.09133; (d) ≈ 0.

Uma v.a. T tem distribuição **t de Student** com ν graus de liberdade se a densidade é dada por

$$f(t) = \frac{\Gamma((\nu+1)/2)}{\Gamma(\nu/2)\sqrt{\nu\pi}}(1 + t^2/\nu)^{(\nu+1)/2}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

A média e a variância de T são dadas por

$$E(T) = 0 \;\text{ e }\; Var(T) = \frac{\nu}{\nu-2},\; \nu > 2.$$

Modelo t-Student vs modelo normal

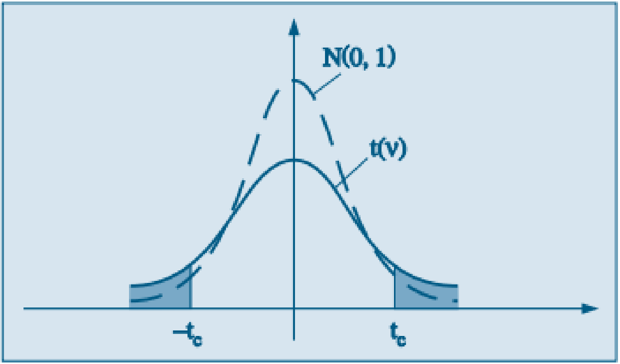

Figure: Funções de distribuição t e normal padrão

Modelo t-Student

Assim como o modelo normal, a distrinuição t não possui função de distribuição com forma fechada, entretando os valores são tabelados. A tabela disponível no *Aprender3* fornece o valor de t_c tal que

$$P(T < t_c) = p,$$

para alguns valores de p e $\nu = GL(\nu)$.

Exemplo 21

Se $\nu = 6$*, então, usando a Tabela da distribuição* $t(\nu = 6)$*,*

$$P(-1,943 < t(6) < 1,943) = P(t(6) < 1,943) - P(t(6) < -1,943) = 0.95-0$$

e

$$P(t(6) > 2,447) = 0,025.$$

Observação 22

Observe que, nessa tabela, há uma linha com $= \infty$*, que corresponde a usar os valores da* $N(0,1)$*. Para*$n > 120$ *essa aproximação é muito boa.*

Principais Referências Bibliográficas

M.N. Magalhães, A.C.P. De Lima.
Noções de probabilidade e estatística.
Vol. 5. Editora da Universidade de São Paulo, 2002.

P.A. Morettin, W.O. Bussab.
Estatística básica.
Saraiva Educação SA; 2017.

M.N. Magalhães,
Probabilidade e variáveis aleatórias.
Edusp, 2006.

Ross S.
Probabilidade: um curso moderno com aplicações
Bookman Editora; 2009.