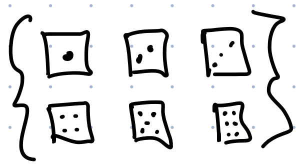
Комбинаторика

① Классическая вероятность

$\Omega = \{w_1, \dots, w_n\}$ $\quad w_i \mapsto \mathbb{P}(w_i) = \frac{1}{n}$

$w_i \mapsto \mathbb{P}(w_i) = p_i \quad \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$

Упражнение



Ω

A - выпала чётная грань

$A \subseteq \Omega$

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{m}{n} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Надо уметь считать сколько в A есть эл. исходов.

② Правила сложения и умножения

$A = \{a_1, \dots, a_n\}$

$B = \{b_1, \dots, b_k\}$

хотим взять 1 объект из A или из B

$\Rightarrow n+k$ способов (правило сложения)

хотим взять сначала из A потом из B (2 объекта)

$\Rightarrow n \cdot k$ способов (правило умножения)

Упражнение

$\boxed{A\ 777\ YE}$

$12 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 12$

$n = 10^3 \cdot 12^3$

$m = 10^3$

$$\mathbb{P}(AYE) = \frac{m}{n} = \frac{10^3}{12^3 \cdot 10^3} = \frac{1}{12^3}$$

Упражнение

Сколько $\exists$ пятизначных чисел

$\underline{\ }\ \underline{\ }\ \underline{\ }\ \underline{\ }\ \underline{\ }$

$9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$ $\quad 9 \cdot 10^4$

Упражнение

Пароль: 26 лат. аф.
10 цифр
8 спец. символов.

44

4-значные пароли?

1 ц.
1 б.
1 символ
хотя бы

$\{\underline{\cdot}\ \underline{\cdot}\ \underline{\cdot}]\ \underline{\times}$

$26 \cdot 10 \cdot 8 \cdot 44 \cdot 6$

$26 \cdot 8 \cdot 10$

6 вариков.

$3 \cdot 10 \cdot 2 \cdot 8 \cdot 1 \cdot 26 \cdot 44$

Как проверить? Симуляции в python :)

③ Принцип Дирихле

Если у нас есть n ящиков и n+1 объект
=> хотябы в одном ящике будет 2 объекта

Упражнение

12 носков
6 белых
6 черных

Сколько надо достать, чтобы
→ гарантир. получить пару 1 цвета

3 шт. $\boxed{б, ч. \mid \begin{matrix} б. \\ ч. \end{matrix}}$

б. б. √
ч. ч. √

→ разных цветов 6б. 1ч.
7 шт.

Упражнение

ящик 101 пуговица из 11 цветов.

Доказать:

Найдется либо 11 пуговиц одного цвета
либо 11 пуговиц разных цветов

Пусть нет ни первого ни второго

10 штук ∀ краски => 100
красок - 10

4 Размещения

$B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ важен порядок отбора

↳ без повторений k штук

$$A_n^k = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots (n-(k-1))$$

↳ с повторениями

$$\bar{A}_n^k = n \cdot n \cdot n \cdot \ldots \cdot n = n^k$$

$$\hat{A}_n^k$$

Все объекты разные

Упражнение

16 команд

3 призовых места

Способов распределить призы:

$$A_{16}^3 = 16 \cdot 15 \cdot 14$$

Упражнение

$B = \{1, 2, 3, 4\}$

$\exists$ 3-зн. чисел-?

$\underline{4}\ \underline{4}\ \underline{4}$

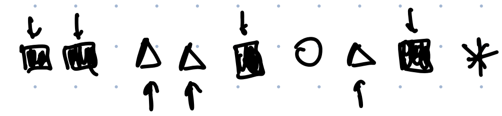
$$\bar{A}_4^3 = 4^3$$

5 Перестановки

$$A_n^n = P(n) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

перестановки без повторений

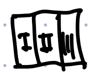
$$P(n_1,\dots,n_k) = \frac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdot\ldots\cdot n_k!}$$



$$\frac{9!}{4!\cdot 3!\cdot 1!\cdot 1!}$$

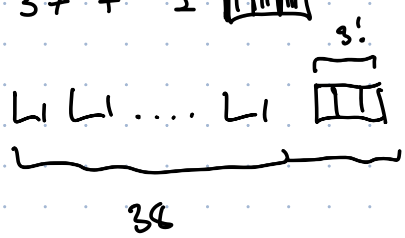
Упражнение

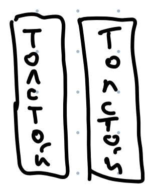
40 книг все разные

а) 3 тома Пушкина 

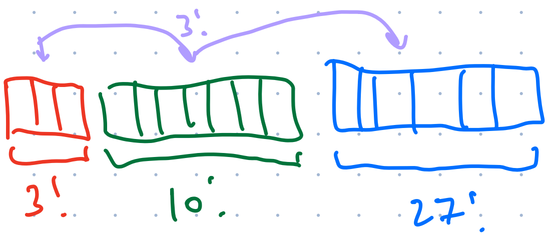
б) друг за другом ∀ порядке

а) $37 + 1$  $38!$

б)  $38!\cdot 3!$

в) 40 книг 3 П. 10 Д. 27 Т. 

$$\frac{40!}{3!\,10!\,27!}$$



6 Сочетания

Для нас неважен порядок

→ без повторений

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-(k-1))\cdot(n-k)!}{k!\cdot(n-k)!} =$$

$$= \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

→ с повторениями

$$\bar{C}_n^k = C_{n+k-1}^k$$

$$\hat{C}_n^k$$

Упражнение

2 друга   1-ый   9 монет (разные)   2 мон.

2-ой   7 монет (разные)   ↕   2 мон.

сколько есть способов обмена?

$$C_9^2 \cdot C_7^2 = \frac{9!}{7!2!}\cdot\frac{7!}{2!5!} = \frac{9\cdot8\cdot7\cdot6}{4} = 12\cdot63 = 756$$

$$\frac{9\cdot8}{2!}$$

Упражнение

магазин   4 вида пирожных

Я хочу 7 штук

$$\hat{C}_4^7$$

- Рахат лукум
- Эклеры
- медовик
- безе

Закодируем покупки:

1 1 0 1 1 1 0 0 1 1

1 1 0 1 0 1 1 0 1 1

7!

$$\frac{10!}{7!\,3!} = C_{10}^{7} = C_{4+7-1}^{7} = \hat{C}_{4}^{7}$$

$$C_{10}^{3}$$

$$C_n^k = C_n^{n-k}$$

Упражнение

Остановка 10 чел.

Поезд 10 вагонов

$$\mathbb{P}(1 \text{ вагон пустой}) = \frac{m}{n} = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{10! \cdot C_{10}^{2}}{10^{10}}$$

$n = 10 \cdot 10 \cdot \ldots \cdot 10 = 10^{10} = \bar{A}_{10}^{10}$ всего способов посадить людей в вагоны

$m = 10 \cdot 9 \left(8! \cdot C_{10}^{2}\right)$

$$\underbrace{1\;1\;1\;1\;1\;1\;1\;1}_{8!}\;\underset{\uparrow\, C_{10}^{2}}{2}\;\Big|\;0$$

Упражнение

Домино 4 игрока 28 костей

$\forall$ игроку 7 штук

Сколько $\exists$ раскладок?

$$C_{28}^{7} \cdot C_{21}^{7} \cdot C_{14}^{7} \cdot C_{7}^{7} = \frac{28!}{(7!)^4}$$

$\underbrace{\square\square\square\ldots\square}_{28!}$ $\qquad \underset{7!}{1} \mid \underset{7!}{2} \mid \underset{7!}{3} \mid \underset{7!}{4}$

$$P_n(7,7,7,7) = \frac{28!}{7!\,7!\,7!\,7!}$$

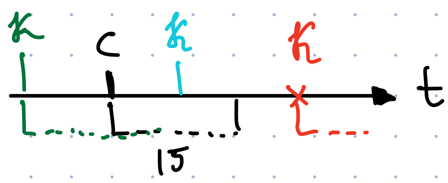
7 Геометрическая вероятность

Упражнение (задача о встрече)

Саша

Катя

09:00 - 10:00

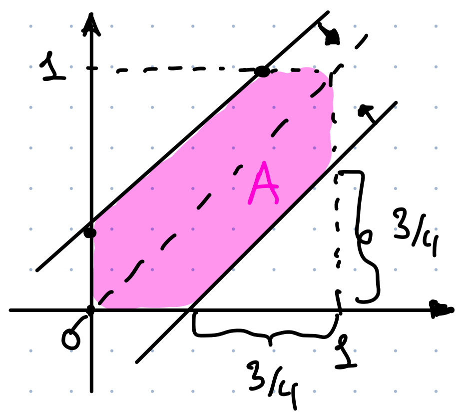


Какова вер. что ребята встретятся?

$\Omega = [0;1] \times [0;1]$

$(0.2,\ 0.7) \in \Omega$

(x, y)



$$A = \{(x,y) \in \Omega \mid |x-y| \leq 0.25\}$$

$|x-y| \leq 1/4 \qquad x>y \quad x-y \leq 1/4 \quad y \geq x - 1/4$

$\qquad\qquad\qquad\quad x<y \quad y-x \leq 1/4 \quad y \leq x + 1/4$

$$\mathbb{P}(A) = \frac{S_A}{S_\Omega} = 1 - (3/4)^2 = 7/16$$

⑧ Аксиоматика тервера

→ можно ли $\forall A \subseteq \Omega$ считать событием?

→ Как правильно определить $\mathbb{P}$?

аксиомы Колмогорова

иногда да
иногда нет

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

$\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0;1]$

σ-алгебра – список событий

нужно для двух вещей:

а) Технические цели в теоремах

б) моделирование наделенности инфой

Опр. (удобное)

Набор $\mathcal{F}$ подмножеств мн-ва Ω наз σ-алгеброй, если:

1) $\Omega \in \mathcal{F}$

2) Если $A_1, \dots, A_n, \dots \in \mathcal{F}$ тогда $\forall$ их комбинации тоже внутри $\mathcal{F}$

$\cup \ \cap \ \Delta \ \setminus \ A^c$ $\qquad \boxed{A^c = \Omega \setminus A}$

Опр. (минимальный набор св-в)

1) $\Omega \in \mathcal{F}$ $\qquad$ 2) $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$

3) $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

Упражнение

Ω = {⚀, ⚁, ⚂, ⚃, ⚄, ⚅}

Вася умеет считать до трёх

$\mathcal{F}$ – набор событий, которые Вася понимает

знает остаток от деления на 3

$\mathcal{F}$ = { σ({⚀, ⚃}, {⚁, ⚄}, {⚂, ⚅}),
{⚁, ⚄, ⚂, ⚅}, {⚀, ⚃, ⚂, ⚅},
{⚀, ⚃, ⚁, ⚄}, Ω, $\varnothing$ }

самая богатая σ-алгебра: 2^{Ω} $\quad |2^{\Omega}| = 2^{|\Omega|} = 2^6$

самая бедная σ-алгебра: $\{\Omega, \varnothing\}$

Опр.

$\mathbb{P}: \mathcal{F} \to [0;1]$

$\mathbb{P}: \Omega \to [0;1]$

$\mathcal{F} = 2^{\Omega}$

⊕ обладает св-вами

1) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

2) $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$

3) $\mathbb{P}(A \sqcup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$

4) $\mathbb{P}\left(\bigsqcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$

$\cup$ $\quad A \cap B = \text{х.з.}$

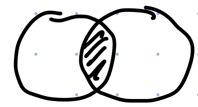
$\sqcup$ $\quad A \cap B = \varnothing$

аксиомы Колмогорова

9 Св-ва вероятности

→ Правило сложения

$$\mathbb{P}(A\cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A\cap C)$$



двойной счёт

Упражнение

кубик A – чётное {⚁ ⚃ ⚅}

B – дел. на 3 {⚂ ⚅}

$A\cap B \neq \varnothing$

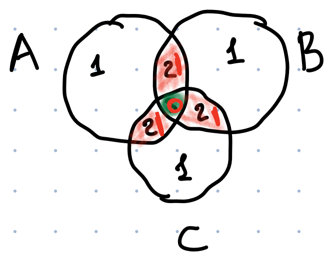
= {⚅}

$$\mathbb{P}(A\cup B) = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} - \frac{1}{6}$$

$$\mathbb{P}(A\cup B) \leq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$$

→ формула включений - исключений

$$\mathbb{P}(A\cup B\cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A\cap B) - \mathbb{P}(A\cap C) - \mathbb{P}(B\cap C) + \mathbb{P}(A\cap B\cap C)$$

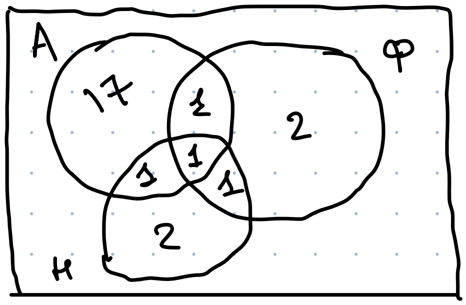


Упражнение

30 всего
20 англ.
5 нем.
5 фр.

2 англ. фр.
2 англ. нем.
2 нем. ф.
1 все три

Сколько людей не знают ни одного языка?



30

$\alpha_а$ $N(\alpha_а)$

$\alpha_ф$ $N(\alpha_ф)$

$\alpha_н$ $N(\alpha_н)$

$N(\alpha_а, \alpha_ф)$

$N(\alpha_а, \alpha_ф, \alpha_н)$

$$N - N(\alpha_а) - N(\alpha_ф) - N(\alpha_н) + N(\alpha_а \alpha_ф) + N(\alpha_а \alpha_н) + N(\alpha_ф \alpha_н) - N(\alpha_а \alpha_ф \alpha_н)$$

$3 \cdot N(\alpha_i, \alpha_j)$

$$30 - 20 - 5 - 5 + (2 + 2 + 2) - 1 = 5$$

Упражнение (беспорядки)

Театр 100 мест

билеты 100 человек

С какой вер. никто не сядет на своё место?

100

$n = 100!$

α_i – i-ый человек сел на свое место

$N(\alpha_i) = 99!$ $N(\alpha_i \alpha_j) = 98!$ ......,

$C^1_{100} = 100$ C^2_{100}

$$N(\alpha'_1, \dots, \alpha'_{100}) = \underset{N}{100!} - 99! \cdot C^1_{100} + 98! \cdot C^2_{100} - \underbrace{97!\, C^3_{100}}+$$

$$+ \dots + (-1)^{100} C^{100}_{100} \cdot 1 =$$

$\cancel{98!} \cdot \frac{100!}{\cancel{98!}\, 2!}$ $\quad$ $\cancel{97!} \cdot \frac{100!}{\cancel{97!}\, 3!}$

$$= 100! \left(1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{100!} \right) \approx 100! \cdot e^{-1}$$

Беспорядки

субфакториал $!n$

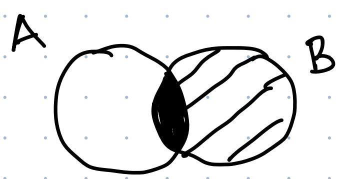
$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$$

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$\mathbb{P}(\alpha'_1, \dots, \alpha'_n) = \frac{100!\, e^{-1}}{100!} = \frac{1}{e}$$

→ Условная вероятность

A, B $\quad$ B – произошло $\quad$ $\mathbb{P}(A|B)$



$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{|A \cap B| / |\Omega|}{|B| / |\Omega|} = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A|B) \cdot \mathbb{P}(B)$$

Если A и B независимы $\mathbb{P}(A\cap B)=\mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(B)$

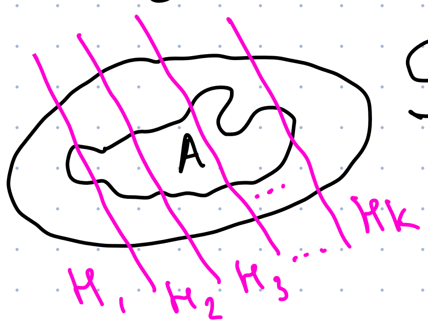
$\mathbb{P}(A|B)=\mathbb{P}(A)$

→ формула Байеса

$$\mathbb{P}(A\cap B)=\mathbb{P}(A|B)\cdot\mathbb{P}(B)=\mathbb{P}(B|A)\cdot\mathbb{P}(A)$$

$$\mathbb{P}(B|A)=\frac{\mathbb{P}(A|B)\cdot\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)}$$

→ формула полной вероятности



Ω

$H_1,\dots,H_k$ – не пересекаются

$$\Omega=\bigsqcup_{i=1}^{k}H_i=H_1\sqcup\dots\sqcup H_k$$

$$\sum_{i=1}^{k}\mathbb{P}(H_i)=1$$

Полная группа событий

$$\mathbb{P}(A)=\sum_{i=1}^{k}\mathbb{P}(A\cap H_i)=\sum_{i=1}^{k}\mathbb{P}(A|H_i)\cdot\mathbb{P}(H_i)$$

Упражнение

Саша → Алёна ♡

Саша → Настя ♡

ходит на лекции чтобы с ними поболтать

Вер. встретить Сашу

0.1 если нет девушек

0.5 если обе тут

0.3 Настя только

0.2 Алена только

девушки ходят на пары независимо друг от друга

Настя	0.6
Алена	0.7

а) $\mathbb{P}$(придет 1 девушка)

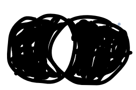
б) $\mathbb{P}$(на лекции все 3)

в) $\mathbb{P}$(Алена тут | Саша пришел)

г) $\mathbb{P}$(Саша тут | пришла 1 дев.)

S A N

$\mathbb{P}$(пришла 1 дев.) $= 0.6 \cdot 0.3 + 0.4 \cdot 0.7$

$A \Delta N$  $\mathbb{P}(N \cap A^c) + \mathbb{P}(N^c \cap A)$

$\mathbb{P}(N) \cdot \mathbb{P}(A^c) + \mathbb{P}(N^c) \cdot \mathbb{P}(A)$

$$\mathbb{P}(A \cap N \cap S) = \mathbb{P}(S \mid A \cap N) \cdot \mathbb{P}(A \cap N) =$$

$$= \mathbb{P}(S \mid A \cap N) \cdot \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(N)$$

$$0.5 \cdot 0.6 \cdot 0.7$$

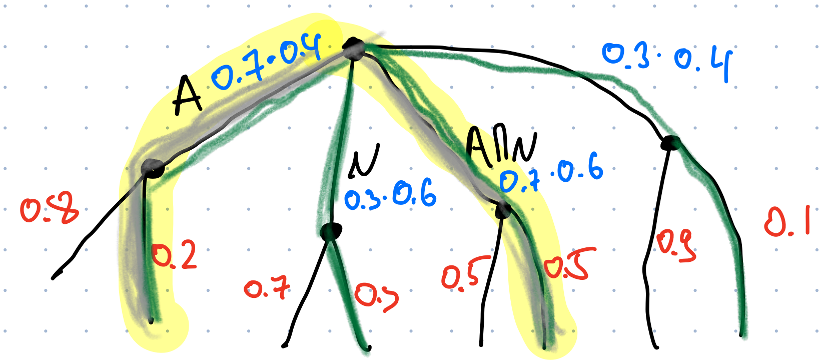
$$\mathbb{P}(A \mid S) = \frac{\mathbb{P}(S \mid A) \cdot \mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(S)}$$

$\mathbb{P}(S \mid A)$

$$\mathbb{P}(S) = \sum_i \mathbb{P}(S|H_i) \cdot \mathbb{P}(H_i) =$$

$$= 0.1 \cdot 0.4 \cdot 0.3 + 0.5 \cdot 0.6 \cdot 0.7 + 0.3 \cdot 0.6 \cdot 0.3 + 0.2 \cdot 0.4 \cdot 0.7$$

$$\mathbb{P}(A|S) = \frac{0.5 \cdot 0.6 \cdot 0.7 + 0.2 \cdot 0.4 \cdot 0.7}{0.1 \cdot 0.4 \cdot 0.3 + 0.5 \cdot 0.6 \cdot 0.7 + 0.3 \cdot 0.6 \cdot 0.3 + 0.2 \cdot 0.4 \cdot 0.7}$$



$$\mathbb{P}(S | 1 \text{ geb.}) = \frac{\mathbb{P}(S \cap 1 \text{ g.})}{\mathbb{P}(1 \text{ g.})} = \frac{0.7 \cdot 0.4 \cdot 0.2 + 0.3 \cdot 0.6 \cdot 0.3}{0.7 \cdot 0.4 + 0.3 \cdot 0.6}$$