Analiza algoritama

© Goodrich, Tamassia, Goldwasser

Katedra za informatiku, Fakultet tehničkih nauka, Univerzitet u Novom Sadu

2019.

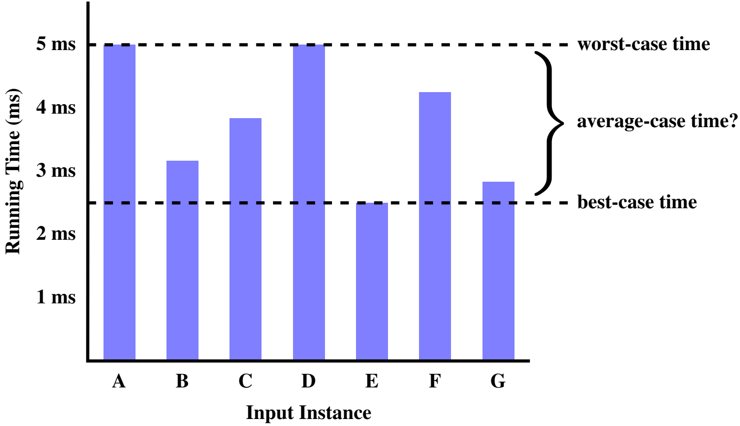
Analiza algoritama

- algoritam će od nekog ulaza proizvesti neki izlaz
- ULAZ $\rightarrow$ ALGORITAM $\rightarrow$ IZLAZ

Vreme izvršavanja

- većina algoritama transformiše objekte na ulazu u objekte na izlazu
- vreme izvršavanja algoritma obično raste sa veličinom ulaza
- teško je izračunati prosečno vreme izvršavanja
- posmatraćemo najgori slučaj
  - jednostavnije za analizu
  - ključno za primene kao što su igre, finansije ili robotika

Vreme izvršavanja



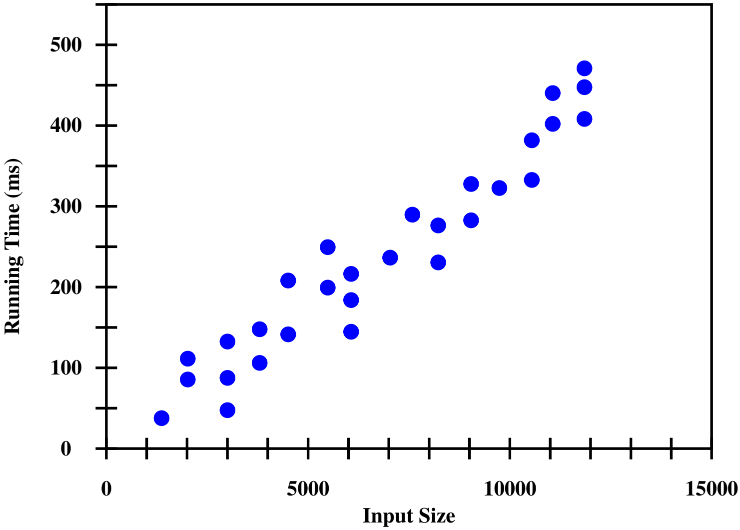
Eksperimentalno proučavanje algoritama

- napisati program koji implementira posmatrani algoritam
- pokrenuti program za različite veličine i strukturu ulaznih podataka
- meriti vreme izvršavanja
- analizirati rezultate

Merenje vremena pomoću sistemskog sata

```python
from time import time
start_time() = time()
# ... run algorithm ...
end_time = time()
elapsed = end_time - start_time
```

Analiza rezultata merenja



Ograničenja eksperimentalnog pristupa

- potrebno je implementirati algoritam — može biti teško
- teško je predvideti rezultate za ulaze koji nisu obuhvaćeni eksperimentom
- za poređenje dva algoritma mora se koristiti identično hardversko i softversko okruženje

Teorijski pristup

- koristi se opis algoritma visokog nivoa umesto implementacije
- opisuje vreme izvršavanja kao funkciju veličine ulaza — n
- uzima u obzir sve moguće ulaze
- omogućava procenu brzine algoritma nezavisno od korišćenog hardvera ili softvera

Pseudokôd

- opis algoritma visokog nivoa
- bolje strukturiran od prirodnog jezika
- manje detalja nego u stvarnom programu
- sakriva detalje vezane za dizajn programa
- poželjna notacija za opisivanje algoritama

Pseudokôd

- primer: pronalaženje najvećeg broja u nizu

arrayMax(A, n)

Input: A: niz celih brojeva

Input: n: dužina niza

$currentMax \leftarrow A[0]$

for $i \leftarrow 1$ **to** $n - 1$ **do**

  if $A[i] > currentMax$ **then**

    $currentMax \leftarrow A[i]$

return $currentMax$

Pseudokôd

- kontrola toka
  - **if** ...**then** ...[**else**] **end if**
  - **for** ...**do** ...**end for**
  - **while** ...**do** ...**end while**
  - **repeat** ...**until** ...
- izrazi
  - $\leftarrow$ dodela vrednosti
  - $=$ poređenje vrednosti
  - n^2 matematička notacija je OK
- vraćanje rezultata
  - **return** vrednost

Sedam važnih funkcija $_1$

- konstantna funkcija

$$f(n) = c$$

- osnovna funkcija $g(n) = 1$
- svaka druga može se prikazati kao $f(n) = c \cdot g(n)$
- može da opiše broj koraka potrebnih za neku od osnovnih operacija
- npr. sabiranje, dodela vrednosti, poređenje

Sedam važnih funkcija $_2$

- logaritamska funkcija

$$f(n) = \log_b n$$

- za $b > 1$
- za osnovu logaritma se najčešće koristi 2
- 2 se podrazumeva, tj. $\log n = \log_2 n$
- podela problema na dva dela: čest princip koji se koristi u algoritmima

Sedam važnih funkcija $_3$

- linearna funkcija

$$f(n) = n$$

- kada treba obaviti prostu operaciju nad svakim od n elemenata ulaza
- npr. poređenje broja sa svim elementima niza

Sedam važnih funkcija $_4$

- n-log-n funkcija

$$f(n) = n \log n$$

- raste nešto brže od linearne funkcije
- i znatno sporije od kvadratne funkcije
- npr. najbrže sortiranje n brojeva zahteva $n \log n$ vreme

Sedam važnih funkcija $_5$

- kvadratna funkcija

$$f(n) = n^2$$

- npr. dve ugnježdene petlje
- gde unutrašnja obavlja linearan broj operacija nad elementima ulaza
- a spoljna se izvršava linearan broj puta
- su proporcionalne sa n^2

Sedam važnih funkcija $_6$

- kubna funkcija

$$f(n) = n^3$$

-ređe se javlja od kvadratne, ali
- predstavlja jednu klasu polinomijalnih funkcija

$$f(n) = a_0 + a_1 n + a_2 n^2 + a_3 n^3 + \ldots + a_d n^d$$

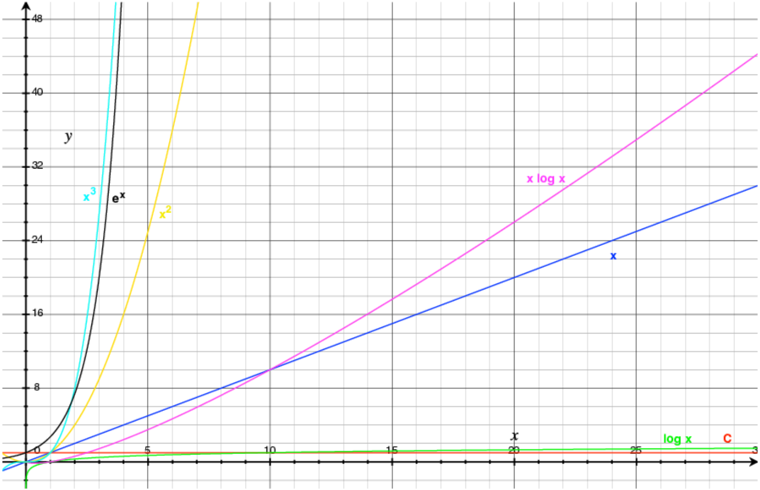
Sedam važnih funkcija $_7$

- eksponencijalna funkcija

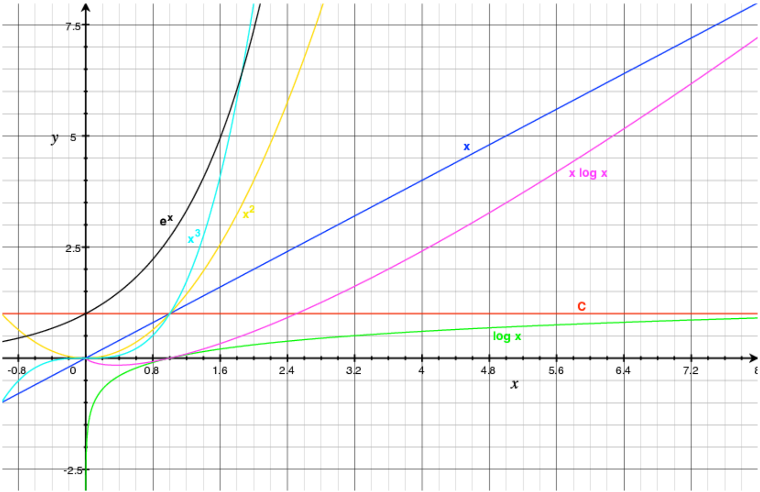
$$f(n) = b^n$$

- b je baza
- n je eksponent
- često je $b = 2$
- najsporija

Sedam važnih funkcija



Sedam važnih funkcija



Primitivne operacije

- osnovne operacije koje izvršava algoritam
- prikazane u pseudokodu
- nezavisne od programskog jezika
- troše konstantnu količinu vremena
- na primer:
  - izračunavanje izraza
  - dodela vrednosti promenljivoj
  - pristup elementu niza preko indeksa
  - poziv funkcije
  - vraćanje rezultata

Brojanje primitivnih operacija

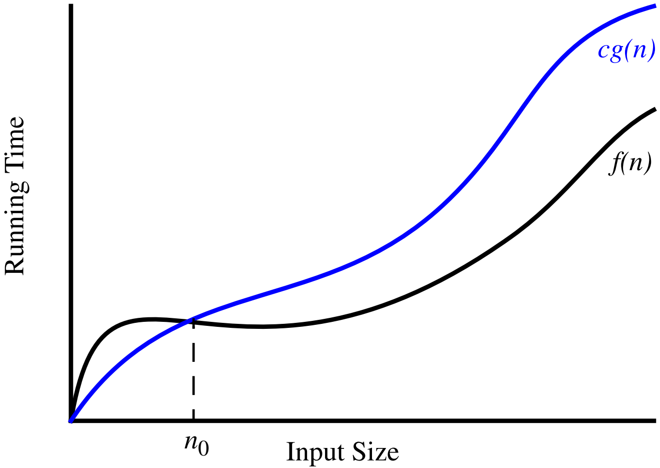
- analizom pseudokoda možemo odrediti maksimalan broj primitivnih operacija koje izvršava algoritam kao funkciju veličine ulaza

Algoritam *arrayMax*(A, n)	**br. operacija**
$currentMax \leftarrow A[0]$	2
for $i \leftarrow 1$ **to** $n-1$ **do**	$2n$
if $A[i] > currentMax$ **then**	$2(n-1)$
$currentMax \leftarrow A[i]$	$2(n-1)$
increment i	$2(n-1)$
return $currentMax$	1
ukupno	$8n-2$

Procena vremena izvršavanja

- algoritam **arrayMax** izvršava $8n - 2$ primitivnih operacija u najgorem slučaju
- neka je
  - a: vreme izvršavanja **najbrže** primitivne operacije
  - b: vreme izvršavanja **najsporije** primitivne operacije
  - $T(n)$ vreme u najgorem slučaju
- tada je
  - $a(8n - 2) \leq T(n) \leq b(8n - 2)$
  - $\Rightarrow T(n)$ je ograničena sa dve linearne funkcije!

Primer ograničene funkcije



Porast vremena izvršavanja

- izmena u hardverskom ili softverskom okruženju
  - menja $T(n)$ za konstantan faktor
  - ali ne menja brzinu rasta $T(n)$
- linearni porast vremena izvršavanja $T(n)$ je suštinska osobina algoritma **arrayMax**

Zašto je porast vremena bitan

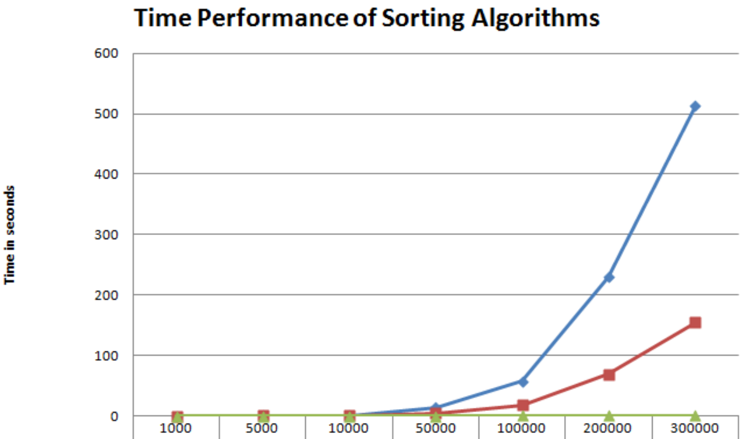
$T(n)$	**vreme za n+1**	**vreme za 2n**	**vreme za 4n**
$c \log n$	$c \log(n+1)$	$c(\log n + 1)$	$c(\log n + 2)$
cn	$c(n+1)$	$2cn$	$4cn$
$cn \log n$	$\sim cn \log n + cn$	$2cn \log n + 2cn$	$4cn \log n + 4cn$
cn^2	$\sim cn^2 + 2cn$	$4cn^2$	$16cn^2$
cn^3	$\sim cn^3 + 3cn$	$8cn^3$	$64cn^3$
$c2^n$	$c2^{n+1}$	$c2^{2n}$	$c2^{4n}$

* za dvostruki ulaz četvorostruko vreme

Primer poređenja dva algoritma

- insertion sort je $n^2/4$
- merge sort je $2n \log n$
- sortiramo milion elemenata
  - insertion sort $\sim$ 70 sati
  - merge sort $\sim$ 40 sekundi
- na 100x bržoj mašini to bi bilo
  - insertion sort $\sim$ 40 minuta
  - merge sort $\sim$ 0.5 sekundi

Primer poređenja tri algoritma



	1000	5000	10000	50000	100000	200000	300000
Bubble Sort	0	0.145	0.6	14.05	56.9	229.44	513.34
Insertion Sort	0	0.045	0.18	4.25	17.62	69.12	154.22
Quick Sort	0	0	0	0.01	0.02	0.05	0.065

Konstantni činioci

- porast vremena izvršavanja ne zavisi od
  - konstantnih činilaca
  - izraza nižeg reda
- na primer
  - $10^2 n + 10^5$ je linearna funkcija
  - $10^5 n^2 + 10^8 n$ je kvadratna funkcija

Veliko O notacija

- „Big-Oh“
- opisuje granično ponašanje funkcije kada argument raste

- za date $f(n)$ i $g(n)$ kažemo da $f(n)$ je $O(g(n))$ ako postoje pozitivne konstante c i n_0 takve da

$$f(n) \leq cg(n) \text{ za } n \geq n_0$$

Veliko O notacija

- primer: $2n + 10$ je $O(n)$
  - $2n + 10 \leq cn$
  - $(c - 2)n \geq 10$
  - $n \geq 10/(c - 2)$
  - izaberemo $c = 3$ i $n_0 = 10$

Veliko O notacija

- primer: n^2 nije $O(n)$
  - $n^2 \leq cn$
  - $n \leq c$
  - ova nejednakost ne može biti zadovoljena jer je c konstanta

Još primera

- $7n - 2$ je $O(n)$
  - tražimo $c > 0$ i $n_0 \geq 1$ takve da $7n - 2 \leq cn$ za $n \geq n_0$
  - ovo je zadovoljeno za $c = 7$ i $n_0 = 1$
- $3n^3 + 20n^2 + 5$ je $O(n^3)$
  - tražimo $c > 0$ i $n_0 \geq 1$ takve da $3n^3 + 20n^2 + 5 \leq cn^3$ za $n \geq n_0$
  - ovo je zadovoljeno za $c = 4$ i $n_0 = 21$
- $3 \log n + 5$ je $O(\log n)$
  - tražimo $c > 0$ i $n_0 \geq 1$ takve da $3 \log n + 5 \leq c \log n$ za $n \geq n_0$
  - ovo je zadovoljeno za $c = 8$ i $n_0 = 2$

Veliko O i porast vremena

- veliko O definiše gornju granicu na rast funkcije
- tvrdnja $f(n)$ je $O(g(n))$ znači da $f(n)$ ne raste brže od $g(n)$
- možemo da koristimo veliko O da rangiramo funkcije po brzini rasta

	$f(n)$ je $O(g(n))$	$g(n)$ je $O(f(n))$
$g(n)$ raste brže	da	ne
$f(n)$ raste brže	ne	da
jednako brzo rastu	da	da

Veliko O: još neka pravila

- ako je $f(n)$ polinom stepena d tada $f(n)$ je $O(n^d)$, tj.
  - možemo zanemariti niže stepene polinoma
  - možemo zanemariti konstantne koeficijente
- koristimo najsporiju moguću klasu funkcija
  - kažemo „$2n$ je $O(n)$" umesto „$2n$ je $O(n^2)$"
- koristimo najjednostavniji izraz koji predstavlja klasu
  - kažemo „$3n + 5$ je $O(n)$" umesto „$3n + 5$ je $O(3n)$"

Asimptotska analiza algoritama

- asimptotska analiza algoritama određuje vreme izvršavanja u „veliko O“ notaciji
- kako obaviti asimptotsku analizu
  - odredimo broj primitivnih operacija u najgorem slučaju kao funkciju veličine ulaza
  - izrazimo funkciju u „veliko O“ notaciji
- primer:
  - ustanovimo da **arrayMax** izvršava najviše $8n - 2$ primitivnih operacija
  - kažemo da je složenost **arrayMax** algoritma $O(n)$
- konstantne činioce i izraze nižeg stepena svakako ne iskazujemo na kraju, pa ih možemo zanemariti kada brojimo primitivne operacije

Računanje proseka prefiksa

- i-ti prosek prefiksa niza X je prosek vrednosti prvih $i+1$ elemenata X

$$A[i] = (X[0] + X[1] + ... + X[i])/(i + 1)$$

- niz A se koristi u finansijskoj analizi

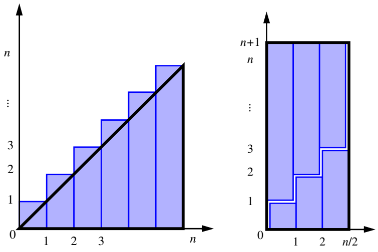
Računanje proseka prefiksa

- računanje proseka prefiksa prema definiciji: $O(n^2)$

Algoritam *prefixAverages1(X, n)*	**br. operacija**
$A \leftarrow$ novi niz od n integera	n
for $i \leftarrow 0$ **to** $n-1$ **do**	n
$s \leftarrow X[0]$	n
for $j \leftarrow 1$ **to** i **do**	$1 + 2 + ... + (n-1)$
$s \leftarrow s + X[j]$	$1 + 2 + ... + (n-1)$
$A[i] \leftarrow s/(i+1)$	n
return A	1

Računanje proseka prefiksa

- složenost **prefixAverages1** je $O(1 + 2 + \ldots + n)$
- suma prvih n prirodnih brojeva je $n(n+1)/2$
- $\Rightarrow$ algoritam radi za $O(n^2)$ vreme



Računanje proseka prefiksa $_2$

- računanje proseka prefiksa u linearnom vremenu pomoću tekuće sume

Algoritam *prefixAverages2(X, n)*	**br. operacija**
$A \leftarrow$ novi niz od n integera	n
$s \leftarrow 0$	1
for $i \leftarrow 0$ **to** $n-1$ **do**	n
$s \leftarrow s + X[i]$	n
$A[i] \leftarrow s/(i+1)$	n
return A	1

Šta nam treba od matematike

- tehnike izvođenja dokaza
- verovatnoća
- redovi
- logaritmi
  - $\log_b(xy) = \log_b x + \log_b y$
  - $\log_b(x/y) = \log_b x - \log_b y$
  - $\log_b(xa) = a \log_b x$
  - $\log_b a = log_x a / \log_x b$
- eksponencijalne funkcije
  - $a^{b+c} = a^b a^c$
  - $a^{bc} = (a^b)^c$
  - $a^b / a^c = a^{b-c}$
  - $b = a \log_a b$
  - $b^c = a^{c \log_a b}$

Rođaci velikog O

- Ω: veliko Omega
  - $f(n)$ je $\Omega(g(n))$ ako postoje $c > 0$ i $n_0 \geq 1$ takvi da $f(n) \geq cg(n)$ za $n \geq n_0$
- Θ: veliko Teta
  - $f(n)$ je $\Theta(g(n))$ ako postoje $c_1 > 0$ $c_2 > 0$ i $n_0 \geq 1$ takvi da $c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n)$ za $n \geq n_0$

Rođaci velikog O

- veliko O
  - $f(n)$ je $O(g(n))$ ako je $f(n)$ asimptotski manje ili jednako $g(n)$
- veliko Ω
  - $f(n)$ je $\Omega(g(n))$ ako je $f(n)$ asimptotski veće ili jednako $g(n)$
- veliko Θ
  - $f(n)$ je $\Theta(g(n))$ ako je $f(n)$ asimptotski jednako $g(n)$

Primeri sa O, Ω, Θ

- $5n^2$ je $\Omega(n^2)$
  - $f(n)$ je $\Omega(g(n))$ ako postoje $c > 0$ i $n_0 \geq 1$ takvi da $f(n) \geq cg(n)$ za $n \geq n_0$
  - rešenje: $c = 5$ i $n_0 = 1$
- $5n^2$ je $\Omega(n)$
  - $f(n)$ je $\Omega(g(n))$ ako postoje $c > 0$ i $n_0 \geq 1$ takvi da $f(n) \geq cg(n)$ za $n \geq n_0$
  - rešenje: $c = 1$ i $n_0 = 1$
- $5n^2$ je $\Theta(n^2)$
  - $f(n)$ je $\Theta(g(n))$ ako je $\Omega(n^2)$ i $O(n^2)$; prvi uslov smo proverili a drugi je ispunjen za
  - $c = 5$ i $n_0 = 1$