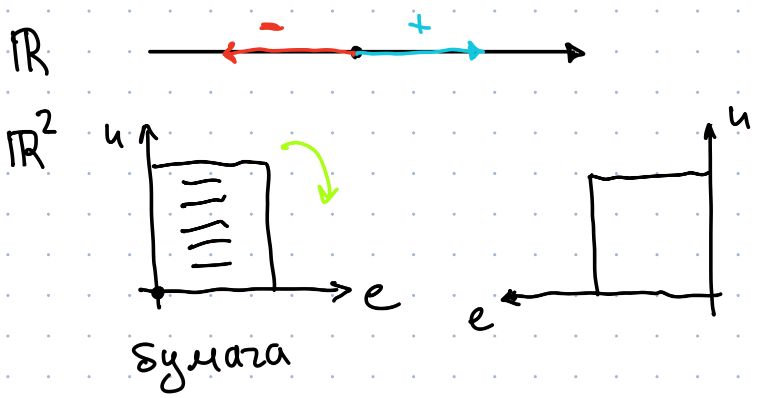
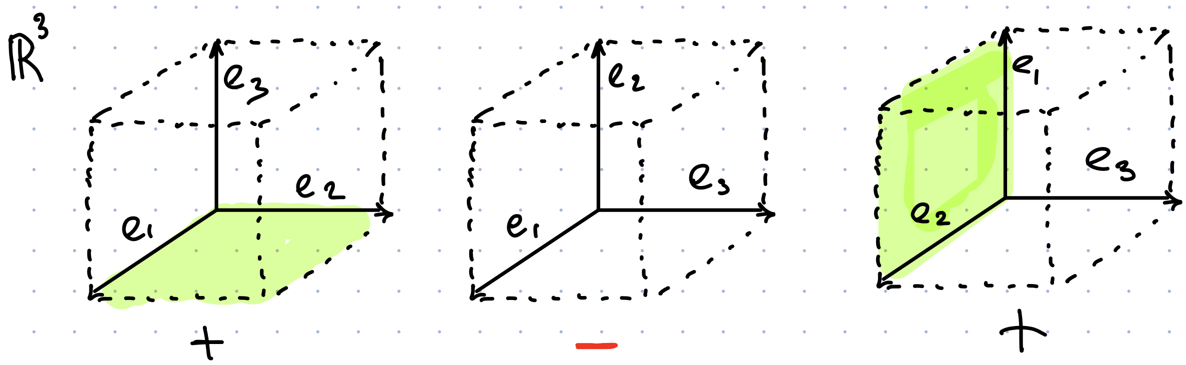
Определитель

→ Только квадратные матрицы

Ориентированный объём





Знак объема - знак перестановки

Опр.

Перестановка - все послед. из n чисел, где каждое встречается 1 раз.

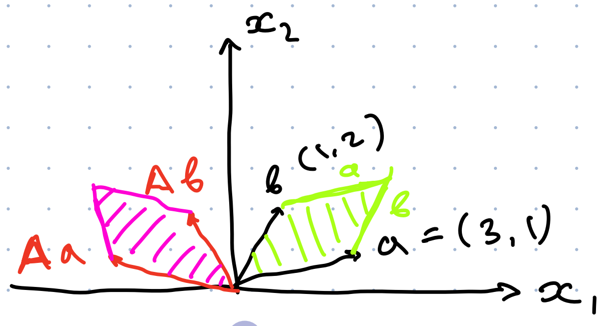
1 2 3 4 $\qquad \operatorname{sign}(\sigma) = \begin{matrix} +1 \\ -1 \end{matrix}$

$\sigma_1 = 1\ 3\ 4\ 2 \qquad \operatorname{sign}(\sigma_1) = 1 \qquad \sigma_1(2) = 3$

$\sigma_2 = 2\,1\,3\,4 \qquad sign(\sigma_2) = -1$

$\forall$ матрица изменяет пр-во (линейный оператор)

$A: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$



$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Что будет делать $B = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$$\det A = \frac{S(Aa, Ab)}{S(a, b)} = -1$$

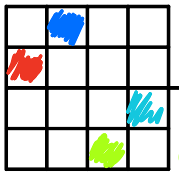
Подробнее про объемы - позже.

Три разных определения определителя

(I) Явная формула

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \underbrace{sign(\sigma)}_{\pm 1} \cdot a_{1\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)}$$

$n!$ слагаемых



a_{12}
a_{21}
a_{34}
a_{43}

$+ a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{34} \cdot a_{43}$

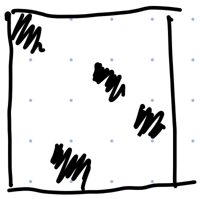
2 1 4 3

1 2 3 4

1 3 4 2

$+ a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{34} \cdot a_{42}$

Из каждой строки и столбца я беру только 1 элемент



24 слагаемых

(II) Полиномиальные кососимметрические функции

$\varphi : \mathbb{R}^{n \times n} \to \mathbb{R}$

$A = \left[A_1 \,|\, A_2 \,|\, \dots \,|\, A_n \right]$ $\quad \varphi(A_1, \dots, A_n)$

1) полилинейка

$$\varphi(A_1, \dots, A_i + A'_j, \dots, A_n) = \varphi(A_1, \dots, A_i, \dots, A_n) + \varphi(A_1, \dots, A'_j, \dots, A_n)$$

$$\varphi(A_1, \dots, \lambda \cdot A_i, \dots, A_n) = \lambda \cdot \varphi(A_1, \dots, A_i, \dots, A_n)$$

2) кососимметричность

$$\varphi(\ldots, A_i, \ldots, A_j, \ldots) = -\varphi(\ldots, A_j, \ldots, A_i \ldots)$$

$$\varphi(A_1, \ldots, A', \ldots, A', \ldots, A_n) = 0$$

3) $\varphi(I) = 1$

$\exists$ только одна ф. с такими св-вами — определитель.

(III) Через умножение

$\varphi: \mathbb{R}^{n \times n} \to \mathbb{R}$

1) $\varphi(AB) = \varphi(A) \cdot \varphi(B)$

2) $\varphi\begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix} = \lambda$

Св-ва:

a) $\boxed{A} = \boxed{A'}$ $\quad (i) + \lambda(j)$ $\qquad \det A = \det(A')$

$$\underset{\det A'}{\varphi(A_1, \ldots A_i + \lambda A_j, \ldots, A_n)} = \underset{\det A + 0}{\varphi(A_1, \ldots, A_i, \ldots, A_n) + \lambda \cdot \overset{0}{\varphi(A_1, \ldots A_j, \ldots A_j, \ldots A_n)}}$$

б) $\boxed{A} = \boxed{A'}$ ($i \leftrightarrow j$) $\qquad \det A' = -1 \cdot \det(A)$

в) $\boxed{\;\;\big|\, \lambda A_i \,\big|\;\;} = \lambda \cdot \boxed{A'} \qquad \det A = \lambda \cdot \det A'$

г) $\det A = \det A^T$

Табличные случаи

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - cb$$

$$\det \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} = \underset{1\,2\,3}{\square} + \underset{3\,1\,2}{\square} + \underset{2\,3\,1}{\square} - \underset{3\,2\,1}{\square} - \underset{2\,1\,3}{\square} - \underset{1\,3\,2}{\square}$$

$3! = 6$ слагаемых

$$\det \begin{pmatrix} a_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix} = a_1 \cdot \ldots \cdot a_n$$

верхне-Δ матрица

$$\det \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & a_n \end{pmatrix} = a_1 \cdot \ldots \cdot a_n$$

нижне Δ матрица

$\boxed{A} \mapsto \lambda_1 \dots \lambda_n$ $\begin{pmatrix} \ddots & * \\ 0 & \ddots \end{pmatrix}$

самый эфф. способ поиска определителя

$$\det \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix} = \det A \cdot \det C$$

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B$$

$$\det(AA^{-1}) = \det(I) = 1$$

$$\det(A)\det(A^{-1}) = 1 \Rightarrow \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

$$\det \begin{bmatrix} \dots \\ 0 \\ \dots \end{bmatrix} = 0$$

матрица обратима если $\det A \neq 0$

Упражнение

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = 1 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = -2$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\det(\lambda \cdot I) = \det \begin{pmatrix} \lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix} = \lambda^n$$

(3) − 6(1)

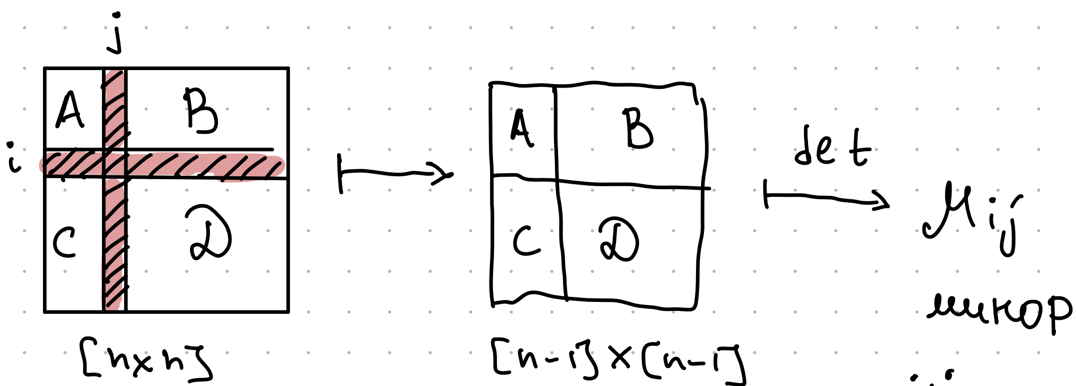
(2) − 2·(1)

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 6 & 3 & 2 \end{pmatrix} \overset{\text{swap}}{=} -1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 6 & 3 & 2 \end{pmatrix} = -1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 9 & -10 \end{pmatrix} =$$

$$= -1 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix} = -1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot (-7) = 21$$

$(3) - 3(2)$

Миноры и алгебраические дополнения



$$(-1)^{i+j} \cdot M_{ij} = A_{ij}$$

алгебраическое дополнение

формула разложения по строке:

$$\det\begin{pmatrix} & & \\ a_{i1} & \dots\dots & a_{in} \\ & & \end{pmatrix} = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + \dots + a_{in} \cdot A_{in}$$

По столбцу тоже можно :)

Упражнение

$$\det\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} =$$

$$\varphi(A_1, \overbrace{A_2}^{A_2^1 + A_2^2 + A_2^3}, A_3) =$$

$$= \varphi(A_1, A_2^1, A_3) + \dots + \varphi(A_1, A_2^3, A_3)$$

Будем раскладывать по 2-ому

$$= \det\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ 7 & 0 & 9 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 0 & 9 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} =$$

$$= \det\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 6 \\ 7 & 0 & 9 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 0 \\ 7 & 0 & 9 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ 0 & 8 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= (-1)^1 \det\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 7 & 9 \end{pmatrix} + (-1)^2 \det\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 7 & 9 \end{pmatrix} + (-1)^3 \det\begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 6 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{matrix} 0 & 8 & 0 \\ 4 & 0 & 6 \\ -1 & 0 & 3 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & -1 & 3 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 6 \end{matrix}$$

$$= \overset{1+2}{(-1)^1} \cdot 2 \cdot \det\underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}}_{M_{12}} + \overset{2+2}{(-1)^2} \cdot 5 \det\underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}}_{M_{22}} + \overset{3+2}{(-1)^3} \cdot 8 \det\underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}}_{M_{32}}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Явная формула для A^{-1}

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad A^{+} = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_{11} & \dots & \mathcal{A}_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{A}_{n1} & \dots & \mathcal{A}_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\hat{A} = (A^{+})^{T}$$ Присоеденная или союзная матрица

$\det A \neq 0$

$$A\hat{A} = \hat{A}A = \det A \cdot I$$

$$A \cdot \frac{\hat{A}}{\det A} = \underbrace{\frac{\hat{A}}{\det A}}_{A^{-1}} A = I$$

Утв.

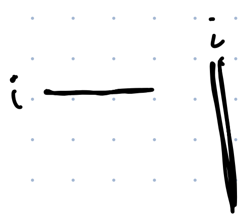
$$A\hat{A} = \det A \cdot I$$

Док-во:

(1) На диаг. стоит $\det A$

$$(A\hat{A})_{ii} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\hat{A}_{ji} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot \mathcal{A}_{ij} = \det A$$

разложение по строке



(2) $i \neq j$ $\quad (A\hat{A})_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{jk} = 0$

$$A' = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccccc} & & * & & \\ a_{i1} & \cdots & a_{ik} & \cdots & a_{in} \\ & & * & & \\ a_{i1} & \cdots & a_{ik} & \cdots & a_{in} \\ & & * & & \end{array}\right) \end{array}\begin{array}{c} \\ i \\ \\ j \\ \\ \end{array} \qquad \det A' = 0$$

$$\det A' = \sum a_{ik} \cdot A_{jk}$$

Упражнение

Единственный полезный случай $[2 \times 2]$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad A^{+} = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix} \qquad \hat{A} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Формулы Крамера

$$\boxed{A}\ \boxed{x} = \boxed{b} \qquad \det A \neq 0$$

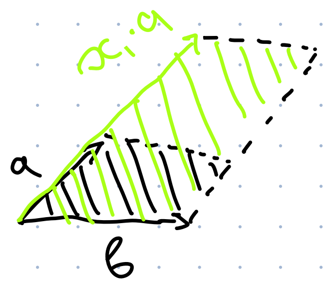
$[n \times n]$

$$\boxed{x} = \underbrace{A^{-1}\ \boxed{b}}_{\text{можно записать проще}}$$

$$\Delta = \det A \qquad \Delta_i = \det \boxed{A \,\Big|\, \underset{i}{b} \,\Big|\, A} \qquad x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}$$

Почему это так?

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \end{pmatrix}$$

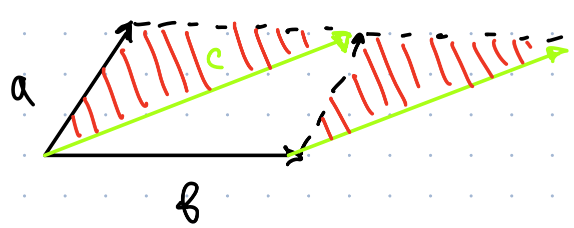


$$x_1 = \frac{S(x_1 a, b)}{S(a, b)}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{a} x_1 + \underbrace{\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}}_{b} x_2 = \underbrace{\begin{pmatrix} 7 \\ 10 \end{pmatrix}}_{c}$$

$$c = x_1 \cdot a + x_2 \cdot b$$

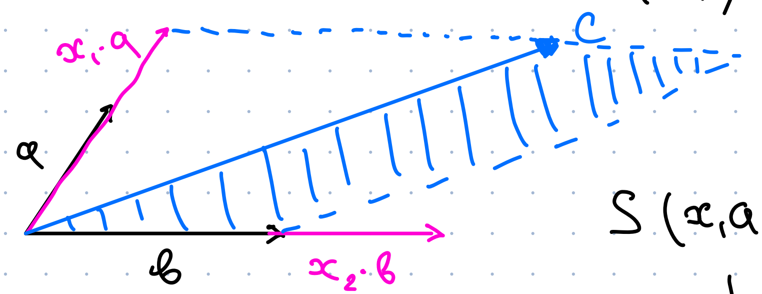
скашивание aka. принцип Кавальери



$$S(a, b) = S(a+b, b)$$

$$c = a + b$$

$$\det\begin{pmatrix} | & | \\ a & b \\ | & | \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} | & | \\ a+b & b \\ | & | \end{pmatrix}$$



$$S(x_1 a, b) = S(c, b)$$

$$x_1 \cdot = \frac{\det\begin{pmatrix} | & | \\ c & b \\ | & | \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} | & | \\ a & b \\ | & | \end{pmatrix}}$$

$$S(x, a, b) = S(c, b)$$