

3ª Lista de PE

1. Duas bolas são escolhidas aleatoriamente de uma urna contendo 8 bolas brancas, 4 pretas, e duas bolas laranjas. Suponha que um jogador ganha 2 reais por cada bola preta selecionada e perde 1 real para cada bola branca selecionada. Seja X o ganho do jogador. Quais são os possíveis valores de X , e quais são as probabilidades associadas a cada valor?
2. Seja X uma variável aleatória discreta com $\mathcal{P}(X = 0) = 0,25$, $\mathcal{P}(X = 1) = 0,125$, $\mathcal{P}(X = 2) = 0,125$ e $\mathcal{P}(X = 3) = 0,5$.
 - a) Construa o gráfico da função probabilidade de massa e da função de distribuição acumulada.
 - b) Calcule o valor esperado, a moda e a mediana de X .
 - c) Calcule a variância de X .
 - d) Calcule as probabilidades $\mathcal{P}(0 < X < 1)$, $\mathcal{P}(X \leq 2)$, $\mathcal{P}(X > 3)$ e $\mathcal{P}(X > 2,5)$.
3. Suponha que a função de distribuição de uma variável aleatória X é dada por

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0, \\ \frac{1}{4}, & \text{se } 0 \leq x < 1, \\ \frac{1}{2}, & \text{se } 1 \leq x < 2, \\ \frac{11}{12}, & \text{se } 2 \leq x < 3, \\ 1, & \text{se } x \geq 3. \end{cases}$$

- a) Construa o gráfico de $F(x)$.
 - b) Encontre $\mathcal{P}(X = i)$, $i = 1, 2, 3$.
 - c) Encontre $\mathcal{P}\left(\frac{1}{2} < X < \frac{3}{2}\right)$.
4. Seja X uma variável aleatória que representa o número de peças produzidas por uma máquina em um período de um dia. A probabilidade da máquina estar desligada em um dia qualquer é $\frac{1}{2}$ (Se a máquina estiver desligada, então ela não produz nenhuma peça). A probabilidade da máquina estar ligada e produzir i peças é dada por $\mathcal{P}(X = i) = p^i$, $i = 1, 2, 3, \dots$. Pergunta-se:
 - a) Qual é o valor de p ?
 - b) Qual a probabilidade da máquina produzir no máximo 5 peças em um dia?
 - c) Qual a probabilidade da máquina produzir um número par de peças em um dia?
 5. Seja X uma variável aleatória que assume os valores -1, 0 e 1 com as respectivas probabilidades

$$\mathcal{P}(X = -1) = 0,2, \quad \mathcal{P}(X = 0) = 0,5 \quad \text{e} \quad \mathcal{P}(X = 1) = 0,3.$$

Encontre a esperança e a variância de X .

6. A partir de dados do último censo, a assistente social de um centro de saúde constatou que, para as famílias da região, 20% delas não possuem filhos, 30% possui um filho, 35% possui dois filhos e as famílias restantes se dividem igualmente entre três, quatro ou cinco filhos.
- Determine a função de distribuição acumulada da variável N , referente ao número de filhos das famílias na região.
 - Se uma família é escolhida aleatoriamente nessa região, qual a probabilidade de que o número de filhos nessa família seja maior o igual a 2?
 - Calcule o valor esperado e a variância da variável N .

7. Seja X uma variável aleatória discreta com a seguinte distribuição de probabilidades:

$$\mathcal{P}(X = x) = \frac{k}{x}, \quad \text{onde } X \text{ assume os valores } 1, 3, 5, 7.$$

- Determine o valor de k .
 - Calcule $\mathcal{P}(X < 5)$.
8. Considere uma moeda viciada onde a probabilidade de ocorrência da face cara é quatro vezes a probabilidade de ocorrência da face coroa. Essa moeda é jogada três vezes. Seja X o número de caras que aparece. Determine a distribuição de probabilidades de X e também a função de distribuição acumulada.
9. Considere o experimento de jogar dois dados sequencialmente e anotar os resultados. Seja X a variável que computa a soma dos resultados observados nos dois dados. Encontre a distribuição de probabilidades da variável X e calcule sua esperança.
10. Suponha que o tempo X , em minutos, necessários para um operário processar uma certa peça é uma variável aleatória com a seguinte distribuição de probabilidades:

k	2	3	4	5	6	7
$\mathcal{P}(X = k)$	0,1	0,1	0,3	0,2	0,2	0,1

- Calcule $\mathcal{E}(X)$, o tempo médio de processamento de uma peça.
 - Calcule $\text{Var}(X)$.
 - Para cada peça processada, o operário ganha um fixo de R\$ 2,00, mas se ele processa a peça em menos de 6 minutos, ganha R\$ 0,50 por minuto poupado (por exemplo, se o operário processa a peça em 4 minutos, ele recebe a quantia adicional de R\$ 1,00). Encontre o ganho médio do operário por peça processada.
11. Um pintor produz pelo menos um quadro por dia (esse pintor pode produzir 1, 2, 3, ... quadros por dia). Seja X uma variável aleatória que denota o número de quadros produzidos por esse pintor em um dia qualquer. A distribuição de probabilidades de X é dado por $\mathcal{P}(X = k) = (0,5)^k$, para $k = 1, 2, \dots$
- Calcule $\mathcal{P}(X < 10)$.
 - Calcule $\mathcal{E}(X)$.

- c) Se o pintor vende cada quadro produzido por R\$ 50,00, qual é o ganho esperado desse pintor em um mês (considere um mês de 30 dias) de trabalho?
12. Um jogo popular em ruas e cassinos consiste no seguinte: um jogador aposta em um dos números de 1 a 6 e três dados são, então, lançados. Se o número apostado pelo jogador aparecer i vezes (onde $i = 1, 2, 3$), o jogador ganha i unidades, e se o número apostado pelo jogador não aparecer em qualquer um dos dados, então o jogador perde uma unidade. Este jogo é justo para o jogador?
13. Suponha que duas equipes jogam uma série de jogos que termina quando um deles ganhar i jogos. Suponha que cada jogo realizado é ganho pela equipe A, de forma independente, com probabilidade p .
- Encontre o número esperado de jogos que são realizados quando $i = 2$.
 - Encontre o número esperado de jogos que são realizados quando $i = 3$.
 - Mostre que, em ambos os casos (**a** e **b**), este número é maximizado quando $p = 1/2$.
14. A cada noite um meteorologista diferente nos dá a probabilidade de que irá chover no dia seguinte. Para julgar quem tem melhores previsões, iremos pontuá-los da seguinte maneira: Se um meteorologista diz que irá chover no dia seguinte com probabilidade p , então ele ou ela receberá a pontuação de

$$\begin{array}{ll} 1 - (1 - p)^2, & \text{se chover,} \\ 1 - p^2, & \text{se não chover.} \end{array}$$

- Iremos, então, manter o controle de pontos ao longo de um determinado período de tempo e concluir que o meteorologista com a pontuação média mais alta é quem melhor prediz o tempo. Suponhamos agora, que um dado meteorologista está ciente do nosso mecanismo e quer maximizar sua pontuação esperada. Se essa pessoa realmente acredita que vai chover amanhã com probabilidade p^* , qual o valor de p ele ou ela deve propor de forma a maximizar o resultado esperado?
15. Suponha que, em voo, motores de avião irão falhar com probabilidade $1 - p$, independentemente de motor para motor. Se um avião precisa da maioria de seus motores operando para completar um voo bem sucedido, para que valores de p um avião com 5 motores é preferível a um avião com 3 motores?
16. Uma prova consiste em 25 perguntas do tipo múltipla escolha. Cada questão tem 5 respostas, sendo que apenas uma delas é verdadeira. A nota, X , é igual ao número de respostas corretas. Uma pessoa lança um dado equilibrado e indica a resposta cujo número aparece na face de cima do dado (se sair 6 o lance é desconsiderado).
- Qual é a distribuição da variável “nota” nestas condições?
 - Calcule as probabilidades dos eventos abaixo utilizando o modelo escolhido no item anterior: $\{X \leq 1\}$, $\{X < 1\}$, $\{X \geq 1\}$, $\{X > 1\}$, $\{2 \leq X \leq 4\}$, $\{2 \leq X < 4\}$, $\{2 < X \leq 4\}$, $\{2 < X < 4\}$.
 - Quais das hipóteses do modelo deixariam de ser satisfeitas se a pessoa respondesse seriamente em vez de usar o esquema acima descrito?

17. Uma companhia de seguros vendeu apólices a 20 pessoas com mesma idade e condições de saúde. De acordo com as tábuas atuariais, a probabilidade de que uma pessoa nas condições dos assegurados sobreviva 10 anos à data dos contratos é de 0,9. Calcule as probabilidades dos seguintes eventos:
- a) todas as pessoas sobrevivem;
 - b) nenhuma sobrevive;
 - c) sobrevivem ao menos 5 pessoas;
 - d) sobrevivem ao menos 15 pessoas;
 - e) morrem exatamente 3 pessoas;
 - f) morrem no máximo 2 pessoas;
 - g) morrem no mínimo 5 pessoas;
 - h) valor médio e variância do número sobreviventes;
 - i) valor médio e variância do número de mortos.
18. Uma certa doença pode ser curada através de procedimento cirúrgico em 80% dos casos. Dentre os que tem essa doença, sorteamos 15 pacientes que serão submetidos à cirurgia. A partir de alguma suposição adicional que julgue necessária, calcule as probabilidades abaixo.
- a) Todos serem curados.
 - b) Pelo menos dois não serem curados.
 - c) Ao menos 10 ficarem livres da doença.
19. Bactérias de uma certa classe aparecem na água à taxa média de 0,8 por cm^3 . Calcule a probabilidade de que em 5 cm^3 de água tenhamos:
- a) no mínimo duas bactérias;
 - b) pelo menos 13 bactérias;
 - c) nenhuma bactéria;
 - d) no máximo sete bactérias.
20. A taxa de suicídios num certo país é de 1 para cada 250.000 habitantes por semana. Considere uma cidade de 500.000 habitantes e responda aos itens abaixo.
- a) Qual a probabilidade de ocorrerem 6 ou mais suicídios numa semana?
 - b) Você utilizaria o mesmo modelo se em vez de suicídios a questão tratasse da dengue? Justifique.
21. Por engano 3 peças defeituosas foram misturadas a boas peças formando um lote com 12 peças no total. Escolhendo-se ao acaso, com reposição, 4 dessas peças, determine a probabilidade de encontrar:
- a) pelo menos 2 peças defeituosas;
 - b) no máximo uma peça defeituosa;
 - c) no mínimo uma peça boa.
22. Considere uma urna com 10 bolas brancas e 20 bolas vermelhas. Retira-se uma amostra de 5 bolas, uma a uma. Qual a probabilidade de 3 bolas serem brancas se:

- a) a amostra for sem reposição?
 - b) a amostra for com reposição?
23. Quando a moeda 1 é lançada, aparece cara com probabilidade 0,4. Quando a moeda 2 é lançada, aparece cara com probabilidade 0,7. Uma dessas moedas é escolhida aleatoriamente e lançada 10 vezes.
- a) Qual é a probabilidade de que a moeda mostre cara exatamente 7 vezes?
 - b) Tendo em conta que no primeiro lançamento apareça cara, qual é a probabilidade condicional de que apareça cara exatamente 7 vezes?
24. O número de vezes que uma pessoa contrai um resfriado em um determinado ano é uma variável aleatória de Poisson com parâmetro $\lambda = 5$. Suponha que uma nova droga (com base em grandes quantidades de vitamina C) acaba de ser comercializada e que ela reduz o parâmetro de Poisson a $\lambda = 3$ para 75% da população. Para os outros 25% da população, a droga não tem efeito significativo sobre o resfriado. Se um indivíduo experimenta a droga por um ano e tem 2 resfriados nesse período, qual a probabilidade de que a droga seja benéfica para ele?
25. Uma variável aleatória Y tem densidade Poisson com parametro $\lambda = 2$. Obtenha:
- a) $\mathcal{P}(Y < 2)$
 - b) $\mathcal{P}(2 \leq Y < 4)$
 - c) $\mathcal{P}(Y > 0)$
 - d) $\mathcal{P}(Y = 1|Y < 3)$.
26. A aplicação de fundo anti-corrosivo em chapas de aço de 1 m^2 é feita mecanicamente e pode produzir defeitos (pequenas bolhas na pintura), de acordo com uma variável aleatória Poisson de parâmetro $\lambda = 1$ por m^2 . Se uma chapa é sorteada ao acaso para ser inspecionada, calcule a probabilidade de:
- a) encontrarmos pelo menos 1 defeito;
 - b) no máximo 2 defeitos serem encontrados;
 - c) encontrar de 2 a 4 defeitos;
 - d) não mais de um defeito ser encontrado.
27. Seja X uma variável aleatória que denota o número de navios petroleiros que chegam a determinada refinaria por dia. Vamos considerar que X segue uma distribuição de Poisson com parâmetro $\lambda = 2$. As atuais instalações do porto podem atender no máximo três petroleiros por dia. Se mais de três petroleiros aportarem por dia, os excedentes a três deverão seguir para outro porto.
- a) Em um dia qualquer, qual é a probabilidade de se precisar mandar petroleiros para outro porto?
 - b) De quanto deverão as atuais instalações ser aumentadas para permitir manobrar todos os petroleiros, em pelo menos 90% dos dias?
 - c) Qual a probabilidade de, em um dia qualquer, exatamente dois petroleiros terem que ir para outro porto?
 - d) Qual é o número esperado de petroleiros a serem atendidos diariamente neste porto?

28. Seja $X \sim \text{Poisson}(10)$. Qual o valor de k tal que $\mathcal{P}(X = k) = \mathcal{P}(X = k + 1)$?
29. Suponha que a probabilidade de que um item produzido por uma máquina seja defeituoso é 0,2. Se 10 itens produzidos por esta máquina são selecionados ao acaso, qual é a probabilidade de que não mais do que um item defeituoso seja encontrado? Use a Binomial e a Poisson e compare os resultados.
30. Numa central telefônica, o número de chamadas chega segundo uma distribuição de Poisson com média de 8 chamadas por minuto. Determinar a probabilidade de que, em um minuto, se tenha:
- a) 10 ou mais chamadas;
 - b) menos do que 9 chamadas;
 - c) entre 7 (inclusive) e 9 (exclusive) chamadas.
31. Suponha que o número de acidentes que ocorrem numa estrada, a cada dia, é uma variável aleatória de Poisson com parâmetro $\lambda = 3$.
- a) Encontre a probabilidade de que três ou mais acidentes ocorram hoje.
 - b) Repita a parte **a)**, sob o pressuposto de que pelo menos um acidente ocorra hoje.
32. Seja X uma variável aleatória com esperança μ e variância σ^2 . Encontre a esperança e a variância da variável

$$Y = \frac{X - \mu}{\sigma}.$$

33. Se X é uma variável aleatória geométrica, mostre analiticamente que

$$\mathcal{P}(X = n + k | X > n) = \mathcal{P}(X = k).$$

Usando a interpretação de uma variável aleatória geométrica, dê um argumento verbal do porque a equação anterior é verdadeira.

Respostas

1. Seja X o ganho do jogador, então

$$\mathcal{P}(X = -2) = \frac{28}{91}, \quad \mathcal{P}(X = -1) = \frac{16}{91}, \quad \mathcal{P}(X = 0) = \frac{1}{91}$$

$$\mathcal{P}(X = 1) = \frac{32}{91}, \quad \mathcal{P}(X = 2) = \frac{8}{91}, \quad \mathcal{P}(X = 4) = \frac{6}{91}$$

2. b) 1,875.
c) 1,61.
d) Os valores são, respectivamente, 0; 0,5; 0 e 0,5.
3. b) As probabilidades são

$$\mathcal{P}(X = 1) = \frac{1}{4}, \quad \mathcal{P}(X = 2) = \frac{5}{12} \quad e \quad \mathcal{P}(X = 3) = \frac{1}{12}.$$

c) $\mathcal{P}\left(\frac{1}{2} < X < \frac{3}{2}\right) = \frac{1}{4}.$

4. a) 1/3.
b) 1/162.
c) 5/8.

5. $\mathcal{E}(X) = 0,1$ e $\text{Var}(X) = 0,49$.

6. b) 0,5.
c) 1,64.

7. a) 105/176.
b) 35/44.

8. $\mathcal{P}(X = 0) = \frac{1}{125}, \quad \mathcal{P}(X = 1) = \frac{12}{125}, \quad \mathcal{P}(X = 2) = \frac{48}{125} \quad e \quad \mathcal{P}(X = 3) = \frac{64}{125}.$

9. $\mathcal{E}(X) = 7$.

10. a) 4,6.
b) 2,04.
c) 2,75.

11. a) 511/512.
b) 2.

- c) R\$ 3000,00.
12. O jogo não é justo para o jogador.
13. a) $2 + 2p(1 - p)$.
b) $6p^4 - 12p^3 + 3p^2 + 3p + 3$.
14. p^* .
15. $p \geq 1/2$.
16. a) $\binom{25}{k} \left(\frac{1}{5}\right)^k \left(\frac{1}{5}\right)^{25-k}$
b) 0,0274; 0,0038; 0,9962; 0,9726; 0,3933; 0,2066; 0,3225 e 0,1358.
c) A aleatoriedade das respostas.
17. a) 0,1216.
b) 0.
c) 1.
d) 0,9888.
e) 0,1901.
f) 0,6769.
g) 0,0432.
h) 18 e 1,8.
i) 2 e 1,8.
18. a) 0,0352.
b) 0,8329.
c) 0,9389.
19. a) 0,9084.
b) 0,0003.
c) 0,0183.
b) 0,9489
20. a) 0,0166.
b) Sim.
21. a) 0,2617.
b) 0,7383.
c) 0,9961.
22. a) 0,1599.

- b) 0,1646.
23. a) $\frac{1}{2} \binom{10}{7} (0,4)^7 (0,6)^3 + \frac{1}{2} \binom{10}{7} (0,7)^7 (0,3)^3$.
b) 0,55.
24. $\frac{\frac{3^2}{2!} e^{-3} (0,75)}{\frac{3^2}{2!} e^{-3} (0,75) + \frac{5^2}{2!} e^{-5} (0,25)}$.
25. a) 0,4060.
b) 0,4511.
c) 0,1353.
d) 0,4.
26. a) 0,6321.
b) 0,9197.
c) 0,2606.
d) 0.7358.
27. a) 0,1429.
b) As instalações deveriam atender no máximo quatro petroleiros por dia.
c) 0,0361.
d) 1,7819.
28. $k = 9$.
29. As probabilidades calculadas a partir da binomial e poisson são, respectivamente, 0,3758 e 0,4060.
30. a) 0,2834.
b) 0,5926.
c) 0,2792.
31. a) $1 - \frac{17}{2} e^{-3}$.
b) $\frac{1 - \frac{17}{2} e^{-3}}{1 - e^{-3}}$.
32. 0 e 1
33. $p(1-p)^k$.