5.1 Квантильное преобразование

Упражнение

$X \sim Exp(1)$ $\quad F_X(x) = 1 - e^{-x},\ x \in [0; +\infty)$

а) $Y = \sqrt{X}$ $\quad f_Y(y) = ?$

$y \in [0; +\infty)$.

$F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \le y) = \mathbb{P}(\sqrt{X} \le y) = \mathbb{P}(X \le y^2) = F_X(y^2) =$
$= 1 - e^{-y^2}$

$f_Y(y) = F_Y'(y) = (1 - e^{-y^2})' = 2ye^{-y^2}$

б) $Y = 1 - e^{-X}$ $\quad f_Y(y) - ?$

$y \in [0; 1]$

$F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \le y) = \mathbb{P}(1 - e^{-X} \le y) = \mathbb{P}(-e^{-X} \le y - 1) =$
$= \mathbb{P}(e^{-X} \ge 1 - y) = \mathbb{P}(-X \ge \ln(1-y)) = \mathbb{P}(X \le -\ln(1-y)) =$
$= 1 - e^{\ln(1-y)} = 1 - (1-y) = y.$ $\quad f_Y(y) = 1$

$Y \sim U[0; 1]$.

~~в) ...~~

в) $X \quad F_X(x)$

$Y = F_X(\cancel{X}) \quad F_Y(y) - ?$

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \le y) = \mathbb{P}(F_X(X) \le y) = \mathbb{P}(X \le F^{-1}(y)) =$$
$$= F(F^{-1}(y)) = y. \Rightarrow Y \sim U[0;1]$$

<u>Генерация сл. вел.:</u>

$Y \sim U[0;1] \qquad \underbrace{F_X^{-1}(\text{выборка})}$

новая выборка имеет ф. распределения $F_X(x)$

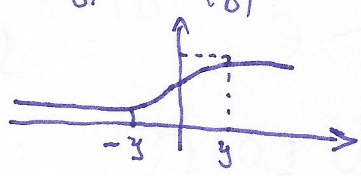
Преза про варку

<u>Решить еще:</u>

$X \sim N(0,1) \quad Y = \Phi(X) \quad Y \sim ? \quad (U[0;1])$

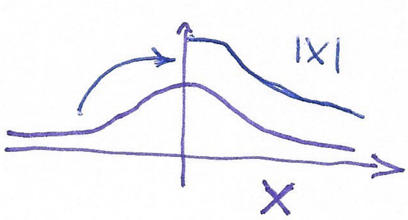
$X \sim N(0,\sigma^2) \quad Y = \Phi(X) \quad Y \sim ?$

$F(-y) = 1 - F(y)$



$X \sim N(0,1) \quad Y = |X| \sim ?$

$$F(y) = \mathbb{P}(Y \le y) = \mathbb{P}(|X| \le y) = \mathbb{P}(-y \le X \le y) = F(y) - F(-y) =$$
$$= F(y) - (1 - F(y)) = 2F(y) - 1$$
$$f(y) = 2 \cdot f(y) = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

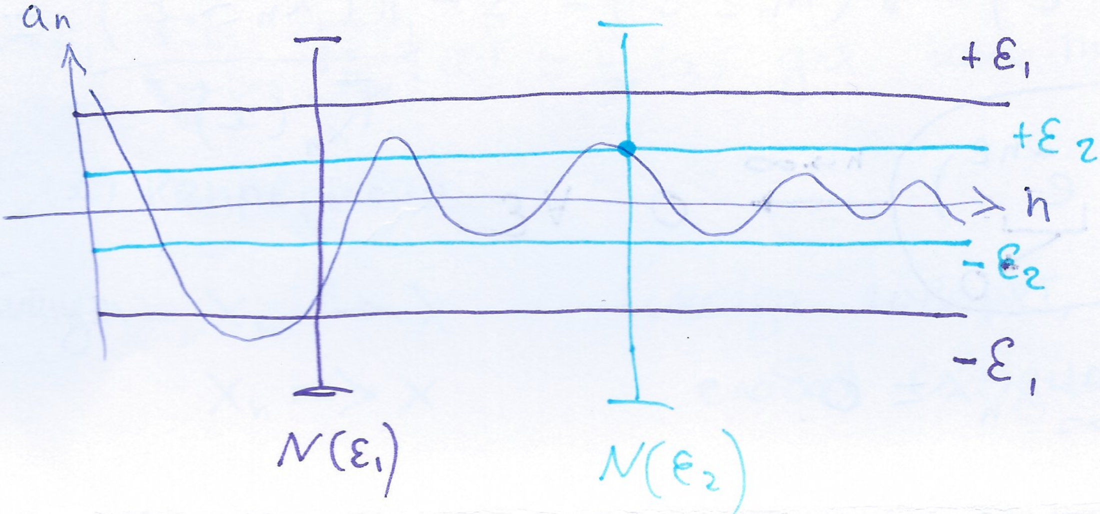


Сходимости случайных величин

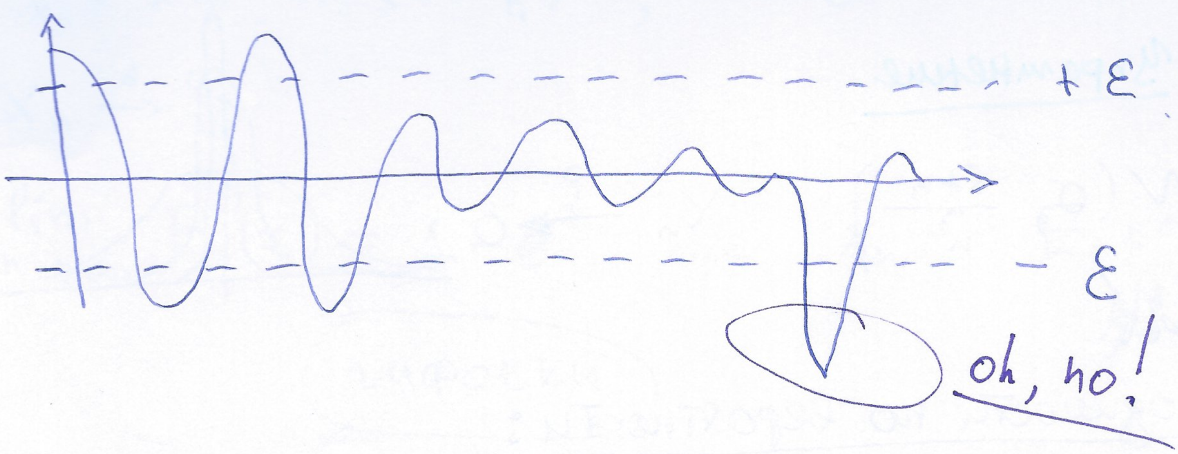
Для начала вспомним, что такое сходимость обычной последовательности из матана.

$(a_n)_{n=1}^{\infty}$ сх. к A т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon) : \forall n > N(\varepsilon) \ |a_n - A| < \varepsilon$$



Если $X_1, \dots, X_n$ — сл. величины.



Опр. 1 Говорят, что послед. $X_1, \dots, X_n, \dots$ сх. по вероятности к сл. вел. X, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon) = 0$$

Пишут как $X_n \xrightarrow{P} X$ или $\operatorname{plim} X_n = X$

Слайды со сх. по вер. ⊕ гифка

Упражнение

$X_n \sim Exp(n)$

$X_n \xrightarrow{P} 0$

$$\mathbb{P}(|X_n - 0| \geq \varepsilon) = \mathbb{P}(X_n \geq \varepsilon) = 1 - \underbrace{\mathbb{P}(X_n \leq \varepsilon)}_{F_{X_n}(x)} =$$

$$= 1 - (1 - \underbrace{e^{-n\varepsilon}}_{\to 0}) \xrightarrow{n \to \infty} 0 \quad \forall \varepsilon$$

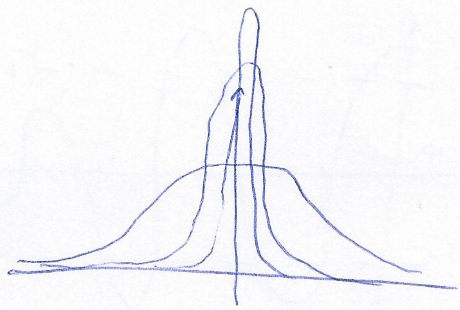
т.е. $\underset{n \to \infty}{\text{Plim}}\, X_n = 0.$

Замечание:

$Var(X_n) = \frac{1}{n^2} \to 0 \Rightarrow$ сл. вел. сх. к константе.

~~Упражнени~~ Упражнение

$X_n \sim \mathcal{N}(0, \frac{5+n}{n^2})$ $\quad X_n \xrightarrow{P} 0$



Друзья сходимости по вероятности:

1) ЗБЧ
2) Неравенство Маркова $\mathbb{P}(|X| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{\varepsilon}$
3) Неравенство Чебышёва $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{Var(X)}{\varepsilon^2}$
4) Следствие из нер. Чебышёва

$$\left.\begin{matrix} \mathbb{E}(X_n) \to const \\ Var(X_n) \to 0 \end{matrix}\right| \Rightarrow X_n \xrightarrow{P} const$$

Китаец.

...жно: 4 св-во в обратную сторону неверно!

Сх. по вер. прямой наследник вероятности $\Rightarrow$ Все свойства обычных пределов работают и для plim

Опр. 2

Послед. сл. вел. $X_1, \dots, X_n$ сх. по распределению к $\underbrace{X}_{\text{сл. вел.}}$, если $\lim\limits_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$ для всех точек x, где $F_X(x)$ непрерывна.

Пишут $X_n \xrightarrow{d} X$ иногда говорят, что это слабая сходимость.

$X_n \Rightarrow X$

Упражнение

$$F_{X_n}(x) = 1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{nx}, \quad x > 0.$$

$X_n \xrightarrow{d} ?$

$\lim\limits_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = 1 - e^{-x}$ т.е. $X_n \xrightarrow{d} Exp(1)$

фишечки

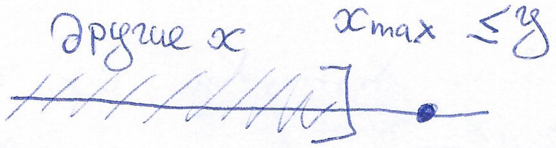
Упражнение

$X_n \sim U[0;1]$

$Y_n = \max(X_1, \dots, X_n)$

а) $Y_n \xrightarrow{P} 1$

б) $Y_n \xrightarrow{d} 1$



б) $F_{X_n}(x) = x$

$$F_{Y_n}(y) = \mathbb{P}(Y_n \le y) = \mathbb{P}(\max(X_1, \dots, X_n) \le y) =$$

$$= \underbrace{\mathbb{P}(X_1 \le y)}_{F_{X_1}(y)} \cdot \ldots \cdot \underbrace{\mathbb{P}(X_n \le y)}_{F_{X_n}(y)} = [F_{X_n}(y)]^n = x^n$$

$$\mathbb{E}(Y_n) = \int_0^1 x \cdot dx^n = x^{n+1}\Big|_0^1 - \int_0^1 x^n dx = 1 - \frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1 =$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$

а) $$\mathbb{P}(|Y_n - 1| \ge \varepsilon) = \mathbb{P}(1 - Y_n \ge \varepsilon) \underset{\text{Марков}}{\le} \frac{\mathbb{E}(1 - Y_n)}{\varepsilon} =$$

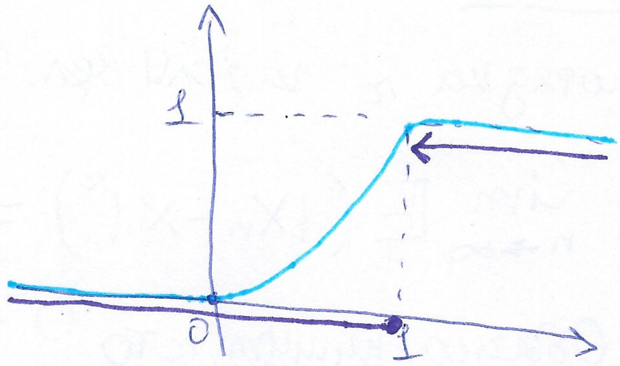
$$= \frac{1 - \mathbb{E}(Y_n)}{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \to \infty} 0$$

$$Y_n \xrightarrow{P} 1$$

иначе:

$$\mathbb{P}(1 - Y_n \ge \varepsilon) = \mathbb{P}(Y_n \le 1 - \varepsilon) = (\underbrace{1 - \varepsilon}_{\text{число меньше } 1})^n \xrightarrow{n \to \infty} 0$$

$$F_{X_n}(y) = \begin{cases} 1, & y > 1 \\ y^n, & y \in (0;1] \\ 0, & y \leq 0 \end{cases}$$



$y > 1 \qquad F_{Y_n}(y) = 1 \to 1$

$0 < y < 1 \qquad F_{Y_n}(y) = y^n \to 0$

$y \leq 0 \qquad F_{X_n}(y) = 0 \to 0$

$$F_Y(y) = \begin{cases} 1, & y > 1 \\ 0, & y \leq 1 \end{cases}$$

$y = 1 \qquad F_{X_n}(y) = 1 \to 1$

$F_Y(y) = 0$

В этой точке сх. нет. Но это точка разрыва и по определению её тут и не требуется!!

$\Rightarrow X_n \xrightarrow{d} 1.$

Друзья сходимости по распределению:

1) ЦПТ

2) Дельта-метод — обсудим через пару

гифка с max

Опр. 3 Послед. сл. вел. $X_1, \dots, X_n$ сх. в среднем порядка r к сл. вел. X, если

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{E}\left(|X_n - X|^r\right) = 0$$

Обычно пишут, что $X_n \xrightarrow{L^r} X$

$X_n \xrightarrow{m.s.} X$, если $r = 2$

Упражнение

$$\mathbb{E}\left(|Y_n - 1|\right) = \mathbb{E}(1 - Y_n) = 1 - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \to \infty} 0$$

$\uparrow$

из пред. задачи $\qquad Y_n \xrightarrow{L^1} 0$

$$\begin{tikzcd}
\boxed{X_n \xrightarrow{\text{п.н.}} X} \arrow[dr] & & \\
& \boxed{X_n \xrightarrow{P} X} \arrow[r] & \boxed{X_n \xrightarrow{d} X} \\
\boxed{X_n \xrightarrow{L^r} X} \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

Упражнение (есть сх. по вер., но нет в среднем)

$$X_n = \begin{cases} n^2 & P = \frac{1}{n} \\ 0 & P = 1 - \frac{1}{n} \end{cases} \qquad \begin{array}{l} X_n \xrightarrow{P} 0 \\ \cancel{X_n \xrightarrow{L^r} 0} \end{array}$$

$$\mathbb{P}(X_n \geq \varepsilon) = \mathbb{P}(X_n = n^2) = \frac{1}{n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

$X_n \xrightarrow{P} 0.$

$$\mathbb{E}(X_n^r) = n^{2r} \cdot \frac{1}{n} + 0^r \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) = n^{2r-1} \xrightarrow[n \to \infty]{} \infty \quad \forall r$$

картинка

р. 4 Ω — пр-во эл. исходов

Монетка $\Omega = \{„О", „Р"\}$

$X(w) : \Omega \to \mathbb{R}$

сл. вел.

$„О" \mapsto 1 \quad „Р" \mapsto 0$

Послед. сл. вел. $X_1, \dots, X_n, \dots$ сх. к сл. вел. X почти наверное, или с вероятностью 1, если

$$\mathbb{P}(\{w \in \Omega : \lim_{n\to\infty} X_n(w) = X(w)\}) = 1$$

Сходимость требует знания о том как устроена $X(w)$.

$X_n \xrightarrow{a.s.} X$

$X_n \xrightarrow{п.н.} X$

монетка, подкинули 1 раз.

$$X_n(w) = \begin{cases} \frac{n}{n+1}, & w = „О" \\ (-1)^n, & w = „Р" \end{cases}$$

а) Для каких w $X_n(w)$ сх.-?

б) $\mathbb{P}(\{w \in \Omega : \lim_{n\to\infty} X_n(w) = 1\})$

$w = „О" \quad X_n(„О") = \frac{n}{n+1} \to 1 \qquad 1/2$

$w = „Р" \quad X_n(„Р") = (-1)^n$ расх. $\qquad 1/2$

$$\mathbb{P}(\lim_{n\to\infty} X_n(w) = 1) = 1/2.$$

Если бы она была бы $= 1$, тогда была бы сх. п.н

Упражнение

X_n	0	n^2
	$1-\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$

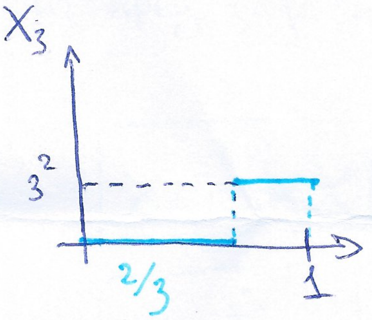
$$X_n \xrightarrow{P} 0$$

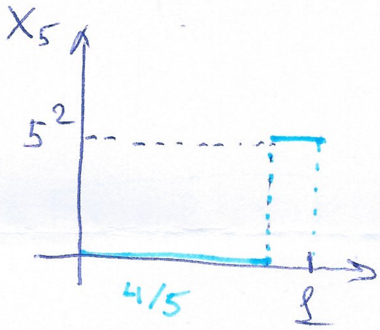
$$\cancel{X_n \xrightarrow{L^2} 0}$$

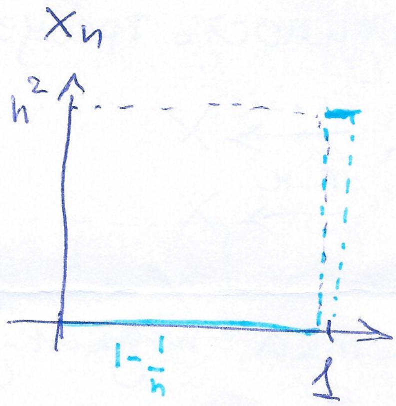
Что происходит со сходимостью п.н. зависит от того как устроена $X(w)$.

$$\Omega = [0; 1]$$

$$X_n(w) = \begin{cases} 0, & w < 1-\frac{1}{n} \\ n^2, & w \geq 1-\frac{1}{n} \end{cases}$$

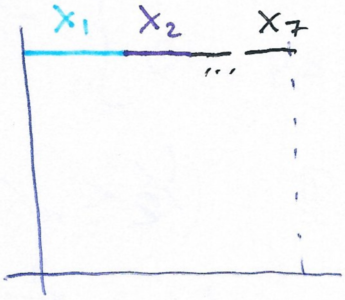


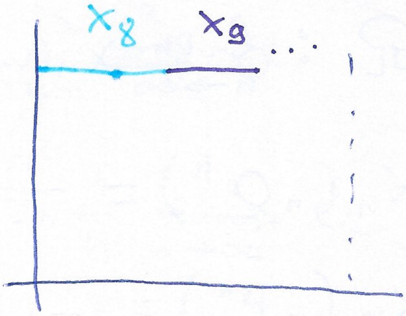




$$X_n(w) \xrightarrow{п.н.} 0 \quad \forall w \in \Omega$$

Другая структура:





$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7} > 1$$

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ — расходится}$$

$w \quad X(w) \quad n^2 \; 0 \; 0 \; 0 \; 0 \; 0 \; 0 \; 0 \; n^2 \; 0 \; 0 \ldots$

...скоки будут происходить всё реже и реже

=> есть сх. по вероятности.

Но при этом $\forall w$ $\exists X_{n_k}$ – подпоследовательность сл. вел.

такая, что $X_{n_k} \to \infty$

=> сх. п.н. нет

Сх. п.н. – сложная штука, $\exists$ разные специальные признаки, помогающие её доказывать.