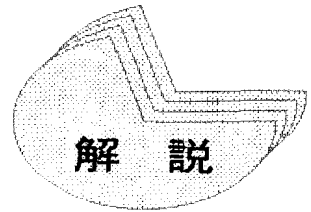


電気回路のスパイラルベクトル理論

名誉員 **山 村**

さかえ **昌** 日本学士院会員



キーワード：スパイラルベクトル，円ベクトル，FAM，相分離，対称座標法， T - I 型等価回路，突極型同期機，予励磁

1. はしがき

昨年夏に Oxford 大学出版局から“Spiral Vector Theory of AC Circuits and Machines”のタイトルで英文本を出版した⁽⁷⁾。その内容は大部分が国内で論文として発表し^{(1)~(4)}，また単行本としても発表したところであるが⁽⁶⁾，スパイラルベクトル理論の名前をつけて本を出したのは初であって，内容にも新しい発展が含まれている。やはり英文で本を出すことの反響は少なくなく，国内のそれよりも大きい。国の内外で反響の様子が大分違っていて奇妙に思うことも少なくない。筆者は最近 Oxford 大学出版局の editor になったが，これも反響の一部であった。嬉しいことである。この解説がスパイラルベクトル理論の国内での理解を深めるチャンスを与えてくれたことは幸いである。

電気回路の交流理論は従来一つの体系として统一的に扱われていない面がある。定常状態に対しては phasor (ベクトル記号ともいう) で状態変数を表わし，過渡状態に対しては実数で表わすために，同一の回路方程式の解であるにもかかわらず，定常解と過渡解の整合が悪くて，両者をつなぎ合わせるのに余計の手間がかかり，不便である。計算機でシミュレーションをする場合にも変数の表現が異なることは不便である。

回路方程式の一般解は複素指数関数の形でまず得られる。これをそのまま使うのがスパイラルベクトル法である。スパイラルベクトルはいわば自然体である。いまの定常交流理論で用いられる phasor は複素数であるが，時間の関数でなくて，複素平面上で静止したベクトルを表わす。これでは過渡状態にある変数を表わすことはできない。phasor を用いることによって定常理論は発展して大変便利になったが，過渡現象論とは異なる変

数表現のために二つの理論の間に障壁が生じて，不便と不都合を生じているのが現状である。

スパイラルベクトル法は定常状態に対しては固定化されている phasor を動的にし，過渡現象に対しては従来の実数表現を複素指数関数化することによって両状態を統一的に扱うことを可能にする。前者に対しては従来の記号法的な扱いに数学的な基礎を与え，phasor によって解析された多量の成果はそのまま残して利用することができる。過渡現象については大きな発展をもたらす。すなわち，回路理論上ではスパイラルベクトル回路理論という新しい，広い領域を開拓し，交流機の過渡現象の解析と制御では相分離法，対称座標法，FAM 制御，突極型同期機の新しい解析法など，広い領域で発展をもたらすものである。

2. スパイラルベクトルの定義

スパイラルベクトル (spiral vector, SV と略す) は下式に示す指数関数である。

$$i = Ae^{\delta t}, \quad \delta = -\lambda + j\omega \quad \cdots \cdots (1)$$

図 1 に示すように，時間 t の経過とともに i は複素平面上でスパイラルを描くので，これをスパイラルベクトルと呼ぶことにする。 $\lambda=0$ のときには i は

$$i = Ae^{j\omega t} \quad \cdots \cdots (2)$$

となって，複素平面上で円を描く。これを円ベク

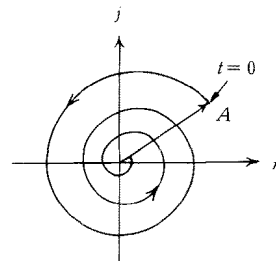


図 1 複素平面上のスパイラルベクトル

トル (circular vector) と呼ぶこととする。これは定常交流を表わす。 $\omega=0$ のときには i は

$$i = Ae^{-\lambda t} \dots\dots\dots (3)$$

となって、減衰直流を表わし、 $\lambda=0, \omega=0$ のときには、 $i=A$ となって一定直流となる。このように SV は電気工学に現われる多種類の変数を表わすことができる。

3. スパイラルベクトルと実数値の対応

(1) 式の SV を次のように書き直す。

$$i = |A|e^{jp_A}e^{(-\lambda+j\omega)t} = |A|e^{-\lambda t}[\cos(\omega t + \varphi_A) + j \sin(\omega t + \varphi_A)] \dots\dots\dots (4)$$

これと対応する実数値との関係式には次の 2 通りが考えられる。

$$i_{\text{real}} = |A|e^{-\lambda t} \cos(\omega t + \varphi_A) \\ = \text{real value of } i \dots\dots\dots (5)$$

または

$$i_{\text{real}} = |A|e^{-\lambda t} \sin(\omega t + \varphi_A) = \text{real value of} \\ \text{imaginary part of } i \dots\dots\dots (6)$$

SV 法では (5) 式の対応を用いることとするが、これは図 1 の複素平面上で SV の実数軸への投影が対応する実数瞬時値となる。かくして SV 定理 1 は次のようになる。

SV 定理 1

スパイラルベクトルに対応する実数瞬時値はその実数分である。すなわち、

$$i_{\text{real}} = \text{Re}[i] \dots\dots\dots (7)$$

cosine は偶関数であるので、 $Ae^{(-\lambda+j\omega)t}$ と $Ae^{(-\lambda-j\omega)t}$ とはこの定理によって同じ実数瞬時値を与えるが、SV は常に反時計方向に回転するものを探る。実数表現のとき $\sin \omega t, \cos \omega t$ の ω は正で、正弦波と余弦波は常に座標の正方向に進むことと同様である。かくして次の SV 定理 2 が得られる。

SV 定理 2

スパイラルベクトルは複素平面上で反時計方向に回転する。

(1) 式で $\omega \geq 0$ でなければならない。特に断らない限り、SV 法では状態変数の瞬時値は小文字で表わし、円ベクトルは大文字に \cdot をつける。例えば、電流の SV は i であって、その円ベクトルは \dot{I} で表わす。したがって

$$\dot{I} = Ie^{j\omega t}, \quad |\dot{I}| = |I| \dots\dots\dots (8)$$

の関係がある。ここに I は phasor である。 $t=0$

と置けば $\dot{I} = I$ となる。SV については $p\dot{I} = j\omega\dot{I}$, $\dot{I}/p = \dot{I}/j\omega$ は数学的に正しいが、phasor についてはこのような関係はない。したがって phasor 法は記号法にすぎないともいわれ、数学的な説明がきこえない。長年の間に行われてきた phasor 法による解析の成果は SV 法によって正しく数学的な説明が与えられ、SV 法に引き継がれる。

4. スパイラルベクトル法による解法例

C, L, R が直列に接続された回路の方程式は次式の形に書ける。

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = \frac{d}{dt} v \dots\dots\dots (9)$$

これを

$$ap^2 i + bpi + ci = pv \dots\dots\dots (10)$$

と書き直す。ここに $p = d/dt$ である。

印加電圧 v を下記のように表わすと、

$$v = \sqrt{2} |\dot{V}| e^{j(\omega t + \varphi)} = \sqrt{2} V e^{j\omega t} = \sqrt{2} \dot{V} \dots\dots (11)$$

これは $\lambda=0$ で、円ベクトルであって、定常交流を表わす。 $\dot{V} = V e^{j\omega t}$ で $V = |\dot{V}| e^{j\varphi}$ は phasor である。(10) 式の解を次の SV と仮定する。

$$i = A e^{\delta t} \dots\dots\dots (12)$$

定常解に対しては δ は $j\omega$ となって、そのとき $di/dt = j\omega i$ となり、(10) 式は下式となる。

$$[(j\omega)^2 a + (j\omega)b + c]i = \sqrt{2} |\dot{V}| j\omega e^{j(\omega t + \varphi)} \dots\dots (13)$$

これより定常解は下式となる。

$$i_s = \frac{\sqrt{2} |\dot{V}| j\omega}{-\omega^2 a + c + j\omega b} e^{j(\omega t + \varphi)} \\ = \sqrt{2} |\dot{I}_s| e^{j\omega t} = \sqrt{2} \dot{I}_s \dots\dots\dots (14)$$

ここで \dot{I}_s は次の円ベクトルである。

$$\dot{I}_s = \frac{|\dot{V}| j\omega}{-\omega^2 a + c + j\omega b} e^{j(\omega t + \varphi)} \dots\dots\dots (15)$$

過渡解に対しては (10) 式の同次式に (12) 式を代入して下式を得る。

$$a\delta^2 + b\delta + c = 0 \dots\dots\dots (16)$$

これは特性方程式で、特性根は次の二根である。

$$\delta_1, \delta_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \dots\dots\dots (17)$$

一般過渡解は下式で与えられる。

$$i_t = A_1 e^{\delta_1 t} + A_2 e^{\delta_2 t} \dots\dots\dots (18)$$

ここに A_1 と A_2 は任意定数で、初期条件から定めらる。一般解は下式で与えられる。

$$i = i_s + i_t = \frac{\sqrt{2} |\dot{V}| j\omega}{c - a\omega^2 + j\omega b} e^{j(\omega t + \varphi)} \\ + A_1 e^{\delta_1 t} + A_2 e^{\delta_2 t} \dots\dots\dots (19)$$

この一般解の各項はすべて SV であることに注目

すべきである。この例のような二次微分方程式の解法で得られるSVの解を従来の過渡現象論で実数表現に直すために要する手数が多大であることが学会の「過渡現象論」に示されている⁽⁸⁾。定常解も過渡解もSVで表わすことにすれば、上の例のように、解析が統一的行われ、実用上の利点も非常に大きいものがある。

phasor 表現の特長の一つは複素平面上に静止ベクトルとして描けることであるが、(19)式のSVの解で $t=0$ と置けば、3項とも静止ベクトルとなって、図2のように複素平面上に書き表わすことができる。定常解も過渡解もともに静止ベクトルとして描けることはSV法の特長である。

上の例で $b^2-4ac>0$ の場合には(17)式の二つの特性根 δ_1, δ_2 は異なる実根で、(19)式が一般解であり、過渡項はともに減衰直流となる。

$b^2-4ac=0$ の場合には二つの特性根は等根となって、 $\delta_1=\delta_2$ である。このとき(18)式の一般過渡解は次のようになる。

$$i_t = A_1 e^{\delta_1 t} + A_2 t e^{\delta_1 t} \dots\dots\dots (20)$$

$b^2-4ac<0$ の場合には二つの特性根は複素根となり、共役である。すなわち、

$$\delta_1, \delta_2 = -\lambda \pm j\omega' \dots\dots\dots (21)$$

の形となって、一方は複素平面上で時計方向に回るベクトルとなって、SV定理2に反する。そこで(18)式で任意定数を $A_2=0$ としてこれを除いて一般過渡解は次式となる。

$$i_t = A_1 e^{\delta_1 t} \dots\dots\dots (22)$$

これは数学的に無理ではなくて、実用上にも不便は生じない。なぜならば、共役ベクトルは付け加える情報量をもたず、 A_1 が複素数であるので、二つの初期条件を組み込めるからである。

以上で電流の過渡現象の一般解が得られたので、これを用いて電力の過渡現象の解を求めよう。電力はスカラで、次式で与えられる。

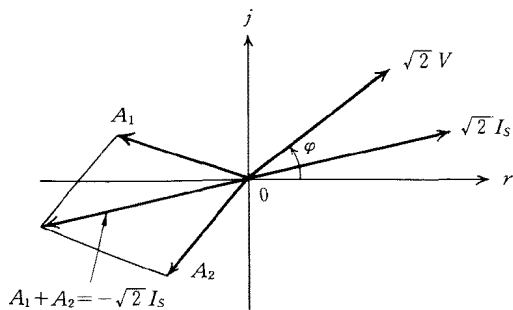


図2 (19)式の $t=0$ におけるベクトル図

$$p = Re[v] \cdot Re[i] \dots\dots\dots (23)$$

(11)式より、

$$Re[v] = \sqrt{2} |\dot{V}| \cos(\omega t + \varphi) \dots\dots\dots (24)$$

電流の一般解は(19)、(22)式から次のように書ける。

$$i = \sqrt{2} |\dot{I}| e^{j(\omega t + \varphi_1)} + |A_1| e^{(-\lambda + j\omega')t + j\varphi'} \dots\dots (25)$$

したがって

$$Re[i] = \sqrt{2} |\dot{I}| \cos(\omega t + \varphi_1) + |A_1| e^{-\lambda t} \times \cos(\omega' t + \varphi') \dots\dots\dots (26)$$

(25)、(26)式を(23)式に代入して

$$\begin{aligned} p &= \sqrt{2} |\dot{V}| \cos(\omega t + \varphi) \cdot [\sqrt{2} |\dot{I}| \cos(\omega t + \varphi_1) \\ &\quad + |A_1| e^{-\lambda t} \cos(\omega' t + \varphi')] \\ &= |\dot{V}| |\dot{I}| [\cos(\varphi - \varphi_1) \\ &\quad + \cos(2\omega t + \varphi + \varphi_1)] + \frac{|\dot{V}| |A_1|}{\sqrt{2}} e^{-\lambda t} \\ &\quad \times [\cos\{(\omega - \omega')t + \varphi - \varphi'\} \\ &\quad + \cos\{(\omega + \omega')t + \varphi + \varphi'\}] \end{aligned}$$

これより

$$p = \frac{1}{2} Re[v i^* + v i] \dots\dots\dots (27)$$

ここに*は共役を示す。(27)式の第1項は差周波の電力で、これには零周波、すなわち一定電力が含まれる。第2項は和周波の電力である。

三相電力に触れておこう。対称三相電力は $3 \times p$ ではない。位相角 $\varphi, \varphi_1, \varphi'$ には各相間に $2\pi/3$ の位相差があるので、 $\varphi + \varphi_1, \varphi + \varphi'$ には $4\pi/3$ の位相差があつて、和周波の電力は三相間で打消されて零となり、対称三相電力は

$$p_3 = \frac{3}{2} Re[v i^*] \dots\dots\dots (28)$$

となる。和周波電力がなくなることは三相方式の大きな長所である。

(28)式の定常値は、

$$P_3 = 3 |\dot{V}| |\dot{I}| \cos(\varphi - \varphi_1) \dots\dots\dots (29)$$

である。(28)式で Re を除くと、定常値は

$$P_3 = 3 |\dot{V}| |\dot{I}| [\cos(\varphi - \varphi_1) + j \sin(\varphi - \varphi_1)] \dots\dots\dots (30)$$

となって、第1項は三相有効電力、第2項は三相無効電力[単位はvar]となって、電力がベクトル表現される。

SVによる電力表現の(27)式はいろいろの電力成分を表現することができる。

5. 一般スパイラルベクトル回路理論

前章に示した二次微分方程式の例から得られた

結論を拡張して、一般スパイラルベクトル回路理論を説明しよう。二端子で多メッシュをもつ集中定係数の回路の方程式は次式の形に書き直すことができる。

$$A(p)i = B(p)v \quad \dots\dots\dots (31)$$

ここに $p = d/dt$ であって、 $A(p), B(p)$ は p の多項式で、次のように書ける。

$$\left. \begin{aligned} A(p) &= a_0 + a_1p + a_2p^2 + \dots + a_np^n \\ B(p) &= b_0 + b_1p + b_2p^2 + \dots + b_np^n \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (32)$$

係数 a_0, a_1, \dots と b_0, b_1, \dots は多くの場合一定な実数である。

(31)式の v が(11)式の円ベクトルである場合には、電流の定常解 i_s も円ベクトルであるので、 $e^{j\omega t}$ の因子をもっていて、 $pi_s = j\omega i_s$ であり、 $pv = j\omega v$ である。したがって定常解に対して(31)式は次のようになる。

$$A(j\omega)i_s = B(j\omega)v \quad \dots\dots\dots (33)$$

これより定常解は、

$$i_s = \frac{B(j\omega)}{A(j\omega)}v = \frac{B(j\omega)}{A(j\omega)}\sqrt{2}|V|e^{j(\omega t + \varphi)} = \sqrt{2}\dot{I}_s \quad \dots\dots\dots (34)$$

となって、円ベクトル \dot{I}_s である。ここに $A(j\omega)/B(j\omega)$ は入力交流インピーダンスである。

過渡解を求めるための(31)式の特性方程式は

$$A(p) = 0 \quad \dots\dots\dots (35)$$

である。この根は特性根で一般に n 個ある。それを $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$ とすると、一般過渡解は次のように書ける。

$$i_t = A_1e^{\delta_1 t} + A_2e^{\delta_2 t} + \dots + A_ne^{\delta_n t} \quad \dots\dots\dots (36)$$

ここに A_1, A_2, \dots, A_n は任意の定数で、 n 個の初期条件から定められる。特性根のなかに重根 δ_r があって、それが r 重根である場合には、下記の項を(36)式に加えねばならない。

$$i_t = A'_1te^{\delta_r t} + A'_2t^2e^{\delta_r t} + \dots + A'_rt^{r-1}e^{\delta_r t} \quad \dots\dots\dots (37)$$

特性方程式(35)式の係数が実数であるときに、特性根が複素根となる場合には、前章の例のように、共役対の根となって現われる。そのときには時計方向に回転する項は除く。SV法では役に立たない項であるからである。かくして一般解は次の定理で与えられる。

SV 定理3

回路方程式が次の微分方程式で与えられ、

$$A(p)i = B(p)v \quad \dots\dots\dots (31)$$

端子電圧 v が(11)式の円ベクトルであるとき、

一般解は次式で与えられる。

$$i = \frac{B(j\omega)}{A(j\omega)}\sqrt{2}|V|e^{j(\omega t + \varphi)} + A_1e^{\delta_1 t} + A_2e^{\delta_2 t} + \dots + A_ne^{\delta_n t} \quad \dots\dots\dots (38)$$

$\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$ は $A(p) = 0$ の特性根であって、第2項以降の過渡項のうち時計方向に回る過渡項は除く。これによって数学的に一般解であることには変りはないのである。

この定理3では一般解のすべての項がSVである。従来別々に扱われていた定常解と過渡解が統一して扱われるので、電気回路の統一解析理論が定理3で与えられる。

SV法によるこの統一解析理論はさらに拡張される。(31)式の入力電圧 v が次式のようにSVで与えられるとすると、

$$v = \sqrt{2}|V|e^{(-\lambda + j\omega)t + j\varphi} = \sqrt{2}\dot{V}e^{\delta t} \quad \dots\dots\dots (39)$$

次の定理が得られる。

SV 定理4

(31)式の一般解は下記となる。

$$i = \frac{B(\delta)}{A(\delta)}\sqrt{2}Ve^{\delta t} + A_1e^{\delta_1 t} + A_2e^{\delta_2 t} + \dots + A_ne^{\delta_n t} \quad \dots\dots\dots (40)$$

第2項以下は一般過渡解で、定理3のそれと同形であることは、特性方程式が同じ(35)式であることから当然である。第1項は定常解のように見えるが、円ベクトルではない。SVであるのでスパイラルベクトル特解と呼ぶこととする。定理3と比べて、 $j\omega$ が δ となって、当然のように見えるが、数学的にそれを証明しよう。

$i = \{B(\delta)/A(\delta)\}v$ が特解であることは以下のようにして証明される。これを(31)式に代入して、

$$A(p)\frac{B(\delta)}{A(\delta)}v = B(p)v$$

これを次のように順次変形して

$$\frac{A(p)}{A(\delta)}v = \frac{B(p)}{B(\delta)}v \rightarrow \frac{A(\delta)}{A(\delta)}v = \frac{B(\delta)}{B(\delta)}v \rightarrow v = v \quad \dots\dots\dots (41)$$

となってこれは成立する。かくして $i = \frac{B(\delta)}{A(\delta)}v$ が特解であることが証明された。 $\delta = j\omega$ の場合にも成り立つので、これで(38)式の第一項が特解であることも証明された。これまで p を $j\omega$ と置く数学的な説明がよくされないことが多く、記号法にすぎないように教えられることが少なくなかったが、これは改めるべきである。

円ベクトルおよびSVの入力電圧に対して電流

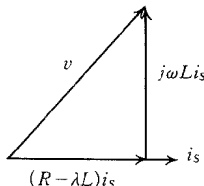
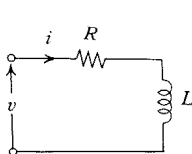


図 3 L-R 回路

図 4 SV 特解のベクトル図

の一般解がそれぞれ(38), (40)式として求められた。これに対する電力の過渡現象の解は(27), (28)式から帰納して、次の定理が得られる。

SV 定理 5

電力の過渡解 p は下式で与えられる。

$$p = \text{Re}[v] \cdot \text{Re}[i] = \frac{1}{2} \text{Re}[v^* + vi] \quad \dots (42)$$

対称三相の三相電力は下式となる。

$$P_s = \frac{3}{2} \text{Re}[vi^*] \quad \dots (43)$$

定理 4 の例を示そう。図 3 に示す L-R 回路に SV 電圧が加えられた場合の回路方程式は下記となる。

$$Ri + L \dot{p}i = \sqrt{2} \dot{V} e^{(-\lambda + j\omega)t + j\varphi} \quad \dots (44)$$

この一般解は SV 定理 4 によって次式で与えられる。

$$i = \frac{\sqrt{2} \dot{V} e^{(-\lambda + j\omega)t + j\varphi}}{R + (-\lambda + j\omega)L} + A e^{-(R/L)t} \\ = i_s + i_t \quad \dots (45)$$

第 1 項の SV 特解 i_s は次の方程式を満足する。

$$Ri_s + (-\lambda + j\omega)Li_s = \sqrt{2} \dot{V} e^{(-\lambda + j\omega)t + j\varphi} \quad \dots (46)$$

この式の $t=0$ におけるベクトル図を描くと図 4 となる。実効抵抗が $R - \lambda L$ となり、インダクタンスは L のままである。 $R = \lambda L$ のときには実効抵抗が零となり、一種の共振現象が起きたようになる。

SV 定理 4 は回転機の回路方程式の解析で大へん重要な働きをすることを 7 章で示す。

6. 変数表現と回路方程式

状態変数の表現形式が異なると、回路方程式が変形するかどうかの問題である。変数を SV で表現したとき、実数表現したときで回路方程式が変形するかどうかという問題である。結論を先にいえば、(31)式の一般回路方程式は変形しないのである。これを証明しよう。

定理 1 から次の関係が得られる。

$$\frac{di_{\text{real}}}{dt} = \frac{d(\text{real } i)}{dt} = \text{Re} \left[\frac{di}{dt} \right]$$

さらに一般に

$$p^n i_{\text{real}} = p^n \text{Re}[i] = \text{Re}[p^n i] \quad \dots (47)$$

である。ここに $p = d/dt$ である。したがって(31)式の一般回路方程式において、次の関係がある。

$$\text{Re}[A(p)i] = \text{Re}[B(p)v] \quad \dots (48)$$

これより

$$A(p)i_{\text{real}} = B(p)v_{\text{real}} \quad \dots (49)$$

が得られて、(31)と(49)式より、この一般回路方程式は SV でも、実数表現でも、どちらに対しても成立するのである。

さらに指摘したいことは、SV 定理 3 と 4 が示すように、SV で書かれた場合のほうが、実数表現によるよりも一般解を求めることが非常に容易であることである。

(31)式の一般回路方程式は定係数の線型回路を対象としているが、次章で時変係数回路にまで本章の所論は拡張される。

本章で述べたところは従来の回路理論（定常交流理論も含めて）において触れられておらず、数学的な基礎が欠けていたところである。SV 理論はこれを明確にするものである。

7. 回転機のスパイラルベクトル理論

回転機の解析理論は場理論 (field theory) と回路理論 (circuit theory) とに分けることができる。導体がシートあるいはブロック状で、分布回路定数をもつときには前者が適しており、導体が絶縁された電線状であるときには後者が適している。ここでは回路理論を対象とするが、回転機では回路定数が時間的に変化することが解析を難しくする。SV 法はここでも非常に有力な解析の手段となる。

三相機は巻線の数多くて、回路方程式の数が多くなって解析がやっかいである。しかし対称運転の定常状態の解析は長年の間 1 相だけの状態変数で解析を行ってきた。他の 2 相は位相差 120° で同じ現象の繰り返しであるからである。筆者はこれを相分離 (phase segregation) と呼ぶことにした。運転が非対称なときには対称座標法によって、対称な成分に分けて解析するが、これも phasor によって変数を表わすから可能なのである。phasor はこのような長所があるが、定常状態しか扱うことができないことは前述のとおりである。過渡現象の解析にまで相分離と対称座標法

とを適用可能にするのはSV法のみである⁽⁴⁾⁽⁶⁾⁽⁷⁾。実数表現ではどちらもできないのである。これはSV法の大きな長所であり、SV法が三相機の有力な解析の手法となる由縁である。

インバータの技術が進歩して、高級な制御用モータとして長年独占的に用いられていた直流モータに交流モータが置き換わりつつある。その際の問題の一つは交流モータの過渡現象の解析が十分でなかったことである。電気回路と同様に、定常状態は phasor で、過渡状態は実数値で扱われていて、回路解析と同じ問題があった。

三相機の過渡現象の解析には等価な二相機に変換して解析する二軸理論、あるいは d, q 軸理論が独占的に用いられているが、その解析は不十分であった。 d, q 軸理論の弱点の一つは、複雑な変数変換を行うにもかかわらず、解析がやっかいで、手数がかり、その結果を用いるにも不便であることである。筆者はこれにSV法を導入して、変数変換を全く行うことなく、元のままの状態変数を用いて三相機の一般動作方程式を導いた。これは定常、過渡両状態を記述するもので、三相機を相分離して1相の変数で表わし、連立する方程式の数が少なく、解析的に解を求めることも、計算機でシミュレーションするにも便利である。回路理論の場合と同様に、SV法は回転機の統一理論をもたらし、新しい理論の発展へと導くものと考ええる。

筆者はこの十余年回転機のSV理論を提案し、研究して、その成果を国の内外で論文および著書として発表した^{(1)~(7)(9)(12)}。以下にその要点、その後の発展の概要を述べる。

7.1 誘導モータのSV理論とFAM制御

高級な制御用モータとしては直流モータが主として用いられていたが、これを誘導モータで置き換えようとする動きはドイツが先行した。Field Orientation とか Tranvector とか呼ばれる制御理論であるが、いずれも実数表現の d, q 軸変換を用いる解析によっており、磁束を状態変数として加えたものである。 d, q 軸理論の解析力が弱くて、実用にも便利でないことは先に述べたが、ここでも例外ではない。三相誘導モータの過渡現象の解析が不十分で、そのために直流機に似たような制御ができるということとどまっていたようである。

筆者は誘導モータの過渡現象をSV法によって解析して、その結果を用いて磁界加速法 (field

acceleration method ; FAM) を提案した⁽¹⁾。その当時はSVという名前は用いなかったが、変数表現はSVであった。その後FAMは発展して相分離法、予励磁などの解析上、制御上で重要な原理を導くことができ、その結果、誘導モータはトルク-速度特性の直線性、トルク制御の即時応答など、直流モータの性能をはるかに超えるものであることを示した。FAMの大きな長所には元の変数をそのまま使い、等価回路によることがある。計算機の時代になっても等価回路は解析上の有力な手段である。いくつかの特長のある誘導機の等価回路をFAMは与えたが、いずれも過渡定常の両状態に対して成り立つ。そのうち $T-I$ 等価回路は図5に示すトルク-速度曲線とトルク制御の応答を与える。前者は完全に直線で、後者は即時応答である。このようにFAM制御は理想的な制御特性を誘導モータに与えることができる。誘導モータが制御用モータとして直流モータに換わりつつある由縁である。

FAM制御はいくつかの論文で発表した⁽¹⁰⁾、電気学会の教科書⁽¹²⁾にもものっている。外国でも英語やロシア語の本として出されている。ABB社はFAM制御によっていることを明記している⁽¹³⁾。このようにFAM制御は内外でよく紹介されているので、これ以上の説明はここでは省略

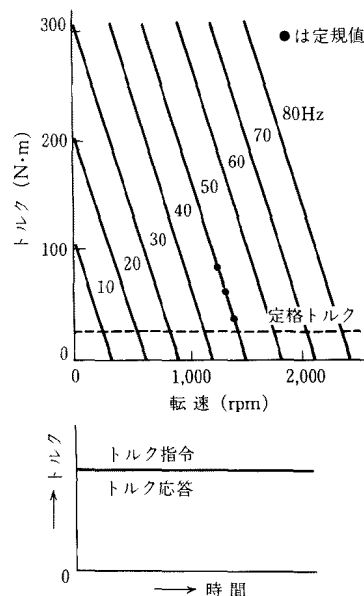


図5 誘導モータのT-I型FAM制御のトルク速度特性と応答

する。

7・2 同期機のSV理論

同期機は多かれ少なかれ突極性をもっている。大きなタービン発電機でもそうであるし、ブラシレス DC モータと呼ばれる永久磁石励磁の同期サーボモータでもそうである。後者で外形は非突極機のように見えても、回転子内部にある永久磁石のために、磁気回路が非対称となつて、大きな突極性を示す。突極性を考慮した同期機の解析はやっかいである。これまで長年の間その定常状態の解析は二反作用法が独占し、過渡状態の解析は Park の式が独占してきた。二反作用法は phasor 表現を用い、Park の方程式は実数値表現を用いている点は前述の回路理論や誘導モータの従来の解析理論と事情は同じであつて、同じ問題、定常解と過渡解の整合性が悪いこと、解析やシミュレーションに必ずしも便利でないことなどは同様である。

最近 SV 法を突極同期機の解法に適用してみたところ好成绩を得た⁽⁷⁾⁽¹¹⁾。上述の従来の二つの方法に負けないように見え、さらに発展して、より有利な点もあり得ると考えるので、その要旨をここに紹介する。

突極同期機のインダクタンスは回転子の位置 $\theta = \omega t + \varphi_d$ の変化によって、2 倍周波数の変化をするので、解析が面倒になる。三相電機子巻線の回路方程式は相分離されて、1 相のみの変数で表わされ下式となる⁽⁷⁾⁽¹¹⁾。

$$v_1 = -R_1 i_1 - \left(l_1 + \frac{3}{2} L' + \frac{3L'}{2} e^{j(2\varphi - 2\varphi_1)} \right) p i_1 + p [\lambda e^{j(\omega t + \varphi_d)}] \dots (50)$$

ここに L' はインダクタンスの変動振幅で、 λ は磁極からの磁束鎖交数である。定常状態に対しては変数は円ベクトルとなり、 $p \rightarrow j\omega$ となつて、(49)式は下式となる。

$$\begin{aligned} \dot{E}_1 - \dot{V}_1 &= R_1 \dot{I}_1 + j\omega \left(L_s - \frac{3L'}{2} \right) e^{j(2\varphi - 2\varphi_1)} \dot{I}_1 \\ &= \left[R_1 + \omega \frac{3}{2} L' \sin(2\varphi - 2\varphi_1) \right] \dot{I}_1 + j\omega \left[L_s - \frac{3}{2} L' \cos(2\varphi - 2\varphi_1) \right] \dot{I}_1 \dots (51) \end{aligned}$$

ここに $L_s = l_1 + \frac{3}{2} L'$ は同期インダクタンス、 $\dot{E}_1 = j\omega \lambda e^{j(\omega t + \varphi_d)}$ は内部誘導起電力である。(51)式の $t=0$ におけるベクトル図を図 6 に示す。二反作用と違って、電流 \dot{I} は分割されず、抵抗とインダクタンスが突極性 L' のために修正される。

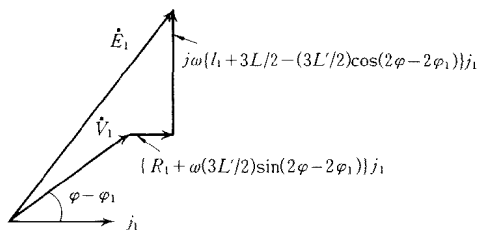


図 6 突極同期機のベクトル図

抵抗は

$$R_1 + \omega \frac{3}{2} L' \sin(2\varphi - 2\varphi_1) \dots (52)$$

となり、インダクタンスは (53) 式となる。

$$L_s - \frac{3L'}{2} \cos(2\varphi - 2\varphi_1) \dots (53)$$

$\varphi - \varphi_1 = \pm \frac{\pi}{2}$ のときには (53) 式のインダクタンスは、(54) 式となり、従来の二反作用法では L_d を直軸同期リアクタンスという。

$$L_s + \frac{3}{2} L' = L_d \dots (54)$$

$\varphi - \varphi_1 = 0$ のときには (53) 式のインダクタンスは (55) 式となり、二反作用法では L_q を横軸同期インダクタンスという。

$$L_s - \frac{3}{2} L' = L_q \dots (55)$$

これらのインダクタンスの間には次の関係がある。

$$L_s = \frac{1}{2} (L_d + L_q), L' = \frac{1}{3} (L_d - L_q) \dots (56)$$

(52) 式が示すように、実効抵抗は突極性のために第 2 項だけ増したことになって 3 相入力が下式だけ増加する。

$$3 \times \omega \frac{3}{2} L' \sin(2\varphi - 2\varphi_1) |\dot{I}_1|^2 \dots (57)$$

ブラシレス DC モータのトルクは次式だけ増える。

$$3 \frac{P}{2} \frac{3}{2} L' \sin(2\varphi - 2\varphi_1) |\dot{I}_1|^2 \quad [\text{N} \cdot \text{m}] \dots (58)$$

ブラシレス DC モータの総トルクは、

$$\begin{aligned} T &= \frac{P}{2} [3\lambda |\dot{I}_1| \cos(\varphi - \varphi_1) \\ &\quad + 3 \frac{P}{2} \frac{3}{2} L' \sin(2\varphi - 2\varphi_1) |\dot{I}_1|^2] \dots (59) \end{aligned}$$

である。これを図示すると図 7 となる。突極性トルクのために、直線性が失なわれるが、 $\varphi = \varphi_1$ の制御をすれば直線性が回復される。

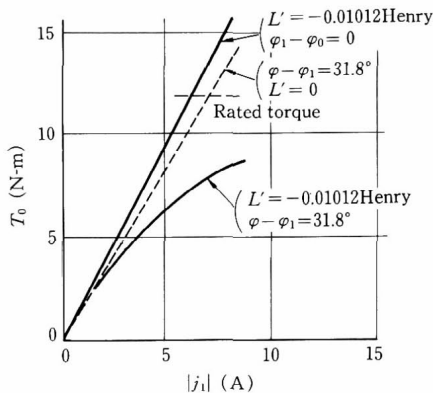


図7 ブラシレス DC モータのトルク-電流

過渡現象に対しても(50)式は成り立つ。ブラシレス DC モータでは最後の項の λ が一定となつて、過渡解を求めることが容易である。この際に SV 定理4が役立って、一般解は下式となる⁽¹¹⁾。

$$i_1 = A e^{-\lambda t} + \frac{(3L'/2)(-\lambda + j2\omega)}{R_1 + (-\lambda + j2\omega)L_s} \times A e^{(-\lambda + j2\omega)t + j2\varphi_d} + \sqrt{2} \dot{I} |e| e^{5(\omega t + \varphi_1)} + \sqrt{2} I_1 e^{j(\omega t + \varphi_1)} \quad (60)$$

ここに

$$\lambda = \frac{R_1}{L_s - \frac{(3L'/2)^2}{L_s}} \quad (61)$$

であり、最後の項は(51)式の定常解で与えられ、過渡項は減衰直流分と2倍周波数成分からなり、減衰定数 λ も共通で、共に任意定数 A を含む。

界磁巻線があっても、励磁電流が一定の場合には上記の永久磁石励磁と同じである。界磁巻線に過渡電流が流れると磁束 λ は一定でなく、界磁巻線の回路方程式が加わる。ダンパー巻線がある場合にはさらに連立方程式が加わるが、解析の手順は同様である⁽¹¹⁾。

二反作用法と Park の方程式の独占を排除するだけでなく、SV 理論はさらに長所が得られるものと考えられる。

8. む す び

静止回路と回転機の動的な回路の解析に SV 法を適用して、新しい回路理論の体系を与えた。これは定常解と過渡解とを統一的に扱いやすい SV 理論体系である。さらに入力 i が SV である場合の一般解を与えて、回路理論に新しい領域を開いた。三相回転機の過渡現象の解析が不備であったものを、SV 法を導入することによって、相分離

法、対称座標法などを過渡現象の解析にも適用可能にして、解析と制御に成果をあげた。突極型同期機の解析についても SV 法は新しい手法を開拓した。SV 法の利用が各方面で始まったが、一層の進展が期待される。

筆者は学会創立 100 周年にあたり記念講演をした⁽¹⁴⁾。そのなかで 11 件の技術予想をした。SV と FAM が含まれているが、ここでその解説ができたことは大へん嬉しい。(5 年 7 月 30 日受付)

文 献

- (1) 山村・中川：「交流サーボモータの過渡現象解析と制御——磁界加速法の提案」, 電学論 B, **101**, 557, (昭 56-9)
- (2) 山村・中川：「誘導機による交流サーボモータの等価回路と磁界加速法 (FAM) 制御」, 電学論 B, **102**, 439 (昭 57-7)
- (3) 山村・中森・近藤：「制御用モータとしての同期機」, 速度トルク制御解析理論, 電学論 B, **104**, 703
- (4) 山村：「相分離法と減衰ベクトル対称座標法による交流機の過渡現象の解析理論」, 電学論 B, **105**, 581 (昭 60-7)
- (5) S. Yamamura: AC Motors for High Performance Applications (book), (1986) Marcel Dekker, New York, Basel
- (6) 山村：交流モータの解析と制御 (昭 63) オーム社
- (7) S. Yamamura: Spiral Vector Theory of AC Circuits and Machines (book), (1992) Oxford university Press
- (8) 電気学会編：過渡現象論, p. 28
- (9) S. Yamamura: Russian Edition of Spiral Vector Theory of AC Circuits and Machines" (1993)
- (10) 山村：「交流回路と交流機のスパイラルベクトル理論」, 電学誌, **109**, 517 (平 1-7)
- (11) S. Yamamura: "Spiral vector theory of salient-pole synchronous machine", *Proc. of IEEE IAS Ann. Meeting*, p. 204 (1992)
- (12) 電気学会編：電気機器工学 II (改訂版), 第 8 章
- (13) A. M. Sharaf & A. C. Rufer: "A FAM control for asynchronous motor drive", *EPE*, Aachen, p. 511 (1989)
- (14) 山村：「電気学会 100 年の回顧と展望」, 電学誌, **108**, 740 (昭 63-8)



山 村 昌 (名誉員)

大正 7 年 2 月 26 日生。昭和 16 年東京帝国大学工学科卒業。東京帝国大学工学部講師, 22 年東京大学助教授, 31 年同教授。工学博士。Ph. D. 50 年電気学会会長。53 年横浜国立大学教授 (58 年まで), 58 年工学院大学教授 (平成元年まで)。58 年電気事業審議会委員, 57 年国際電気標準会議理事会メンバー, 58 年電源開発調整審議会委員などを兼務。62 年超電導産業技術開発懇談会会長。30 年電気学会論文賞, 42 年, 50 年同進歩賞, 45 年同電力賞, 49 年同著作賞, 50 年同功績賞, 1982 年 IEEE Nikola Tesla Award, 1984 年 IEEE 100 years Anniv. Medal. 63 年電気学会振興功労者表彰。53 年藍綬褒賞。58 年日本学士院賞, 63 年勲二等瑞宝賞受賞。現在, 日本学士院会員, 電力中央研究所特別顧問, 東京大学名誉教授。静電気学会名誉会員。IEEE Life Fellow.