① СЛАУ

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \dots\dots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$$h = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} \qquad w = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$$

$$\langle h, w \rangle = h^T w = \begin{pmatrix} h_1 \dots h_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} h_i w_i$$

$$\begin{pmatrix} h_1' \dots h_n' \end{pmatrix} \qquad \sum h_i' w_i$$

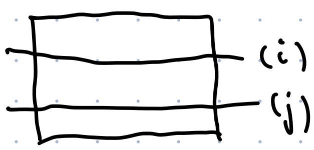
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$A \cdot x = b$$

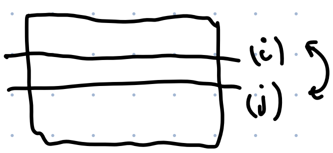
$$(A \mid b) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

<u>Цель:</u> решить систему

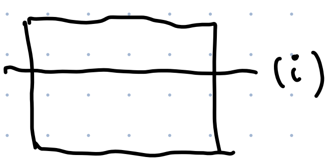
Элементарные преобразования (не меняют мн-во решений)

(I) 

$\times \lambda$ $\quad (i) + \lambda \cdot (j)$

(II) 

swap

(III) 

$\times \lambda \neq 0$

ступенчатый вид

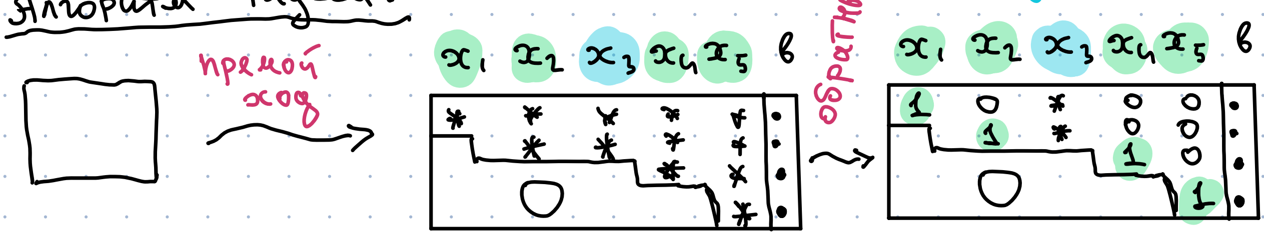
улучшенный ступенч. вид

обратный ход

главные

свободные

Алгоритм Гаусса:



Упражнение

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x - y = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} 3x + 0\cdot y = 1 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

Тут был не совсем Гаусс

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1/3 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1/3 \\ 0 & -1 & -1/3 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 1/3 \end{array}\right) \qquad x = 1/3, \quad y = 1/3$$

одно решение

Упражнение

$$\begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 4 \end{array}\right) \\ \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{cases} x_1 = 3 - x_2 - 2x_4 \\ x_3 = 4 - 5x_4 \end{cases}$$

$x_2, x_4 \in \mathbb{R}$

∞ решения

Научились записывать главные через свободные

$\Rightarrow$ научились решать

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_2 - \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} x_4$$

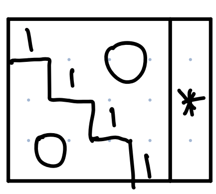
$0 = 7$

$0 \cdot x_5 = 7 \Rightarrow \varnothing$

$4x_5 = 0 \Rightarrow x_5 = 0$

$0 = 0$

Ситуации:



одно решение

$\exists$ свободные переменные

∞ решений

если столбцов больше чем строк

$0 = b \quad b \neq 0$

решений нет

$\varnothing$

Упражнение

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 0 \end{array}\right) \overset{(3)-2\cdot(1)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 1 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$(3)-2(2)$ $\quad$ $(2)-(1)$ $\quad$ $(1)+(2)$

$(1)-(2)$ $\quad$ $(2)\cdot 1/3$

$$x_1 = 2/3 - 1/3\, x_3$$
$$x_2 = -1/3 - 1/3\, x_3$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & 5 & 0 \end{array}\right)$$

$x_3 = -5x_4$

x_4 – своб.

x_3 – св. $\quad x_4 = -5x_3$

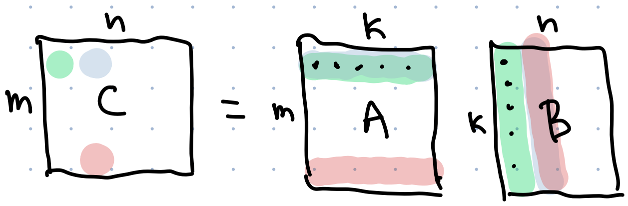
② Матрицы

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad A \in \mathbb{R}^{m\times n} \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

$[m\times n]$ $\qquad$ $[n\times 1]$

1) $C = A \pm B \qquad c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$

2) $C = \lambda \cdot A \qquad c_{ij} = \lambda \cdot a_{ij} \qquad \lambda \in \mathbb{R}$

3) 

$$c_{ij} = \sum_{r=1}^{k} a_{ir}\cdot b_{rj}$$

4) $A = (a_{ij})$

$A^T = (a_{ji})$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad (AB)^T = B^T A^T$$

5) $tr(A) = tr\,\boxed{\diagdown} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$

$tr(\lambda \cdot A + B) = \lambda \cdot tr(A) + tr(B)$

$tr(AB) = tr(BA)$

$tr(ABC) = tr(CAB) = tr(BCA)$

$[n\times k]\,[k\times n] \qquad [k\times n]\,[n\times k]$

$[n\times n] \qquad\qquad [k\times k]$

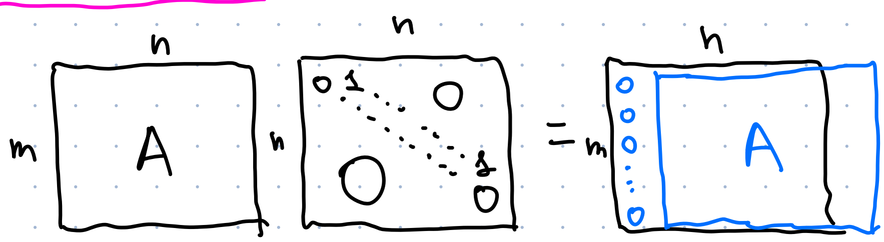
Размерности должны быть согласованы

$[n\times k]\,[k\times n] \qquad [k\times m]\,[n\times k]$

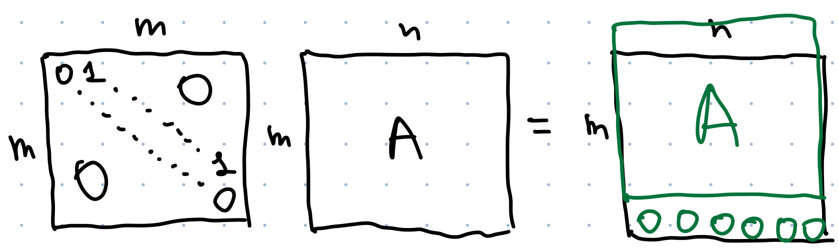
$$tr(AB) = \sum_{i=1}^{n} (AB)_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{r=1}^{k} A_{ir} \cdot B_{ri}$$

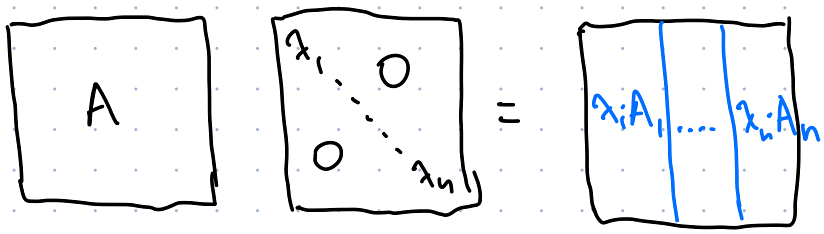
$$tr(BA) = \sum_{r=1}^{k} (BA)_{rr} = \sum_{r=1}^{k} \sum_{i=1}^{n} B_{ri} \cdot A_{ir}$$

Упражнение



A сведет и последний столбец обнулится





$\forall$ столбец домножится на λ_i

$$\begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_m\end{pmatrix} \begin{pmatrix} & & \\ & A & \\ & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 A_1 \\ \cdots \\ \lambda_m A_m\end{pmatrix}$$

Действие справа — над столбцами матрицы
слева — над строками

Упражнение

$$\underset{n}{\begin{pmatrix} & \overset{n}{} & \\ & A & \\ & & \end{pmatrix}} \cdot \begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix} \cdot n \begin{pmatrix} & \overset{n}{} & \\ & A & \\ & & \end{pmatrix}$$

$\lambda_i \neq \lambda_j$
$i \neq j$

Как выглядит A?

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \cdot & \lambda_2 \cdot & \dots & \lambda_n \cdot \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \cdot \\ \lambda_2 \cdot \\ \dots \\ \lambda_n \cdot \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 \cdot a_{11} = \lambda_1 \cdot a_{11}$

$\lambda_2 \cdot a_{12} = \lambda_1 \cdot a_{12} \Rightarrow a_{12} = 0$

Перебор $\Rightarrow$ все недиаг. эл. это коль

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mu_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1\mu_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\mu_n \end{pmatrix}$$

③ Элементарные матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix} = I_n$$

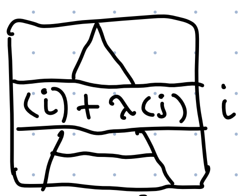
Единичная матрица

$$I_n \cdot A = A$$
$$A \cdot I_n = A$$

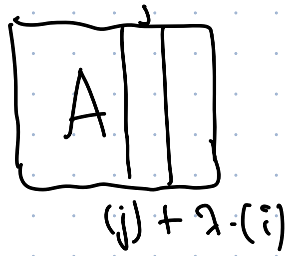
(I)

$$\begin{array}{c|c} & j \\ \hline i & \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & \lambda & & \\ & & & \ddots & & \\ & 0 & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} \end{array} = S_{ij}(\lambda) \qquad i \neq j$$

$[n \times n]$

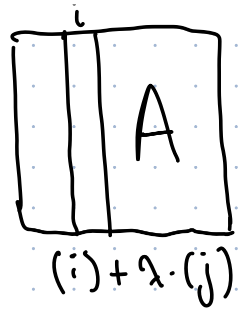
$S_{ij}(\lambda) \cdot A =$ 

Все строки, кроме i-ой не меняются

$A \cdot S_{ij}(\lambda) =$ 

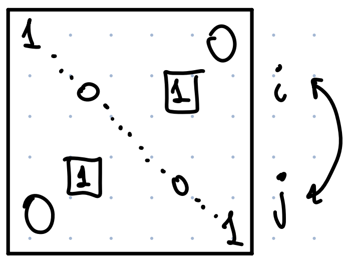
Изменится столбец

$$\boxed{A}\cdot S_{ij}^{T}(\lambda) =$$

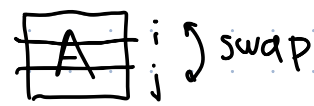


(II)

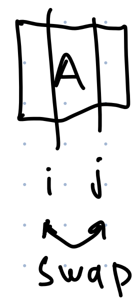
$$U_{ij} =$$



$$U_{ij}\cdot\boxed{A} =$$



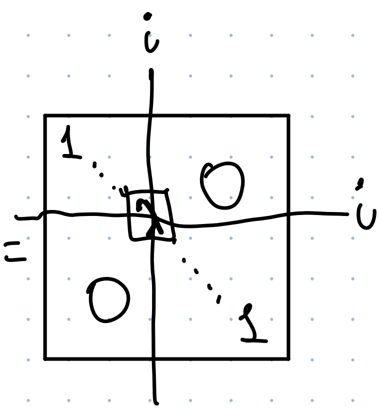
$$\boxed{A}\cdot U_{ij} =$$



В I_n i и j-ую строки поменяли местами

(III)

$$D_i(\lambda) =$$



$D_i(\lambda)\cdot\boxed{A}$ — строка $i \cdot \lambda$

$\boxed{A}\cdot D_i(\lambda)$ — столбик $i \cdot \lambda$

Алгоритм Гаусса:

$$Ax = b$$

$$D_n S_n \cdot \ldots D_n S_k \cdot \ldots D_1 S_1 \cdot Ax =$$

$$= D_n S_n \cdot \ldots D_n S_k \cdot \ldots D_1 S_1 \cdot b$$

④ Дефекты матриц

$$(AB)C = A(BC)$$
$$A(B+C) = AB + AC$$
$$(A+B)C = AC + BC$$

а) $AB \neq BA$ $\quad$ A $[n\times k]$ $\quad$ B $[k\times n]$ $\quad$ $k \neq n$

$[n\times n]$ $\quad$ $[k\times k]$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

б) Делители нуля т.е. $\exists A \neq 0,\ B \neq 0 : AB = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

в) Нильпотенты $\quad A \neq 0 \quad A^n = 0$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

2) Проблемы с делением

$\frac{a}{b} = a \cdot b^{-1}$ $\qquad b \cdot b^{-1} = 1 \qquad \frac{1}{b}$

A обратима если $\exists B:\ AB = BA = I$

$B = A^{-1}$ – она единственная

$$B' = \underbrace{(BA)}_{I}B' = B\underbrace{(AB')}_{I} = B$$

матрица A обязательно квадратная

$\underset{[m \times n]}{A} \qquad \underset{[n \times m]}{B}$

$$m = tr(I_m) = tr(AB) = tr(BA) = tr(I_n) = n$$

A^{-1} может не $\exists$

$$\begin{pmatrix} * \\ \hline 0 \\ \hline * \end{pmatrix} \cdot B = \begin{pmatrix} \ \\ \hline 0 \\ \hline \ \end{pmatrix} \neq I$$

остается нулевая строка

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T = A^{-T}$$

Поиск обратной матрицы:

$$\underset{n\times n}{A}\,\underset{n\times 1}{x} = \underset{n\times 1}{b}$$

$$A^{-1}Ax = A^{-1}b$$

$$x = A^{-1}b$$

$$(A\,|\,b) \to (I_n\,|\,\underset{\uparrow\; x}{*})$$

$$\underset{n\times n}{A}\,\underset{n\times n}{X} = \underset{n\times n}{I_n}$$

$$(A\,|\,I_n) \rightsquigarrow (I_n\,|\,\underset{\uparrow\; X = A^{-1}}{*})$$

или

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} & & & & & \\ & & & & & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \end{array}\right)$$

необратима

Упражнение

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1/3 & 1/3 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & -1/3 & 2/3 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2/3 & -1/3 \\ 0 & 1 & -1/3 & 2/3 \end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \begin{pmatrix} 2/3 \\ -1/3 \end{pmatrix} \qquad \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \begin{pmatrix} -1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$$

Утверждение

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ след. условия эквивалентны

(1) $Ax = 0$ имеет только нулевое реш.-е

(2) $A^T y = 0$ имеет только нулевое реш.-е

(3) $A = U_1 U_2 \cdot \ldots \cdot U_k$ $\quad U_i$ – матр. эл. преобр.

(4) A обратима т.е. $\exists A^{-1}$

(5) A обратима справа $\exists R: \ AR = I$

(6) слева $\exists L: \ LA = I$

$$R = L = A^{-1}$$

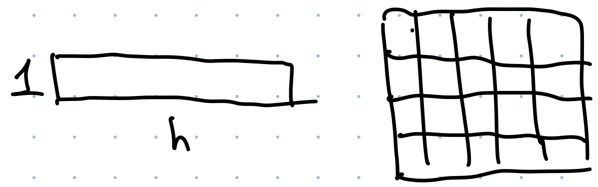
$\forall$ св-вом можно проверить обратимость

⑤ Блочные формулы

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} k & s \end{array} \\ \begin{array}{c} m \\ n \end{array} & \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \end{array} \cdot \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} u & v \end{array} \\ \begin{array}{c} k \\ s \end{array} & \begin{bmatrix} X & Y \\ Z & W \end{bmatrix} \end{array} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} u & v \end{array} \\ \begin{array}{c} m \\ n \end{array} & \begin{bmatrix} AX + BZ & AY + BW \\ CX + DZ & CY + DW \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{c c} & n \\ n & \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & \ldots & A_n \end{bmatrix} \end{array} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 A_1 & \lambda_2 A_2 & \ldots & \lambda_n A_n \end{bmatrix}$$

„строчка" „матрица"



$$A \cdot \left(B_1 \,\middle|\, B_2 \,\middle|\, \dots \,\middle|\, B_n \right) = \left(AB_1 \,\middle|\, AB_2 \,\middle|\, \dots \,\middle|\, AB_n \right)$$

линейные комбинации столбцов A с коэф. из B

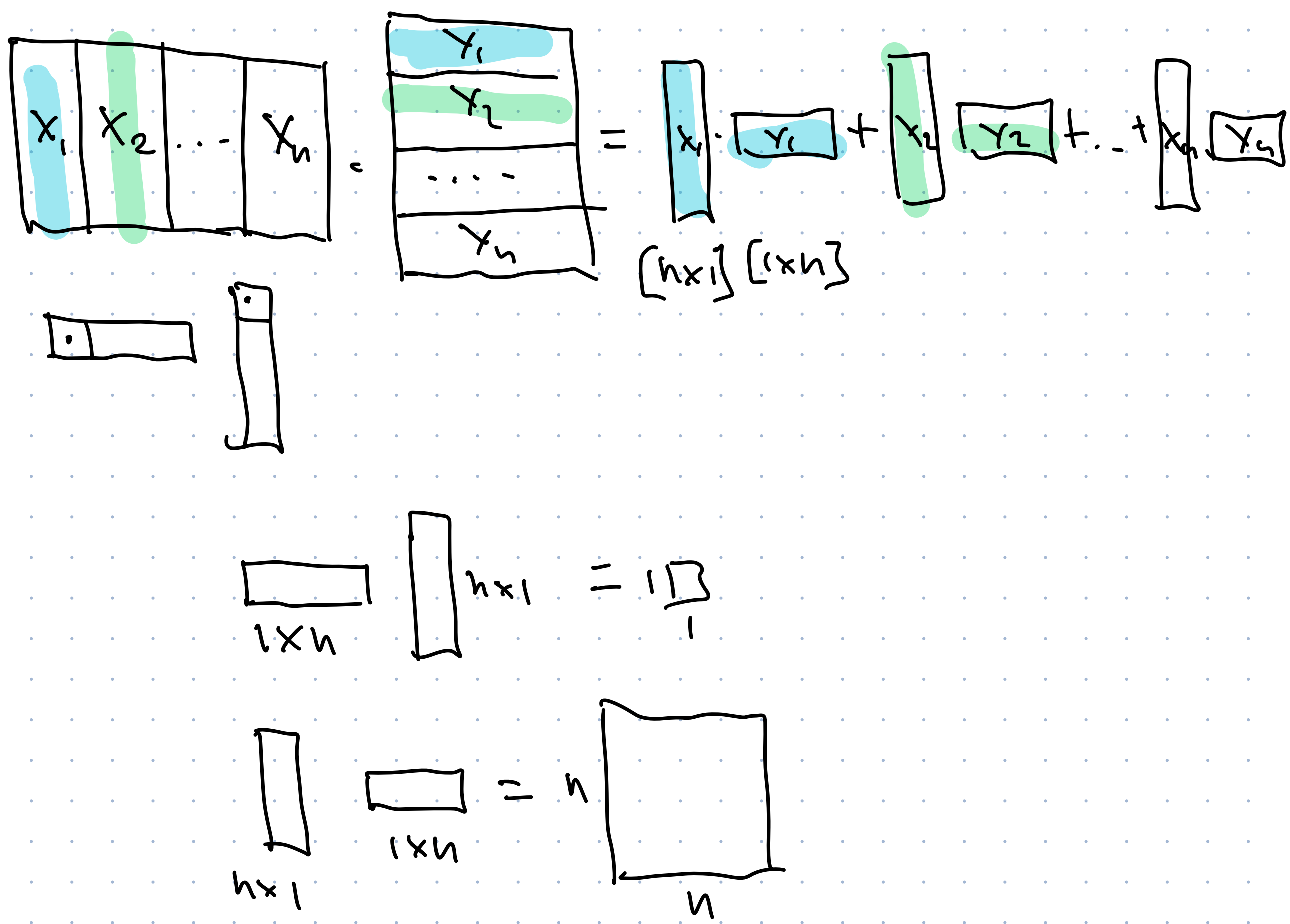
$$\left(A_1 \,\middle|\, A_2 \,\middle|\, \dots \,\middle|\, A_n \right) \cdot \begin{pmatrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix} = b_{11} \cdot A_1 + b_{21} \cdot A_2 + \dots + b_{n1} \cdot A_n$$

Упражнение

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1 \cdot 5 + 2 \cdot 7 & \\ & \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} = \left(5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + 7 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right)$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 5 & 1 \cdot 6 \\ 3 \cdot 5 & 3 \cdot 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \cdot 7 & 2 \cdot 8 \\ 4 \cdot 7 & 4 \cdot 8 \end{pmatrix}$$



Вопросы

$$\|w\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |w_i|$$

$$(y - Xw)^T (y - Xw) + \|Sw\|_2^2$$

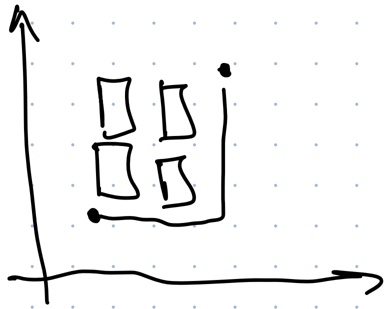
$$\|w\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} w_i^2} = \sqrt{w^T w}$$

$$\|w\|_2^2 = w^T w$$

$$\|Sw\|_2^2 = (Sw)^T Sw = w^T S^T S w$$

$\|w\|_1$ - l_1 - норма манх. норма

$\|w\|_2$ - l_2 - норма евклидова норма



$$\|x-y\|_2 = \sqrt{\sum_i (x_i - y_i)^2}$$

$$\|x-y\|_1 = \sum_i |x_i - y_i|$$

$$\mathbb{R} \sim 2^N$$

$$\mathbb{R} \sim S \sim 2^N$$

1 2 3 4 5 ...

0 1 0 1 1 ...

$\{2\ 4\ 5\}$