2ª Lista de PE – Solução

1. a) $\Omega = \{(d_1, d_2, m) : d_1, d_2 \in \{1, ..., 6\}\ ,\ m \in \{C, K\}\}$, onde C = coroa e K = cara.
   b) $\Omega = \{0, 1, 2, \ldots\}$
   c) $\Omega = \{(c_1, c_2, c_3, c_4) : c_i \in \{F, M\}\}$, onde F = Feminino, M = Masculino.
   d) $\Omega = \{(e_1, e_2, \ldots, e_{250}) : e_i \in \{0, 1\}, i = 1, \ldots, 250\}$, onde 0 significa que o entrevistado não tem máquina e 1 significa que entrevistado tem máquina.
   e) $\Omega = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.
   f) $\Omega = \{\theta \in \mathbb{R} : 0 \leqslant \theta \leqslant 360^o\}$.
   g) $\Omega = \{(c, e_c) : c \in \{A, B, C, D\}$ e $e_c \in \{S_o, C_a\}\}$, onde S_o = Solteiro e C_a = Casado.
   h) $\Omega = \{h \in \mathbb{R}^+\}$.
   i) $\Omega = \{1, 2, 3, \ldots, N - r + 1\}$

2. a) Como as amostras são ordenadas com reposição, para qualquer posição podemos ter qualquer uma das 4 letras. Desse modo teremos um total de $4 \times 4 \times 4 \times 4 = 4^4$ possíveis amostras.
   b) Como as amostras são ordenadas sem reposição, uma letra utilizada em uma determinada posição não poderá ser novamente utilizada na posição seguinte. Desse modo teremos um total de $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 4!$ possíveis amostras.

3. a) Como os três primeiros dígitos são 452, sobram quatro dígitos que podem ser qualquer um dos números de 0 a 9. Desse modo teremos $10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^4$ possíveis números telefônicos.
   b) Comos os três primeiros são dígitos 452 e os números seguintes devem ser distintos, teremos $10 \times 9 \times 8 \times 7$ possíveis números telefônicos. Desse modo, a probabilidade desejada é
$$\frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{10^4}.$$

4. a) O espaço amostral (finito e discreto) já está bem definido no corpo do problema. Basta observar que temos 2 possibilidades para cada posição e então $n(\Omega) = 2^5$.
   b) O evento em questão é
$$\begin{aligned} W &= \{(1,1,1,1,1), (1,1,1,1,0), (1,1,1,0,1), (1,1,0,1,1), (1,1,1,0,0), \\ &\quad (1,1,0,1,0), (1,1,0,0,1), (1,1,0,0,0), (1,0,1,1,1), (0,1,1,1,1), \\ &\quad (1,0,1,1,0), (0,1,1,1,0), (0,0,1,1,1), (0,0,1,1,0), (1,0,1,0,1)\} \end{aligned}$$
   c) Como as posições 4 e 5 serão necessariamente 0, temos $n(A) = 2^3 = 8$.
   d) $A \cap W = \{(1,1,1,0,0), (1,1,0,0,0)\}$.

5. O espaço amostral é dado por $\Omega = \{(i, j),\ i = 1, \ldots, 6\ \text{ e }\ j = 1, \ldots, 6\}$ e $n(\Omega) = 36$.

a) $A = \{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\} \Longrightarrow n(A) = 6 \Longrightarrow \mathcal{P}(A) = 1/6$.

b) $B = \{(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)\} \Longrightarrow n(A) = 5 \Longrightarrow \mathcal{P}(A) = 5/36$.

c) $C = \{(1,1)\} \Longrightarrow n(A) = 1 \Longrightarrow \mathcal{P}(A) = 1/36$.

d) Basta unirmos os eventos A e B ao evento cuja soma dá 8 (o qual denotaremos por D). É fácil ver que $D = \{(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)\}$, e a probabilidade que queremos é $\mathcal{P}(A \cup B \cup D) = n(A \cup B \cup D)/n(\Omega) = 16/36$.

e) O evento é

$$\begin{aligned} E \;=\; \{&(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),\\ &(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),\\ &(3,4),(3,5),(3,6),\\ &(4,5),(4,6),\\ &(5,6)\} \end{aligned}$$

e $\mathcal{P}(E) = 15/36$.

6. Tendo em vista que o espaço amostral é finito e discreto, podemos concluir facilmente que $n(\Omega) = \binom{11}{3}$. Representando o evento pedido por E, $n(E) = \binom{6}{1}\binom{5}{2}$ e a probabilidade desejada é

$$\mathcal{P}(E) = \frac{\binom{6}{1}\binom{5}{2}}{\binom{11}{3}} = \frac{4}{11}.$$

Se considerarmos a ordem, $n(\Omega) = 11 \cdot 10 \cdot 9 = 990$. Agora, existem $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ maneiras no qual a primeira bola é branca e as outras duas são pretas; $5 \cdot 6 \cdot 4 = 120$ no qual a primeira é preta, a segunda é branca e a terceira é preta; e $5 \cdot 4 \cdot 6 = 120$ maneiras no qual as duas primeiras são pretas e a terceira é branca. Enfim, são 360 maneiras de ordenar 2 bolas pretas e uma branca. Concluímos, assim, que a probabilidade desejada também é 4/11.

7. a) Note que $\mathcal{P}(A) + \mathcal{P}(B) = 1,2$. Do terceiro axioma da probabilidade sabemos que a probabilidade da união de eventos disjuntos é dada pela soma das probabilidades de cada evento. Supondo que A e B são disjuntos temos que $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) + \mathcal{P}(B)$. Por outro lado temos que $A \cup B \subset \Omega$ e, do segundo axioma da probabilidade, segue que $0 \leqslant \mathcal{P}(A \cup B) \leqslant 1$. Por contradição, concluímos que os eventos A e B não podem ser disjuntos.

b) O menor valor para $\mathcal{P}(A \cap B)$ é o valor que maximiza $\mathcal{P}(A \cup B)$, ou seja, 0,2.

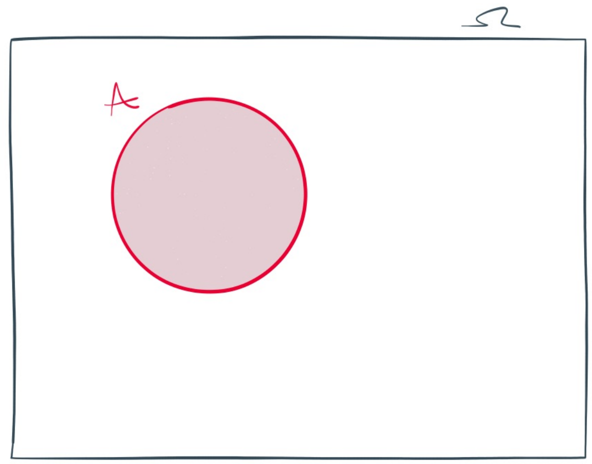
c) A maior intersecção entre dois eventos ocorre quando um evento está contido em outro. Como $\mathcal{P}(B) > \mathcal{P}(A)$, devemos ter $A \subset B$ de modo que $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) = 0,5$.

8. Sejam os eventos $V =$ *"o cliente carrega um cartão VISA"* e $A =$ *"o cliente carrega um cartão AMEX"*. A probabilidade desejada é

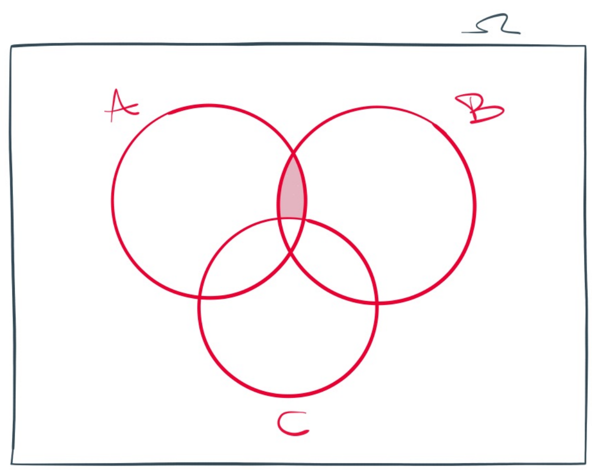
$$\mathcal{P}(V \cup A) = \mathcal{P}(V) + \mathcal{P}(A) - \mathcal{P}(V \cap A) = 0,61 + 0,24 - 0,11 = 0,74.$$

9. Nas soluções abaixo representamos os eventos de interesse em notação de conjuntos, seguidas das respectivas representações em diagramas de Venn:

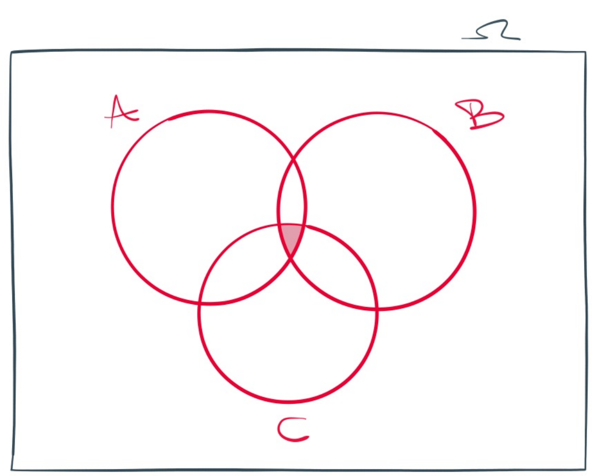
a) A



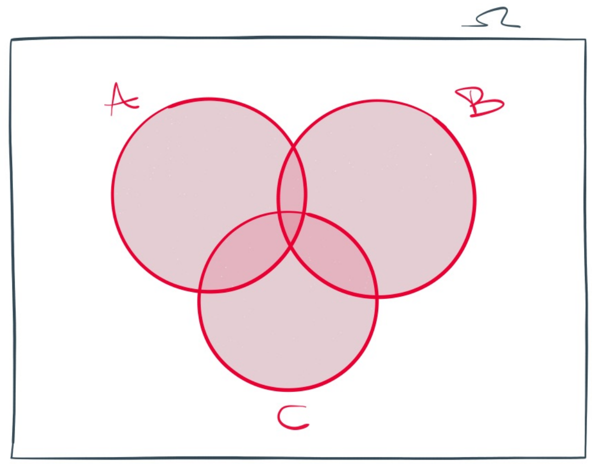
b) $A \cap B \cap C^c$



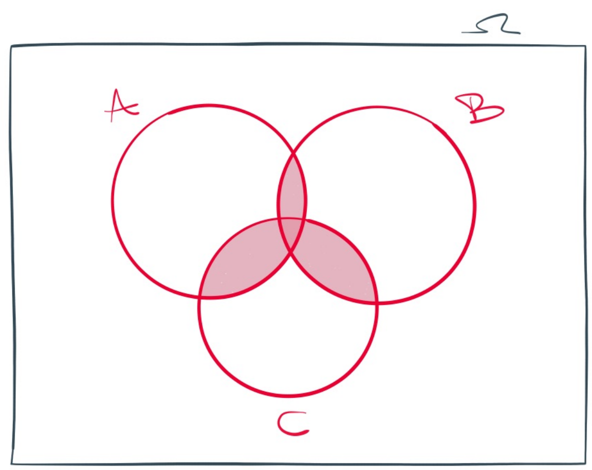
c) $A \cap B \cap C$



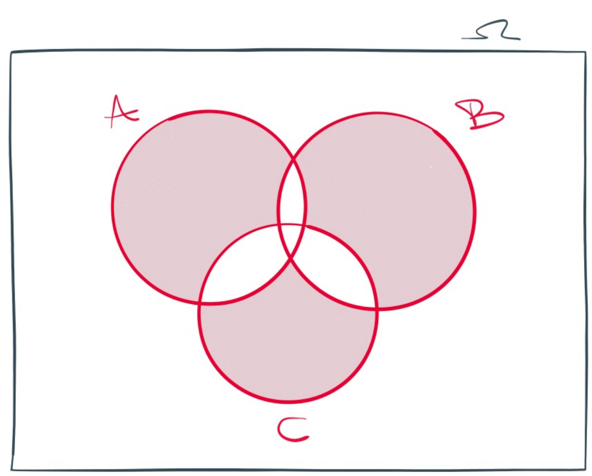
d) $A \cup B \cup C$



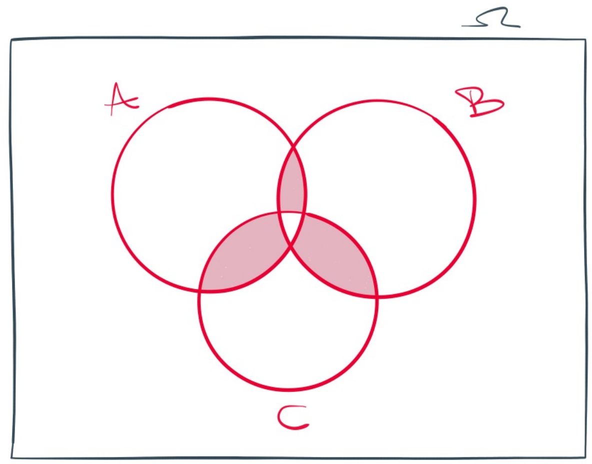
e) $[(A \cap B)] \cup [(A \cap C)] \cup [(B \cap C)]$



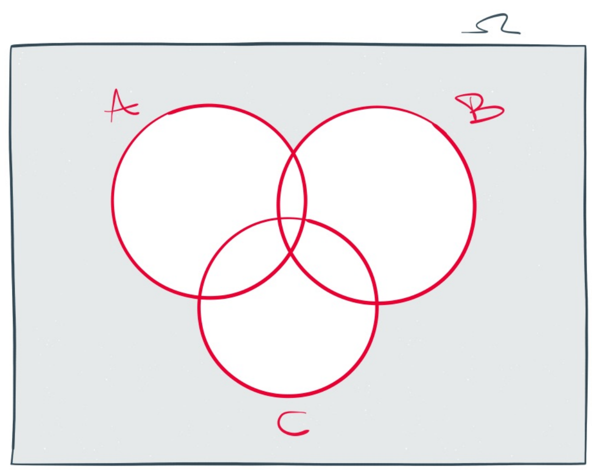
f) $[A \cap (B \cup C)^c] \cup [B \cap (A \cup C)^c] \cup [C \cap (A \cup B)^c]$



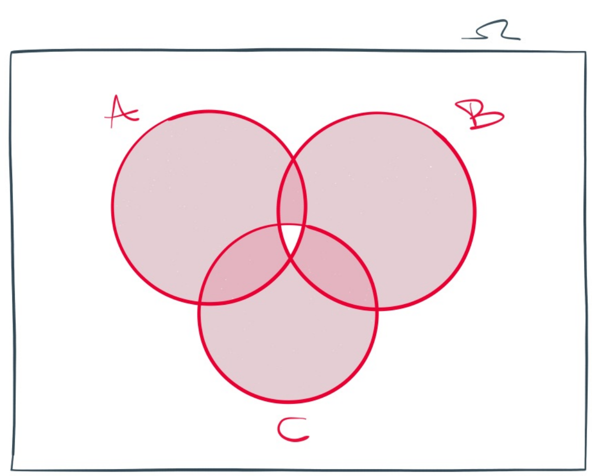
g) $[(A \cup B) \cap C^c] \cup [(A \cup C) \cap B^c] \cup [(B \cup C) \cap A^c]$



h) $A^c \cap B^c \cap C^c$



i) $(A \cup B \cup C) \cap (A \cap B \cap C)^C$



j) Similar ao **item d**.

10. a) $\mathcal{P}(A) = 0,35$.

b) Como $A \cap C = \emptyset$, segue que $A \cap B \cap C = \emptyset$ e $\mathcal{P}(A \cap B \cap C^c) = P(A \cap B) = 0,10$.

c) Como $A \cap C = \emptyset$, segue que $A \cap B \cap C = \emptyset$ e $\mathcal{P}(A \cap B \cap C) = 0,00$.

d) $\mathcal{P}(A \cup B \cup C) = \mathcal{P}(A) + \mathcal{P}(B) + \mathcal{P}(C) - \mathcal{P}(A \cap B) - \mathcal{P}(A \cap C) - \mathcal{P}(B \cap C) + \mathcal{P}(A \cap B \cap C) = 0,35 + 0,4 + 0,15 - 0,10 - 0 - 0 + 0 = 0,80$.

e) Como $B \cap C = A \cap C = A \cap B \cap C = \emptyset$, segue que $\mathcal{P}[(A \cap B)] \cup [(A \cap C)] \cup [(B \cap C)] = \mathcal{P}(A \cap B) = 0,10$.

f) Como $B \cap C = A \cap C = \emptyset$, segue que $\mathcal{P}[A \cap (B \cup C)^c] \cup [B \cap (A \cup C)^c] \cup [C \cap (A \cup B)^c] = \mathcal{P}(A) + \mathcal{P}(B) - 2\mathcal{P}(A \cap B) = 0,70$.

g) Como $B \cap C = A \cap C = \emptyset$, segue que $\mathcal{P}[(A \cup B) \cap C^c] \cup [(A \cup C) \cap B^c] \cup [(B \cup C) \cap A^c] = \mathcal{P}(A \cap B) = 0,10$.

h) $\mathcal{P}(A^c \cap B^c \cap C^c) = 1 - \mathcal{P}(A \cup B \cup C) = 0,20$.

i) Como $A \cap B \cap C = \emptyset$, segue que $\mathcal{P}(A \cup B \cup C) \cap (A \cap B \cap C)^C = \mathcal{P}(A \cup B \cup C) = 0,80$.

j) Similar ao **item d**.

11. Considere os eventos A e B definidos por:

$$A = \text{“}\textit{Erro de cálculo com processador tipo A}\text{”}$$
$$B = \text{“}\textit{Erro de cálculo com processador tipo B}\text{”}$$

Do enunciado nós temos que $\mathcal{P}(A) = \frac{1}{30}$, $\mathcal{P}(B) = \frac{1}{80}$, $\mathcal{P}(A \cap B) = \frac{1}{1000}$.

a)

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(A \cup B) &= \mathcal{P}(A) + \mathcal{P}(B) - \mathcal{P}(A \cap B) \\ &= \frac{1}{30} + \frac{1}{80} - \frac{1}{1000} \\ &= \frac{269}{6000}. \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(A^c \cap B^c) &= 1 - \mathcal{P}((A^c \cap B^c)^c) \\ &= 1 - P(A \cup B) \\ &= \frac{5731}{6000}. \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(A \cap B^c) &= \mathcal{P}(A) - \mathcal{P}(A \cap B) \\ &= \frac{1}{30} - \frac{1}{1000} \\ &= \frac{97}{3000} \end{aligned}$$

d) Como $A \cap B^c$ e $A^c \cap B$ são eventos disjuntos, a probabilidade desejada é

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(A \cap B^c) + \mathcal{P}(A^c \cap B) &= \frac{97}{3000} + \frac{92}{8000} \\ &= \frac{263}{6000}. \end{aligned}$$

12. Pensando em $A \cup B$ como um evento e C como outro evento, segue que

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(A \cup B \cup C) &= \mathcal{P}([A \cup B] \cup C) \\ &= \mathcal{P}(A \cup B) + \mathcal{P}(C) - \mathcal{P}([A \cup B] \cap C) \\ &= \mathcal{P}(A) + \mathcal{P}(B) - \mathcal{P}(A \cap B) + \mathcal{P}(C) - \mathcal{P}([A \cap C] \cup [B \cap C]) \\ &= \mathcal{P}(A) + \mathcal{P}(B) - \mathcal{P}(A \cap B) + \mathcal{P}(C) - [\mathcal{P}(A \cap C) + \mathcal{P}(B \cap C) - \mathcal{P}(A \cap B \cap C)] \\ &= \mathcal{P}(A) + \mathcal{P}(B) + \mathcal{P}(C) - \mathcal{P}(A \cap B) - \mathcal{P}(A \cap C) - \mathcal{P}(B \cap C) + \mathcal{P}(A \cap B \cap C). \end{aligned}$$

13. O espaço amostral é claramente finito e discreto. Vamos denotar os respectivos eventos por T, S e B, referentes à cada esporte. Utilizando o Princípio da Inclusão-Exclusão explicitado na **Questão 12** para três eventos, temos

$$\mathcal{P}(T \cup S \cup B) = \mathcal{P}(T) + \mathcal{P}(S) + \mathcal{P}(B) - \mathcal{P}(T \cap S) - \mathcal{P}(T \cap B) - \mathcal{P}(S \cap B) + \mathcal{P}(T \cap S \cap B) = \frac{43}{200}.$$

14. Considere os eventos E, Q e D definidos por:

$$\begin{aligned} E &= \text{“}\textit{Emperramento dos mancais}\text{”} \\ Q &= \text{“}\textit{Queima dos enrolamentos}\text{”} \\ D &= \text{“}\textit{Desgaste das escovas}\text{”} \end{aligned}$$

Do enunciado nós temos que $\mathcal{P}(E) = 2\mathcal{P}(Q)$ e $\mathcal{P}(Q) = 4\mathcal{P}(D)$. Do texto sabemos que esses são os únicos modos de falha do motor, ou seja, $\mathcal{P}(E) + \mathcal{P}(Q) + \mathcal{P}(D)$ deve ser um. Utilizando os valores informados nós temos que

$$8\mathcal{P}(D) + 4\mathcal{P}(D) + \mathcal{P}(D) = 1$$

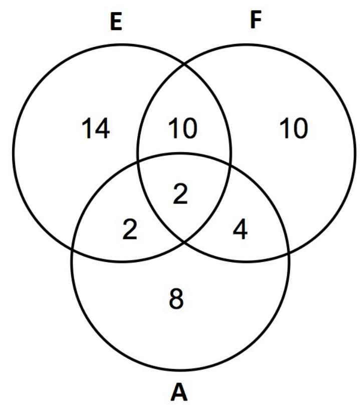
de onde segue que

$$P(D) = \frac{1}{13}, \quad P(Q) = \frac{4}{13} \;\text{ e }\; P(E) = \frac{8}{13}.$$

15. O espaço amostral é claramente finito e discreto. Vamos denotar os respectivos eventos por E, F e A, referentes à cada idioma.

a) Utilizando o resultado da **Questão 12** temos $\mathcal{P}(E \cup F \cup A) = \mathcal{P}(E) + \mathcal{P}(F) + \mathcal{P}(A) - \mathcal{P}(E \cap F) - \mathcal{P}(E \cap A) - \mathcal{P}(F \cap A) + \mathcal{P}(E \cap F \cap A) = 0,5$. Portanto, a probabilidade desejada é $1 - 0,5 = 0,5$.

b) Observe no diagrama de Vein construído abaixo que a probabilidade desejada é 32/100.



c) Também pelo diagrama de Vein acima, sabemos que 50 alunos não cursam nenhum idioma. É fácil notar que a probabilidade de selecionarmos 2 alunos que não estejam cursando nenhum idioma é $\binom{50}{2} / \binom{100}{2} = 49/198$ e a probabilidade desejada é então $1 - 49/198 = 149/198$.

16. a) Como $A \cap B = \emptyset$ temos que $\mathcal{P}(A \cap B) = 0$, desse modo

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(A \cup B) &= \mathcal{P}(A) + \mathcal{P}(B) \Leftrightarrow \\ 0,7 &= 0,4 + \mathcal{P}(B) \Leftrightarrow \\ \mathcal{P}(B) &= 0,3\end{aligned}$$

b) Como A e B são independentes segue que

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(A \cup B) &= \mathcal{P}(A) + \mathcal{P}(B) - \mathcal{P}(A \cap B) \Leftrightarrow \\ \mathcal{P}(A \cup B) &= \mathcal{P}(A) + \mathcal{P}(B) - \mathcal{P}(A) \times P(B) \Leftrightarrow \\ 0,7 &= 0,4 + \mathcal{P}(B) - 0,4\mathcal{P}(B) \Leftrightarrow \\ 0,3 &= 0,6\mathcal{P}(B) \Leftrightarrow \\ \mathcal{P}(B) &= 0,5.\end{aligned}$$

c) Como $A \subset B$ segue que $A \cup B = B$ e, portanto, $\mathcal{P}(B) = 0,7$.

17. Represente o evento *"um homem fumar cigarro"* por A e o evento *"um homem fumar charuto"* por B, desse modo temos

a) $\mathcal{P}(A^c \cap B^c) = \mathcal{P}\left((A \cup B)^c\right) = 1 - \mathcal{P}(A \cup B) = 1 - [\mathcal{P}(A) + \mathcal{P}(B) - \mathcal{P}(A \cap B)] = 0,6.$

b) De modo muito simples, queremos $A \backslash (A \cap B) = A \cap (A \cap B)^c$. Após cálculos simples chegamos à expressão $\mathcal{P}(A \cap (A \cap B)^c) = \mathcal{P}(A) - \mathcal{P}(A \cap B) = 0,28 - 0,05 = 0,23.$

18. Como cada pessoa pode celebrar seu aniversário em um dos 365 dias do ano (estamos ignorando anos bissextos), nosso espaço amotral é finito, discreto e existe um total de $(365)^n$ possibilidades, ou seja, $n(\Omega) = (365)^n$. Desse modo, a probabilidade desejada é

$$\frac{(365)(364)(363)\cdots(365-n+1)}{(365)^n}.$$

Para alguns pode ser uma surpresa o fato de que quando $n \geqslant 23$ essa probabilidade é menor que 0,5, ou seja, com 50% de chances duas pessoas fazem aniversário no mesmo dia do ano.

Quando $n = 50$ essa probabilidade cai para 0,03. Isso significa que com probabilidade de 97%, duas pessoas fazem aniversário no mesmo dia do ano.

19. Vamos considerar os eventos, $A =$ *"os dois lados são vermelhos"*, $B =$ *"os dois lados são pretos"*, $C =$ *"os dois lados são brancos"* e $D =$ *"os dois lados são amarelos"*. Nosso espaço amostral é finito discreto, $n(\Omega) = 36$ e os eventos A, B, C e D são disjuntos, então

$$\mathcal{P}(A \cup B \cup C \cup D) = \mathcal{P}(A) + \mathcal{P}(B) + \mathcal{P}(C) + \mathcal{P}(D) = 4/36 + 4/36 + 1/36 + 1/36 = 5/18.$$

20. Como existem nove moedas das quais iremos selecionar duas, $n(\Omega) = \binom{9}{2}$. Para que tenhamos R\$ 1,50 devemos selecionar uma moeda de cada cada tipo, desse modo

$$\mathcal{P}(\textit{"obtermos R\$ 1,50"}) = \frac{\binom{5}{1}\binom{4}{1}}{\binom{9}{2}}.$$

21. O espaço amostral do experimento é finito, discreto e $n(\Omega) = \binom{52}{5}$. Com base nessas propriedades, seguem nos itens abaixo as probabilidades pedidas.

   a) $\dfrac{13\binom{4}{2}\binom{12}{3}\binom{4}{1}\binom{4}{1}\binom{4}{1}}{\binom{52}{5}}$

   b) $\dfrac{\binom{13}{2}\binom{4}{2}\binom{4}{2}\binom{44}{1}}{\binom{52}{5}}$

   c) $\dfrac{13\binom{4}{3}\binom{12}{2}\binom{4}{1}\binom{4}{1}}{\binom{52}{5}}$

   d) $\dfrac{4\binom{13}{5} - 40}{\binom{52}{5}}$

   e) $\dfrac{13\binom{4}{4}\binom{48}{1}}{\binom{52}{5}}$

22. Seja $A_k =$ *"produzir k-quadros"*, $k = 1, 2, 3, \ldots$

Os eventos A_k são disjuntos, desse modo temos que

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(\textit{“produzir pelo meno um quadro”}) &= \mathcal{P}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_i\right)\\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\mathcal{P}(A_k)\\ &= \sum_{k=1}^{\infty} p^k\\ &= \frac{p}{1-p}.\end{aligned}$$

Como a probabilidade de produzir pelo menos um quadro por dia é um, resolvendo a equação $\frac{p}{1-p} = 1$ segue que $p = 0,5$.

23. A primeira observação importante é a de que o espaço amostral do experimento é infinito discreto. Por essa razão, lançamos mão da medida definida segundo os axiomas da probabilidade apresentados em aula. Defina E_n como sendo o evento *“ocorre 5 no n-ésimo lançamento e não ocorre 5 nem 7 nos primeiros* $n-1$ *lançamentos”*. Podemos concluir facilmente que $\mathcal{P}(E_n) = \left(\frac{4}{36}\right)\left(\frac{26}{36}\right)^{n-1}$.

    A sequência de eventos $\{E_n, n \geqslant 1\}$ é uma sequência de eventos disjuntos, portanto a probabilidade desejada é

$$\mathcal{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\mathcal{P}(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{36}\right)\left(\frac{26}{36}\right)^{n-1} = \frac{2}{5}.$$

24. Como no exemplo anterior o espaço amostral do experimento é infinito discreto e, seguindo a mesma ideia, defina E_n como sendo o evento *“ocorre A na n-ésima repetição e não ocorre A nem B nas primeiras* $n-1$ *repetições”*. Desse modo, segue que

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(E_n) &= 0,13 \times \mathcal{P}(A^c \cap B^c)^{n-1}\\ &= 0,13 \times \mathcal{P}\left((A \cup B)^c\right)^{n-1}\\ &= 0,13 \times \{1 - \mathcal{P}(A \cup B)\}^{n-1}\\ &= 0,13 \times \{1 - [0,13 + 0,39]\}^{n-1}\\ &= 0,13 \times 0,48^{n-1}\end{aligned}$$

    A sequência de eventos $\{E_n, n \geqslant 1\}$ é uma sequência de eventos disjuntos, portanto a probabilidade desejada é

$$\mathcal{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\mathcal{P}(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} 0,13 \times 0,48^{n-1} = 0,25.$$

25. Considere os eventos $V_1 =$ *"A primeira bola é vermelha"* e $V_2 =$ *"A segunda bola é vermelha"*. Pela lei da multiplicação temos

$$\mathcal{P}(V_1 \cap V_2) = \mathcal{P}(V_1)\mathcal{P}(V_2|V_1) = \frac{8}{12} \cdot \frac{7}{11} = \frac{14}{33}.$$

26. a) Seja $A =$ *"As duas primeiras peças são defeituosas"*, então

$$\mathcal{P}(A) = \frac{12}{20} \times \frac{11}{19} = \frac{33}{95}.$$

b) Seja $B =$ *"Uma peça é perfeita e a outra defeituosa"*, então

$$P(B) = \frac{8}{20} \times \frac{12}{19} + \frac{12}{20} \times \frac{8}{19} = \frac{48}{95}.$$

c) Seja $C =$ *"A segunda peça é defeituosa"*, então

$$P(C) = \frac{8}{20} \times \frac{12}{19} + \frac{12}{20} \times \frac{11}{19} = \frac{57}{95}.$$

d) Seja $D =$ *"As oito primeiras peças são perfeitas"*, então

$$P(D) = \frac{8}{20} \times \frac{7}{19} \times \frac{6}{18} \times \frac{5}{17} \times \frac{4}{16} \times \frac{3}{15} \times \frac{2}{14} \times \frac{1}{13} = \frac{1}{125970}.$$

27. Considere os eventos

$$\begin{aligned} A &= \text{"pelo menos uma pessoa pega o guarda-chuva correto"} \\ A_j &= \text{"a } j\text{-ésima pessoa pega o guarda-chuva correto,} \quad j = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Como temos três guarda-chuvas, existem 3! maneiras distintas de cada pessoa selecionar um guarda-chuva. Os eventos A_j não são disjuntos, de modo que

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(A) &= \mathcal{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3) \\ &= \mathcal{P}(A_1) + \mathcal{P}(A_2) + \mathcal{P}(A_3) - \mathcal{P}(A_1 \cap A_2) - \mathcal{P}(A_2 \cap A_1) - \mathcal{P}(A_3 \cap A_2) + \mathcal{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3). \end{aligned}$$

Agora, note que

$$\mathcal{P}(A_j) = \frac{2!}{3!} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$\mathcal{P}(A_i \cap A_j) = \frac{1!}{3!} = \frac{1}{6}$$

$$\mathcal{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{1!}{3!} = \frac{1}{6}$$

Desse modo, temos que $\mathcal{P}(A) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{6} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$.

28. a) Como existem 400 pessoas no total, segue da definição que

$$\mathcal{P}(S|F) = \frac{\mathcal{P}(S \cap F)}{\mathcal{P}(F)} = \frac{150/400}{(150 + 40 + 10 + 20)/400} = \frac{15}{22}.$$

Seguindo a mesma ideia encontramos $\mathcal{P}(C|F) = \frac{2}{11}$, $\mathcal{P}(D|F) = \frac{1}{22}$ e $\mathcal{P}(O|F) = \frac{1}{11}$.

b) Basta somar as probabilidades calculadas no item anterior.

c) Repetindo o procedimento do **item a)** obtemos $\mathcal{P}(S|M) = \frac{5}{18}, \mathcal{P}(C|M) = \frac{1}{3}$, $\mathcal{P}(D|M) = \frac{2}{9}$ e $\mathcal{P}(O|M) = \frac{1}{6}$ cuja soma é um.

d) Segue da definição que

$$\mathcal{P}(F|S) = \frac{\mathcal{P}(F \cap S)}{\mathcal{P}(S)} = \frac{150/400}{(150+50)/400} = \frac{3}{4}.$$

Seguindo a mesma ideia encontramos $\mathcal{P}(M|S) = \frac{1}{4}$ que somada à probabilidade anterior dá um.

e) Repetindo o procedimento do **item d)** obtemos $\mathcal{P}(F|C) = \frac{2}{5}$, $\mathcal{P}(M|C) = \frac{3}{5}$, $\mathcal{P}(F|D) = \frac{1}{5}$, $\mathcal{P}(M|D) = \frac{4}{5}$, $\mathcal{P}(F|O) = \frac{2}{5}$ e $\mathcal{P}(M|O) = \frac{3}{5}$ cujas somas nas respectivas condicionais é um.

f) $\mathcal{P}(S) = \frac{1}{2}, \mathcal{P}(C) = \frac{1}{4}, \mathcal{P}(D) = \frac{1}{8}, \mathcal{P}(O) = \frac{1}{8}, \mathcal{P}(S|F) = \frac{15}{22}, \mathcal{P}(C|F) = \frac{2}{11}, \mathcal{P}(D|F) = \frac{1}{22}, \mathcal{P}(O|F) = \frac{1}{11}, \mathcal{P}(S|M) = \frac{5}{18}, \mathcal{P}(C|M) = \frac{1}{3}, \mathcal{P}(D|M) = \frac{2}{9}$ e $\mathcal{P}(O|M) = \frac{1}{6}$.

g) $\mathcal{P}(F) = \frac{11}{20}, \mathcal{P}(M) = \frac{9}{20}, \mathcal{P}(F|S) = \frac{3}{4}, \mathcal{P}(M|S) = \frac{1}{4}, \mathcal{P}(F|C) = \frac{2}{5}, \mathcal{P}(M|C) = \frac{3}{5}, \mathcal{P}(F|D) = \frac{1}{5}, \mathcal{P}(M|D) = \frac{4}{5}, \mathcal{P}(F|O) = \frac{2}{5}$ e $\mathcal{P}(M|O) = \frac{3}{5}$.

h) Basta dividir cada valor na tabela por 400 e repetir os passos via definição.

29. Considere a tabela abaixo construída a partir dos dados:

Sexo/Curso	Computação	Matemática	Total
Homem	10	30	40
Mulher	20	40	60
Total	30	70	100

Defina os eventos $H =$ *"O aluno é homem"*, $F =$ *"O aluno é mulher"*, $C =$ *"O aluno é da computação"*, $M =$ *"O aluno é da matemática"*.

a) $P(M|F) = \frac{P(F\cap M)}{P(F)} = \frac{40/100}{60/100} = \frac{2}{3}$

b) $P(C|H) = \frac{P(H\cap C)}{P(H)} = \frac{10/100}{40/100} = \frac{1}{4}$

c) $P(H|C) = \frac{P(C\cap H)}{P(C)} = \frac{10/100}{30/100} = \frac{1}{3}$

d) $P(F|M) = \frac{P(M\cap F)}{P(M)} = \frac{40/100}{70/100} = \frac{4}{7}$

30. Considere os eventos

$$\begin{aligned} U_1 &= \text{"O usuário é aluno da graduação"} \\ U_2 &= \text{"O usuário é aluno da pós-graduação"} \\ U_3 &= \text{"O usuário é professor"} \\ A &= \text{"O livro é em português"} \end{aligned}$$

a) Da lei da multiplicação segue que

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(A) &= \mathcal{P}(A|U_1)\mathcal{P}(U_1) + \mathcal{P}(A|U_2)\mathcal{P}(U_2) + \mathcal{P}(A|U_3)\mathcal{P}(U_3) \\ &= 0,30 \times 0,75 + 0,38 \times 0,50 + 0,32 \times 0,20 \\ &= 0,479. \end{aligned}$$

b) Da definição segue que

$$\mathcal{P}(U_1|A) = \frac{\mathcal{P}(U_1 \cap A)}{\mathcal{P}(A)} = \frac{\mathcal{P}(A|U_1)\mathcal{P}(U_1)}{\mathcal{P}(A)} = \frac{0,30 \times 0,75}{0,479} \simeq 0{,}4697$$

$$\mathcal{P}(U_2|A) = \frac{\mathcal{P}(U_2 \cap A)}{\mathcal{P}(A)} = \frac{\mathcal{P}(A|U_2)\mathcal{P}(U_2)}{\mathcal{P}(A)} = \frac{0,38 \times 0,50}{0,479} \simeq 0{,}3967$$

$$\mathcal{P}(U_3|A) = \frac{\mathcal{P}(U_3 \cap A)}{\mathcal{P}(A)} = \frac{\mathcal{P}(A|U_2)\mathcal{P}(U_2)}{\mathcal{P}(A)} = \frac{0,32 \times 0,20}{0,479} \simeq 0{,}1336$$

31. Diretamente do enunciado temos que $\mathcal{P}(A|H) = 0,20$ e $\mathcal{P}(B|M) = 0,30$. Para o cálculo da última probabilidade temos

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}(M|A) &= \frac{\mathcal{P}(M \cap A)}{P(A)} \\
&= \frac{\mathcal{P}(A|M)P(M)}{P(A)} \\
&= \frac{\mathcal{P}(A|M)P(M)}{\mathcal{P}(A|M)P(M) + \mathcal{P}(A|H)P(H)} \\
&= \frac{[1 - \mathcal{P}(B|M)][1 - \mathcal{P}(H)]}{[1 - \mathcal{P}(B|M)][1 - \mathcal{P}(H)] + \mathcal{P}(A|H)P(H)} \\
&= \frac{[1 - 0,30][1 - 0,75]}{[1 - 0,30][1 - 0,75] + 0,20 \times 0,75} \\
&\simeq 0,5385
\end{aligned}$$

32. Primeiramente suponha que A e B são independentes e note que $A = (A \cap B) \cup (A \cap B^c)$. Como $A \cap B$ e $A \cap B^c$ são eventos disjuntos, temos

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}(A) &= \mathcal{P}(A \cap B) + \mathcal{P}(A \cap B^c) \\
&= \mathcal{P}(A)\mathcal{P}(B) + \mathcal{P}(A \cap B^c).
\end{aligned}$$

Passando o termo $\mathcal{P}(A)\mathcal{P}(B)$ para o lado esquerdo da igualdade segue que

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}(A \cap B^c) &= \mathcal{P}(A) - \mathcal{P}(A)\mathcal{P}(B) \\
&= \mathcal{P}(A)[1 - \mathcal{P}(B)] \\
&= \mathcal{P}(A)\mathcal{P}(B^c).
\end{aligned}$$

Provamos assim que A e B^c são independentes. As demais equivalências seguem de forma análoga.

33. a) Como $A \cap B \subset A$, temos que $\mathcal{P}(A \cap B) \leqslant \mathcal{P}(A) = 0$, portanto $\mathcal{P}(A \cap B) = 0$. Por outro lado, $\mathcal{P}(A)\mathcal{P}(B) = 0$.

b) Note que $A \subset A \cup B$, de modo que

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}(A \cap B) &= \mathcal{P}(A) + \mathcal{P}(B) - \mathcal{P}(A \cup B) \\
&= 1 + \mathcal{P}(B) - 1 \\
&= \mathcal{P}(B) \\
&= \mathcal{P}(A)\mathcal{P}(B).
\end{aligned}$$

c) Se D e D^c são independentes temos que $\mathcal{P}(D)\mathcal{P}(D^c) = \mathcal{P}(D \cap D^c) = \mathcal{P}(\emptyset) = 0$.

d) Sob a hipótese segue que $\mathcal{P}(E) = \mathcal{P}(E \cap E) = \mathcal{P}(E)\mathcal{P}(E) = [\mathcal{P}(E)]^2$.

34. Considere os eventos

$$\begin{aligned} A_1 &= \text{“\textit{A pessoa vive 70 anos ou mais}”} \\ A_2 &= \text{“\textit{A pessoa vive 80 anos ou mais}”} \end{aligned}$$

A probabilidade de interesse é dada por

$$\mathcal{P}(A_2|A_1) = \frac{\mathcal{P}(A_1 \cap A_2)}{\mathcal{P}(A_1)} = \frac{\mathcal{P}(A_2)}{\mathcal{P}(A_1)} = \frac{0,2}{0,6} = \frac{1}{3}$$

35. Considere os eventos

$$\begin{aligned} B_1 &= \text{“\textit{O circuito apresenta falha}”} \\ B_2 &= \text{“\textit{O circuito não apresenta falha}”} \\ D_1 &= \text{“\textit{O circuito é declarado com falha}”} \\ D_2 &= \text{“\textit{O circuito é declarado sem falha}”} \end{aligned}$$

A probabilidade de interesse é dada por

$$\begin{aligned} P(B_2|D_1) &= \frac{\mathcal{P}(B_2 \cap D_1)}{\mathcal{P}(D_1)} \\ &= \frac{\mathcal{P}(D_1|B_2)\mathcal{P}(B_2)}{\mathcal{P}(D_1)} \\ &= \frac{\mathcal{P}(D_1|B_2)\mathcal{P}(B_2)}{\mathcal{P}(D_1|B_1)\mathcal{P}(B_1) + \mathcal{P}(D_1|B_2)\mathcal{P}(B_2)} \\ &= \frac{(1-\mathcal{P}(D_2|B_2))(1-\mathcal{P}(B_1))}{\mathcal{P}(D_1|B_1)\mathcal{P}(B_1) + (1-\mathcal{P}(D_2|B_2))(1-\mathcal{P}(B_1))} \\ &= \frac{(0,95)(0,03)}{(0,05)(0,95)+(0,95)(0,03)} \\ &\simeq 0,375 \end{aligned}$$

36. Considere os eventos R = *“O aluno responde corretamente”* e S = *“O aluno sabe a resposta”*. A probabilidade desejada é

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(S|R) &= \frac{\mathcal{P}(S \cap R)}{\mathcal{P}(R)} \\ &= \frac{\mathcal{P}(R|S)\mathcal{P}(S)}{\mathcal{P}(R|S)\mathcal{P}(S) + \mathcal{P}(R|S^c)\mathcal{P}(S^c)} \\ &= \frac{p}{p + (1/m)(1-p)} \\ &= \frac{mp}{1+(m-1)p}. \end{aligned}$$

Para $m = 5$ e $p = 1/2$ a probabilidade desejada é $5/6$.

37. Considere os eventos $A =$ *"O suspeito é culpado"* e $B =$ *"O suspeito possui a característica"*. A probabilidade desejada é

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}(A|B) &= \frac{\mathcal{P}(A \cap B)}{\mathcal{P}(B)} \\
&= \frac{\mathcal{P}(B|A)\mathcal{P}(A)}{\mathcal{P}(B|A)\mathcal{P}(A) + \mathcal{P}(B|A^c)\mathcal{P}(A^c)} \\
&= \frac{1 \cdot (0,6)}{1 \cdot (0,6) + (0,2) \cdot (0,4)} \\
&\simeq 0,882.
\end{aligned}$$

38. Considere que todas as probabilidades são condicionadas ao evento em que a mãe tem o par de genes (A, A), o macho número 1 possui o par de genes (a, a), e o macho número 2 tem o par de genes (A, a). Agora, seja M_i o evento em que o macho número i é o pai, $i = 1, 2$, e seja $B_{(A,a)}$ o evento em que o chimpanzé bebê tem o o par de genes (A, a). Então, a probabilidade desejada é

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}(M_1|B_{(A,a)}) &= \frac{\mathcal{P}(M_1 \cap B_{(A,a)})}{\mathcal{P}(B_{(A,a)})} \\
&= \frac{\mathcal{P}(B_{(A,a)}|M_1)\mathcal{P}(M_1)}{\mathcal{P}(B_{(A,a)}|M_1)\mathcal{P}(M_1) + \mathcal{P}(B_{(A,a)}|M_2)\mathcal{P}(M_2)} \\
&= \frac{1 \cdot p}{1 \cdot p + (1/2)(1-p)} \\
&= \frac{2p}{1+p}.
\end{aligned}$$

39. Considere os eventos abaixo:

$$\begin{aligned}
C_1 &= \text{“}\textit{O gabinete A foi sorteado}\text{”}, \\
C_2 &= \text{“}\textit{O gabinete B foi sorteado}\text{”}, \\
S_1 &= \text{“}\textit{Uma moeda de prata foi sorteada na primeira gaveta aberta}\text{”}, \\
S_2 &= \text{“}\textit{Uma moeda de prata foi sorteada na segunda gaveta aberta}\text{”}.
\end{aligned}$$

A probabilidade desejada é

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}(S_2|S_1) &= \frac{\mathcal{P}(S_1 \cap S_2)}{\mathcal{P}(S_1)} \\
&= \frac{\mathcal{P}(S_1 \cap S_2|C_1)\mathcal{P}(C_1) + \mathcal{P}(S_1 \cap S_2|C_2)\mathcal{P}(C_2)}{\mathcal{P}(S_1|C_1)\mathcal{P}(C_1) + \mathcal{P}(S_1|C_2)\mathcal{P}(C_2)} \\
&= \frac{(1)(\frac{1}{2}) + (0)(\frac{1}{2})}{(1)(\frac{1}{2}) + (\frac{1}{2})(\frac{1}{2})} \\
&= \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

40. a) $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant 1\}$.

b) Para um evento $A \subset \Omega$ é natural definirmos $\mathcal{P}(A) = \frac{\text{Área}(A)}{\text{Área}(\Omega)} = \frac{\text{Área}(A)}{\pi}$.

É importante comentar que a área do evento A precisa estar bem definida. De fato, isso nem sempre ocorre.

c) A probabilidade do evento $A = (0,0)$ é zero.

d) $\mathcal{P}(B) = \frac{\pi(1/2)^2}{\pi} = \frac{1}{4}$, $\mathcal{P}(C) = \frac{\pi(1)^2}{\pi} = \frac{1}{2}$ e $\mathcal{P}(B \cap C) = \frac{\frac{\pi(1/2)^2}{\pi}}{2} = \frac{1}{8}$.
Como $\mathcal{P}(B \cap C) = \mathcal{P}(B)\mathcal{P}(C)$, os eventos são independentes.

41. Das informação obtidas no texto, concluímos que

$$\mathcal{P}(E|S) = 2\mathcal{P}(E|S^c) \text{ e } \mathcal{P}(S) = 0,32.$$

Dessa maneira, segue que

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}(S|E) &= \frac{\mathcal{P}(S \cap E)}{\mathcal{P}(E)} \\
&= \frac{\mathcal{P}(E|S)\mathcal{P}(S)}{\mathcal{P}(E|S)\mathcal{P}(S) + \mathcal{P}(E|S^c)\mathcal{P}(S^c)} \\
&= \frac{2\mathcal{P}(E|S^c)\mathcal{P}(S)}{2\mathcal{P}(E|S^c)\mathcal{P}(S) + \mathcal{P}(E|S^c)\mathcal{P}(S^c)} \\
&= \frac{2\mathcal{P}(S)}{2\mathcal{P}(S) + \mathcal{P}(S^c)} \\
&= \frac{32}{66}.
\end{aligned}$$

42. a) $\mathcal{P}(A \cup C) = \mathcal{P}(A) + \mathcal{P}(C) - \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(C) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{5}{8}$

b) Como $B \cap C = \emptyset$, segue que

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}(A \cup B \cup C) &= \mathcal{P}(A) + \mathcal{P}(B) + \mathcal{P}(C) - \mathcal{P}(A \cap B) - \mathcal{P}(A \cap C) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \\
&= \frac{91}{120}.
\end{aligned}$$

c) $\mathcal{P}(B|C) = \frac{\mathcal{P}(C \cap B)}{\mathcal{P}(C)} = \frac{0}{1/4} = 0$

d) Como B e C são disjuntos, da definição de probabilidade condicional segue que

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}[(B \cup C)|A] &= \frac{\mathcal{P}[A \cap (B \cup C)]}{\mathcal{P}(A)} \\
&= \frac{\mathcal{P}[(A \cap B) \cup (A \cap C)]}{\mathcal{P}(A)} \\
&= \frac{\mathcal{P}(A \cap B) + \mathcal{P}(A \cap C)}{\mathcal{P}(A)} \\
&= \frac{\frac{1}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{13}{20}.
\end{aligned}$$

e) Como B e C são disjuntos, da definição de probabilidade condicional segue que

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}[A|(B\cup C)] &= \frac{\mathcal{P}[(B\cup C)\cap A]}{\mathcal{P}(B\cup C)} \\
&= \frac{\mathcal{P}[(A\cap B)\cup(A\cap C)]}{\mathcal{P}(B\cup C)} \\
&= \frac{\mathcal{P}(A\cap B)+\mathcal{P}(A\cap C)}{\mathcal{P}(B)+\mathcal{P}(C)} \\
&= \frac{\frac{1}{5}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}}{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}} \\
&= \frac{39}{70}.
\end{aligned}$$

43. Seja W o evento em que uma mulher abandona o emprego e C o evento em que o empregado trabalha na loja C. A probabilidade desejada é

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}(C|W) &= \frac{\mathcal{P}(W\cap C)}{\mathcal{P}(C)} \\
&= \frac{\mathcal{P}(W|C)\mathcal{P}(C)}{\mathcal{P}(W|A)\mathcal{P}(A)+\mathcal{P}(W|B)\mathcal{P}(B)+\mathcal{P}(W|C)\mathcal{P}(C)} \\
&= \frac{(0,7)\frac{100}{225}}{(0,5)\frac{50}{225}+(0,6)\frac{75}{225}+(0,7)\frac{100}{225}} \\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

44. Considere E o evento em que o aluno cursa engenharia da computação e F o evento em que o aluno é do sexo feminino.

a) $\mathcal{P}(F|E) = \dfrac{\mathcal{P}(F\cap E)}{\mathcal{P}(E)} = \dfrac{0,02}{0,05} = 0,40.$

b) $\mathcal{P}(E|F) = \dfrac{\mathcal{P}(E\cap F)}{\mathcal{P}(F)} = \dfrac{0,02}{0,52} \simeq 0,038.$