

第一章 静力学的基本概念和公理 受力图

一、刚体

P2 刚体：在力的作用下不会发生形变的物体。

力的三要素：大小、方向、作用点

平衡：物体相对于惯性参考系处于静止或作匀速直线运动。

二、静力学公理

1 力的平行四边形法则：作用在物体上同一点的两个力，可以合成为仍作用于改点的一个合力，合力的大小和方向由这两个力为边构成的平行四边形的对角线矢量确定。

2 二力平衡条件：作用在同一刚体上的两个力使刚体保持平衡的必要和充分条件是：这两个力的大小相等、方向相反，并且作用在同一直线上。

3 加减平衡力系原理：作用于刚体的任何一个力系中，加上或减去任意一个平衡力系，并不改变原来力系对刚体的作用。

（1）力的可传性原理：作用在刚体上某点的力可沿其作用线移动到该刚体内的任意一点，而不改变该力对刚体的作用。

（2）三力平衡汇交定理：作用于刚体上三个相互平衡的力，若其中两个力的作用线汇于一点，则此三个力必在同一平面内，且第三个力的作用线通过汇交点。

4 作用与反作用定律：两个物体间相互作用的力，即作用力和反作用力，总是大小相等，方向相反，作用线重合，并分别作用在两个物体上。

5 刚化原理：变形体在某一力系作用下处于平衡状态时，如假想将其刚化为刚体，则其平衡状态保持不变。

三、约束和约束反力

P7 约束：

1 柔索约束：柔索只能承受拉力，只能阻碍物体沿着柔索伸长的方向运动，故约束反力通过柔索与物体的连接点，方位沿柔索本身，指向背离物体；

2 光滑面约束：约束反力通过接触点，沿接触面在接触点的公法线，并指向物体，即约束反力为压力；

3 光滑圆柱铰链约束：

①圆柱、②固定铰链、③向心轴承：通过圆孔中心或轴心，方向不定的力，可正交分解为两个方向、大小不定的力；④辊轴支座：垂直于支撑面，通过圆孔中心，方向不定；

4 链杆约束（二力杆）：工程中将仅在两端通过光滑铰链与其他物体连接，中间又不受力作用的直杆或曲杆称为连杆或二力杆，当连杆仅受两铰链的约束力作用而处于平衡时，这两个约束反力必定大小相等、方向相反、沿着两端铰链中心的连线作用，具体指向待定。

四、受力和受力图

选取研究对象，画出研究对象所受的全部主动力和约束反力，主动力一般是预先给定的，约束反力需根据约束的类型来判断。表示研究对象受力的简明图形，称为受力图。

第二章 平面汇交力系

一、平面汇交力系合成和平衡的几何法

1、平面汇交力系合成的力多边形法则

由分力矢量折线和合力矢量构成的多边形称为力多边形。这种求合理矢量的几何作图法则称为力多边形法则。

平面汇交力系合成的结果是一个通过汇交点的合力，该合力矢量等于原力系中各分力的矢量和。

P16 平面汇交力系平衡的必要充分几何条件：力多边形自行封闭

二、力的分解与投影

力在某轴上的投影：等于力的大小乘以力与该轴正向之间夹角的余弦。

力的投影与力的分量是两个不同的概念。

三、合力投影定理

P19 合力投影定理：合力在任一轴上的投影，等于各分力在该轴上投影的代数和。

四、平面汇交力系平衡的解析法

P20 平面汇交力系平衡条件： $\sum F_{ix}=0$ ； $\sum F_{iy}=0$ 。2 个独立平衡方程

第三章 力矩 平面力偶系

一、力对点之距

1、P24 力矩  $M_{O(F)}=\pm Fh$  (逆时针为正)，点 O 为矩心，垂直距离 h 为力臂，力使物体逆时针转动为正。

2、P25 合力矩定理：平面汇交力系的合力对平面内任一点的矩，等于所有各分力对同一点的矩的代数和。

二、力偶和力偶矩

1、P26 力偶：大小相等、方向相反，作用线平行且不共线的两个力组成的力系称为力偶；

力偶矩  $M=\pm Fd$  (逆时针为正)

2、P27 力偶的性质

力偶不能与一个力等效，力偶只能用力偶平衡；

力偶对其所在平面内任一点的矩恒等于力偶矩，与矩心的位置无关。

在同一平面内的两个力偶，只要两力偶的力偶矩（包括大小和方向）相等，则此两力偶的效应相等。这就是平面力偶的等效条件。

推论 1 力偶可在其作用面内任意转移，而不会改变它对刚体的效应。

推论 2 只要保持力偶矩的大小和力偶的转向不变，可以同时改变力偶中力的大小和力偶臂的长短，而不会改变它对刚体的效应。

三、平面力偶系的合成与平衡

1 平面力偶系：作用在刚体上同一平面内的多个力偶，称为平面力偶系。

平面力偶系可以合成为一个合力偶，合力偶矩等于各分力偶矩的代数和。

2、P28 平面力偶系平衡条件：力偶系中所有各力偶矩的代数和等于零。

第四章 平面任意力系

一、P33 力的平移定理：作用于刚体上的力可以平行移动到刚体内的任意一点，但必须附加一个力偶，该附加力偶的力偶矩等于原力对指定点的矩。

二、平面任意力系向作用面内一点简化

1、P34 平面力向力系一点简化

平面任意力系中各力的矢量和  $F_R$  称为该力系的主矢量，简称主矢；力系各力对简化中心 O 的矩的代数和  $M_O$  称为该力系对简化中心 O 的主矩。

平面任意力系向作用面内任一点简化，可得一个力和一个力偶。这个力等于该力系的主矢，作用线经过简化中心 O；这个力偶的矩等于该力系对简化中心 O 的主矩。

2、平面任意力系的简化结果分析

（1）主矢  $F_R \neq 0$ ，主矩  $M_O \neq 0$ ，简化为一个力偶；

（2）主矢  $F_R \neq 0$ ，无论主矩是否为 0，简化为一个力；

（3）主矢  $F_R = 0$ ，主矩  $M_O = 0$ ，平衡力系。

三、平面任意力系及其平衡方程

1、平面任意力系平衡的必要和充分条件是：力系的主矢和对任意一点的主矩都等于零。

P36 平面任意力系平衡条件： $\sum F_x=0$ ； $\sum F_y=0$ ， $\sum M_{O(F)}=0$ 。3 个独立方程

2、P38 平面平行力系平衡条件： $\sum F_y=0$ ， $\sum M_{O(F)}=0$ ，或  $\sum M_{A(F)}=0$ ， $\sum M_{B(F)}=0$ ，2 个独立方程

P39 静定，超静定

四、考虑滑动摩擦时的平衡问题

P43 摩擦：当两物体具有相对运动的趋势或相对运动时，在其接触处的公

切面内就会彼此作用有阻碍相对滑动的阻力，即滑动摩擦力，简称摩擦力。

静摩擦力：对物块施加一个大小可变的水平力 F，并由零逐渐增大，在接近某一数值 Fc 的过程中，物块仅有相对支撑面滑动的趋势，但始终保持静止。可见支撑面除了对物块作用有法向约束反力 Fn 外，必定还有切向约束反力 Fs 作用，此力称为静滑动摩擦力，简称静摩擦力。

当主动力增大到 Fc 时，物块虽无相对滑动，但即将失去平衡，称为平衡的临界状态。此时的静摩擦力达到最大值，称为最大静摩擦力，以 Fmax 表示。

Fmax=fs×Fn，fs 是摩擦因数，Fn 是两物间的正压力（法向约束反力），这称为静摩擦定律。

静摩擦力的方向与物块的相对滑动趋势方向相反，大小随主动力的变化而变，但介于 0 和最大值之间，即

0≤Fs≤Fmax

全约束反力与法线间的夹角的最大值 φ 称为摩擦角，摩擦角的正切等于静摩擦因数。如果作用于物块的全部主动力的合力 Fk 的作用线在摩擦角之内，则无论这个力怎么大，物块必保持静止，这称为自锁现象。

第五章 空间力系 重心

一、力在直角坐标轴上的投影

1、一次投影法

设力 F 作用于物体上的 O 点，过 O 作空间直角坐标系 Oxyz，若已知力 F 与 x、y、z 坐标轴正向间的夹角分别是 α、β、γ，则力 F 在 x、y、z 轴上的投影是：

Fx=Fcos α；Fy=Fcos β；Fz=Fcos γ。

二、力对轴之矩

1、力对某轴的矩是力使刚体绕此轴转动效应的度量，它等于该力在垂直于该轴的平面上的投影对这平面与该轴的交点的矩。可表示为 Mz (F) =Mo (Fxy) =±Fxy ·h

2、力对轴之矩的解析表达式

Mx (F) =yFz - zFy；My (F) =zFx - xFz；Mz (F) =xFy - yFx。

三、空间力系平衡方程

P53 空间力系平衡条件：6 个方程；空间汇交力系：3 个方程；空间平行力系：3 个方程

四、物体的重心和形心

地心对物体的吸引力称为物体的重力，其大小就是物体的重量。物体重力的作用点称为物体的重心。

由物体的几何形状和尺寸所决定的点是物体的几何中心，称为物体的形心。

第六章 点的运动

P64 质点

一、自然法

1、点的运动方程

动点在运动过程中，其弧坐标是时间 t 的单值连续函数，S=f(t)，上式称为以弧坐标表示的点的运动方程。

2、点的速度

点做曲线运动时，速度的大小等于弧坐标对时间的一阶导数的绝对值；方位沿轨迹切线，指向由弧坐标对时间的一阶导数的正负号判定。

P65 点的速度  $v = \frac{ds}{dt}$

3、点的加速度

加速度：切向加速度  $a_{\tau} = \frac{dv}{dt}$ ，速度大小变化；法向加速度  $a_n = \frac{v^2}{\rho}$ ，

速度方向变化，加速度  $a = \sqrt{a_{\tau}^2 + a_n^2}$

点作曲线运动时，切向加速度表明速度大小对时间的变化率。其大小等于速度的代数值对时间的一阶导数，或等于弧坐标对时间的二阶导数；其方位沿轨迹的切线，指向由导数的正负号决定。

法向加速度表明速度方向对时间的变化率，其大小等于速度的平方处以轨迹上动点所在处的曲率半径（作圆周运动时，曲率半径等于半径 R），其方向沿轨迹动点所在处的法线，指向曲率中心。

直线运动： $a = a_{\tau}$ ；匀速曲线运动： $a = a_n$ ；

匀变速曲线运动： $a_{\tau}$  是常数， $a_n$  不等于零，

$v = v_0 + a_{\tau}t, \quad s = s_0 + v_0t + \frac{1}{2}a_{\tau}t^2$

二、直角坐标法

1、点的直角坐标运动方程和轨迹方程

$x = f_1(t), \quad y = f_2(t)$ ，上式就是点的直角坐标运动方程。

动点以 t 为参数的轨迹参数方程，从中消去时间 t，就可以得到点的轨迹方程。

第七章 刚体的基本运动

P73 平动：刚体在运动过程中，若其上任意直线始终与它的初始位置保持平行，则称刚体作平行移动，简称平动。

刚体平动的特征：刚体平动时，其上各点的轨迹相同且平行，同一瞬时各点的速度和加速度相等。

P74 定轴转动：刚体在运动过程中，如果其上（或其拓延部分）有一条直线始终保持不动，则称为刚体的定轴转动，简称转动。

转动方程：刚体转动过程中，转角  $\varphi = \varphi(t)$ ，是时间的函数，反映了刚体整体的转动规律。

角速度  $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$ ，角加速度  $\alpha = \frac{d\omega}{dt}$ ，

角速度  $\omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{\pi n}{30}$  (n 是转速，r/min)

P76 转动刚体内各点的速度  $v = R\omega$ ，加速度  $a_{\tau} = R\alpha, \quad a_n = R\omega^2$

第八章 质点动力学基础

惯性定律：无外力作用时，质点将保持原来的运动状态（静止或匀速直线运动）。

运动定律：质点因受力的作用而产生的加速度，其方向和力的方向相同，大小与力的大小成正比，即  $ma = F$ ，m 是质点的质量，a 是质点的加速度，F 是作用在质点上的合力。

作用与反作用定律：两个物体间的作用力和反作用力，总是大小相等，方向相反，作用线重合，并分别作用在这两个物体上。

第九章 刚体动力学基础

刚体内各质点的质量与其到 z 轴的距离的平方的乘积之和，称为刚体对 z 轴的转

动惯量，用 Jz 表示，即  $J_z = \sum m_i r_i^2$ ，转动惯量：圆环  $J_z = mR^2$ ；圆

盘  $J_z = mR^2 / 2$ ；细杆  $J_z = ml^2 / 12$ 。

P91 平行轴定理：刚体对任一轴的转动惯量等于刚体对通过质心且与该轴平行的轴的转动惯量加上刚体的质量与两轴间距离平方的乘积，即

$$J_z = J_z + md^2$$

P88 转动定理：转动刚体对转轴大的转动惯量与角加速度的乘积等于作用于刚体的所有外力对转轴之矩的代数和，此结论称为转动定理。

第十章 动能定理

P97 平动刚体动能  $T = \frac{mv^2}{2}$ ；转动刚体动能  $T = \frac{J_z \omega^2}{2}$

P100 重力的功  $A = -G(z_2 - z_1)$

弹性力的功  $A = \frac{c}{2}(\delta_1^2 - \delta_2^2)$

作用在定轴转动刚体上的力的功  $A = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M_z d\varphi$

功率的定义式： $P = \frac{\delta A}{dt} = F_\tau \frac{ds}{dt} = F_\tau v$

功率与力矩、转速的关系： $M = 9550 \frac{P}{n}$

P101 动能定理： $T_2 - T_1 = \Sigma A^e + \Sigma A^i$ ，质点系初始与终了位置的动能改变等于所有外力、内力的总功，对刚体来说内力做功为 0，所以

$$T_2 - T_1 = \Sigma A^e$$

第十一章 材料力学的基本概念

P107 构建承载能力主要包括三个方面：

强度（构件抵抗破坏的能力，即在规定的使用条件下，构件不发生断裂或显著的永久变形）、

刚度（构件抵抗变形的能力，即在规定的使用条件下，变形不超过允许的限制）、

稳定性（构件保持原有平衡形式的能力，即在规定的使用条件下，构件能保持原有的平衡形式。

对变形固体所做的基本假设：

连续性假设（认为组成变形固体的物质毫无间隙地充满了它的整个几何空间，而且变形后仍保持这种连续性。）、

均匀性假设（认为整个物体是由同一材料组成。）、

各向同性假设（认为物体在各个方向具有相同的物理性质）、

小变形假设（认为物体的变形与构件尺寸相比属高阶小量，可以不考虑因变形而引起的尺寸变化，就称为小变形假设）。

内力：因外力作用而引起构件内各部分之间相互作用力的改变量，称为附加内力，简称内力。

全应力： $P = \frac{dF}{dA}$ ，通常把全应力 p 分解为垂直于截面的分量 σ（正应力）

和与截面相切的分量 τ（切应力）。

P108 截面法：是材料力学中研究内力的基本方法，步骤为：一截为二，任取其一；相互作用，代之内力；根据平衡，确定内力

P109 杆件变形的形式：拉伸与压缩、剪切、扭转、弯曲

第十二章 轴向拉伸与压缩

一、拉伸与压缩的概念：杆件所受外力（或外力的合力）作用线与杆轴线重合；杆件的变形为轴线方向的伸长或缩短。这种变形形式称为轴向拉伸或轴向压缩。

二、轴向拉伸或压缩的强度计算

P111 正应力  $\sigma = \frac{F_N}{A} \leq [\sigma]$  许用应力(强度条件),  $[\sigma] = \sigma^o / n, \sigma^o$

是材料的极限应力

上式可以解决三个方面的强度计算问题：强度校核；设计截面；确定许可载荷。

三、轴向拉伸或压缩时的变形

1、轴向形变

P114 线应变： $\epsilon = \frac{\Delta l}{l}$ ，胡克定律  $\sigma = E\epsilon$  或  $\Delta l = \frac{F_N l}{EA}$ ，E 是材料拉

压弹性模量，EA 是材料抗拉压刚度

2、横向形变

横向线应变  $\epsilon' = -\mu\epsilon$ ，μ 是泊松比

四、材料在拉伸和压缩时的力学性质

1、低碳钢在拉伸时的力学性质

（1）弹性阶段

弹性阶段由直线段 oa 和微弯段 ab 组成，a 点对应的应力值称为比例极限，用  $\sigma_p$

表示。在微弯段 ab，应力与应变不再成比例，但材料的变形仍是弹性的。b 点对应的应力值称为弹性极限，用  $\sigma_e$  表示，它是材料只产生弹性变形的最大应力值。

（2）屈服阶段

当应力超过 b 点，增加到某一数值时，变形显著增长而应力几乎不变，这种现象称为屈服。屈服阶段的最低点 c 所对应的应力值称为屈服极限，用  $\sigma_s$  表示。

屈服极限  $\sigma_s$  是衡量材料强度的重要指标。

（3）强化阶段

超过屈服阶段后，材料又恢复了对变形的抗力，若它要继续变形必须增加拉力，这种现象称为材料的强化，所以 cd 段称为强化阶段，最高点 d 所对应的应力称为强度极限，用  $\sigma_b$  表示，它是材料能承受的最大应力，也是衡量材料强度的

另一重要指标。

（4）局部变形阶段

试件拉断后，弹性变形消失，塑性变形仍然保留。残余伸长与 l 之比的百分率称为伸长率，用 δ 表示

$$\delta = \frac{l_1 - l}{l} \times 100\%$$
，衡量材料塑性的另一指标是断面收缩率 ψ，

$$\psi = \frac{A - A_1}{A} \times 100\%$$

塑性材料（如低碳钢）通常以屈服极限为其极限应力。对于脆性材料，由于没有屈服极限，故以断裂时的强度极限  $\sigma_b$  为其极限应力。

P122 应力集中：由于构件形状尺寸的突变，引起局部应力急剧增大的现象，称为应力集中。应力集中处的最大应力  $\sigma_{max}$  与该截面上平均应力  $\sigma_m$  之比，称

为理论应力集中因数，用  $K_t$  表示， $K_t = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_m}$ ， $K_t$  与材料无关，它反映了

应力集中的程度，其值大于 1

### 第十三章 剪切

剪切：作用在构件两侧面上分布力的合力大小相等、方向相反、作用线垂直杆轴线且相距很近；构件沿着与水平行的截面发生相对错动。这种变形形式称为剪切。

P128 剪切实用计算：假定切应力在剪切面上是均匀分布的，强度条件：

$$\tau = \frac{F_S}{A} \leq [\tau] \text{ 许用切应力, } [\tau] = \tau^o / n。$$

挤压实用计算：假定挤压应力在挤压面上是均匀分布的

$$\text{挤压强度条件: } \sigma_{bs} = \frac{F_{bs}}{A_{bs}} \leq [\sigma_{bs}] \text{ 许用挤压应力, 对圆柱形挤压面}$$

$$A_{bs} = dl, \text{ d 是圆直径, l 是圆柱高度}$$

切应力互等定理：在单元体互相垂直的截面上，垂直于截面交线的切应力必定成对存在，大小相等，方向则均指向或都背离此交线，这称为切应力互等定理。  
剪切胡克定律：切应变  $\gamma$  与横截面相对错动的位移成正比； $\gamma$  所在的截面与切应力所在的截面是相互垂直的。切应力  $\tau$  与切应变  $\gamma$  成正比关系： $\tau = G\gamma$ ，上式称为胡克剪切定律。

### 第十四章 扭转

1、扭转：外力是一对大小相等、转向相反的力偶，作用在垂直于杆轴线的平面内；其变形的特点是各横截面绕轴线相对转动。杆件的这种变形形式称为扭转，以扭转变形为主的杆件称为轴。

2、P134 传动轴扭转外力偶矩  $M_0 = 9550 \frac{P}{n} (N \cdot m)$ ， $P$  是功率， $n$  是转速(r/min)

3、P135 扭矩  $T$ ：横截面上的内力偶矩  $T$  称为扭矩。按照右手螺旋法则，将扭矩用矢量（双箭头）表示，其指向离开截面的为正，反之为负。

4、圆轴扭转时横截面的应力：

- （1）横截面的间距不变，线应变  $\epsilon = 0$ ，所以横截面上没有正应力。
- （2）由于横截面像刚性平面一样绕轴线作相对转动，圆柱面上小矩形沿圆周方向发生相对错动，其直角产生了微小的改变，出现了切应变。

$$5、P137 \text{ 扭转切应力 } \sigma_{\max} = \frac{T}{I_p / R} = \frac{T}{W_p}, \text{ } I_p \text{ 是极惯性矩, } W_p \text{ 是抗扭}$$

$$\text{截面系数: 圆形 } I_p = \frac{\pi D^4}{32}, W_p = \frac{\pi D^3}{16},$$

$$\text{空心圆轴 } I_p = \frac{\pi D^4}{32} (1 - \alpha^4), W_p = \frac{\pi D^3}{16} (1 - \alpha^4),$$

$$\alpha = d/D$$

$$\text{等直圆轴扭转强度条件 } \tau_{\max} = \frac{|T|_{\max}}{W_p} \leq [\tau] \text{ 许用切应力;}$$

$$\text{阶梯轴的情况 } \tau_{\max} = \left( \frac{T}{W_p} \right)_{\max} \leq [\tau]$$

6、圆轴的扭转变形

$$P139 \text{ 扭转角 } \phi = \frac{Tl}{GI_p} \text{ ( } \phi \text{ 的单位是弧度), } GI_p: \text{ 截面的抗扭刚度, 其值越}$$

大，圆轴抗扭转变形的能力越强。

$$7、\text{刚度条件 } \phi = \frac{\phi}{l} = \frac{T}{GI_p} \leq [\phi] \text{ 许用扭转角, 单位是度/米, 需把上式}$$

中的弧度换算成度，即

$$\phi = \frac{T}{GI_p} \times \frac{180}{\pi} \leq [\phi] (^{\circ} / m)$$

### 第十五章 弯曲内力

1、平面弯曲：受弯构件受力的特点是：外力是垂直于杆轴线的横向力或作用在其轴线平面内的力偶；变形的特点是：杆轴线弯曲成一条曲线。这种变形形式称为弯曲，以弯曲变形为主的杆件称为梁。

工程中梁的横截面一般都有一个对称轴。该对称轴所组成的平面称为纵向对称面，若外力都作用在该平面内，梁的轴线将在该平面内弯成一条平面曲线，这种弯曲称为平面弯曲。

2、静定梁的三种基本形式：简支梁、外伸梁、悬臂梁。

3、弯曲内力：在所截截面的内侧取微段，凡使微段产生顺时针转动趋势的剪力为正，反之为负。使微段弯曲变形后，凹面朝上的弯矩为正，反之为负。

4、P146 剪力  $F_s$ 、弯矩  $M$ ：剪力  $F_s$  等于截面以左梁上所有外力的代数和；弯矩  $M$  等于截面以左梁上所有外力对截面形心力矩的代数和。在左段梁上，向上的横向外力产生正剪力和正弯矩，反之为负剪力和负弯矩；顺时针转向的外力偶产生正弯矩，反之为负。

剪力方程和弯矩方程：剪力和弯矩沿轴线的变化可表示为  $x$  的函数，即

$$F_s = F_s(x), M = M(x), \text{ 上述关系称为剪力方程和弯矩方程。该方}$$

程可以图线表示，以  $x$  为横坐标， $F_s$  或  $M$  为纵坐标，取向上为正，所画出的  $F_s$ 、 $M$  沿轴线变化的图线称为剪力图和弯矩图。

5、剪力、弯矩和分布载荷集度之间的微分关系

P150 剪力  $F_s$ 、弯矩  $M$  与均衡力  $q$  的关系

$$\frac{dF_s(x)}{dx} = q, \frac{dM(x)}{dx} = F_s(x), \frac{d^2M(x)}{dx^2} = q$$

上述三式表明：剪力图上某处斜率等于该处线分布载荷集度（规定向上的  $q$  为正）；弯矩图上某处的斜率等于该处剪力值；弯矩图上某处斜率的变化率等于该处线分布的载荷集度。可得出剪力和弯矩图的规律如下：

（1）若梁段的  $q=0$ ，则该段剪力图为水平线；弯矩图为斜直线，当  $F_s > 0$  时，直线右向上倾斜，当  $F_s < 0$  时，直线右向下倾斜。

（2）若梁段的  $q$  等于常数，则该段剪力图为斜直线，弯矩图为二次抛物线；当  $q$  向上（ $q > 0$  时）， $F_s$  图为右向上倾斜的直线， $M$  图为凹面向上的抛物线；当  $q$  向下时，则相反。

（3）在  $F_s=0$  处，弯矩有极值， $M$  图在该处有水平切线；当  $q$  向上时，弯矩有极小值，当  $q$  向下时，弯矩有极大值。

（4）在集中力作用处，剪力图发生突跳，突跳数值和方向与集中力相同；该处

M图连续，但有转折。

(5) 在集中力偶作用处，弯矩图发生突跳，突跳数值与集中力偶相同。

(6) 最大弯矩可能发生在集中力和集中力偶作用处（包括插入端处），或剪力等于零的截面处。

6、作剪力图和弯矩图的步骤：

(1) 求支反力。

(2) 在载荷不连续处分力区，并写出剪力方程、弯矩方程。

(3) 作出剪力图和弯矩图，确定最大剪力、最大弯矩。

## 第十六章 弯曲应力

1、P154 中性轴：梁弯曲时，靠近顶面的纤维缩短了，靠近底面的纤维伸长了，由于变形的连续性，梁内必有一层不伸长也不缩短的纵向纤维，称为中性层，中性层与横截面的交线称为中性轴，梁弯曲时横截面绕中性轴相对转动。

2、中性层曲率  $k = \frac{d\theta}{dx} = \frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI_z}$ ， $EI_z$  是截面抗弯刚度。横截面

上正应力  $\sigma = \frac{My}{I_z}$ ，M 是弯矩，y 是所求应力点到中性轴的距离。

3、P155 最大正应力发生在距离中性层最远的各点处，最大正应力

$\sigma_{\max} = \frac{My_{\max}}{I_z} = \frac{M}{W_z}$ ， $I_z$  是惯性矩， $W_z$  是抗弯截面系数：

矩形  $I_z = \frac{bh^3}{12}$ ， $W_z = \frac{bh^2}{6}$ ；（ $I_z = \frac{zy^3}{12}$ ， $W_z = \frac{zy^2}{6}$ ）

圆形  $I_z = \frac{\pi d^4}{64}$ ， $W_z = \frac{\pi d^3}{32}$ ；空心圆截面

$I_z = \frac{\pi d^4}{64}(1 - \alpha^4)$ ， $W_z = \frac{\pi d^3}{32}(1 - \alpha^4)$ ， $\alpha = \frac{d}{D}$

4、组合截面的惯性矩和平行移轴公式

根据惯性矩的定义，组成截面对某轴的惯性矩应等于各组成部分面积对该轴的

惯性矩之和。即： $I_z = \sum_{i=1}^n I_{zi}$

$I_z = I_{zc} + a^2 A$ ，称为惯性矩平行移轴公式，表明截面对某轴的惯性矩等于它对平行于该轴的形心轴的惯性矩，加上截面面积与两轴间距离平方的乘积。

5、P158 弯曲正应力强度计算  $\sigma_{\max} \leq [\sigma]$  许用弯曲正应力

对于低碳钢一类的塑性材料，强度条件是

$$\sigma_{\max} = \frac{|M|_{\max}}{W_z} \leq [\sigma]$$

对于脆性材料，强度条件是  $\sigma_{\max}^+ = \frac{M_{\max} y_1}{I_z} \leq [\sigma^+]$ ，

$$\sigma_{\max}^- = \frac{M_{\max} y_1}{I_z} \leq [\sigma^-]$$

6、弯曲切应力和切应力强度条件

(1) 矩形截面梁的切应力

对于高大于宽的矩形截面梁，切应力的分布特点是：

横截面上各点的切应力方向与剪力平行，沿横截面的宽度均匀分布，沿高度按抛物线分布，

$$\tau = \frac{6F_s}{bh^3} \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right), F_s \text{ 是横截面的剪力, } b、h \text{ 分别是截面的宽和高, } y$$

是所求应力点到中性轴的距离。

在截面的上、下边缘处，切应力  $\tau = 0$ ，在中性轴上各点处，切应力为最大，其

值是  $\tau_{\max} = \frac{3F_s}{2bh} = \frac{3}{2} \frac{F_s}{A}$ ，A 是横截面的面积，可见矩形截面梁的最大

切应力是平均切应力的 1.5 倍。

(2) 工字形截面梁的切应力

工字形截面梁最大切应力发生在中性轴上，其值为

$$\tau_{\max} = \frac{F_s S_{z\max}^*}{dI_z} \approx \frac{F_s}{A_{\text{腹板}}}$$

(3) 圆形截面与薄壁环截面梁的切应力

圆形截面最大弯曲切应力为  $\tau_{\max} = \frac{4}{3} \frac{F_s}{A}$ ，A 是截面面积；

薄壁圆环截面最大弯曲切应力为  $\tau_{\max} = 2 \frac{F_s}{A}$ ，A 是圆环截面积

$$A = 2\pi R t$$

切应力强度条件是  $\tau_{\max} = k \frac{F_{s\max}}{A} \leq [\tau]$  材料的剪切许永应力。

P163 提高弯曲强度的措施：合理安排梁的支承与载荷；合理设计截面的形状；

采用等强度梁。

## 第十七章 弯曲变形

1、P169 挠度 v、转角  $\theta$ ：取梁变形前的轴线为 x 轴，梁左端为坐标原点，y 轴向上。当梁在 xy 平面发生弯曲时，其轴线就在该平面内弯成一条连续而光滑的曲线，称为挠曲线。横截面形心在垂直于 x 轴方向的线位移 v 称为挠度，横截面绕中性轴转过的角度  $\theta$  称为转角。向上挠度为正，逆时针转动的转角为正，反之为负。

2、挠度方程和转角方程分别是：

$$v = v(x), \theta = \theta(x), \theta \approx \tan \theta = \frac{dv}{dx} = v'(x)$$

挠曲线近似微分方程： $\frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI}$  或  $v'' = \frac{M(x)}{EI}$

梁在固定端处挠度和转角都等于零。

P172 叠加法：当梁上有几种载荷同时作用时，可以先分别计算每一种载荷单独作用时梁所产生的变形，然后按代数值相加，即得梁的实际变形，这种方法称为叠加法。

3、梁的刚度条件： $v_{\max} \leq [v]$  许用挠度， $\theta_{\max} \leq [\theta]$  许用转角。

提高弯曲刚度的措施：缩短梁的跨度（或增加支座）对于提高梁的刚度比提高强度更有效；梁的变形与惯性矩 I 成反比，而强度与抗弯截面系数 W 成反比；梁的变形与材料的弹性模量 E 成反比，而强度与 E 无关。

P176 表 17-1 （8）（9）

第十八章组合变形

组合变形：许多工程构件在外力作用下，往往同时产生两种或两种以上的基本变形，称为组合变形。

拉压+弯曲：由拉压应力与弯曲应力叠加后仍为拉压应力，对于拉压强度相等的材料，强度条件是

$$\sigma^+_{\max} = \frac{F_N}{A} + \frac{M_{\max}}{W_z} \leq [\sigma]$$
；对于抗拉和抗压强度不等的材料，需对

最大拉应力和最大压应力分别进行校核。

P184 弯曲+扭转：横向力使轴弯曲，弯矩是 M；转动动力使轴扭转，扭矩是 T。

第三强度理论 
$$\sigma_{r3} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]$$

；

第四强度理论 
$$\sigma_{r4} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma]$$
，式中 σ 和 τ 分别是危险点的正应力和切应力。

圆轴仅受弯扭组合变形时，第三、第四强度理论写成下式

第三强度理论 
$$\sigma_{r3} = \frac{1}{W_z} \sqrt{M^2 + T^2} \leq [\sigma]$$
；

第四强度理论 
$$\sigma_{r4} = \frac{1}{W_z} \sqrt{M^2 + 0.75T^2} \leq [\sigma]$$
，式中 M 和 T 分

别为危险截面的弯矩和扭矩，Wz 是抗弯截面系数。

第十九章 压杆的稳定性

1、压杆的稳定性：在受压时不能保持原有直线平衡形式而发生弯曲，这种破坏现象称为压杆失稳。对于受压杆件，除了必须具有足够的强度和刚度外，还必须具有保持原有直线平衡形式的能力，即具有足够的稳定性。

2、临界力：临界力就是压杆保持微弯平衡的最小轴向力。

3、欧拉公式：
$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2}$$
，μ 是长度因数，反映了杆端约束条件对临界

力的影响，杆端约束越强，μ 越小，临界力越大。μl 称为压杆的相当长度，即把不同约束的压杆折算成两端铰支压杆的长度。

约束	两端铰链	一端固定一端自由	一端固定一端铰链	两端固定
μ	1	2	0.7	0.5

4、临界应力 
$$\sigma_{cr} = \frac{F_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2 A}$$
 或 
$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$$

其中压杆的柔度 
$$\lambda = \frac{\mu l}{i}$$
，综合反映了压杆的长度、杆端约束、截面形状和尺寸对临界应力的影响。

惯性半径 
$$i = \sqrt{\frac{I}{A}}$$

欧拉公式的适用范围是 
$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \leq \sigma_p$$
，即

$$\lambda \geq \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_p}} = \lambda_p$$
，λ<sub>p</sub> 是与材料比例极限相对应的柔度。

（1）细长杆 
$$\lambda \leq \lambda_p$$
，欧拉公式 
$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$$
；

（2）中长杆 
$$\lambda_s < \lambda < \lambda_p$$
，直线公式 
$$\sigma_{cr} = a - b\lambda$$
；

（3）粗短杆 
$$\lambda \leq \lambda_s$$
，强度公式 
$$\sigma_{cr} = \sigma_s$$

5、压杆的稳定性条件是：
$$F = \frac{F_{cr}}{[n_{st}]}$$

或 
$$n_{st} = \frac{F_{cr}}{F} = \frac{\sigma_{cr}}{\sigma} \geq [n_{st}]$$
，n<sub>st</sub> 是压杆工作时的实际稳定安全因数，

[n<sub>st</sub>]是规定的稳定安全因数，σ 是压杆的工作应力。

若压杆截面由局面削弱（如螺钉孔等）时，应同时进行强度和稳定校核。稳定性校核时，可以不考虑截面局部削弱的影响，因为压杆保持稳定性的能力与压杆整体的弯曲刚度有关，截面局部削弱对压杆临界力影响很小。

提高压杆稳定性的措施：合理选择材料；减小柔度（包括减小压杆的支承长度；改善支承情况，减小长度因数 μ；选用合理的截面形状）

第二十章 动载荷

1、动载荷和静载荷的本质区别：前者构件内各点的加速度必须考虑，后者可忽略不计。

动应力和动应变：由加速度引起的载荷一般称为动载荷，在动载荷作用下，构件内的应力和变形称为动应力和动应变。

2、构件作匀加速直线运动时的应力

匀加速直线运动中，
$$K_d = 1 + \frac{a}{g}$$
，K<sub>d</sub> 是动荷因数，是动内力和静内力的比值。

其强度条件是 
$$\sigma_{d\max} = K_d \sigma_{j\max} \leq [\sigma]$$
 材料在静载荷下的许用应力值。

对于作向上匀加速直线运动（加速度已知）的构件，其应力和变形的分析方法是：首先计算动荷因数 Kd；然后计算构件的静应力和静变形；最后计算动应力和动变形。

3、构件受冲击时的应力和变形

（1）自由落体冲击

$$\frac{F_d}{G} = \frac{\Delta_d}{\Delta_j} = K_d, \quad K_d \text{ 是自由落体冲击时的动荷因数。}$$

$$\text{计算可得, } K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_j}}$$

(2) 对  $K_d$  的讨论:  $\Delta_j$  是冲击物以静载荷方式作用在被冲击物上时, 冲击点沿冲击方向的线位移;

若  $h=0$ , 即冲击物  $G$  突然加到被冲击物上时, 此时产生的冲击应力和变形是静载荷下的两倍, 称为突加载荷;

$$\text{当 } \Delta_j/h \gg 1 \text{ 时, 可近似取 } K_d = \sqrt{\frac{2h}{\Delta_j}}, \text{ 此式可用于冲击问题的比较}$$

和分析;

动荷因数  $K_d$  虽由冲击点的静位移求得, 但适用于整个冲击系统, 即冲击系统的动荷因数只有一个, 构件上所有点的动变形和动应力都可计算。

P204 提高构件抗冲击能力的措施: 静变形  $\Delta_j$  越大, 动荷因数  $K_d$  越小, 所以

增大静变形是减小冲击载荷、提高构件抗冲击能力的主要途径。由于静变形  $\Delta_j$  与构件的刚度成反比, 因此, 常采用降低构件刚度的方法来减少冲击载荷的影响。

## 第二十一章 交变应力

1、交变应力: 随时间作周期性变化的应力, 称为交变应力。交变应力重复变化一次的过程, 称为一个应力循环。

疲劳破坏的特点及机理: 构件在交变应力作用下的破坏与静应力下的破坏有本质区别: (1) 构件破坏时的应力一般远低于材料的强度极限, 甚至低于材料的屈服极限。

(2) 即使是塑性材料制作的构件, 破坏时也无明显的塑性变形, 而是突然发生脆性断裂;

(3) 破坏的端口通常呈现两个区域: 一个是光滑区域, 一个是颗粒状的粗糙区域。

构件的疲劳破坏实质上是裂纹萌生、扩展和最后断裂的过程。

2、交变应力的表示方法和循环特征

一个应力循环中的最大应力和最小应力分别用  $\sigma_{\max}$ 、 $\sigma_{\min}$  表示; 平均应力

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{\min} + \sigma_{\max}}{2}, \text{ 是交变应力中的静应力部分;}$$

交变应力的变化幅度为  $\sigma_a = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2}$ , 是交变应力中的动应力部分。

循环特征  $r = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}}$ : (1)  $\sigma_{\max} = -\sigma_{\min}$ ,  $r=-1$ , 对称循环交变应力;

(2)  $\sigma_{\min}=0$ ,  $r=0$ , 脉动循环交变应力;

(3)  $\sigma_{\max} = \sigma_{\min}$ ,  $r=1$ , 静应力。

3、材料的持久极限: 材料能经受无限次应力循环而不发生疲劳破坏的最高应力值, 称为材料的持久极限 (或疲劳极限)。材料持久极限用符号  $\sigma_r$  表示,  $r$  是循环特征。

P210 影响构件持久极限的主要因素: 构件外形的影响; 尺寸大小的影响; 表面加工质量的影响。

除此以外还有一些因素, 如周围介质对构件的腐蚀, 某些加工工艺所造成的残余应力等, 对构件的持久极限都有一定影响。

提高构件疲劳强度的措施: 合理设计构件形状, 降低有效应力集中因数; 提高表面光洁度, 降低表层应力集中, 可以提高构件的持久极限; 工程上还通过一些工艺措施来提高构件表层强度, 从而达到提高疲劳强度的目的。