4. שלושה מדגמים מקריים נלקחים מאוכלוסייה בעלת תוחלת μ ושונות σ^2.

$n_1 = 10, n_2 = 8, n_3 = 6$

יהיו S_1^2, S_2^2, S_3^2 שונויות של המדגמים.

הוכח כי $S^2 = \dfrac{10S_1^2 + 8S_2^2 + 6S_3^2}{24}$ אומד חסר הטיה ל σ^2, כאשר

$$S_i^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n_i}(x_i - \bar{x})^2}{n_i - 1}$$

$i = 1,2,3$

ג3: $E(S_i^2)=\sigma^2 \Leftarrow S_i^2$ א.ח.ה ל-σ^2.

$$E(S^2) = E\left(\frac{10S_1^2 + 8S_2^2 + 6S_3^2}{24}\right) = \frac{10E(S_1^2) + 8E(S_2^2) + 6E(S_3^2)}{24} =$$

$$\frac{10\cdot\sigma^2 + 8\sigma^2 + 6\sigma^2}{24} = \frac{24\sigma^2}{24} = \sigma^2$$

$E(S^2) = \sigma^2 \Rightarrow$ S^2 א.ח.ה ל-σ^2

5. מצא אומד נראות מקסימלית, המבוסס על מדגם בגודל n לפרמטרים הבאים:

א) λ של התפלגות פואסון.

ב) θ של התפלגות מעריכית.

ג) p של התפלגות גאומטרית.

ד) p של התפלגות בינומית, כאשר n ידוע.

א) $X \sim P(\lambda)$

$$P(X=x) = \frac{e^{-\lambda}\cdot\lambda^x}{x!}$$

$$L(p) = \prod_{i=1}^{n}\frac{e^{-\lambda}\cdot\lambda^x}{x!} = \frac{e^{-\lambda}\cdot\lambda^{x_1}}{x_1!}\cdot\frac{e^{-\lambda}\cdot\lambda^{x_2}}{x_2!}\cdot\ldots\cdot\frac{e^{-\lambda}\cdot\lambda^{x_n}}{x_n!} = e^{-n\lambda}\cdot\frac{\lambda^{\sum_{i=1}^{n}x_i}}{\prod_{i=1}^{n}x_i!}$$

$$\ln L(p) = \ln\left(e^{-n\lambda}\cdot\frac{\lambda^{\sum_{i=1}^{n}x_i}}{\prod_{i=1}^{n}x_i!}\right) = -n\lambda + \ln\lambda^{\sum_{i=1}^{n}x_i} - \ln\prod_{i=1}^{n}x_i! =$$

$$-n\lambda + \sum_{i=1}^{n}x_i\cdot\ln\lambda - \ln\prod_{i=1}^{n}x_i!$$