

1. נתון מדגם מקרי בגודל  $2n$  מאוכלוסייה המסומנת ב  $X$ , בעלת תוחלת  $\mu$  ושונות  $\sigma^2$ . נגדיר 2 אומדים ל  $\mu$ :

$$\bar{X}_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \quad \bar{X}_1 = \frac{1}{2n} \cdot \sum_{i=1}^{2n} X_i$$

מהו האומד הטוב ביותר ל  $\mu$  ?

$$E(\bar{X}_1) = E\left(\frac{1}{2n} \cdot \sum_{i=1}^{2n} X_i\right) = \frac{1}{2n} \cdot E\left(\sum_{i=1}^{2n} X_i\right) = \frac{1}{2n} \cdot 2n \cdot \mu = \mu$$

$$\sum_{i=1}^n X_i = n \cdot \bar{X}$$

מכיוון שחסר  
(ה) :

$$mse(\hat{X}_1) = var(\hat{X}_1) = var\left(\frac{1}{2n} \cdot \sum_{i=1}^{2n} X_i\right) = \left(\frac{1}{2n}\right)^2 \cdot var\left(\sum_{i=1}^{2n} X_i\right) = \frac{1}{4n^2} \cdot 2n \cdot \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{2n}$$

$$E(\bar{X}_2) = E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n} \cdot E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n} \cdot n \cdot \mu = \mu$$

$$mse(\hat{X}_2) = var(\hat{X}_2) = var\left(\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n^2} \cdot var\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n^2} \cdot n \cdot \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

$$mse(\hat{X}_2) > mse(\hat{X}_1) \Rightarrow \frac{\sigma^2}{n} > \frac{\sigma^2}{2n}$$

כל  $\bar{X}_1$  אומד טוב יותר מ-  $\bar{X}_2$ .

2. יהיה  $X_1, X_2, \dots, X_7$  מדגם מקרי מאוכלוסייה בעלת תוחלת  $\mu$  ושונות  $\sigma^2$ . נגדיר שני אומדים ל  $\mu$ :

$$\bar{\theta}_2 = \frac{2X_1 + X_4 - X_7}{2} \quad \bar{\theta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^7 X_i}{7}$$

איזה מבין האומדים הוא חסר הטיה? איזה מבין האומדים הוא הטוב ביותר? באיזה מובן הוא הטוב ביותר?

$$\hat{\theta}_1 = E\left(\frac{\sum_{i=1}^7 X_i}{7}\right) = \frac{1}{7} \sum_{i=1}^7 E(X_i) = \frac{1}{7} \cdot 7 \cdot \mu = \mu$$

$$mse(\hat{\theta}_1) = var(\hat{\theta}_1) = var\left(\frac{\sum_{i=1}^7 X_i}{7}\right) = \frac{1}{7^2} \cdot var\left(\sum_{i=1}^7 X_i\right) = \frac{1}{7^2} \cdot 7 \cdot \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{7}$$