3.2 Еще один точный доверительный интервал

Упражнение

$X_1, \dots, X_n$ - выборка

Предположение: $X_1, \dots, X_n \sim iid\ U[0;\theta]$

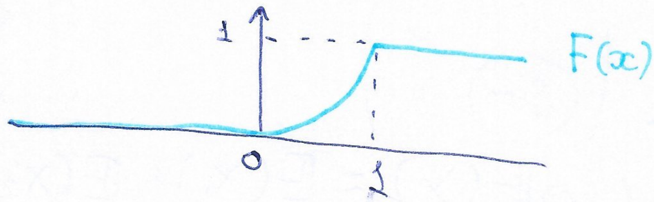
$\hat{\theta}^{ML} = x_{max}$

Нужен дов. инт. для $\hat{\theta}$!

$\frac{X_1}{\theta}, \dots, \frac{X_n}{\theta} \sim iid\ U[0;1]$

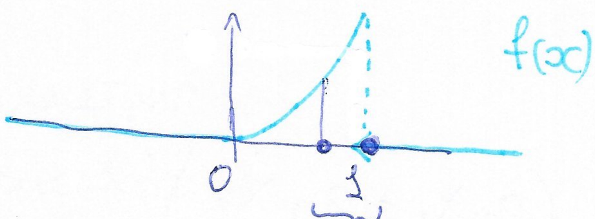
$\frac{x_{max}}{\theta} \sim ?$

$$F_{x_{max}}(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x^n, & x \in [0;1] \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$



g - квантиль нашего распределения

$$f_{x_{max}}(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [0;1] \\ nx^{n-1}, & x \in [0;1] \end{cases}$$



самый короткий интервал!

$$\mathbb{P}\left(g_1 \leq \frac{x_{max}}{\theta} \leq g_2\right) = 1 - \alpha$$

Хотим именно такие g_1 и g_2.

$$\mathbb{P}\left(g_\alpha \leq \frac{x_{max}}{\theta} \leq 1\right) = 1 - \alpha$$

$$F(g_\alpha) = \alpha$$

$$\frac{x_{max}}{\underbrace{g_\alpha}_{\sqrt[n]{\alpha}}} \leq \theta \leq x_{max}$$

$$g_\alpha = F^{-1}(\alpha) = \sqrt[n]{\alpha}$$

$\Rightarrow$

$\Rightarrow \left[\frac{x_{max}}{\sqrt[n]{\alpha}}; 1\right]$ - Точный $(1-\alpha)\%$ доверительный интервал для θ.

5.2 Многомерное нормальное.

$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$ - векторная случайная величина

Просто столбец из сл. вел.

$$\mathbb{E}(X) = \begin{pmatrix} \mathbb{E}(X_1) \\ \mathbb{E}(X_2) \end{pmatrix}$$

$$Var(X) = \begin{pmatrix} Var(X_1) & Cov(X_1, X_2) \\ Cov(X_1, X_2) & Var(X_2) \end{pmatrix}$$ - ковариационная матрица

Упражнение

$Y = X_1 + X_2$

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(X_1) + \mathbb{E}(X_2)$$

$$Var(Y) = Var(X_1) + Var(X_2) + 2\,Cov(X_1, X_2)$$

Упражнение

$A \cdot X = ?$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 \end{pmatrix}$$

Умножим на матрицу $\Rightarrow$ получим новую сл. вел.

$$\mathbb{E}(AX) = A\,\mathbb{E}(X)$$

$$Var(AX) = A \cdot Var(X) \cdot A^T \text{ — Почему?}$$

$$Var(a_{11}X_1 + a_{12}X_2) = a_{11}^2 \cdot Var(X_1) + a_{12}^2\, Var(X_2) + 2a_{11}a_{12}\, Cov(X_1, X_2)$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \end{pmatrix}}_{1\times 2} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} Var(X_1) & Cov(X_1 X_2) \\ Cov(X_1 X_2) & Var(X_2) \end{pmatrix}}_{2\times 2} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \end{pmatrix}}_{2\times 1}$$

$$\underbrace{\left[a_{11} Var(X_1) + a_{12} Cov(X_1 X_2) ; a_{11} Cov(X_1, X_2) + a_{12} Var(X_2) \right]}_{1\times 2} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \end{pmatrix}}_{2\times 1} = \ldots$$

Так происходит с любой строкой A =>

$$Var(AX) = A \cdot Var(X) \cdot A^T$$

Упражнение

Какими могут быть ковариационные матрицы?

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 7 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

$Cov(X_1, X_2) \neq Cov(X_2, X_1)$ => нет.

?

$Var(X_2) \geq 0$ => нет

$Var(X_1 - X_2) = 1 + 2 - 10 = -7$ => нет

- должна быть симметричной
- по диагонали числа ≥ 0.
- любая линейная комбинация сл. вел. даёт дисперсию ≥ 0.

$$Var(aX_1 + bX_2) = a^2 Var(X_1) + b^2 Var(X_2) + 2ab\, Cov(X_1, X_2)$$

квадратичная форма.

Она ≥ 0 когда выполнен критерий Сильвестра.

для $\begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{pmatrix}$ $v_{11} \geq 0$ и $\begin{vmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{vmatrix} \geq 0$.

Такие матрицы наз. положительно определенными.
Если $Var(X)$ положительно определена, мы никогда не получим отрицательную дисперсию.

Упражнение

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \qquad Var(X) = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$Y = A \cdot X$ так, чтобы $Var(Y) = \begin{pmatrix} ? & 0 \\ 0 & ? \end{pmatrix}$.

т. е. хочу получить независимые Y_1 и Y_2.

Забавный факт:

Отсылка к видосу

3 Задача про M&M's

Сундук → 44 желтых X_2
46 красных X_1
237 других

Модель:

X	красн.	желт.	другое
	p_1	p_2	$1-p_1-p_2$

Наверное, процесс порождения данных устроен как-то так...

Ненаблюдаемые константы

Хотим найти

$\hat{p}_1(X_1, X_2)$
$\hat{p}_2(X_1, X_2)$

случайные величины, оценки для констант.

а) $\hat{p}_1^{ML}$ $\hat{p}_2^{ML}$ – ?

$$L = p_1^{X_1} \cdot p_2^{X_2} (1-p_1-p_2)^{n-X_1-X_2}$$

$$\ln L = X_1 \ln p_1 + X_2 \ln p_2 + (n-X_1-X_2)\ln(1-p_1-p_2)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \ln L}{\partial p_1} = \dfrac{X_1}{p_1} - \dfrac{n-X_1-X_2}{1-p_1-p_2} \\ \dfrac{\partial \ln L}{\partial p_2} = \dfrac{X_2}{p_2} - \dfrac{n-X_1-X_2}{1-p_1-p_2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{X_1}{\hat{p}_1} - \dfrac{n - X_1 - X_2}{1 - \hat{p}_1 - \hat{p}_2} = 0 \\[2ex] \dfrac{X_2}{\hat{p}_2} - \dfrac{n - X_1 - X_2}{1 - \hat{p}_1 - \hat{p}_2} = 0 \end{cases}$$

Мы приравниваем к нулю и возникают колпаки. При настоящих p наши производные могут быть не равны нулю в данных $X_1, \dots, X_n$.

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} \hat{p}_1^{ML} = \dfrac{X_1}{n} \\[2ex] \hat{p}_2^{ML} = \dfrac{X_2}{n} \end{cases}$$

Логично. Что я вижу, то и есть на самом деле.

б) $\hat{p}^{ML} = \begin{pmatrix} \hat{p}_1^{ML} \\ \hat{p}_2^{ML} \end{pmatrix}$ — вектор из случайных величин.

По св-вам ММП $\hat{p}^{ML} \overset{asy}{\sim} N(p, \underbrace{Var(\hat{p})}_{\text{хотим оценить её.}})$

$\widehat{Var}(\hat{p})$.

$I(p) = -\mathbb{E}(H)$

инф. матрица фишера; матрица из 2-х производных

$Var(\hat{p}) = I^{-1}(p)$

$\widehat{Var}(\hat{p}) = \hat{I}^{-1}(p)$.

$$\hat{I} \begin{cases} \to -H \big|_{p=\hat{p}} \\ \to -\mathbb{E}(H) \big|_{p=\hat{p}} \end{cases}$$

два способа оценить I.

Приступим:

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \ln L}{\partial p_1^2} & \frac{\partial^2 \ln L}{\partial p_1 \partial p_2} \\ \frac{\partial^2 \ln L}{\partial p_2 \partial p_1} & \frac{\partial^2 \ln L}{\partial p_2^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{X_1}{p_1^2} - \frac{n - X_1 - X_2}{(1-p_1-p_2)^2} ; & -\frac{n - X_1 - X_2}{(1-p_1-p_2)^2} \\ -\frac{n - X_1 - X_2}{(1-p_1-p_2)^2} ; & -\frac{X_2}{p_2^2} - \frac{n - X_1 - X_2}{(1-p_1-p_2)^2} \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{E}(H) = \begin{pmatrix} -\frac{n}{p_1} - \frac{n}{1-p_1-p_2} ; & -\frac{n}{1-p_1-p_2} \\ -\frac{n}{1-p_1-p_2} ; & -\frac{n}{p_2} - \frac{n}{1-p_1-p_2} \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{E}(X_1) = n \cdot p_1$$

$$\mathbb{E}\left(\frac{n - X_1 - X_2}{(1-p_1-p_2)^2}\right) = \frac{n(1-p_1-p_2)}{(1-p_1-p_2)^2} = \frac{n}{1-p_1-p_2}$$

$\boxed{\text{Переходим в R!}}$

$\boxed{\text{Опрос про наркотики}}$

Упражнение

Числа от балды !!

Мы нашли $\hat{p} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$

$$\hat{Var}(\hat{p}) = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

а) Доверительный интервал 80% для p_1.

$$\hat{p} \sim N\left(\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\right).$$

$$p_1 : \hat{p}_1 \pm u_{1-\frac{0.2}{2}} \cdot \sqrt{5}$$

б) Доверительный интервал для $p_1 - p_2$.

$$Var(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) = 5 + 1 + 2 \cdot 2 = 10.$$

$$(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) \pm u_{1-\frac{0.8}{2}} \cdot \sqrt{10}$$

в) Какое распределение у $\log \hat{p}_1$ - ? (дельта-метод)

$g(t) = \log t$

$g'(t) = \frac{1}{t}$ $\qquad \log \hat{p}_1 \sim N(\log p_1 ; 45)$

$$g(\mathbb{E}(\hat{p}_1)) = \log p_1$$

$$Var(\hat{p}_1) \cdot (g'(\mathbb{E}(\hat{p}_1)))^2 = 5 \cdot \left(\frac{1}{\hat{p}_1}\right)^2 = 5 \cdot 9 = 45$$

г). $(\hat{p}_1)^2 + (\hat{p}_2)^2$ Двумерный дельта-метод...

$g(t_1, t_2)$ - ф. от двух аргументов.

$$\begin{pmatrix} \hat{p}_1 \\ \hat{p}_2 \end{pmatrix} \sim N\left(\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} ; \underbrace{\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}_{\Sigma}\right).$$

$$\nabla g = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial t_1} \\ \frac{\partial g}{\partial t_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t_1 \\ 2t_2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Если } \hat{\theta} \text{ - вектор и} \\ \hat{\theta} \sim N(\theta, \hat{Var}(\hat{\theta})) \\ \text{тогда} \\ g(\hat{\theta}) \sim N(g(\theta); \\ \nabla \hat{g}^T \cdot \hat{Var}(\theta) \cdot \nabla \hat{g}) \end{array}}$$

$$\underset{1\times 2}{\begin{pmatrix} 2\hat{p}_1 \\ 2\hat{p}_2 \end{pmatrix}^T} \cdot \underset{2\times 2}{\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}} \cdot \underset{2\times 1}{\begin{pmatrix} 2\hat{p}_1 \\ 2\hat{p}_2 \end{pmatrix}} = \left(\frac{10}{3} + \frac{8}{3} ; \frac{4}{3} + \frac{4}{3}\right) \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{8}{3} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 2 \cdot \frac{1}{3} \\ 2 \cdot \frac{2}{3} \end{pmatrix}^T$$

$$= \frac{18}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{8}{3} \cdot \frac{8}{3} = \frac{100}{9}$$