7. מצא חסם תחתון לשונות של אומד ל- λ , פרמטר של התפלגות פואסון.

$$X \sim p(\lambda) \qquad E(x) = Var(x) = \lambda$$

$$f(x) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^x}{x!}$$

$$\ln f(x) = \ln\left(\frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^x}{x!}\right) = \ln e^{-\lambda} + \ln \lambda^x - \ln x! = -\lambda + x \ln \lambda - \ln x!$$

$$\frac{d \ln f(x)}{d\lambda} = -1 + \frac{x}{\lambda}$$

$$\left(-1 + \frac{x}{\lambda}\right)^2 = \frac{x^2}{\lambda^2} - \frac{2x}{\lambda} + 1$$

$$E\left(\frac{x^2}{\lambda^2} - \frac{2x}{\lambda} + 1\right) = \frac{1}{\lambda^2} \cdot E(x^2) - \frac{2}{\lambda} \cdot E(x) + 1$$

$$E(x^2) = Var_x + (E(x)^2) = \lambda + \lambda^2 = \lambda(1+\lambda)$$

$$\frac{1}{\lambda^2} \cdot \lambda(1+\lambda) - \frac{2}{\lambda} \cdot \lambda + 1 = \frac{1+\lambda}{\lambda} - 1 = \frac{1}{\lambda} + 1 - 1 = \frac{1}{\lambda}$$

$$\frac{1}{n \cdot \frac{1}{\lambda}} = \frac{\lambda}{n} \implies \boxed{Var(\hat{\lambda}) \geq \frac{\lambda}{n}}$$