SISTEMI LINEARNIH JEDNAČINA GAUSOVA ELIMINACIJA

predavač:
Aleksandar Kovačević

Sistem linearnih algebarskih jednačina (SLAJ)

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 & + a_{12}x_2 & + \cdots & + a_{1n}x_n & = b_1 \\
a_{21}x_1 & + a_{22}x_2 & + \cdots & + a_{2n}x_n & = b_2 \\
\vdots & & & & \vdots \\
a_{n1}x_1 & + a_{n2}x_2 & + \cdots & + a_{nn}x_n & = b_n
\end{cases}
$$

Sistem linearnih algebarskih jednačina (SLAJ)

- Matrični oblik

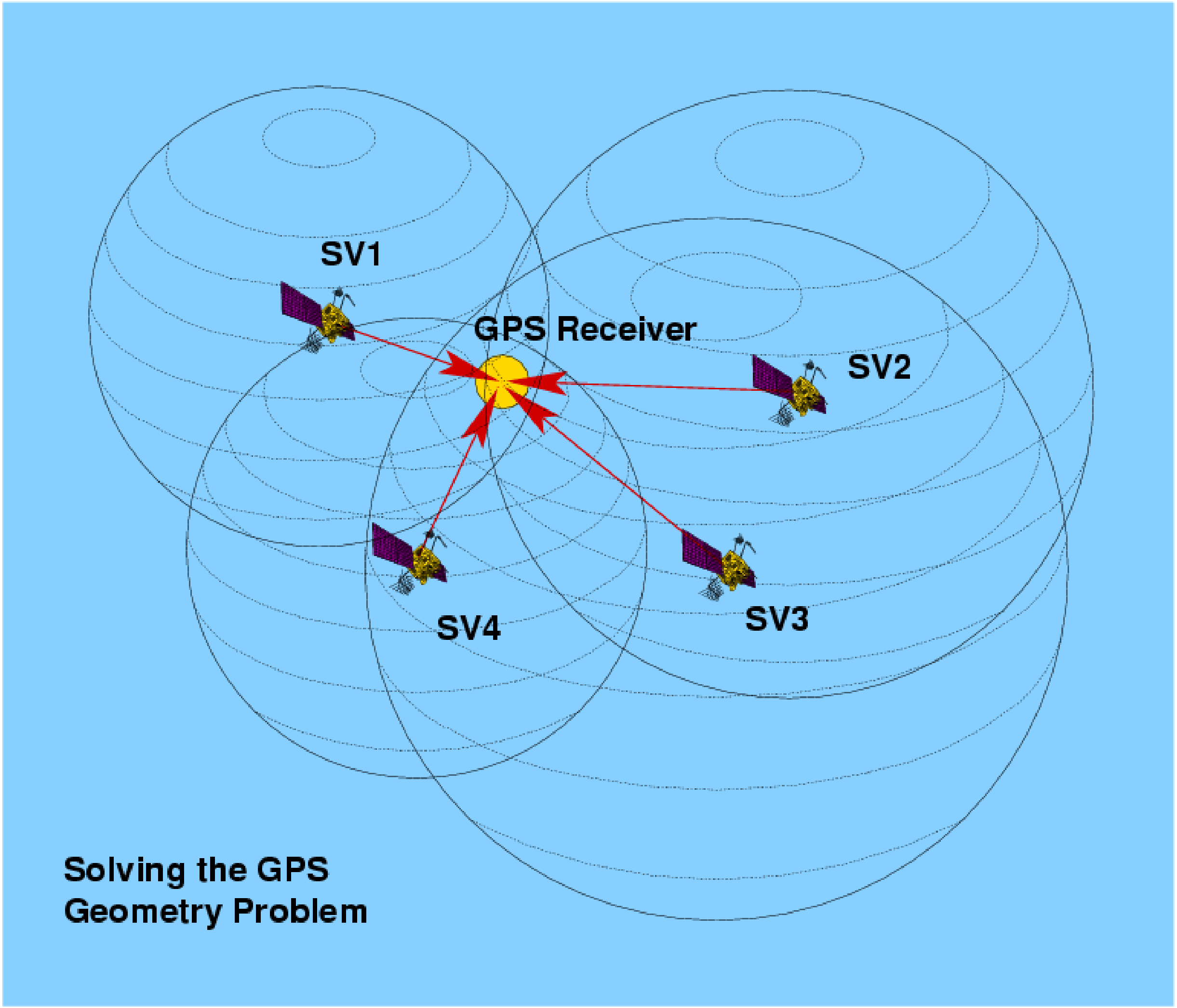
Ax=b

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

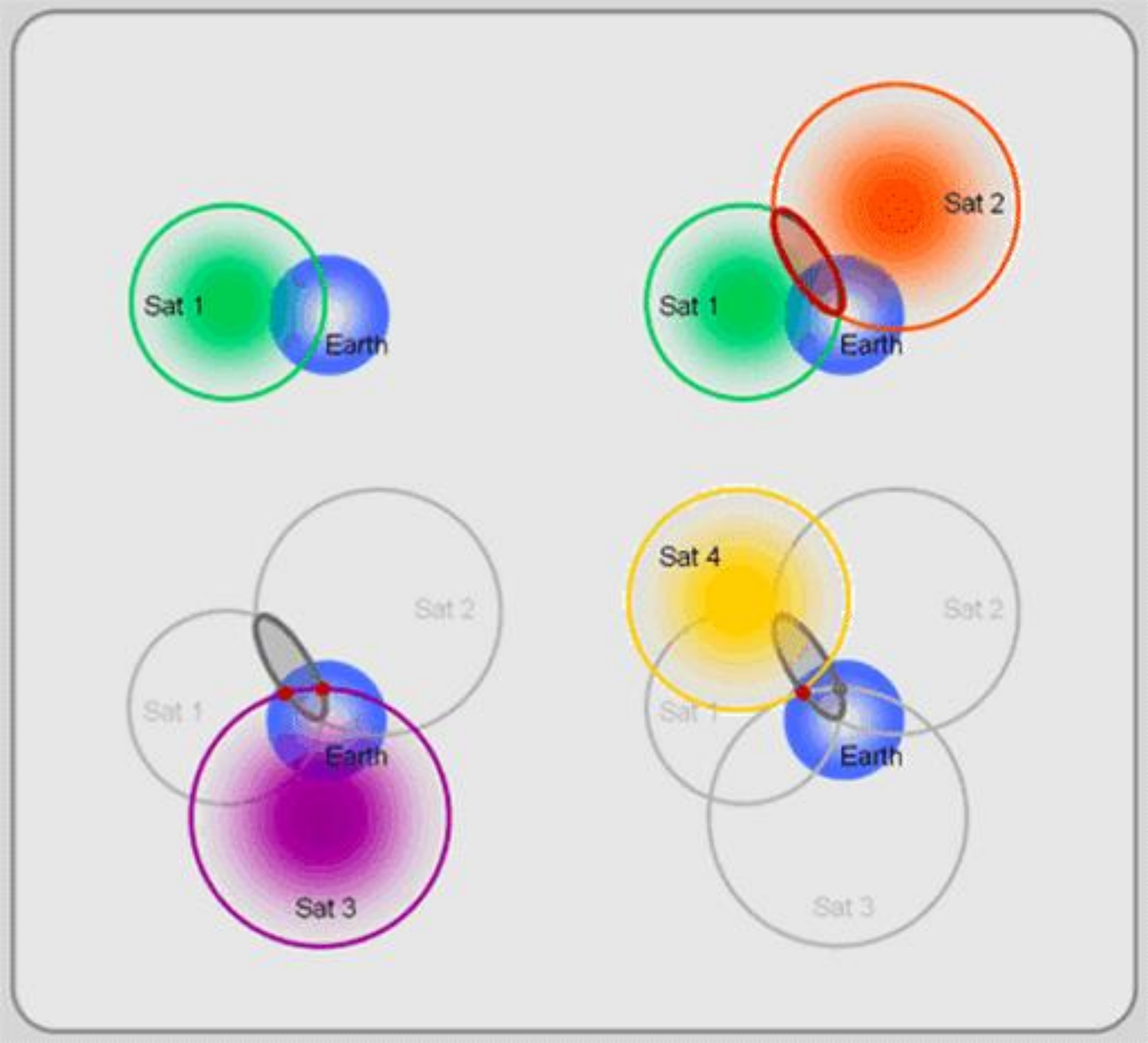
Motivacioni primer - GPS

- Problem određivanje pozicije kod GPS sistema svodi se ne rešavanje sistema jednačina.
- Sistem ima četiri nepoznate
  - tri koordinate položaja (x,y,z)
  - grešku sata gps risivera t_b
- Da bi odredili poziciju treba nam $n \geq 4$ satelita.
- Jednačine sistema koji rešavamo nisu linearne ali se mogu linearizovati.

GPS


SV1
GPS Receiver
SV2
SV4
SV3
Solving the GPS
Geometry Problem

GPS



Sat 1
Earth
Sat 2
Sat 1
Earth
Sat 2
Sat 1
Earth
Sat 3
Sat 4
Sat 2
Sat 1
Earth
Sat 3

GPS Jednačine

$$PR_1 = ct_b + \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2}$$

$$PR_2 = ct_b + \sqrt{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + (z - z_2)^2}$$

$$PR_3 = ct_b + \sqrt{(x - x_3)^2 + (y - y_3)^2 + (z - z_3)^2}$$

$$PR_4 = ct_b + \sqrt{(x - x_4)^2 + (y - y_4)^2 + (z - z_4)^2}$$

- tri koordinate položaja (x,y,z)
- grešku sata gps risivera t_b
- c je brzina svetlosti

GPS rešenje jednačina

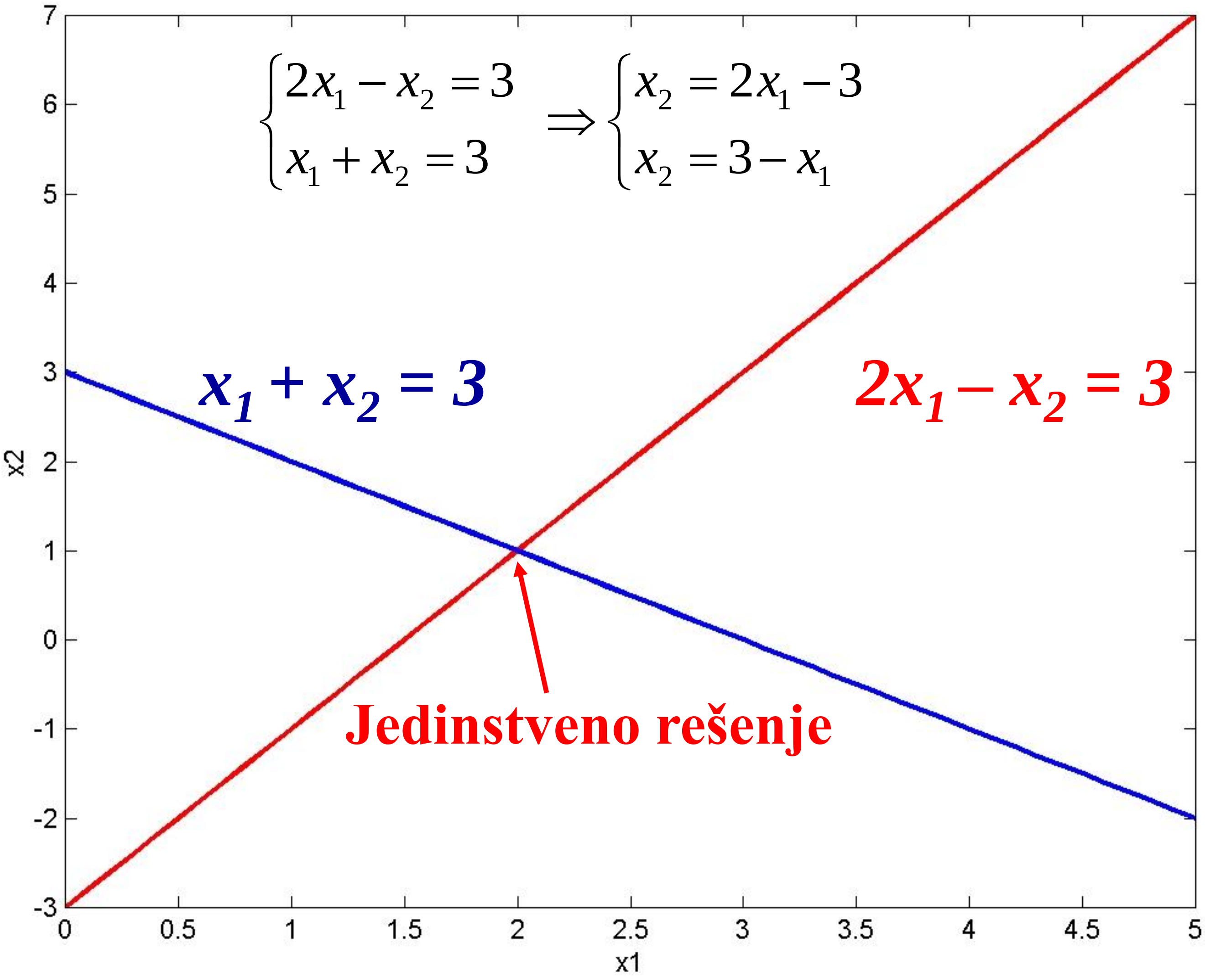
- Prethodni sistem može se rešiti pomoću više različitih numeričkih metoda:
  - Transformišemo sistem u linearan
    - Ako imamo 4 satelita koristimo neki od metoda za rešavanje SLAJ npr. Gausovu eliminaciju
    - Ako imamo više od 4 satelita koristimo Metod Najmanjih Kvadrata, pa u okviru tog metoda rešavamo SLAJ npr. Gausovom eliminacijom
  - Nelinearnom Metodom Najmanjih Kvadrata
  - Iteratvinom metodom za rešavanje nelinearnih jednačina npr. Njutnovom metodom

SLAJ sa malim brojem jednačina

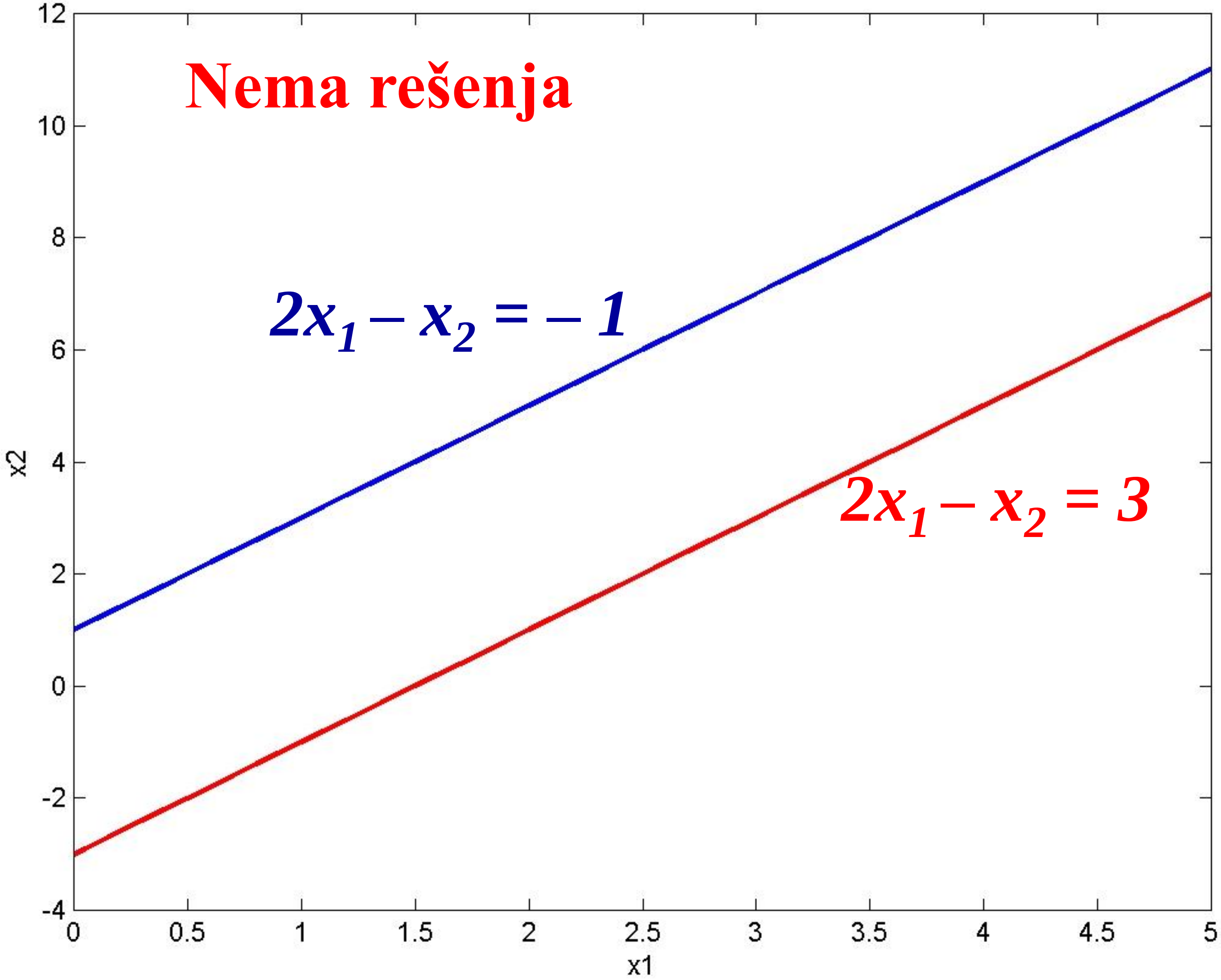
- Tri načina za rešavanje:
  - Grafički
  - Kramerovo pravilo
  - Eliminacijom

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +\cdots & +a_{1n}x_n & =b_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +\cdots & +a_{2n}x_n & =b_2 \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & +a_{n2}x_2 & +\cdots & +a_{nn}x_n & =b_n \end{cases}$$

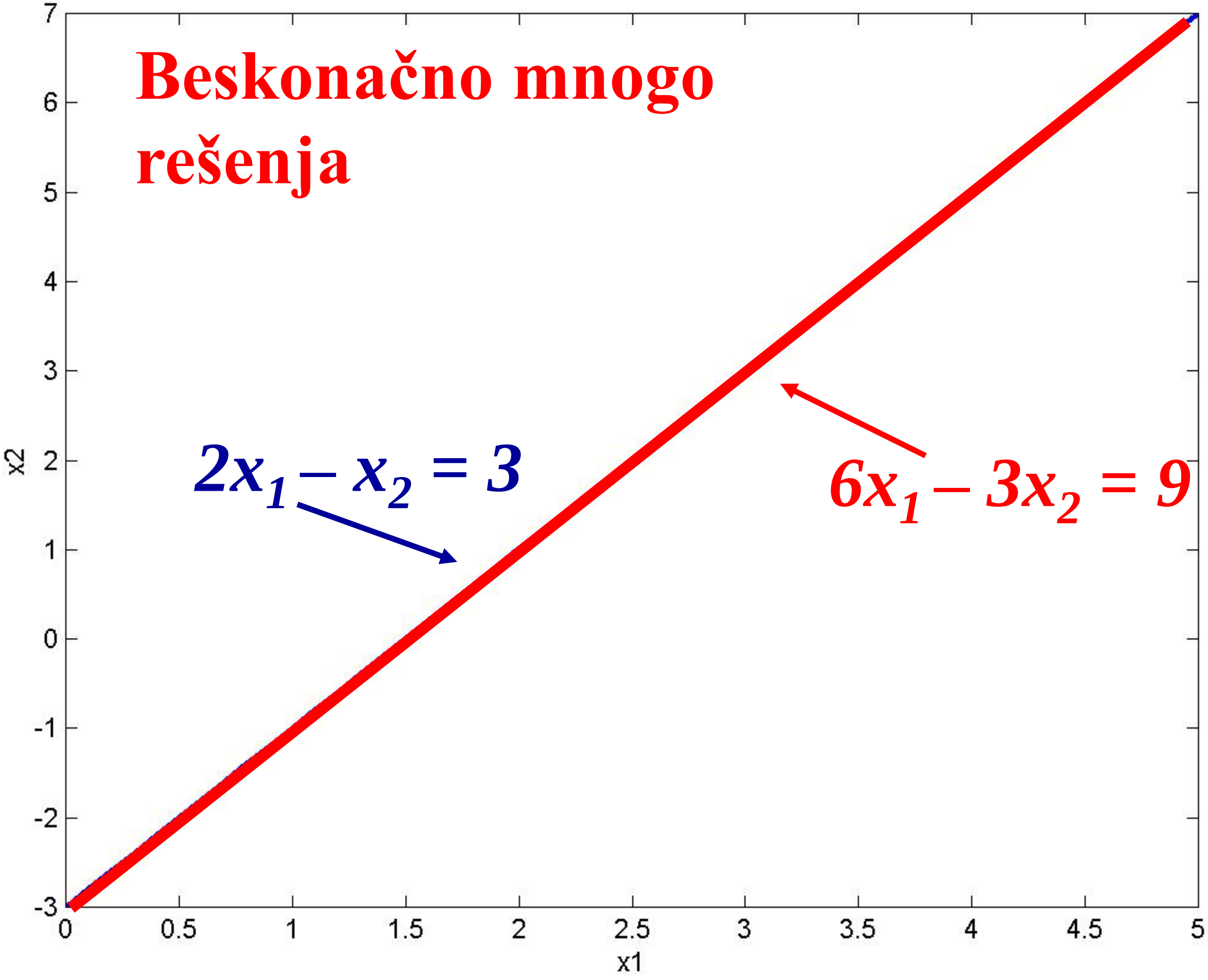
Grafički metod (jedinstveno rešenje)



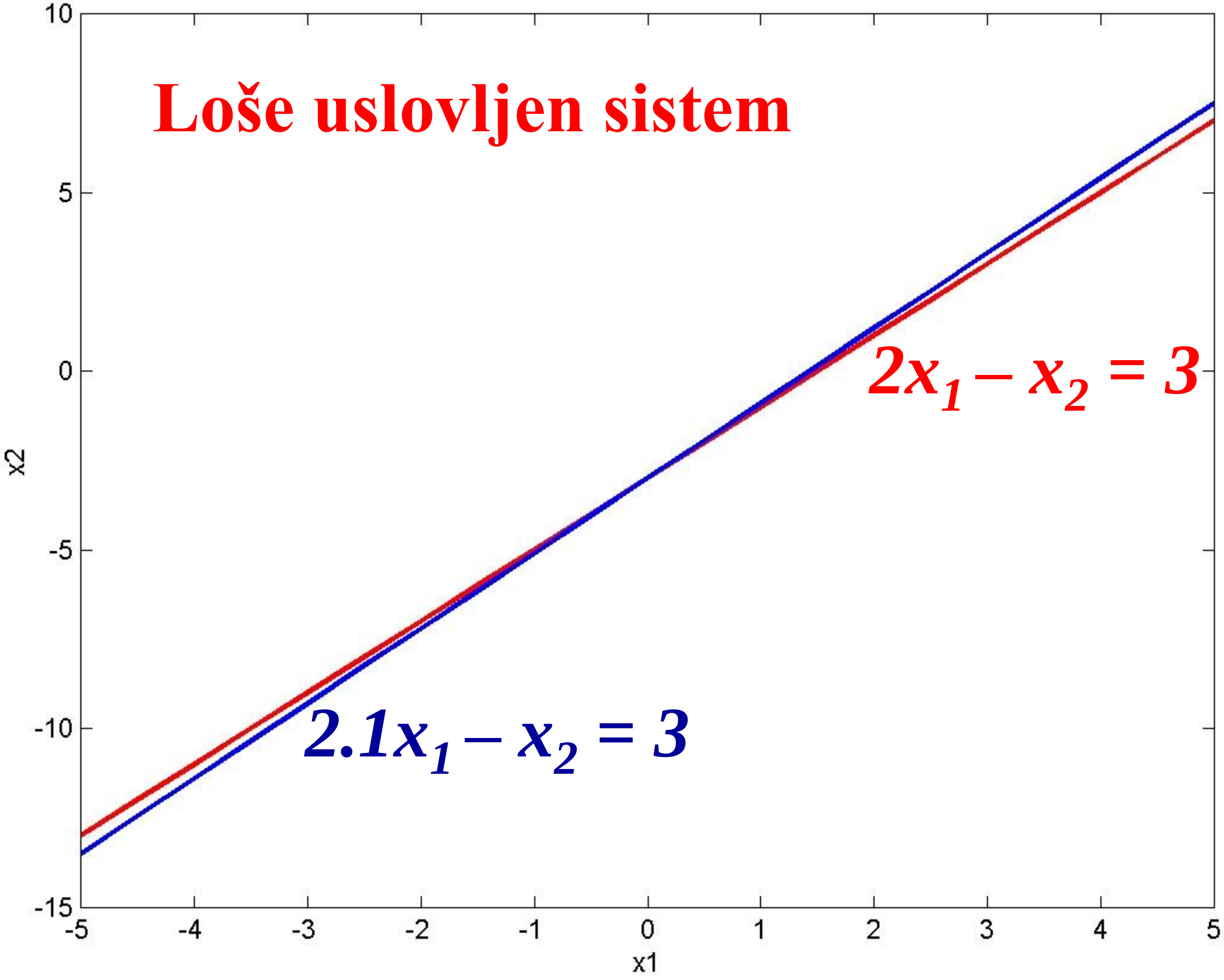
Grafički metod (nema rešenja)



Grafički metod (beskonačno mnogo rešenja)



Grafički metod (loše uslovljen sistem)



Kramerovo pravilo

- Izračunati determinantu *D* matrice *A*.
- matrica 2x2

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

- matrica 3x3

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Kramerovo pravilo

- Da bi izračunali x_k za sistem:

$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1\\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2\\
&\vdots\\
&a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n
\end{aligned}$$

- Pravimo novu matricu *Ak* tako što u *A* zamenimo *k*-tu kolonu sa vektorom *b* i računamo njenu determinantu D_k.

$$x_k = \frac{D_k}{D}$$

Primer

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

Kramerovo pravilo loše uslovljen sistem

- Šta bi se dogodilo da je determinanta D ima vrednost blizu nule ili nula?

$$\boxed{D = det[A] \approx 0}$$

- Deljenje nulom (linearno zavisan sistem) – ima više rešenja.
- Deljenje jako malim brojem (loša opcija zbog grešaka zaokruživanja – detaljnije kasnije tokom predavanja).

Gausova eliminacija

- Manipulisanje jednačinama da bi se eliminisala jedna promenljiva.
- Razviti algoritam koji će to da radi za svaku promenljivu.
- Cilj je doći do gornje trougaone matrice

$$U = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ & & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

- Zamenom unazad pronaći rešenje sistema.

Gausova eliminacija

- Direktan metod
  - nema iteracija tj. trenutnih i prethodnih rešenja.
- Koraci:
  - Eliminacija unapred
    - Kolonu po kolonu elimišemo elemente ispod glavne dijagonale
    - Rezultat je gornja torugaona matrica
  - Zamena unazad
    - Izračunavamo x_n direktno
    - unazad zamenom računamo ostale od x_{n-1} do x_1

Gausova eliminacija

- Početak (elimišemo x_1)

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1\\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2\\
&\vdots\\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n
\end{aligned}
$$

- Množimo prvu jednačinu sa $-a_{21}/a_{11}$ i sabiramo je sa drugom

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{n}x_n &= b_1\\
\cancel{\left(a_{21} - \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{11}\right)x_1} + \left(a_{22} - \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{12}\right)x_2 + \dots + \left(a_{2n} - \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{1n}\right)x_n &= b_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}}b_1\\
&\vdots\\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n
\end{aligned}
$$

Gausova eliminacija

- Rezultat

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a'_{22}x_2 + \ldots + a'_{2n}x_n &= b'_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \ldots + a_{3n}x_n &= b_3 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

- Ponoviti prethodni postupak dok se ne dobije

$$\boxed{\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a'_{22}x_2 + \ldots + a'_{2n}x_n &= b'_2 \\ &\vdots \\ a'_{n2}x_2 + \ldots + a'_{nn}x_n &= b'_n \end{aligned}}$$

Gausova eliminacija

- Prva jednačina zove se pivot jednačina.
- a_{11} je pivot element.
- Nastavljamo: sada množimo drugu jednačinu sa -a'_{32}/a'_{22} i saberemo je sa trećom

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \ldots + a'_{2n}x_n &= b'_2 \\
\cancel{\left(a'_{32} - \frac{a'_{32}}{a'_{22}} a'_{22} \right)} x_2 + \ldots + \left(a'_{3n} - \frac{a'_{32}}{a'_{22}} a'_{2n} \right) x_n &= \left(b'_3 - \frac{a'_{32}}{a'_{22}} b'_2 \right) \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Gausova eliminacija

- Ponoviti postupak da bi eliminisali a'_{i2} i dobili

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \ldots + a'_{2n}x_n &= b'_2 \\
a''_{33}x_3 + \ldots + a''_{3n}x_n &= b''_3 \\
&\vdots \\
a''_{n3}x_3 + \ldots + a''_{nn}x_n &= b''_n
\end{aligned}$$

- Nastaviti da bi dobili:

$$\boxed{\begin{aligned}
\boldsymbol{a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n} &= \boldsymbol{b_1} \\
\boldsymbol{a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \ldots + a'_{2n}x_n} &= \boldsymbol{b'_2} \\
\boldsymbol{a''_{33}x_3 + \ldots + a''_{3n}x_n} &= \boldsymbol{b''_3} \\
&\vdots \\
\boldsymbol{a_{nn}^{(n-1)}x_n} &= \boldsymbol{b_n^{(n-1)}}
\end{aligned}}$$

Zamena unazad

- Sada možemo zamenom unazad da dobijemo rešenje $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.
- Običnim deljenjem dobijamo:

$$\boxed{x_n = \frac{b_n^{(n-1)}}{a_{nn}^{(n-1)}}}$$

- Zamenimo x_n u $(n-1)$-u jednačinu

$$\boxed{a_{n-1,n-1}^{(n-2)} x_{n-1} + a_{n-1,n}^{(n-2)} x_n = b_{n-1}^{(n-2)}}$$

- Rešiti za x_{n-1}
- Ponoviti proces da bi dobili: $x_{n-2}, x_{n-3}, \ldots, x_2, x_1$

Zamena unazad

- Počinjemo sa x_n
- Izračunavamo $x_{n-2}, x_{n-3}, \ldots, x_2, x_1$

$$x_n = \frac{b_n^{(n-1)}}{a_{nn}^{(n-1)}}$$

$$x_i = \frac{b_i^{(i-1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}^{(i-1)} x_j}{a_{ii}^{(i-1)}}$$

$$a_{ii}^{(i-1)} \neq 0$$

Eliminacija prve kolone

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & b_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & b_4 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{f}_{21} = -a_{21} / a_{11}$$
$$\mathrm{f}_{31} = -a_{31} / a_{11}$$
$$\mathrm{f}_{41} = -a_{41} / a_{11}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & b_1 \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & a'_{24} & b'_2 \\ 0 & a'_{32} & a'_{33} & a'_{34} & b'_3 \\ 0 & a'_{42} & a'_{43} & a'_{44} & b'_4 \end{bmatrix}$$

$$(2) + \mathrm{f}_{21} \times (1)$$
$$(3) + \mathrm{f}_{31} \times (1)$$
$$(4) + \mathrm{f}_{41} \times (1)$$

Eliminacija druge kolone

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & b_1 \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & a'_{24} & b'_2 \\ 0 & a'_{32} & a'_{33} & a'_{34} & b'_3 \\ 0 & a'_{42} & a'_{43} & a'_{44} & b'_4 \end{array}\right]$$

$$f_{32} = -a'_{32} / a'_{22}$$

$$f_{42} = -a'_{42} / a'_{22}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & b_1 \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & a'_{24} & b'_2 \\ 0 & 0 & a''_{33} & a''_{34} & b''_3 \\ 0 & 0 & a''_{43} & a''_{44} & b''_4 \end{array}\right]$$

$$(3) + f_{32} \times (2)$$

$$(4) + f_{42} \times (2)$$

Eliminacija treće kolone

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & b_1 \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & a'_{24} & b'_2 \\ 0 & 0 & a''_{33} & a''_{34} & a''_3 \\ 0 & 0 & a''_{43} & a''_{44} & a''_4 \end{array}\right]$$

$$\mathrm{f}_{43} = -a''_{43} / a''_{33}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & b_1 \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & a'_{24} & b'_2 \\ 0 & 0 & a''_{33} & a''_{34} & b''_3 \\ 0 & 0 & 0 & a'''_{44} & b'''_4 \end{array}\right]$$

Gornja trougaona matrica

$$(4) + \mathrm{f}_{43} \times (3)$$

Zamena unazad

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & b_1 \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & a'_{24} & b'_2 \\ 0 & 0 & a''_{33} & a''_{34} & b''_3 \\ 0 & 0 & 0 & a'''_{44} & b'''_4 \end{array}\right]$$

Gornja trougaona matrica

$$x_4 = b'''_4 / a'''_{44}$$

$$\boxed{a_{11}, a'_{22}, a''_{33}, a'''_{44} \neq 0}$$

$$x_3 = (b''_3 - a''_{34} x_4) / a''_{33}$$

$$x_2 = (b'_2 - a'_{23} x_3 - a'_{24} x_4) / a'_{22}$$

$$x_1 = (b_1 - a_{12} x_2 - a_{13} x_3 - a_{14} x_4) / a_{11}$$

Primer

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 2 \\ 6 & 2 & 2 & 4 & 1 \end{array}\right] \qquad \begin{array}{l} \mathrm{f}_{21} = 1 \\ f_{31} = 0 \\ f_{41} = -6 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ \boxed{0} & 2 & 4 & 0 & 0 \\ \boxed{0} & 1 & 1 & 4 & 2 \\ \boxed{0} & 2 & -10 & -14 & -5 \end{array}\right] \qquad \begin{array}{l} (2) + (1) \times \mathrm{f}_{21} \\ (3) + (1) \times \mathrm{f}_{31} \\ (4) + (1) \times \mathrm{f}_{41} \end{array}$$

Eliminacija unapred

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & -10 & -14 & -5 \end{array}\right] \qquad \begin{array}{l} \\ \\ f_{32} = -1/2 \\ f_{42} = -1 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -14 & -14 & -5 \end{array}\right] \qquad \begin{array}{l} \\ \\ (3)+(2)\times f_{32} \\ (4)+(2)\times f_{42} \end{array}$$

Gornja trougaona matrica

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & -14 & -14 & -5 \end{array}\right] \qquad f_{43} = -14$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -70 & -33 \end{array}\right] \qquad (4)+(3)\times f_{43}$$

Zamena unazad

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -70 & -33 \end{array}\right]$$

$$x_4 = -33/-70 = 33/70$$

$$x_3 = 4x_4 - 2 = -4/35$$

$$x_2 = -2x_3 = 8/35$$

$$x_1 = 1 - 2x_3 - 3x_4 = -13/70$$

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} -13/70 \\ 8/35 \\ -4/35 \\ 33/70 \end{bmatrix}$$

Algoritam za Gausovu eliminaciju

- 1. Elminacija unapred
- za svaku jednačinu k, k = 1 do n-1
-   za svaku jednačinu i, i = (k+1) do n
-   (a) pomnoži jednačinu k sa $-a_{ik}/a_{kk}$
-   (b) saberi jednačinu k sa jednačinom i
- Ovde dobijamo gornju trougaonu matricu
- 2. Zamena unazad
-   (a) izračunaj x_n kao b_{nn}/a_{nn}
-   (b) zameni x_n u (n-1)-u jednačinu, izračunaj x_{n-1}
-   (c) ponavljaj (b), za n-2, n-3, itd. dok sve nepoznate nisu određene.

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
&\vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= b_n
\end{aligned}
$$

Matlab kod

```
function x=gauss(A,b)
%A,b su matrica A i vektor b
%x je resenje sistema
[n,m]=size(A);
%eliminacija unapred
for k=1:n-1
    for i=(k+1):n
        f=-A(i,k)/A(k,k);
        for j=k:n
            A(i,j)=A(i,j)+f*A(k,j);
        end
        b(i)=b(i)+f*b(k);
    end
end
%zamena unazad
x(n)=b(n)/A(n,n);
for i=n-1:-1:1
    s=0;
    for j=(i+1):n
        s = s + A(i,j)*x(j);
    end
    x(i)=(b(i)-s)/A(i,i);
end
```

(slajd ponovljen radi lakšeg objašnjavanja Matlab koda)

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \ldots + a'_{2n}x_n &= b'_2 \\
a''_{33}x_3 + \ldots + a''_{3n}x_n &= b''_3 \\
&\vdots \\
a''_{n3}x_3 + \ldots + a''_{nn}x_n &= b''_n
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{
\begin{aligned}
\boldsymbol{a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n} &\boldsymbol{= b_1} \\
\boldsymbol{a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \ldots + a'_{2n}x_n} &\boldsymbol{= b'_2} \\
\boldsymbol{a''_{33}x_3 + \ldots + a''_{3n}x_n} &\boldsymbol{= b''_3} \\
&\vdots \\
\boldsymbol{a_{nn}^{(n-1)}x_n} &\boldsymbol{= b_n^{(n-1)}}
\end{aligned}
}
$$

(slajd ponovljen radi lakšeg objašnjavanja Matlab koda)

- Počinjemo sa x_n
- Izračunavamo $x_{n-2}, x_{n-3}, \ldots, x_2, x_1$

$$x_n = \frac{b_n^{(n-1)}}{a_{nn}^{(n-1)}}$$

$$x_i = \frac{b_i^{(i-1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}^{(i-1)} x_j}{a_{ii}^{(i-1)}}$$

$$a_{ii}^{(i-1)} \neq 0$$

```
>> format short
>> x = Gauss(A,b)
m =
     4
n =
     4
A =                              b=
     1      0      2      3      1
    -1      2      2     -3     -1
     0      1      1      4      2
     6      2      2      4      1
f =
    1
A =                              b=
     1      0      2      3      1
     0      2      4      0      0
     0      1      1      4      2
     6      2      2      4      1
f =
     0
A =                              b=
     1      0      2      3      1
     0      2      4      0      0
     0      1      1      4      2
     6      2      2      4      1
f =
    -6
A =                               b=
     1      0      2      3      1
     0      2      4      0      0
     0      1      1      4      2
     0      2    -10    -14     -5
```

Eliminišemo prvu kolonu

```
f =
    -0.5000
A =                              b=
     1      0      2      3      1
     0      2      4      0      0
     0      0     -1      4      2
     0      2    -10    -14     -5
f =
     -1
A =                              b=
     1      0      2      3      1
     0      2      4      0      0
     0      0     -1      4      2
     0      0    -14    -14     -5
```

Elimišemo drugu kolonu

```
f =
    -14
A =                              b=
     1      0      2      3      1
     0      2      4      0      0
     0      0     -1      4      2
     0      0      0    -70    -33
```

Eliminišemo treću kolonu

```
x =
         0
         0
         0
    0.4714      x4
x =
         0
         0
   -0.1143      x3
    0.4714
x =
         0
    0.2286      x2
   -0.1143
    0.4714
x =
   -0.1857      x1
    0.2286
   -0.1143
    0.4714
```

Zamena unazad

Broj operacija - efikasnost

- Postaje značajan sa povećanjem broja jednačina.

- Eliminacija unapred izvršava $O(n^3/3)$ operacija
- Zamena unazad izvršava $O(n^2/2)$

Broj operacija - efikasnost

n sabiranja

n množenja i 1 deljenje

Spoljna petlja k	Unutrašnja petlja i	Operacije sabiranja i oduzimanja	Operacije množenja i deljenja
1	$2, n$	$(n-1)(n)$	$(n-1)(n+1)$
2	$3, n$	$(n-2)(n-1)$	$(n-2)(n)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
k	$k+1, n$	$(n-k)(n-k+1)$	$(n-k)(n-k+2)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$n-1$	n, n	$(1)(2)$	$(1)(3)$

Ukupan broj operacija za eliminaciju unapred = $2n^3/3 + O(n^2)$

Ukupan broj operacija za zamenu unazad = $n^2 + O(n)$

Matlab kod (ponovljen zbog prethodnog slajda)

```
function x=gauss(A,b)
%A,b su matrica A i vektor b
%x je resenje sistema
[n,m]=size(A);
%eliminacija unapred
for k=1:n-1
    for i=(k+1):n
        f=-A(i,k)/A(k,k);
        for j=k:n
            A(i,j)=A(i,j)+f*A(k,j);
        end
        b(i)=b(i)+f*b(k);
    end
end
%zamena unazad
x(n)=b(n)/A(n,n);
for i=n-1:-1:1
    s=0;
    for j=(i+1):n
        s = s + A(i,j)*x(j);
    end
    x(i)=(b(i)-s)/A(i,i);
end
```

Broj operacija - efikasnost

- **Broj operacija u pokretnom zarezu (flops, *floating-point operations*) za Gausovu eliminaciju**

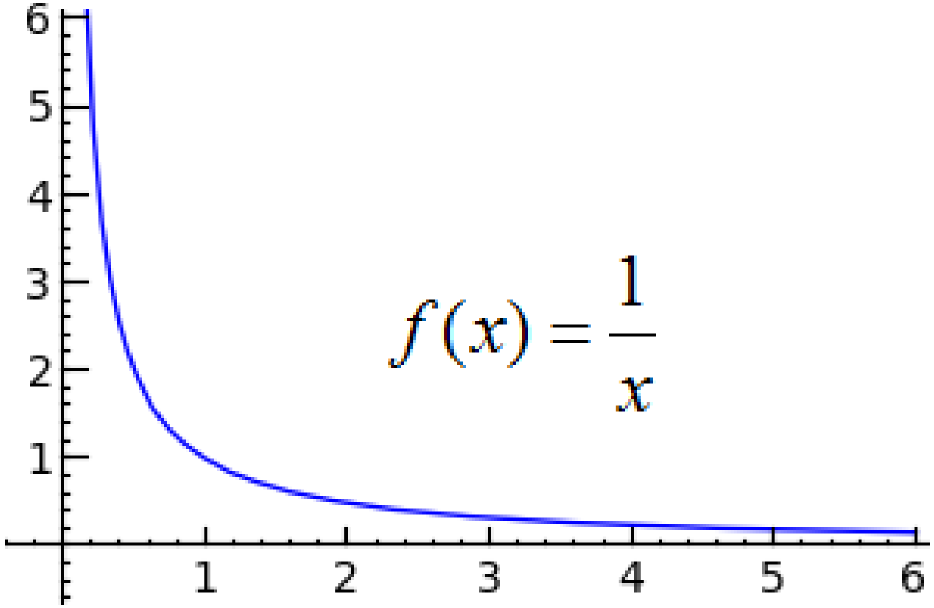
n	Eliminacija unapred	Zamena unazad	Ukupno Flops-a	$\frac{2n^3}{3}$	Procenat koji ide na eliminaciju
10	705	100	805	667	87.58%
100	671550	10000	681550	666667	98.53%
1000	6.67×10^8	1000000	6.68×10^6	6.67×10^8	99.85%

- **Broj operacija rapidno raste sa porastom *n***
- **Najviše operacija se troši na korak eliminacije**
- **Dakle, efikasnost se može poboljštati poboljšanjem efikasnosti elimnacije**
- **Paralelizacija operacija, prilagođavanje za multi-core procesore itd.**

Problemi sa Gaussovom eliminacijom

- Problemi sa Gausovom eliminacijom
  - deljenje nulom
  - deljenje malim brojevima (greške u zaokruživanju)
  - loše uslovljeni sistemi

Problem deljenja malim brojevima



1/0.00046=2173.91

1/0.0005 =2000

2173.91-2000 = 173.91 – ozbiljna greška

1/2000 = 0.0005

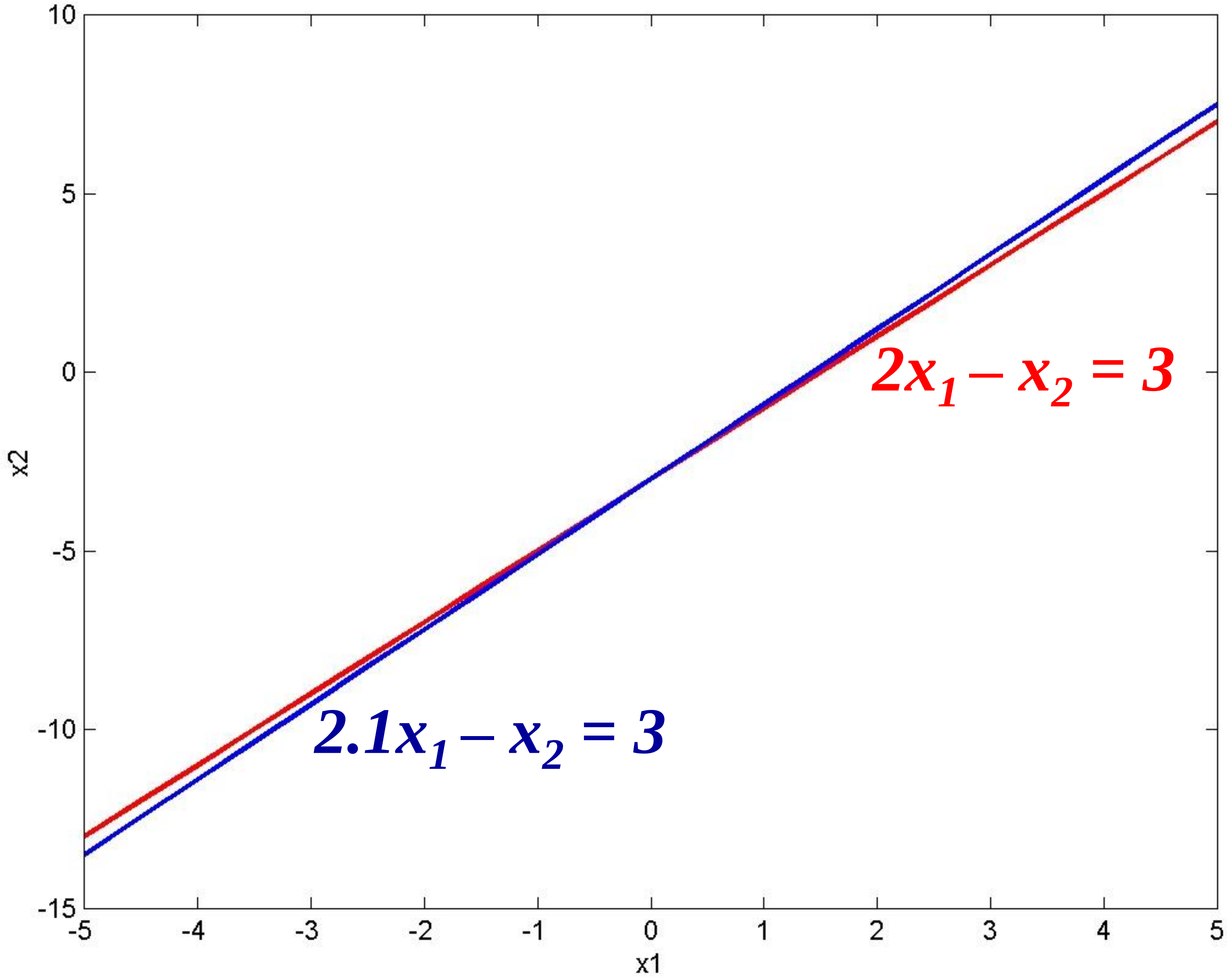
1/2001 = 0.00049975

0.0005-0.00049975 = 0.00000025 – mala greška

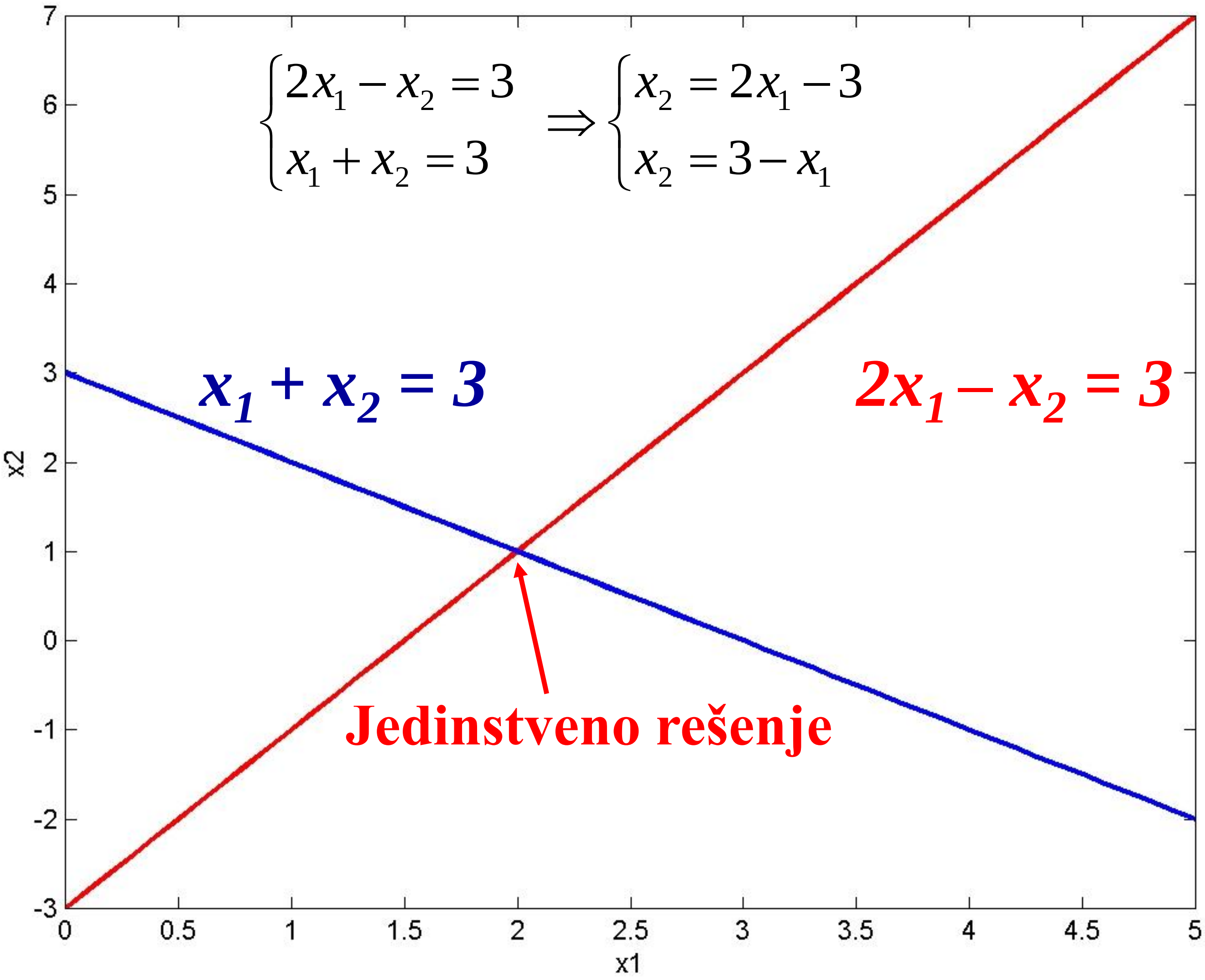
Greške u zaokruživanju

- Jako mnogo zaokruživanja u $n^3/3$ operacija.
- Još važnije – greška se propagira (nagomilava).
- Za velike sisteme (sa više od 100 jednačina), greške u zaokruživanju su veoma značajne.
- Greške u zaokruživanju su naročito ozbiljne kod <u>loše uslovljenih sistema</u>.
- To su sistemi kod kojih male promene u koeficijentima dovode do velikih promena u rešenju.

Loše uslovljen sistem



Dobro uslovljen sistem



Loše uslovljen sistem

- Ako je sistem $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = -\dfrac{a_{11}}{a_{12}}x_1 + \dfrac{b_1}{a_{12}} \\ x_2 = -\dfrac{a_{21}}{a_{22}}x_1 + \dfrac{b_2}{a_{22}} \end{cases}$
- loše uslovljen to znači da su nagibi pravih vrlo bliski pa:

$$\boxed{\frac{a_{11}}{a_{12}} \cong \frac{a_{21}}{a_{22}} \Rightarrow a_{11}a_{22} \cong a_{21}a_{12} \Rightarrow a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \cong 0 \Rightarrow}$$

$$\Rightarrow D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \approx 0 \Rightarrow$$

Ako koristimo Kramerovo pravilo imali bi deljenje jako malim brojem, što znači da male promene D uzrokuju velike promene u x.

Parcijalni pivoting

- Problem deljenja nulom ili jako malim brojevima rešava se “pivotingom”:
  - Kad radimo eliminaciju unapred biramo uvek pivot koji ima najveću apsolutnu vrednost u toj koloni.
  - Zamenimo trenutnu jednačinu sa tom kod koje smo pronašli najveći element – <u>pracijalni pivoting</u>.
- Ako pivot tražimo u celoj matrici, a ne u trenutnoj koloni onda menjamo i vrstu i kolonu i imamo <u>kompletan pivoting.</u>
- <u>Kompletan pivoting</u> se retko koristi jer je zahtevan, a ne pomaže mnogo.

Gausova eliminacija sa pracijalnim pivotingom

- Eliminacija unapred
- za svaku jednačinu k, k = 1 do n-1
  - pretražiti sve jednačine i≥k za max. element po apsolutnoj vrednosti
  - zameniti jedančinu *k* sa tom koja ima max.
  - Izvšriti eliminaciju
    - (a) pomnožiti jednačinu *k* sa $-a_{ik}/a_{kk}$
    - (b) sabrati sa jednačinom *i*

Parcijalni pivoting

$$
\begin{aligned}
x_1 \qquad\qquad\quad &+ 2x_3 + 3x_4 = 1 \\
-x_1 + 2x_2 &+ 2x_3 - 3x_4 = -1 \\
x_2 &+ x_3 + 4x_4 = 2 \\
6x_1 + 2x_2 &+ 2x_3 + 4x_4 = 1
\end{aligned}
$$

$$
\left[A \,\vdots\, b\right] = \left[\begin{array}{cccc|c}
1 & 0 & 2 & 3 & 1 \\
-1 & 2 & 2 & -3 & -1 \\
0 & 1 & 1 & 4 & 2 \\
6 & 2 & 2 & 4 & 1
\end{array}\right]
$$

Eliminacija unapred

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 6 & 2 & 2 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 3 & 1 \end{array}\right]$$

Zameniti vrste 1 i 4

$$f_{21} = 1/6$$

$$f_{31} = 0$$

$$f_{41} = -1/6$$

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 6 & 2 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 7/3 & 7/3 & -7/3 & -5/6 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & -1/3 & 5/3 & 7/3 & 5/6 \end{array}\right]$$

$$(2) + (1) \times f_{21}$$

$$(3) + (1) \times f_{31}$$

$$(4) + (1) \times f_{41}$$

Eliminacija unapred

$$\left[\begin{array}{cccc:c} 6 & 2 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 7/3 & 7/3 & -7/3 & -5/6 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & -1/3 & 5/3 & 7/3 & 5/6 \end{array}\right]$$

Zamena vrsta nije potrebna

$$f_{32} = -3/7$$

$$f_{42} = -1/7$$

$$\left[\begin{array}{cccc:c} 6 & 2 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 7/3 & 7/3 & -7/3 & -5/6 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 33/14 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 5/7 \end{array}\right]$$

$$(3)+(2)\times f_{32}$$

$$(4)+(2)\times f_{42}$$

Zamena unazad

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 6 & 2 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 7/3 & 7/3 & -7/3 & -5/6 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 5/7 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 33/14 \end{array}\right]$$

Zameniti vrste 3 i 4

$$f_{43} = 0$$

$$x_4 = (33/14)/5 = 33/70$$

$$x_3 = (5/7 - 2\,x_4)/2 = -4/35$$

$$x_2 = (-5/6 + 7/3\,x_4 - 7/3\,x_3)/(7/3) = 8/35$$

$$x_1 = (1 - 4\,x_4 - 2\,x_3 - 2\,x_2)/6 = -13/70$$

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} -13/70 \\ 8/35 \\ -4/35 \\ 33/70 \end{bmatrix}$$

```
function x=gaussPivoting(A,b)
[n,m]=size(A);
%eliminacija unapred
for k=1:n-1
  %pronaci vrstu sa maksimalnim elementom po
  %apsolutnoj vrednosti u k-toj koloni krenuti od vrste k
    [maxEl vrMax]= max(abs(A(k:n,k)));
    %zameniti tu vrstu sa k-tom vrstom
    vrMax = k + vrMax - 1;%jer max vraca vrednosti u intervalu 1..n
    temp = A(vrMax,:);
    A(vrMax,:)=A(k,:);
    A(k,:)=temp;
    %istu zamenu uraditi u vektoru b da bi sistem bio dosledan
    temp=b(k);
    b(k)=b(vrMax);
    b(vrMax)=temp;
    for i=(k+1):n
        m=-A(i,k)/A(k,k);
        for j=k:n
            A(i,j)=A(i,j)+m*A(k,j);
        end
        b(i)=b(i)+m*b(k);
    end
end
%zamena unazad
```

```
>> format short
>> x=GaussPivoting(A,b)
A =                         b=
     1      0      2      3      1
    -1      2      2     -3     -1
     0      1      1      4      2
     6      2      2      4      1
vrMax =
     4
```

Pronalazimo prvi pivot tj. njegovu vrstu

```
A =                       b=
     6      2      2      4      1
    -1      2      2     -3     -1
     0      1      1      4      2
     1      0      2      3      1
f =
   0.1667
A =                                                   b=
    6.0000    2.0000    2.0000    4.0000    1.0000
         0    2.3333    2.3333   -2.3333   -0.8333
         0    1.0000    1.0000    4.0000    2.0000
    1.0000         0    2.0000    3.0000    1.0000
f =
     0
A =                                                   b=
    6.0000    2.0000    2.0000    4.0000    1.0000
         0    2.3333    2.3333   -2.3333   -0.8333
         0    1.0000    1.0000    4.0000    2.0000
    1.0000         0    2.0000    3.0000    1.0000
f =
   -0.1667
A =                                                   b=
    6.0000    2.0000    2.0000    4.0000    1.0000
         0    2.3333    2.3333   -2.3333   -0.8333
         0    1.0000    1.0000    4.0000    2.0000
         0   -0.3333    1.6667    2.3333    0.8333
```

Zamenimo vrstu 1 sa vrstom 4

Eliminišemo prvu kolonu

Nema potrebe za zamenom vrsta