① Разлагай и властвуй!

C_n^k

$X_i \sim Bern(p)$

X_i	0	1
$\mathbb{P}(X_i=k)$	$1-p$	p

$\mathbb{E}(X_i) = p$

$\mathbb{E}(X_i^2) = p$

$Var(X_i) = \mathbb{E}(X_i^2) - \mathbb{E}^2(X_i) =$
$= p - p^2 = p(1-p)$

$Y \sim Bin(n, p)$ $\underset{\_}{0}\ \underset{\_}{0}\ \underset{\_}{1} \ldots \underset{\_}{0}\ \underset{\_}{1}\ \underset{\_}{0}$

$Y = X_1 + \ldots + X_n$

$\mathbb{P}(Y=k) = C_n^k \cdot p^k (1-p)^{n-k}$

$X_1, \ldots, X_n \sim iid\ Bern(p)$ independent identically distributed

$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(X_1 + \ldots + X_n) = n \cdot \mathbb{E}(X_i) = n \cdot p$

$Var(Y) = Var(\underbrace{X_1 + \ldots + X_n}_{\text{независимы}}) = n \cdot Var(X_i) = n p (1-p)$

$\mathbb{E}(aX + bY) = a\mathbb{E}(X) + b\mathbb{E}(Y)$

$Var(a \cdot X + Y) = a^2 Var(X) + Var(Y) + 2 \cdot a \cdot Cov(X, Y)$

Опр.

штуки²

$Var(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))^2] = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}^2(X)$ $\sigma(X) = \sqrt{Var(X)}$

$Cov(X, Y) = \mathbb{E}[(Y - \mathbb{E}(Y))(X - \mathbb{E}(X))] = \mathbb{E}(X \cdot Y) - \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y)$

штуки рубли

$Corr(X, Y) = \dfrac{Cov(X, Y)}{\sigma(X) \cdot \sigma(Y)} \in [-1; 1]$ измеряет лин. зав. между X и Y

Упражнение

20 уток
10 охотников

X – число целых уток

X	10	11	12	....	19	~~20~~
$\mathbb{P}(X=k)$						~~0~~

$\mathbb{P}(X=19) = \left(\frac{1}{20}\right)^{10} \cdot 20$

$\mathbb{P}(X=18) =$ сложна

$$\begin{bmatrix} \ldots & & \ldots \\ 3 & 7 & C_{10}^3 \cdot \\ 4 & 6 & C_{10}^4 \cdot \\ 5 & 5 & C_{10}^5 \cdot \\ \ldots & & \ldots \end{bmatrix}$$

Посмотрим с т.з. уток

$X = X_1 + \ldots + X_{20}$ $\quad \mathbb{E}(X) = 20 \cdot \mathbb{E}(X_1) = 20 \cdot \mathbb{P}(X_1 = 1)$

$X_i = \begin{cases} 1, & \text{если утка выжила} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

X_i	0	1
$\mathbb{P}(X_i=k)$	$1-\left(\frac{19}{20}\right)^{10}$	$\left(\frac{19}{20}\right)^{10}$

$$\mathbb{P}(X_i = 1) = \left(\frac{19}{20}\right)^{10}$$

$$\mathbb{E}(X) = 20 \cdot \left(\frac{19}{20}\right)^{10} \approx 12$$

Упражнение

10 коробок
7 карандашей

X - кол-во пустых коробок

$\mathbb{E}(X) - ?$

$Var(X) - ?$

X	3	4	...	8	9
$\mathbb{P}(\ldots)$					$10 \cdot (1/10)^7$

$X_i = \begin{cases} 1, & \text{коробка пустая} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

X_i	0	1
$\mathbb{P}(X_i=k)$	$1-\left(\frac{9}{10}\right)^7$	$(9/10)^7$

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(X_1 + \ldots + X_{10}) = 10 \cdot \mathbb{E}(X_i) = 10 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^7 \approx 4.78$$

X_1 - пуста ли первая коробка

X_5 - -||- -||- пятая -||-

$Cov(X_1, X_5) < 0 \quad X_1 \uparrow \quad X_5 \downarrow$

$Cov(X, Z+Y) = Cov(X, Z) + Cov(X, Y)$ $\quad Cov(X,Y) = Cov(Y,X)$

$Var(Y_1 + Y_2 + Y_3) = Cov(Y_1 + Y_2 + Y_3, Y_1 + Y_2 + Y_3) =$

$= Var(Y_1) + Var(Y_2) + Var(Y_3) + 2Cov(Y_1, Y_2) + 2Cov(Y_1, Y_2) + 2Cov(Y_2, Y_3)$

$$\mathrm{Var}(X_1 + \ldots + X_{10}) = 10 \cdot \underbrace{\mathrm{Var}(X_1)}_{\left(\frac{9}{10}\right)^7 \cdot \left(1 - \left(\frac{9}{10}\right)^7\right)} + \underbrace{\frac{10 \cdot 9}{2}}_{C_{10}^2} 2 \cdot \underbrace{\mathrm{Cov}(X_1, X_5)}_{-0.019}$$

$$\mathrm{Cov}(X_1, X_5) = \underbrace{\mathbb{E}(X_1 \cdot X_5)}_{?} - \underbrace{\mathbb{E}(X_1)}_{(9/10)^7} \cdot \underbrace{\mathbb{E}(X_5)}_{(9/10)^7}$$

$$\mathbb{E}(X \cdot Y) = \sum_{(x,y)} x \cdot y \cdot \mathbb{P}(X = x, Y = y)$$

X \ Y	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1		p_{ij}		
x_2				

$$\sum_{j=1}^{4} \sum_{i=1}^{2} p_{ij} = 1$$

X_1 \ X_5	0	1
0	•	•
1	•	$\mathbb{P}(X_1 = 1, X_5 = 1) = \left(\frac{8}{10}\right)^7$

$$\mathrm{Cov}(X_1, X_5) = \left(\frac{8}{10}\right)^7 - \left(\frac{9}{10}\right)^{14} \approx -0.019$$

Подставляем цифры $\Rightarrow$ получаем ответ

② Сумма случайностей – неслучайна

Упражнение

Кубик подкидываем n раз

X_1 – кол-во 1

X_2 – кол-во 2

.....

X_6 – кол-во 6

$$(X_1, \ldots, X_6) \sim \mathrm{Multinomial}(p_1, \ldots, p_6, n)$$

$$\sum_{i=1}^{6} p_i = 1$$

$\mathrm{Corr}(X_1, X_6)$ – ?

< 0

$= 0$

> 0

?

$$X_1 + X_2 + \ldots + X_6 = n$$

$$Cov(X_1, n) = \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}(X))\cdot(n-\mathbb{E}(n))] = 0$$

$$n - n$$

$$0$$

из-за симметрии

$$Cov(X_1, X_1+X_2+\ldots+X_6) = 0$$

$$Cov(X_1,X_1) + Cov(X_1,X_2) + \ldots + Cov(X_1,X_6) = 0$$

$$Var(X_1) + 5\cdot Cov(X_1,X_6) = 0$$

$$\frac{Cov(X_1,X_6)}{\sqrt{Var(X_1)\,Var(X_6)}} = -\frac{1}{5}\cdot\frac{Var(X_1)}{\sqrt{Var(X_1)\,Var(X_6)}}$$

$$\sqrt{Var(X_1)\,Var(X_1)}$$

$$Var(X_1)$$

$$Corr(X_1,X_6) = -1/5$$

Упражнение

$$Z_i = \frac{X_1+\ldots+X_m}{X_1+\ldots+X_n} \qquad m<n$$

$$X_1,\ldots,X_m,\ldots,X_n \sim iid$$

$$\mathbb{E}(Z_i)$$

$$\frac{X_1}{X_1+\ldots+X_n} + \ldots + \frac{X_n}{X_1+\ldots+X_n} = 1$$

$$Y_1 \quad + \ldots + \quad Y_n$$

$$\mathbb{E}(Y_1+\ldots+Y_n) = 1 \Rightarrow \mathbb{E}(Z_i) = m\cdot\mathbb{E}(Y_i) = \frac{m}{n}$$

$$n\cdot\mathbb{E}(Y_i) = 1$$

$$\mathbb{E}(Y_i) = 1/n$$

③ Метод первого шага

Упражнение

Маша
Саша

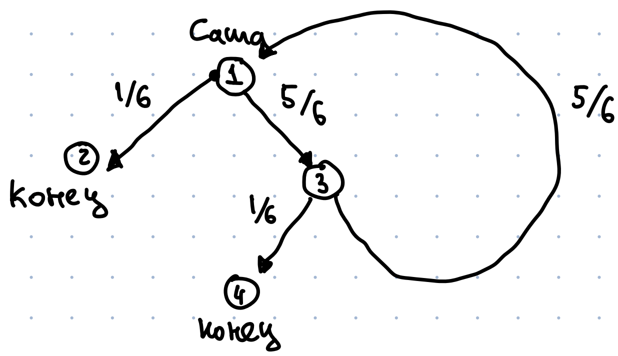
кубик

моет посуду

Саша - первый

win

а) $\mathbb{P}$(Саша моет посуду)



Почему игра кончится?

$$\mathbb{P}(\text{игра } \infty) = \left(\frac{5}{6}\right)^{2n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Саша win если он в ①

Саша win если он в ③

$$\begin{cases} P_{1\to2} = \frac{1}{6}\cdot \overbrace{P_{2\to2}}^{1} + \frac{5}{6}\cdot P_{3\to2} \\ P_{3\to2} = \frac{1}{6}\cdot \underbrace{P_{4\to2}}_{0} + \frac{5}{6}\cdot P_{1\to2} \end{cases}$$

$$P_{1\to2} = \frac{1}{6} + \frac{5}{6}P_{3\to2} = \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^2 P_{1\to2}$$

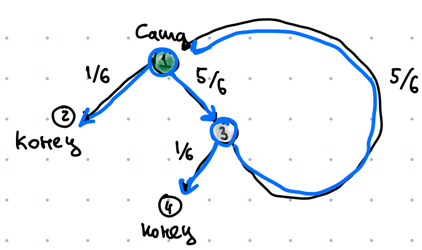
$$\left(1-\frac{25}{36}\right)P_{1\to2} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{11}{36}P_{1\to2} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{11}{6}P_{1\to2} = 1$$

$$P_{1\to2} = \frac{6}{11}$$

б) X — сколько раз подкинули кубик



$\mathbb{E}(X)$ — ?

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{6}\cdot 1 + \frac{5}{6}\cdot \mathbb{E}(X+1)$$

$$e = \frac{1}{6} + \frac{5}{6}e + \frac{5}{6}$$

$$e = 1 + \frac{5}{6}e$$

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{6}\cdot 1 + \frac{5}{6}\cdot\left(\frac{1}{6}\cdot 1 + \frac{5}{6}\,\mathbb{E}(X+2)\right)$$

$$\frac{1}{6}\cdot 1 + \frac{5}{6}\left(1 + \frac{5}{6}\,\mathbb{E}(X+1)\right)$$

$1/6\, e = 1$

$e = 6$

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{6}\cdot 1 + \frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot 2 + \frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\,\mathbb{E}(X+2)$$

$$36e = 6 + 10 + 25e + 50$$

$$36e = 66 + 25e$$

$$11e = 66 \qquad e = 6$$

X_c – сколько раз Саша подк. кубик

$$\mathbb{E}(X_c) = \frac{1}{6}\cdot 1 + \frac{5}{6}\left(\frac{1}{6}\cdot 0 + \frac{5}{6}\cdot \mathbb{E}(X_c+1)\right)$$

$$\mathbb{E}(X_c) = \frac{1}{6} + \frac{25}{36}\,\mathbb{E}(X_c) + \frac{25}{36}$$

$$e_c = \frac{31}{36} + \frac{25}{36}e$$

$$\frac{11}{36}e = \frac{31}{36} \qquad e = \frac{31}{11}$$

$$X = X_c + X_M$$

$$6 = \frac{31}{11} + x$$

Опр. $Y^2 = (X+1)^2$

X – число подк. до успеха

$X \sim Geom(p)$

$$\mathbb{E}(X) = p\cdot 1 + (1-p)\,\mathbb{E}(X+1)$$

$$\cancel{e} = \cancel{p} + \cancel{e} - pe + \cancel{(1-p)} + 1 \Rightarrow e = \frac{1}{p}$$

$Var(X) = ?$

$\mathbb{E}(X^2) - ?$

Сейчас: $X \qquad X^2$

Завтра: $\underbrace{X+1}_{Y} \qquad (X+1)^2 = Y^2$

$$\mathbb{E}(X^2) = p + (1-p)\left(\mathbb{E}(X^2)+1\right)$$

$$\mathbb{E}(X^2) = p + (1-p)\left(\mathbb{E}(X+1)\right)^2$$

$$\mathbb{E}(X^2) = p + (1-p)\,\mathbb{E}\left((X+1)^2\right)$$

Какое равенство правильное?

$$\mathbb{E}(X^2) = p + (1-p)\,\mathbb{E}(X^2 + 2X + 1)$$

$$\mathbb{E}(X^2) = \cancel{p} + (1-p)\,\mathbb{E}(X^2) + 2(1-p)\,\mathbb{E}(X) + \cancel{(1-p)} + 1$$

$$p\,\mathbb{E}(X^2) = 1 + 2(1-p)\cdot\frac{1}{p}$$

$$\mathbb{E}(X^2) = \frac{1}{p} + \frac{2(1-p)}{p^2}$$

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{1}{p} + \frac{2(1-p)}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{p + 2 - 2p - 1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}$$

Упражнение (задача коллекционера)

X – кол-во киндер-сюрпризов, которое мне надо купить, чтобы собрать всю коллекцию игрушек

n игрушек

$\mathbb{E}(X)$ – ?

слон | слон жираф | слон слон слон бегемот......

$X_1 = 1$ | $X_2 = 2$ | $X_3 = 4$

X_1 – число яиц до 1 уникальной игрушки

X_2 – число яиц до 2 уникальной игрушки

X_3 – число яиц до 2 уникальной игрушки

......

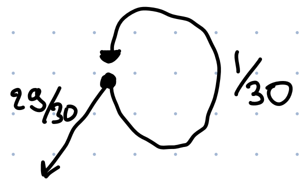
$$X = X_1 + \ldots + X_n$$

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(X_1 + \ldots + X_n) = \mathbb{E}(X_1) + \ldots + \mathbb{E}(X_n)$$

X_1	1
$\mathbb{P}(X_i = k)$	1

$\mathbb{E}(X_1) = 1$

X_2

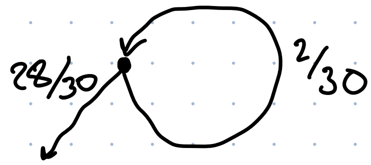


$$\mathbb{E}(X_2) = 1 \cdot \frac{29}{30} + \frac{1}{30}\,\mathbb{E}(X_2 + 1)$$

$$\mathbb{E}(X_2) = \frac{1}{p} = \frac{30}{29}$$

$X_2 \sim \mathrm{Geom}\left(\frac{29}{30}\right)$

X_3



$$\mathbb{E}(X_3) = 1 \cdot \frac{28}{30} + \frac{2}{30} \cdot \mathbb{E}(X_3 + 1)$$

$$\mathbb{E}(X_3) = \frac{1}{p} = \frac{30}{28}$$

$X_3 \sim \mathrm{Geom}\left(\frac{28}{30}\right)$

$n = 30$

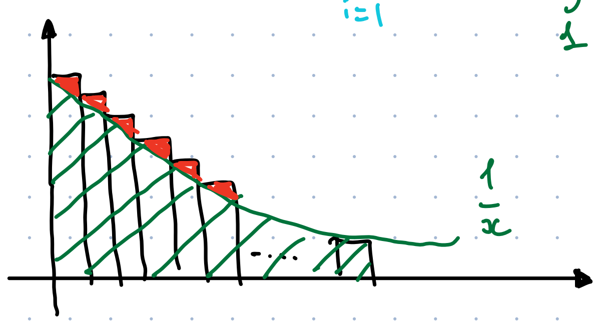
Ещё 27 уравнений!

$$\mathbb{E}(X) = 1 + \frac{30}{29} + \frac{30}{28} + \frac{30}{27} + \dots \frac{30}{2} + \frac{30}{1} =$$

$$= 30 \cdot \left(\frac{1}{30} + \frac{1}{29} + \frac{1}{28} + \dots \frac{1}{2} + 1\right) \approx 30 \cdot \ln 30 \approx 102$$

$$\sum_{i=1}^{30} \frac{1}{i} \approx \int_1^{30} \frac{1}{x}\,dx = \ln x \Big|_1^{30} = \ln 30 - \ln 1 =$$

$$= \ln 30$$



$$\frac{1 - \frac{k}{n}}{k^2/n^2} = \frac{n-k}{n} \cdot \frac{n^2}{k^2} = \frac{(n-k)n}{k^2}$$

$X_1, X_2, \dots, X_{30} \sim$ независимы

$\mathrm{Var}(X_1) = 0 \qquad \mathrm{Var}(X_i) = \frac{1-p}{p^2}$

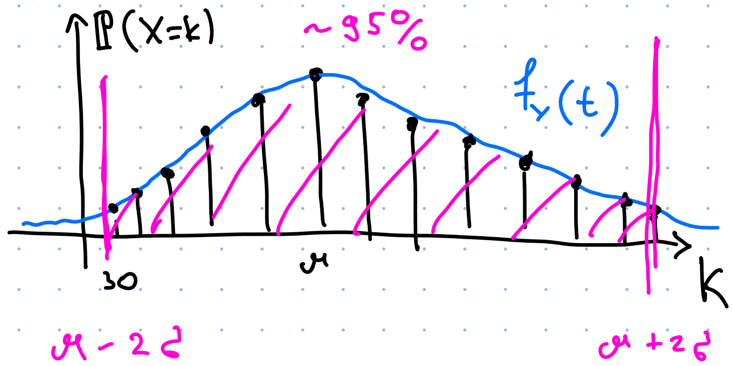
$$\frac{1 - \frac{29}{30}}{\frac{29}{30} \cdot \frac{29}{30}} = \frac{1}{30} \cdot \frac{30^2}{29^2} = \frac{30}{29^2}$$

$$Var(X) = \left(0 + \frac{30-29}{29^2} + \frac{30-28}{28^2} + \ldots + \frac{30-2}{2^2} + \frac{30-1}{1^2}\right) \cdot 30 \approx$$
$$\approx 768$$

$$\left(\frac{1}{29^2} + \frac{2}{28^2} + \frac{3}{27^2} + \ldots \frac{28}{2^2} + \frac{29}{1^2}\right) \cdot 30$$

$$\int_1^{29} \frac{x}{(30-x)^2} dx \approx \frac{840}{29} - \ln 29 \approx 25.598$$

$$X \overset{asy}{\sim} \mathcal{N}(\underset{\mu}{102}, \underset{\sigma^2}{768})$$



Предиктивный интервал:

$$\mathbb{P}(\mu - 2\sigma \le X \le \mu + 2\sigma) \approx 0.95$$

$\mu - 2\sigma$ — конст.; X — сл. вел.; $\mu + 2\sigma$ — конст.

Дов. инт.

$\hat{\mu}^L$ — сл. вел.; μ — конст; $\hat{\mu}^R$ — сл. вел.

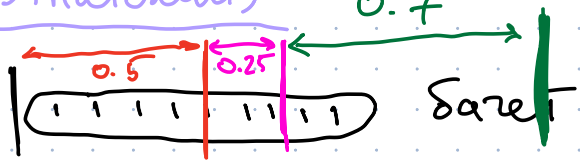
$$102 - 2 \cdot \sqrt{768} \; ; \; 102 + 2 \cdot \sqrt{768}$$

46.58   157.42

30 игрушек   хочу собрать коллекцию с вер. 0,95

покупайте 156 яиц

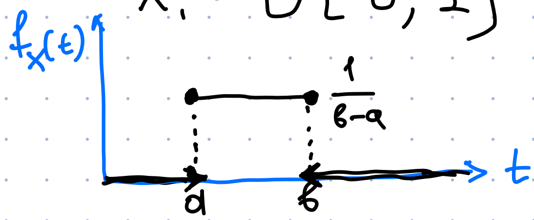
Упражнение (Удав Анатолий)



N – кол-во укусов

$\mathbb{E}(N)$ – ?

$X_i \sim U[0;1]$



$X_1 = 0.5$ $X_2 = 0.25$ $X_3 = 0.7$

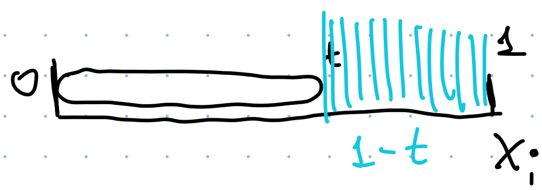
ожидаемое число укусов для багета длины t

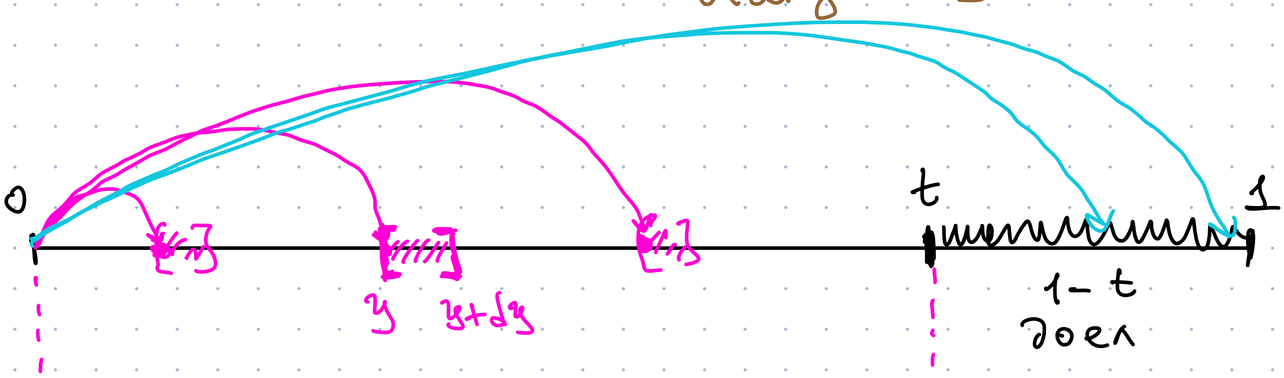
$$f(t) = (1-t)\cdot 1 + \int_0^t \left(f(y)+1\right)\cdot 1\, dy$$

вероятность попасть в отрезок $[y; y+dy]$

плотность распределения

ожидаемое число укусов чтобы доесть багет длины y





X_i	1	0.5	0.25
	1/3	1/3	1/3

$$\underset{\substack{\| \\ 1}}{f(t)} = \frac{1}{3}\cdot 1 + \sum_{y\in\{0.5,\, 0.75\}} \left(f(y)+1\right)\cdot\frac{1}{3}$$

$$f(t) = (1-t)\cdot 1 + \int_0^t (f(y)+1)\,dy \qquad (\ )'$$

$$f'(t) = -1 + f(t) + 1 \qquad \left(\int_0^t f(y)\,dy\right)' = f(t)$$

$$f'(t) = f(t)$$

$$\frac{df}{dt} = f$$

$$\frac{df}{f} = dt \qquad \int \frac{df}{f} = \int 1\,dt$$

$$\ln f = t + \ln c, \qquad c \in \mathbb{R}$$

$$f(t) = c\cdot e^t$$

$f(0+) = 1 \Rightarrow c = 1$

Чтобы съесть очень маленький багет, нам хватит одного укуса

$$\mathbb{E}(N \mid \text{багет}_1 \text{длины}) = f(1) = e$$

марковские цепи

Опр. Марковские цепи

Послед. сл. вел. $X_0, X_1, X_2, \ldots\ldots$

$$\mathbb{P}(X_{n+1}=k \mid \underbrace{X_n, X_{n-1}, \ldots, X_2, X_1, X_0}_{\mathcal{F}_n}) = \mathbb{P}(X_{n+1}=k \mid X_n)$$

Начальное состояние: $\mathbb{P}(X_0 = k) = \lambda_k$

Т. (Эргодичность конечной цепи Маркова)

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} 1 & \ldots & k \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ k \end{array} & \begin{pmatrix} & & \\ & P_{ij} & \\ & & \end{pmatrix} \end{array} \qquad \mathbb{P}(X_\infty = j) = \pi_j$$

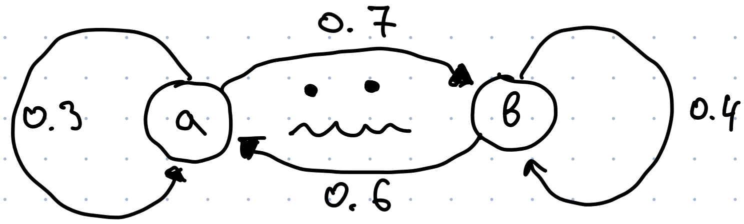
стационарное р-е.

Если цепь Маркова имеет конечное кол-во состояний и для какого-то n_0 все элементы матрицы P^{n_0} отличны от нуля, тогда $\forall\, i, j$ $\exists$ пределы

$$\lim_{n\to\infty} P_{ij}^{(n)} = \pi_j > 0$$

Вероятности π_j являются наименьшим решением системы ур.
$$\begin{cases} \sum_j \pi_j = 1 \\ \pi_j = \sum_i \pi_i P_{ij} \end{cases}$$

Упражнение



$$P = \begin{array}{cc} a & b \\ \begin{pmatrix} 0.3 & 0.7 \\ 0.6 & 0.4 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} a \\ b \end{array}$$

$$\lambda_0 = \begin{pmatrix} 0.3 \\ 0.7 \end{pmatrix} \begin{array}{c} a \\ b \end{array}$$ – инициализация цепи

$P_{a\to a} = 0.3 \cdot P_{a\to a} + 0.6 \cdot P_{b\to a}$

$P_{b\to a} = 0.4\, P_{b\to a} + 0.7\, P_{a\to a}$

$0.3\cdot 0.7 + 0.7\cdot 0.6$

$$\lambda_1^T = \lambda_0^T \cdot P = (0.3,\ 0.7) \cdot \begin{pmatrix} 0.3 & 0.7 \\ 0.6 & 0.4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bullet & \bullet \end{pmatrix}$$

$0.3\cdot 0.3 + 0.7\cdot 0.6$

$$\lambda_2^T = \lambda_1^T \cdot P = \lambda_0^T P^2$$

....

$$\lambda_{t+1}^T = \lambda_0^T P^{t+1}$$

Как возвести матрицу в степень?

соб. зн.

$$P = C^{-1} \cdot D\, C$$

соб. вектора

$$P = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -0.3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{P}^n = C^{-1} D C C^{-1} D C C^{-1} D C \dots C^{-1} D C = C^{-1} D^n C$$

$$\underline{P}^n = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & (-0.3)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\lim_{n \to \infty} \underline{P}^n = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 7 & -1 \end{pmatrix} = \lambda_\infty$$

$$\lambda_\infty = \left(6/13 ,\ 7/13 \right)$$

$$\lambda_t^T = \lambda_{t-1}^T \underline{P}$$

$$\lim_{t \to \infty} \lambda_t^T = \lim_{t \to \infty} \lambda_{t-1}^T \cdot \underline{P}$$

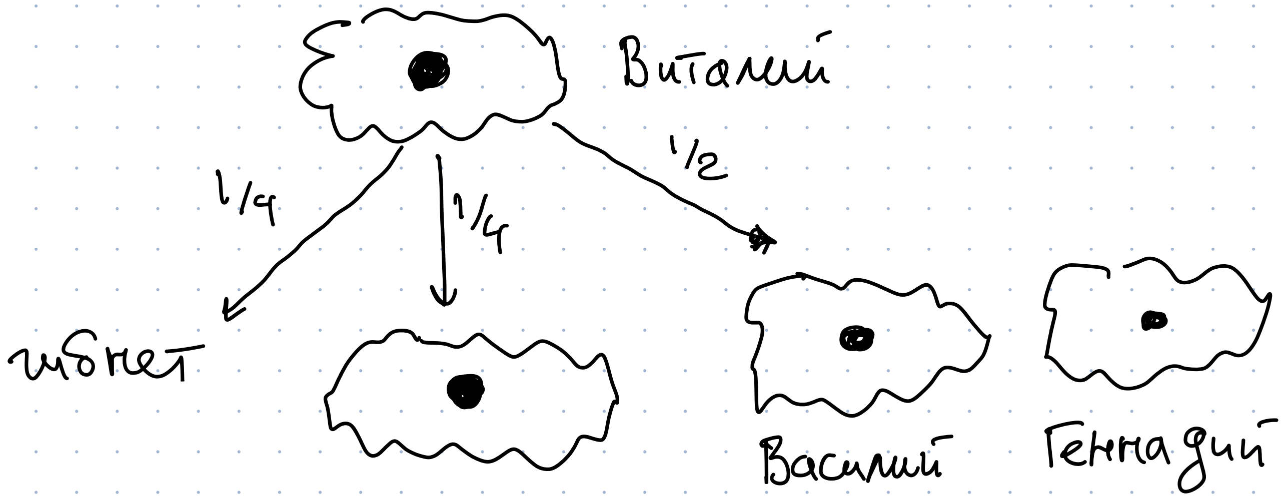
$$\lambda_\infty = \lambda_\infty \cdot \underline{P}$$

$$(r,\ 1-r) = (r,\ 1-r) \cdot \begin{pmatrix} 0.3 & 0.7 \\ 0.6 & 0.4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} r \\ 1-r \end{pmatrix} = P^T \begin{pmatrix} r \\ 1-r \end{pmatrix}$$

$$\underline{P}^T = (C D C^{-1})^T = C^{-T} D C$$

Упражнение (Амоеба)



$\mathbb{P}$(популяция умрёт) — ?

$$\mathbb{P} = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ \vdots \end{array} \begin{array}{c} 0\ 1\ 2\ 3\ 4\ \ldots\ldots \\ \left(\begin{array}{ccccc} & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{array} \right) \end{array}$$

i, j — кол-во амёб (состояния)

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot \mathbb{P}(A) + \frac{1}{2}\, \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(A)$$

$$3p = 1 + 2p^2$$

$$2p^2 - 3p + 1 = 0$$

$$D = 9 - 4 \cdot 2 = 1$$

$$p_1 = \frac{3+1}{4} = 1 \qquad p_2 = \frac{3-1}{4} = \frac{1}{2}$$