Векторные пр-ва, координаты, ранги

Опр. Абстрактное векторное пр-во над $\mathbb{R}$

① Данные:

1) V - мн-во, его эл. наз. векторами

2) $+: V \times V \to V$

$(v_1, v_2) \mapsto v_1 + v_2$

3) $\cdot : \mathbb{R} \times V \to V$

$(\lambda, v) \mapsto \lambda \cdot v$

② Аксиомы:

1) $(v+u)+w = v+(u+w)$
2) $\exists 0 \in V: \quad 0+v = v+0 = v$
3) $\forall v \in V \quad \exists (-v) \in V \quad v+(-v) = (-v)+v = 0$
4) $v+u = u+v$
5) $\lambda \cdot (v+u) = \lambda v + \lambda u$
6) $(\lambda+\mu) u = \lambda u + \mu u$
7) $(\lambda\mu) v = \lambda(\mu v)$
8) $1 \cdot v = v, \; v \neq 0$

Следствия из аксиом:

→ нулевой вектор единств.
→ $\forall v \in V \quad \exists (-v)$
→ $\forall v \in V \quad -v = (-1) \cdot v$
→ $\forall v \in V \quad 0 \cdot v = 0$
→ $\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \alpha \cdot 0 = 0$

Примеры:

$\mathbb{R}^n$ $\quad \mathbb{R}^{n\times n}$ $\quad \mathbb{R}[x] = \left\{ a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \;\middle|\; \begin{matrix} a_i \in \mathbb{R} \\ n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \end{matrix} \right\}$

$$5t^3 - 2t^2 + 4t - 8 \mapsto \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$C[0;1] = \{ f : [0;1] \to \mathbb{R} \mid f \text{ — непрерывные} \}$

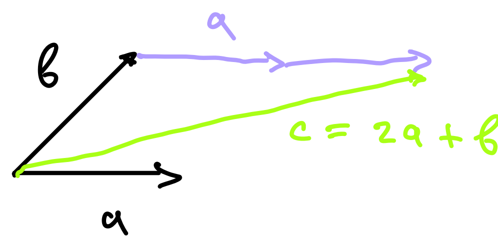
$\{ y \in \mathbb{R}^n \mid Ay = 0 \}$

Опр.

V — векторное пр-во

$v_1, \ldots, v_n \in V$

$\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$



$\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n \in V$ — линейная комбинация

$v_1, \ldots, v_n$ линейно зависимы $\exists \lambda_1, \ldots, \lambda_n : \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = 0$ и хотя бы $\lambda_i \neq 0$

линейно независимы $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = 0 \Rightarrow \lambda_i = 0 \;\forall i$

Упражнение

$$\underset{v_3}{\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}} \underset{v_2}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} \underset{v_1}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

$v_3 = 2 \cdot v_2 + 3 v_1$

$\underset{0}{\underset{\parallel}{\lambda_1}} v_1 + \underset{0}{\underset{\parallel}{\lambda_2}} v_2 = 0$

- один вектор лин. зависим что это значит?

$\{v\}$ $\quad \exists \lambda \neq 0 : \lambda v = 0 \Leftrightarrow v = 0$

- Два вектора лин. зав. — лежат на одной прямой
- Три — лежат в одной пл-ти
- Число лин. нез. векторов - число направлений
  $\dim V$
  размерность пространства

Опр.

$V \quad v_1, \dots, v_n \in V$ порождающие, если

$\forall v \in V \quad \exists \lambda_i : \quad v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$

Опр.

Линейная оболочка - мн. векторов, содержащее все возможные линейные комбинации

$\langle v_1, \dots, v_n \rangle$

$$\operatorname{Span}\{v_1, v_2, \dots, v_k\} = \{\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n \mid \lambda_i \in \mathbb{R}\}$$

$$\operatorname{Span}\left\{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}\right\} = \operatorname{Span}\left\{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\} = \mathbb{R}^2$$

порождающие

Опр. Если V - век. пр-во, а подмн-во $E \subseteq V$ удовлетворяет одному из условий ниже, то это базис

(1) $v_1, \dots, v_n$ - лин. нез. и порождающие

(2) $v_1, \dots, v_n$ являются максимальным лин. нез. мн.
т.е. если добавить ещё один вектор, то возникает зависимость

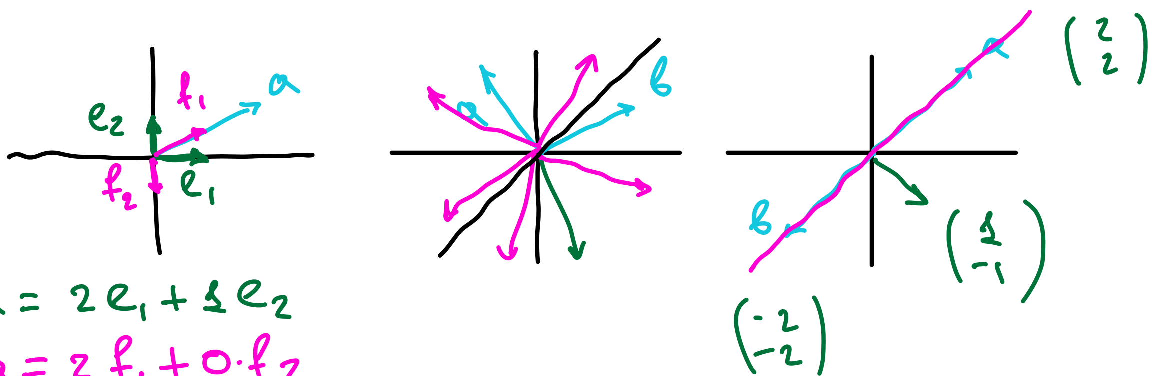
(3) $v_1, \dots, v_n$ – минимальный порожд. набор

(1) ~ (2) ~ (3)

Сакральный смысл базиса:

$V \qquad v_1, \dots, v_n$ – базис

$\forall v \in V \quad \exists! \; \lambda_1, \dots, \lambda_n : \quad v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$



$a = -b$
лин. зав.

$a = 2e_1 + 1e_2$

$a = 2f_1 + 0 \cdot f_2$

Утв. Разложение через базис только одно

$$
\begin{array}{r}
v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n \\
- \\
v = \tilde{\lambda}_1 v_1 + \dots + \tilde{\lambda}_n v_n \\
\hline
0 = \underbrace{(\lambda_1 - \tilde{\lambda}_1)}_{=0} v_1 + \dots \underbrace{(\lambda_n - \tilde{\lambda}_n)}_{=0} v_n
\end{array}
$$

т.к. вектора лин. нез.

Базисов бывает много, все имеют одно и то же число векторов – оно наз. $\dim V$

Опр. V – векторное пр-во над $\mathbb{R}$

$U \subseteq V$ – подпространство

1) $v, u, \in U \Rightarrow u+v \in U$
2) $v \in U \Rightarrow \lambda \cdot v \in U,\ \lambda \in \mathbb{R}$
3) $0 \in U$

Замкнутость отн. операций

само U – тоже вект. пр.-во

Пример:

$$\{y \in \mathbb{R}^n \mid Ay = 0\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

$U \subseteq V \qquad \dim U \leq \dim V$

$\text{„="} \iff U = V$

Опр. фундаментальная система решений

$$\begin{array}{cc} & n \\ m & \boxed{\;A\;} \end{array} \qquad \{y \in \mathbb{R}^n \mid Ay = 0\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

нужно найти базис

$$\boxed{\;A\;} \xrightarrow[\text{строк}]{\text{эл. преоб.}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$\dim$ = число свободных переменных

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = a v_1 + b v_2 \qquad \begin{cases} x_1 + 2x_3 + x_5 = 0 \\ x_2 + 3x_3 + 2x_5 = 0 \\ x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$$

Базис: свободные рандомно

$$v_1 = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$v_2 = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Почему это базис?

$$a v_1 + b v_2 = \begin{pmatrix} * & * & \underset{\sim}{a} & * & \underset{\sim}{b} \end{pmatrix} = 0 \qquad a, b = 0$$

$\Downarrow$

вектора лин. нез.-мы

Покажем, что $\forall$ вектор выражается через базис

$v = (a, b, \underset{\sim}{c}, d, \underset{\sim}{e})$ — решение

$c v_1 + e v_2 = (* \; *, c, *, e)$

$$v - c v_1 - e v_2 = \begin{pmatrix} * & * & 0 & * & 0 \end{pmatrix}$$

$\uparrow \quad \uparrow$

свободные $= 0$ $\Rightarrow$ главные тоже $= 0$

Значит v раскладывается по базису как

$c v_1 + e v_2$

$\Rightarrow$ мы в $\mathbb{R}^2$

Упражнение

$\mathbb{R}^3$

$$\underset{v_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}} \quad \underset{v_2}{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}} \quad \underset{v_3}{\begin{pmatrix} 5 \\ 12 \\ 7 \end{pmatrix}} \quad \underset{v_4}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}} \quad \underset{v_5}{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

а) Найти базис

б) остальные разложить по базису

$$\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 \end{pmatrix} = 0$$

Решаем систему, её решение это все возможные лин. зав. векторов

$$\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_4 \end{pmatrix}$$

даст разложение v_4 по базису (если в базисе v_1, v_2 и v_3)

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = v_4$$

$-||-$ $\quad v_5$

. . . . .

Перебор Это долго можно за одного Гауса!

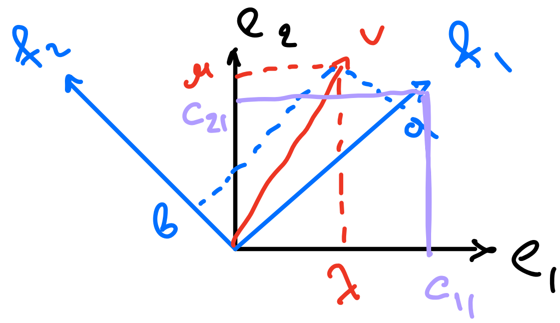
$$\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$\uparrow \ \uparrow \quad \uparrow$ базис $\qquad \uparrow \ \uparrow \quad \uparrow$ главные

$$v_3 = 2v_1 + 3v_2 + 0 \cdot v_4$$
$$v_5 = 1v_1 + 0v_2 - 2v_4$$

$$\underset{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}}{\lambda_1} v_1 + \underset{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}}{\lambda_2} v_2 + \lambda_3 v_3 + \underset{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}{\lambda_4} v_4 + \lambda_5 v_5$$

Смена координат



(x, y) — коорд. v в e_1, e_2

(a, b) $\qquad$ f_1, f_2

Хотим научиться пересчитывать координаты из одного базиса в другой

$(e_1, e_2) \qquad\qquad (f_1, f_2)$

$$\begin{cases} f_1 = c_{11} e_1 + c_{21} e_2 \\ f_2 = c_{12} e_1 + c_{22} e_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} (e_1\ e_2)\begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \end{pmatrix} \\ (e_1\ e_2)\begin{pmatrix} c_{21} \\ c_{22} \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\boxed{f_1 \,|\, f_2} = \boxed{e_1 \,|\, e_2} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

матрица смены базиса

V $\qquad (f_1, \dots, f_n) = (e_1, \dots, e_n)\, \boxed{C}$

$$v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ e_1 & e_2 & \dots & e_n \\ | & | & & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$v = y_1 f_1 + \dots + y_n f_n = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ f_1 & f_2 & \dots & f_n \\ | & | & & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} | & | & & | \\ f_1 & f_2 & \dots & f_n \\ | & | & & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & & | \\ e_1 & \dots & e_n \\ | & & | \end{pmatrix} \boxed{C} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = C \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{array}{ccc} e & \xrightarrow{\cdot C} & f \\ x & \xleftarrow{C\cdot} & y \end{array}}$$

$$\begin{array}{ccc} f & \xrightarrow{\cdot C^{-1}} & e \\ y & \xleftarrow{C^{-1}\cdot} & x \end{array}$$

Матричный ранг

$A \in \mathbb{R}^{n\times m}$

1) столбцовый ранг $\quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline A_1 & \dots & A_n \\ \hline \end{array}$

max кол-во лин. нез. столбцов

dim Span$(A_1, \dots, A_n)$

$||$

2) строковый ранг $\quad \begin{array}{|c|} \hline A_1 \\ \hline \dots \\ \hline A_m \\ \hline \end{array}$

max кол-во лин. нез. строк

dim Span$(A_1, \dots, A_m)$

$||$

3) факториальный ранг

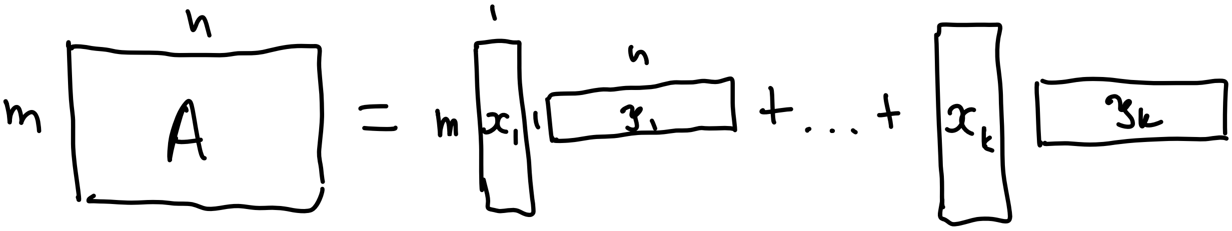
$$\begin{array}{c} n \\ m\boxed{A} \end{array} = \begin{array}{c} k \\ m\boxed{B} \end{array} \begin{array}{c} n \\ k\boxed{C} \end{array}$$

$\min\{k \mid A = BC\}$

скелетное разложение

||

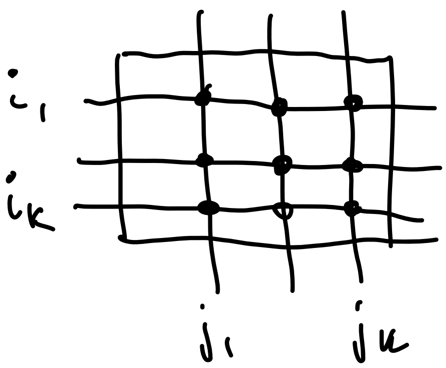
4) Тензорный ранг



$$\min\{k \mid A = x_1 y_1 + \ldots + x_k y_k\}$$

||

5) Минорный ранг

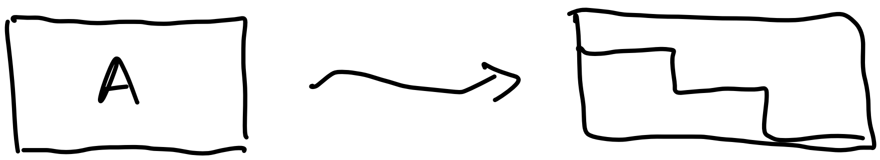


$$\det\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \neq 0$$

Все наибольшие подматрицы одного размера

Все эти ранги равны

Как считать?

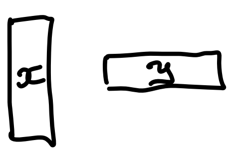


$\mathrm{rk} A$ = число ступенек

Упражнение

$\mathrm{rk}\, A = 0 \iff A = 0$

$\mathrm{rk}\, A = 1 \iff$



$x \neq 0$

$y \neq 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Свойства ранга:

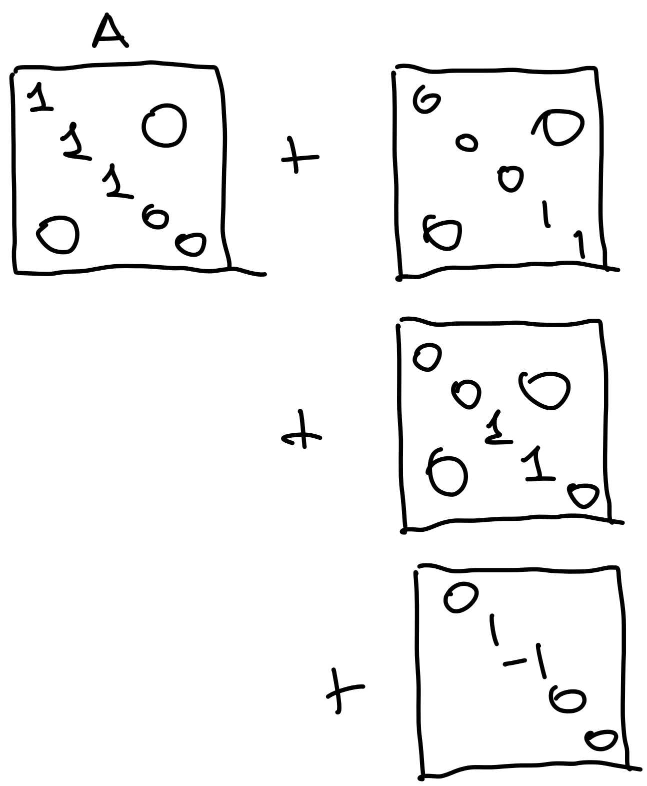
1) $\mathrm{rk}(A+B) \leq \mathrm{rk}\, A + \mathrm{rk}\, B$

$\geq |\mathrm{rk}\, A - \mathrm{rk}\, B|$

$\mathrm{rk}\, A = 3$

$\mathrm{rk}\, A = 2$

$1 \leq \mathrm{rk}(A+B) \leq 5$



$\mathrm{rk}(A+B) = 5$

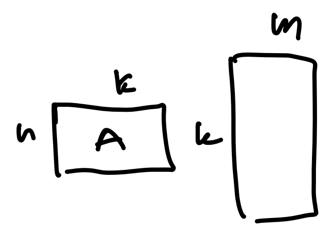
$\mathrm{rk}(A+B) = 4$

$\mathrm{rk}(A+B) = 2$

. . . .

2) $\mathrm{rk}(A \cdot B) \leq \min(\mathrm{rk}\, A, \mathrm{rk}\, B)$

$\geq \mathrm{rk}\, A + \mathrm{rk}\, B - k$



3) $C \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ и обратимы

$\mathrm{rk}\, A = \mathrm{rk}\, CA$

$\mathrm{rk}\, A = \mathrm{rk}\, AD$

Упражнение

$F(\mathbb{R}) = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \}$ – векторное пр-во

а) $\sin x, \ \cos x \in F(\mathbb{R})$ $\qquad x^2$

линейно зависимы?

$\equiv \ \ = 0 \ \ \forall x$

$\exists\, a, b \in \mathbb{R}$ $\qquad a \cdot \sin x + b \cdot \cos x \equiv 0$

$x = 0 \Rightarrow b = 0$

$x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow a = 0$

$\Rightarrow$ лин. нез.

$a \cdot 0 + b \cdot 1 = 0 \Rightarrow b = 0$

$a \cdot 1 + b \cdot 0 = 0 \Rightarrow a = 0$

$x = \frac{\pi}{4}$

$a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + b \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$ $\qquad a = -b$ $\qquad a = b = 0$

$x = \frac{\pi}{6}$

$a \cdot \frac{1}{2} + b \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$ $\qquad a + \sqrt{3}b = 0$ $\qquad a = -\sqrt{3}b$

б) $1, \sin x, \sin^2 x, \ldots, \sin^n x$ лин. нез.?

Да

1) $\sin x$

$a + b \sin x = 0 \quad \forall x$ [redacted] $\exists a, b$

$\pi/4$

0