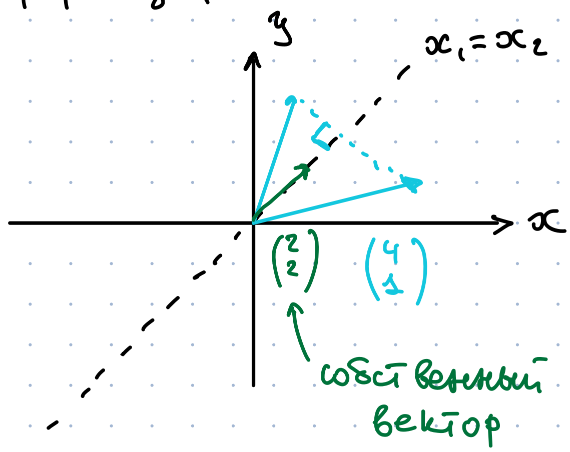
Линейные оператор

$\varphi : V \to V$ деформация

A_φ

$A\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$

$A\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$



собственный вектор

$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

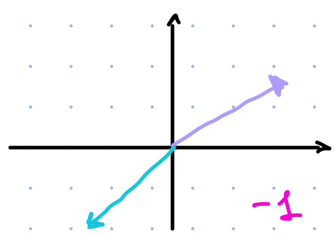
собственное число

1

$A_\varphi = \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$

φ - отражение отн. прямой $x_1 = x_2$

$$\begin{cases} 4a_{11} + a_{12} = 1 \\ 4a_{21} + a_{22} = 4 \\ a_{11} + a_{12} = 1 \\ a_{21} + a_{22} = 1 \end{cases}$$



ψ - поворачиваю вектора на 180°

$\varphi : V \to V$

$e_1, \dots, e_n$

$e_1', \dots, e_n'$

$A' = C^{-1} A C$

хочу, чтобы базис был разный, а хар-ка φ не менялась.

Матричные характеристики

① След

$tr(A_\varphi') = tr(C^{-1} A C) = tr(A)$

② Определитель

⑤ Ранг

③ Характеристический мн-н

$$A \cdot v = \lambda \cdot v$$ $v \neq 0$ – соб. вектора; λ – соб. значения

$$(A - \lambda \cdot I)v = 0$$

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow \lambda_1, \dots, \lambda_r; \; n_1, \dots, n_r$$

характеристический мн-н

$$\operatorname{spec}_{\mathbb{R}}(A) = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid \det(A - I \cdot \lambda) = 0\}$$ спектр матрицы

④ Многочлен мин. степени

$$\chi_A(\lambda) = 0$$

$$(\lambda - 1)^2(\lambda - 3) = 0$$

$$f_{min}(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 3)$$

$$f_{min} \mid \chi_A$$

Упражнение

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ соб. числа – ? соб. вектора – ?

$$\det(A - \lambda I) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ -1 & 3-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$(1-\lambda)(3-\lambda) + 2 = 0$$

$$3 - 3\lambda - \lambda + \lambda^2 + 2 = 0$$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$$ $\Rightarrow$ A изменит все вектора

$$D = 16 - 20 = -4$$

б) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 - 2 = 0$$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 1 = 0$$

$$D = 16 - 4 = 12$$

$$\lambda_1 = \frac{4 + \sqrt{12}}{2} = 2 + \sqrt{3}$$

$$\lambda_2 = 2 - \sqrt{3}$$ то же самое

$$\begin{pmatrix} -1-\sqrt{3} & -2 \\ -1 & 1-\sqrt{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -v_1 - \sqrt{3}v_1 - 2v_2 = 0 \\ -v_1 + v_2 - \sqrt{3}v_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} \tilde{v}_1 \\ \tilde{v}_2 \end{pmatrix}$$ соб. век.

Упражнение

$\lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = 2 \qquad A - ? \quad \infty$ числ. $\qquad \det(A - \lambda I)$

$$\chi_A(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2) = \lambda^2 - \lambda - 2\lambda + 2$$

$$= \lambda^2 - 2 \cdot 1.5\lambda + 1.5^2 - 0.25$$

$1.5^2 = 2.25$

$$= (\lambda - 1.5)(\lambda - 1.5) - 0.25$$

$$\begin{pmatrix} \lambda - 1.5 & 1 \\ 0.25 & \lambda - 1.5 \end{pmatrix} = A - \lambda \cdot I$$

$$\begin{pmatrix} 1.5 & -1 \\ -0.25 & 1.5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \text{неинтересная}$$

интересная

Спектральное разложение

$\varphi : V \to V \qquad e_1', \dots, e_n'$ — соб. вектора

$e_1, \dots, e_n$

$$A \qquad\qquad A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Утверждение

а) $\underset{[n \times n]}{A}$ — диагонализуема, если у нее $\exists$ n лин. нез. соб. векторов.

$$A = PDP^{-1} = \begin{pmatrix} | & & | \\ p_1 & \dots & p_n \\ | & & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} | & & | \\ p_1 & \dots & p_1 \\ | & & | \end{pmatrix}^{-1}$$

б) $A^T = A$ и у нее $\exists$ n орт. лин. нез. соб. векторов $\qquad A = PDP^T$

симметричная

Упражнение

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} \qquad \chi_A(\lambda) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ -3 & 6-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(6-\lambda)+6 =$$

$$= 6 - 6\lambda - \lambda + \lambda^2 + 6 = \lambda^2 - 7\lambda + 12 =$$

$$= (\lambda - 4)(\lambda - 3) = 0$$

$$\lambda_1 = 4 \quad v_1 = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{13} \\ 3/\sqrt{13} \end{pmatrix} \qquad \lambda_2 = 3 \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

$$-3v_1 + 2v_2 = 0 \qquad -v_1 + v_2 = 0$$

$$v_1 = 2/3\, v_2 \qquad v_1 = v_2$$

$$\begin{pmatrix} 2/3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad \left\|\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{2}$$

$$\left\|\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{\underset{4}{2^2} + \underset{9}{3^2}} = \sqrt{13}$$

$$A = PDP^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{13}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{3}{\sqrt{13}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{13}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{3}{\sqrt{13}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$A^{666} = \overbrace{A \cdot A \cdot A \cdot A \cdots A}^{666 \text{ раз}} = PD\underbrace{\cancel{P^{-1}}\,\cancel{P}}_{I}D\cancel{P^{-1}}\,\cancel{P}D\cancel{P^{-1}} \cdots \cancel{P}D\cancel{P^{-1}} \cdot \cancel{P}DP^{-1} =$$

$$= PD^{665}P^{-1} = P\begin{bmatrix} 4^{666} & 0 \\ 0 & 3^{666} \end{bmatrix} P^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 & & & 0 \\ & \mu_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \mu_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1\mu_1 & & & 0 \\ & \lambda_2\mu_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n\mu_n \end{pmatrix}$$

$$\exp(t) = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \dots$$

$$\exp(A) = I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \frac{A^4}{4!} + \dots =$$

$$= PP^{-1} + \frac{PD^2P^{-1}}{2!} + \frac{PD^3P^{-1}}{3!} + \frac{PD^4P^{-1}}{4!} + \dots = P\left(I + D + \frac{D^2}{2!} + \frac{D^3}{3!} + \dots\right)P^{-1} =$$

$$= P\begin{pmatrix} 1 + 4 + \frac{4^2}{2!} + \frac{4^3}{3!} + \dots & 0 \\ 0 & 1 + 3 + \frac{3^2}{2!} + \frac{3^3}{3!} + \dots \end{pmatrix} P^{-1} = P\begin{pmatrix} \exp(4) & 0 \\ 0 & \exp(3) \end{pmatrix} P^{-1} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \exp(4) & 0 \\ 0 & \exp(3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}^{-1}$$

Жорданова нормальная форма

Если A не диагонализуема, самый простой вид для неё – Жорданова нормальная форма

$$k \underbrace{\boxed{\begin{matrix} \lambda & 1 & & & & 0 \\ & \lambda & 1 & & & \\ & & \lambda & 1 & & \\ & & & \lambda & 1 & \\ & & & & \ddots & 1 \\ 0 & & & & & \lambda \end{matrix}}}_{k} = J_k(\lambda) \text{ жорданова клетка.}$$

$$k_1 + k_2 + \dots + k_s = n$$

$$J = \begin{bmatrix} J_{k_1}(\lambda_1) & & O \\ & \ddots & \\ O & & J_{k_s}(\lambda_s) \end{bmatrix}$$ жорданова нормальная форма

$$\underset{[n\times n]}{A} = P J P^{-1}$$ Алгоритм поиска громоздкий.

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

Билинейные формы и скалярное произведение

Второй интересный объект, который задают матрицы

<u>Опр.</u> $\beta : V\times V \to \mathbb{R}$, $(v_1, v_2) \mapsto \beta$

1) $\beta(\lambda v, \mu u) = \lambda \cdot \mu \cdot \beta(v,u)$

2) $\beta(v_1+v_2, u_1+u_2) =$
$= \beta(v_1,u_1) + \beta(v_1,u_2) + \beta(v_2,u_1) +$
$+ \beta(v_2,u_2)$

„умножение"

$v \underset{\beta}{\cdot} u = \beta(u,v)$

$(v_1+v_2) \underset{\beta}{\cdot} (u_1+u_2) = v_1 \underset{\beta}{\cdot} u_1 + v_1 \underset{\beta}{\cdot} u_2 + v_2 \underset{\beta}{\cdot} u_1 + v_2 \underset{\beta}{\cdot} u_2$

Как задавать?

V $e_1, \dots, e_n$

$v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$

$u = y_1 e_1 + \dots + y_n e_n$

$$\beta(u,v) = \beta\left(\sum_i x_i e_i, \sum_i y_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i \cdot y_i \beta(e_i, e_j) = x^T B y$$

$$B_{ij} = \beta(e_i, e_j)$$

$\beta : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$(x, y) \mapsto x^T B y$

Что будет при смене базиса:

$e_1, \dots, e_n$

$\downarrow$

$e_1', \dots, e_n'$

$B' = C^T B C$

$x = C x'$

$y = C y'$

Опр.

$\beta : V \times V \to \mathbb{R}$

- симметричная бил. форма

$B^T = B$

$\beta(u,v) = \beta(v,u)$

$x^T B y = \underbrace{y^T B x}_{[1\times 1]} = x^T B^T y$

скаляр можно $(\ )^T$

- кососимметричная бил. формы

$\beta(u,v) = -\beta(u,v)$

$B^T = -B$

Утверждение

$\beta : V \times V \to \mathbb{R}$ сим. $\Rightarrow \exists$ базис $e_1, \dots, e_n$

где

$$B = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & 0 & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & -1 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & -1 & & \\ & 0 & & & & & 0 & \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

$\#1$
$\#-1$ — инварианты] сигнатура бил. формы.
$\#0$

$\#0 = 0$ β - невырождена

$\#1 = \dim V$ β - положительно определена $\beta(v,v) > 0 \ \forall v \neq 0$

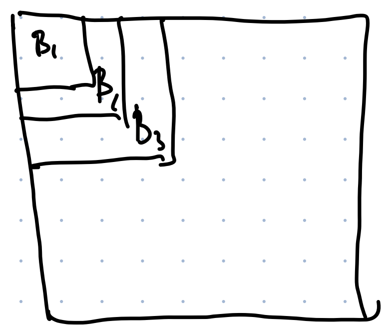
$\#-1 = \dim V$ β - отрицательно определена $\beta(v,v) < 0 \ \forall v \neq 0$

Метод Якоби

$\beta: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$(x,y) \mapsto x^T B y$

$B^T = B$

$B =$ 

$\det B_1 = \Delta_1 \neq 0$
$\det B_2 = \Delta_2 \neq 0$
....

$$\left\{\Delta_1, \frac{\Delta_2}{\Delta_1}, \frac{\Delta_3}{\Delta_2}, \ldots, \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}\right\}$$

если хотябы один $\Delta_i = 0$, метод не работает !!

Кол-во „+" и „-" — дает сигнатуру

Единственное полезное применение

Критерий Сильвестра

β - полож. опр. $\Leftrightarrow$ $\Delta_1 > 0, \ldots, \Delta_n > 0$

β - отриц. опр. $\Leftrightarrow$ $\Delta_1 > 0, \Delta_2 < 0, \Delta_3 > 0$ ....

Опр. Квадратичная форма

$\beta: V \times V \to \mathbb{R}$ $\beta(x,y) = x^T B y$

$Q_\beta : V \to \mathbb{R}$ $Q_\beta(x) = x^T B x$

Упражнения

$(x_1\ x_2)\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{12} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

	$\boxed{\begin{matrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{matrix}}$	$\boxed{\begin{matrix} 0 & 6 \\ 2 & 0 \end{matrix}}$	$\boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix}}$
Q	$2x_1x_2$	$2x_1x_2$	$2x_1x_2$
β	$2x_1y_2$	$2y_1x_2$	$x_1y_2+y_1x_1$

так

B для Q определена неоднозначно.

$\frac{B+B^T}{2}$ – определена для Q однозначно

Скалярные произведения

$(x, y) \mapsto x^T y$ $B = I$

$\langle x, y\rangle = \sum_i x_i y_i = x^T y = x^T I y$

базис $e_1, \dots, e_n$ $\mathbb{R}^n$ $\beta(x, y) = x^T y$

$\beta(e_i, e_j) = 0$ $i \neq j$ ортогональные вектора ортогональный базис

$\beta(e_i, e_i) = 1$ нормировка ортонормир. базис

Евклидово пр-во

$(V, \langle \dots \rangle)$

Опр.
длина $v \in V$ $\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle} \geq 0$

$u, v \in V \qquad \langle u, v \rangle \leq \|v\| \cdot \|u\|$ нер. Коши-Буняк.

$$-1 \leq \underbrace{\frac{\langle u, v \rangle}{\|v\| \cdot \|u\|}}_{\cos \alpha} \leq 1 \qquad \alpha \in [0; \pi] \quad \alpha \text{ - угол}$$

Примеры:

① $\mathbb{R}^2 \quad \langle x, y \rangle = x^T y$ плоскость из школы

② $\langle A, B \rangle = tr(A^T B)$

$\langle A, A \rangle = \sum_{ij} a_{ij}^2$

„Длина матрица"

$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{ij} a_{ij}^2}$ норма Фробениуса

$\dfrac{\langle A, B \rangle}{\|A\| \cdot \|B\|}$

угол между матрицы

③ $C[0; 1] \qquad \langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x) g(x) \, dx$

$\langle f, f \rangle = \int_0^1 f^2(x) \, dx \geq 0$