

# Тятя! Тятя! Наши сети притащили мертвеца!

Листочек с задачками №4: алгоритм обратного распространения ошибки

[https://github.com/FUlyankin/neural\\_nets\\_prob](https://github.com/FUlyankin/neural_nets_prob)

РАНХ  
осень 2020

Что происходит, когда мы суём пальцы в розетку? Нас бьёт током! Мы делаем ошибку, и она распространяется по нашему телу назад.

Твоя мама

## Упражнение 1 (граф вычислений)

Маша вспомнила картину из кофейни Добродума и решила нарисовать у себя дома свою такую же. Она хочет изобразить для функции

$$f(x, y) = x^2 + xy + (x + y)^2$$

граф вычислений. В кругляшах она будет записывать результаты вычислений. Каждое ребро будет обозначать элементарную операцию: плюс или умножить.

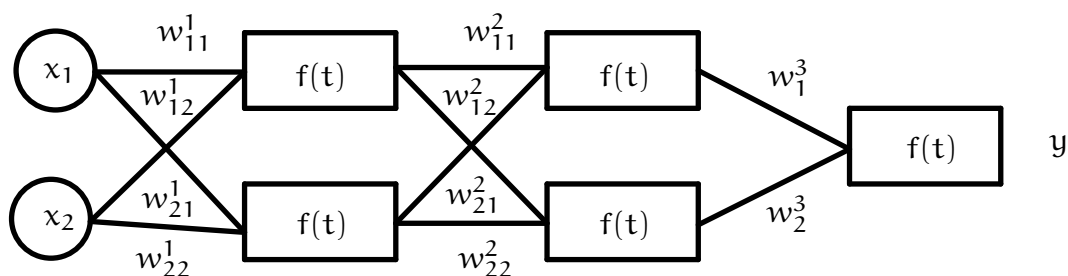
Когда картина будет нарисована, Маша хочет найти производные всех выходов из кругляшей по всем входам. Опираясь на получившийся граф Маша хочет выписать частные производные функции  $f$  по  $x$  и по  $y$ <sup>1</sup>.

## Упражнение 2 (придумываем backpropagation)

Маша умеет собирать нейросети. Например, у неё есть такая нейросеть:

---

<sup>1</sup>По мотивам книги Николенко "Глубокое обучение"(стр. 79)

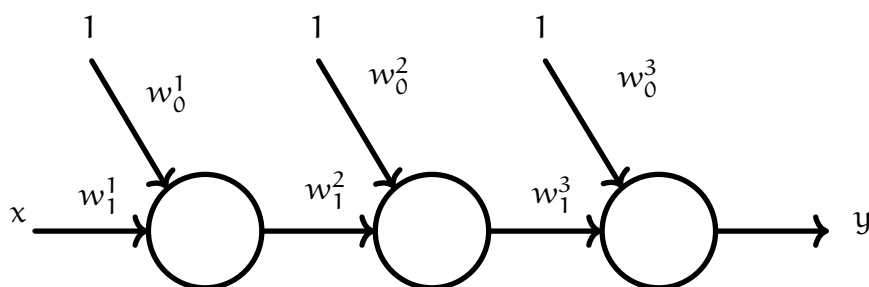


Здесь  $w_{ij}^k$  — веса для  $k$  слоя,  $f(t)$  — какая-то функция активации. Маша хочет научиться делать для такой нейронной сетки градиентный спуск:

- Запишите Машину нейросеть как сложную функцию. Сначала в обычной записи, а затем в матричном виде.
- Пусть  $L(W_1, W_2, W_3) = \frac{1}{2} \cdot (y - \hat{y})^2$  — функция потерь, где  $W_k$  — веса  $k$ -го слоя. Найдите производные функции  $L$  по всем весам  $W_k$ .
- В производных постоянно повторяются одни и те же части. Постоянно искать их не очень оптимально. Выделите эти часть в прямоугольнички цветными ручками.
- Выпишите все производные в том виде, в котором их было бы удобно использовать для алгоритма обратного распространения ошибки, а затем, сформулируйте сам алгоритм.

### Упражнение 3 (backpropagation руками)

Маша как-то раз решала задачу классификации. С тех пор у неё в кармане завалялась нейросеть:



В качестве функции активации Маша использовала сигмоиду:  $f(t) = \frac{e^t}{1+e^t}$ . Как это обычно бывает, Маша обнаружила её в своих штанах после стирки и очень обрадовалась. Теперь она хочет сделать два шага стохастического градиентного спуска, используя алгоритм обратного распространения ошибки.

У неё есть два наблюдения:  $x_1 = 1, x_2 = 5, y_1 = 1, y_2 = 0$ . Скорость обучения  $\gamma = 1$ . В качестве инициализации взяты нулевые веса. Сначала берётся второе наблюдение, затем первое. Помогите Маше.

#### Упражнение 4 (незаметный backpropagation)

Маша собрала нейросеть:

$$y = \max \left( 0; X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0.5 & 0 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 0.5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Теперь Маша внимательно смотрит на неё.

- Первый слой нашей нейросетки — линейный. По какой формуле делается forward pass? Предположим, что на вход пришло наблюдение  $x = (1, 2)$ . Сделайте через этот слой forward pass и найдите выход из слоя.
- Найдите для первого слоя производную выхода по входу. При обратном движении по нейросетке, в первый слой пришёл накопленный градиент  $(-1, 0)$ . Каким будет новое накопленное значение градиента, которое выплунет из себя линейный слой? По какой формуле делается backward pass?
- Второй слой нейросетки — функция активации, ReLU. По какой формуле делается forward pass? На вход в него поступило значение  $(2, -1)$ . Сделайте через него forward pass.
- Найдите для второго слоя производную выхода по входу. При обратном движении по нейросетке во второй слой пришёл накопленный градиент  $(-1, -2)$ . Каким будет новое накопленное значение градиента, которое выплунет из себя ReLU? По какой формуле делается backward pass?
- Третий слой нейросетки — линейный. По какой формуле делается forward pass? Пусть на вход поступило значение  $(2, 0)$ . Сделайте через него forward pass.
- Найдите для третьего слоя производную выхода по входу. При обратном движении по нейросетке, в третий слой пришёл накопленный градиент  $-2$ . Каким будет новое накопленное значение градиента, которое выплунет из себя линейный слой? По какой формуле делается backward pass?
- Мы решаем задачу Регрессии. В качестве функции ошибки мы используем MSE. Пусть для рассматриваемого наблюдения реальное значение  $y = 0$ . Найдите значение MSE. Чему равна производная MSE по входу (прогнозу)? Каким будет накопленное значение градиента, которое MSE выплунет из себя в предыдущий слой нейросетки, если изначально значение градиента инициализировано единицей?
- Пусть скорость обучения  $\gamma = 1$ . Сделайте для весов нейросети шаг градиентного спуска.

Посидела Маша, посидела, и поняла, что неправильно она всё делает. В реальности перед ней не задача регрессии, а задача классификации.

- а. Маша навинтила поверх второго линейного слоя сигмоиду. Как будет для неё выглядеть forward pass? Сделайте его. Найдите для сигмоиды производную выхода по входу.
- б. В качестве функции потерь Маша использует logloss . Как для этой функции потерь выглядит forward pass? Сделайте его. Найдите для logloss производную выхода по входу.
- в. Как будет выглядеть backward pass через logloss и сигмоиду? Прделайте его. Как изменится процедура градиентного спуска для остальной части сети?

## Упражнение 5 (Тот же backpropagation)

Пусть у нас есть нейронка:

$$y = f(X \cdot W_2) \cdot W_1$$

Как для функции потерь  $L(W_1, W_2) = (y - \hat{y})^2$  будет выглядеть алгоритм обратного распространения ошибки, если  $f(t) = \text{ReLU}(t) = \max(0; t)$ ? Найдите все выходы, все промежуточные производные. Опишите правило, по которому производная будет накапливаться, а также сам шаг градиентного спуска.