$R_1 R_2 = U$

T: $\mathcal{F} \models R_1 \cap R_2 \to R_1 \setminus R_2 \lor \mathcal{F} \models R_1 \cap R_2 \to R_2 \setminus R_1$
акко $\mathcal{F} \models \bowtie(R_1, R_2)$

($\Rightarrow$) Доказати: $\mathcal{F} \models \bowtie(R_1, R_2)$.

$(\forall r \in SAT(U))(r \models \mathcal{F} \Rightarrow r \models \bowtie(R_1, R_2))$.

$r \in SAT(U)$ и $r \models \mathcal{F}$.

Треба доказати: $r \models \bowtie(R_1, R_2)$.

$$r = \pi_{R_1}(r) \bowtie \pi_{R_2}(r)$$

Нека $\mathcal{F} \models R_1 \cap R_2 \to R_1 \setminus R_2$. Тада:

$$\pi_{\underbrace{(R_1 \cap R_2)(R_1 \setminus R_2)}_{R_1}}(r) \bowtie \pi_{\underbrace{(R_1 \cap R_2)(U \setminus (R_1 \setminus R_2))}_{R_2}}(r) = r$$

$$\pi_{R_1}(r) \bowtie \pi_{R_2}(r) = r$$

Нека $\mathcal{F} \models R_1 \cap R_2 \to R_2 \setminus R_1$

$$\pi_{\underbrace{(R_1 \cap R_2)(R_2 \setminus R_1)}_{R_2}}(r) \bowtie \pi_{\underbrace{(R_1 \cap R_2)(U \setminus (R_2 \setminus R_1))}_{R_1}}(r) = r$$

$$\pi_{R_2}(r) \bowtie \pi_{R_1}(r) = r$$

(⇐) Доказати: $\mathcal{F} \models R_1 \cap R_2 \to R_1 \setminus R_2 \ \lor$
$\mathcal{F} \models R_1 \cap R_2 \to R_2 \setminus R_1$

$(\forall r \in SAT(\mathcal{U}))(r \models \mathcal{F} \Rightarrow r \models R_1 \cap R_2 \to R_1 \setminus R_2 \ \lor$
$r \models R_1 \cap R_2 \to R_2 \setminus R_1)$

Супротна претпоставка:

$(\exists r \in SAT(\mathcal{U}))(r \models \mathcal{F} \land r \not\models \{R_1 \cap R_2 \to R_1 \setminus R_2,$
$R_1 \cap R_2 \to R_2 \setminus R_1\})$

Нека је:

r	$(R_1 \cap R_2)^+_\mathcal{F}$	$\mathcal{U} \setminus (R_1 \cap R_2)^+_\mathcal{F}$
t_1	0	0
t_2	0	1

$t_1[(R_1 \cap R_2)^+_\mathcal{F}] = t_2[(R_1 \cap R_2)^+_\mathcal{F}] \ \land$

$t_1[\mathcal{U} \setminus (R_1 \cap R_2)^+_\mathcal{F}] \neq t_2[\mathcal{U} \setminus (R_1 \cap R_2)^+_\mathcal{F}]$

Док: $r \models \mathcal{F}$: $(\forall V \to W \in \mathcal{F})(r \models V \to W)$.

Нека је $V \to W \in \mathcal{F}$. а) $V \subseteq (R_1 \cap R_2)^+_\mathcal{F} \ \lor$
б) $V \not\subseteq (R_1 \cap R_2)^+_\mathcal{F}$

а) $V \subseteq (R_1 \cap R_2)^+_\mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{F} \models R_1 \cap R_2 \to V \quad \mathcal{F} \models V \to W$
$\vdash \mathcal{F} \models R_1 \cap R_2 \to W$
$\Rightarrow W \subseteq (R_1 \cap R_2)^+_\mathcal{F}$

$$\left.\begin{array}{l} V \subseteq (R_1 \cap R_2)^+_\mathcal{F} \Rightarrow t_1[V] = t_2[V] \\ W \subseteq (R_1 \cap R_2)^+_\mathcal{F} \Rightarrow t_1[W] = t_2[W] \end{array}\right\} \Rightarrow r \models V \to W$$

б) $V \not\subseteq (R_1 \cap R_2)^+_\mathcal{F} \Rightarrow t_1[V] \neq t_2[V] \Rightarrow r \models V \to W$

Коначно: $\boxed{r \models \mathcal{F}}$.

Претпоставка: $r \not\models \{R_1 \cap R_2 \to R_1 \setminus R_2,$
$R_1 \cap R_2 \to R_2 \setminus R_1\}$

$\Rightarrow \; t_1[R_1 \cap R_2] = t_2[R_1 \cap R_2] \wedge$
$t_1[R_1 \setminus R_2] \neq t_2[R_1 \setminus R_2] \wedge$
$t_1[R_2 \setminus R_1] \neq t_2[R_2 \setminus R_1].$

$\Rightarrow \; R_1 \setminus R_2 \not\subseteq (R_1 \cap R_2)^+_F \; \wedge \; R_2 \setminus R_1 \not\subseteq (R_1 \cap R_2)^+_F$

$\Rightarrow (\exists A \in \mathcal{U} \setminus (R_1 \cap R_2)^+_F)(A \in R_1 \setminus R_2) \; \wedge$
$(\exists B \in \mathcal{U} \setminus (R_1 \cap R_2)^+_F)(B \in R_2 \setminus R_1)$

$(R_1 \setminus R_2) \cap (R_2 \setminus R_1) = \emptyset \Rightarrow A \neq B$

$$\left.\begin{array}{l} A \in \mathcal{U} \setminus (R_1 \cap R_2)^+_F \Rightarrow t_1[A] \neq t_2[A] \\ B \in \mathcal{U} \setminus (R_1 \cap R_2)^+_F \Rightarrow t_1[B] \neq t_2[B] \\ \qquad\qquad\qquad\qquad A \neq B \end{array}\right\} \Rightarrow$$

r може бити конструисан као:

r	$(R_1 \cap R_2)$	A	B	$\mathcal{U} \setminus (R_1 \cap R_2 \; AB)$
t_1	0	a_1	b_1	0
t_2	0	a_2	b_2	0

$\pi_{(R_1 \cap R_2)(R_1 \overset{A}{\setminus} R_2)}(r) \bowtie \pi_{(R_1 \cap R_2)(R_2 \overset{B}{\setminus} R_1)}(r) \neq r \Rightarrow$

$\pi_{R_1}(r) \bowtie \pi_{R_2}(r) \neq r \Rightarrow$

$r \not\models \bowtie(R_1, R_2) \Rightarrow$ контрадикција са полазном претпоставком:

$$\left.\begin{array}{l} r \not\models \bowtie(R_1, R_2) \\ r \models \mathcal{F} \end{array}\right\} \Rightarrow \mathcal{F} \not\models \bowtie(R_1, R_2)$$

$\Pi\Pi$: $$\left.\begin{array}{l} \mathcal{F} \models \bowtie(R_1, R_2) \\ \mathcal{F} \not\models \bowtie(R_1, R_2) \end{array}\right\} \Rightarrow \square$$