~~2.1.~~ Разложение в сумму

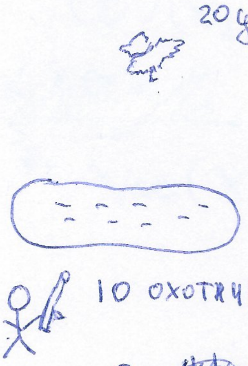
Трактат:

$X\ Y\ Z$ – сл. вел. $\quad x, y, z$ – их значения

$A\ B\ C$ – события

$\mathbb{E}$ – мат. ож. $\quad Var$ – дисперсия.

№1



20 уток

10 охотников.

$P = 1$

а) X – число уцелевших уток. $\mathbb{E}(X)$ – ?

б) $p = 0.7$, как меняется ответ – ?

в) Y – число попавших охотников $\mathbb{E}(Y)$ – ?

а)

X	10	11	12	...	19	~~20~~
$\mathbb{P}(\dots)$						~~0~~

$$\mathbb{P}(X=19) = \left(\frac{1}{20}\right)^{10}$$

$\mathbb{P}(X=18) =$ сложно.

$1 \quad 9 \to C_{10}^{1} \cdot \dots$

$2 \quad 8 \to C_{10}^{2} \cdot \dots$

$3 \quad 7$

Нужно другое решение.

Посмотрим с т.з. уток

$$X = X_1 + \dots + X_{20}$$

$$X_i = \begin{cases} 0, & \text{если утка мертва} \\ 1, & \text{если утка жива.} \end{cases}$$

X_1	0	1
$\mathbb{P}(\dots)$	$1-\left(\frac{19}{20}\right)^{10}$	$\left(\frac{19}{20}\right)^{10}$

$$\mathbb{P}(X_1 = 1) = \left(\frac{19}{20}\right)^{10}$$

все охотники стреляли в других уток.

$$\mathbb{E}(X_1) = \left(\frac{19}{20}\right)^{10}$$

$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(X_1 + \ldots + X_{20}) = \mathbb{E}(X_1) + \ldots + \mathbb{E}(X_{20}) = 20 \cdot \mathbb{E}($

$\mathbb{E}(X) = 20 \cdot \left(\frac{19}{20}\right)^{10} \approx 12$ уток.

б) $\mathbb{E}(X) = 20 \cdot \left(\frac{19}{20} + \frac{1}{20} \cdot 0.3\right)^{10} \approx 14$ штук

К доске↓

в) $Y = Y_1 + \ldots + Y_{10}$

Y_1	0	1
	0.3	0.7

$\mathbb{E}(Y_1) = 0.7$

$\mathbb{E}(Y) = 10 \cdot 0.7 = 7$ охотников.

№2

10 коробок

X – число пустых коробок

10 коробок
7 карандашей

$\mathbb{E}(X)$ и $Var(X)$

К доске↓

$X = X_1 + \ldots + X_{10}$

$X_i = \begin{cases} 1, & \text{коробка пустая} \\ 0, & \text{не пустая.} \end{cases}$

X_1	0	1
		$\left(\frac{9}{10}\right)^7$

$\mathbb{E}(X) = 10 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^7$

Пользовались:

$\mathbb{E}(X_1 + X_2) = \mathbb{E}(X_1) + \mathbb{E}(X_2)$ всегда

Однако:

$Var(X_1 + X_2) = Var(X_1) + Var(X_2) + 2\,Cov(X_1, X_2)$

$$\underbrace{Cov(X_1, X_2)}_{\text{интуиция - ?}} = \mathbb{E}(X_1 \cdot X_2) - \underbrace{\mathbb{E}(X_1)}_{\left(\frac{9}{10}\right)^7} \cdot \underbrace{\mathbb{E}(X_2)}_{\left(\frac{9}{10}\right)^7}$$

?

$X_2 \uparrow \Rightarrow X_5 \downarrow$

$X_2 \backslash X_5$	0	1
0	[illegible]	[illegible] $- 0.8^7$
1	[illegible] $- 0.8^7$	$(0.8)^7$

$$\mathbb{E}(X_1 X_2) =$$
$$= 1 \cdot 1 \cdot \mathbb{P}(X_2 = 1, X_5 = 1) +$$
$$+ 0 \cdot 1 \cdot \mathbb{P}(X_2 = 0, X_5 = 1) + \ldots =$$
$$= \mathbb{P}(X_2 = 1, X_5 = 1)$$

$$Cov(X_2, X_5) = 0.8^7 - (0.9)^{14} \approx -0.019$$

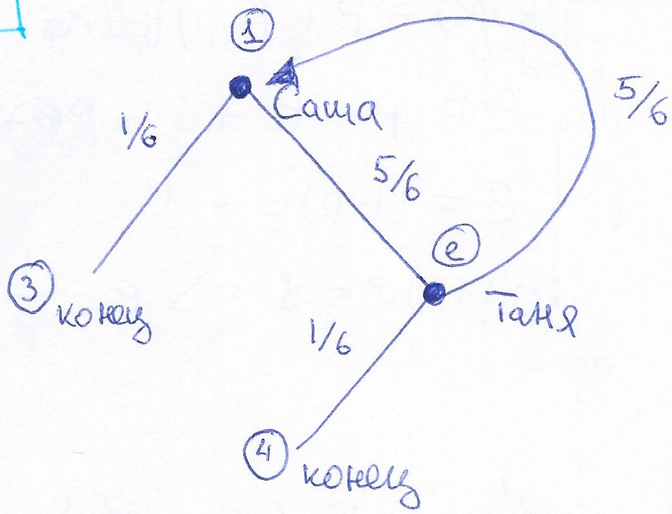
~~К доске 2~~

$$Var(X_2) = \underbrace{\mathbb{E}(X_2^2)}_{\mathbb{E}(X_2)} - [\mathbb{E}(X_2)]^2 = 0.9^7 - (0.9^7)^2 =$$
$$= 0.9^7(1 - 0.9^7)$$

$$Var(X) = Var(X_1 + \ldots + X_{10}) = 10 \cdot Var(X_1) + C_{10}^2 \cdot 2 \cdot Cov(X_1, X_2)$$
$$= \text{ОТВЕТ.}$$

2.2. Метод первого шага

№6



$$\begin{cases} P_{1\to3} = \frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{5}{6} \cdot P_{2\to3} \\ P_{2\to3} \ \frac{1}{6} \cdot 0 + \frac{5}{6} \cdot P_{1\to3} \end{cases}$$

$$P_{1\to3} = \frac{1}{6} + \frac{25}{36} P_{1\to3}$$

$$\frac{11}{36} P_{1\to3} = 1/6 \Rightarrow P_{1\to3} = \frac{6}{11}$$

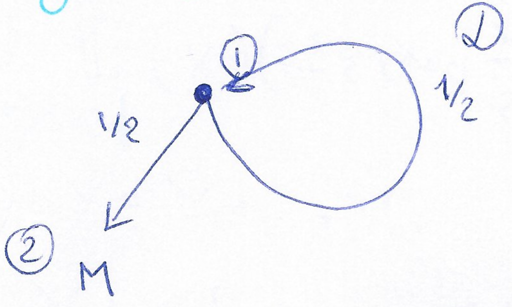
Почему игра не будет ∞?

$$\left(\frac{5}{6}\right)^{2n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

№7 Древо игры

Вер., что остановятся — ?

К доске ↓



$$P_{1\to 2} = \frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot P_{1\to 2}$$

$$P_{1\to 2} = 1.$$

сейчас: X

завтра: $X+1$

X – число детей в семье. $\mathbb{E}(X)$ – ?

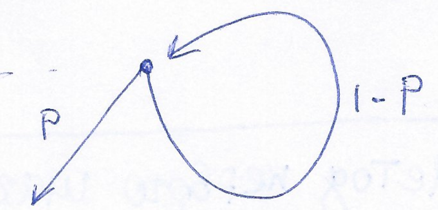
$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{2}\mathbb{E}(X+1)$$

$$e = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e + \frac{1}{2}$$

$$e = 1 + \frac{1}{2}e.$$

$$\frac{1}{2}e = 1 \Rightarrow e = 2$$

Мат. ож. геом. распр.



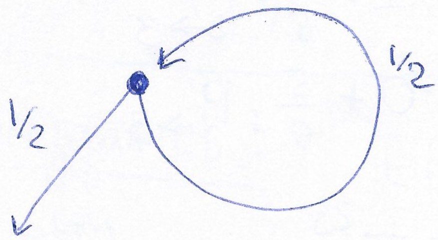
$$\mathbb{E}(X) = p + (1-p)\mathbb{E}(X+1)$$

$$e = p + e + 1 - pe - p$$

$$e = (1-p)e + 1$$

$$(1-1+p)e = 1 \Rightarrow e = \frac{1}{p}.$$

$$\mathrm{Var}(X) = \underbrace{\mathbb{E}(X^2)}_{\text{НАДО НАЙТИ}} - (\mathbb{E}(X))^2$$



сейчас: X^2

завтра: $(X+1)^2$

$$\mathbb{E}(X^2) = \frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{2}\mathbb{E}((X+1)^2)$$

$$\mathbb{E}(X^2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\mathbb{E}(X^2) + 2\mathbb{E}(X) + 1\right)$$

$$\frac{1}{2}\mathbb{E}(X^2) = 1 + \underbrace{\mathbb{E}(X)}_{2}$$

$(x^2) = 6$

$Var(x) = 6 - 4 = 2$

$\boxed{№8}$

X – число шоколадок до полной коллекции.

краб   краб игуана   краб краб игуана рапунцель ....

1   2   3

$X = X_1 + X_2 + \ldots + X_{30}$ РАЗДЕЛЯЙ И ВЛАСТВУЙ!

X_1 – число шоколадок до первой

X_2 – число шоколадок до второй

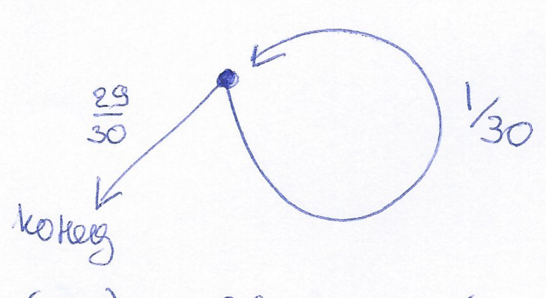
....

X_1	1
	1

$\mathbb{E}(X_1) = 1$

X_2	1	2	3	....
	$\frac{29}{30}$	$\frac{1}{30} \cdot \frac{29}{30}$	$\frac{1}{30} \cdot \frac{1}{30} \cdot \frac{29}{30}$	....

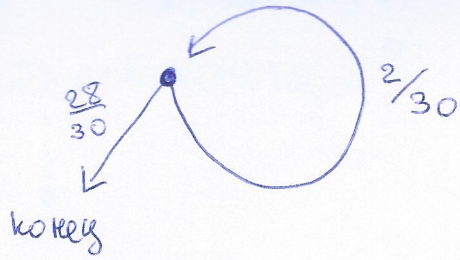
$\mathbb{E}(X_2) = ?$



$$\mathbb{E}(X_2) = \frac{29}{30} + \frac{1}{30} \cdot \left(\mathbb{E}(X_2 + 1)\right)$$

$$\mathbb{E}(X_2) = 30/29$$

X_3

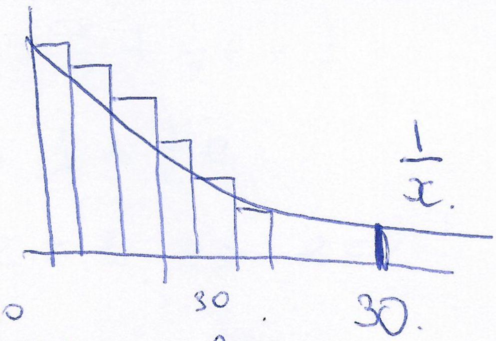


$$\mathbb{E}(X_3) = \frac{28}{30} + \frac{2}{30}\left(\mathbb{E}(X_3+1)\right)$$

$$\mathbb{E}(X_3) = \frac{30}{28}$$

<u>Ещё 27 уравнений:</u>

$$\mathbb{E}(X) = 1 + \frac{30}{29} + \frac{30}{28} + \dots + \frac{30}{1} = 30\underbrace{\left(\frac{1}{30} + \frac{1}{29} + \dots + 1\right)}_{\sum\limits_{n=1}^{30} \frac{1}{n} \approx ?}$$



$$\sum_{n=1}^{30} \frac{1}{n} \approx \int_0^{30} \frac{1}{x}\,dx = \ln x \Big|_0^{30} = \ln 30$$

$$\mathbb{E}(X) = 30 \ln 30 \approx 102$$

3. Сумма случайностей — неслучайна

$\boxed{№14}$

интуиция: $Corr(X_1, X_6) < 0$

$$X_1 + X_2 + \ldots + X_6 = n$$

$$Cov(X_1, n) = 0$$

$$Cov(X_1, X_1 + \ldots + X_6) = 0$$

$$\underbrace{Cov(X_1, X_1)}_{Var(X_1)} + Cov(X_1, X_2) + \ldots + Cov(X_1, X_6) = 0$$

$$Var(X_1) + 5\,Cov(X_1, X_6) = 0$$

$$Cov(X_1, X_6) = -\frac{1}{5} Var(X_1)$$

$$\frac{Cov(X_1, X_6)}{\sqrt{Var(X_1)\underbrace{Var(X_1)}_{Var(X_6)}}} = -\frac{1}{5}$$

$$Corr(X_1, X_6) = -1/5$$

$\boxed{№15}$ ↓ к доске

$$Z = \frac{X_1 + \ldots + X_m}{X_1 + \ldots + X_n}$$

$$\frac{X_1 + \ldots + X_n}{X_1 + \ldots + X_n} = 1 \qquad \underbrace{\frac{X_1}{X_1 + \ldots + X_n}}_{Y_1} + \underbrace{\frac{X_2}{X_1 + \ldots + X_n}}_{Y_2} + \ldots + \underbrace{\frac{X_n}{X_1 + \ldots + X_n}}_{Y_n} = 1$$

$$\mathbb{E}(Y_1 + \dots + Y_n) = 1$$

$$n \cdot \mathbb{E}(Y_1) = 1$$

$$\mathbb{E}(Y_1) = \frac{1}{n} \Rightarrow \mathbb{E}(Z_1) = m \cdot \mathbb{E}(X_1) = \frac{m}{n}$$

$\boxed{\text{2.4 Беспорядки}}$

Упражнение

кн2 368

а) $n = 100!$

$m = 1$ $\quad \frac{1}{100!}$

б) $N = 100!$ рассадок

α_i – i-ый чел сел на свой стул.

$$N(\alpha_1', \dots, \alpha_{100}') = 100! -$$

$$- N(\alpha_1) - \dots - N(\alpha_{100}) +$$

$$+ N(\alpha_1 \alpha_2) + \dots + N(\alpha_{n-1}, \alpha_n) -$$

$$- N(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) - \dots - N(\alpha_{n-2}, \alpha_{n-1}, \alpha_n) + \dots + (-1)^{100} N(\alpha_1, \dots, \alpha_{100})$$

$$N(\alpha_1) = N(\alpha_2) = \dots = N(\alpha_{100}) = 99! \cdot C_{100}^1 = 99! \cdot 100$$

$$N(\alpha_1, \alpha_2) = \dots = N(\alpha_n, \alpha_{n-1}) = 98! \cdot C_{100}^2$$

$$N(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \dots = N(\alpha_{n-2}, \alpha_{n-1}, \alpha_n) = 97! \, C_{100}^3$$

....

$$N(\alpha_1', \dots, \alpha_{100}') = \cancel{100!} - \cancel{99! \cdot 100} + C_{100}^2 \cdot 98! - C_{100}^3 \cdot 97! + \dots =$$

$$100! - 99! \cdot 100 \quad 100! \quad 100! \quad 100! \quad 100! \quad 1 -$$

$$100!\left(\frac{1}{0!}-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{100!}\right)=?$$

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\Rightarrow$$

$$e^{-x}=1-\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n!}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}&=e\\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}&=e^2\\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}&=\frac{1}{e}\end{aligned}}$$

$$? \approx \underbrace{100!\cdot e^{-1}}$$

отличается от реальности на $\sum_{n=101}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}$

$\cancel{m=100!}$

$$k=\mathbb{P}(A)=\frac{100!\,e^{-1}}{100!}=\frac{1}{e}$$

$$D_n=n!\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\ldots+\frac{(-1)^n}{n!}\right)$$

$!n$

$$n!\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}$$

субфакториал
беспорядки

$$\mathbb{P}(A)=\frac{D_n}{n!}\approx\frac{1}{e}$$

$$\mathbb{P}(B)=\frac{D_{n-1}\cdot C_n^1}{n!}$$

$$\mathbb{P}(C)=\frac{D_{n-2}\cdot C_n^2}{n!}$$