Universidade de Brasília
Departamento de Estatística

7ª Lista de PE – Solução

1. a) $H_0 : \mu = 15$ *versus* $H_a : \mu \neq 15$.
   b) $H_0 : \mu = 30.000$ *versus* $H_a : \mu \neq 30.000$.
   c) $H_0 : \mu = 3$ *versus* $H_a : \mu < 3$.

2. Admita uma tolerância de t ml e multe se o conteúdo estiver abaixo de $600 - t$.

3. Escolha uma amostra, aplique a vacina e teste

$$H_0 : p = 0,8 \ \ versus \ \ H_a : p < 0,8.$$

4. O critério parece estar desbalanceado, pois a flutuação ao redor do valor esperado está desigual (desconsidera valores maiores que 50 caras). Um intervalo $(45, 55)$ parece mais adequado (de fato, um intervalo de confiança para a proporção seria o melhor critério).

5. Primeiramente, observe que para a AAS $\widetilde{X} = (X_1, \ldots, X_{100})$ temos $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, 12^2)$ para todo $i = 1, \ldots, 100$ e consequentemente

$$\overline{X} \sim \mathcal{N}\left(\mu, \frac{12^2}{100}\right).$$

   a) $H_0 : \mu = 20$ *versus* $H_a : \mu \neq 20$.
   b) Do enunciado sabemos que $\overline{x} = 17,4$. Para as confianças requeridas os valores de $z_{\alpha/2}$ são, respectivamente,

$$2{,}57, \quad 2{,}33, \quad 2{,}06, \quad 1{,}88 \ \text{ e } \ 1{,}75.$$

   Desse modo, as respectivas regiões críticas são

$$\begin{aligned}
\text{RC} &= \{x \in \mathbb{R} : x < 16,92 \ \text{ ou } \ x > 23,08\} \\
\text{RC} &= \{x \in \mathbb{R} : x < 17,20 \ \text{ ou } \ x > 22,80\} \\
\text{RC} &= \{x \in \mathbb{R} : x < 17,53 \ \text{ ou } \ x > 22,57\} \\
\text{RC} &= \{x \in \mathbb{R} : x < 17,74 \ \text{ ou } \ x > 22,26\} \\
\text{RC} &= \{x \in \mathbb{R} : x < 17,90 \ \text{ ou } \ x > 22,10\}
\end{aligned}$$

6. Primeiramente, observe que para a AAS $\widetilde{X} = (X_1, \ldots, X_{25})$ temos $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, 5^2)$ para todo $i = 1, \ldots, 25$ e consequentemente

$$\overline{X} \sim \mathcal{N}\left(\mu, \frac{5^2}{25}\right) = \mathcal{N}(\mu, 1).$$

   Nosso interesse é testar

$$H_0 : \mu = 10 \ \ versus \ \ H_a : \mu = 14$$

e como a região crítica corresponde à probabilidade de erro tipo I segue que

$$\begin{aligned}
\alpha &= \mathcal{P}(\text{rejeitar } H_0 \mid H_0 \text{ verdadeira}) \\
&= \mathcal{P}(\overline{X} > 12 \mid \mu = 10) \\
&= \mathcal{P}(\overline{X} - 10 > 12 - 10 \mid \mu = 10) \\
&= \mathcal{P}(Z > 2) \\
&= 1 - \mathcal{P}(Z \leqslant 2) \\
&= 0,02275.
\end{aligned}$$

A probabilidade de erro tipo II é

$$\begin{aligned}
\beta &= \mathcal{P}(\text{não rejeitar } H_0 \mid H_0 \text{ falsa}) \\
&= \mathcal{P}(\overline{X} \leqslant 12 \mid \mu = 14) \\
&= \mathcal{P}(\overline{X} - 14 \leqslant 12 - 14 \mid \mu = 14) \\
&= \mathcal{P}(Z \leqslant -2) \\
&= \mathcal{P}(Z > 2) \\
&= 0,02275.
\end{aligned}$$

7. Do enunciado temos uma AAS $\widetilde{X} = (X_1, \dots, X_{100})$. Como não sabemos a distribuição de cada X_i, não sabemos também a distribuição de $\overline{X}$ e então supomos n grande o suficiente para que possamos aplicar o TLC. Estamos interessados em testar

$$H_0 : \mu = 1600 \ \ versus \ \ H_a : \mu \neq 1600$$

e como $\alpha = 0,05$ e $\overline{x} = 1615$ temos

$$\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\overline{X} - \mu_0) = \frac{\sqrt{100}}{120}|1615 - 1600| = 1,25 \leqslant 1,96 = z_{\alpha/2}.$$

Decidimos assim, pela não rejeição de H_0.

8. Do enunciado temos uma AAS $\widetilde{X} = (X_1, \dots, X_{200})$ com $\sigma = 0,8$.

   a) Não conhecemos a distribuição de $\overline{X}$. Supomos n grande o suficiente para que possamos aplicar o TLC onde $\overline{X} \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2/n)$.

   b) $H_0 : \mu = 3 \ \ versus \ \ H_a : \mu < 3$.

   c) Para $\alpha = 0,03$ temos $z_\alpha = 1,88$ e então

   $$\text{RC} = \{x \in \mathbb{R} : x < 2,89\}.$$

   d) Como $\overline{x} = 2,5 \in \text{RC}$, rejeitamos a hipótese H_0.

9. Ele não rejeitará H_0 para níveis de significância inferiores a 0,035.

10.

11.

12. Primeiramente, observe que para a AAS $\widetilde{X} = (X_1, \ldots, X_{50})$ temos $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, 10^2)$ para todo $i = 1, \ldots, 50$ e consequentemente
$$\overline{X} \sim \mathcal{N}\left(\mu, \frac{10^2}{50}\right).$$

   a) Como $\overline{x} = 15,2$ segue que
   $$z^* = \frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\overline{X} - \mu_0) = \frac{\sqrt{50}}{10}(15,2 - 18) = -1,98$$
   e portanto
   $$\begin{aligned} \alpha^* &= \mathcal{P}(Z \leqslant z^*) = \mathcal{P}(Z \leqslant -1,98) \\ &= \mathcal{P}(Z > 1,98) = 1 - \mathcal{P}(Z \leqslant 1,98) \\ &= 1 - 0,9761 = 0,0239. \end{aligned}$$

   b) Análogo ao **item a)**.

   c)
   $$z^* = \frac{\sqrt{n}}{\sigma}|\overline{X} - \mu_0| = \frac{\sqrt{50}}{10}|15,2 - 18| = 1,98$$
   e portanto
   $$\begin{aligned} \alpha^* &= \mathcal{P}(|Z| > z^*) = 2\mathcal{P}(Z > 1,98) \\ &= 2(1 - \mathcal{P}(Z \leqslant 1,98)) = 2(1 - 0,9761) \\ &= 0,0478. \end{aligned}$$

   d)
   $$z^* = \frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\overline{X} - \mu_0) = \frac{\sqrt{50}}{10}(15,2 - 17) = -1,27$$
   e portanto
   $$\begin{aligned} \alpha^* &= \mathcal{P}(Z \leqslant z^*) = \mathcal{P}(Z \leqslant -1,27) \\ &= \mathcal{P}(Z > 1,27) = 1 - \mathcal{P}(Z \leqslant 1,27) \\ &= 1 - 0,8979 = 0,1020. \end{aligned}$$

13. Primeiramente, observe que para a AAS $\widetilde{X} = (X_1, \ldots, X_{25})$ temos $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, 6^2)$ para todo $i = 1, \ldots, 25$ e consequentemente
$$\overline{X} \sim \mathcal{N}\left(\mu, \frac{6^2}{25}\right).$$
Estamos interessados em testar
$$H_0 : \mu = 13 \;\; versus \;\; H_a : \mu = 8$$
e como $\overline{x} = 9,8$ temos
$$z^* = \frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\overline{X} - \mu_0) = \frac{\sqrt{25}}{6}(9,8 - 13) = -2,67.$$
Portanto
$$\begin{aligned} \alpha^* &= \mathcal{P}(Z \leqslant z^*) = \mathcal{P}(Z \leqslant -2,67) \\ &= \mathcal{P}(Z > 2,67) = 1 - \mathcal{P}(Z \leqslant 2,67) \\ &= 1 - 0,9962 = 0,0038. \end{aligned}$$
Como o p-valor é muito pequeno, decidimos pela rejeição de H_0.

14. Do enunciado temos uma AAS $\widetilde{X} = (X_1, \ldots, X_{16})$ onde $X_i \sim \mathcal{N}(\mu\ ;\ 1,2^2)$ para todo $i = 1, \ldots, 16$ e estamos interessados em testar

$$H_0 : \mu \geqslant 7,6 \ \ versus \ \ H_a : \mu < 7,6.$$

   a) Como $\alpha = 0,05$ e $\overline{x} = 7,2$ temos

$$\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\overline{X} - \mu_0) = \frac{\sqrt{16}}{1,2}(7,2 - 7,6) = -1,33 > -1,64 = -z_\alpha$$

   e decidimos assim pela não rejeição de H_0.

   b) Aproveitando o cálculo realizado no **item a)** nós temos que $z^* = -1,33$. Segue que

$$\begin{aligned} \alpha^* &= \mathcal{P}(Z \leqslant z^*) = \mathcal{P}(Z \leqslant -1,33) \\ &= \mathcal{P}(Z > 1,33) = 1 - \mathcal{P}(Z \leqslant 1,33) \\ &= 1 - 0,9082 = 0,0918. \end{aligned}$$

   Isso significa que a hipótese não seria rejeitada até um nível de significância de 9,18% que, sendo um valor mediano, indica a não rejeição de H_0.

15. Do enunciado temos uma AAS $\widetilde{X} = (X_1, \ldots, X_7)$ distribuída normalmente e a partir dos dados temos $\overline{x} = 79,29$ e $s = 5,31$.

   a) Estamos interessados em testar

$$H_0 : \mu = 82 \ \ versus \ \ H_a : \mu \neq 82.$$

   Como a variância é desconhecida e $\alpha = 0,05$ temos

$$T_6 = \frac{\sqrt{7}}{5,31}|79,29 - 82| = 1,3503 < t_{0,025\ ;\ 6} = 2,4469.$$

   Decidimos assim pela não rejeição de H_0.

   b) Estamos interessados em testar

$$H_0 : \mu = 82 \ \ versus \ \ H_a : \mu = 80.$$

   Como a variância é desconhecida e $\alpha = 0,02$ temos

$$T_6 = \frac{\sqrt{7}}{5,31}(79,29 - 82) = -1,3503 > -t_{0,02\ ;\ 6} = -2,6122.$$

   Decidimos assim pela não rejeição de H_0.

16. Do enunciado temos uma AAS $\widetilde{X} = (X_1, \ldots, X_{10})$ distribuída normalmente, $\overline{x} = 5,5$ e $s = 2$. Estamos interessados em testar

$$H_0 : \mu = 6 \ \ versus \ \ H_a : \mu < 6.$$

   Como a variância é desconhecida e $\alpha = 0,05$ temos

$$T_9 = \frac{\sqrt{10}}{2}(5,5 - 6) = -0,7905 > -t_{0,05\ ;\ 9} = -1,8331.$$

   Decidimos assim pela não rejeição de H_0.

17. Do enunciado temos uma AAS $\widetilde{X} = (X_1, \ldots, X_{25})$, $\overline{x} = 31,5$ e $s = 3$. Estamos interessados em testar

$$H_0 : \mu \leqslant 30 \;\; versus \;\; H_a : \mu > 30.$$

Como a variância é desconhecida e $\alpha = 0,05$ temos

$$T_{24} = \frac{\sqrt{25}}{3}(31,5 - 30) = 2,5 > t_{0{,}05\;;\;24} = 1,7104.$$

Decidimos assim pela rejeição de H_0.

18. Do enunciado temos uma AAS $\widetilde{X} = (X_1, \ldots, X_{18})$ e a partir dos dados temos $\overline{x} = 237,06$ e $s = 11,28$. Estamos interessados em testar

$$H_0 : \mu \geqslant 240 \;\; versus \;\; H_a : \mu < 240.$$

Como a variância é desconhecida e $\alpha = 0,05$ temos

$$T_{17} = \frac{\sqrt{18}}{11,28}(237,06 - 240) = -1,1058 > -t_{0{,}05\;;\;17} = -1,7396.$$

Decidimos assim pela não rejeição de H_0, ou seja, os dados indicam que as especificações estão sendo atendidas.

19. Do enunciado temos uma AAS $\widetilde{X} = (X_1, \ldots, X_{15})$ distribuída normalmente, $\overline{x} = 2,7$ e $s = 1,4$. Estamos interessados em testar

$$H_0 : \mu = 2 \;\; versus \;\; H_a : \mu = 3.$$

Como a variância é desconhecida e $\alpha = 0,01$ temos

$$T_{14} = \frac{\sqrt{15}}{1,4}(2,7 - 2) = 1,9364 < t_{0{,}01\;;\;14} = 2,6245.$$

Decidimos assim pela não rejeição de H_0.

20. Do enunciado temos uma AAS $\widetilde{X} = (X_1, \ldots, X_{10})$ e partir dos dados temos $\overline{x} = 75,7$ e $s = 8,64$. Estamos interessados em testar

$$H_0 : \mu = 80 \;\; versus \;\; H_a : \mu < 80.$$

Como a variância é desconhecida e $\alpha = 0,05$ temos

$$T_9 = \frac{\sqrt{10}}{8,64}(75,7 - 80) = -1,5738 > t_{0{,}05\;;\;9} = -1,8331.$$

Decidimos assim pela não rejeição de H_0.

21. Do enunciado temos uma AAS $\widetilde{X} = (X_1, \ldots, X_{12})$ distribuída normalmente, $\overline{x} = 21,7$ e $s = 5,5$. Estamos interessados em testar

$$H_0 : \mu = 18 \;\; versus \;\; H_a : \mu > 18.$$

Como a variância é desconhecida temos

$$t^* = \frac{\sqrt{n}}{S}(\overline{X} - \mu_0) = \frac{\sqrt{12}}{5,5}(21,7 - 18) = 2,3304.$$

Desse modo

$$\begin{aligned}\alpha^* &= \mathcal{P}(T_{11} > t^*) = \mathcal{P}(T_{11} > 2,3304)\\ &= 1 - \mathcal{P}(T_{11} \leqslant 2,3304)\\ &\simeq 1 - 0,98 = 0,02.\end{aligned}$$

Como 2% é um nível descritivo baixo, decidimos pela rejeição de H_0.

22. Do enunciado temos uma AAS $\widetilde{X} = (X_1, \ldots, X_{12})$ distribuída normalmente e a partir dos dados temos $\overline{x} = 2493,17$ e $s = 34,45$. Estamos interessados em testar

$$H_0 : \mu \geqslant 2500 \;\; versus \;\; H_a : \mu < 2500.$$

Como a variância é desconhecida temos

$$t^* = \frac{\sqrt{n}}{S}(\overline{X} - \mu_0) = \frac{\sqrt{12}}{34,45}(2493,17 - 2500) = -0,6868.$$

Desse modo

$$\begin{aligned}\alpha^* &= \mathcal{P}(T_{11} \leqslant t^*) = \mathcal{P}(T_{11} \leqslant -0,6868)\\ &= \mathcal{P}(T_{11} > 0,6868) = 1 - \mathcal{P}(T_{11} \leqslant 0,6868)\\ &\simeq 1 - 0,75 = 0,25.\end{aligned}$$

Como 25% é um nível descritivo alto, decidimos pela não rejeição de H_0.

23. Estamos interessados em testar

$$H_0 : p = 0,9 \;\; versus \;\; H_a : p \neq 0,9.$$

À partir do dados encontramos $\widehat{p} = \frac{175}{200}$ e como $\alpha = 0,1$ temos

$$Z = \frac{\left|\frac{175}{200} - 0,9\right|}{\sqrt{\frac{0,9\times 0,1}{200}}} = 1,18 < z_{0,05} = 1,64.$$

Decidimos assim pela não rejeição de H_0.

Para o cálculo do p-valor basta notar que $z^* = 1,18$ e então

$$\begin{aligned}\alpha^* &= 2(1 - \mathcal{P}(Z \leqslant z^*))\\ &= 2(1 - \mathcal{P}(Z \leqslant 1,18))\\ &\simeq 2(1 - 0,88100)\\ &= 0,238\end{aligned}$$

Como o p-valor é relativamente alto, temos fortes indícios à favor da afirmação do fabricante.

24. Estamos interessados em testar

$$H_0 : p = 0,6 \;\; versus \;\; H_a : p < 0,6.$$

À partir do dados encontramos $\widehat{p} = \frac{104}{200}$ e como $\alpha = 0,05$ temos

$$Z = \frac{\frac{104}{200} - 0,6}{\sqrt{\frac{0,6 \times 0,4}{200}}} = -2,31 < -z_{0,05} = -1,64.$$

Decidimos assim pela rejeição de H_0.

Para o cálculo do p-valor basta notar que $z^* = -2,31$ e então

$$\begin{aligned}
\alpha^* &= \mathcal{P}(Z \leqslant z^*) \\
&= \mathcal{P}(Z \leqslant -2,31) \\
&= 1 - \mathcal{P}(Z \leqslant 2,31) \\
&\simeq 0,01044
\end{aligned}$$

Como o p-valor é baixo, temos fortes indícios contra a afirmação a emissora.

25. Estamos interessados em testar

$$H_0 : p = 0,52 \;\; versus \;\; H_a : p > 0,52.$$

À partir do dados encontramos $\widehat{p} = \frac{717}{1250}$ e

$$z^* = \frac{\frac{717}{1250} - 0,52}{\sqrt{\frac{0,52 \times 0,48}{1250}}} = 3,79.$$

Segue que

$$\begin{aligned}
\alpha^* &= \mathcal{P}(Z \geqslant z^*) \\
&= \mathcal{P}(Z \geqslant 3,79) \\
&= 1 - \mathcal{P}(Z \leqslant 3,79) \\
&\simeq 0,00008
\end{aligned}$$

Como o p-valor é muito baixo, temos fortes indícios contra a hipótese nula e concluímos que houve um aumento significativo da popularidade do governante.