

工程力学教案

第一章 物体的受力分析

静力学：研究物体在力系作用下平衡规律的科学。

主要问题：力系的简化；
建立物体在力系作用下的平衡条件。

本章将介绍静力学公理，工程中常见的典型约束，以及物体的受力分析。静力学公理是静力学理论的基础。物体的受力分析是力学中重要的基本技能。

§ 1.1 力的概念与静力学公理

一、力的概念

力的概念是人们在长期生活和生产实践中逐步形成的。例如：人用手推小车，小车就从静止开始运动；落锤锻压工件时，工件就会产生变形。

力是物体与物体之间相互的机械作用。

使物体的机械运动发生变化，称为力的**外效应**；

使物体产生变形，称为力的**内效应**。

力对物体的作用效应取决于力的三要素，即力的大小、方向和作用点。

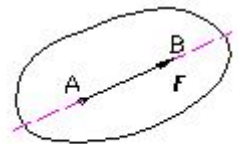


图 1-1

力是矢量，常用一个带箭头的线段来表示，在国际单位制中，力的单位牛顿(N)或千牛顿(KN)。

二、静力学公理

公理 1 力的平行四边形法则

作用在物体上同一点的两个力，可以合成一个合力。合力的作用点仍在该点，合力的大小和方向由这两个力为邻边所构成的平行四边形的对角线确定。其矢量表达式为

$$\mathbf{F}_R = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$$

根据公理 1 求合力时，通常只须画出半个平行四边形就可以了。如图 1-2b、c 所示，这样**力的平行四边形法则**就演变为**力的三角形法则**。

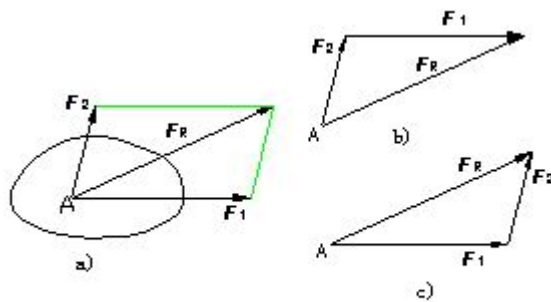
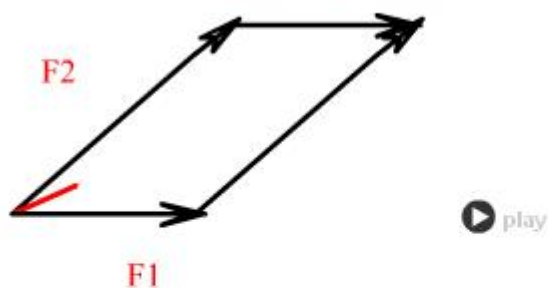


图 1-2

已知两分力求合力



- 【说明】：
1. $F_R = F_1 + F_2$ 表示合力的大小等于两分力的代数和
 2. 两力夹角为 α ，用余弦定理求合力的大小，正弦定理求方向
 3. 可分解力：(1) 已知两分力的方向，求两分力的大小
(2) 已知一个分力的大小和方向，求另一分力大小和方向
 4. 该公理既适用于刚体，又适用于变形体，对刚体不需两力共点

公理 2 二力平衡公理

刚体仅受两个力作用而平衡的充分必要条件是：两个力大小相等，方向相反，并作用在同一直线上，如图 1-3 所示。即

$$F_1 = -F_2$$

它对刚体而言是必要与充分的，但对于变形体而言却只是必要而不充分。如图 1-4 所示，当绳受两个等值、反向、共线的拉力时可以平衡，但当受两个等值、反向、共线的压力时就不能平衡了。

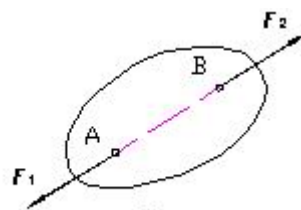


图 1-3



图 1-4

二力构件：仅受两个力作用而处于平衡的构件。二力构件受力的特点是：**两个力的作用线必沿其作用点的连线**。如图 1-5a 中的三铰钢架中的 BC 构件，若不计自重，就是二力构件。

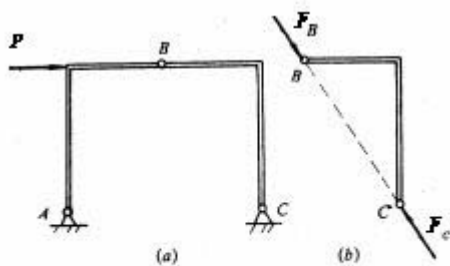


图 1-5

公理 3 加减平衡力系公理

在作用于刚体上的已知力系上，加上或减去任一平衡力系，并不改变原力系对刚体的作用效果。

加减平衡力系公理主要用来简化力系。但必须注意，此公理只适应于刚体而不适应于变形体。

推论 1 力的可传性原理

作用于刚体上的力，可以沿其作用线移至刚体内任意一点，而不改变该力对物体的作用效果。力对刚体的效应与力的作用点在其作用线上的位置无关。因此，作用于刚体上的力的三要素是：**力的大小、方向、作用线**。

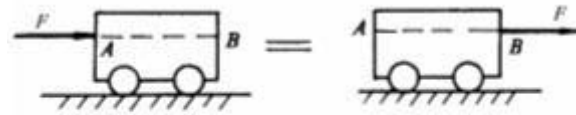


图 1-6

推论 2 三力平衡汇交定理

若刚体受到同平面内三个互不平行的力的作用而平衡时，则该三个力的作用线必汇交于一点。

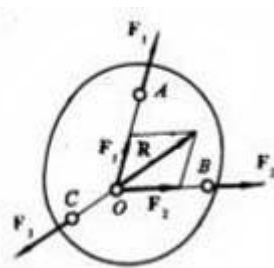


图 1-7

公理 4 作用和反作用定律

作用力和反作用力总是大小相等，方向相反，作用线相同，但同时分别作用在两个相互作用的物体上。

这个公理表明，力总是成对出现的，只要有作用力就必有反作用力，而且同时存在，又同时消失。

公理 5 刚化原理

变形体在某一力系作用下处于平衡，如将此变形体刚化为刚体，其平衡状态保持不变。

这个公理提供了把变形体抽象为刚体模型的条件。

§ 1.2 约束与约束反力

在工程实际中，构件总是以一定的形式与周围其他构件相互联结，即物体的运动要受到周围其他物体的限制，如机场跑道上的飞机要受到地面的限制，转轴要受到轴承的限制，房梁要受到立柱的限制。这种对物体的某些位移起限制作用的周围其他物体称为约束，如轴承就是转轴的约束。约束限制了物体的某些运动，所以有约束力作用于物体，这种约束对物体的作用力称为约束力。工程实际中将物体所受的力分为两类：一类是能使物体产生运动或运动趋势的力，称为**主动力**，主动力有时也叫载荷；另一类是**约束反力**，它是由主动力引起的，是一种被动力。

一、柔性约束（柔索）

柔性约束由绳索、胶带或链条等柔性物体构成。**只能受拉，不能受压。只能限制沿约束的轴线伸长方向。**

柔性约束对物体的约束反力是：**作用在接触点，方向沿着柔体的中心线背离物体。**通常用 F_T 表示。见图 1-8

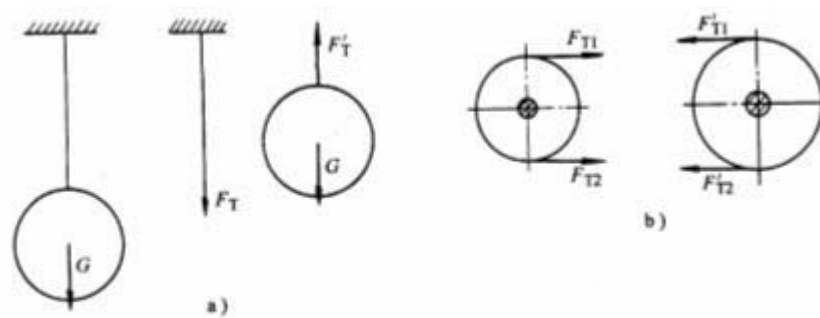


图 1-8

二、刚性约束

当两物体接触面之间的摩擦力小到可以忽略不计时，可将接触面视为理想光滑的约束。这时，不论接触面是平面或曲面，都**不能限制物体沿接触面切线方向的运动，而只能限制物体沿着接触面的公法线指向约束物体方向的运动。**因此，光滑接触面对物体的约束反力是：**通过接触点，方向沿着接触面公法线方向，并指向受力物体。**这类约束反力也称法向反力，通常用 F_N 表示。见图 1-9

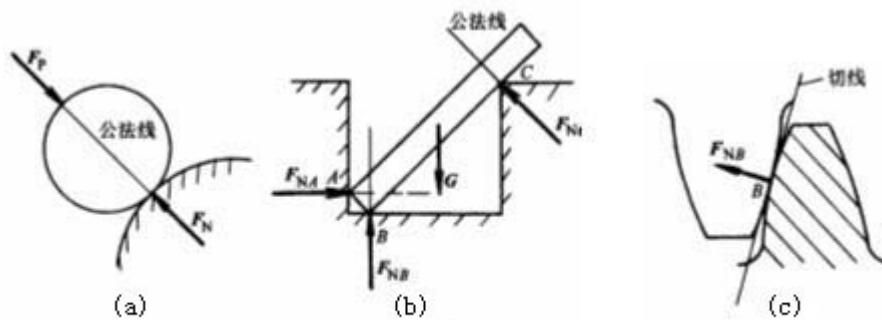


图 1-9

三、光滑圆柱形铰链约束

1. 连接铰链

两构件用圆柱形销钉连接且均不固定，即构成连接铰链，其约束反力用两个正交的分力 F_x 和 F_y 表示。见图 1-10

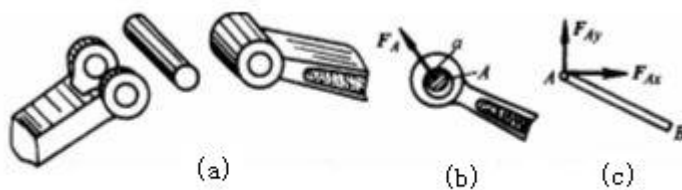


图 1-10

2. 固定铰链支座

如果连接铰链中有一个构件与地基或机架相连，便构成固定铰链支座，其约束反力仍用两个正交的分力 F_x 和 F_y 表示。见图 1-11

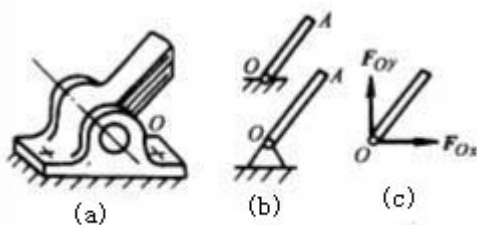
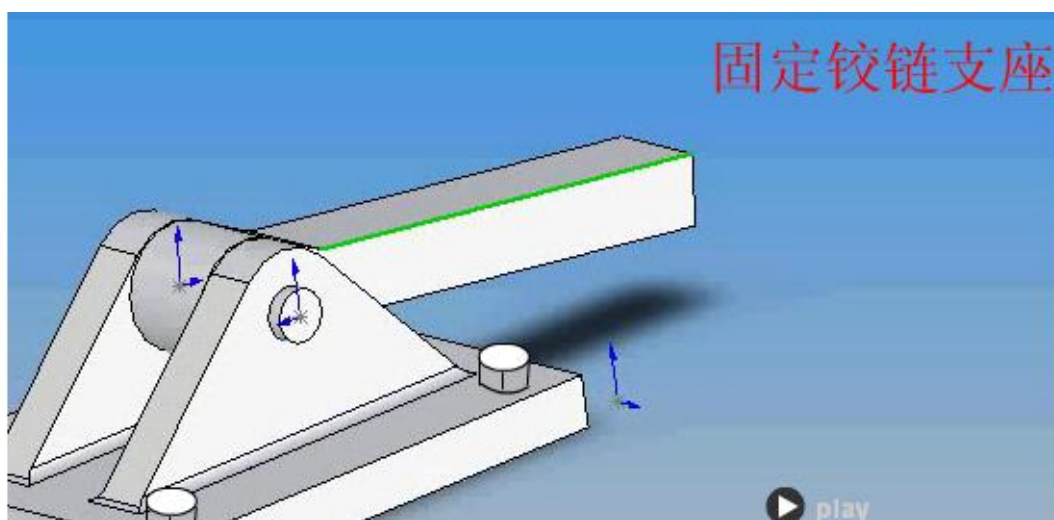


图 1-11



3. 活动铰链支座

在桥梁、屋架等工程结构中经常采用这种约束。在铰链支座的底部安装一排滚轮,可使支座沿固定支承面移动,这种支座的约束性质与光滑面约束反力相同,其约束反力必垂直于支承面,且通过铰链中心。见图 1-12

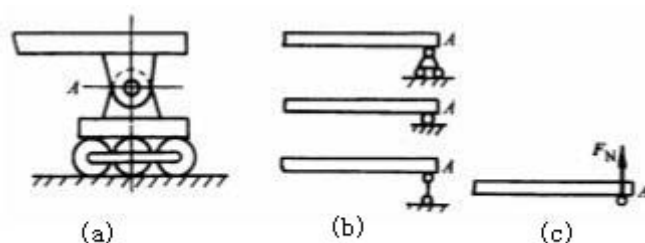


图 1-12

四、固定端约束

固定端约束能限制物体沿任何方向的移动,也能限制物体在约束处的转动。所以,固定端A处的约束反力可用两个正交的分力 F_{Ax} 、 F_{Ay} 和力矩为 M_A 的力偶表示。见图 1-13

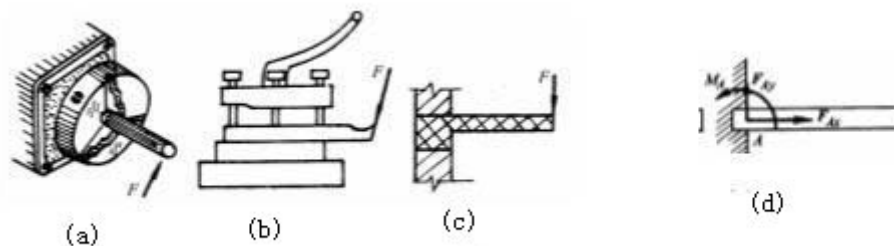


图 1-13

五、球铰链支座

球铰链是一种空间约束，它能限制物体沿空间任何方向移动，但物体可以绕其球心任意转动。球铰链的约束反力可用三个正交的分力 F_{Ax} 、 F_{Ay} 、 F_{Az} 表示。见图 1-14

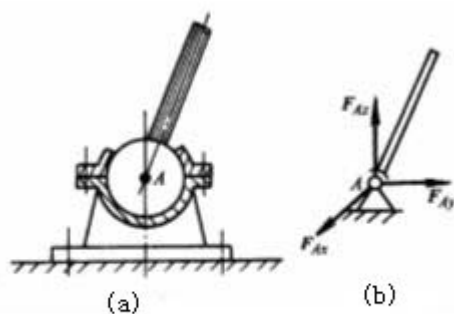


图 1-14

§ 1.3 受力图

在工程实际中，常常需要对结构系统中的某一物体或部分物体进行力学计算。这时就要根据已知条件及待求量选择一个或几个物体作为研究对象，然后对它进行受力分析。即分析物体受那些力的作用，并确定每个力的大小、方向和作用点。为了清楚地表示物体的受力情况，需要把所研究的物体（称为研究对象）从与它相联系的周围物体中分离出来，单独画出该物体的轮廓简图，使之成为分离体，在分离体上画上它所受的全部主动力和约束反力，就称为该物体的受力图。

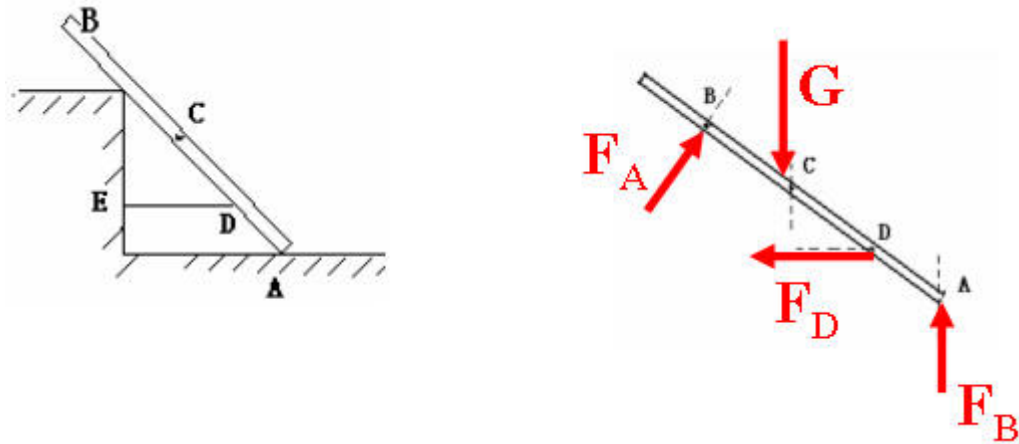
画受力图是解平衡问题的关键，画受力图的一般步骤为：

- (1) 据题意确定研究对象，并画出研究对象的分离体简图。
- (2) 在分离体上画出全部已知的主动力。
- (3) 在分离体上解除约束的地方画出相应的约束反力。

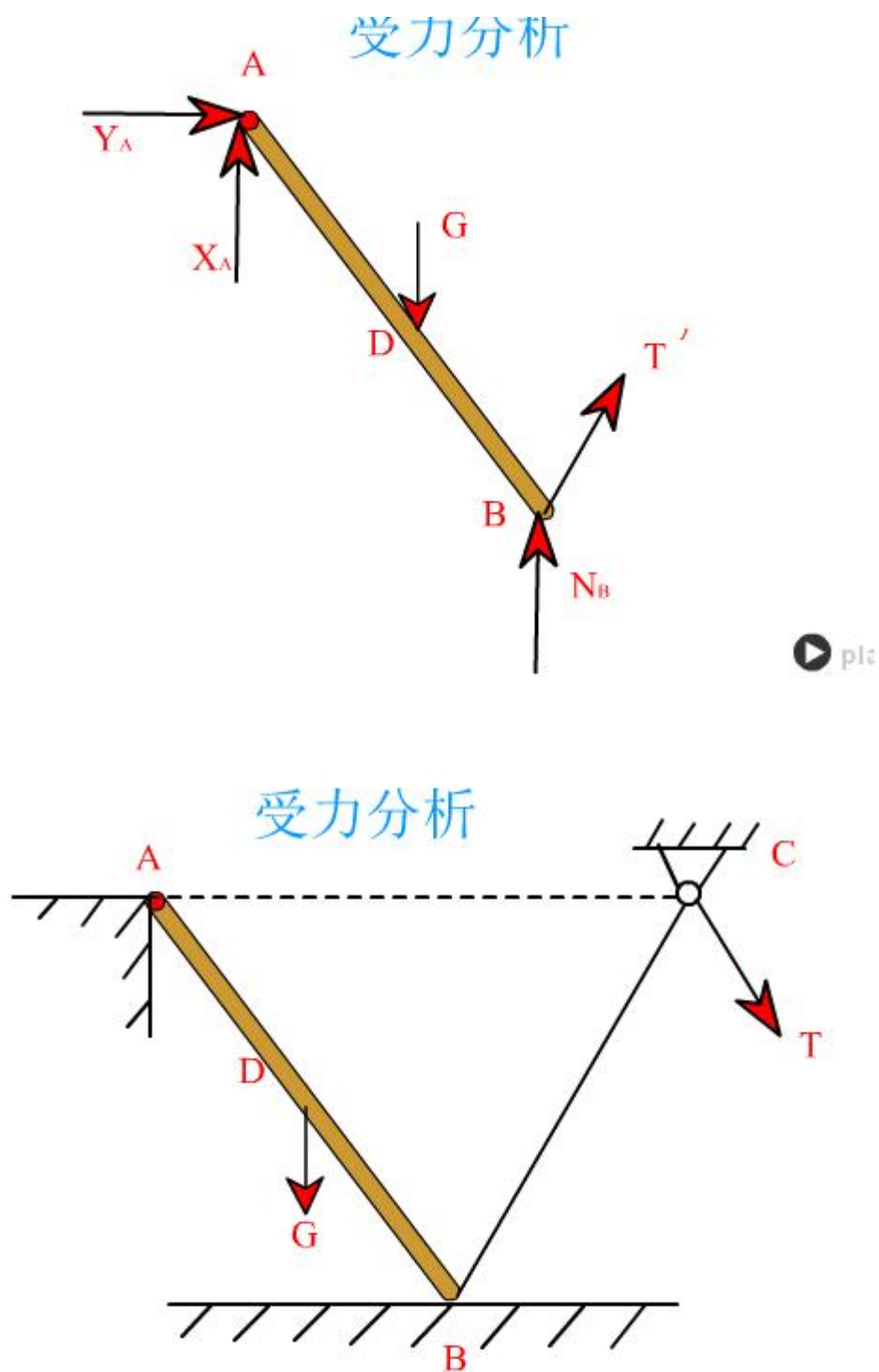
画受力图时要分清内力与外力，如果所取的分离体是由某几个物体组成的物体系统时，通常将系统外物体对物体系统的作用力称为外力，而系统内物体间相互作用的力称为内力。内力总是以等值、共线、反向的形式存在，故物体系

统内力的总和为零。因此，取物体系统为研究对象画受力图时，只画外力，而不画内力。

例 1-1 重量为 G 的均质杆 AB ，其 B 端靠在光滑铅垂墙的顶角处， A 端放在光滑的水平面上，在点 D 处用一水平绳索拉住，试画出杆 AB 的受力图。



例 1-2 AB 杆 A 处为固定铰链连接， B 处置于光滑水平面，并由钢绳拉着，钢绳绕过滑轮 C ，画出 AB 杆的受力图。



例 1-3 如图 1-15a 所示，水平梁 AB 用斜杆 CD 支承，A、C、D 三处均为光滑铰链连接。匀质梁 AB 重 G_1 ，其上放一重为 G_2 电动机。若不计斜杆 CD 自重，试分别画出斜杆 CD 和梁 AB（包括电动机）的受力图。

解 (1) 斜杆 CD 的受力图取斜杆 CD 为研究对象, 由于斜杆 CD 自重不计, 并且只在 C、D 两处受铰链约束而处于平衡, 因此斜杆 CD 为二力构件。斜杆 CD 的约束反力必通过两铰链中心 C 与 D 的连线, 用 F_C 和 F_D 表示。如图 1-15b 所示。

(2) 梁 AB 的受力图取梁 AB (包括电动机) 为研究对象, 梁 AB 受主动力 G_1 和 G_2 的作用。在 D 处为铰链约束, 约束反力 F'_D 与 F_D 是作用与反作用的关系, 且 $F'_D = -F_D$ 。A 处为固定铰链支座约束, 约束反力用两个正交的分力 F_{Ax} 和 F_{Ay} 表示, 方向可任意假设。如图 1-15c 所示。

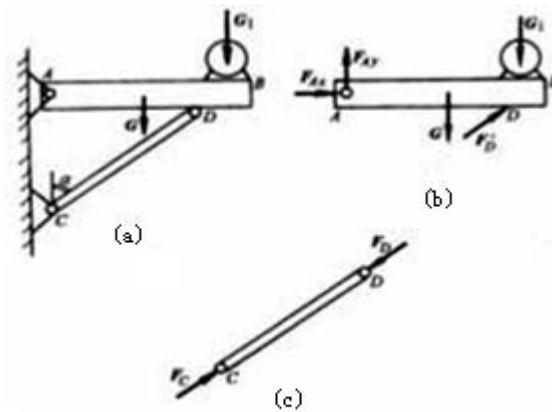
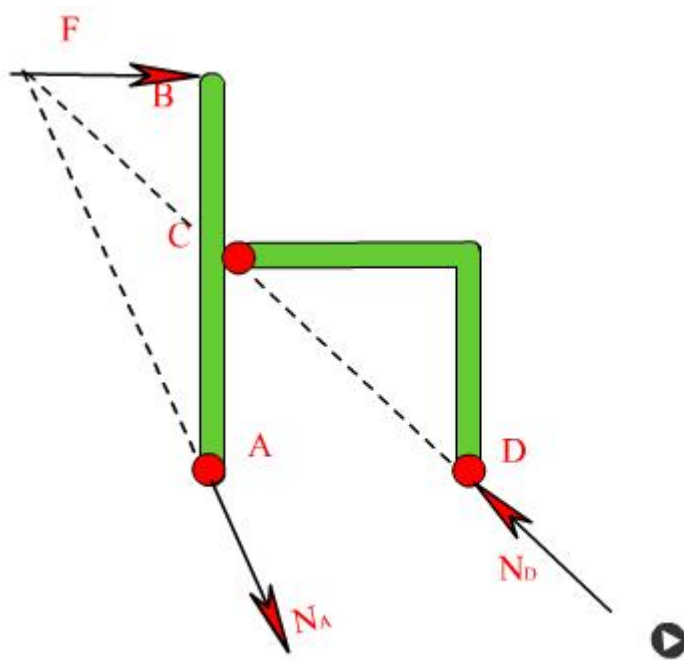
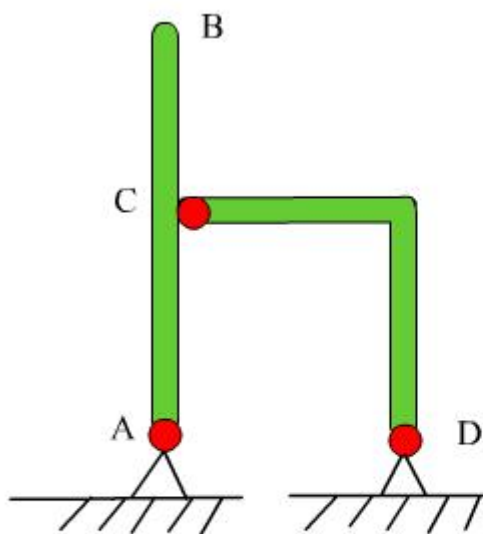


图 1-15

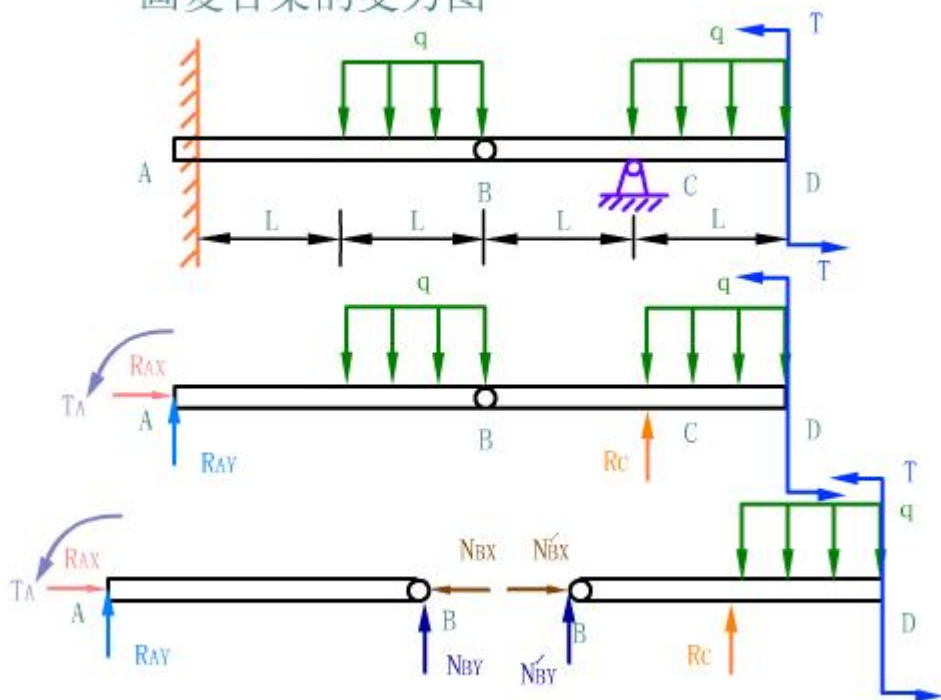
例 1-4 画出图示构架受力图。

分析可知, CD 为二力构件, AB 为三力构件, 可对 A 点约束力进行分解, 也可用三力平衡汇交定理确定其方向。



例 1-5 如图所示，复合横梁 ABCDE 的 A 端为固定端支座，B 处为连接铰链，C 处为活动铰链支座。已知作用于梁上的主动力有载荷集度为 q 的均布载荷和力偶矩为 T 的集中力偶。试画出梁整体 ABCD 和其 AB 部分与 BCD 部分的受力图。

画复合梁的受力图

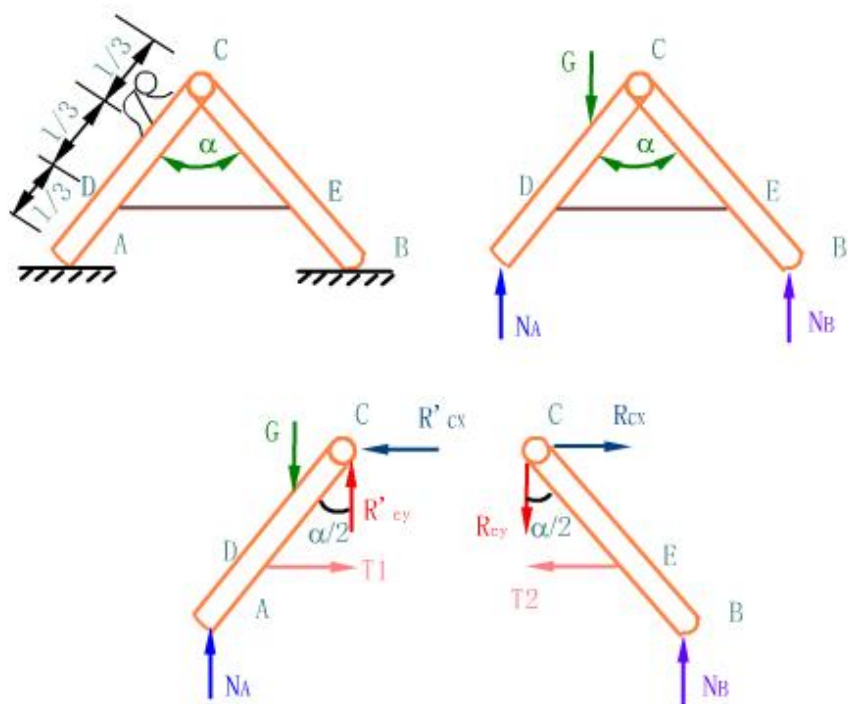


解 (1) 取整体 ABCD 为研究对象 作用于梁上的主动力有均布载荷 q 及 D 端力偶矩为 T 的集中力偶。在固定端支座 A 处的约束反力有正交分力 R_{Ax} 和 R_{Ay} ，以及力偶矩为 M_A 的集中力偶，它们的方向可以任意假设。在活动铰链支座 C 处作用有约束反力 R_c ，方向指向梁。

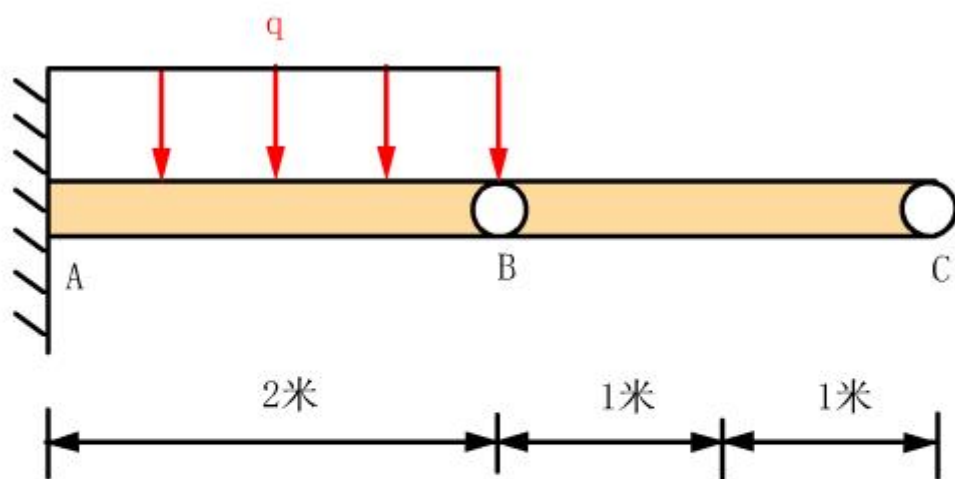
(2) 取梁 AB 部分为研究对象 在后段作用有均布载荷 q ，在固定端支座 A 处作用有约束反力 R_{Ax} 和 R_{Ay} ，以及力偶矩为 M_A 的集中力偶。在连接铰链 B 处的约束反力有正交分力 N_{Bx} 和 N_{By} ，方向可以任意假设。

(3) 取梁 BCD 部分为研究对象 在梁 CD 段作用有均布载荷 q ，在 D 端作用有力偶矩为 T 的集中力偶。在活动铰链支座 D 处作用有约束反力 R_c ，方向指向梁，在连接铰链 C 处的约束反力为 N'_{Bx} 和 N'_{By} ，根据作用反作用定律， $N'_{Bx} = N_{Bx}$ ， $N'_{By} = N_{By}$ 。

例 1-6 活动梯子置于光滑水平面上，由 AC 和 BC 两杆组成，用铰链 A 和绳子 DE 连接，人的重量为 G ，画出整体及 AC、BC 杆的受力图。

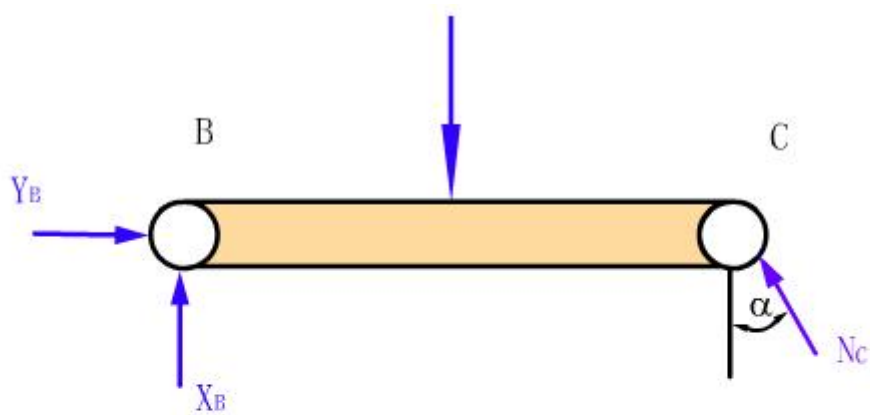
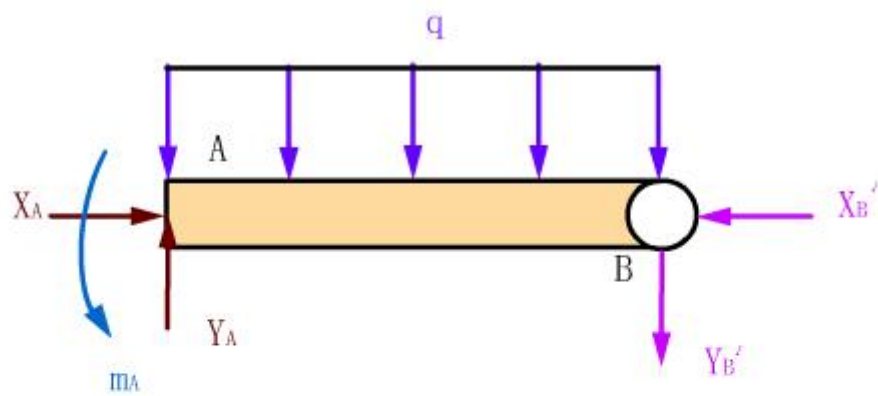


例 1-7 画出图示 AB、BC 杆及整体受力图。

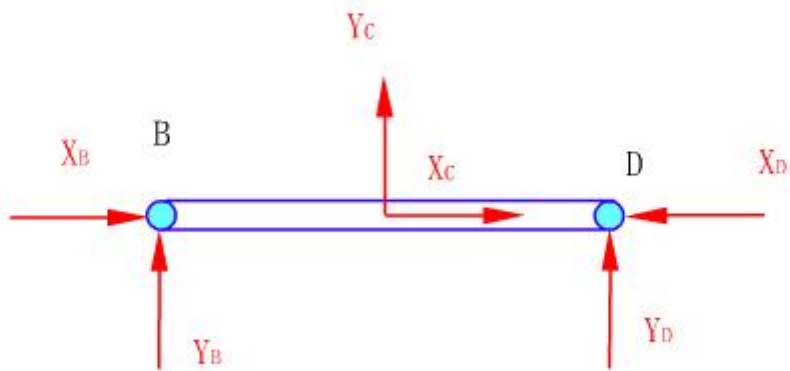
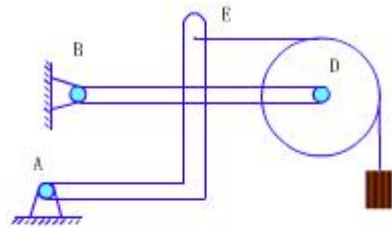
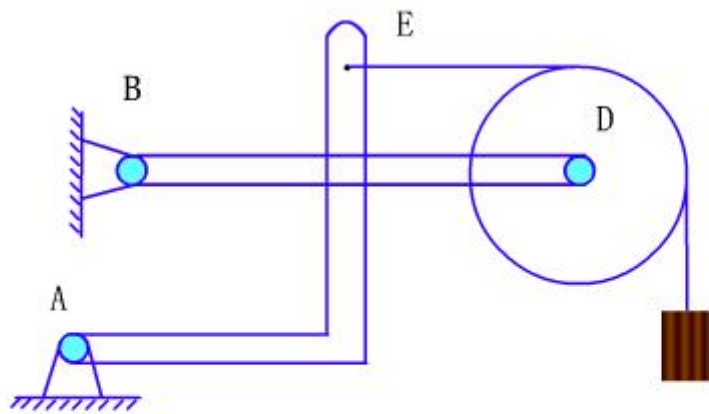


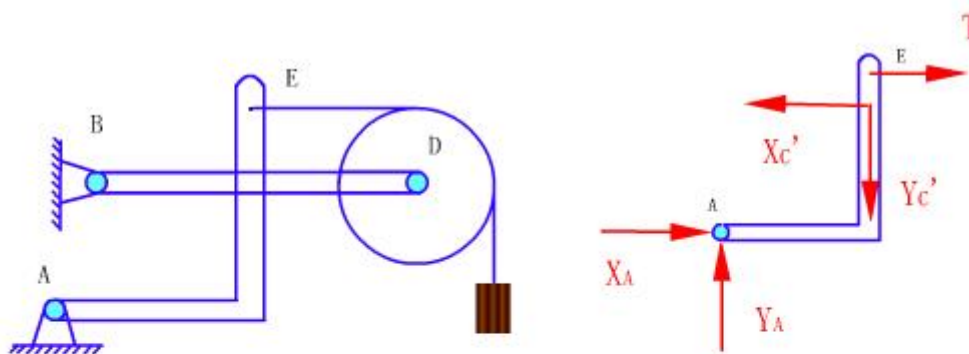
物体系统的受力图





例 1-8 画出图示 BD、AE 杆受力图。





本章重点及难点

1. 提出了静力学的基本概念：力、平衡、刚体。
2. 力是物体之间的相互机械作用。力的三要素是力的大小、方向和作用点。力是矢量。
3. 静力学公理是研究静力学的基础。

公理 1（力的平行四边形法则） 说明力的运算符合矢量运算法则，是力系合成与分解的基础。

公理 2（二力平衡公理） 是最基本的力系平衡条件。

公理 3（加减平衡力系公理） 是力系等效代换和简化的主要依据。

公理 4（作用和反作用定律） 是研究物体受力分析的基础。

公理 5（刚化原理） 提供了把变形体抽象为刚体模型的条件。

4. 作用于物体上的力可分为主动力与被动约束反力。约束反力是限制被约束物体运动的力，它作用于物体的约束接触处，其方向与物体被限制的运动方向相反。

常见的约束类型有：

- (1) 柔性约束 只能承受沿柔索的拉力。
 - (2) 光滑接触面约束 只能承受位于接触点的法向压力。
 - (3) 光滑圆柱形铰链约束 通常用两个正交的约束反力表示。
 - (4) 固定端约束 通常用两个正交的约束反力与一个力偶表示。
 - (5) 球铰链 通常用三个正交的约束反力表示。
5. 受力图 在解除约束的分离体简图上, 画出它所受的全部外力的简图, 称为受力图。

画受力图时应注意: 只画受力, 不画施力;

只画外力, 不画内力;

解除约束后, 才能画上约束反力。

第二章 基本力系

本章将介绍解析法研究汇交力系的简化与平衡, 力矩的计算与合力矩定理, 力偶系的性质、简化与平衡。

§ 2.1 汇交力系简化与平衡的解析法(力在直角坐标轴上的投影 合力投影定理等)

各力的作用线汇交于一点的力系称为汇交力系。用力的平行四边形法则可以求得两力的合力, 用此法则也可以求得多个汇交力的合力。对于包含 n 个汇交力的力系 F_1, F_2, \dots, F_n , 所合成的合力 F_R 即为

$$F_R = F_1 + F_2 + \dots + F_n = \Sigma F \quad (2-1)$$

一. 力在直角坐标轴上的投影

1. 一次投影法

若已知力 F 与直角坐标系 oxy 三轴间的正向夹角分别为 α 、 β 、 γ , 如图 2-1(a)、(b), 则力 F 在这三个轴上的投影可表示为

$$\begin{aligned} F_x &= F \cos \alpha \\ F_y &= F \cos \beta \end{aligned}$$

(2-2)

$$F_z = F \cos \gamma$$

可以看出，力与投影轴正向夹角为锐角时，其投影为正；力与投影轴正向夹角为钝角时，其投影为负。故力在直角坐标轴上的投影是代数量。应当注意，在直角坐标系中，分力的大小和投影的绝对值相等，但投影是代数量，分力是矢量。

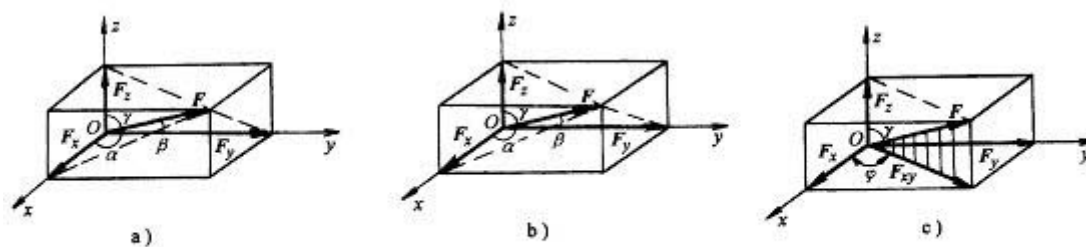
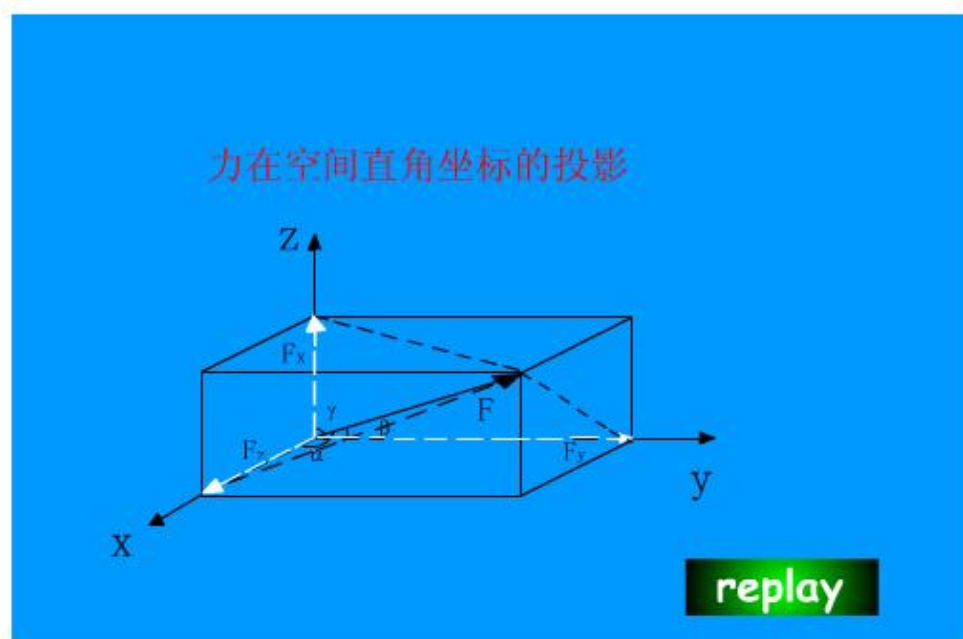


图 2-1



2. 二次投影法

可以先求出力在此坐标轴的分力 F_{xy} ，然后再求力 F 在三个直角坐标轴投影，如图 2-1(c)，于是力 F 在这三个轴上的投影分别为：

$$\begin{aligned} F_x &= F \sin \gamma \cos \psi \\ F_y &= F \sin \gamma \sin \psi \\ F_z &= F \cos \gamma \end{aligned} \quad (2-3)$$

若为平面力，则只须直接向 x、y 轴投影即可。

3. 合力投影定理

将式(2-1)两边分别向三个直角坐标轴上投影，有

$$\begin{aligned} F_{Rx} &= F_{1x} + F_{2x} + \dots + F_{nx} = \Sigma F_x \\ F_{Ry} &= F_{1y} + F_{2y} + \dots + F_{ny} = \Sigma F_y \\ F_{Rz} &= F_{1z} + F_{2z} + \dots + F_{nz} = \Sigma F_z \end{aligned} \quad (2-4)$$

即合力在某一轴上的投影，等于各分力在同一轴上投影的代数和。

二、汇交力系的合成与平衡

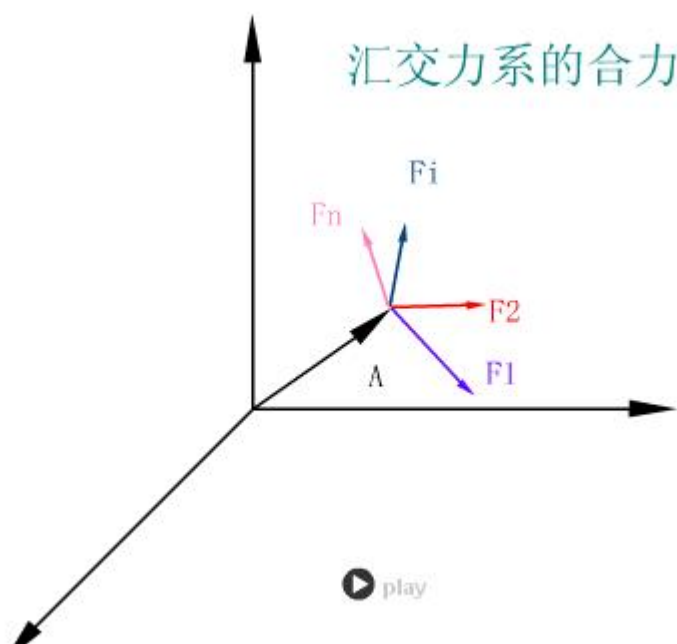
1. 汇交力系合成的解析法

设在刚体上作用有汇交力系 F_1, F_2, \dots, F_n ，由合力投影定理可求得合力 F_R 在三个直角坐标轴投影 F_{Rx}, F_{Ry}, F_{Rz} ，于是合力的大和方向可由下式确定

$$\begin{aligned} F_R &= \sqrt{F_{Rx}^2 + F_{Ry}^2 + F_{Rz}^2} \\ \cos \alpha &= \frac{F_{Rx}}{F_R} \quad \cos \beta = \frac{F_{Ry}}{F_R} \quad \cos \gamma = \frac{F_{Rz}}{F_R} \end{aligned} \quad (2-5)$$

若力系为平面力系，则合力的大小和方向为

$$\begin{aligned} F_R &= \sqrt{F_{Rx}^2 + F_{Ry}^2} \\ \cos \alpha &= \frac{F_{Rx}}{F_R} \quad \cos \beta = \frac{F_{Ry}}{F_R} \end{aligned} \quad (2-6)$$



2. 汇交力系平衡的解析条件

从前面知道，汇交力系平衡的充要条件是合力等于零，

即 $\mathbf{F}_R = \sum \mathbf{F} = 0$

所以 $\sum F_x = 0$

$\sum F_y = 0$

(2-7)

$\sum F_z = 0$

式(2-7)称为汇交力系的平衡方程，它表明汇交力系平衡的解析条件是力系中各力在三个直角坐标轴投影的代数和分别等于零。利用这三个互相独立的方程，可以求解三个未知数。

若力系为平面汇交力系，则平面汇交力系平衡的解析条件为

$\sum F_x = 0$

$\sum F_y = 0$

当用解析法求解平衡问题时，未知力的指向可以假设，如计算结果为正值，则表示所假设力的指向与实际相同；如为负值，则表示所假设力的指向与实际相反。

例 2-1 用解析法求图示汇交力系的合力。

解

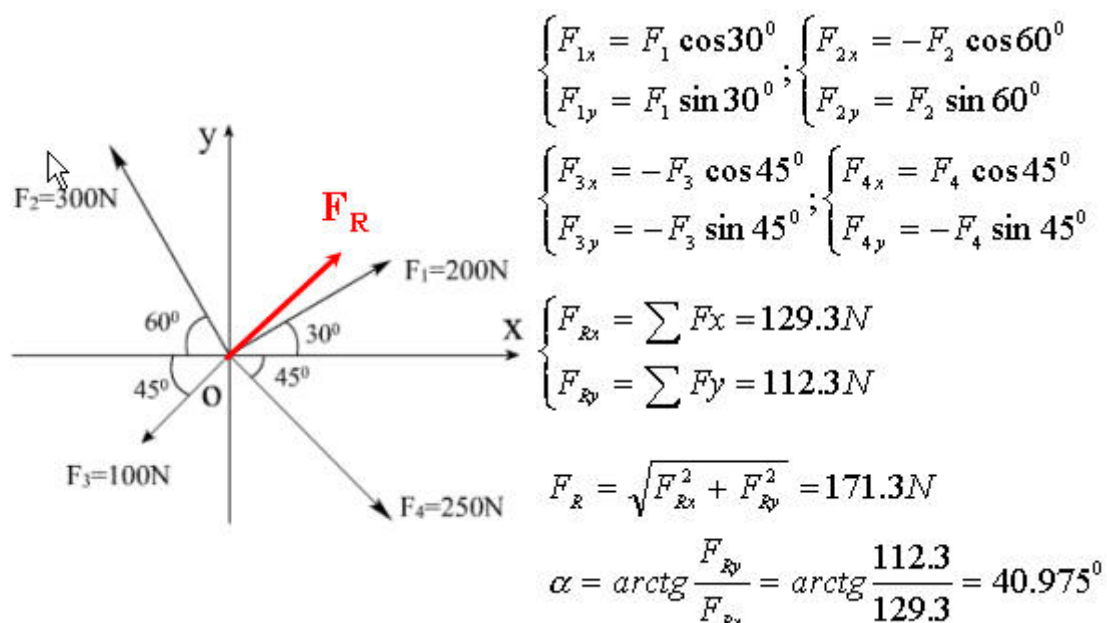


图 2-2

例 2-2 直杆 AB、AC 铰接于 A 点，自重不计，在 A 点挂一物重 $G=1000\text{N}$ ，并用绳子 AD 吊住，如图 2-3 所示。已知 AB 和 AC 等长且互相垂直， $\angle OAD=30^\circ$ ，B、C 均为球铰接，求杆 AB 和 AC 及绳子 AD 所受的力。

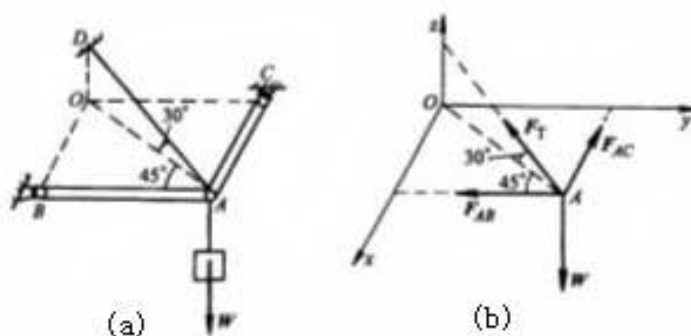


图 2-3

解 取销钉 A 为研究对象，其受力图，如图 2-3 所示，是一空间汇交力系。取直角坐标系 Axyz，列平衡方程为

$$\Sigma F_x = 0 \quad -F_{AC} - F_T \cos 30^\circ \sin 45^\circ = 0 \quad (1)$$

$$\Sigma F_y = 0 \quad -F_{AB} - F_T \cos 30^\circ \cos 45^\circ = 0 \quad (2)$$

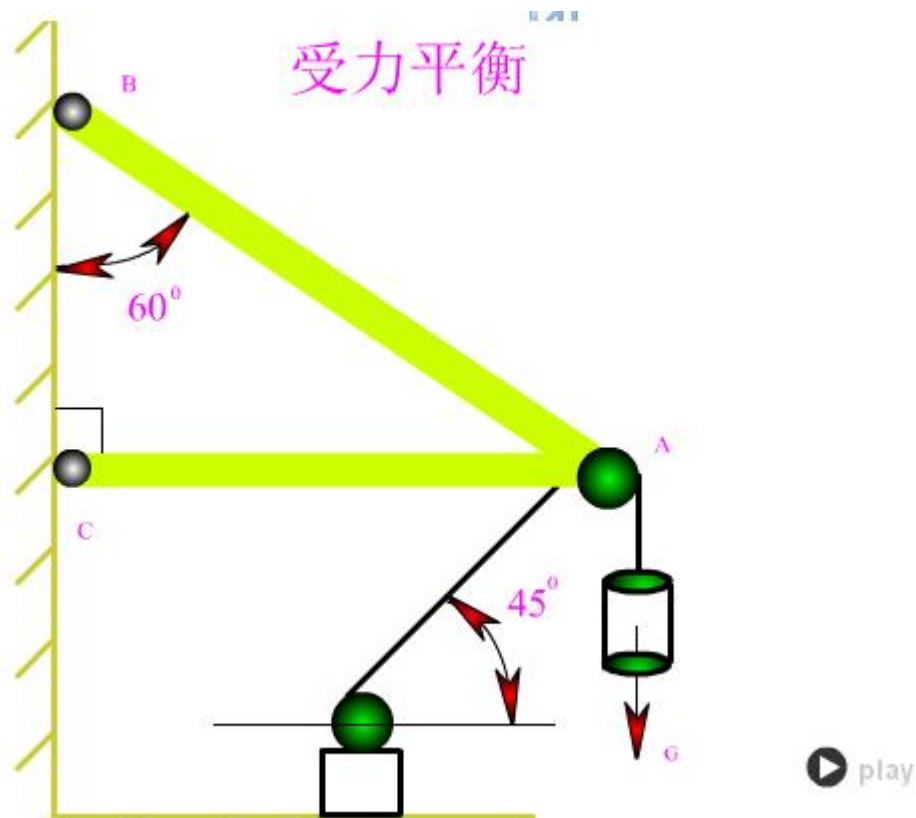
$$\Sigma F_z = 0 \quad -F_T \sin 30^\circ - G = 0 \quad (3)$$

由式(1)、(2)、(3)解得

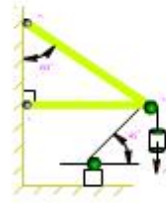
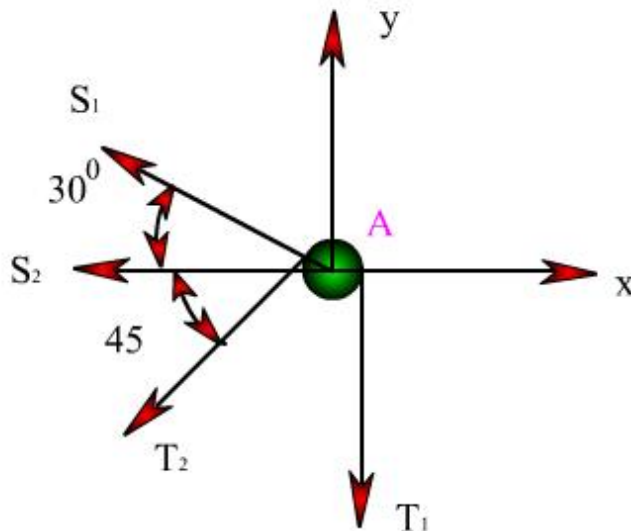
$$F_T = 2000\text{N}, F_{AB} = F_{AC} = -1225\text{N}$$

F_{AB} 、 F_{AC} 均为负值，说明所假设力的指向与实际相反，即两杆均受压力。

例2-3 如图所示，已知重物重量为 G ，求 AB、AC 杆所受的力。



受力平衡



解 取销钉 A 为研究对象，其受力图如上图所示，为平面汇交力系，取直角坐标系 Axy。

列平衡方程 $T_1 = T_2 = G$

$$\sum F_x = 0, \quad -s_2 - G \cos 45^\circ = 0$$

$$s_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}G = -0.707G$$

$$\sum F_y = 0, \quad s_1 \sin 30^\circ - G \sin 45^\circ - G = 0$$

$$s_1 = (2 + \sqrt{2})G = 3.414G$$

所以，AB 杆受拉力，大小为 $3.414G$ ；

AC 杆受压力（ S_2 为负值），大小为 $0.707G$ 。

§ 2.2 力矩（力对点之矩 合力矩定理 力对轴之矩）

实践表明，力对刚体的作用效应，不仅可以使刚体移动，而且还可以使刚体转动。其中移动效应可用**力矢**来度量，而转动效应可用**力矩**来度量。

一. 力对点之矩

如图 2-5 所示，当用扳手拧紧螺母时，力 F 对螺母拧紧的转动效应不仅与力 F 的大小有关，而且还与转动中心 O 至力 F 的垂直距离有关。

因此，可用两者的乘积 Fd 来度量力使物体绕点 O 的转动效应，称为力 F 对点 O 之矩，简称**力矩**，以符号 $M_O(F)$ 表示，即

$$M_O(F) = \pm Fd$$

式中，点 O 称为矩心， d 称为**力臂**。力矩是一个代数量，其正负号规定如下：**力使物体绕矩心逆时针转动时，力矩取正号，反之为负。**

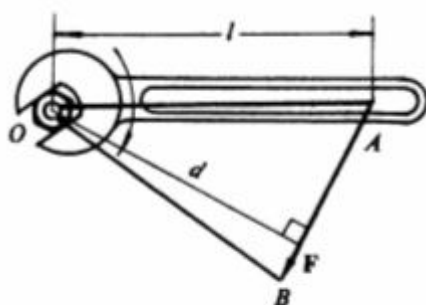


图 2-5

由力矩的定义及计算式可知：力的作用线通过矩心时，力臂值为零，故力矩等于零。当力沿作用线滑动时，力臂不变，因而力对点的矩也不变。

力矩的单位是牛[顿]米 (N·m)

二. 合力矩定理

合力矩定理：平面力系的合力对平面上任一点之矩，等于各分力对同一点之矩的代数和。

$$M_O(F_R) = M_O(F_1) + M_O(F_2) + \dots + M_O(F_n) = \sum M_O(F)$$

例 2-4 圆柱直齿传动中，已知轮齿啮合面间的作用力为 $F_n = 1\text{KN}$ ，啮合角 $\alpha = 20^\circ$ ，齿轮分度圆直径 $d = 60\text{mm}$ 。试计算力对轴心 O 的力矩。

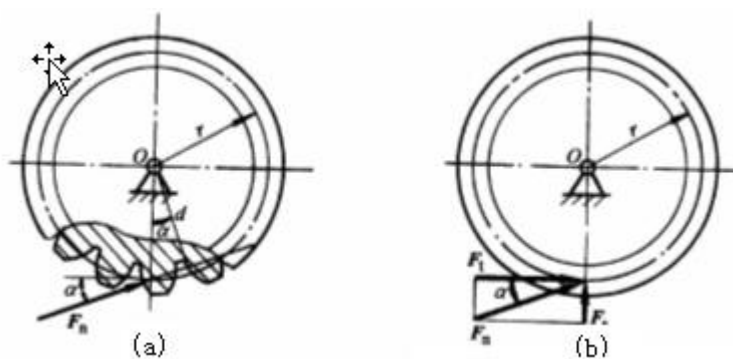
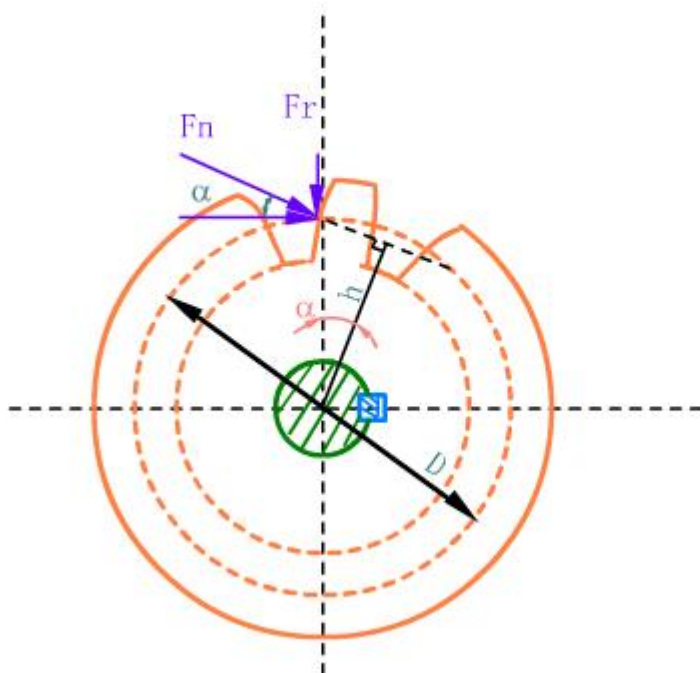


图 2-6

计算齿轮的传动力矩



解 将力 F_n 沿半径 r 方向分解成一组正交的圆周力 $F_t = F_n \cos \alpha$ 与径向力 $F_r = F_n \sin \alpha$ 。

$$\begin{aligned} M_o(F_n) &= M_o(F_t) + M_o(F_r) \\ &= F_t r + 0 = F_n r \cos \alpha = 28.2 \text{ N} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

三. 力对轴之矩

从空间角度来看, 扳手绕 O 点的转动, 实际上是绕过 O 点且垂直于扳手平面的轴线 Oz 轴的转动(图 2-6)。所以, 也可以说力 F 对 O 点之矩也是力 F 使刚体绕 Oz 轴转动效应的度量, 称力 F 对 Oz 轴之矩, 用 $M_z(F)$ 表示。

力 F 分解为平行于 Oz 轴的分力 F_z 和垂直于 Oz 轴的分力 F_{xy} (图 2-6)。分力 F_z 不能使刚体绕 Oz 轴转动，因此力 F 使刚体绕 Oz 轴转动的效应可用分力 F_{xy} 对 Oz 轴的矩来度量，即

$$M_z(F) = M_O(F_{xy}) = \pm F_{xy}d$$

空间力对轴之矩等于此力在垂直于该轴平面上的分力对轴与平面交点之矩。力对轴之矩是一个代数量，规定从 z 轴的正向回头看去，若力在垂直于该轴平面上的分力使刚体绕轴逆时针转动为正，反之为负。

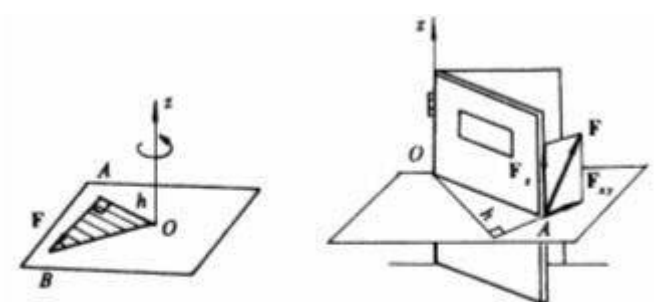
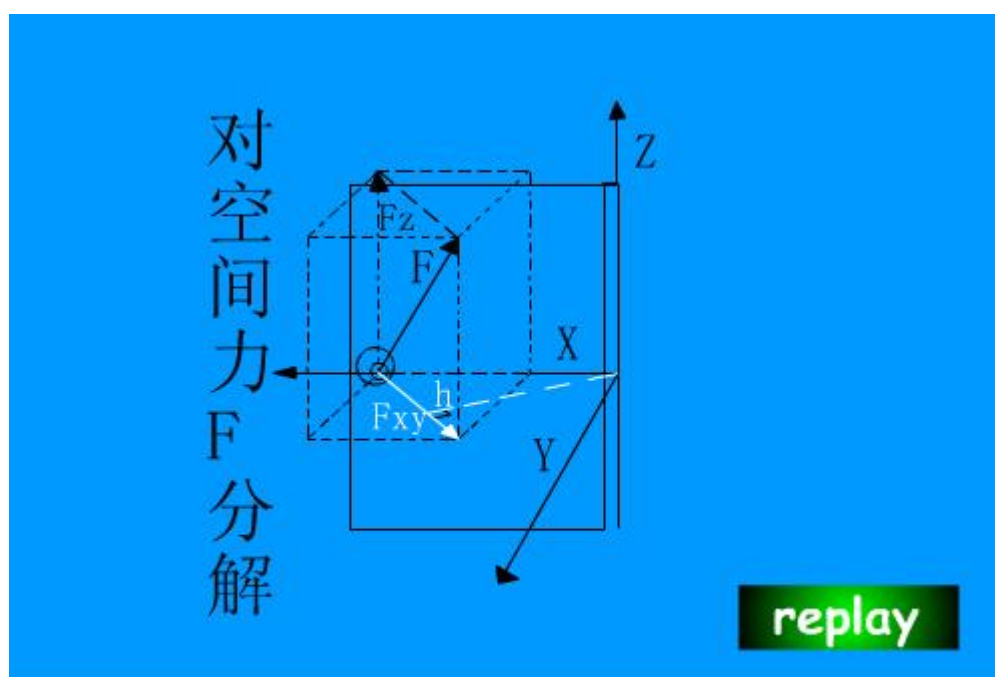


图 2-7



当力与轴相交 (d 或力与轴平行 ($F_{xy}=0$) 时，即力与轴共面时，力对轴之矩等于零。见图 2-7

对于空间力系问题，合力矩定理又可写为

$$M_z(FR) = \sum M_z(F)$$

即：合力对某轴之矩，等于各分力对同一轴之矩的代数和。

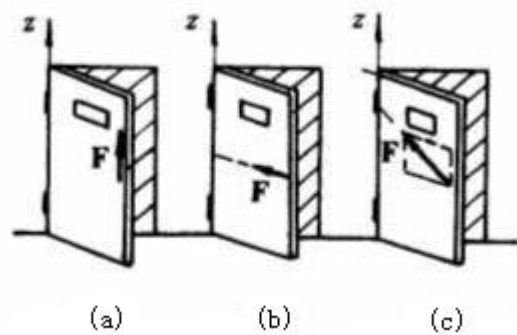
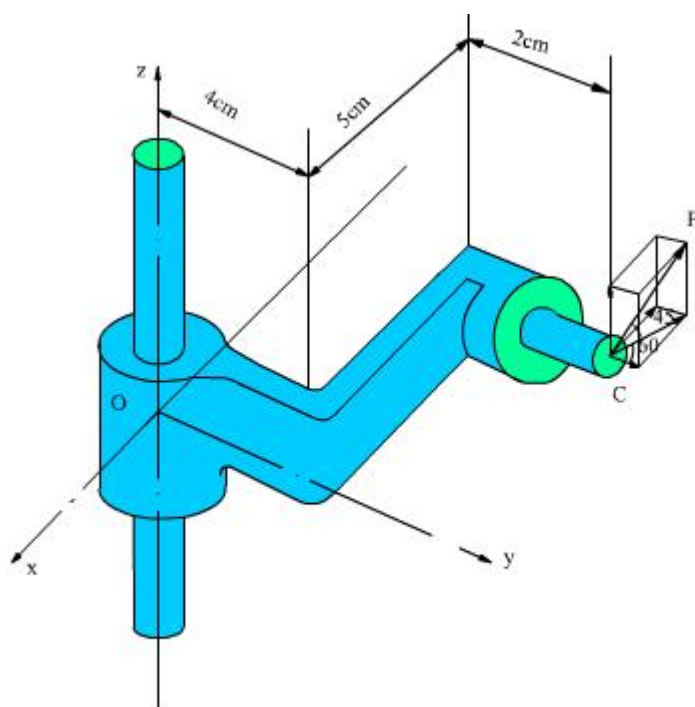


图 2-8



2-5 如图所示托架套在转轴 z 上，力 $F=100\text{N}$ ，求力 F 对 z 轴之矩。

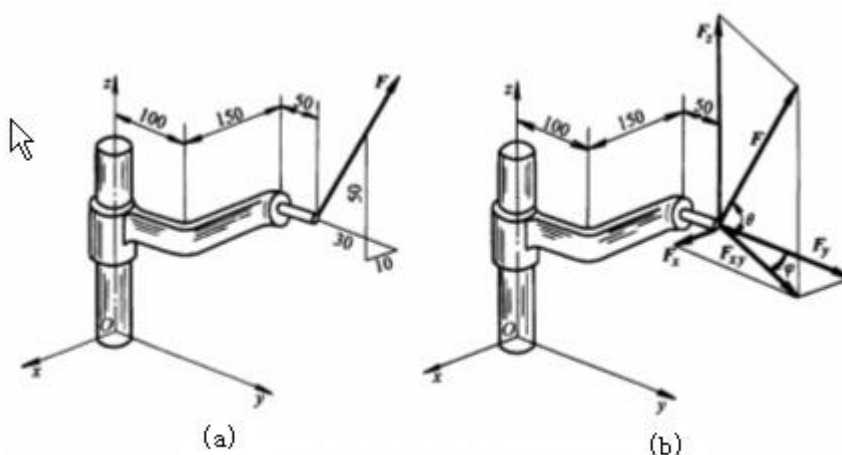


图 2-9

解 将力 F 沿坐标轴方向分解为三个分力 F_x 、 F_y 、 F_z ，其大小分别为

$$F_x = F \cos \theta \sin \varphi = F \frac{10}{\sqrt{10^2 + 30^2 + 50^2}} = 100 \times 0.169 = 16.9 \text{ N}$$

$$F_y = F \cos \theta \cos \varphi = F \frac{30}{\sqrt{10^2 + 30^2 + 50^2}} = 100 \times 0.5071 = 50.71 \text{ N}$$

$$F_z = F \sin \theta = F \frac{50}{\sqrt{10^2 + 30^2 + 50^2}} = 100 \times 0.8451 = 84.51 \text{ N}$$

由合力矩定理得

$$\begin{aligned} M_z(\mathbf{F}) &= M_z(F_x) + M_z(F_y) + M_z(F_z) \\ &= -F_x \times (0.1 + 0.05) - F_y \times 0.15 + 0 \\ &= -10.14 \text{ N} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

§ 2.3 力 偶

一. 力偶及其力偶矩

由大小相等, 方向相反, 而作用线不重合的两个平行力组成的力系称为力偶, 记作 (F, F') 。力偶中两力所在的平面称为力偶作用面, 两力作用线间的垂直距离 d 称为力偶臂

$$M = \pm Fd$$

力偶矩是代数量, 一般规定使物体逆时针转动为正, 顺时针转动为负。

力偶矩的单位是牛[顿]米(N·m)

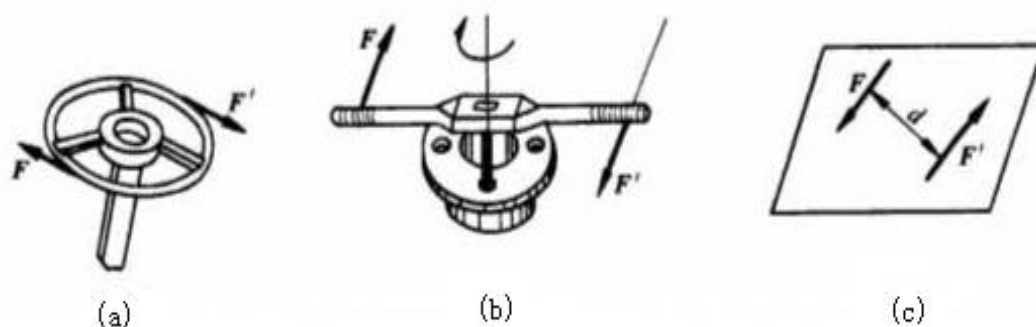
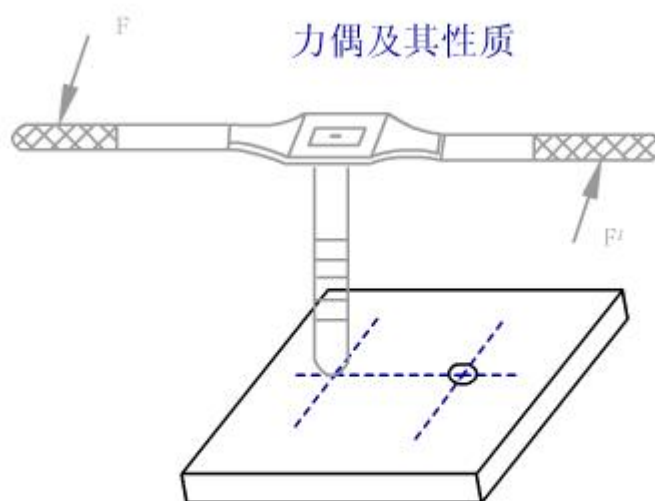


图 2-10



二. 力偶的性质

性质 1 力偶既无合力，也不能和一个力平衡，力偶只能用力偶来平衡。

力偶是由两个力组成的特殊力系，在任一轴上投影的代数和为零，故力偶不能合成一个合力，或用一个力来等效替换。力和力偶是静力学的两个基本要素，力偶对刚体只能产生转动效应，而力对刚体可产生移动效应，也可产生转动效应，所以，力偶也不能用一个力来平衡。

性质 2 力偶对其作用面内任一点之矩恒为常数，且等于力偶矩，与矩心的位置无关。

这个性质说明力偶使刚体绕其作用面内任一点的转动效果是相同的。

性质3 力偶可在其作用面内任意转移，而不改变它对刚体的作用效果。

拧瓶盖时，可将力夹在A、B位置或C、D位置，其效果相同，如图2-11

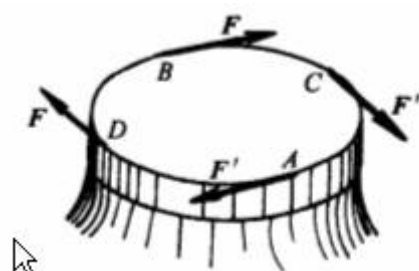


图 2-11

性质4 只要保持力偶矩的大小和转向不变，可以同时改变力偶中力的大小和力偶臂的长短，而不改变其对刚体的作用效果。

因此，力偶可用力和力偶臂来表示，即用带箭头的弧线表示，箭头表示力偶的转向，M表示力偶的大小。如图2-12

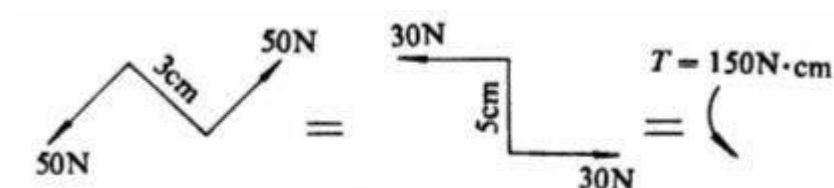


图 2-12

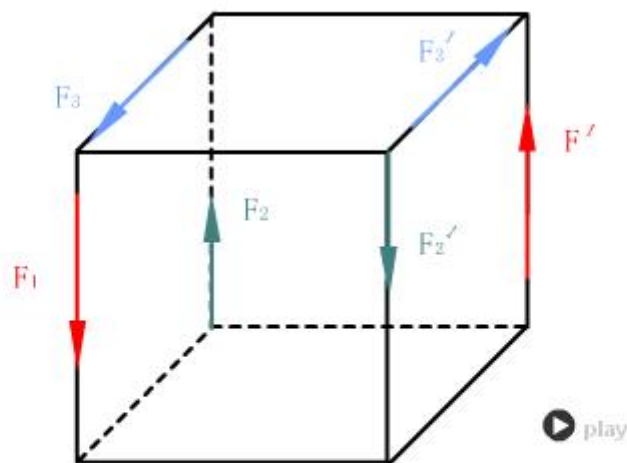
三、平面力偶系的简化与平衡

在同一平面内由若干个力偶所组成的力偶系称为平面力偶系。平面力偶系的简化结果为一合力偶，合力偶矩等于各分力偶矩的代数和。即

$$M = M_1 + M_2 + \dots + M_n = \sum M$$

平面力偶系的简化结果为一合力偶，因此平面力偶系平衡的充要条件是合力偶矩等于零。即

$$\sum M = 0$$



三个力偶的合成

本章重点及难点

1. 空间力在空间坐标轴上的投影有一次投影法和二次投影法
2. 合力投影定理。即合力在某一轴上的投影，等于各分力在同一轴上投影的代数和。
3. 汇交力系合成的解析法
4. 汇交力系的平衡方程

$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$\sum F_z = 0$$

5. 力矩是度量力对物体转动效应的物理量，它与矩心的位置有关，其大小为

$$M_O(\mathbf{F}) = \pm Fd$$

其中，力臂 d 是指矩心 O 到力 \mathbf{F} 作用线的垂直距离

6. 合力矩定理

平面力系的合力对平面上任一点之矩，等于各分力对同一点之矩的代数和。

$$M_O(FR) = M_O(F_1) + M_O(F_2) + \cdots + M_O(F_n) = \sum M_O(F)$$

合力对某轴之矩，等于各分力对同一轴之矩的代数和。

$$M_z(FR) = \sum M_z(F)$$

7. 力偶是由大小相等、方向相反，作用线不重合的两个平行力组成的力系，使刚体产生转动效应。

8. 力偶的性质

(1) 力偶既无合力，也不能和一个力平衡，力偶只能用力偶来平衡。

(2) 力偶对其作用面内任一点之矩恒为常数，且等于力偶矩，与矩心的位置无关。

(3) 力偶可在其作用面内任意转移，而不改变它对刚体的作用效果。

(4) 只要保持力偶矩的大小和转向不变，可以同时改变力偶中力的大小和力偶臂的长短，而不改变其对刚体的作用效果。

9. 平面力偶系的简化结果为一合力偶，合力偶矩等于各分力偶矩的代数和。

$$M = M_1 + M_2 + \cdots + M_3 = \sum M$$

10. 平面力偶系的平衡方程是

$$\sum M = 0$$

第三章 一般力系

一般力系又称为任意力系，可分为空间任意力系和平面任意力系。当力系中各力的作用线任意分布在空间时，称空间任意力系，这是力系中最普遍的形式。如图 3-1 所示。

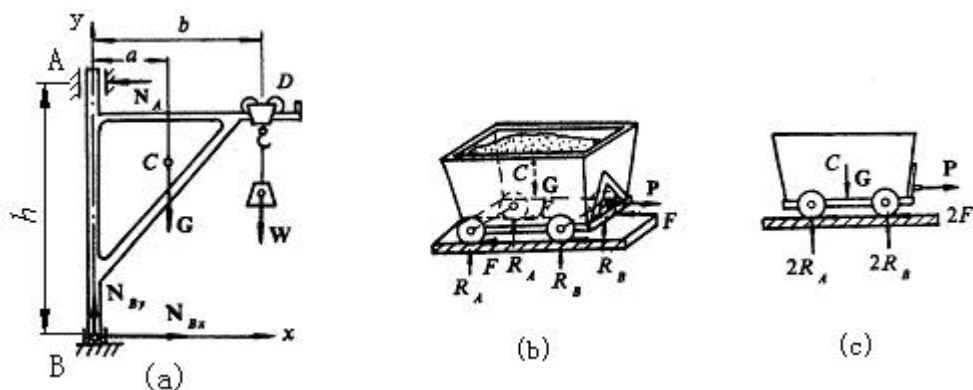


图 3-1

§ 3.1 力的平移定理

作用于刚体上的力，可以平行移动到该刚体上任意一点，但必须附加一个力偶，其力偶矩等于原来的力对平移点之矩。现在我们进一步讨论当力平行移动到作用线外任意位置且又要保持其作用效果不变时，应附加什么条件？力的平移定理回答了这一问题。

力的平移定理 作用于刚体上的力，可以平行移动到该刚体上任意一点，但必须附加一个力偶，其力偶矩等于原来的力对平移点之矩。

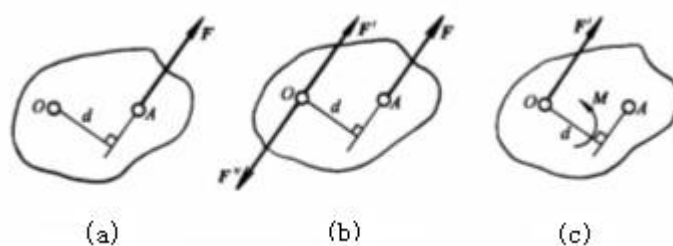


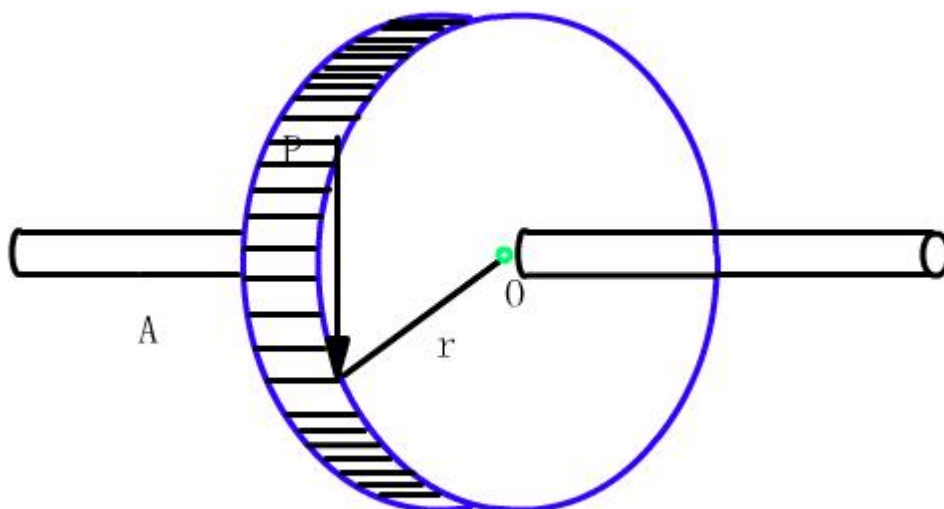
图 3-2

证明 如图 3-2 所示, 在刚体上任取一点 O , 在 O 点附加两个等值、反向共线且与 F 平行的力 F' 和 F'' , 使 $F' = F''$ 。显然, 该力系和 F 等效。其中 F 和 F' 构成一力偶, 于是原来作用在 A 点的力 F , 现在被一个作用在 O 点的力 F'' 和一个力偶 (F, F') 等效代替, 这个力偶的力偶矩为 $M = Fd$ 。其中, d 是附加力偶的力偶臂, 也是 O 点到力 F 作用线的垂直距离, 因此力 F 对 O 点矩也为 $M_O(F) = Fd$ 。

由此证得

$$M = M_O(F)$$

力的平移定理



此定理不仅是力系简化的主要依据，而且可以解决一些实际问题。例如，用铰杠丝锥在工件上攻螺纹时，要求双手均匀用力，此时铰杠丝锥受到一个力偶 (F , F') 作用，如图 3-3 所示，如果双手用力不均或者单手用力，则此时铰杠受到一个力和一个附加力偶作用，这个力常导致丝锥折断。

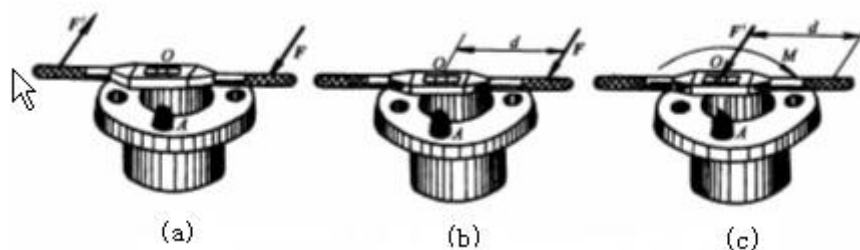


图 3-3

又如图 3-4 所示转轴上的齿轮所受的圆周力 F 的作用，将力 F 平移至轴心 O 点，则力 F' 使轴弯曲，而力偶矩 M 使轴扭转。

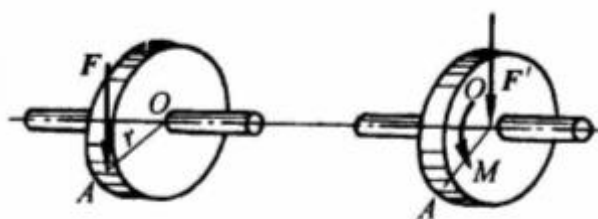


图 3-4

§ 3.2 平面任意力系的简化

一. 平面一般力系向作用面任一点简化

设在刚体上作用有平面一般力系 F_1 、 F_2 、 \cdots 、 F_n ，分别作用于 A_1 、 A_2 、 \cdots 、 A_n 各点。在该平面内任取一点 O ，称为**简化中心**。应用力的平移定理，将各力平移到 O 点，得到一个作用于 O 点的力系 (F_1' 、 F_2' 、 \cdots 、 F_n') 和一个附加的平面力偶系 (M_1 、 M_2 、 \cdots 、 M_n)。这样，就将原力系等效变换为两个基本力系：**平面汇交力系**和**平面力偶系**。

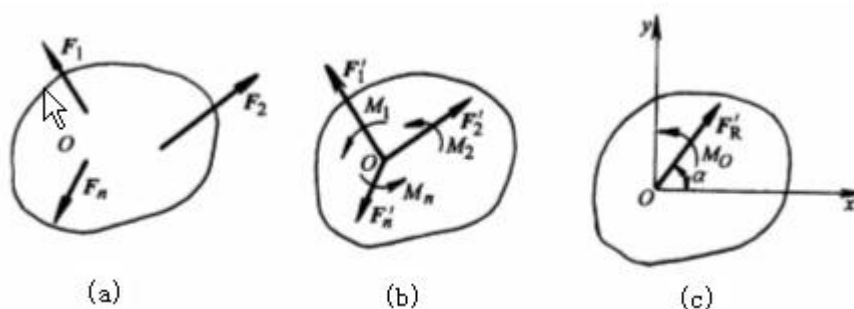


图 3-5

其中 各力矢分别为 $F_1' = F_1$, $F_2' = F_2$, \cdots , $F_n' = F_n$,

各力偶矩分别为 $M_1 = M_O(F_1)$, $M_2 = M_O(F_2)$, \cdots , $M_n = M_O(F_n)$

平面汇交力系 F_1' 、 F_2' 、 \cdots 、 F_n' 可合成为一个通过 O 点的一个力 F_R' ，称为**主矢量**。

$$F_R' = F_1' + F_2' + \cdots + F_n' = F_1 + F_2 + \cdots + F_n = \sum F$$

当取不同的简化中心时，主矢量的大小和方向保持不变。其大小和方向可以用下式计算

$$F_{Rx}' = \sum F_x$$

$$F_{Ry}' = \sum F_y$$

$$F_R' = \sqrt{(\sum F_x)^2 + (\sum F_y)^2}$$

$$\tan \alpha = \left| \frac{\sum F_y}{\sum F_x} \right|$$

式中， α 为主矢量 F_R' 的作用线与 x 轴正向的夹角。

附加的平面力偶系 M_1 、 M_2 、 \dots 、 M_n 的可合成一个力偶，称为 **主矩**。

$$M_0 = M_1 + M_2 + \dots + M_n = \sum M$$

表明主矩等于原力系中各力对 O 点之矩的代数和。

原力系与主矢量 \mathbf{F}' 和主矩 M_0 的共同作用等效，如图 3-5 所示。主矢量 \mathbf{F}' 的大小和方向与简化中心的选择无关，主矩 M_0 的大小和转向与简化中心的选择有关。

综上所述，平面一般力系向作用面任一点 O 简化，可得到一个作用在简化中心的主矢量和一个作用于原平面内的主矩，主矢量等于原力系中各力的矢量和，而主矩等于原力系中各力对点之矩的代数和。

二. 平面一般力系的简化结果分析

平面一般力系向一点简化，一般可得到一个主矢 \mathbf{F}' 和一个主矩 M_0 ，但这不是最终简化结果，最终简化结果通常有以下四种情况。

1. $\mathbf{F}' = 0$ ， $M_0 \neq 0$ 表明原力系与一个力偶等效，原力系简化为一个合力偶，其力偶矩为 $M_0 = \sum M_0(\mathbf{F})$ ，此时主矩 M_0 与简化中心的选择无关。

2. $\mathbf{F}' \neq 0$ ， $M_0 = 0$ 表明原力系与一个主矢量 \mathbf{F}' 等效，即 \mathbf{F}' 为原力系的合力，其作用线通过简化中心。

3. $\mathbf{F}' \neq 0$ ， $M_0 \neq 0$ 根据力的平移定理的逆过程，可以将 \mathbf{F}' 和 M_0 合成为一个合力。合 \mathbf{F} 的作用线到简化中心 O 的距离为

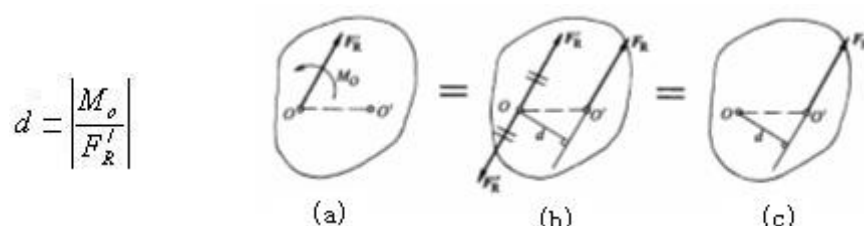
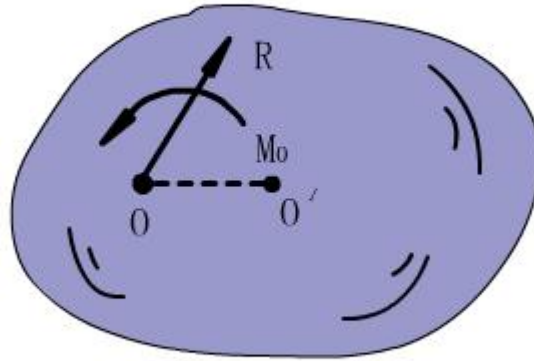


图 3-6

简化结果分析



4. $\mathbf{FR}' = 0$, $M_0 = 0$ 表明原力系为平衡力系，则刚体在此力系作用下处于平衡状态。

例 3-1 铆接薄钢板，在铆钉 B、C、D 上分别受到力 F_1 、 F_2 和 F_3 的作用，如图 3-7 所示。已知 $F_1 = 100\text{N}$ ， $F_2 = 50\text{N}$ ， $F_3 = 200\text{N}$ 。图中尺寸单位为 cm。求 (1) 力系间 A 点、D 点的简化结果；(2) 力系简化的最终结果；(3) 以上三种情况的简化结果是否等效。

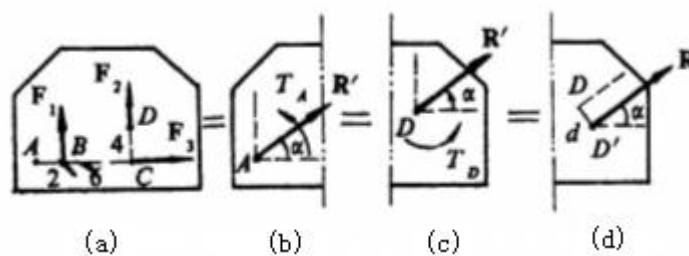


图 3-7

解 (1)

$$F'_{Rx} = \sum F_x = F_3 = 200\text{N}$$

$$\text{I} \quad F'_{Ry} = \sum F_y = F_1 + F_2 = 150\text{N}$$

主矢量 \mathbf{FR}' 的大小和方向分别为：

$$F'_R = \sqrt{(\Sigma F'_{Rx} + \Sigma F'_{Ry})} = 250\text{N}$$

$$\tan \alpha = \frac{|\Sigma F'_{Ry}|}{|\Sigma F'_{Rx}|} = \frac{150}{200} = 0.75 \quad \alpha = 36.8^\circ$$

指向第一象限

矢量的大小和方向与简化中心的选择无关，故向 A 点或 D 点简化得到的主矢量相同。

力系对 A 点和 D 点的矩分别为：

$$M_A = \Sigma M_A(\mathbf{F}) = F_1 \times 0.02 + F_2 \times 0.08 = 100 \times 0.02 + 50 \times 0.08 = 6\text{N} \cdot \text{m}$$

$$M_D = \Sigma M_D(\mathbf{F}) = -F_1 \times 0.06 + F_3 \times 0.04 = -100 \times 0.06 + 200 \times 0.04 = 2\text{N} \cdot \text{m}$$

(2) 由于 $\mathbf{FR}' \neq 0$ ，所以力系简化的最终结果为一合力 \mathbf{FR} 。 \mathbf{FR} 的大小和方向与主矢量相同。合力作用线距 D 点的距离为

$$d = \left| \frac{M_D}{F'_R} \right| = \frac{2}{250} = 0.008\text{m} = 0.8\text{cm}$$

(3) 力系上述三种简化结果，从形式上是不同的，但都与原力系等效，所以，三种情况的简化结果是等效的。

§ 3.3 平面任意力系的平衡方程

一. 平面一般力系的平衡方程

1. 基本形式

平面一般力系向作用面任一点 O 简化，可得到一个主矢量 \mathbf{FR}' 和一个主矩 M_O ，如果 $\mathbf{FR}' = 0$ ， $M_O = 0$ ，则平面一般力系必平衡；反之，如果平面一般力系平衡，必有 $\mathbf{FR}' = 0$ ， $M_O = 0$ 。因此，平面一般力系平衡的充要条件是：

$$\begin{aligned} \mathbf{FR}' &= 0 \\ M_O &= \Sigma M_O(\mathbf{F}) = 0 \end{aligned}$$

故得平面一般力系的平衡方程为

$$\begin{aligned} \Sigma F_x &= 0 \\ \Sigma F_y &= 0 \\ \Sigma M_O(\mathbf{F}) &= 0 \end{aligned}$$

平面一般力系平衡方程的基本形式，它含有三个独立的方程，因而最多能解出三个未知量。

2. 二矩式

$$\begin{aligned}\sum F_x &= 0 \\ \sum M_A(F) &= 0 \\ \sum M_B(F) &= 0\end{aligned}$$

其中 A、B 两点的连线不能与 Ox 轴垂直。

3. 三矩式

$$\begin{aligned}\sum M_A(F) &= 0 \\ \sum M_B(F) &= 0 \\ \sum M_C(F) &= 0\end{aligned}$$

其中 A、B、C 三点不能在一条直线上。

二. 平面平行力系的平衡方程

在基本式中，坐标轴是任选的。现取 y 轴平行各力，则平面平行力系中各力在 x 轴上的投影均为零，即 $\sum F_x = 0$ 。于是平面平行力系只有两独立的平衡方程，即

$$\begin{aligned}\sum F_y &= 0 \\ \sum M_O(F) &= 0\end{aligned}$$

不难看出，平面平行力系的二矩式平衡方程为

$$\begin{aligned}\sum M_A(F) &= 0 \\ \sum M_B(F) &= 0\end{aligned}$$

其中 A、B 两点的连线不能与各力平行。

平面平行力系只有两个独立的方程，因而最多能解出两个未知量。

三. 应用平面一般力系平衡方程的解题步骤如下：

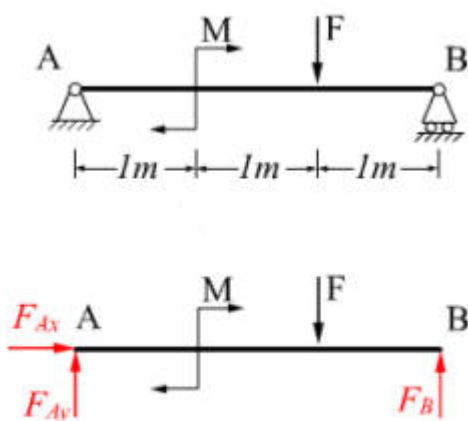
- (1) 根据题意，选取适当的研究对象。
- (2) 受力分析并画受力图。
- (3) 选取坐标轴。坐标轴应与较多的未知反力平行或垂直。
- (4) 列平衡方程，求解未知量。列力矩方程时，通常选未知力较多的交点为矩心。
- (5) 校核结果。

应当注意：若由平衡方程解出的未知量为负，说明受力图上原假定的该未知量的方向与其实际方向相反。而不要去改动受力图中原假设的方向。

例 3-2 已知 $F=15\text{kN}$, $M=3\text{kN}\cdot\text{m}$, 求 A、B 处支座反力。

解 (1) 画受力图，并建坐标系

(2) 列方程求解



$$\begin{aligned}\sum F_x &= 0 \Rightarrow F_{Ax} = 0 \\ \sum M_A(F) &= 0 \\ F_B \cdot 3 - F \cdot 2 - M &= 0 \\ F_B &= (3 + 2 \times 15) / 3 = 11\text{kN} \\ \sum F_y &= 0 \\ F_{Ay} + F_B - F &= 0 \\ F_{Ay} &= F - F_B = 4\text{kN}\end{aligned}$$

图 3-8

例 3-3 如图 3-9 所示外伸梁上作用有集中力 $F_C=20\text{kN}$, 力偶矩 $M=10\text{kN}\cdot\text{m}$, 载荷集度为 $q=10\text{kN/m}$ 的均布载荷。求支座 A、B 处的反力。

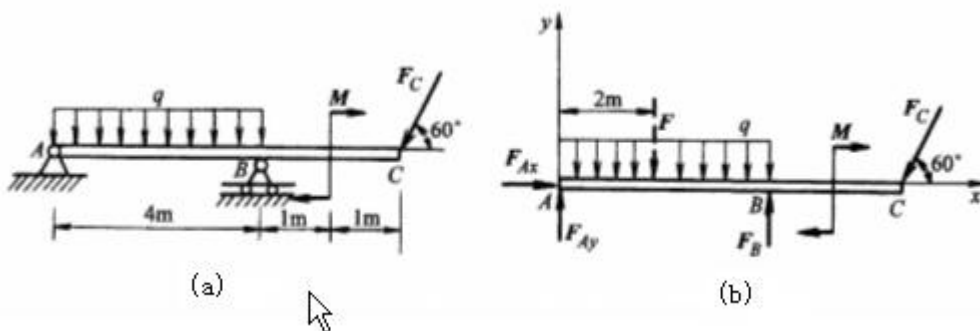


图 3-9

解 取水平梁 AB 为研究对象，画受力图如图 3-9(b) 所示。

列平衡方程并求解

$$\sum M_A(F) = 0 \quad 4F_B - 2F - 6F_C \sin 60^\circ - M = 0$$

$$F_B = 48.8 \text{ kN}$$

$$\sum F_x = 0 \quad F_{Ax} - F_C \cos 60^\circ = 0$$

$$F_{Ax} = 10 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0 \quad F_{Ay} + F_B - F - F_C \sin 60^\circ = 0$$

$$F_{Ay} = 8.84 \text{ kN}$$

结果均为正，说明图示方向与实际方向一致。

例 3-4 塔式起重机如图 3-10 所示。设机架自重为 G ，重心在 C 点，与右轨距离为 e ，载重 W ，吊臂最远端距右轨为 l ，平衡锤重 Q ，离左轨的距离为 a ，轨距为 b 。试求塔式起重机在满载和空载时都不致翻倒的平衡锤重量的范围。

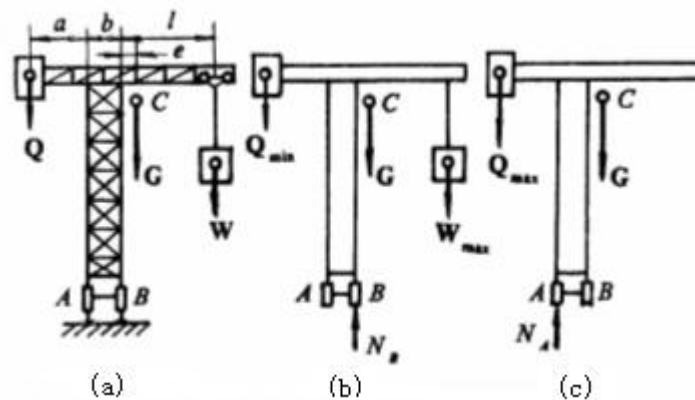
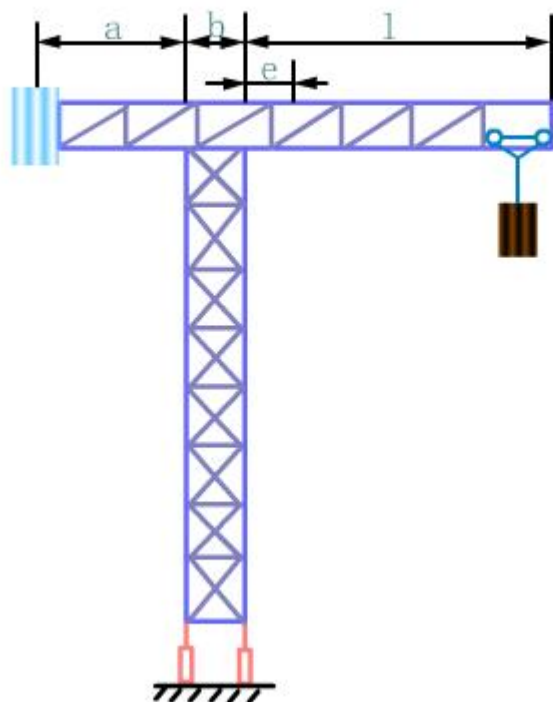


图 3-10

平面平行力系平衡方程的应用



解 取塔式起重机为研究对象，作用在起重机上的力有重物 W 、机架重 G 、平衡锤的重力 Q 及钢轨的约束反力 N_A 和 N_B ，这些力构成了平面平行力系，起重机在该平面平行力系作用下平衡。

(1) 满载时 $W=W_{\max}$, $Q=Q_{\min}$ ，机架可能绕 B 点右翻，在临界平衡状态， A 处悬空， $N_A=0$ ，受力图如图 3-10b 所示。则

$$\sum M_B(\mathbf{F}) = 0 \quad Q_{\min}(a+b) - W_{\max}l - Ge = 0$$

$$Q_{\min} = \frac{Ge + W_{\max}l}{a+b}$$

(2) 空载时 $W=0$, $Q=Q_{\max}$ ，机架可能绕 A 点左翻，在临界平衡状态， B 处悬空， $N_B=0$ ，受力图如图 3-10c 所示。则

$$\sum M_A(\mathbf{F}) = 0 \quad Q_{\max}a - G(e+b) = 0$$

$$Q_{\max} = \frac{G(e+b)}{a}$$

故 平衡锤的范围应满足不等式

$$\frac{Ge + W_{\max}l}{a+b} \leq Q \leq \frac{G(e+b)}{a}$$

例 3-5 一简易起重机如图 3-11 所示。横梁 AB 的 A 端为固定铰支座，B 端用拉杆 BC 与立柱相连。已知梁的重力 $G_1=4\text{kN}$ ，载荷 $G_2=12\text{kN}$ ，横梁长 $L=6\text{m}$ ， $\alpha = 30^\circ$ ，求当载荷距 A 端距离 $x=4\text{m}$ 时，拉杆 BC 的受力和铰支座 A 的约束反力。

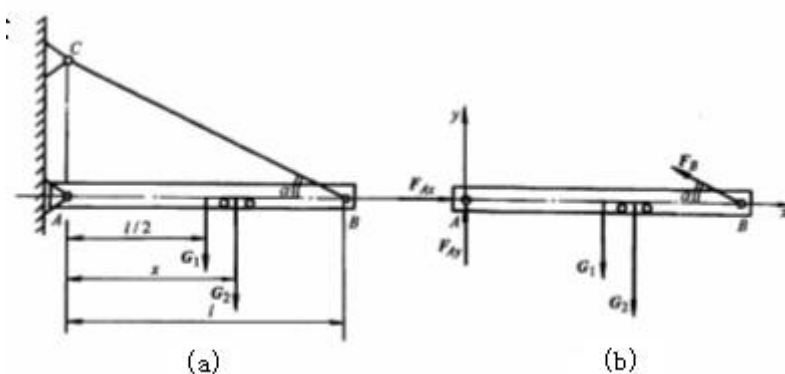
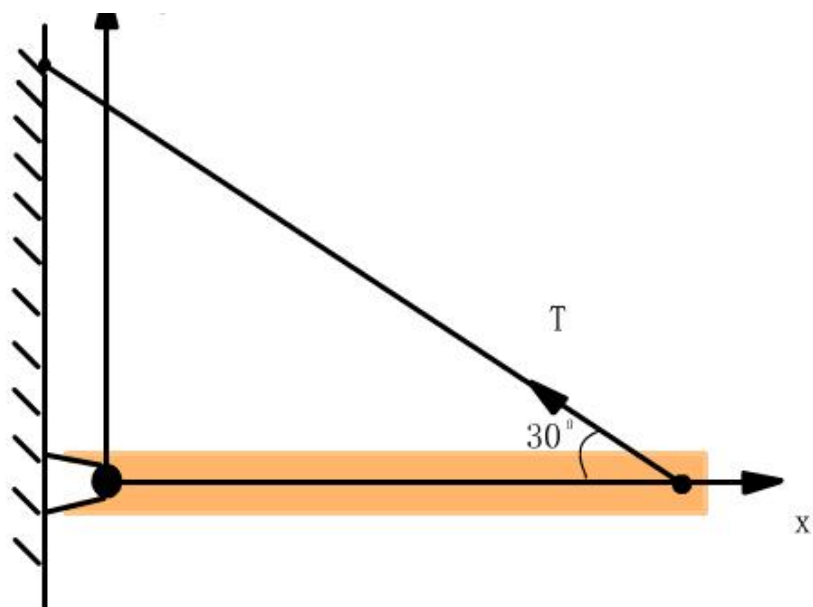


图 3-11



平面一般力系的平衡



解 取横梁AB为研究对象，画受力图如图3-11 (b)所示。

列平衡方程并求解

$$\sum M_A(\mathbf{F}) = 0 \quad F_B l \sin \alpha - G_2 x - G_1 \frac{l}{2} = 0 \quad +F_Q(l-x) - F_{Ay}l = 0$$

$$F_B = \frac{2G_2 x + G_1 l}{2l \sin \alpha} = \frac{2 \times 12 \times 4 + 4 \times 6}{2 \times 6 \sin 30^\circ} = 20 \text{ kN}$$

$$\sum F_x = 0 \quad F_{Ax} - F_B \cos \alpha = 0, \quad F_{Ax} = F_B \cos \alpha = 17.32 \text{ kN}$$

§ 3.4 物体系统的平衡

前面讨论了单个刚体的平衡问题。但在工程实际中经常需求解若干刚体用一定方式连接起来的物体系统的平衡问题，简称**物系的平衡问题**。对于这类问题，在受力分析时应注意内力和外力。所谓内力就是物体系统内物体与物体之间的相互作用力；而外力是研究对象以外的其它物体对研究对象作用的力。对于同一物体系统，选不同物体为研究对象时，内力和外力是相对的，是随所选研究对象的不同而改变的。根据作用与反作用定律，内力总是成对出现的，因此在分离体上只画外而不画内力。

当物体系统平衡时，组成该系统的每一物体都处于平衡，所以，可以取整个系统为研究对象，也可以取其中某个物体或某几个物体为研究对象，这就要根据具体情况以便于求解为原则来适当的选取。因此，如何根据解题的需要正确选取研究对象，就成为求解物体系统平衡问题是一个很重要的问题。

例 3-6 如图 3-12 所示曲柄连杆机构，由曲柄 OA、连杆 AB 和滑块 B 组成，已知作用在滑块上的力 $F=10\text{kN}$ ，如不计各构件的自重和摩擦，求作用在曲柄上的力偶矩 M 多大时方可保持机构平衡。

解 (1)取滑块 B 为研究对象, 画受力图如图所示, 列平衡方程

$$\sum F_x = 0 \quad F_{AB} \cos 30^\circ - F = 0$$

$$F_{AB} = \frac{F}{\cos 30^\circ} = 20 \text{ kN}$$

(2)取曲柄 OA 为研究对象, 画受力图如图所示, 列平衡方程

$$\sum M_O(F) = 0$$

$$F'_{AB} \cos 30^\circ \times 10 + F'_{AB} \sin 30^\circ \times 10 - M = 0$$

$$M = F'_{AB} \times 10 \times (\cos 30^\circ + \sin 30^\circ)$$

$$= 20 \times 10 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \right)$$

$$= 273.2 \text{ kN} \cdot \text{cm}$$

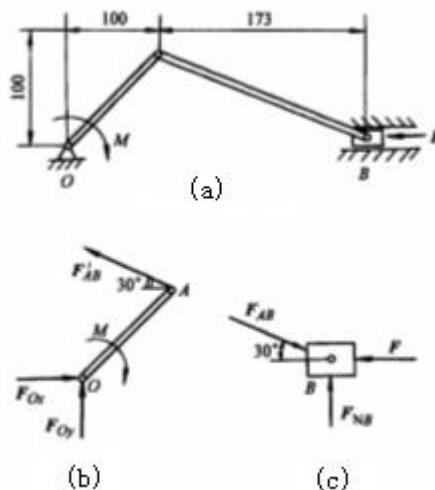


图 3-12

例 3-7 复合梁在铰 B 处用铰链连接, 其上作用有力偶矩为 M 的集中力偶和集度为 q 的均布载荷。已知 l、M、q, 试求固定端 A 和活动铰链 C 的约束力。

解 在整体受力图上有 4 个未知力, 如图 3-13 所示, 梁 AB 受力图上有 5 个未知反力, 如图 3-13 所示, 而梁 BCD 的受力图上仅有三个未知反力, 如图所示, 故先取梁 BCD 为研究对象, 求出 F_{NC}。

列平衡方程

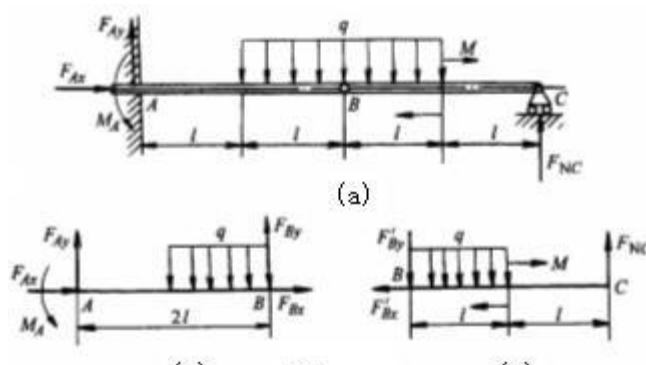
$$\sum M_B(F) = 0$$

$$F_{NC} \times 2l - M - \frac{ql}{2} = 0$$

$$F_{NC} = \frac{M}{2l} + \frac{ql}{4}$$

再取整体为研究对象

列平衡方程



$$\sum F_x = 0 \quad F_{Ax} = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad F_{Ay} + F_{MC} - 2ql = 0$$

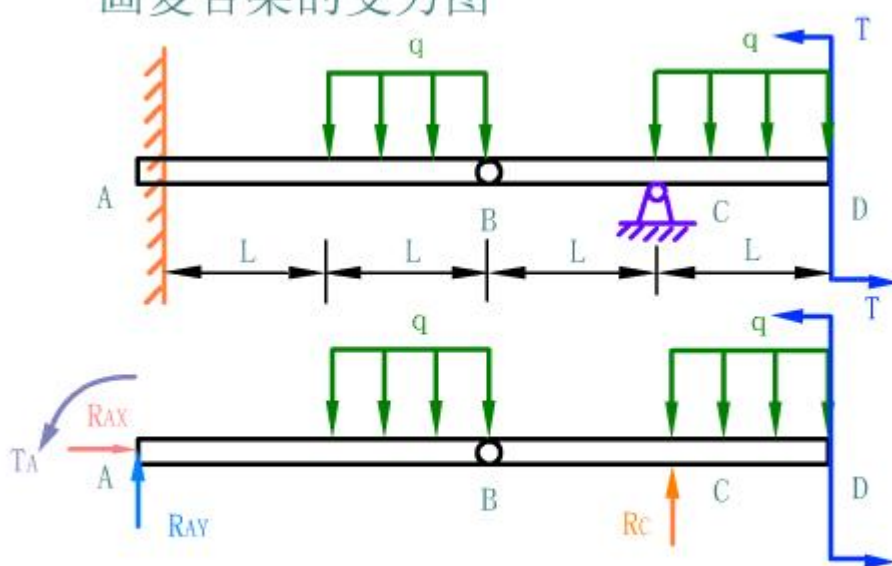
$$F_{Ay} = \frac{7}{4}ql - \frac{M}{2L}$$

$$\sum M_k(F) = 0$$

$$M_A - M - 4ql^2 + 4F_{MC}l = 0$$

$$M_A = 3ql^2 - M$$

画复合梁的受力图



例 3-8 试求如图 3-14 所示的桁架中 4、5、6 杆的内力，已知 $F_1=40\text{kN}$ ， $F_2=10\text{kN}$ 。

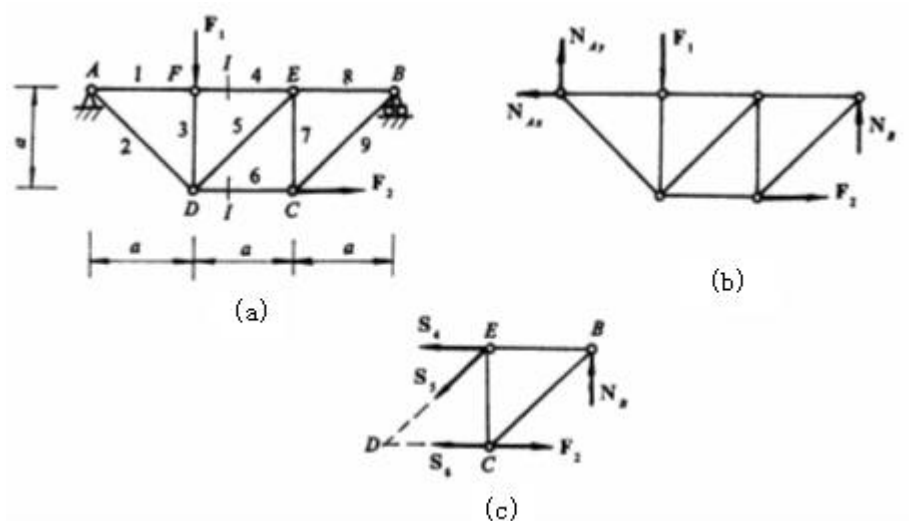
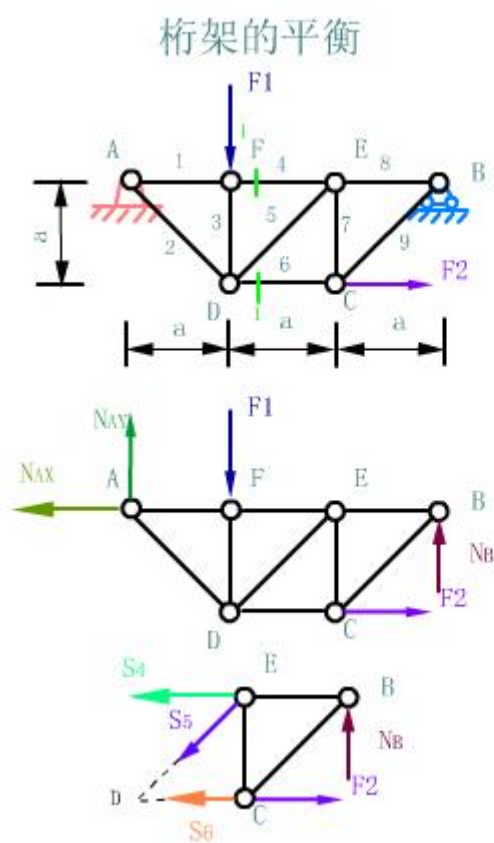


图 3-14



解 取桁架整体为研究对象，受力分析如图 3-14(b)所示。先求支座反力，列平衡方程

$$\sum F_x = 0, \quad F_2 - N_{Ax} = 0, \quad N_{Ax} = 10 \text{ kN}$$

$$\sum M_A(F) = 0, \quad 3\alpha N_B + F_2\alpha - F_1\alpha = 0, \quad N_B = 10 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0, \quad N_{Ay} + N_B - F_1 = 0, \quad N_{Ay} = 30 \text{ kN}$$

再求 4、5、6 杆的内力。假想用 I—I 截面将 4、5、6 杆截断，取桁架右半部分为研究对象，受力图如图 3-14(c) 所示

$$\sum M_D(F) = 0, \quad S_4 \cdot \alpha + N_B \cdot 2\alpha = 0, \quad S_4 = -20 \text{ kN}$$

$$\sum M_E(F) = 0, \quad F_2 \cdot \alpha + N_B \cdot \alpha - S_6 \cdot \alpha = 0, \quad S_6 = 20 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0, \quad N_B - S_5 \sin 45^\circ = 0, \quad S_5 = 14.14 \text{ kN}$$

§ 3.5 空间任意力系平衡问题的平面解法

若作用在物体上的空间力系是平衡的，则此力系在任意一平面上的投影也必然是相互平衡的。这样，我们就可以把空间力系的平衡问题转化为三个平面力系的平衡问题来求解，这种方法特别适合解决轴类零件的空间受力平衡问题。

下面通过例题说明具体解法。

【例】如图 3-15 所示的齿轮中，已知在右端端面上传递的力偶矩 $M=20 \text{ N} \cdot \text{m}$ ，齿轮的压力角 $\alpha = 20^\circ$ ，齿轮与齿轮轴的各部分尺寸 $r=80 \text{ mm}$ ， $a=300 \text{ mm}$ ， $b=250 \text{ mm}$ ， $c=60 \text{ mm}$ ，试求齿轮轴在平衡时齿轮的法向力和轴承 AB 的约束力。

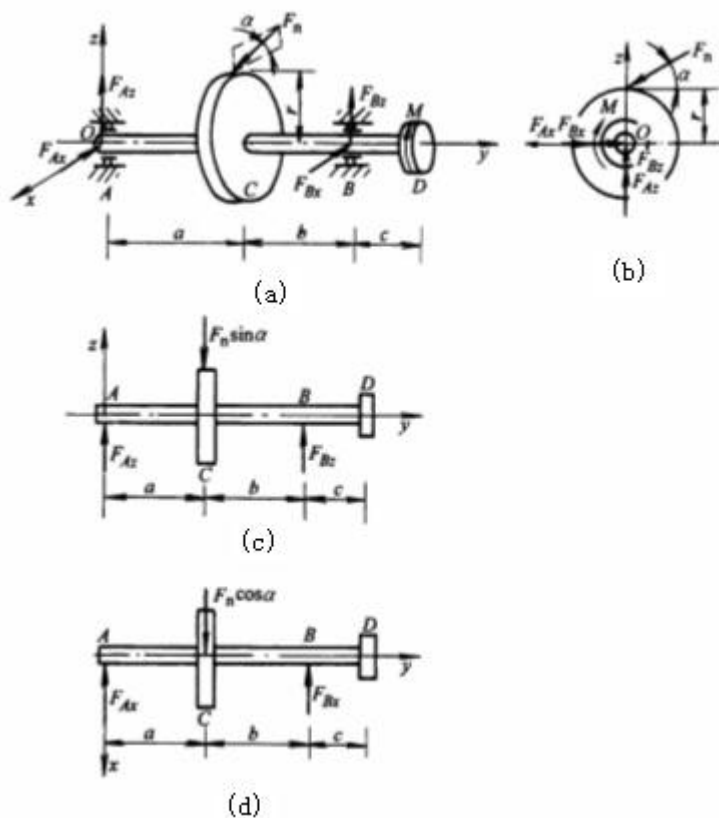


图 3-15

解 取齿轮轴为研究对象，画受力图如图 3-15(a) 所示。

将此空间力系向三个坐标平面投影，得到如图 3-15(b)、(c)、(d) 所示的三个平面力系。

列平衡方程，一般可从符合可解条件的平面解起。

Oxz 平面

$$\sum M_A(F) = 0 \quad F_n r \cos \alpha - M = 0$$

$$F_n = \frac{M}{r \cos \alpha} = \frac{20}{8 \times 10^{-3} \times \cos 30^\circ} = 266.04 \text{ N}$$

Ayz 平面

$$\sum M_A(F) = 0 \quad F_{Bx}(a+b) - aF_n \sin \alpha = 0$$

$$F_{Bx} = \frac{aF_n \sin \alpha}{a+b} = \frac{300 \times 10^{-3} \times 266.04 \times \sin 20^\circ}{(300+250) \times 10^{-3}} = 49.63 \text{ N}$$

$$\sum F_x = 0 \quad F_{Ax} - F_n \sin \alpha + F_{Bx} = 0$$

$$F_{Ax} = F_n \sin \alpha - F_{Bx} = (266.04 \times \sin 20^\circ - 49.63) = 41.63 \text{ N}$$

Axy 平面

$$\sum M_A(F) = 0 \quad F_{Bx}(a+b) - aF_n \cos \alpha = 0$$

$$F_{Bx} = \frac{aF_n \cos \alpha}{a+b} = \frac{300 \times 10^{-3} \times 266.04 \times \cos 20^\circ}{(300+250) \times 10^{-3}} = 113.64 \text{ N}$$

$$\sum F_x = 0 \quad -F_{Ax} + F_n \cos \alpha - F_{Bx} = 0$$

$$F_{Ax} = F_n \cos \alpha - F_{Bx} = (266.04 \times \cos 20^\circ - 136.36) = 113.64 \text{ N}$$

§ 3.6 摩擦与自锁

本章将介绍滑动摩擦的概念及其考虑摩擦的平衡现象，摩擦角和自锁现象。

一. 滑动摩擦

两个相互接触的物体，当他们之间有相对滑动或相对滑动趋势时，在接触面之间产生彼此阻碍运动的力。这种阻力称为滑动摩擦力。

设重为 W 的物块受以水平力 F_T 的作用，当力 F_T 由零逐渐增大时，物块 A 由静止变为滑动。下面我们分别讨论有相对滑动趋势、临界状态和已经相对滑动三种状态的滑动摩擦力。

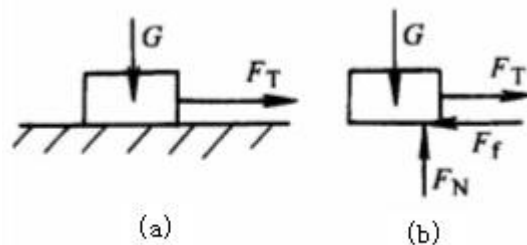


图 3-16

1. 静滑动摩擦力 当力 F_T 由零逐渐增加但不超过某数值 F_{\max} 时。物块 A 不会滑动，仍处于静止状态。由平衡条件可知，这时支撑面对物块除作用一法向反

力 F_N 外, 还有一个阻碍物块滑动的切向反力, 即静滑动摩擦力, 简称静摩擦力, 用符号 F_f 表示。其大小由平衡方程确定, 即

$$\sum F_x = 0, \quad F_T - F_f = 0, \quad F_f = F_T$$

2. 最大静滑动摩擦力 当 F_T 继续增加而达到一定数值 F_{\max} 时, 物块处于将要滑动而未滑动的临界状态。这时只要力稍大一点, 物块立即开始滑动。这说明当物块处于平衡的临界状态时, 静摩擦力达到了最大值, 称最大静滑动摩擦力, 用 F_{\max} 表示。如果 F_T 再继续增大, 但静摩擦力不会再随之增加, 物块将失去平衡而滑动, 因此, 静摩擦力并不随主动力 F_T 的增大而无限增大, 即

$$0 \leq F_f \leq F_{\max}$$

大量实验证明: 最大静滑动摩擦力 F_{\max} 的大小与两物块间的正压力成正比, 即

$$F_{\max} = \mu_s F_N$$

此式称为静滑动摩擦定律, 又称库仑摩擦定律。式中比例常数 μ_s 称为静摩擦因数。静摩擦因数 μ_s 与接触物块的材料及接触面的粗糙度、温度、湿度等因素有关, 其数值可从有关的工程手册中查到。

3. 动滑动摩擦力 当静滑动摩擦力达到最大值时, 若 F_T 继续增加, 物块 A 开始滑动, 此时物体接触面之间仍作用阻碍其相对滑动的阻力, 即动滑动摩擦力, 简称动摩擦力, 用符号 F'_f 表示。

大量实验证明: 动摩擦力 F'_f 的大小与两物块间的正压力成正比, 即

$$F'_f = \mu F_N$$

此式称为动摩擦定律。式中 μ 称为动摩擦因数。它也决定于接触物体的材料及接触面状况, 且与接触点的相对滑动速度有关, 其数值可从有关的工程手册中查到。

实践证明, 一般情况下, 动摩擦因数小于静摩擦因数, 故 F'_f 略小于 F_f 。

二. 摩擦角自锁

1. 摩擦角 在图 3-17 中, 将支撑面对物块的法向反力 F_N 和切向反力 F_f 合成, 即 $F_R = F_N + F_f$, 此矢量 F_R 称为支撑面的全反力, 设 F_R 与接触面法线的夹角为 ϕ 。相应的将主动力 W 与 F_T 也和成一全反力 F_Q , 设 F_Q 与接触面法线的夹角为 α , 于是物块在主动力 F_Q 和全反力 F_R 的作用下平衡, 此时, $\alpha = \phi$ 。因为静摩擦力是有界值, 即 $0 \leq F_f \leq F_{\max}$, 所以 ϕ 也是有界值, 即 $0 \leq \phi \leq \phi_m$, ϕ_m 为物块处于临界平衡状态时, 全反力与接触面法线的最大夹角, 称为摩擦角, 即

$$\tan \Phi_m = \frac{F_{\max}}{F_N} = \mu$$

即摩擦角的正切等于静摩擦因数。可见摩擦角与静摩擦因数一样，也是表示摩擦性质的物理量。

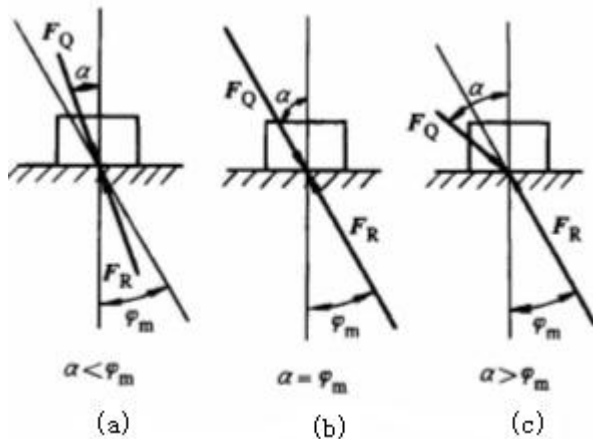


图 3-17

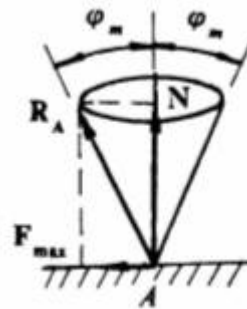


图 3-18

2. 自锁 物块平衡时，因 $0 \leq F_f \leq F_{\max}$ ，则 $0 \leq \phi \leq \phi_m$ 即全反力与法线间的夹角 ϕ 在零与摩擦角 ϕ_m 之间变化。由于静摩擦力不可能超过最大值，因此，全反力的作用线也不能超出摩擦角以外，即全反力必在摩擦角之内。在图 3-18 中，因主动力的合力 F_Q 与全反力 F_R 共线、反向、等值，故 $\alpha = \phi$ ，所以

$$0 \leq \alpha \leq \phi_m$$

上式表明，作用于物体上的全部主动力的合力 F_Q ，不论其大小如何，只要起作用线与接触面法线的夹角 α 小于或等于摩擦角（即 F_Q 作用在摩擦角之内），物体保持静止。这种现象称为自锁。

3. 考虑摩擦时的平衡问题

求解有摩擦时物体的平衡问题，其方法与步逐与前面所述相同，所不同的是：

- (1) 在受力图上必须考虑摩擦力，摩擦力的方向与相对滑动趋势的方向相反。
- (2) 摩擦力是一个未知量。解题时，除列出平衡方程外，还需要列出补充方程 $F_f \leq \mu_s F_N$ ，补充方程的数目与摩擦力的数目相同。不过，由于 F_f 是一个范围值，故问题的解答也是一个范围值，称为平衡范围。在临界状态时，补充方程取等号，所得之解也一定是平衡范围的一个临界值。

例 3-10 一物块放在倾角为 α 的斜面上，如图 3-19 所示。物块与斜面间的摩擦因数为 f_s ，试分析物块在重力 Q 作用下不沿斜面下滑的条件。

解 使物块下滑的力为 $Q \sin \alpha$ ，而阻止其下滑的最大力为 F_{\max} ，

$$F_{\max} = f_s N = f_s Q \cos \alpha。$$

要使物块不下滑，必须

$$Q \sin \alpha \leq f_s Q \cos \alpha$$

即 $\tan \alpha \leq f_s$

因为 $f_s = \tan \varphi_m$

所以 $\alpha \leq \varphi_m$

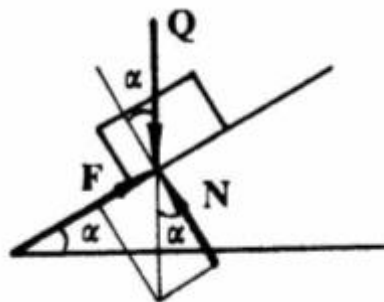
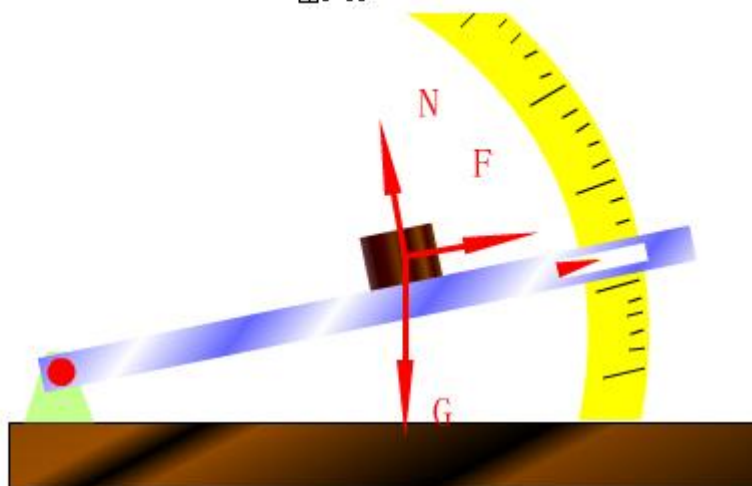


图 3-19

考虑摩擦时的平衡



例 3-11 制动器的构造如图 3-20 所示，已知重物重 $W=500\text{N}$ ，制动轮与制动块间的静摩擦因数 $f_s=0.6$ 。 $R=250\text{mm}$ ， $r=150\text{mm}$ ， $a=1000\text{mm}$ ， $b=300\text{mm}$ ， $h=100\text{mm}$ ，求制动鼓轮转动所需的最小力 F 。

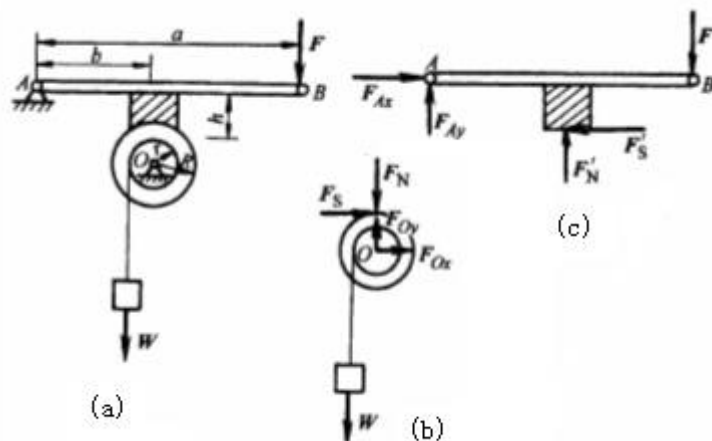


图 3-20

解

取鼓轮为研究对象，画受力图如图 3-20(b) 所示。

$$\sum M_O(F) = 0 \quad Wr - F_S R = 0$$

列平衡方程

再取杆 AB (包括制动块)

为研究对象，画受力图如图 3-20(c) 所示。列平衡方程

$$\sum M_A(F) = 0 \quad F'_N b - F'_S h - F a = 0$$

注意 $F'_N = F_N$, $F'_S = F_S$ 并考虑平衡的临界状态，由静摩擦定律有

$$F_S = F_{\max} = f_s F_N$$

解得 $F = 120\text{N}$

三. 滚动摩擦简介

利用滚动代替滑动省力，这是人们早已知道的事实。搬运重物时，若在重物底下垫滚轴，则要比将重物直接放在地面上推动省力。在工程实际中，车辆采用车轮，机器采用滚动轴承，也是为了减轻劳动强度，提高劳动效率。在水平面上有一轮子重为 G ，半径为 r ，当轮子中心受一水平拉力 FT 作用，若 FT 力不大时，和轮子仍保持静止，此时轮与地面接触处都发生变形。轮与地面接触处受力分布作用。将这些力向轮子的最低点 A 简化，得一力 (将此力分解为沿接触面的切向分力 Ff 和法向分力 FN) 和一力偶 Mf ，这一阻碍轮子滚动的约束力偶称为滚动摩擦力偶，滚动摩擦力偶的转向与轮子的滚动趋势相反。

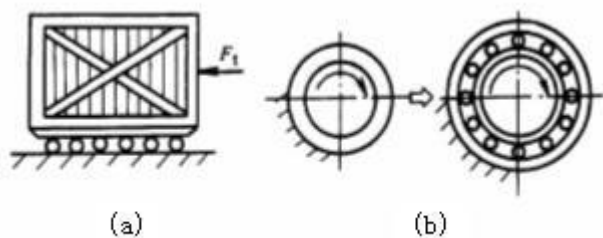


图 3-21

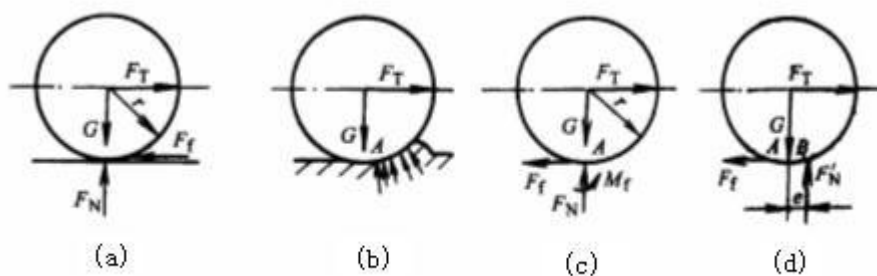
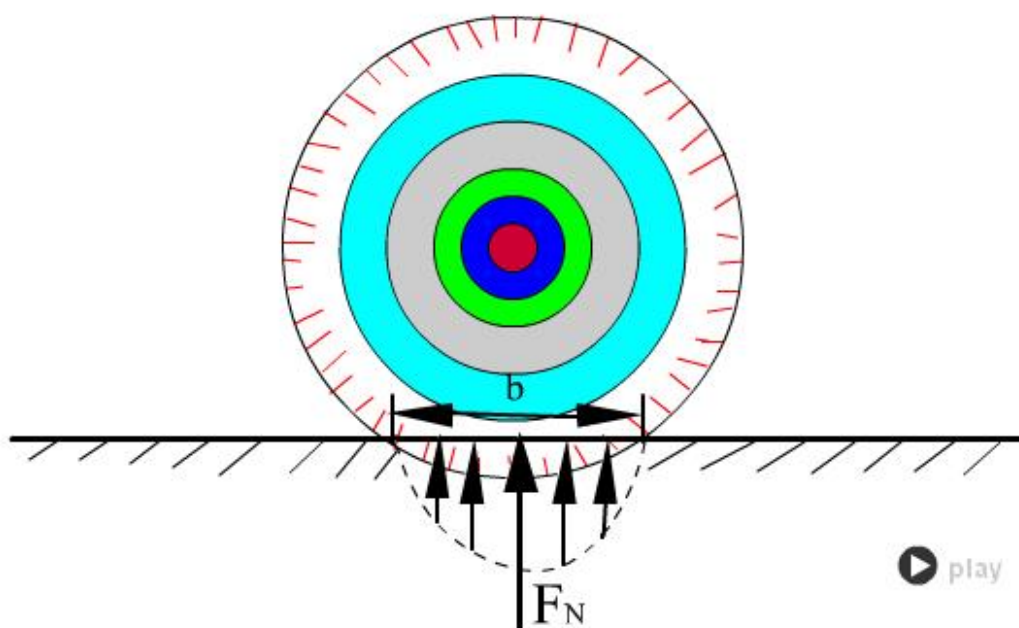


图 3-22

汽车轮胎集中力



与静滑动摩擦力的性质相似，滚动摩擦力偶矩随主动力的变化而变化，当主动力偶 (F_T 、 F_f) 的力偶矩增大到一定值时，轮子处于将要滚动的临界平衡状态，滚动摩擦力偶矩 M_f 达到最大值 M_{fmax} 。由此可见，滚动摩擦力偶矩的大小在零到最大值之间。

$$0 \leq M_f \leq M_{f\max}$$

实验证明，最大滚动摩擦力偶矩 $M_{f\max}$ 与支撑面的正压力成正比，即

$$M_{f\max} = \delta F_N$$

这就是滚动摩擦定律。式中 δ 称为滚动摩擦系数， δ 是一个具有长度单位的系数，单位一般用 mm。滚动摩擦系数由实验测定，它与滚子和支撑面的材料硬度、湿度等因数有关。

常用材料的滚动摩擦系数

材料名称		材料名称	
铸铁与铸铁	0.05	淬火钢与淬火钢	0.01
木材与钢	0.3~0.4	轮胎与路面	2~10
木材与木材	0.5~0.8	软钢与软钢	0.05

本章重点及难点

1. 力的平移定理

2. 平面一般力系的简化

(1) 简化结果 简化为一主矢量和主矩

主矢量 F_R' $F_R' = \Sigma F' = \Sigma F$ 与简化中心位置无关

主矩 M_O $M_O = \Sigma M_O(F)$ 与简化中心位置有关

(2) 简化结果分析

$F_R' = 0, M_O \neq 0$ 合力偶，合力偶矩与简化中心无关。

$F_R' \neq 0, M_O = 0$ 合力作用线通过简化中心。

$F_R' \neq 0, M_O \neq 0$ 合力 F_R 的作用线到简化中心 O 的距离 $d = \left| \frac{M_O}{F_R'} \right|$

$F_R' = 0, M_O = 0$ 力系平衡

3. 平面一般力系的平衡方程

(1) 基本形式

$$\begin{aligned}\sum F_x &= 0 \\ \sum F_y &= 0 \\ \sum M_O(F) &= 0\end{aligned}$$

(2) 二矩式

$$\begin{aligned}\sum F_x &= 0 \\ \sum M_A(F) &= 0 \\ \sum M_B(F) &= 0\end{aligned}$$

其中 A、B 两点的连线不能与 Ox 轴垂直。

(3) 三矩式

$$\begin{aligned}\sum M_A(F) &= 0 \\ \sum M_B(F) &= 0 \\ \sum M_C(F) &= 0\end{aligned}$$

其中 A、B、C 三点不能在一条直线上。

4. 平面一般力系解题步骤

- (1) 据题意，选取适当的研究对象；
- (2) 受力分析并画受力图；
- (3) 选取坐标轴。坐标轴应与较多的未知反力平行或垂直；
- (4) 列平衡方程，求解未知量。列力矩方程时，通常选未知力较多的交点为矩心；
- (5) 校核结果。

5. 求解物体系统平衡问题的步骤

- (1) 适当选取研究对象，画出个研究对象的受力图；
- (2) 分析各受力图，确定求解顺序，并根据选定的顺序逐个选取研究对象求解。

6. 摩擦和自锁

滑动摩擦力是两个相互接触的物体,当它们之间有相对滑动或相对滑动趋势时,在接触面之间产生彼此阻碍运动的力。前者称静摩擦力,后者称动摩擦力。

(1) 静摩擦力的方向与接触面间相对滑动趋势相反,其大小随主动力改变,应根据平衡方程确定。当物块处于临界平衡状态时,静摩擦力达到了最大值,所以 $0 \leq F_f \leq F_{\max}$ 。而 $F_{\max} = \mu_s F_N$ 。

(2) 动摩擦力的方向与接触面间相对滑动方向相反,其大小 $F'_f = \mu F_N$ 。

(3) 摩擦角 ϕ $F_R = F_N + F_f$ 称为全反力,当 $F_f = F_{\max}$ 时,全反力与接触面法线的最大夹角称为摩擦角 ϕ_m ,且有 $\tan \phi_m = \mu$ 。

(4) 自锁 当 $\alpha \leq \phi_m$ 时,无论主动力多大,物体始终能保持平衡,这种现象称为自锁。

(5) 考虑摩擦时的平衡问题 除满足平衡条件外,摩擦力还必须满足 $0 \leq F_f \leq F_{\max}$,物体处于临界平衡状态时, $F_f = F_{\max} = \mu_s F_N$ 。

第四章 材料力学基本知识

构件的承载能力

为保证构件正常工作,构件应具有足够的能力负担所承受的载荷。因此,构件应当满足以下要求:

1、 **强度要求**: 即构件在外力作用下应具有足够的抵抗破坏的能力。在规定的载荷作用下构件当然不应破坏,包括断裂和发生较大的塑性变形。例如,冲床曲轴不可折断;建筑物的梁和板不应发生较大塑性变形。强度要求就是指构件在规定的使用条件下不发生意外断裂或塑性变形。

2、 **刚度要求**: 即构件在外力作用下应具有足够的抵抗变形的能力。在载荷作用下,构件即使有足够的强度,但若变形过大,仍不能正常工作。例如,机床主轴的变形过大,将影响加工精度;齿轮轴变形过大将造成齿轮和轴承的不均匀磨损,引起噪音。刚度要求就是指构件在规定的使用条件下不发生较大的变形。

3、 **稳定性要求**: 即构件在外力作用下能保持原有直线平衡状态的能力。承受压力作用的细长杆,如千斤顶的螺杆、内燃机的挺杆等应始终维持原有的直线平衡状态,保证不被压弯。稳定性要求就是指构件在规定的使用条件下不产生丧失稳定性破坏。

如果构件的横截面尺寸不足或形状不合理,或材料选用不当,不能满足上述要求,将不能保证工程结构或机械的安全工作。相反,如果不恰当的加大构件横截面尺寸或选用高强材料,这虽满足了上述要求,却使用了更多的材料和增加了成本,造成浪费。

我们可以作出以下结论：**材料力学是研究各类构件（主要是杆件）的强度、刚度和稳定性的学科，它提供了有关的基本理论、计算方法和实验技术，使我们能合理地确定构件的材料和形状尺寸，以达到安全与经济的设计要求。**

在工程实际问题中，一般来说，构件都应具有足够的承载能力，即足够的强度、刚度和稳定性，但对具体的构件又有所侧重。例如，储气罐主要保证强度，车床主轴主要要求具有足够的刚度，受压的细长杆应该保持其稳定性。对某些特殊的构件还可能相反的要求。例如为防止超载，当载荷超过某一极限时，安全销应立即破坏。又如为发挥缓冲作用，车辆的缓冲弹簧应有较大的变形。

研究构件的承载能力时必须了解材料在外力作用下表现出的变形和破坏等方面的性能，及材料的力学性能。材料的力学性能由实验来测定。经过简化得出的理论是否可信，也要由实验来验证。此外，对于一些尚无理论结果的问题，需要借助实验方法来解决。所以，实验分析和理论研究同是材料力学解决问题的方法。

变形固体的基本假设

材料力学所研究的构件，由各种材料所制成，材料的物质结构和性质虽然各不相同，但都为固体。任何固体在外力作用下都会发生形状和尺寸的改变——即变形。因此，这些材料统称为变形固体。

变形固体的性质是很复杂的，在对用变形固体做成的构件进行强度、刚度和稳定性计算时，为了使计算简化，经常略去材料的次要性质，并根据其主要性质做出假设，将它们抽象为一种理想模型，作为材料力学理论分析的基础。下面是材料力学对变形固体常采用的几个基本假设：

连续性假设：假设在固体所占有的空间内毫无空隙地充满了物质。实际上，组成固体的粒子之间存在空隙，但这种空隙极其微小，可以忽略不计。于是可认为固体在其整个体积内是连续的。基于连续性假设，固体内的一些力学量（例如点的位移）既可用连续函数表示，并可采用无穷小的高等数学分析方法研究。

连续性不仅存在于变形前，同样适用于变形发生之后。既构件变形后不出现新的空隙，也不出现重叠。

均匀性假设：材料在外力作用下在强度和刚度方面所表现出的性能称为材料的力学性能。所谓的均匀性假设指材料的力学性能在各处都是相同的，与其在固体内的位置无关。即从固体内任意取出一部分，无论从何处取也无论取多少其性能总是一样的。

由此假设可以认为，变形固体均由同一均质材料组成，因而体内各处的力学性质都是相同的，并认为在其整个体积内毫无空隙地充满了物质。事实上，从固体的微观结构看，各种材料都是由无数颗粒（如金属中的晶粒）组成的，颗粒之间是有一定空隙的，而且各颗粒的性质也不完全一致。但由于材料力学是从宏观

的角度去研究构件的强度、刚度和稳定性问题，这些空隙远远小于构件的尺寸，而且各颗粒是错综复杂地排列于整个体积内，因此，由统计平均值观点看，各颗粒性质的差异和空隙均可忽略不计，而认为变形固体是均匀连续的。

各向同性假设：即认为材料沿各个方向的力学性质是相同的。具有这种属性的材料称为各向同性材料。例如钢、铜、铸铁、玻璃等，而木材、竹和轧制过的钢材等，则为各向异性材料。但是，有些各向异性材料也可近似地看作是各向同性的。

构件在外力作用下将发生变形，当外力不超过一定限度时，绝大多数构件在外力去掉后均能恢复原状。当外力超过某一限度时，则在外力去掉后只能部分地复原而残留一部分不能消失的变形。外力去掉后能消失的变形称为弹性变形，不能消失而残留下来的变形称为塑性变形。应该指出，工程实际中多数构件在正常工作条件下只产生弹性变形，而且这些变形与构件原有尺寸相比通常是很小的，所以，在材料力学中，大部分问题只限于对弹性变形的研究，并且在研究构件的平衡与运动时，变形的影响可以忽略不计。

综上所述，**材料力学是将物体看作均匀、连续、各向同性的变形固体，并且只限于研究微小的弹性变形的情况。**

内力、截面法和应力概念

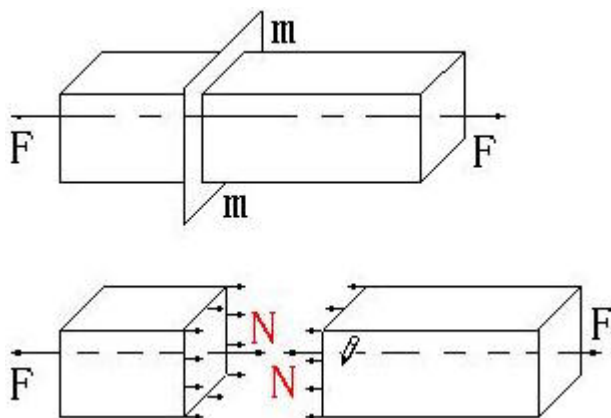
一、内力的概念

材料力学的研究对象是构件，对于所取的研究对象来说，周围的其他物体作用于其上的力均为外力，这些外力包括荷载、约束力、重力等。按照外力作用方式的不同，外力又可分为分布力和集中力。

构件即使不受外力作用，它的各质点之间本来就有相互作用的内力，以保持其一定的形状。材料力学所讨论的内力，是指**因外力作用使构件发生变形时，构件的各质点间的相对位置改变而引起的“附加内力”，即分子结合力的改变量。**这种内力随外力的改变而改变。但是，它的变化是有一定限度的，不能随外力的增加而无限地增加。当内力加大到一定限度时，构件就会破坏，因而内力与构件的强度、刚度是密切相关的。由此可知，内力是材料力学研究的重要内容。

二、截面法

截面法是材料力学中求内力的基本方法，是已知构件外力确定内力的普遍方法。



已知杆件在外力作用下处于平衡，求 m—m 截面上的内力，即求 m—m 截面左、右两部分的相互作用力。

首先假想地用一截面 m—m 截面处把杆件裁成两部分，然后取任一部分为研究对象，另一部分对它的作用力，即为 m—m 截面上的内力 N。因为整个杆件是平衡的，所以每一部分也都平衡，那么，m—m 截面上的内力必和相应部分上的外力平衡。由平衡条件就可以确定内力。例如在左段杆上由平衡方程

$$\sum F_x = 0 \quad N - F = 0 \quad \text{可得 } N = F$$

按照材料连续性假设，m—m 截面上各处都有内力作用，所以截面上应是一个分布内力系，用截面法确定的内力是该分布内力系的合成结果。这种将杆件用截面假想地切开以显示内力，并由平衡条件建立内力和外力的关系确定内力的方法，称为截面法。

综上所述，截面法可归纳为以下三个步骤：

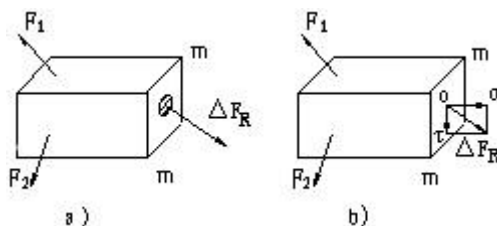
- 1、**假想截开** 在需求内力的截面处，假想用一截面把构件截成两部分。
- 2、**任意留取** 任取一部分为研究对象，将弃去部分对留下部分的作用以截面上的内力 N 来代替。
- 3、**平衡求力** 对留下部分建立平衡方程，求解内力。

三、应力的概念

用截面法确定的内力，是截面上分布内力系的合成结果，它没有表明该分布力系的分布规律，所以，为了研究相伴的强度，仅仅知道内力是不够的。例如，有同样材料而截面面积大小不等的两根杆件，若它们所受的外力相同，那么横截面上的内力也是相同的。但是，从经验知道，当外力增大时，面积小的杆件一定先破坏。这是因为截面面积小，其上内力分布的密集程度大的缘故。

内力在截面上的分布集度称为应力。以分布在单位面积上的内力来衡量。

如图所示，在杆件横截面 $m-m$ 上围绕一点 K 取微小面积 ΔA ，并设 ΔA 上分布内力的合力为 ΔF_R 。 ΔF_R 的大小和方向与所取 K 点的位置和面积 ΔA 有关。



将 ΔF_R 与 ΔA 的比值称为微小面积 ΔA 上的平均应力，用 p_m 表示，即：

$$p_m = \frac{\Delta F_R}{\Delta A}$$

p_m 代表了 ΔA 上应力分布的平均集中程度。为了更精确地描述应力的分布情况，应使 $\Delta A \rightarrow 0$ ，由此得到平均应力的极限值 p ，即

$$p = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_R}{\Delta A}$$

p 称为截面 $m-m$ 上一点 K 处的应力。应力 p 的方向与内力 N 的极限方向相同，通常，它既不与截面垂直也不与截面相切。将应力 p 分解为垂直于截面的分量 σ 和相切于截面的分量 τ ，其中 σ 称为正应力， τ 称为切应力。在国际单位制中，应力单位是帕斯卡，简称帕 (Pa)。工程上常用兆帕 (MPa)，有时也用吉帕 (GPa)。

$$\begin{aligned} 1\text{Pa} &= 1\text{N}/\text{m}^2 \\ 1\text{MPa} &= 10^6\text{Pa} = 1\text{N}/\text{mm}^2 \\ 1\text{GPa} &= 10^9\text{Pa} = 1\text{KN}/\text{mm}^2 \end{aligned}$$

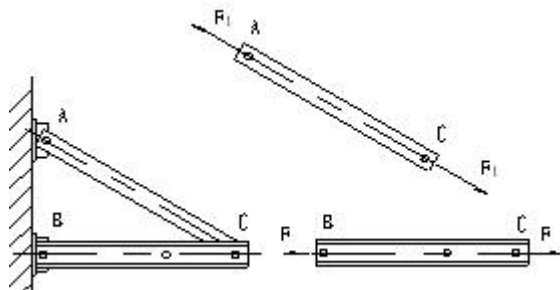
杆件变形的的基本形式

在机器或结构中，构件的形状是多种多样的。如果构件的纵向（长度方向）尺寸较横向（垂直于长度方向）尺寸大得多，这样的构件称为杆件。杆是工程中最基本的构件。如机器中的传动轴、螺杆、房屋中的梁和柱等均属于杆件。某些构件，如齿轮的轮齿、曲轴的轴颈等，并不是典型的杆件，但在近似计算或定性分析中也简化为杆。

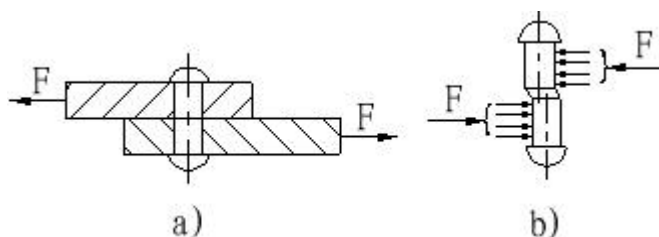
垂直于杆长的截面称为横截面，各横截面形心的连线称为轴线。轴线为直线，且各横截面相等的杆件称为等截面直杆，简称为等直杆。材料力学主要研究等直杆。

外力在杆件上的作用方式是多种多样的，当作用方式不同时，杆件产生的变形形式也不同。归纳起来，杆件变形的的基本形式有如下四种：

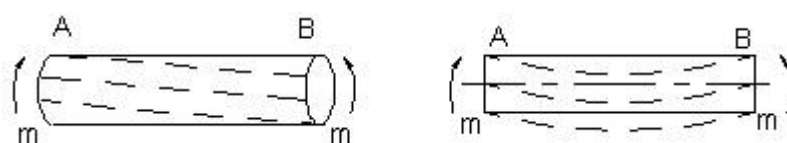
(1) 拉伸或压缩：图示简易吊车。在载荷 P 作用下，AC 杆受到拉伸，而 BC 杆受到压缩。这类变形形式是由大小相等、方向相反、作用线与杆件轴线重合的一对力引起的，表现为杆件的长度发生伸长或缩短。起吊重物的钢索、桁架的杆件、液压油缸的活塞杆等的变形，都属于拉伸或压缩变形。



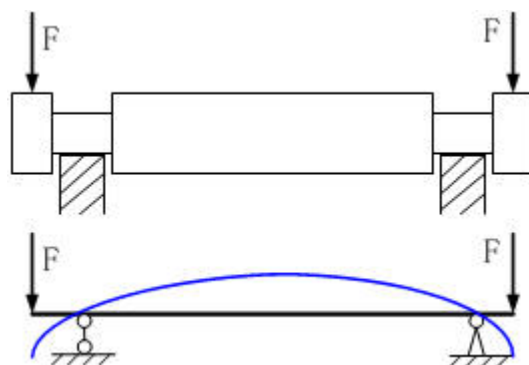
(2) 剪切：图示铆钉联接 a)，在 P 力作用下，铆钉受到剪切。这类变形形式是由大小相等、方向相反、相互平行的力引起的，表现为受剪杆件的两部分沿外力作用方向发生相对错动 b)。机械中常用的联接件，如键、销钉、螺栓等都产生剪切变形。



(3) 扭转：图示转轴 AB，在工作时发生扭转变形。这类变形形式是由大小相等、方向相反、作用面垂直于杆件轴线的两个力偶引起的，表现为杆件的任意两个横截面发生绕轴线的相对转动。汽车的传动轴、电机的主轴等，都是受扭杆件。



(4) 弯曲：图示梁的变形即为弯曲变形。这类变形形式是由垂直于杆件轴线的横向力，或由作用于包含杆轴的纵向平面内的一对大小相等、方向相反的力偶引起的。变形表现为杆件轴线由直线变为曲线。在工程中，受弯杆件是最常遇到的情况之一。桥式起重机的大梁、各种心轴以及车刀等的变形都属于弯曲变形。



还有一些杆件的变形比较复杂，可能同时发生几种基本变形。例如钻床立柱同时发生拉伸和弯曲两种基本变形；车床主轴工作时发生弯曲、扭转和压缩三种基本变形。几种基本变形的组合称为组合变形。我们将依次讨论四种基本变形的强度及刚度计算，然后再讨论组合变形。

小结

本章介绍了材料力学的研究对象和任务。

- 1、构件的承载能力包括强度、刚度和稳定性。
- 2、变形固体是理想化的力学模型，几个基本假设是材料力学研究的基础。
- 3、内力是由于外力引起的，是一个有限量。
- 4、截面法求解应力是材料力学的一个基本方法。
- 5、杆件的变形可以认为是四个基本变形的组合。

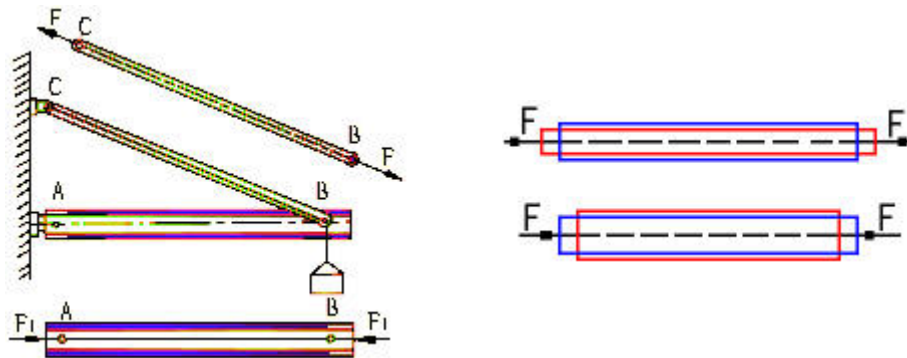
承受轴向拉伸或压缩的构件称为杆。分析杆在轴向拉压荷载作用下的内力、应力和变形以及杆的强度问题，具有典型性和普遍意义，从中可以得到分析基本构件内力、应力以及变形的总体概念与某些分析方法。

第五章 轴向拉伸与压缩

- 轴向拉伸与压缩概念
- 轴向拉伸与压缩时的内力（截面法、轴力与轴力图）
- 轴向拉伸与压缩时的应力（横截面和斜截面上的应力）
- 拉压杆的变形与虎克定律
- 材料在拉压时的力学性能
- 拉压杆的强度计算

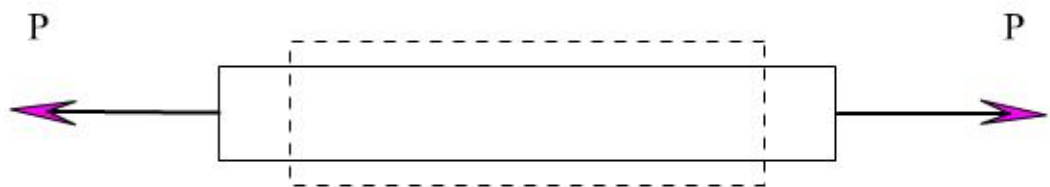
轴向拉伸和压缩的概念

工程结构和机械中，经常遇到承受拉伸或压缩的构件。例如，悬臂吊车的压杆 BC 及拉杆 AC。AC 杆受到沿轴线方向拉力的作用，沿轴线产生伸长变形；而 BC 杆则受到沿轴线压力的作用，沿轴线产生缩短变形。此外，内燃机中的连杆，建筑物桁架中的杆件均为拉或压杆。这些构件外形虽各有差异，加载方式也不尽相同，但都可见简化为右图所示的计算简图，图中虚线表示变形后的形状。



它们共同的受力特点是：作用在直杆两端的两个合外力大小相等，方向相反，且作用线与杆轴线相重合。在这种外力作用下，杆件的变形是沿轴线方向伸长或缩短。这种变形形式称为轴向拉伸或轴向压缩，这类杆件称为拉杆或压杆。

拉伸变形

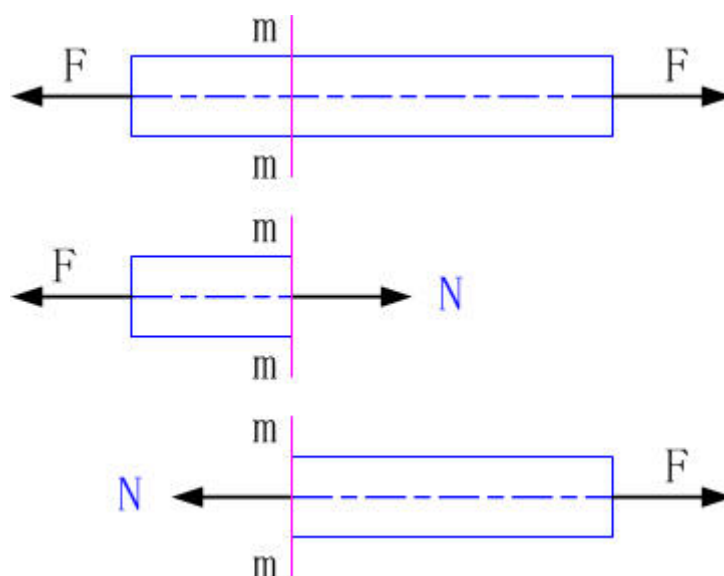


轴向拉伸和压缩时的内力

一、轴力

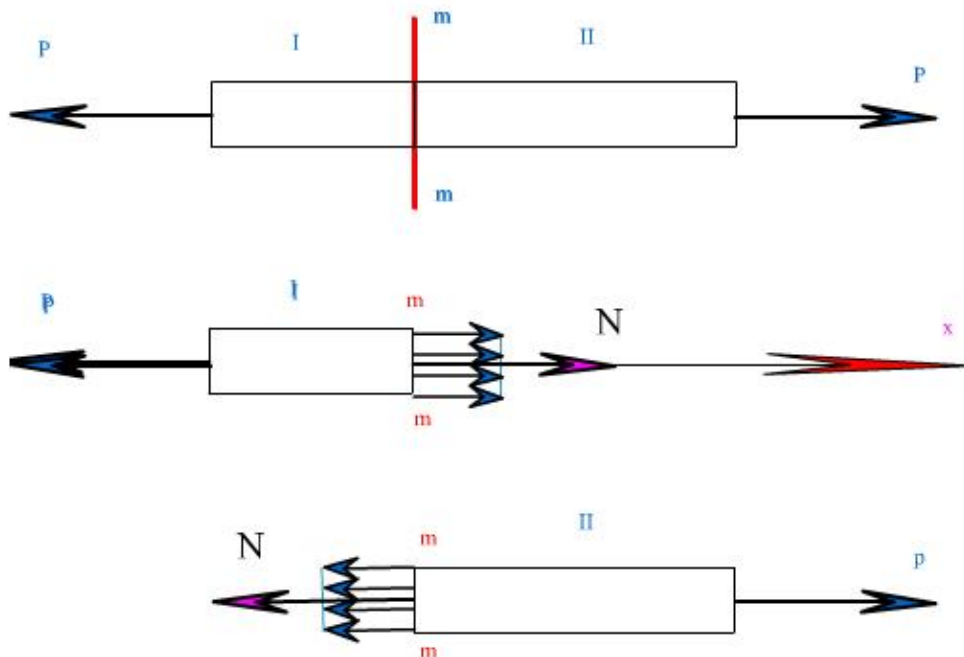
所谓内力是指当构件受外力作用而发生变形时，构件的一部分对另一部分的作用力。求解内力的普遍方法是截面法：假想截开、任意留取、平衡求力。

为了显示轴向拉伸或压缩杆件的内力，以横截面 $m-m$ 将一拉杆切为左、右两段（图 5—3）。在分离的横截面上，即有使杆件产生轴向变形的内力分量——轴力 N 。



现以左段为研究对象，列平衡方程 $\sum F_x = 0$ ，即得轴力 $N=F$ 。

式中， N 的作用线与杆的轴线一致，方向如图所示。由于在截开截面处，左右两侧截面上的内力互为作用力和反作用力，因此大小相等方向相反。为使左右两侧截面上的内力具有相同的正负号，必须规定轴力的正负。轴力的正负由杆的变形确定。当轴力的方向与横截面的外法线方向一致时，杆件受拉伸长，其轴力为正；反之，杆件受压缩短，其轴力为负。通常未知轴力按正向假设，由计算结果确定实际指向。

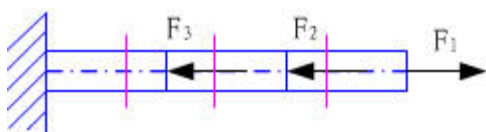


由此可知，杆件轴力的确定方法完全与静力分析的方法相同，而且在建立平衡方程时无需考虑杆件变形的形式。

二、轴力图

工程实际中，杆件所受外力可能很复杂，这时杆件各段的轴力将各不相同，这时需分段用截面法计算轴力。为了直观地表达轴力随横截面位置的变化情况，用平行于杆件轴线的坐标表示各横截面的位置，以垂直于杆轴线的坐标表示轴力的数值，所绘制的图形称为轴力图。

【例】 绘制如图直杆的轴力图。已知 $F_1=16\text{KN}$ ， $F_2=10\text{KN}$ ， $F_3=20\text{KN}$ 。



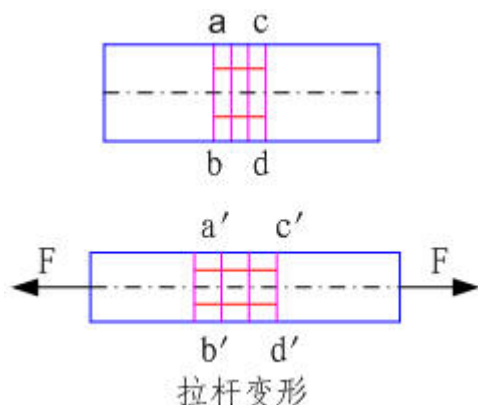
轴向拉伸和压缩时的应力

应力是指内力在截面上的分布集度，通常将应力分解为垂直于截面的分量正应力 σ 和相切于截面的分量切应力 τ 。

一、杆件轴向拉压时横截面上的正应力

为了求得横截面上任意一点的应力，必须了解内力在截面上的分布规律。

取一等截面直杆，在杆上画上与杆轴线垂直的横线 ab 和 cd，再画上与杆轴平行的纵向线，然后沿杆的轴线作用拉力 F 使杆件产生拉伸变形。



此时可以观察到：横线在变形前后均为直线，且都垂直于杆的轴线；纵线在变形后也保持直线，仍平行于杆的轴线，只是横线间距增大，纵向间距减小，所有正方形的网格均变成大小相同的长方形。根据杆件表面的变形情况可对杆件做出如下假设：

杆件的横截面在变形后仍保持为平面，且仍与杆的轴线垂直。这个假设称为平面假设。

由平面假设可以得出：

(1) 横截面上各点只产生沿垂直与横截面方向的变形，故横截面上只存在正应力；

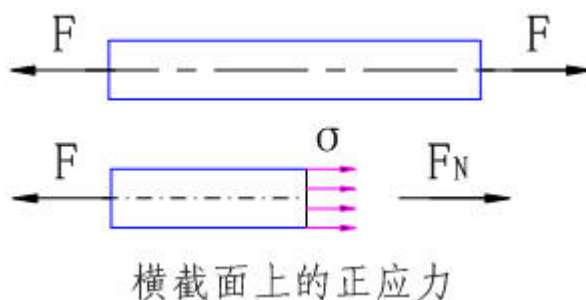
(2) 将杆件想象成无数的纵向纤维所组成，任意两横截面间的纵向纤维伸长均相等，即变形相同。

由材料的均匀连续性假设，可以推断每一根纤维所受内力相等，即同一横截面上的正应力处处相同。

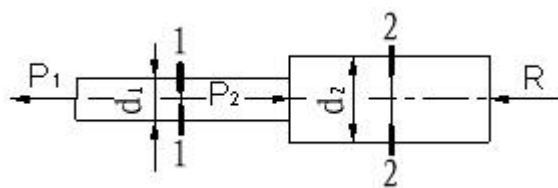
轴向拉压时横截面上的应力均匀分布，即横截面上各点处的应力大小相等，其方向与轴力一致，垂直于横截面，故为正应力，应力分布图形如图：

$$\sigma = \frac{F_N}{A}$$

式中，A 为杆横截面面积。正应力的正负号与轴力的正负相对应，即拉应力为正，压应力为负。



【例 5-2】 圆直杆的载荷 $P_1=20\text{kN}$ ， $P_2=50\text{kN}$ ，直径 $d_1=20\text{mm}$ ， $d_2=30\text{mm}$ 。试计算截面 1-1 和 2-2 的正应力。

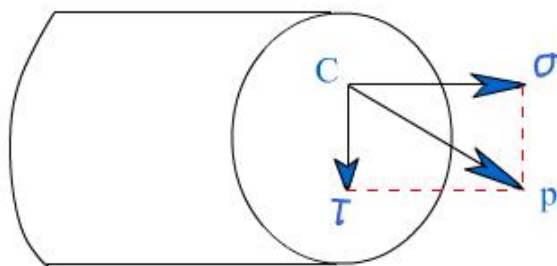


【查看解答】

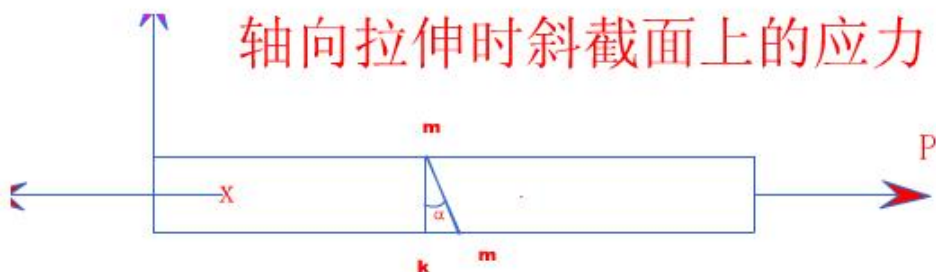
二、斜截面上的应力

横截面上的正应力，将作为拉（压）杆强度计算的依据，但由不同材料的拉伸、压缩试验表明，拉伸、压缩破坏不是都沿横截面发生的。例如铸铁压缩时沿着大约 45 度斜截面发生破坏。为了更全面地研究拉（压）杆的强度，应进一步讨论斜截面上的应力。

总应力



将斜截面应力分解成垂直于斜截面 $K-K$ 的正应力和相切于斜截面 $K-K$ 的切应力：



拉压杆的变形

杆件受轴向拉伸时产生变形，纵向尺寸增大，横向尺寸缩小。反之受轴向压缩时，纵向尺寸缩小，横向尺寸增大。因此，拉压杆的变形包括沿轴线的纵向变形和垂直于轴线的横向变形。

试验结果表明，当正应力 σ 不超过某一限度时，杆的绝对变形 Δl 与轴力 F_N 、杆长 l 成正比，与杆的横截面积 A 成反比，即

$$\Delta l \propto \frac{F_N l}{A} \quad \text{引入比例常数 } E, \text{ 得: } \Delta l = \frac{F_N l}{EA}$$

该式称为虎克定律。常数 E 称为材料的弹性模量，是材料固有的力学性质，和泊松比 ν 同为表征材料的弹性常数。对同一种材料， E 为常数。弹性模量具有应力的单位，常用 GPa 表示。分母 EA 称为杆的抗拉（压）刚度，它表示杆件抵抗拉伸（压缩）变形能力的大小。

将 $\sigma = \frac{F_N}{A}$ 和 $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$ 代入上式，则得虎克定律的另一表达式

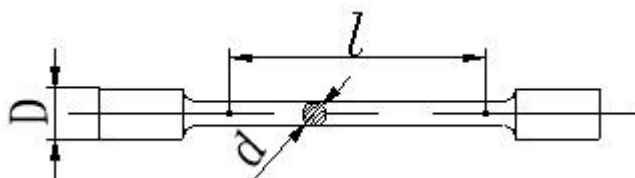
$$|\sigma| = E\varepsilon$$

由此，虎克定律又可简述为：若应力未超过某一极限值，则应力与应变成正比。

材料在拉压时的力学性能

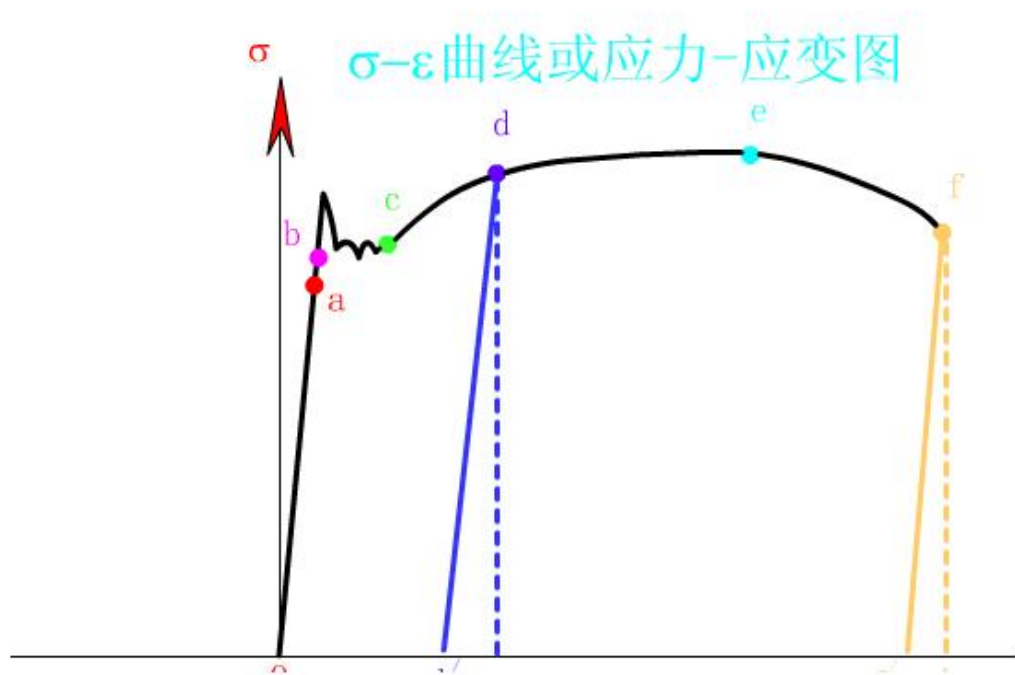
在外力作用下，构件内引起的应力，称工作应力。工作应力越大，构件破坏的可能性越大。但是，构件究竟是否破坏，还与构件材料的力学性能有关。材料的力学性能是指材料在外力作用下其强度和变形方面所表现出的性能。材料的力学性能由试验测定。

在室温下，以缓慢平稳的加载方式进行的拉伸试验，是确定材料力学性能的基本试验。试验在万能试验机上进行。为了便于比较不同材料的试验结果，金属常温拉伸试验的试件应按国家规定的试验标准进行加工。国家标准试件的形状如图 5—1 所示。1 称为标距，它与直径 d 可以有两种比例： $l=10d$ 和 $l=5d$ 。



一、低碳钢拉伸时的力学性能

低碳钢是工程上广泛使用的金属材料，它在拉伸时表现出来的力学性能具有典型性。低碳钢试件的应力—应变曲线如图所示。由图可见，整个拉伸过程大致可分为四个阶段。



1. 弹性阶段

图中 OA 为一直线段，这说明该段内应力和应变成正比，即遵循虎克定律。直线部分的最高点 A 所对应的应力值 称为比例极限。OA 直线的倾角为 α ，其正切值，即为材料的弹性模量。低碳钢的比例极限约为 200MPa，弹性模量约为 210GPa。

当应力超过比例极限后，图中 A 段已不是直线，虎克定律不再适用。但当应力值不超过 B 点所对应的应力时，如将外力卸去，试件的变形也随之全部消失，这种变形即为弹性变形，称为弹性极限。

比例极限和弹性极限的概念不同，但实际上 A 点和 B 点非常接近，通常对两者不作严格区分，统称为弹性极限。在工程应用中，一般均使构件在弹性范围内工作。

2. 屈服阶段

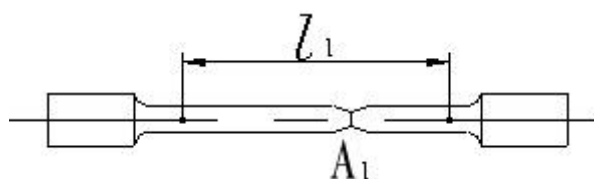
当应力超过弹性极限后，图上出现接近水平的小锯齿形波动段 BC，说明此时应力虽有小的波动，但基本保持不变，但应变却迅速增加，表现为材料暂时失去了抵抗外力的能力。这种应力变化不大而变形显著增加的现象称为屈服或流动。BC 段所对应的过程称为屈服阶段，屈服阶段的最低应力值 称为材料屈服点。低碳钢的屈服点 220~240MPa。在屈服阶段，如果试件表面光滑，可以看到试件表面有与轴线大约成 45° 的条纹，称为滑移线。材料在屈服阶段将产生较大的塑性变形，这对某些机械零件的正常工作是不允许的，所以屈服点是衡量材料强度的一个重要指标。

3. 强化阶段

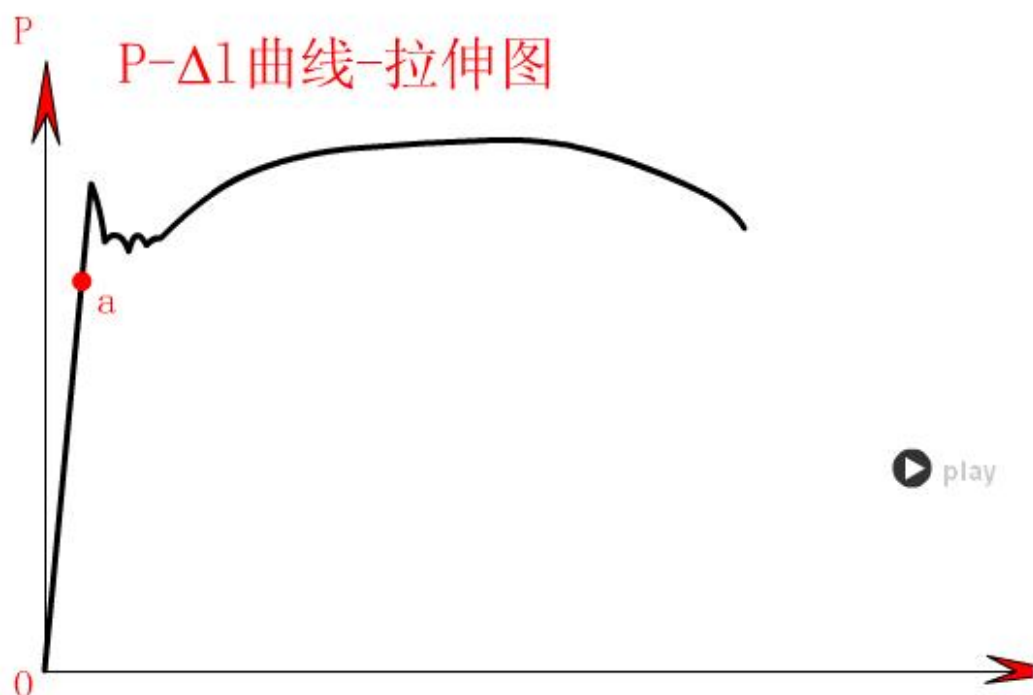
屈服阶段后，图上出现上凸的曲线 CD 段，这表明，若要使材料继续变形，必须增加应力，即材料又恢复了抵抗变形的能力，这种现象称为材料的强化，CD 段对应的过程称为材料的强化阶段。曲线最高点 D 所对应的应力值用 σ_b 表示，称为材料的抗拉强度，它规定了材料所能承受的最大应力，是衡量材料强度的另一个重要指标。低碳钢的抗拉强度 370~460MPa。

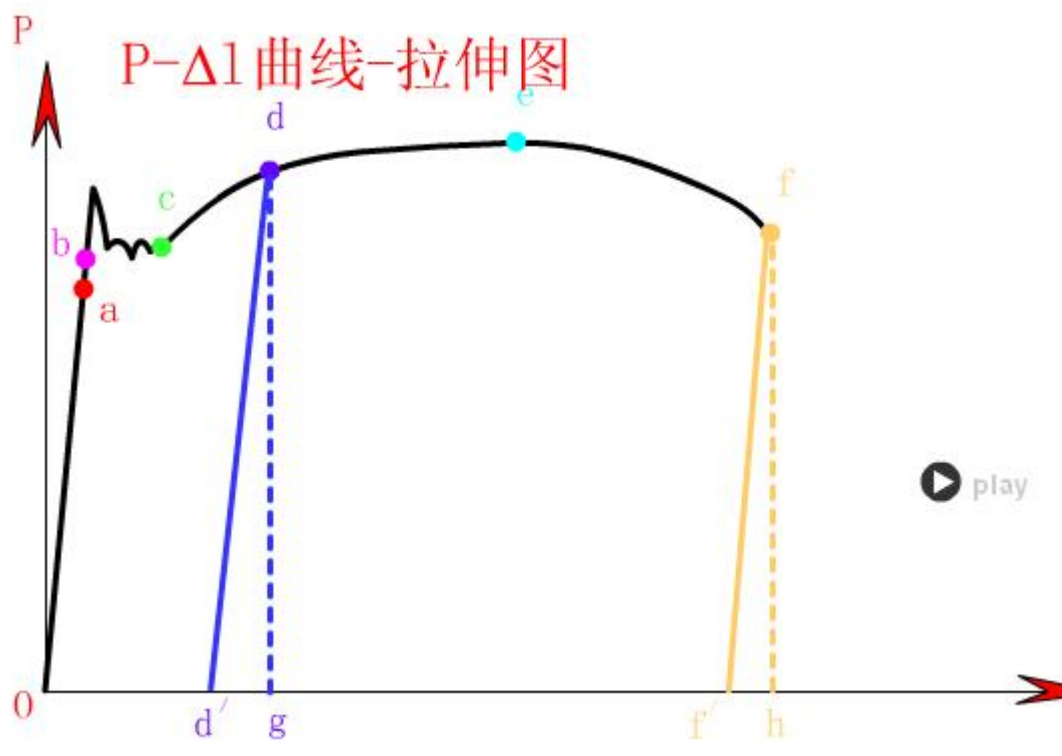
4. 缩颈断裂阶段

应力达到抗拉强度后，在试件较薄弱的横截面处发生急剧的局部收缩，出现缩颈现象。



综上所述，低碳钢拉伸是经历了弹性、屈服、强化和颈缩四个阶段。试件拉断后，弹性变形消失，会残留较大的塑性变形或称为残余变形。

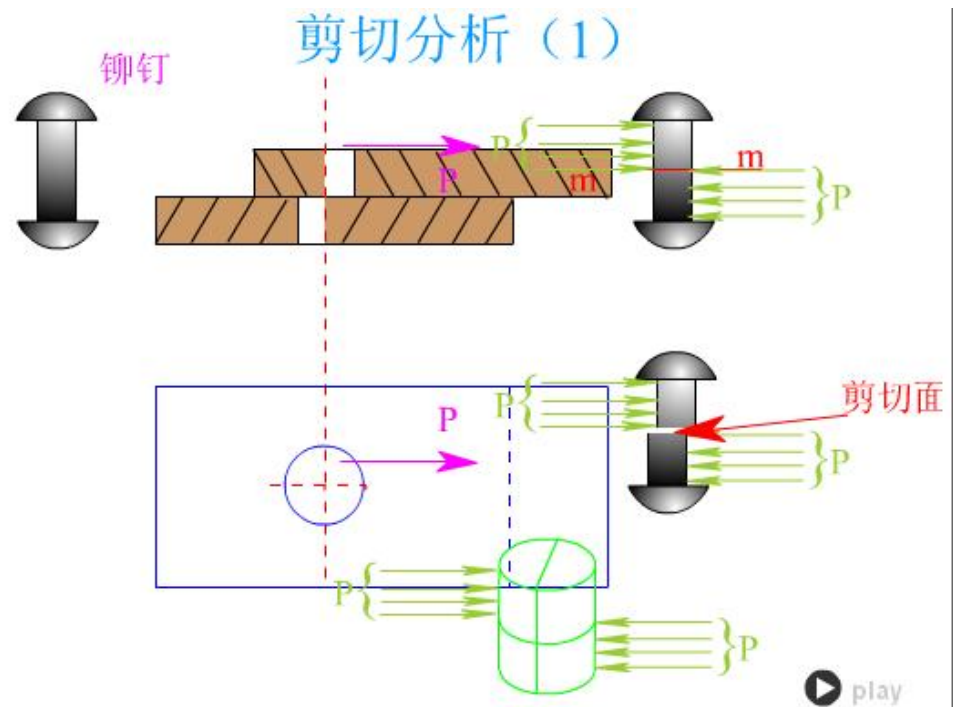




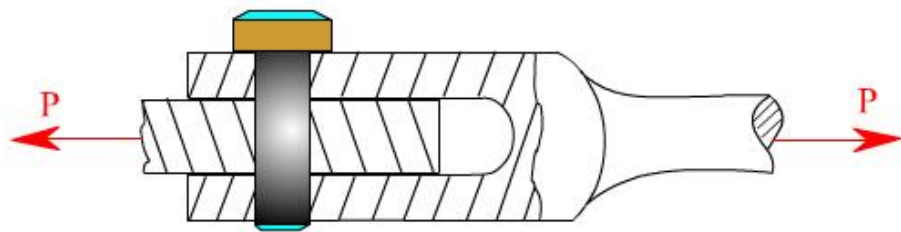
第六章 剪切与挤压

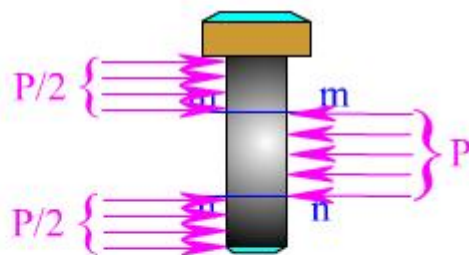
§ 6.1 剪切和挤压

工程上常用于联接构件的铆钉、销钉和螺栓、键等称为联接件。当机械工作时，联接件两侧面受到一对大小相等、方向相反且作用线相距很近的力作用。在这样的力作用下，联接件的主要失效形式之一，就是沿平行于这两个外力且位于该两外力作用线之间的截面发生相对错动而产生剪切破坏。与此同时，联接件与所联接的构件因相互接触而产生挤压。当这种挤压力过大时，在接触面的局部范围内将产生塑性变形，甚至被压溃，从而导致联接件与所联接的构件共同失效。

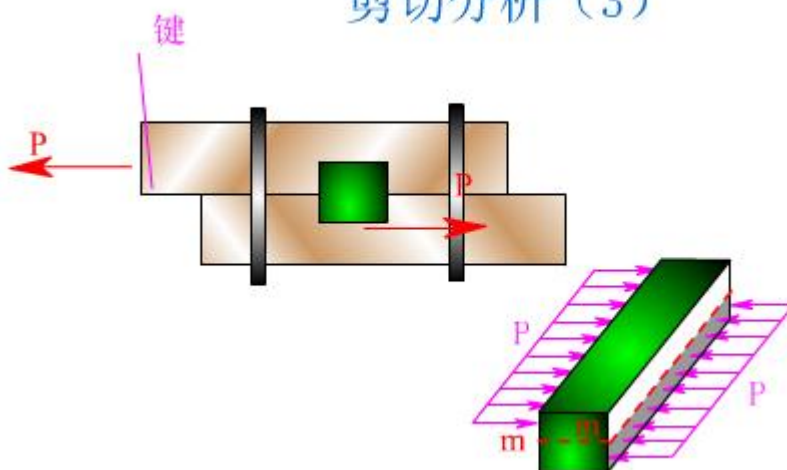


联接件与所联接的构件在联接处的应力，都属于所谓“加力点附近的局部应力”。





剪切分析 (3)



由于应力的局部性质，且联接件与所联接的构件在联接处的应力和变形都很复杂，要进行精确的理论分析也相当困难，因而在工程上通常对这些联接件采用实用计算。一是假定应力是均匀分布的，由此计算出各部分的“名义应力”；二是在与实际构件受力极其类似的情况下进行实验，并用假定应力均匀分布的公式计算，得到联接件材料失效的极限应力；最后，由以上两个假定建立设计准则，作为联接件强度计算的依据。

§ 6.2 剪切概念和实用计算

一、剪切的定义

钢板被剪裁时，剪床的上下两个刀刃以大小相等、方向相反、作用线相距很近的两个力 P 作用于钢板上，迫使钢板在 $n-n$ 截面的左右两部分沿此截面发生相对错动，构件的这种变形形式称为剪切变形。由此可知，剪切的受力特点是：作用在构件两侧面上的外力大小相等、方向相反、作用线相距很近。其变形特点是：构件在二力作用线之间的截面沿外力的方向

发生相对错动，使两力作用线间的小矩形变成了歪斜的平行四边形。产生相对错动的截面称为剪切面。剪切面平行于外力的作用线，且在两个反向外力的作用线之间。只有一个剪切面，称为单剪；具有两个剪切面，称为双剪。

二、剪切虎克定律

从某受剪钢板的剪切面处取出一个微小的正六面体——单元体如图所示，显然在剪切面上只存在切应力 τ 。

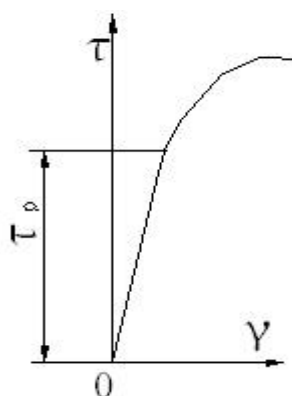
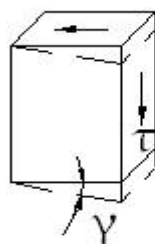
在与剪力相应的切应力的作用下，单元体的右面相对左面发生错动，使原来的直角改变了一个微量，这就是切应变 γ 。实验指出：当切应力 τ 不超过材料的剪切比例极限时，切应力与切应变成正比。

即

$$\tau = G\gamma$$

这就是材料的剪切虎克定律。

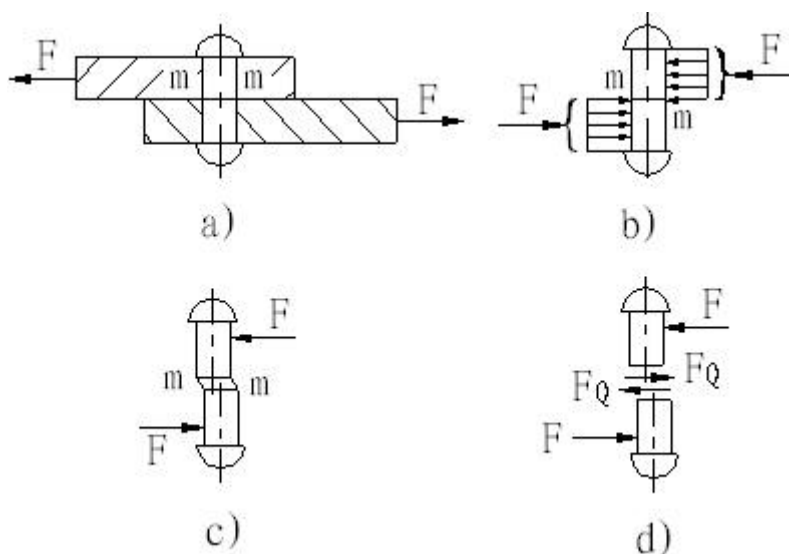
式中，比例常数 G 与材料有关，称为材料的切变模量，量纲与应力相同，常用单位是 GPa ，其数值可由实验测得。



一般钢材的切变模量 G 约为 80GPa ，铸铁约为 45GPa 。

三、剪切实用计算

构件受剪切作用时，其剪切面上将产生内力。应用截面法假想沿剪切面将铆钉分成两段，任取一段为研究对象。由平衡条件可知，剪切面 $m-m$ 上必须有一个与该截面平行的内力存在，这个平行于截面作内力称为剪力，常用符号 F_Q 表示。



与剪力 F_Q 对应，剪切面上有切应力 τ 存在。切应力在剪切面上的分布规律较复杂。工程上常采用以实际经验为基础的“实用计算法”来计算。“实用计算法”假设切应力均匀地分布在剪切面上。设剪切面的面积为 A ，剪力为 F_Q ，则切应力的计算公式为

$$\tau = \frac{F_Q}{A}$$

为了保证构件工作时不发生剪切破坏，要求构件工作时产生的切应力不得超过材料的许用切应力，因此剪切的强度条件为：

$$\tau = \frac{F_Q}{A} \leq [\tau]$$

式中， $[\tau]$ 为材料的许用切应力。

许用切应力 $[\tau]$ 可以通过与构件实际受力情况相类似的剪切实验，测出试件的破坏载荷，然后计算出剪切强度极限，然后除以安全系数 n 而得到。

剪切强度条件同样可以解决三类强度问题，计算中注意确定存在几个剪切面、剪切面的位置和大小，以及每个剪切面上的剪力和切应力。

§ 6.3 挤压的概念和实用计算

一、挤压的概念

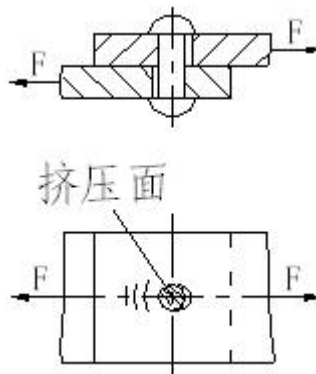
螺栓、铆钉和键等联接件，在承受剪切作用的同时，还在联接件和被联接件

的接触面上相互压紧，这种局部受压的现象称为挤压。

如图所示的螺栓联接，在钢板和螺栓相互接触的表面上将承受一定的压力，当压力足够大时，钢板上的圆孔可能被压成如图所示的椭圆孔，或者螺栓的侧表面被压陷。

这种作用在接触面上的压力称为挤压力，用符号 F_{bc} 表示。在接触处产生的变形称为挤压变形。挤压力的作用面称为挤压面。由挤压力引起的应力称为挤压应力，用 σ_c 表示。

必须指出，**挤压与压缩是不同的**。挤压力作用在构件的表面，挤压应力只分布在挤压面附近区域，挤压应力较大时，挤压面附近区域将发生显著的塑性变形而被压溃。



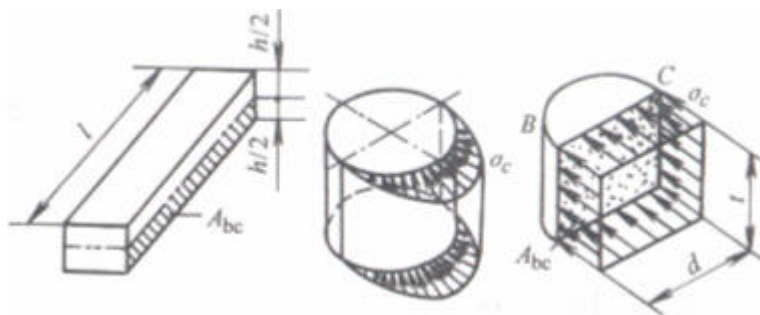
二、挤压实用计算

挤压应力在挤压面上的分布情况较复杂，所以工程中也采用实用计算方法，即认为挤压应力在挤压面上假设均匀分布：

$$\sigma_c = \frac{F_{bc}}{A_{bc}}$$

式中， F_{bc} 为挤压面上的挤压力， A_{bc} 为有效挤压面面积。

在挤压的实用计算中，有效挤压面面积如下确定：**若接触面为平面，则有效挤压面面积为实际接触面面积；若接触面为曲面，则有效挤压面面积为曲面在挤压方向上的正投影面面积。**



为保证联接件具有足够的挤压强度而不破坏，挤压强度条件为：

$$\sigma_c = \frac{F_c}{A_{bc}} \leq [\sigma_c]$$

中，^式 $[\sigma_c]$ 为材料的许用挤压应力。

挤压强度条件也可以解决三类强度问题，难点是有效挤压面的确定。必须注意，如果两个相互挤压构件的材料不同，则应对材料挤压强度较小的构件进行计算。

小 结

当构件受到大小相等、方向相反、作用线平行且相距很近的两外力作用时，两力之间的截面发生相对错动，这种变形称为剪切变形。工程中的联接件在承受剪切的同时，还伴随着挤压的作用，即在传力的接触面上出现局部的不均匀压缩变形。

工程实际中采用实用计算的方法来建立抗剪强度条件和挤压强度条件——它们分别为

$$\tau = \frac{F_Q}{A} \leq [\tau] \qquad \sigma_c = \frac{F_c}{A_{bc}} \leq [\sigma_c]$$

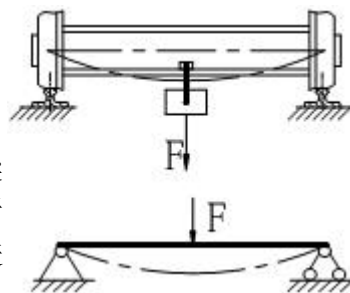
确定联接件的剪切面和挤压面是进行强度计算的关键。剪切面与外力平行且位于反向外力之间；当挤压面为平面时，其计算面积就是实际面积；当挤压面为圆柱面时，其计算面积等于半圆柱面积的正投影面积。

第七章 直梁弯曲

§ 7.1 平面弯曲的概念

工程实际中，存在大量的受弯曲杆件，如火车轮轴，桥式起重机大梁（图）。所谓的弯曲变形是指杆的轴线由直线变成曲线，以弯曲变形为主的杆件称为梁。梁的受力特点是在轴线平面内受到力偶矩或垂直于轴线方向的外力的作用。

如果梁上所有的外力都作用于梁的纵向对称平面内,则变形后的轴线将在纵向对称平面内完成一条平面曲线。这种弯曲称为平面弯曲。



平面弯曲是最常见及最简单的弯曲变形。梁上的荷载和支承情况一般比较复杂,为便与分析 and 计算,在保证足够精度的前提下,需要对梁进行力学简化。

一、梁的简化

为了绘图的方便,首先对梁本身进行简化,通常用梁的轴线来代替实际的梁,如图所示。

二、荷载分类

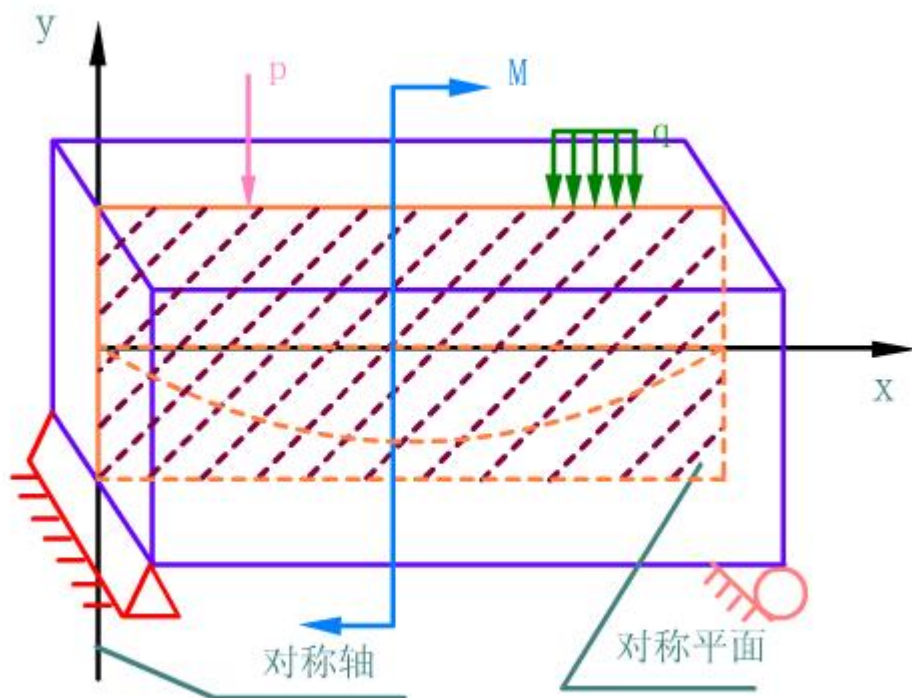
作用在梁上的载荷通常可以简化为以下三种类型:

1、集中荷载 当载荷的作用范围和梁的长度相比较是很小时,可以简化为作用于一点的力,称为集中荷载或集中力。如车刀所受的切削力便可视为集中力 P ,其单位为牛 (N) 或千牛 (kN)。

2、集中力偶 当梁的某一小段内(其长度远远小于梁的长度)受到力偶的作用,可简化为作用在某一截面上的力偶,称为集中力偶。如图 7-2(b) 所示。对称面内受到矩为 M 的集中力偶的作用。它的单位为牛·米 ($N \cdot m$) 或千牛·米 ($kN \cdot m$)。

3、分布荷载 梁的全长或部分长度上连续分布的荷载。如梁的自重,水坝受水的侧向压力等,均可视为分布荷载。分布荷载的大小用荷载集度 q 表示,其单位为牛/米 (N/m) 或千牛/米 (k/m)。沿梁的长度均匀分布的荷载,称为均布荷载,其均布集度 q 为常数。

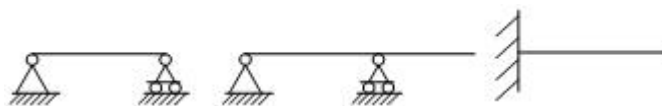
梁的平面弯曲



三、梁的基本形式

按照支座对梁的约束情况,通常将支座简化为以下三种形式:固定铰链支座、活动铰链支座和固定端支座。这三种支座的约束情况和支反力已在静力学中讨论过,这里不再重复。根据梁的支承情况,一般可把梁简化为以下三种基本形式。

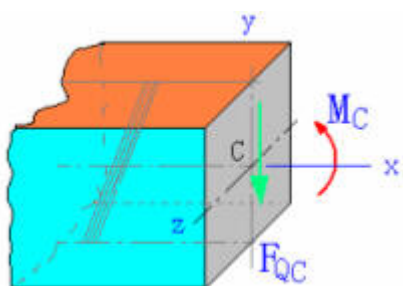
- 1、简支梁 梁的一端为固定铰链支座,另一端为活动铰链支座的梁称为简支梁。
- 2、外伸梁 外伸梁的支座与简支梁一样,不同点是梁的一端或两端伸出支座以外,所以称为外伸梁。
- 3、悬臂梁 一端固定,另一端自由的梁称为悬臂梁。



以上三种梁的未知约束反力最多只有三个,应用静力平衡条件就可以确定这三种形式梁的内力。

§ 7.2 梁的内力

为了对梁进行强度和刚度计算,必须首先确定梁在荷载作用下任一横截面上的内力。弯曲梁指定截面的内力采用截面法求解。由平衡条件可得使梁产生剪切变形的剪力和产生弯曲变形的弯矩——即梁的内力包括两部分。

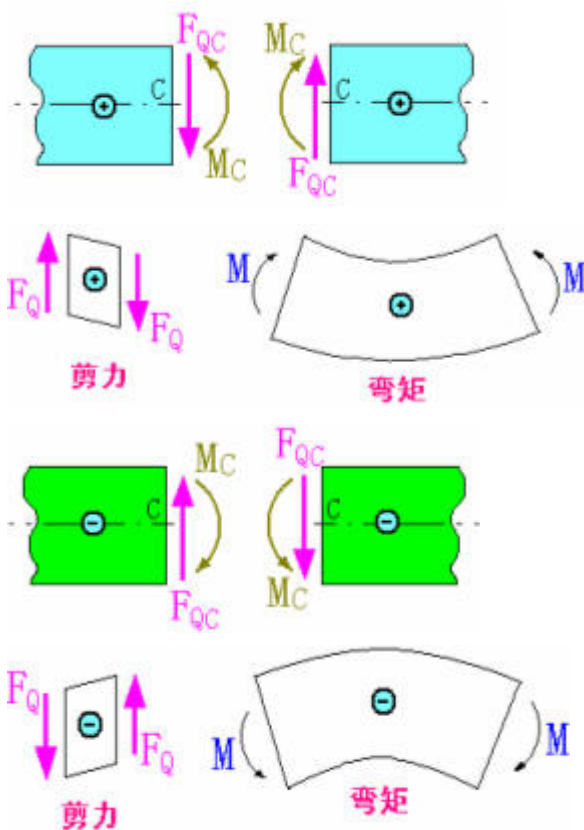


剪力 F_{Qc} 等于截面以左梁上所有外力在 y 轴上投影的代数和。取代数和时,以与剪力同向的外力投影为负,反之为正。

弯矩 M_c 等于横截面以左梁上所有外力对横截面形心 C 的矩的代数和。取代数和时,以与弯矩同向的外力的矩为负,反之为正。

为了使由左段或右段求得的同一截面上的剪力和弯矩不但在数值上相等,而且在符号上也相同,将剪力和弯矩的正负符号规定如下:

对于所切梁的横截面的微变形,若使之发生左侧截面向上、右侧截面向下的相对错动,则剪力为正,反之为负;若使弯曲变形呈上凹下凸,则弯矩为正,反之为负。

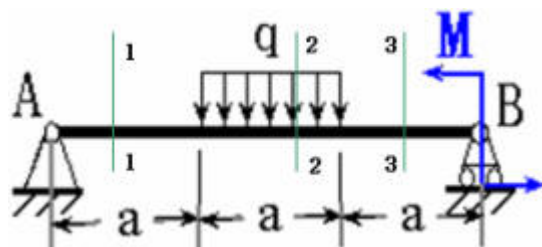


按此规定，对于一个横截面上的剪力和弯矩，无论是以截面左段上还是右段上的外力来计算，其结果非但数值相等，其符号也是一样的。关于弯矩的正负符号规定，也可以借组成梁的无数纵向纤维的变形来说明。**弯矩为正，梁的下部受拉，弯矩为负时梁的上部受拉。**

综上所述，将弯曲梁的内力的求法归纳起来，即：

- ① 在欲求梁内力的横截面处将梁切开，任取一段作为研究对象；
- ② 画出所取梁段的受力图，将横截面上的剪力和弯矩均设为正；
- ③ 由脱离体平衡方程分别计算剪力和弯矩，在力矩方程中，矩心为所切横截面的形心 C。

【例】 简支梁如图，已知 a 、 q 、 $M=qa^2$ ；求梁上指定截面的内力



§ 7.3 剪力图和弯矩图

一、剪力方程和弯矩方程

一般情形下，梁横截面上的剪力和弯矩随横截面位置的变化而变化。设横截面沿梁轴线的位置用坐标 x 表示，则各个截面上的剪力和弯矩可以表示为坐标 x 的函数：

$$Q=Q(x); \quad M=M(x);$$

两式分别称为剪力方程和弯矩方程

二、剪力图和弯矩图

绘制剪力图和弯矩图的目的是形象地表示出剪力和弯矩沿梁长的变化情况，从而可确定梁上最大剪力和最大弯矩的数值及其作用的横截面位置。

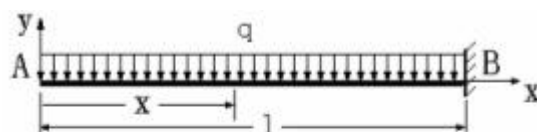
一般以梁的左端为原点，以横坐标，表示梁横截面的位置，以纵坐标表示相应截面上的剪力或弯矩的数值，一般将正的剪力或弯矩画在 x 轴上方，负的剪力或弯矩画在 x 轴下方。这样得出的曲线图分别称为剪力图和弯矩图。

利用剪力方程和弯矩方程剪力图和弯矩图的基本思路为：

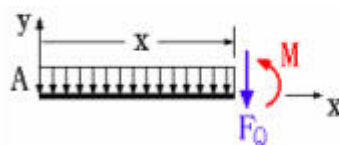
- ① 求约束力
- ② 建立剪力方程和弯矩方程
- ③ 画剪力图和弯矩图

【例】 绘制图示梁的内力图

① 悬臂梁作用均布载荷 q , 由于悬臂梁的特殊性可避免求解约束反力

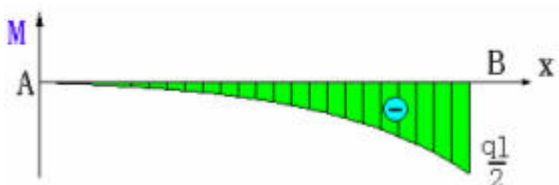
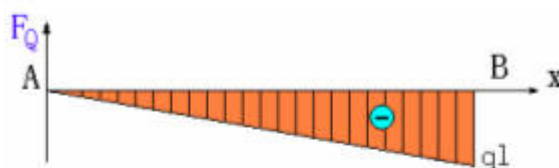


② 写出 x 截面的剪力方程和弯矩方程



$$F_Q = -q \cdot x \quad M = -\frac{1}{2} q \cdot x$$

③ 按方程绘制剪力图和弯矩图, 显然最大剪力、弯矩均发生在 B 点



$$F_{Q \max} = ql$$

$$M_{\max} = \frac{1}{2} ql$$

三、剪力、弯矩和荷载分布集度之间的微分关系

由上述内容可以看出, 载荷不同, 梁上各截面的剪力和弯矩也不同, 所以画出的剪力图和弯矩图的形式也不同。进一步研究发现, 载荷、剪刀和弯矩三者之间是存在一定关系的, 掌握这种关系, 对绘制梁的剪力图和弯矩图将提供很大的方便。

设一简支梁受向上的任意分布荷载 q 的作用，其荷载集度 q 是 x 的连续函数。 x 以向右为正，分布荷载以向上为正。在分布荷载作用的范围内取距左端为 x 的微段 dx 进行分析。

列平衡方程并略去公式中的高阶微量得

$$\frac{dF_Q(x)}{dx} = q(x)$$

$$\frac{dM}{dx} = F_Q(x)$$

即：

$$\frac{d^2M}{dx^2} = \frac{dF_Q}{dx} = q(x)$$

其几何意义为

剪力图上任一点切线的斜率，等于梁上相应点处的荷载集度

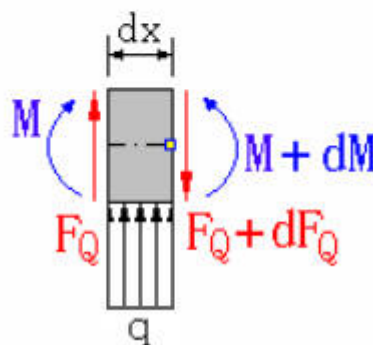
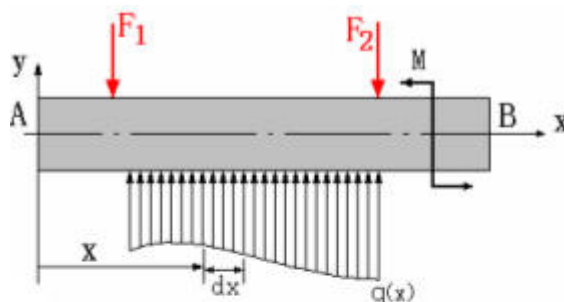
弯矩图上任一点切线的斜率，等于梁上相应点处横截面上的剪力

由此可得出梁上荷载，剪力图和弯矩图之间的下列关系：

1、如果某段梁上无均布荷载作用，即 $q=0$ ，则剪力 Q 为常量，说明这段梁上的剪力图是一水平直线；而弯矩 M 为坐标 x 的一次函数，说明这段梁上的弯矩图是一倾斜直线。若对应的 $Q>0$ 时，则弯矩图从左到右向上倾斜（斜率为正），当 $Q<0$ 时，则弯矩图从左到右向下倾斜（斜率为负）。

2、如果某段梁上有均布荷载作用，即 q 为常数，则剪力 Q 为坐标 x 的一次函数，说明剪力图在这段梁上为一倾斜直线；而弯矩 M 为坐标 x 的二次函数，说明弯矩图在这段梁上为一抛物线。当 $q>0$ （与所建立的 y 坐标正向一致时）时，剪力图从左到右向上倾斜（斜率为正），弯矩图为开口向下的二次抛物线； $q<0$ （向下）时，剪力图从左到右向下倾斜（斜率为负），弯矩图为开口向上的二次抛物线。

3、在集中力作用截面处，剪力图发生突变，突变的大小等于集中力的大小。



弯矩图会发生转折，转折的方向和集中力的方向一致。

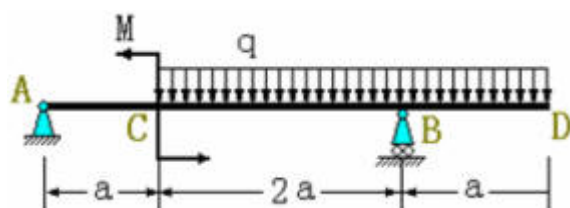
4、在集中力偶作用处，剪力图无变化。弯矩图将发生突变，突变的大小等于集中力偶矩的大小；突变的方向，从左向右来看如果外力偶矩为逆时针，弯矩由上向下突变。

5、若在梁的某一截面上，即弯矩图在该点的斜率为零，则在该截面处弯矩存在极值。

利用这些关系，可以不必列出剪力方程和弯矩方程，便能直接画出剪力图和弯矩图。其方法是：根据梁上载荷将梁分成几段，再由各段内的载荷作用情况，初步判断剪力图和弯矩图的形状，然后求出控制截面上的内力值，从而画出整个梁的内力图。

	$q(x)=0$ 的区间	$q(x)=C$ 的区间	集中力 F 作用处	力偶矩 M 作用处
F_Q 图	水平线	$q(x)>0$, 斜直线, 斜率 <0 $q(x)<0$, 斜直线, 斜率 >0	有突变 突变量 $=F$	无影响
M 图	$F_Q > 0$, 斜直线, 斜率 >0 $F_Q < 0$, 斜直线, 斜率 <0 $F_Q = 0$, 水平线, 斜率 $=0$	$q(x)>0$, 抛物线, 上凹 $q(x)<0$, 抛物线, 下凹 $F_Q = 0$, 抛物线有极值	斜率由突变 图形成折线	有突变 突变量 $=M$

【例】 $M=3\text{kN}\cdot\text{m}$, $q=3\text{kN/m}$, $a=2\text{m}$, 绘制梁的内力图。



§ 7.4 弯曲正应力计算

在平面弯曲时，工程上近似地认为梁横截面上的弯矩是由截面上的正应力形成的，而剪力则由截面上的切应力所形成。本章将在梁弯曲时的内力分析的基础上，导出梁弯曲时的应力与变形的计算，建立梁的强度和刚度条件。

为了研究梁横截面上的正应力分布规律，取一矩形截面等直梁，在表面画些平行于梁轴线的纵线和垂直于梁轴线的横线。在梁的两端施加一对位于梁纵向对称面内的力偶，梁则发生弯曲。梁任意横截面上的内力只有弯矩而无剪力，这种弯曲称为纯弯曲，这种梁称为纯弯曲梁。

通常从变形的几何关系、物理关系和静力平衡条件三个方面来推导出纯弯曲梁横截面上的正应力公式。

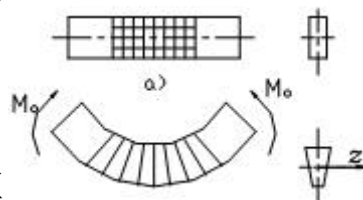
一、实验观察

梁发生弯曲变形后，我们可以观察到以下现象：

1、横向线仍是直线且仍与梁的轴线正交，只是相互倾斜了一个角度

2、纵向线（包括轴线）都变成了弧线。

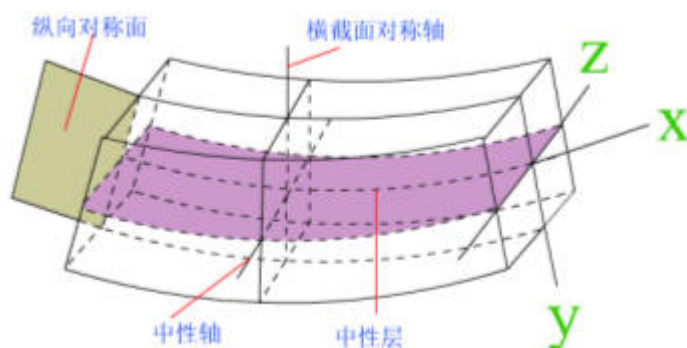
3、梁横截面的宽度发生了微小变形，在压缩区变宽了些，在拉伸区则变窄了些。



根据上述现象，可对梁的变形提出如下假设：

① 平面假设：梁弯曲变形时，其横截面仍保持平面，且绕某轴转过了一个微小的角度。

② 单向受力假设：设梁由无数纵向纤维组成，则这些纤维处于单向受拉或单向受压状态。

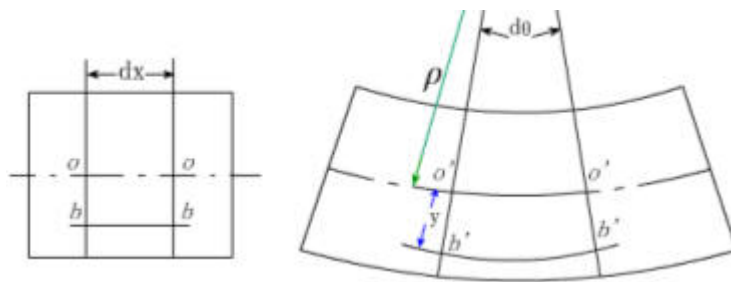


可以看出，梁下部的纵向纤维受拉伸长，上部的纵向纤维受压缩短，其间必有一层纤维既不伸长也不缩短，这层纤维称为中性层。中性层和横截面的交线称为中性轴，即图中的 z 轴。梁的横截面绕 z 轴转动一个微小角度。

二、变形的几何关系

图中梁的两个横截面之间距离为 dx ，变形后中性层纤维长度仍为 dx 且 $dx = \rho d\theta$ 。距中性层为 y 的某一纵向纤维的线应变 ε 为：

$$\varepsilon = \frac{\overline{b'b'} - dx}{dx} = \frac{(\rho + y)d\theta - \rho d\theta}{\rho d\theta} = \frac{y}{\rho}$$



即梁内任一纵向纤维的线应变 ε 与它到中性层的距离 y 成正比。

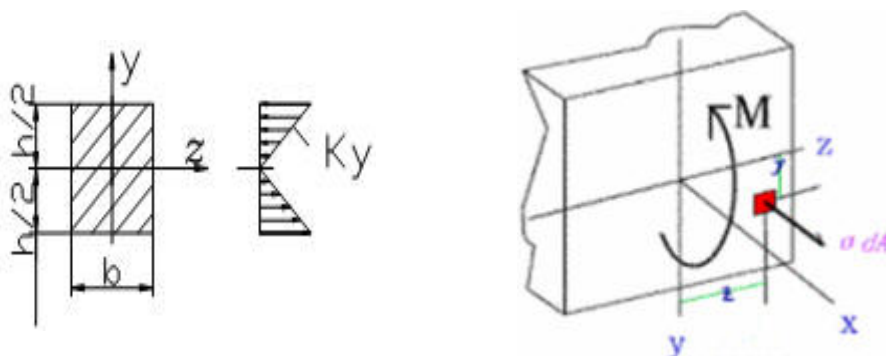
三、变形的物理关系

由单向受力假设,当正应力不超过材料的比例极限时,将虎克定律代入上式,得:

$$\sigma = E \varepsilon = E \frac{y}{\rho}$$

可见矩形截面梁在纯弯曲时的正应力的分布有如下特点:

- ① 中性轴上的线应变为零, 所以其正应力亦为零。
- ② 到中性轴距离相等的各点, 其线应变相等。根据虎克定律, 它们的正应力也相等。
- ③ 在图示的受力情况下, 中性轴上部各点正应力为负值, 中性轴下部各点正应力为正值。
- ④ 正应力沿 y 轴线性分布。最大正应力 (绝对值) 在离中性轴最远的上、下边缘处。



四、静力学关系

在梁的横截面上任取一微面积 dA ，作用在这微面积上的微内力为 σdA ，在整个横截面上有许多这样的微内力。微面积上的微内力 σdA 对 z 轴之矩的总和，组成了截面上的弯矩

$$\int_A \sigma dA y = M$$

$$M = \sum y \sigma dA = \frac{E}{\rho} \sum y^2 dA = \frac{EI_z}{\rho}$$

则
$$\sigma = \frac{M}{I_z} y$$

式中 $I_z = \int_A y^2 dA$ 称为横截面对中性轴的惯性矩，是截面图形的几何性质，仅与截面形状和尺寸有关。

上式是梁纯弯曲时横截面上任一点的正应力计算公式。应用时 M 及 y 均可用绝对值代入，至于所求点的正应力是拉应力还是压应力，可根据梁的变形情况，由纤维的伸缩来确定，即以中性轴为界，梁变形后靠凸的一侧受拉应力，靠凹的一侧受压应力。也可根据弯矩的正负来判断，当弯矩为正时，中性轴以下部分受拉应力，以上部分受压应力，弯矩为负时，则相反。

横截面上最大正应力发生在距中性轴最远的各点处。即

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{I_z} y_{\max}$$

令 $W_z = I_z / y_{\max}$

则
$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W_z}$$

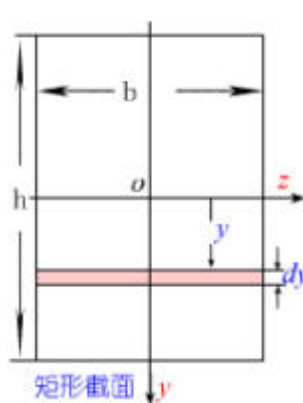
W_z 称为抗弯截面模量，也是衡量截面抗弯强度的一个几何量，其值与横截面的形状和尺寸有关

弯曲正应力计算公式是梁在纯弯曲的情况下导出来的。对于一般的梁来说，横截面上除弯矩外还有剪力存在，这样的弯曲称为剪切弯曲。在剪切弯曲时，横截面将发生翘曲，平截面假设不再成立。但较精确的分析证明，对于跨度 l 与截面高度 h 之比 $l/h > 5$ 的梁，计算其正应力所得结果误差很小。在工程上常用的梁，其跨高比远大于 5，因此，计算式可足够精确地推广应用于剪切弯曲的情况。

弯曲正应力计算公式虽然是以矩形截面梁为例来推导的，但公式中并没有用到矩形截面的特殊几何性质，所以上式完全适用于具有纵向对称平面的其他截面形状的梁。

所以，只要梁具有纵向对称面，且载荷作用在对称面内，则梁的跨度较大时，剪切弯曲时也可应用。但当梁横截面上的最大应力大于比例极限时，此式不再适用。

五、惯性矩计算举例



$$I_z = \int_A y^2 dA = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 (b dy) = \frac{bh^3}{12}$$

$$W_z = \frac{I_z}{y_{\max}} = \frac{I_z}{\frac{h}{2}} = \frac{bh^2}{6}$$

其余常见截面的惯性矩和抗弯截面模量可参阅截面图形集合性质有关章节。

§ 7.5 梁的强度设计

在进行梁的强度计算时，首先应确定梁的危险截面和危险点。一般情况下，对于等截面直梁，其危险点在弯矩最大的截面上的上下边缘处，即最大正应力所在处。

一、强度条件

危险点的最大工作应力应不大于材料在单向受力时的许用应力，强度条件为：

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma] \quad \text{式中，} \sigma_{\max} \text{ 为危险点的应力。}$$

考虑到材料的力学性质和截面的几何性质，判定危险点的位置是建立强度条件的主要问题。

二、关于危险点的讨论

1、对称截面

若截面对称于中性轴，则称为对称截面，否则称为非对称截面。对于塑性材料，其许用拉应力和许用压应力相同。对称截面塑性材料的危险点可以选择距中性轴最远端的任一点计算。

对于许用拉应力和许用压应力不同的脆性材料，由于脆性材料的许用压应力大于许用拉应力，所以只需计算受拉边的最大应力值。

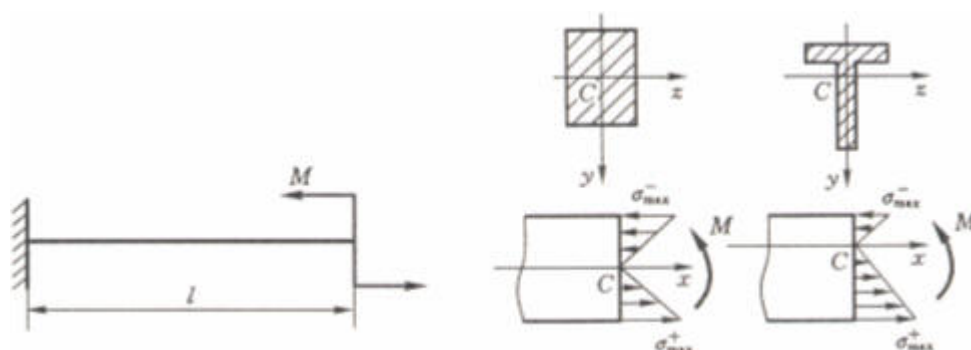
$$\sigma_{1\max} \leq [\sigma]_1$$

2、非对称截面

对于塑性材料，危险点一定出现在距中性轴最远处，所以这种情况下只需计算一个危险点。

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{I_z} y_{\max} \leq [\sigma]$$

对于脆性材料，需要结合弯矩的正负及截面形状分别计算。如果距中性轴最远处的是受拉边则只需计算一个危险点；如果距中性轴最远处的是受压边则需要计算两个危险点。



其强度条件为：

$$\sigma_{1\max} = \frac{M}{I_z} y_1 \leq [\sigma_1]$$

$$\sigma_{y\max} = \frac{M}{I_z} y_2 \leq [\sigma_y]$$

三、强度条件三类问题

① 强度校核 验算梁的强度是否满足强度条件，判断梁在工作时是否安全。

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W_z} \leq [\sigma]$$

② 截面设计 根据梁的最大载荷和材料的许用应力, 确定梁截面的尺寸和形状, 或选用合适的标准型钢。

$$W_z \geq \frac{M}{[\sigma]}$$

③ 确定许用载荷 根据梁截面的形状和尺寸及许用应力, 确定梁可承受的最大弯矩, 再由弯矩和载荷的关系确定梁的许用载荷。

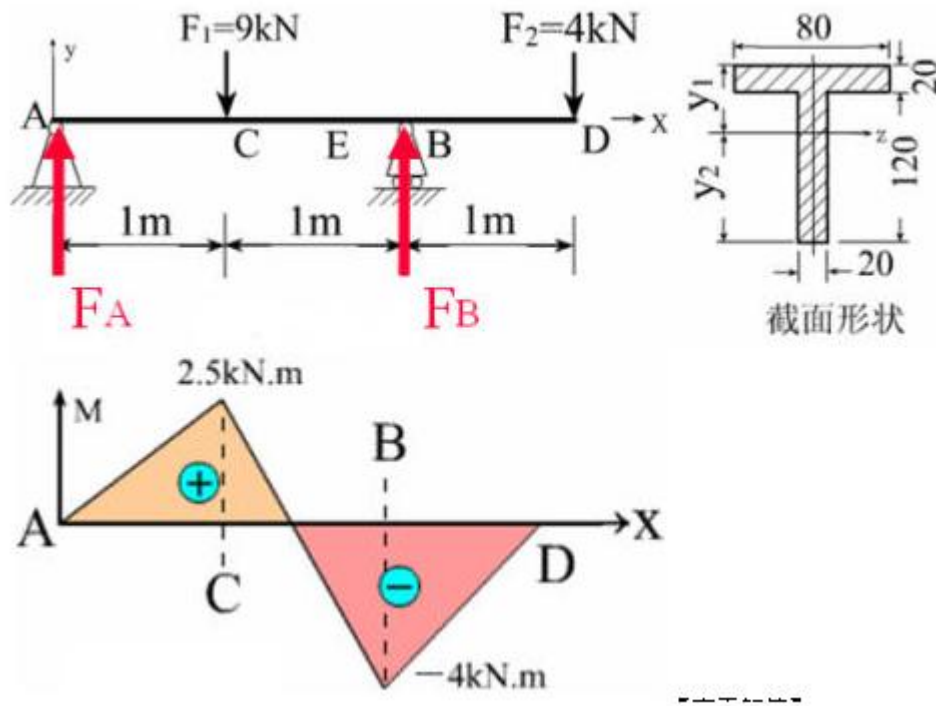
$$M \leq W_z [\sigma]$$

对于非对称截面, 需按 $\sigma_{\max} = \frac{M}{I_z} y_{\max} \leq [\sigma]$ 分别计算三类问题。
公式

【例】图示 T 形截面铸铁外伸梁, 其许用拉应力 $[\sigma] = 30\text{MPa}$, 许用压应力 $[\sigma] = 60\text{MPa}$, 截面尺寸如图。截面对形心轴 z 的惯性矩 $I_z = 763\text{mm}^4$, 且 $y_1 = 52\text{cm}$ 。试校核梁的强度。

分析:

- 1、画出梁的弯矩图 (确定最大弯矩及其所在截面)
- 2、求出梁的最大拉应力和最大压应力值
- 3、校核强度



解答：解：1、求支座反力：FA=2.5kN；FB=10.5kN，画出弯矩图如 b)，最大正弯矩在 C 点，最大负弯矩在 B 点，即 C 点为上压下拉，而 B 点为上拉下压

2、求出 B 截面最大应力

$$\begin{aligned} \text{最大拉应力} \quad \sigma_B^+ &= \frac{M_B \cdot y_1}{I_z} = \frac{4 \times 10^6 \times 52}{763 \times 10^4} = 27.26 \text{MPa} \\ &(\text{上边缘}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{最大压应力} \quad \sigma_B^- &= \frac{M_B \cdot y_2}{I_z} = \frac{4 \times 10^6 \times 88}{763 \times 10^4} = 46.13 \text{MPa} \\ &(\text{下边缘}) \end{aligned}$$

3、求出 C 截面最大应力

$$\begin{aligned} \text{最大拉应力} \quad \sigma_C^+ &= \frac{M_C \cdot y_2}{I_z} = \frac{2.5 \times 10^6 \times 88}{763 \times 10^4} = 28.83 \text{MPa} \\ &(\text{下边缘}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{最大压应力} \quad \sigma_C^- &= \frac{M_C \cdot y_1}{I_z} = \frac{2.5 \times 10^6 \times 52}{763 \times 10^4} = 17.04 \text{MPa} \\ &(\text{上边缘}) \end{aligned}$$

最大拉应力在 C 点且 $\sigma_{\text{Cmax}} = 28.83 \text{MPa} < [\sigma]^+ = 30 \text{MPa}$

最大压应力在B点且 $\sigma_{Bmax}=46.13\text{MPa}<[\sigma]=60\text{MPa}$

故梁强度足够

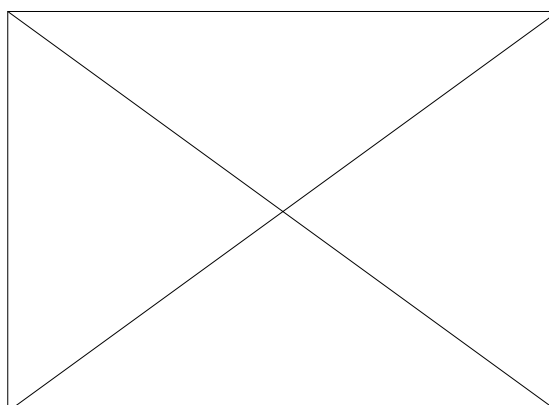
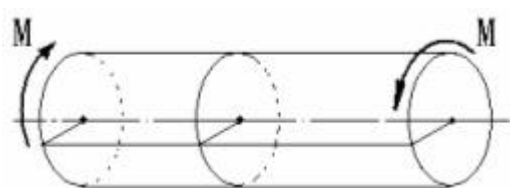
第八章 圆轴扭转

§ 8.1 扭转的概念

一、扭转的概念

在日常生活及工程实际中，有很多承受扭转的构件。例如汽车转向轴，当汽车转向时，驾驶员通过方向盘把力偶作用在转向轴的上端，在转向轴的下端则受到来自转向器的阻力偶作用。当钳工攻螺纹时，加在手柄上的两个等值反向的力组成力偶，作用于锥杆的上端，工件的反力偶作用在锥杆的下端。又如轴承传动系统的传动轴工作时，电动机通过皮带轮把力偶作用在一端，在另一端则受到齿轮的阻力偶作用。

上述杆件的受力情况，可以简化为如图所示的计算简图。



由此可以看出：

扭转杆件的受力特点是：杆件两端受到一对大小相等、转向相反、作用面与轴线垂直的力偶作用。其变形特点是：杆的各横截面都绕轴线发生相对转动。这种变形称为扭转变形。以扭转变形为主的构件称为轴。

在生产实际中圆轴（横截面为圆形或圆环形）用得较多，本章只研究圆轴的扭转问题。

二、扭矩

1、外力偶矩的计算

研究圆轴扭转的强度和刚度问题时，首先要知道作用在轴上的外力偶矩的大小。在工程实际中，作用在轴上的外力偶矩，通常并不直接给出，而是已知轴所传递的功率和轴的转速。功率、转速和力偶矩之间的关系为：

$$M = 9550 \frac{P}{n}$$

式中：M——外力偶矩，单位为牛米（N·m），
P——轴传递的功率，单位为千瓦（Kw）
n——轴的转速，单位为转 / 分（r / min）

可以看出，轴所承受的外力偶矩与所传递的功率成正比。因此，在传递同样大的功率时，低速轴所受的外力偶矩比高速轴大，所以在传动系统中，低速轴的直径要比高速轴的直径粗一些。

2、扭矩

圆轴在外力偶矩作用下，横截面上将产生内力，用截面法来研究。图示圆轴，在两端受一对大小相等，转向相反的外力偶矩 M 作用下产生扭转变形，并处于平衡状态。用一假想截面沿 m—m 处将轴假想切成两段，取其中任一段（如左段）为研究对象。因为原来的轴是处于平衡状态的，所以切开后的任意一段也应处于平衡状态。所以在截面 m—m 上必然存在一个内力偶矩。这个内力偶矩称为扭矩，用符号 T 表示。

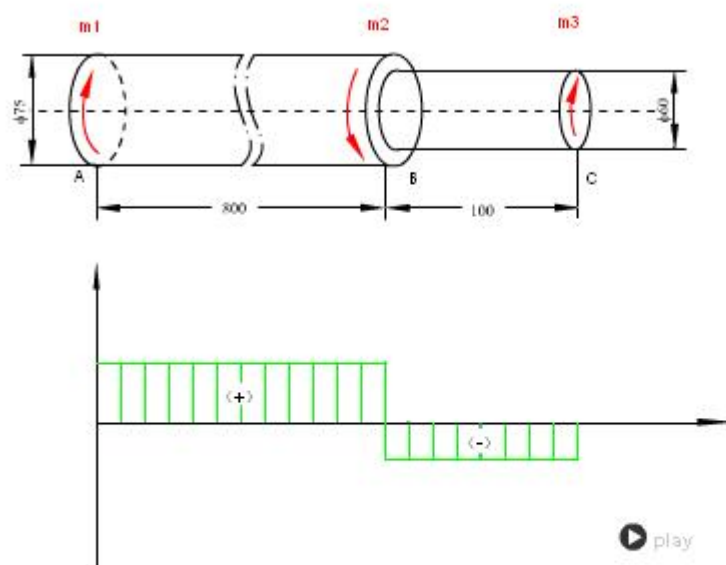


取截面左段与取截面右段为研究对象所求得的扭矩数值相等而转向相反（作用与反作用）。为了使从左、右两段求得同一截面上的扭矩正负号相同，通常对扭矩的正负号作如下规定：**按右手螺旋法则，以右手四指表示扭矩的转向，则大拇指的指向离开截面时的扭矩为正，大拇指指向截面时的扭矩为负。**

三、扭矩图

若圆轴上同时受几个外力偶作用时，则各段轴截面上的扭矩就不完全相等，这时必须分段来求。为了确定最大扭矩及其所在截面的位置，通常是将扭矩随截面位置变化的规律用图形表示出来，即以横坐标表示截面位置，以纵坐标表示扭矩，这样的图形称为扭矩图。

下面以实例来说明扭矩图的画法。



结论：横截面上扭矩的大小，等于截面一侧右段或左段上所有外力偶矩的代数和，在计算外力偶矩的代数和时，以与所设扭矩同向的外力偶矩取为负，反之为正。求得各段扭矩后，以横坐标表示横截面的位置，相应横截面上扭矩为纵坐标，画出扭矩随截面变化的图线，即得扭矩图。

[单击查看心轴扭矩图画法举例动画](#)

§ 8.2 圆轴扭转时的应力与强度计算

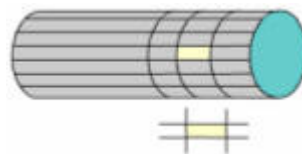
进行圆轴扭转强度计算时，当求出横截面上的扭矩后，还应进一步研究横截面上的应力分布规律，以便求出最大应力。和弯曲正应力分析过程类似，也要从三方面考虑。

首先，由杆件的变形找出应变的变化规律，也就是研究圆轴扭转的变形几何关系。其次，由应变规律找出应力的分布规律，也就是建立应力和应变间的物理

关系。最后，根据扭矩和应力之间的静力学关系，导出应力的计算公式。

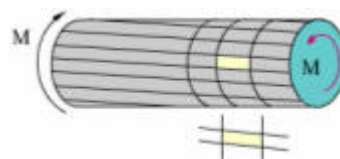
一、实验观察

为了观察圆轴的扭转变形，在圆轴表面上画出许多间距很小的纵向线和垂直于杆轴线的圆轴线，如图所示。



在两端外力偶矩作用下，使轴产生扭转变形。可以观察到下列现象：

1、各圆周线均绕轴线相对旋转过一个角度，但形状、大小及相邻两圆周线之间的距离均无变化。



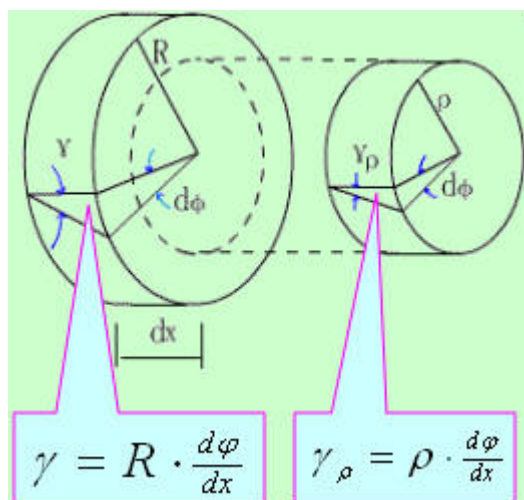
2. 所有纵向线仍保持为直线，但都倾斜了一个微小角度，使圆轴表面的小矩形变为平行四边形。

根据上述现象，可得出关于圆轴扭转的基本假设：**圆轴扭转变形后，轴的横截面仍保持为平面，形状和大小均不变，半径也保持为直线。这就是圆轴扭转时的平面假设。**按照这一假设，在扭转变形中，圆轴的横截面就象刚性平面一样，绕轴线旋转了一个角度。

由此可见，横截面上各点无轴向变形，故横截面上没有正应力。横截面上存在剪应力，各横截面半径不变，所以剪应力方向与截面径向垂直。纵向线倾斜的角度 γ 表达了轴变形的剧烈程度，即为轴的切应变。

二、变形的几何关系

为了确定横截面上的切应力，先用相邻两横截面在圆轴上截取出微段 dx ，如图所示。



可得，横截面上任意一点的切应变 γ_ρ 与该点到圆心的距离 ρ 成正比。

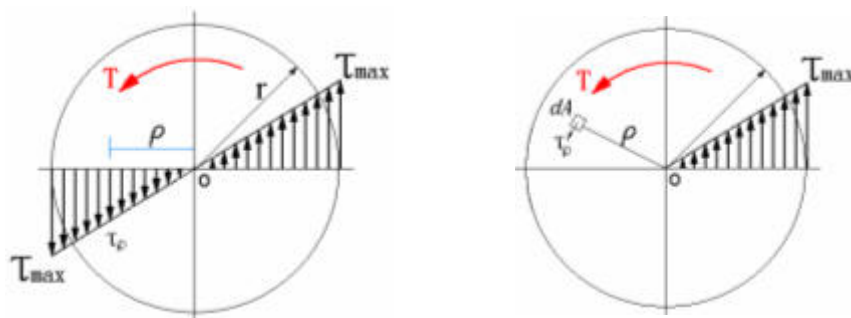
三、物理关系

由剪切胡克定律可知：当切应力不超过某一极限值时，切应力与切应变成正比。即：

$$\tau_\rho = G \cdot \gamma_\rho = G \cdot \rho \cdot \frac{d\varphi}{dx}$$

结论：横截面上任意一点的切应力 τ_ρ 的大小与该点到圆心的距离 ρ 成正比，切应力的方向垂直于该点和转动中心的连线。

应力分布规律如图：



四、静力学关系

如图所示：微面积 dA 上内力对 O 点的矩为 $dM = \rho \tau_\rho dA$ ，整个截面上的微内力矩的合力矩应该等于扭矩，即

$$\sum \rho \tau_\rho dA = T$$

$$\sum \rho \tau_{\rho} dA = G \frac{d\varphi}{dx} \sum \rho^2 dA = G \frac{d\varphi}{dx} I_p = T$$

则

$$\tau_{\rho} = \frac{\rho}{R} \bullet \frac{T}{I_p} R = \frac{T}{I_p} \rho \quad \text{或} \quad \tau_{\rho} = \frac{T}{I_p} \rho$$

式中， $I_p = \sum \rho^2 dA$ 称为横截面对形心的极惯性矩，取决于横截面的大小和形状。

五、极惯性矩和抗扭截面模量计算

极惯性矩和抗扭截面模量都是截面图形的几何性质，可以根据定义由积分法求出。具体的计算方法参见截面图形的几何性质有关内容。

对于实心圆轴

$$I_p = \frac{\pi}{32} d^4 \approx 0.1 d^4$$

$$W_p = \frac{\pi}{16} d^3 \approx 0.2 d^3$$

对于空心圆轴，设内外径之比 $\alpha = d/D$

$$I_p = \frac{\pi}{32} (D^4 - d^4) = \frac{\pi}{32} D^4 (1 - \alpha^4) \approx 0.1 D^4 (1 - \alpha^4)$$

$$W_p = \frac{I_p}{D/2} = \frac{\pi}{16} D^3 (1 - \alpha^4) \approx 0.2 D^3 (1 - \alpha^4)$$

六、扭转强度条件

圆轴扭转时，产生最大切应力的横截面，称为危险截面。考虑到轴横截面上切应力的分布，可知危险截面上的应力大小和该点到圆心的距离成正比。所以在横截面上存在危险点，即应力值最大的点。为保证圆轴具有足够的扭转强度，轴的危险点的工作应力不超过材料的许用切应力，故圆轴扭转的强度条件为

$$\tau_{\max} = \frac{T_{\max}}{W_p} \leq [\tau]$$

应用强度条件解决问题的基本思路是先由扭矩图、截面尺寸确定危险点，然后考虑材料的力学性质应用强度条件进行计算。扭转强度条件也可以解决三类问题：强度校核、截面设计和确定许用荷载。

8.3 圆轴扭转的变形和刚度计算

一、圆轴扭转时的变形

圆轴扭转时的变形是用两个横截面间绕轴线的相对扭转角 φ 来度量的。

$$\varphi = \frac{l}{R} \cdot \frac{TR}{GI_P} = \frac{Tl}{GI_P}$$

这就是扭转角的计算公式，扭转角单位为弧度（rad）。

由此可见扭转角 φ 与扭矩 T 和轴的长度 l 成正比，与 GI_P 成反比。 GI_P 反映了圆轴抵抗扭转变形的能力，称为圆轴的抗扭刚度。

如果两截面之间的扭矩值 T 有变化，或轴的直径或材料不同，那么应该分段计算各段的扭转角，然后叠加。

二、扭转刚度计算

轴类零件除应满足强度要求外，还应满足刚度要求，即不允许轴有过大的扭转变形。例如车床的丝杠若扭转角过大，会影响车刀进给，从而降低加工精度。发动机的凸轮轴扭转角过大，会影响气阀开关的时间。镗床的主轴或磨床的传动轴，如扭转角过大，将引起扭转振动，影响工件的加工精度和表面粗糙度。所以轴还应满足刚度要求。

工程中常常采用单位长度的扭转角 θ 来衡量轴扭转变形的程度，即扭转角表达式中消除长度 l 的影响：

$$\theta = \frac{\varphi}{l} = \frac{T}{GI_P}$$

其单位为弧度 / 米（rad / m）。

为了保证轴的刚度，通常规定单位长度扭转角的最大值 θ_{\max} 不超过某个规定的许用值，即轴单位长度的许用扭转角 $[\theta]$ 。于是得扭转的刚度条件为：

$$\theta = \frac{T}{GI_P} \leq [\theta]$$

在工程中， θ 的单位习惯上用度/米 ($^{\circ}/\text{m}$) 表示。把公式中的弧度换算为度，得

$$\theta = \frac{T}{GI_P} \cdot \frac{180}{\pi} \leq [\theta]$$

本章小结

提高圆轴扭转时的强度和刚度，可以从降低扭矩和增大惯性矩或抗扭截面系数等方面来考虑。为了降低扭矩，当轴传递的外力偶矩一定时，可以通过合理地布置主动轮与从动轮的位置来实现。

为了增大惯性矩或抗扭截面系数，工程上常采用空心轴，这既可节约原材料，又能使轴的强度和刚度有较大的提高。但是，空心轴价格昂贵，一般情况下不采用。

工程上还可能遇到非圆截面杆的扭转，如正多边形截面和方形截面的传动轴。非圆截面杆扭转时，横截面不再保持平面，即横截面要发生翘曲。因此，上述平面假设导出的扭转圆轴的应力、变形公式，对非圆截面杆均不适用。

第九章 组合变形

§ 9.1 组合变形概述

前面研究了杆件在拉伸（压缩）、剪切、扭转和弯曲四种基本变形时的强度和刚度问题。但在工程实际中，许多构件受到外力作用时，将同时产生两种或两种以上的基本变形。例如建筑物的边柱，机械工程中的夹紧装置，皮带轮传动轴等。

我们把杆件在外力作用下同时产生两种或两种以上的基本变形称为组合变形。常见的组合变形有：

1. 拉伸（压缩）与弯曲的组合；
2. 弯曲与扭转的组合；
3. 两个互相垂直平面弯曲的组合（斜弯曲）；
4. 拉伸（压缩）与扭转的组合。

本章只讨论弯曲与扭转的组合。

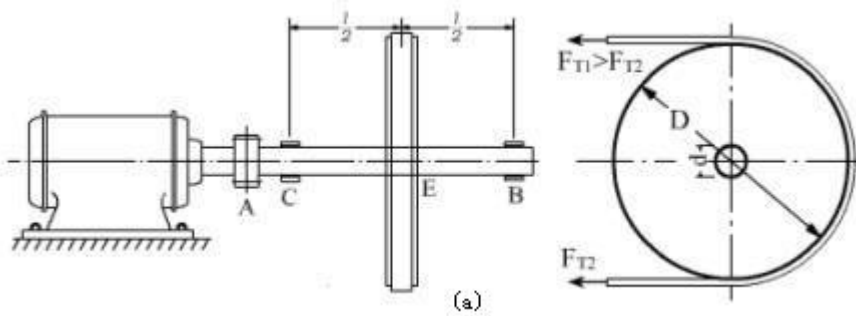
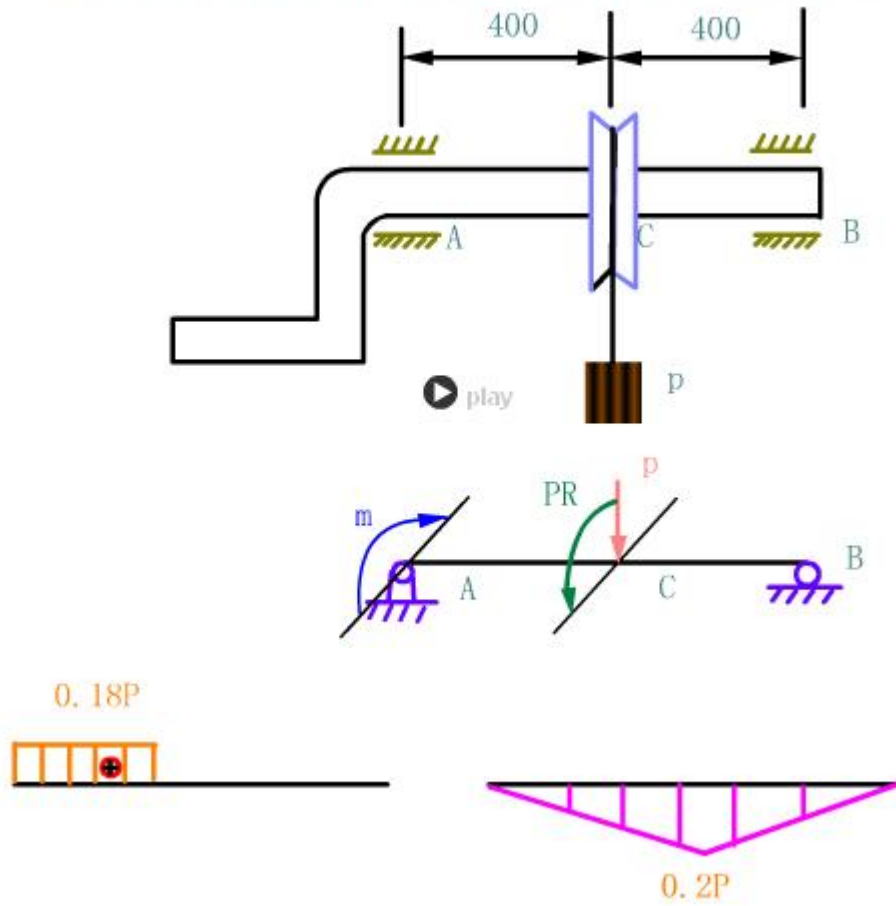
处理组合变形问题的基本方法是**叠加法**，将组合变形分解为基本变形，分别考虑在每一种基本变形情况下产生的应力和变形，然后再叠加起来。组合变形强度计算的步骤一般如下：

- (1) 外力分析 将外力分解或简化为几种基本变形的受力情况；
- (2) 内力分析 分别计算每种基本变形的内力，画出内力图，并确定危险截面的位置；
- (3) 应力分析 在危险截面上根据各种基本变形的应力分布规律，确定出危险点的位置及其应力状态。
- (4) 建立强度条件 将各基本变形情况下的应力叠加，然后建立强度条件进行计算。

§ 9.2 弯扭组合变形强度计算

机械中的转轴，通常在弯曲和扭转组合变形下工作。现以电机为例，说明此种组合变形的强度计算。图 10-1a 所示电机轴，在轴上两轴承中端装有带轮，工作时，电机给轴输入一定转矩，通过带轮的皮带传递给其它设备。带紧边拉力为 F_{T1} ，松边拉力为 F_{T2} ，不计带轮自重。

弯曲与扭转组合变形时杆件的强度计算



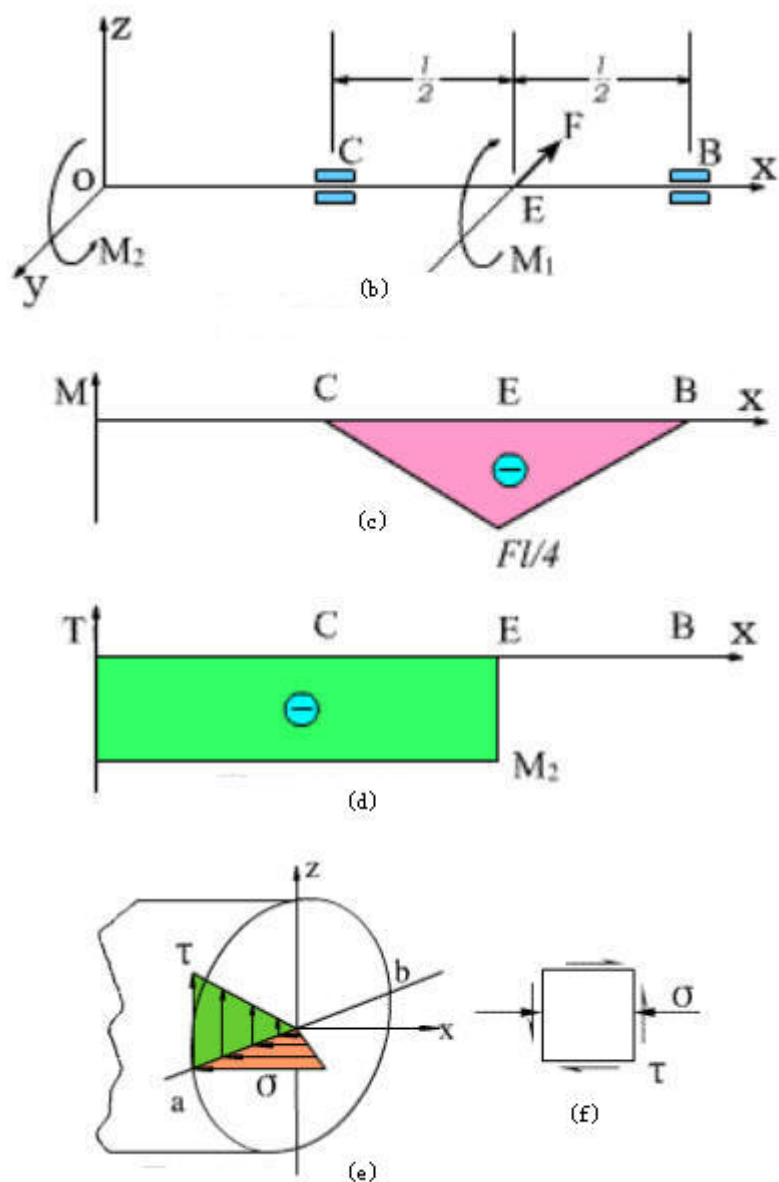


图 10-1

(1) 外力分析 将作用于带上的拉力向杆的轴线简化, 得到一个力和一个力偶, 如图 10-1 (b), 其值分别为

$$F = F_{T1} + F_{T2} \quad M_1 = (F_{T1} - F_{T2}) \frac{D}{2}$$

力 F 使轴在垂直平面内发生弯曲, 力偶 M_1 和电机端产生 M_2 的使轴扭转, 故轴上产生弯曲和扭转组合变形。

(2) 内力分析 画出轴的弯矩图和扭矩图, 如图 10-1 (c)、(d) 所示。由图知危险截面为轴上装带轮的位置, 其弯矩和扭矩分别为

$$M = \frac{1}{4} Fl \quad T = M_1$$

(3) 应力分析 由于在危险截面上同时作用有弯矩和扭矩, 故该截面上必然同时存在弯曲正应力和扭转切应力, 如图 10-1(e), a、b 两点正应力和切应力均分别达到最大值, 为危险点, 该两点正应力和切应力分别为

$$\sigma = \frac{M}{W_Z} \quad \tau = \frac{T}{W_P}$$

该两点的单元体均属于平面应力状态, 图 10-1(f), 故需按强度理论建立强度条件。

(4) 建立强度条件 对于塑性材料制成的转轴, 因其抗拉、压强度相同, 故只需取一点研究。采用第三或第四强度理论进行计算, 相当应力分别为

$$\sigma_{r3} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \quad \sigma_{r4} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}$$

对于圆轴, 由 $W_P = 2W_Z$, 可得到按第三和第四强度理论建立的强度条件为

$$\sigma_{r3} = \frac{\sqrt{M^2 + T^2}}{W_Z} \leq [\sigma]$$

$$\sigma_{r4} = \frac{\sqrt{M^2 + 0.75T^2}}{W_Z} \leq [\sigma]$$

以上两式只适用于由塑性材料制成的弯扭组合变形的圆截面和空心截面杆。

例10-1如图 10-2a 为圆轴 AB, 在轴的右端联轴器上作用有一力偶 M。已知: $D=0.5\text{m}$, $F_1=2F_2=8\text{kN}$, $d=90\text{mm}$, $a=500\text{mm}$, $[\sigma]=50\text{MPa}$, 试按第四强度理论设计准则校核圆轴的强度。

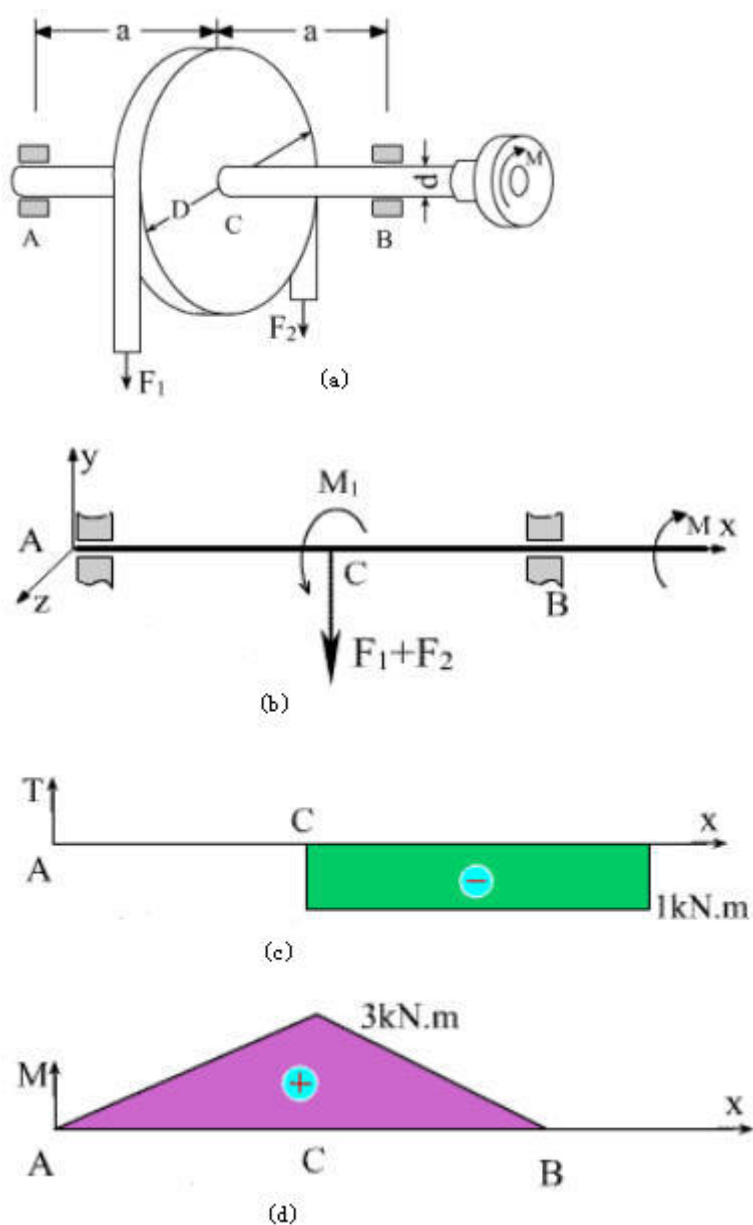


图 10-2

解 (1) 将作用于带上的力向轴线简化, 图 10-2b

$$F_1 + F_2 = 12\text{kN}$$

$$M_1 = (F_1 + F_2)D/2 = 1\text{kN.m}$$

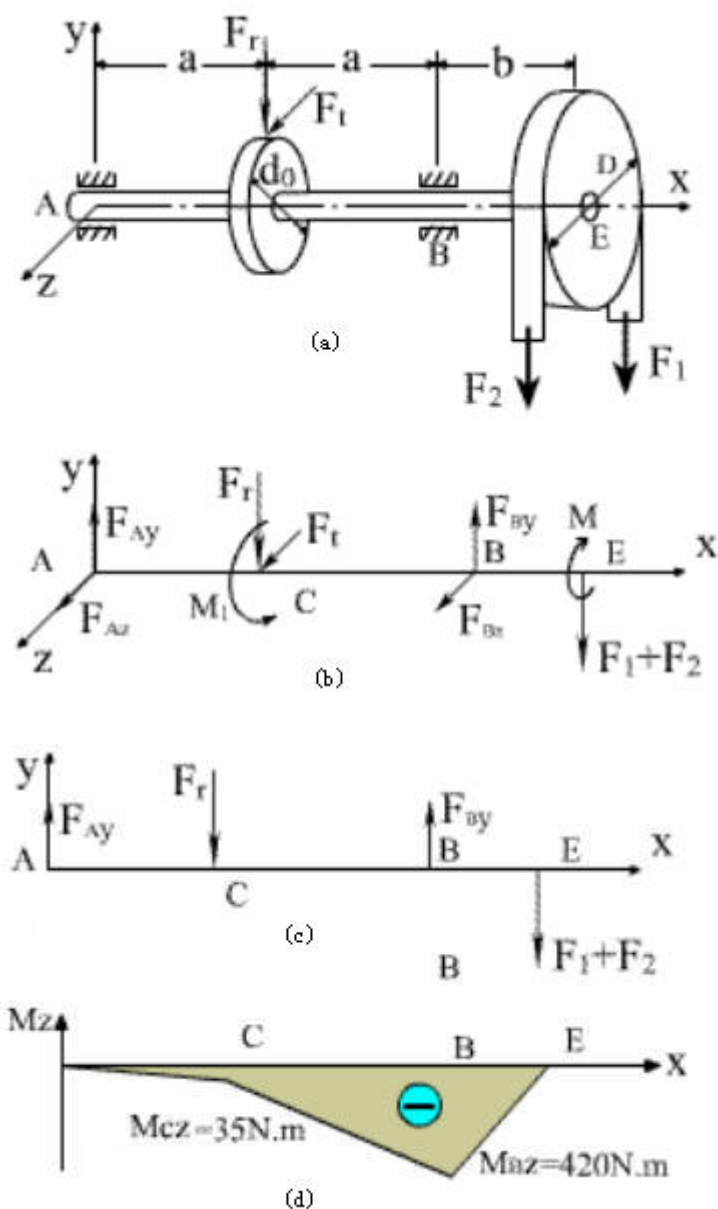
(2) 分别画出轴的扭矩图和弯矩图 10-2c、d, 可以看出 C 截面为危险截面。

(3) 由第四强度理论设计准则

$$\sigma_{r4} = \frac{\sqrt{M^2 + 0.75T^2}}{W_z} = \frac{\sqrt{(3 \times 10^6)^2 + 0.75 \times (1 \times 10^6)^2}}{0.1 \times 90^3}$$

$$= 42.83 \text{ MPa} < [\sigma] = 50 \text{ MPa}; \quad \text{强度足够}$$

例 10-2 如图 10-3a 所示, 已知 $F_1=5\text{kN}$, $F_2=2\text{kN}$, $a=200$, $b=60$, $d_0=100$, $D=160$, $a=200$, $[\sigma]=80\text{MPa}$ 。按第三强度理论设计轴的直径。



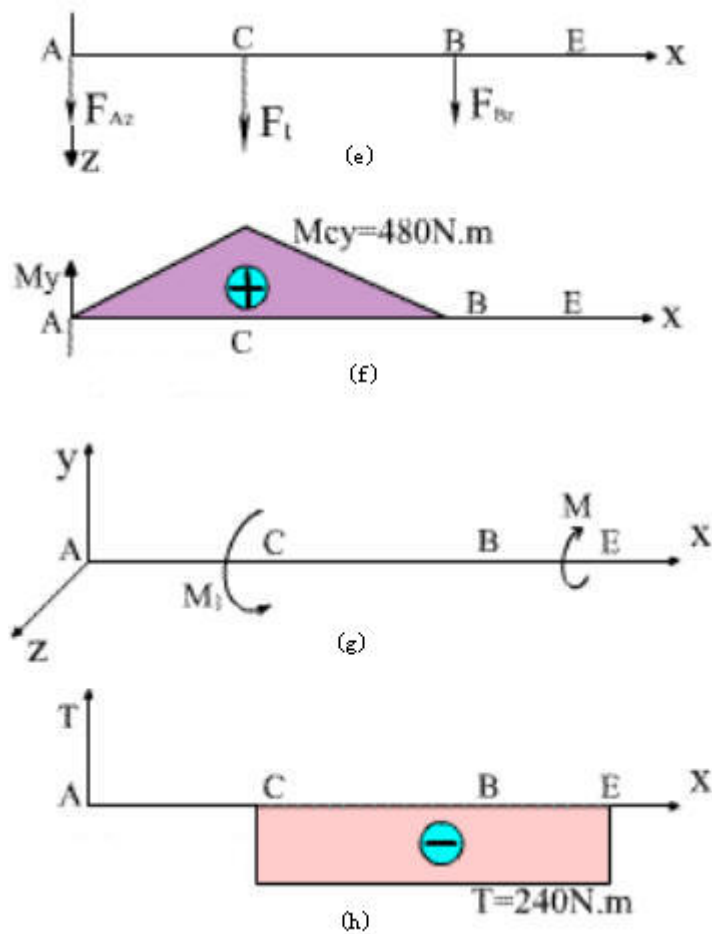


图 10-3

解：(1) 画出受力简图如图 10-3b，轴发生铅垂和水平面内的弯曲及扭转。

(2) 空间力系投影法

xy 面：如图 10-3c，画出弯矩图如图 10-3d

求得： $M_{Cz} = 35 \text{ N.m}$

$M_{Bz} = 420 \text{ N.m}$

xz 面：如图 10-3e，画出弯矩图如图 10-3f

求得： $M_{Cy} = 480 \text{ N.m}$

(3) 扭矩图如图 10-3h

$T = 240 \text{ N.m}$

(4) 危险点为 C 点

$$M_C = \sqrt{M_{CY}^2 + M_{CZ}^2} = \sqrt{480^2 + 35^2} = 481.3 \text{ N.m}$$
$$T_C = T = 240 \text{ N.m}$$

(5) 设计轴径

由第三强度理论得：

$$d^3 \geq \frac{\sqrt{M_C^2 + T_C^2}}{0.1[\sigma]} = \frac{\sqrt{(481.3 \times 10^3)^2 + (240 \times 10^3)^2}}{0.1 \times 80} = 67.23 \times 10^3 (\text{mm}^3)$$

所以

$$d \geq \sqrt[3]{67.23 \times 10^3} = 40.7 \text{ mm};$$

取 $d = 42 \text{ mm}$

本章难点及重点

处理组合变形构件的强度问题的步骤是：

- (1) 将外力向杆轴线简化，分解为几种基本变形。
- (2) 计算各基本变形下的内力，并作出相应的内力图。
- (3) 确定危险截面和危险点，计算各危险点在每个基本变形下产生的应力。
- (4) 对于弯曲和扭转组合的圆截面杆，需按第三或第四强度理论建立强度条件，分别为

$$\sigma_{r3} = \frac{\sqrt{M^2 + T^2}}{W_Z} \leq [\sigma]$$
$$\sigma_{r4} = \frac{\sqrt{M^2 + 0.75T^2}}{W_Z} \leq [\sigma]$$