Probabilidade e Estatística: Noções de Probabilidade (Unidade II)

Felipe Quintino

felipe.quintino@unb.br

Departamento de Estatística-EST
Universidade de Brasília-UnB

02/2025

Unidade II. Noções de Probabilidade

1. Noções de Probabilidade
   - Experimentos aleatórios; espaço amostral e eventos
   - Tipos de probabilidade e propriedades da probabilidade
   - Definição de probabilidade e suas propriedades
   - Probabilidade condicional e independência; regra da multiplicação
   - Lei da Probabilidade Total; Teorema de Bayes
2. Referências

Atenção: Proibido Registrar Imagens ou Áudios Durante as Aulas

Denominaremos um **fenômeno aleatório** à situação ou acontecimento cujos resultados não podem ser previstos com certeza.

Estamos interessados em quantificar incertezas envolvendo fenômenos aleatórios.

Todo experimento ou fenômeno que envolva um elemento casual terá seu modelo probabilístico especificado quando estabelecermos:

(a) um **espaço amostral**, Ω, que consiste, no caso discreto, da enumeração (finita ou infinita) de todos os resultados possíveis do experimento em questão:

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n, \cdots\}$$

(os elementos de Ω são os **pontos amostrais** ou eventos elementares);

Todo experimento ou fenômeno que envolva um elemento casual terá seu modelo probabilístico especificado quando estabelecermos:

(a) um **espaço amostral**, Ω, que consiste, no caso discreto, da enumeração (finita ou infinita) de todos os resultados possíveis do experimento em questão:

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n, \cdots\}$$

(os elementos de Ω são os **pontos amostrais** ou eventos elementares);

(b) uma **probabilidade**, $P(\omega)$, para cada ponto amostral, de tal sorte que seja possível encontrar a probabilidade $P(A)$ de qualquer subconjunto A de Ω, isto é, a probabilidade do que chamaremos de um **evento aleatório** ou simplesmente evento.

Exemplos

1. Se o resultado de um experimento consiste na determinação do sexo de um bebê recém-nascido, então

Exemplos

1. Se o resultado de um experimento consiste na determinação do sexo de um bebê recém-nascido, então

$$\Omega = \{M, F\}$$

onde o resultado F significa que o bebê é menina e M que o bebê é menino.

Exemplos

2. Se o resultado de um experimento é a ordem de chegada de uma corrida entre 7 cavalos numerados de 1 a 7, então

Exemplos

2. Se o resultado de um experimento é a ordem de chegada de uma corrida entre 7 cavalos numerados de 1 a 7, então

$$\Omega = \{\text{todas as 7! permutações de } (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)\}$$

Exemplos

2. Se o resultado de um experimento é a ordem de chegada de uma corrida entre 7 cavalos numerados de 1 a 7, então

$$\Omega = \{\text{todas as 7! permutações de } (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)\}$$

O resultado $(2, 3, 1, 6, 5, 4, 7)$ significa, por exemplo, que o cavalo número 2 chegou em primeiro lugar, depois o cavalo número 3, depois o número 1, e assim por diante.

3. Se o experimento consiste em jogar duas moedas, então o espaço amostral é formado pelos quatro pontos a seguir:

Exemplos

3. Se o experimento consiste em jogar duas moedas, então o espaço amostral é formado pelos quatro pontos a seguir:

$$\Omega = \{CC, CK, KC, KK\}.$$

Exemplos

3. Se o experimento consiste em jogar duas moedas, então o espaço amostral é formado pelos quatro pontos a seguir:

$$\Omega = \{CC, CK, KC, KK\}.$$

O resultado será CC se ambas as moedas derem cara, CK se a primeira moeda der cara e a segunda der coroa, KC se a primeira der coroa e a segunda der cara, e KK se ambas derem coroa.

Exemplos

4. Se o experimento consiste em jogar dois dados, então o espaço amostral é formado por 36 pontos

Exemplos

4. Se o experimento consiste em jogar dois dados, então o espaço amostral é formado por 36 pontos

$$\Omega = \{(i, j); i, j = 1, 2, \cdots, 6\}$$

onde o resultado (i, j) ocorre se i é o número que aparece no dado da esquerda e j é o número que aparece no outro dado.

Exemplos

5. Se o experimento consiste em medir (em horas) o tempo de vida de um componente eletrônico, então o espaço amostral é formado por todos os números reais não negativos; isto é:

$$\Omega = \{x; 0 \leq x < \infty\}.$$

Atenção!

As noções de conjuntos, subconjuntos e operações entre conjuntos serão essenciais para a continuidade do curso. Recomendo a leitura do arquivo de revisão da Teoria de Conjuntos e Análise Combinatória.

Tipos de probabilidade e propriedades da probabilidade

O método que você utilizará para calcular uma probabilidade depende do tipo de probabilidade. Há três tipos:

- probabilidade clássica;
- probabilidade empírica;
- probabilidade subjetiva.

A probabilidade de ocorrência de um evento A é escrita como $P(A)$ e lê-se "probabilidade do evento A".

Probabilidade clássica

Definição 1

Seja Ω um conjunto com um número finito de elementos e A um subconjunto de Ω. Definimos a **probabilidade** *do evento A ocorrer como sendo*

$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega}, \tag{1}$$

onde $\#A$ denota o número de elementos no conjunto A.

Probabilidade empírica

Definição 2

Probabilidade empírica *é baseada em observações obtidas de experimentos probabilísticos. A probabilidade empírica de um evento A é a frequência relativa do evento A*

$$P(A) = \frac{\textit{frequência do evento } A}{\textit{frequência total}} = \frac{f}{n}.$$

Lei dos Grandes Números

Informalmente, a **Lei dos Grandes Números** nos diz que conforme um experimento é repetido um grande número de vezes, a probabilidade empírica de um evento tende a se aproximar de sua probabilidade teórica (real).

Probabilidade Subjetiva

O terceiro tipo de probabilidade é a **probabilidade subjetiva**, que resulta de conjeturas e de estimativas por intuição.

Por exemplo,

- dada a saúde de um paciente e a extensão dos ferimentos, um médico pode sentir que o paciente tem 90% de chance de recuperação total;
- um analista de negócios pode prever que a chance de os funcionários de certa empresa entrarem em greve é de 0,25.

Exemplo 3

Considere as seguintes informações de alunos matriculados em quatro cursos da universidade.

Curso \ Sexo	Homens (H)	Mulheres (F)	Total
Matemática Pura (*M*)	70	40	110
Matemática Aplicada (*A*)	15	15	30
Estatística (*E*)	10	20	30
Computação (*C*)	20	10	30
Total	115	85	200

Calcule as seguintes probabilidades

1. $P(H)$
2. $P(H \cup A)$

Cuidado!

No exemplo anterior, um cálculo equivocado para $P(H \cup A)$ seria

$$P(H \cup A) = \frac{\#(H \cup A)}{\#\Omega} = \frac{\#H + \#A}{200} = \frac{115 + 30}{200}$$

.

Cuidado!

No exemplo anterior, um cálculo equivocado para $P(H \cup A)$ seria

$$P(H \cup A) = \frac{\#(H \cup A)}{\#\Omega} = \frac{\#H + \#A}{200} = \frac{115 + 30}{200}$$

.

O cálculo correto seria "descontando" a interseção (justifique!!)

$$P(H \cup A) = \frac{\#(H \cup A)}{\#\Omega} = \frac{\#H + \#A - \#(H \cap A)}{200} = \frac{115 + 30 - 15}{200} = \frac{130}{200}$$

.

Algumas propriedades da probabilidade

A seguir, apresentaremos algumas propriedades da probabilidade definida em (1). (Justificativas feitas em aula!)

Para subconjuntos A e B de Ω, valem:

(P1) $P(\emptyset) = 0$ e $P(\Omega) = 1$;

(P2) $P(A^c) = 1 - P(A)$;

(P3) Se $A \cap B = \emptyset$, então $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$;

(P4) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$;

(P5) Se $A \subset B$, então $P(A) \leq P(B)$;

Exemplo 4

Considere o experimento aleatório de observar o tempo de vida de um certo componente eletrônico. Então o espaço amostral é

$$\Omega = [0, \infty).$$

Nesse caso, **não** *conseguimos contar o número de elementos no conjunto* $[0, 1]$*!*

Pergunta

Como definir a probabilidade de um conjunto infinito (enumerável ou não)?

Exercício

Consideremos um experimento aleatório e os eventos A e B associados, tais que $P(A) = 1/2$, $P(B) = 1/3$ e $P(A \cap B) = 1/4$. Mostre que

(a) $P(A^c) = 1/2$ e $P(B^c) = 2/3$

(b) $P(A \cup B) = 7/12$

(c) $P(A^c \cap B^c) = 5/12$

(d) $P(A^c \cup B^c) = 3/4$

(e) $P(A^c \cap B) = 1/12$.

Definição de probabilidade e suas propriedades

O Exemplo 4 descreve um espaço amostral com infinitos elementos, de modo que a definição de probabilidade dada em (1) não pode ser utilizada.

Vamos estudar duas situações de espaço amostral com infinitos elementos:

- Ω é enumerável;
- Ω é qualquer conjunto não-vazio.

Caso enumerável

Seja $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \cdots\}$ um conjunto infinito enumerável.
Suponha que a probabilidade de cada ω_i seja dada por $P(\omega_i) = p_i$, em que

(i) $p_i > 0$, $i = 1, 2, \cdots$

(ii) $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$.

Então a probabilidade de um evento $A \subset \Omega$ é definida por

$$P(A) := \sum_{i;\omega_i \in A} p_i. \tag{2}$$

Caso enumerável

Seja $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \cdots\}$ um conjunto infinito enumerável.
Suponha que a probabilidade de cada ω_i seja dada por $P(\omega_i) = p_i$, em que

(i) $p_i > 0$, $i = 1, 2, \cdots$

(ii) $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$.

Então a probabilidade de um evento $A \subset \Omega$ é definida por

$$P(A) := \sum_{i; \omega_i \in A} p_i. \tag{2}$$

Observação 5

As propriedades $(P1) - (P5)$ permanecem válidas para a definição (2).

Caso Geral: Axiomas da Probabilidade

Vamos considerar uma probabilidade como sendo uma função $P(\cdot)$ que atribui valores numéricos aos eventos do espaço amostral.

Definição 6

Uma função $P(\cdot)$ é denominada probabilidade se satisfaz as condições

(i) $0 \leq P(A) \leq 1, \forall A \subset \Omega$;

(ii) $P(\Omega) = 1$;

(iii) *Se $A_1, A_2, \cdots$ são conjuntos mutuamente exclusivos (i.e., $A_i \cap A_j = \emptyset$ se $i \neq j$), então*

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

Caso Geral: Axiomas da Probabilidade

Vamos considerar uma probabilidade como sendo uma função $P(\cdot)$ que atribui valores numéricos aos eventos do espaço amostral.

Definição 6

Uma função $P(\cdot)$ é denominada probabilidade se satisfaz as condições

(i) $0 \leq P(A) \leq 1, \forall A \subset \Omega$;

(ii) $P(\Omega) = 1$;

(iii) *Se $A_1, A_2, \cdots$ são conjuntos mutuamente exclusivos (i.e., $A_i \cap A_j = \emptyset$ se $i \neq j$), então*

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

Observação 7

As propriedades de probabilidade (P1)-(P5), permanecem válidas.

Pergunta

Qual o domínio apropriado para a função de probabilidade $P(\cdot)$?

Pergunta

Qual o domínio apropriado para a função de probabilidade $P(\cdot)$?

- Minimamente, precisamos de uma classe de subconjuntos de Ω que conhenham $\emptyset$, Ω e se $A_1, A2, \cdots$ forem conjuntos nessa classe, seus respectivos complementares, as uniões e interseções estejam todas dentro dessa classe (operações $\cup$ e $\cap$ estão bem definidas na classe).

Continuidade da Probabilidade

Uma importante propriedade da função de probabilidade é a continuidade.

Continuidade da Probabilidade

Uma importante propriedade da função de probabilidade é a continuidade.

- Se $\{A_n; n \geq 1\}$ é uma sequência crescente de subconjuntos de Ω (i.e., $A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_n \subset \cdots$), definimos

$$\lim_{n\to\infty} A_n := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

- Se $\{B_n; n \geq 1\}$ é uma sequência decrescente de subconjuntos de Ω (i.e., $B_1 \supset B_2 \supset \cdots \supset B_n \subset B_n \supset \cdots$), definimos

$$\lim_{n\to\infty} B_n := \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$$

Teorema 8

Se $\{E_n; n \geq 1\}$ *é uma sequência crescente ou descresente de eventos, então*

$$\lim_{n\to\infty} P(E_n) = P(\lim_{n\to\infty} E_n).$$

Prova. Ver S. Ross, Proposição 6.1.

Uma aplicação da continuidade: paradoxo das bolas

Suponha que possuamos uma urna infinitamente grande e uma coleção infinita de bolas marcadas com os números $1, 2, \cdots$
Considere um experimento realizado como se segue:

- um minuto antes do meio-dia, as bolas numeradas de 1 a 10 são colocadas na urna e a bola número 10 é retirada (suponha que a retirada seja feita de forma instantânea);
- meio minuto antes do meio-dia, as bolas 11 a 20 são colocadas na urna e a bola número 20 é retirada.
- um quarto de minuto antes do meio-dia, as bolas 21 a 30 são colocadas na urna e a bola número 30 é retirada.
- e assim por diante.

A questão de interesse é:

quantas bolas estão na urna ao meio-dia?

Uma aplicação da continuidade: paradoxo das bolas

Vamos agora mudar o experimento e supor que

- um minuto antes do meio-dia as bolas 1 a 10 sejam colocadas na urna e a bola 1 seja então retirada;
- meio minuto antes do meio-dia, as bolas 11 a 20 sejam colocadas na urna e a bola 2 seja retirada;
- um quarto de minuto antes do meio-dia, as bolas 21 a 30 sejam colocadas na urna e a bola 3 seja retirada;
- e assim por diante.

Neste novo experimento, quantas bolas estarão na urna ao meio-dia?

Uma aplicação da continuidade: paradoxo das bolas

Respostas:

- No primeiro caso, haverão **infinitas** bolas na urna ao meio-dia.
- No segundo caso, **NÃO** haverá bolas na urna ao meio-dia.

Prova. Ver S. Ross, Exemplo 2.6a.

Probabilidade Condicional e Independência; Regra da Multiplicação

Agora, estamos interessados em determinar a "dependência" de dois ou mais eventos.

Probabilidade Condicional

Definição 9

Dados dois eventos A e B, *com* $P(B) > 0$, *definimos a* **probabilidade condicional de** A **dado** B, *e denotamos por* $P(A|B)$, *como sendo*

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}. \tag{3}$$

Voltando ao Exemplo 3: A probabilidade de um aluno selecionado ser do curso de estatítica (A), sabendo que a aluna era mulher (B) é dada por

$$P(A|B) = \frac{10/200}{30/200}.$$

Exemplo 10

- *Uma urna contém duas bolas brancas (B) e três vermelhas (V).*
- *São sorteadas duas bolas ao acaso,* **sem reposição***.*
- *O diagrama em árvore da Figura ilustra as possibilidades.*
- *Em cada "galho" da árvore estão indicadas as probabilidades de ocorrência, sendo que para as segundas bolas as probabilidades são condicionais.*

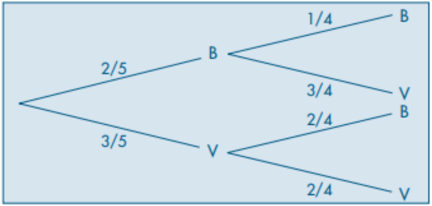

Figure: Figura 5.2 em Bussab e Morettin

Nesse caso, a probabilidade de retirarmos uma bola branca após retirarmos uma bola branca na primeira retirada é de

$$P(\text{bola branca na 2ª retirada}|\text{bola branca na 1ª retirada}) = \frac{1}{4}$$

Nesse caso, a probabilidade de retirarmos uma bola branca após retirarmos uma bola branca na primeira retirada é de

$$P(\text{bola branca na 2ª retirada}|\text{bola branca na 1ª retirada}) = \frac{1}{4}$$

Observe que no caso em que a 2ª retirada fosse realizada **com reposição**, a probabilidade da segunda retirada não se alteraria em relação à probabilidade da primeira retirada.

1. Um estudante faz um teste com uma hora de duração. Suponha que a probabilidade de que o estudante finalize o teste em menos que x horas seja igual a $x/2$, para todo $0 \leq x \leq 1$. Então, dado que o estudante continua a trabalhar após 0.75 horas, qual é a probabilidade condicional de que a hora completa seja utilizada? (Resposta: 0.8)

2. Uma moeda é jogada duas vezes. Supondo que todos os quatros pontos no espaço amostral $\Omega = \{(C, C), (C, K), (K, C), (K, K)\}$ sejam igualmente prováveis, onde C representa cara e K representa coroa, qual é a probabilidade condicional de que dê cara em ambas as jogadas, dado que
   (a) dê cara na primeira jogada?
   (b) dê cara em pelo menos uma das jogadas?

   (Resposta: (a) $1/2$; (b) $1/3$)

Regra da Multiplicação: 2 eventos

Observe que por (3) a probabilidade da interseção entre A e B pode ser reescrita como

Regra da Multiplicação

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B). \tag{4}$$

Regra da Multiplicação: n eventos

Sejam $A_1, A_2, \cdots, A_n$ eventos. A probabilidade da interseção pode ser escrita como

Regra da Multiplicação

$$P(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdots P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}). \tag{5}$$

Eventos Independentes

Definição 11

Dois eventos A *e* B *são* **independentes** *se a informação da ocorrência de* B *não altera a probabilidade da ocorrência de* A*, isto é,*

$$P(A|B) = P(A).$$

Eventos Independentes

Definição 11

Dois eventos A *e* B *são* **independentes** *se a informação da ocorrência de* B *não altera a probabilidade da ocorrência de* A*, isto é,*

$$P(A|B) = P(A).$$

Nesse caso, por (5), a probabilidade da interseção de A e B pode ser reescrita como

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Exemplos

Exemplo 12

Uma carta é selecionada aleatoriamente de um baralho comum de 52 cartas. Se E é o evento em que a carta selecionada é um ás e F é o evento em que a carta selecionada é do naipe de espadas, então E e F são independentes.

Isso ocorre porque $P(E \cap F) = 1/52$, enquanto $P(E) = 4/52$ e $P(F) = 13/52$.

Exemplos

Exemplo 13

Duas moedas são lançadas e supõe-se que os 4 resultados possíveis sejam igualmente prováveis. Se E é o evento em que a primeira moeda dá cara e F o evento em que a segunda moeda dá coroa, então E e F são independentes.

De fato, $P(E \cap F) = P(\{(C, K)\}) = 1/4$, enquanto $P(E) = P(\{(C, C), (C, K)\}) = 1/2$ e $P(F) = P(\{(C, K), (K, K)\}) = 1/2$.

Atividade

Sejam A e B dois eventos independentes. Mostre que também são independentes os conjuntos

(i) A e B^c

(ii) A^c e B

(iii) A^c e B^c.

Exemplo 14

- *Temos cinco urnas, cada uma com seis bolas. Duas dessas urnas (tipo* C_1*) têm 3 bolas brancas, duas outras (tipo* C_2*) têm 2 bolas brancas, e a última urna (tipo* C_3*) tem 6 bolas brancas.*
- *Escolhemos uma urna ao acaso e dela retiramos uma bola.*
- *Qual a probabilidade de a urna escolhida ser do tipo* C_3*, sabendo-se que a bola sorteada é branca? (Resposta:* $\frac{1/5X1}{8/15} = \frac{3}{8}$ *feito em sala!)*

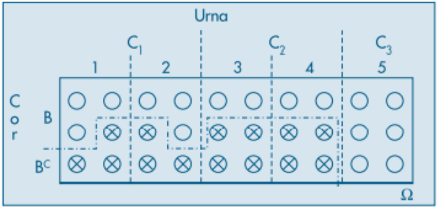

Figure: Figura 5.6 em Bussab e Morettin

Partição do espaço amostral

Definição 15

Os eventos $C_1, C_2, \cdots, C_n$ *formam uma partição do espaço amostral* Ω *se eles não têm interseção entre si e se sua união é igual ao espaço amostral. Isto é,*

$$C_i \cap C_j = \emptyset \;\; se \;\; i \neq j \;\; e \;\; \bigcup_{i=1}^{n} C_i = \Omega.$$

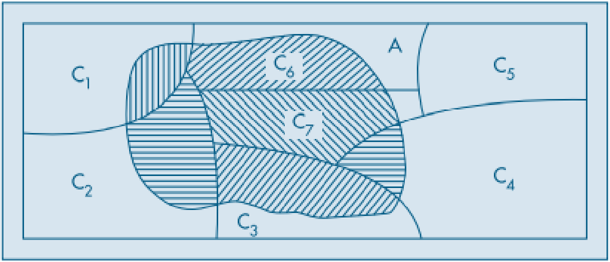

Figure: Figura 5.7 em Bussab e Morettin

Teorema 16

Suponha que os eventos $C_1, C_2, \cdots, C_n$ formam uma partição de Ω e todos têm probabilidade positiva. Então para qualquer evento A

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(C_i)P(A|C_i).$$

Exemplo

Exemplo 17

- *Uma companhia de seguros acredita que pessoas possam ser divididas em duas classes: aquelas que são propensas a acidentes e aquelas que não são.*
- *A estatística da companhia mostra que uma pessoa propensa a acidentes tem probabilidade de* 0.4 *de sofrer um acidente dentro de um período fixo de 1 ano, enquanto essa probabilidade cai para* 0.2 *no caso de uma pessoa não propensa a acidentes.*
- *Se supomos que* 30% *da população é propensa a acidentes, qual é a probabilidade de que um novo segurado sofra um acidente no período de um ano posterior a compra de sua apólice? (resposta:* 0.26*)*

Teorema de Bayes

Teorema 18 (Teorema de Bayes)

Suponha que os conjuntos $C_1, C_2, \cdots, C_n$ *formam uma partição de* Ω *e que suas probabilidades sejam conhecidas. Suponha ainda que para um evento* A*, se conheçam as probabilidades* $P(A|C_i)$ *para todo* $i = 1, 2, \cdots, n$*. Então, para qualquer* j*,*

$$P(C_j|A) = \frac{P(A|C_j)P(C_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(A|C_i)P(C_i)}.$$

Exemplo

Voltando ao Exemplo 17, suponha que um novo segurado sofra um acidente em menos de um ano após a compra da apólice. Qual é a probabilidade de que ele seja propenso a acidentes?
(resposta: $\frac{0.3x0.4}{0.26} = \frac{6}{13}$)

Atividade

1. O São Paulo Futebol Clube ganha com probabilidade 0.7 se chove e com probabilidade 0.8 se não chove. Em setembro, a probabilidade de chuva é de 0.3. O São Paulo ganhou uma partida em setembro, qual a probabilidade de ter chovido nesse dia?
2. Uma companhia produz circuitos em três fábricas, I, II e III. A fábrica I produz 40% dos circuitos, enquanto a II e a III produzem 30% cada uma. As probabilidades de que um circuito integrado produzido por essas fábricas não funcione são 0.01, 0.04 e 0.03, respectivamente. Escolhido um circuito da produção conjunta das três fábricas, qual a probabilidade de o mesmo não funcionar?

Principais Referências Bibliográficas

M.N. Magalhães, A.C.P. De Lima.
Noções de probabilidade e estatística.
Vol. 5. Editora da Universidade de São Paulo, 2002.

P.A. Morettin, W.O. Bussab.
Estatística básica.
Saraiva Educação SA; 2017.

M.N. Magalhães,
Probabilidade e variáveis aleatórias.
Edusp, 2006.

R. Lasson, B. Farber.
Estatística Aplicada,
4a edição, Ed. Pearson, São Paulo, 2010.

Ross S.
Probabilidade: um curso moderno com aplicações
Bookman Editora; 2009.