Probabilidade e Estatística: Noções de Probabilidade (Unidade II-Preliminares)

Felipe Quintino

felipe.quintino@unb.br

Departamento de Estatística-EST
Universidade de Brasília-UnB

02/2025

Atenção: Proibido Registrar Imagens ou Áudios Durante as Aulas

Revisão da Teoria de Conjuntos e Análise Combinatória

O entendimento de relações e operações entre conjuntos será essencial para o estudo de probabilidades. Dessa forma, faremos uma breve revisão de alguns conceitos e propriedades da Teoria de Conjuntos.

Da mesma forma, em caso de **conjuntos finitos**, será necessário determinar o número de elementos em um conjunto. Para isso, uma revisão de Análise Combinatória também será apresentada.

Revisão da Teoria de conjuntos

Notações:

- $A \subset B$: o conjunto A é um subconjunto do conjunto B
- $A \cup B$: união dos conjuntos A e B
- $A \cap B$: interseção entre os conjuntos A e B
- A^c: complementar do conjunto A (com relação ao conjunto Ω)

Para meditar!

- O conjunto vazio $\emptyset$ é subconjunto de todo conjunto.
- Todo conjunto é subconjunto de si mesmo.

Exemplo 1

Considere uma urna com bolas das cores azul (A) e vermelha (P) numeradas por $A1, A2, A3, A4$ e $V1, V2, V3$.
Podemos representar o conjunto das bolas por

$$\Omega = \{A1, A2, A3, A4, V1, V2, V3\}.$$

Exemplo 1

Considere uma urna com bolas das cores azul (A) e vermelha (P) numeradas por $A1, A2, A3, A4$ *e* $V1, V2, V3$.
Podemos representar o conjunto das bolas por

$$\Omega = \{A1, A2, A3, A4, V1, V2, V3\}.$$

Descreva os elementos dos seguintes conjuntos:

- $A = \{\text{Bolas com número par}\}$ e $B = \{\text{Bolas vermelhas}\}$;
- $A \cap B$, $A \cup B$, A^c e B^c;

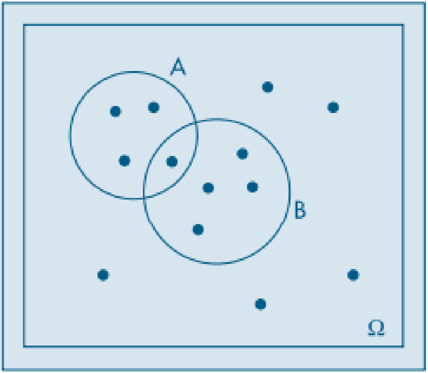
Propriedades

Algumas propriedades das operações $\cup$ e $\cap$ entre conjuntos são (considere $A, B, C \subset \Omega$):

1. $A \cap \emptyset = \emptyset$, $A \cap \Omega = A$;
2. $A \cup \emptyset = A$, $A \cup \Omega = \Omega$;
3. $A \cap A^c = \emptyset$, $A \cup A^c = \Omega$;
4. $\emptyset^c = \Omega$, $(A^c)^c = \Omega$;
5. Leis de Morgan: $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ e $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$;
6. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap B)$.

Provas: EXERCÍCIO!

Diagrama de Veen



Exercício

Exemplifique dois conjuntos A e B e justifique se vale a seguinte relação

$$B = (B \cap A^c) \cup (B \cap A),$$

para $A, B \subset \Omega$.

Exemplos de Conjuntos Numéricos

A seguir, apresentamos as notações usuais para alguns conjuntos numéricos:

- números inteiros: $\mathbb{Z} = \{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots\}$
- números naturais: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, , \cdots\}$;
- números racionais: $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b}; a, b \in \mathbb{Z}\}$;
- números reais: $\mathbb{R}$
- números irracionais: $\mathbb{I} = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$;
- números complexos: $\mathbb{C} = \{a + bi; a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$.

Conjunto Definido por Propriedade

Quando queremos descrever um conjunto A por meio de uma propriedade característica P de seus elementos x, escrevemos:

$$A = \{x; x \ \text{ tem a propriedade } \ P\}.$$

Exemplos:

- Unidades da Federação do Centro-Oeste

$$\begin{aligned} A &= \{x; x \ \text{ é uma UF da região Centro-Oeste do Brasil}\} \\ &= \{DF, GO, MT, MS\}. \end{aligned}$$

- números interios entre -10 e 10

$$\begin{aligned} B &= \{x \in \mathbb{Z}; -10 \leq x \leq 10\} \\ &= \{-10, -9, \cdots, -1, 0, 1, \cdots, 9, 10\}. \end{aligned}$$

Princípio Fundamental da Contagem, Permutações e Combinações

- Em alguns casos, um evento pode ocorrer de diversas maneiras diferentes, fazendo com que não seja prático escrever todos os resultados.
- Utilizando o **princípio fundamental da contagem**, podemos encontrar o número de maneiras em que dois ou mais eventos podem ocorrer em sequência.

Princípio Fundamental da Contagem

Se um evento pode ocorrer de m maneiras e um segundo evento pode ocorrer de n maneiras, o número de maneiras que os dois eventos podem ocorrer em sequência é $m \cdot n$. Essa regra pode ser estendida para qualquer número de eventos ocorrendo em sequência.

Exemplo 2

Você está comprando um carro novo. Os fabricantes possíveis, tamanhos dos carros e as cores estão listados.

- *Fabricantes: Ford, GM, Honda*
- *Tamanhos: compacto, médio*
- *Cores: branco (W), vermelho (R), preto (B), verde (G)*

De quantas maneiras diferentes você pode selecionar um fabricante, um tamanho e uma cor?

Há três escolhas de fabricantes, duas de tamanhos e quatro de cores. Usando o princípio fundamental da contagem o resultado é

$$3 \cdot 2 \cdot 4 = 24 \text{ maneiras.}$$

Exercício

O código de acesso para o sistema de segurança de um carro consiste em quatro dígitos. Cada dígito pode ser qualquer número de 0 a 9. Quantos códigos de acesso são possíveis se:

1. Cada dígito pode ser usado somente uma vez e não pode ser repetido?
2. Cada dígito pode ser repetido?
3. Cada dígito pode ser repetido, mas o primeiro dígito não pode ser 0 ou 1?

Princípio Fundamental da Contagem (Parte B)

Consideremos um conjunto A com $m (m \geq 2)$ elementos. Então o número de r-uplas ordenadas (sequências com r elementos) formadas com elementos distintos dois a dois de A é:

$$m \cdot (m-1) \cdot \dots \cdot (m-r+1)$$

Exemplo 3

Quatro atletas participam de uma corrida. Quantos resultados existem para o 1º, 2º e 3º lugares?

Cada resultado consta de uma tripla ordenada (a, b, c), em que a representa o atleta que chegou em 1º lugar, b o que chegou em segundo, e c o que chegou em terceiro.

a, b e c pertencem ao conjunto dos atletas e $a \neq b$, $a \neq c$ e $b \neq c$. Logo, o número de resultados possíveis é:

$$4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$$

Consequências do princípio fundamental da contagem

- O princípio fundamental da contagem nos fornece o instrumento básico para a Análise Combinatória; entretanto, sua aplicação direta na resolução de problemas pode às vezes tornar-se trabalhosa.
- Iremos então definir os vários modos de formar agrupamentos e, usando símbolos simplificativos, deduzir fórmulas que permitam a contagem dos mesmos, em cada caso particular a ser estudado.

Arranjos com repetição

Seja M um conjunto com m elementos, isto é, $M = \{a_1, a_2, \cdots, a_m\}$. Chamamos **arranjo com repetição** dos m elementos, tomados r a r, toda r-upla ordenada (sequência de tamanho r) formada com elementos de M não necessariamente distintos.

O número de arranjos com repetições de r elementos tomados de um conjunto de m elementos é

$$(AR)_{m,r} = m \cdots m = m^r.$$

Exemplo 4

Uma urna contém uma bola vermelha (V), uma branca (B) e uma azul (A). Uma bola é extraída, observada sua cor e reposta na urna. Em seguida outra bola é extraída e observada sua cor. Quantas são as possíveis sequências de cores observadas?

Temos:
Cada sequência é um par ordenado de cores (x, y) em que $x, y \in M = \{V, B, A\}$.
Logo, pelo princípio fundamental da contagem, o número de pares é:

$$3 \cdot 3 = 9.$$

Arranjos (sem reposição)

Seja M um conjunto com m elementos, isto é, $M = \{a_1, a_2, \cdots, a_m\}$. Chamamos de **arranjo** dos m elementos tomados r a r ($1 \leq r \leq m$) a qualquer r-upla (sequência de r elementos) formada com elementos de M, **todos distintos**.

$$A_{m,r} = m \cdot (m-1) \cdots (m-(r-1)).$$

Exemplo 5

Considere o conjunto $M = \{a, b, c, d\}$. *Os arranjos dos quatro elementos de* M, *tomados dois a dois, são os pares ordenados* (x, y) *formados com elementos distintos de* M.
Pelo princípio fundamental da contagem (parte B), o número de pares ordenados é:

$$4 \cdot 3 = 12$$

Exemplo 6

De um baralho de 52 cartas, 3 cartas são retiradas sucessivamente e sem reposição. Quantas sequências de cartas é possível obter?

Exemplo 6

De um baralho de 52 cartas, 3 cartas são retiradas sucessivamente e sem reposição. Quantas sequências de cartas é possível obter?

Notemos que cada resultado é uma tripla ordenada de cartas (x, y, z), em que x é a 1ª carta extraída, y a 2ª e z a 3ª.
Observemos que x, y, z são todas distintas, visto que a extração é feita sem reposição. Logo, o número que queremos é $A_{52,3}$, isto é:

$$A_{52,3} = 52 \cdot 51 \cdot 50 = 132600$$

Permutações

Seja M um conjunto com m elementos, isto é, $M = \{a_1, a_2, \cdots, a_m\}$. Chamamos de **permutação** dos m elementos a todo arranjo em que $r = m$.

Notação:

$$P_m = A_{m,m} = m \cdot (m-1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 = m!$$

Permutações

Seja M um conjunto com m elementos, isto é, $M = \{a_1, a_2, \cdots, a_m\}$. Chamamos de **permutação** dos m elementos a todo arranjo em que $r = m$.

Notação:

$$P_m = A_{m,m} = m \cdot (m-1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 = m!$$

Observação 7

Seja m um número inteiro não negativo. Definimos fatorial de m (e indicamos por $m!$) por meio da relação

- $m! = m \cdot (m-1) \cdots 2 \cdot 1$, *se* $m \geq 2$;
- $1! = 1$;
- $0! = 1$.

Exemplo 8

Seja $M = \{a, b, c\}$. *As permutações dos elementos de* M *são todos os arranjos constituídos de 3 elementos. São eles:*
$(a, b, c)(b, a, c)(c, a, b)(a, c, b)(b, c, a)(c, b, a)$.

Exemplo 9

De quantas formas podem 5 pessoas ficar em fila indiana?

Exemplo 9

De quantas formas podem 5 pessoas ficar em fila indiana?

Notemos que cada forma de ficar em fila indiana é uma permutação das 5 pessoas.
O número de permutações (modos de ficar em fila indiana) será:

$$P_5 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120.$$

Observação 10

Podemos reescrever a fórmula do arranjo como

$$A_{m,r} = \frac{m!}{(m-r)!}.$$

Combinações

Seja M um conjunto com m elementos, isto é, $M = \{a_1, a_2, \cdots, a_m\}$. Chamamos de combinações dos m elementos, tomados r a r, aos subconjuntos de M constituídos de r elementos.

A fórmula do número de combinações é:

$$C_{m,r} = \binom{m}{r} = \frac{m!}{r!(m-r)!}, \quad r = 0, 1, \cdots, m.$$

Exemplo 11

Deseja-se formar uma comissão de três membros e dispõe-se de dez funcionários. Quantas comissões podem ser formadas?

Exemplo 11

Deseja-se formar uma comissão de três membros e dispõe-se de dez funcionários. Quantas comissões podem ser formadas?

Notemos que cada comissão é um subconjunto de três elementos (pois em cada comissão não importa a ordem dos elementos). Logo, o número de comissões é:

$$\binom{10}{3} = \frac{10!}{7!3!} = 120.$$

Exemplo 12

Temos 7 cadeiras numeradas de 1 a 7 e desejamos escolher 4 lugares entre os existentes. De quantas formas isso pode ser feito?

Exemplo 12

Temos 7 cadeiras numeradas de 1 a 7 e desejamos escolher 4 lugares entre os existentes. De quantas formas isso pode ser feito?

Cada escolha de 4 lugares corresponde a uma combinação dos 7 elementos, tomados 4 a 4, pois a ordem dos números escolhidos não interessa (escolher os lugares 1, 2, 4, 7 é o mesmo que escolher os lugares 7, 2, 4, 1).
Logo, o resultado procurado é:

$$\binom{7}{4} = \frac{7!}{4!3!} = 35.$$

Principais Referências Bibliográficas

R. Lasson, B. Farber.
Estatística Aplicada,
4a edição, Ed. Pearson, São Paulo, 2010.

S. Hazzan
Fundamentos de matemática elementar 5: Combinatória Probabilidade