

8. מתוך התפלגות אחידה (רציפה) בקטע  $[2, \beta]$ , הוצא מדגם מקרי בגודל  $n=3$ ,

$Y_1, Y_2, Y_3$ . לצורך אמידת  $\beta$  הוגדרו שני האומדים הבאים:

$$\hat{\beta}_1 = Y_1 \quad .1$$

$$\hat{\beta}_2 = 2(\bar{Y}_3 - 1) \quad .2 \quad \text{כאשר: } \bar{Y}_3 = \frac{1}{3} \cdot \sum_{i=1}^3 Y_i$$

איזה מבין האומדים שהוצעו הוא הטוב ביותר לאמידת  $\beta$ ?

(רמז: אם משתנה  $Y_i$  מפולג אחידה  $U[a, b]$ , אזי  $E[Y_i] = \frac{a+b}{2}$ ,  $VAR[Y_i] = \frac{(b-a)^2}{12}$ )

$$\beta \sim U(2, \beta) \quad n=3 \quad \text{מחילה } E(y) = \frac{2+\beta}{2}$$

$$\hat{\beta}_1 = y_1 \quad \hat{\beta}_2 = 2 \left( \frac{1}{3} \cdot \sum_{i=1}^3 y_i - 1 \right)$$

$$E(\hat{\beta}_1) = E(y_1) = \frac{2+\beta}{2} \quad \text{n.n.lc}$$

$$E \left[ 2 \left( \frac{1}{3} \cdot \sum_{i=1}^3 y_i - 1 \right) \right] = E \left( 2 \cdot \left( \frac{1}{3} (y_1 + y_2 + y_3) \right) - 1 \right) =$$

$$E \left( \frac{2}{3} y_1 \right) + E \left( \frac{2}{3} y_2 \right) + E \left( \frac{2}{3} y_3 \right) + E(-2) =$$

$$\frac{2}{3} E(y_1) + \frac{2}{3} E(y_2) + \frac{2}{3} E(y_3) - 2$$

$$\frac{2}{3} \left( \frac{2+\beta}{2} + \frac{2+\beta}{2} + \frac{2+\beta}{2} \right) - 2 = \frac{2}{3} \left( \frac{3(2+\beta)}{2} \right) - 2 = \beta \quad \text{n.n.lc}$$

$$Var(\hat{\beta}_1) = Var(y_1) = \frac{(\beta-2)^2}{12}$$

$$Var(\hat{\beta}_2) = Var \left[ 2 \left( \frac{1}{3} \cdot \sum_{i=1}^3 y_i - 1 \right) \right] = Var \left( \frac{2}{3} (y_1 + y_2 + y_3) - 2 \right) =$$

$$Var \left( \frac{2}{3} y_1 \right) + Var \left( \frac{2}{3} y_2 \right) + Var \left( \frac{2}{3} y_3 \right) + Var(-2) =$$

$$\left( \frac{2}{3} \right)^2 \left( \frac{(\beta-2)^2}{12} \right) \times 3 = \left( \frac{2}{3} \right)^2 \left( \frac{(\beta-2)^2}{4} \right) = \frac{4}{9} \left( \frac{(\beta-2)^2}{4} \right) = \frac{(\beta-2)^2}{9}$$