Линейные отображения и операторы

notability

Линейные отображения

V, U – векторные пр-ва

Опр. $\varphi: V \to U$ линейное отображение, если оно уважает структуру V и U

1) $\varphi(v_1 + v_2) = \varphi(v_1) + \varphi(v_2)$

2) $\varphi(\lambda v) = \lambda \cdot \varphi(v)$

3) φ – биекция
φ – изоморфизм

бонусное опр.

Упражнение

$V \quad e_1, \dots, e_n$ базис

$\varphi: V \to \mathbb{R}^n$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \mapsto a_1 e_1 + \dots + a_n e_n$$

Как задать линейное отображение?

$V \qquad U$

$e_1, \dots, e_n$

$\varphi: V \to U$

$\forall e_i \quad e_i \mapsto u_i$

$$\varphi(\underset{\substack{\text{||}\\ v}}{x_1 e_1 + \dots + x_n e_n}) = x_1 \varphi(e_1) + \dots + x_n \varphi(e_n) = x_1 u_1 + \dots + x_n u_n$$

Упражнение

$\mathbb{R}^2$ ∃ ли такое $\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, что

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = u_1 \quad ✓$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = u_2 \quad ✓$$

$$v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = u_3 \quad ?$$

v_1, v_2 – лин. нез. $\Rightarrow$ их можем отправить куда угодно

$v_3 = v_1 + v_2$

$$\varphi(v_3) = \varphi(v_1) + \varphi(v_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \neq u_3$$

$\Rightarrow$ не существует :(

Описание линейных отобр. из $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^n$

$\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$e_1, \dots, e_n$ – стандартный базис

$$e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = a_1 e_1 + \dots + a_n e_n$$

$$\varphi\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \varphi(a_1 e_1 + \dots + a_n e_n) = a_1 \varphi(e_1) + \dots + a_n \varphi(e_n) =$$

$$= \begin{bmatrix} \varphi(e_1) & \dots & \varphi(e_n) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

∀ лин. отображение это умножение слева на матрицу

$$\varphi(a) = \underset{\substack{[n\times n] \\ [m\times n]}}{A} \cdot a \qquad \begin{array}{c} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \end{array}$$

Упражнение

$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\cancel{e_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$

$\varphi(e_1) + \varphi(e_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\varphi(e_1 + e_2) = \varphi\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\neq \left\{ \begin{array}{l} \varphi(e_1 + e_3) = \varphi(e_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \varphi(e_1) + \varphi(e_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

неуважение

$\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto (1)$

$e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto (0)$

$e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto (0)$

$$\underset{[1\times 3]}{A} \cdot \underset{[3\times 3]}{\boxed{e_1 \mid e_2 \mid e_3}} = \underset{[1\times 3]}{\boxed{1 \mid 0 \mid 0}}$$

Лин отображение и базис

$$\varphi : \underset{e_1, \dots, e_n}{V} \to \underset{f_1, \dots, f_m}{U} \quad \text{базисы}$$

$\forall e_i \quad \varphi(e_i) = u_i$

$u_i = a_{1i} f_1 + \ldots + a_{mi} f_m$

$$\varphi(e_i) = \begin{bmatrix} f_1 & \ldots & f_m \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix}$$

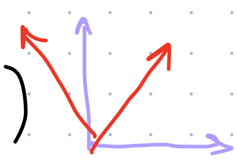
$$\begin{bmatrix} \varphi(e_1) & \ldots & \varphi(e_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 & \ldots & f_m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

матрица лин. отображения из V в U

Эта матрица зависит от выбора базисов и задает φ

Как матрица A будет меняться при смене базиса?

$$\overset{V}{(e_1', \ldots, e_n')} \qquad\qquad \overset{U}{(f_1', \ldots, f_m')}$$



$$\| \qquad\qquad\qquad \|$$

$$(e_1, \ldots, e_n) \cdot \underset{[n \times n]}{D} \qquad\qquad (f_1, \ldots, f_m) \cdot \underset{[m \times m]}{C}$$

$$\varphi(e_1', \ldots, e_n') = \begin{bmatrix} f_1' & \ldots & f_m' \end{bmatrix} A'$$

$$\varphi(e_1, \ldots, e_n) D = \begin{bmatrix} f_1 & \ldots & f_m \end{bmatrix} C A'$$

$$\varphi(e_1, \ldots, e_n) = \begin{bmatrix} f_1 & \ldots & f_m \end{bmatrix} C A' D^{-1} \qquad A$$

$$A' = \underbrace{C^{-1}}_{\text{эл. преоб. строк}} A \underbrace{D}_{\text{элементарные преобраз. столбцов}}$$

A – сложная

хотим A' – простая (диагональная)

$$A \xrightarrow{C^{-1}} \begin{pmatrix} 1 & & * \\ 0 & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{D} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$ диагонализация

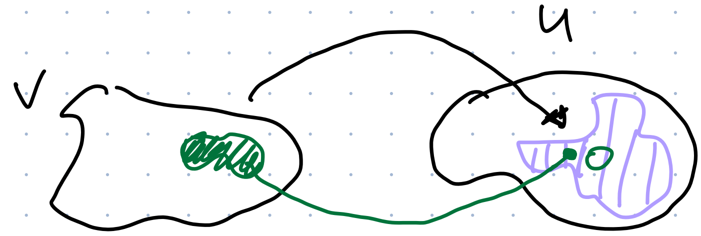
Упражнение

$\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \qquad A = P \cdot \Sigma \cdot P^{-1}$

$$P^{-1} A P = \Sigma$$

SVD $\qquad A = \underset{\text{повороты}}{U}\ \underset{\text{раст. исж.}}{\Sigma}\ \underset{\text{повороты}}{V^T} \qquad VAU^T = \Sigma$

Образ и Ядро



$\varphi: V \to U$

$\operatorname{Im} \varphi = \{ \varphi(v) \mid v \in V \}$ – образ — живет справа

$\operatorname{Ker} \varphi = \{ v \in V \mid \varphi(v) = 0 \}$ – ядро — живет слева

Как описать их через координаты

$e_1, \dots, e_n$ $\qquad$ $f_1, \dots, f_m$

$$\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

$$x \mapsto Ax$$

$$\operatorname{Im}\varphi = \{ Ax \mid x \in \mathbb{R}^n \} = \operatorname{Span}\{A_1, \dots, A_n\} =$$

линейная оболочка столбцов из A $\qquad$ $= \{ x_1 A_1 + \dots + x_n A_n \mid x_i \in \mathbb{R} \}$

$$\ker\varphi = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0 \}$$

решение однородной системы ур.

$$\dim(\operatorname{Im}\varphi) = \operatorname{rk}(A)$$

$$\dim(\operatorname{Im}\varphi) + \dim(\ker\varphi) = \dim V$$

$$\underbrace{\dim \operatorname{Span}(A_1, \dots, A_n)}_{\operatorname{rk}(A)} + \dim(y \in \mathbb{R}^n \mid Ay = 0) = n$$

кол-во главных переменных $\qquad$ кол-во свободных пер. $\qquad$ всего пер. в системе

$$Ax = 0$$

Проектор

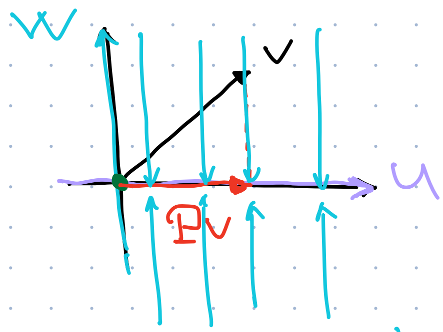
V - вект. пр-во $\qquad$ $U, W \subseteq V$

$U \cap W = 0 \quad \operatorname{span}\{U, W\} = V$

$P: V \to V$

проекция на U вдоль V

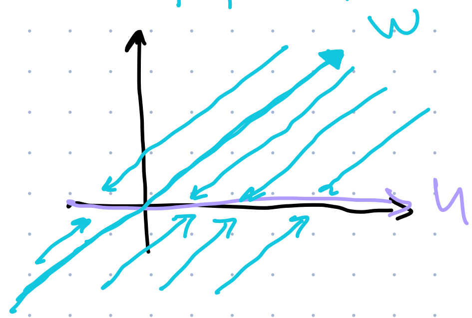
$v = u + w \mapsto u$



Как понять по оператору что он проектор?

$v \mapsto Pv \mapsto PPv$

$$P^2 = P$$



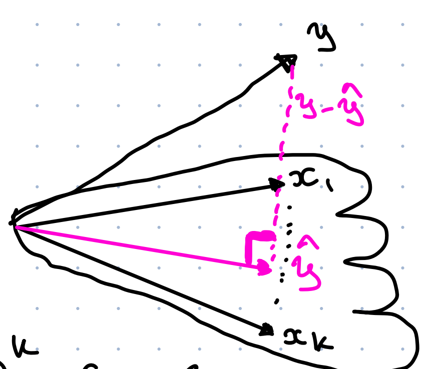
Утв. P - проектор $\Leftrightarrow$ $P^2 = P$

$$P = C^{-1} \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & \\ 0 & & & & \ddots \; 0 \end{pmatrix} C$$ - проектор можно записать в таком виде

↑

сразу стало понятно какие оси занулятся

Упражнение



$\mathbb{R}^k = \operatorname{Span}\{x_1, \dots, x_k\}$

y - цена на кв.

$X = \begin{bmatrix} x_1 & \dots & x_k \end{bmatrix}$

$\hat{y} = w_0 + w_1 x_1 + \dots + w_k x_k$

$\hat{y} = Xw$

$$\begin{pmatrix} \hat{y}_1 \\ \vdots \\ \hat{y}_n \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & \dots & x_{1k} \\ 1 & x_{21} & \dots & x_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{n1} & & x_{nk} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_0 \\ \vdots \\ w_k \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 \perp y - \hat{y} \\ x_2 \perp y - \hat{y} \\ \dots \\ x_k \perp y - \hat{y} \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1^T (y - Xw) = 0 \\ x_2^T (y - Xw) = 0 \\ \dots \\ x_k^T (y - Xw) = 0 \end{cases} \qquad \underbrace{\begin{bmatrix} - & x_1^T & - \\ - & x_2^T & - \\ & \dots & \\ - & x_k^T & - \end{bmatrix}}_{X^T} (y - Xw) = 0$$

$$\langle z, h \rangle = \sum_{i=1}^{n} z_i h_i = z^T h$$

$$X^T (y - Xw) = 0 \qquad X^T y = X^T X w$$

$$w = (X^T X)^{-1} X^T y$$

$$\hat{y} = \underbrace{X (X^T X)^{-1} X^T}_{P} y$$

$$MSE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (\overbrace{\hat{y}_i - y_i}^{\varepsilon_i})^2 \to \min_w \qquad \hat{y} = \mathbb{E}(y \mid X)$$

$$MSE = \frac{\|\varepsilon\|^2}{n} = \frac{\varepsilon^T \varepsilon}{n}$$

Давайте найдём формулу в общем виде:

$U, W \subseteq \mathbb{R}^n \qquad P : V \to V$

$U = \underbrace{\mathrm{Span}\{u_1, \dots, u_k\}}_{\text{базис}} \qquad W = \{ y \in \mathbb{R}^n \mid Ay = 0 \}$

↑ строки лин. нез.

$$\underset{[n \times k]}{B = \begin{bmatrix} u_1 & \dots & u_k \end{bmatrix}} \qquad \underset{[s \times n]}{A}$$

Утверждение

a) $k = s$

б) AB обратима

в) $P = B(AB)^{-1}A$ – общий вид проектора на U вдоль W

Почему $k=s$?

$\dim \operatorname{Im} P + \dim \ker P = n$

$\underset{k}{\underset{s}{rk(A)}} + \dim W$

$\dim U = k$

$rk(A) = s = n - \dim W = k$

Почему AB обратима?

$\underbrace{AB}_{z}x = 0$ если только 0 реш. $\Rightarrow$ обратима

$Az = 0$ $\quad z = Bx$

$z \in W$ $\quad$ это лин. комб. столбцов из B $\quad z \in U$

$$z \in W \cap U$$
$$z = 0$$

$Bx = 0$ столбцы лин. нез. $\Rightarrow x = 0$

Почему формула такая?

$v \in \mathbb{R}^n$

$v = u + w$

$Av = Au + \underbrace{Aw}_{0}$

$Av = Au$

$u = B\alpha$

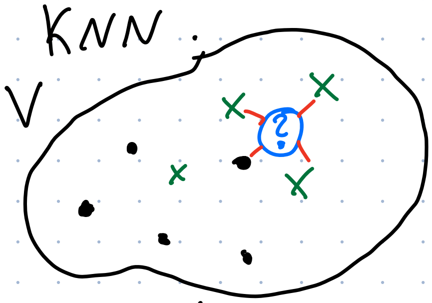
$Av = AB\alpha$

$\alpha = (AB)^{-1}Av$

$u = B(AB)^{-1}Av$

Упражнение

KNN:



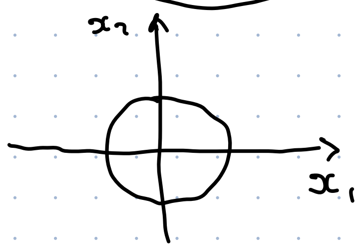
$$\rho(x_i, u) = \sqrt{\sum_{j=1}^{d} (x_{ij} - u_j)^2} = \sqrt{(x_i - u)^T (x_i - u)}$$

Отбираю k ближайших

$$f(x) = \rho^2(x, 0) = \left(\sqrt{x^T x}\right)^2 = \sum x_i^2$$

$d = 2$

$$f(x) = x_1^2 + x_2^2$$



Витя	1.5	80
Петя	2	120

$$(1.5 - 2)^2 + (80 - 120)^2$$

$$0.25 + 1600$$

Разные ед. измерения

Внимание на вес

$$\frac{x_j - \bar{x}_j}{se(x_j)}$$ Standart Scaler

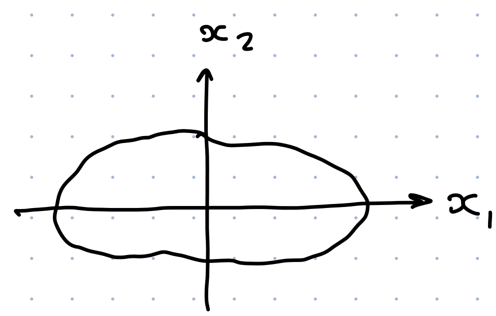
$$\frac{x_j - \min(x_j)}{\max(x_j) - \min(x_j)}$$

$$\rho_w(x_i, u) = \sqrt{\sum_{j=1}^{d} w_j (x_{ij} - u_j)^2}$$

$$f(x) = \rho_w^2(x, 0) = \sum_{j=1}^{d} w_j x_j^2$$

$d = 2$ $\quad w_1 x_1^2 + w_2 x_2^2 = \rho^2$

$$x_1^2 + \frac{w_2}{w_1} x_2^2 = \rho^2 / w_1$$



$\rho_s(x,u) = \sqrt{(x-u)^T S^{-1} (x-u)}$ Расстояние Махалонобиса

$\sqrt{(x_i-u)^T(x_i-u)}$

S – симметричная положит. опр. матрица

$\boxed{S = Q \Lambda Q^T}$ $\quad Q^T Q = I \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$

спектральное разложение $\boxed{\Lambda = Q^T S Q}$ $\quad S = P^T P$

$f_s(x) = \rho_s^2(x,0) = x^T S^{-1} x = x^T P^T P x = \underbrace{(Px)^T Px}_{v^T v}$

P – мн. оператор

$f_s(x) = \rho_s^2(x,0) = x^T Q^T \Lambda^{-1} \underbrace{Qx}_{x'} = (x')^T \Lambda^{-1} x' =$

$= \sum_{j=1}^{d} \frac{x_j'^2}{\lambda_j}$