Дискретные сл. вел.

Опр.

$X : \Omega \to \mathbb{R}$ $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$

$X : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$

сл. величина → дискретные, непрерывная, другие

дискретные: $\Omega \to A \subseteq \mathbb{R}$, A - счётное

непрерывная: A - контин.

X	x_1	$\dots$	x_k
$\mathbb{P}(\dots)$	p_1	$\dots$	p_k

$\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$

Упражнение

X	0	1
$\mathbb{P}(X=k)$	$1/2$	$1/2$

Y	-1	1
$\mathbb{P}(Y=k)$	$2/3$	$1/3$

а) $Z_1 = X + Y$ закон распределения - ?

б) $W = X \cdot Y$

Z	-1	0	1	2
$\mathbb{P}(\dots)$	$2/6$	$2/6$	$1/6$	$1/6$

W	-1	0	1
$\mathbb{P}(\dots)$	$2/6$	$\frac{2}{6}+\frac{1}{6}$	$1/6$

X	Y	$X+Y$	$X \cdot Y$	$\mathbb{P}(X=x, Y=y)$
0	-1	-1	0	$1/2 \cdot 2/3$
0	1	1	0	$1/2 \cdot 1/3$
1	-1	0	-1	$1/2 \cdot 2/3$
1	1	2	1	$1/2 \cdot 1/3$

в) $V = Y^2$

V	1
$\mathbb{P}(\ldots)$	1

X^2	0	1
$\mathbb{P}(\ldots)$	$1/2$	$1/2$

г) Совместное распределение X и Y

(X, Y)

$Y \backslash X$	0	1
-1	$2/6$	$2/6$
1	$1/6$	$1/6$

$$\mathbb{P}(X = x \cap Y = y)$$
$$\shortparallel$$
$$\mathbb{P}(X = x) \cdot \mathbb{P}(Y = y)$$

Опр. Если для событий A и B $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$ тогда соб. наз. независимыми

$$\mathbb{P}(X = x \mid Y = y) = \mathbb{P}(X = x)$$

Опр. Если для сл. вел. X и Y и $\forall x, y$

$$\mathbb{P}(X = x \cap Y = y) = \mathbb{P}(X = x) \cdot \mathbb{P}(Y = y)$$

тогда сл. вел. X и Y независимые

Упражнение

$X \backslash Y$	-1	1
-1	0.4	0.3
1	0.2	0.1

$$\sum_{x,y} \mathbb{P}(X = x, Y = y) = 1$$

← совместное распределение

а) Являются ли X и Y незав. ?

маргинальное распр.-е

X	-1	1
$\mathbb{P}(\dots)$	0.7	0.3

Y	-1	1
$\mathbb{P}(\dots)$	0.6	0.4

формула полной вер-ти

$$\mathbb{P}(Y=1) = \sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}(Y=1 \mid X=i) \cdot \mathbb{P}(X=i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}(Y=1 \cap X=i) = 0.3 + 0.1 = 0.4$$

$$\mathbb{P}(X=-1 \cap Y=-1) \overset{?}{\neq} \mathbb{P}(X=-1) \cdot \mathbb{P}(Y=-1)$$

$$0.4 \neq 0.7 \cdot 0.6$$

$$0.42$$

$\Rightarrow$ сл. вел. зависимые

Если для хотя бы одной клетки нет =
тогда зависимы

„лин. регрессия"

$\mathbb{E}(Y \mid X)$

б) Условное р.-е $Y \mid X=1$

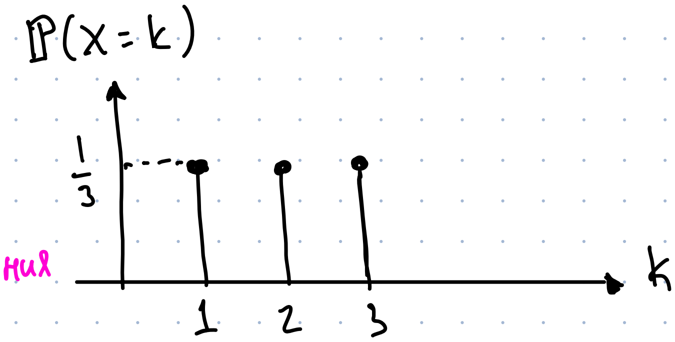
$Y \mid X=1$	1	-1
$\mathbb{P}(Y \mid X=1)$	$\frac{0.1}{0.2+0.1}$	$\frac{0.2}{0.2+0.1}$
	$1/3$	$2/3$

	-1	1
-1	0.4	0.3
1	0.2	0.1

$$\mathbb{P}(Y=1 \mid X=1) = \frac{\mathbb{P}(Y=1 \cap X=1)}{\mathbb{P}(X=1)} = \frac{\mathbb{P}(Y=1 \cap X=1)}{\sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}(X=1 \cap Y=i)}$$

Функция распределения

X	1	2	3
$\mathbb{P}(X=k)$	$1/3$	$1/3$	$1/3$

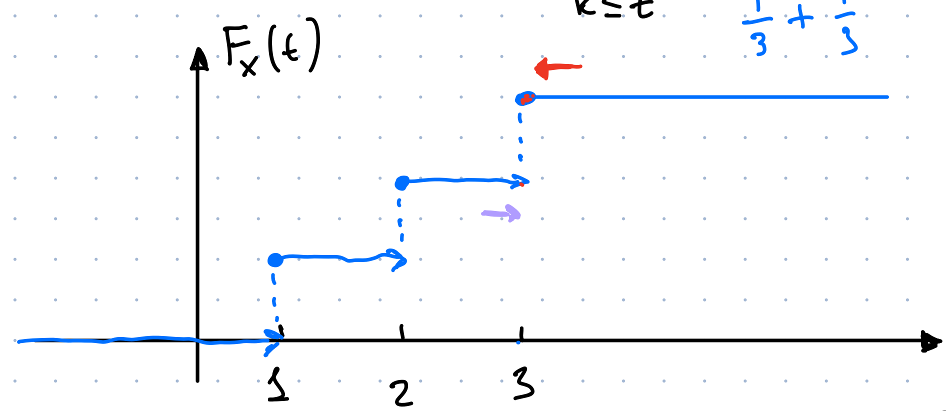


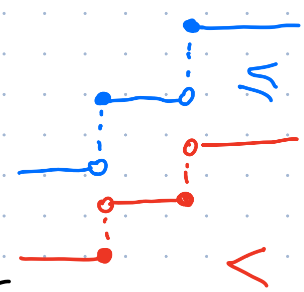
Опр. функция распределения

$$F_X(t) = \mathbb{P}(X \le t) = \sum_{k \le t} \mathbb{P}(X=k)$$

<

$\frac{1}{3} + \frac{1}{3}$





$$\mathbb{P}(X=2) = F(3) - F(2)$$

$$F_X(t) = \begin{cases} 1, & t \ge 3 \\ 2/3, & 2 \le t < 3 \\ 1/3, & 1 \le t < 2 \\ 0, & t < 1 \end{cases}$$

Св-ва:

1) $0 \le F_X(t) \le 1$

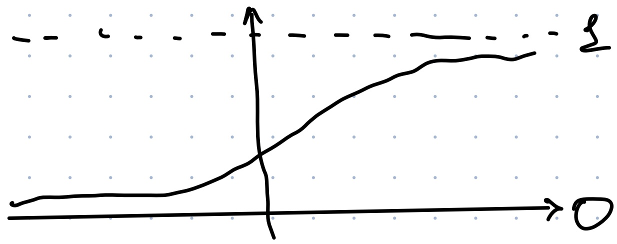
2) $\forall\, t_1 \le t_2 \quad F_X(t_1) \le F_X(t_2)$ ф. не убывает

3) $F_X(t)$ непрерывна справа $\lim\limits_{t \to t_0+} F_X(t) = F_X(t_0)$

$\lim\limits_{t \to t_0-} F_X(t) \ne F_X(t_0)$

4) $\lim\limits_{t \to -\infty} F_X(t) = 0$

$\lim\limits_{t \to +\infty} F_X(t) = 1$



Характеристики сл. вел.

① Математическое ожидание

Лотерея

X	-10 ₽	10 ₽
	$1/2$	$1/2$

Y	-1000	1000
	$1/2$	$1/2$

Z	-10	1000
	$1/2$	$1/2$

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}(X = x_i) \cdot x_i$$

$$\mathbb{E}(X) = -10 \cdot \frac{1}{2} + 10 \cdot \frac{1}{2} = 0 \text{ ₽}$$

$$\mathbb{E}(Y) = 0$$

$$\mathbb{E}(Z) = -10 \cdot \frac{1}{2} + 1000 \cdot \frac{1}{2} = 495$$

Св-ва:

1) $\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$
2) $\mathbb{E}(a \cdot X) = a \cdot \mathbb{E}(X)$
3) X и Y независимые
   $\mathbb{E}(X \cdot Y) = \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y)$

если X и Y зависимые

$$\mathbb{E}(X\cdot Y)=\mathbb{E}(X)\cdot\mathbb{E}(Y)+\mathrm{cov}(X,Y)$$

4) $$\mathbb{E}(\varphi(X))=\sum_{i=1}^{k}\mathbb{P}(X=x_i)\cdot\varphi(x_i)$$

$$\mathbb{E}(X^2)=\underset{₽^2}{(-10)^2}\cdot\frac{1}{2}+\underset{₽^2}{10^2}\cdot\frac{1}{2}=\underset{₽^2}{100}$$

② Дисперсия

$$\mathrm{Var}(X)=\mathbb{E}\left(\left[X-\mathbb{E}(X)\right]^2\right)=\mathbb{E}(X^2)-\mathbb{E}^2(X)$$

$$\mathbb{E}(X-\mathbb{E}(X))=\mathbb{E}(X)-\mathbb{E}(\mathbb{E}(X))=\mathbb{E}(X)-\mathbb{E}(X)=0$$

$$\mathrm{Var}(X)=\sum_{i=1}^{k}\mathbb{P}(X=x_i)\cdot(x_i-\mathbb{E}(X))^2$$

$$\mathrm{Var}(X)=\underset{₽^2}{100}-\underset{₽^2}{0^2}=100\ ₽^2$$

Стандартное отклонение

$$\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{Var}(X)}\qquad ₽$$

Св-ва:

1) $\mathrm{Var}(\mathrm{const})=0$ $\qquad$ $\mathrm{Var}(X)\geq 0$

2) $\mathrm{Var}(a\cdot X)=a^2\cdot\mathrm{Var}(X)$

3) $Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y)$

X, Y — не зав.

4) $Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X,Y)$

X, Y — зав.

Упражнение

мат. ож. дисперсия

$$X_1, X_2, \dots, X_n \sim iid(\mu, \sigma^2)$$

independent
identically
distributed

$\overline{X}_n$

$\|$

$$\mathbb{E}\left(\frac{X_1+\ldots+X_n}{n}\right) = \frac{1}{n}\mathbb{E}(X_1+\ldots+X_n) =$$

$$= \frac{1}{n}\left(\mathbb{E}(X_1)+\ldots+\mathbb{E}(X_n)\right) = \frac{1}{n}(\mu+\ldots+\mu) = \frac{n\cdot\mu}{n} = \mu$$

$$Var\left(\frac{X_1+\ldots+X_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2}\cdot Var(X_1+\ldots+X_n) =$$

$$= \frac{1}{n^2}\left(Var(X_1)+\ldots+Var(X_n)\right) = \frac{1}{n^2}(\sigma^2+\ldots+\sigma^2) = \frac{n\cdot\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}$$

③ Ковариация / корреляция

Опр. $Cov(X,Y) = \mathbb{E}\left([X-\mathbb{E}(X)][Y-\mathbb{E}(Y)]\right) =$

₽ штуки

$$= \mathbb{E}(Y \cdot X) - \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y)$$ Formula !!

$$\mathrm{Corr}(X,Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma(X) \cdot \sigma(Y)} \in [-1; 1]$$

Свойства:

1) $\mathrm{Cov}(X,X) = \mathrm{Var}(X)$

2) $\mathrm{Cov}(\alpha X + \beta Y, Z) = \alpha \cdot \mathrm{Cov}(X, Z) + \beta \cdot \mathrm{Cov}(Y, Z)$

$$\mathrm{Cov}(X+Y, W+U) = \mathrm{Cov}(X,W) + \mathrm{Cov}(X,U) + \mathrm{Cov}(Y,W) + \mathrm{Cov}(Y,U)$$

3) Если X и Y нез. $\Rightarrow$ $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$

В обратную сторону это неверно!

X	-1	0	1
	$1/3$	$1/3$	$1/3$
	p_1		p_2

$Y = X^2$	1	0
	q	$1-q$
	$2/3$	$1/3$

$$\mathbb{E}(X \cdot Y) = \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y)$$

$$-1\cdot 1\cdot p_2\cdot q + \quad 1\cdot 1\cdot p_1\cdot q = (p_1 - p_2)\cdot q$$

$$p_2 q \; - \; p_1 q \; = \; p_1 q - p_2 q$$

$$2p_1 q = 2p_2 q$$

$$p_1 = p_2$$

$\mathbb{E}(X) = 0 \qquad \mathbb{E}(Y) = \frac{2}{3}$

$\mathbb{E}(XY) = -1\cdot 1\cdot 1/3\cdot 2/3 + 1\cdot 1\cdot 1/3\cdot 2/3 = 0$

$$\mathbb{E}(XY) = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m} \mathbb{P}(X = x_i \cap Y = y_j)\cdot x_i y_j$$

$\operatorname{Cov}(X, Y) = 0 \qquad Y = X^2$

зависимые

$Y \quad X$

$Y = w\cdot X \qquad \hat{w} = \frac{\operatorname{Cov}(X,Y)}{\operatorname{Var}(X)} = \operatorname{corr}(X,Y)\cdot \frac{\sigma(Y)}{\sigma(X)}$

$\sigma(Y) = \sigma(X) = 1$

$\hat{w} = \operatorname{corr}(X,Y)$

$\tilde{Y} \quad \tilde{X}$

$Y = \frac{\tilde{Y} - \mathbb{E}(\tilde{Y})}{\sigma(\tilde{Y})} \qquad X = \frac{\tilde{X} - \mathbb{E}(\tilde{X})}{\sigma(\tilde{X})}$

4) Другие характеристики

Опр.

→ медиана $\quad \mathbb{P}(X \leq Med(X)) = \mathbb{P}(X \geq Med(X)) = \frac{1}{2}$

→ квантиль уровня α $\quad \mathbb{P}(X \leq q) = \alpha$

→ мода $\quad Moda(X) = \arg\max_k \mathbb{P}(X = k)$

X	1	2	3
	1/4	1/2	1/4

$Moda(X) = 2$

→ начальный момент порядка k

$$\mathbb{E}(X^k)$$

→ центральный момент порядка k

$$\mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^k)$$

Знаменитые дискретные распределения

1) Распределение Бернулли

$X \sim Bern(p)$

X	0	1
	1-p	p

$\mathbb{E}(X) = p$

$Var(X)\ p(1-p)$

② Биномиальное распределение

$X \sim Bin(p, n)$ кол-во успехов в n испытаниях

$X = X_1 + \ldots + X_n$ $\quad X_1, \ldots, X_n \sim iid\ Bern(p)$

$\mathbb{E}(X) = n \cdot p$

$Var(X) = n \cdot p \cdot (1-p)$

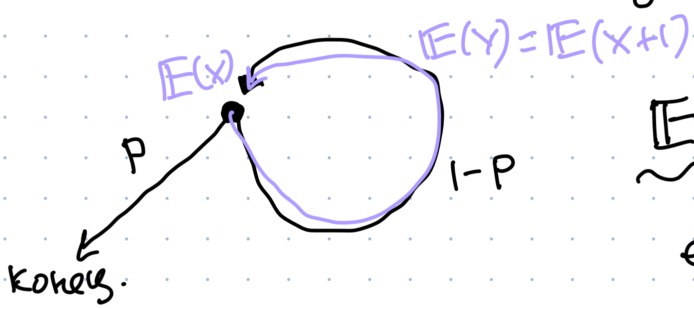
$\mathbb{P}(X = k) = C_n^k \cdot p^k (1-p)^{n-k}$

$n = 10$
$k = 4$

$C_{10}^4 \cdot \frac{1}{2^4} \cdot \frac{1}{2^6}$

③ Геометрическое р-е.

$X \sim Geom(p)$ Подкидываем до $1^{го}$ успеха



$\mathbb{E}(X) = p \cdot 1 + (1-p) \cdot \mathbb{E}(X+1)$

$e = p + (1-p)(e+1)$

$e = p + (1-p) + e - ep$

$pe = 1$

$e = \frac{1}{p}$ $\quad \mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}$

$\mathbb{E}(X^2) = p \cdot 1^2 + (1-p) \cdot \mathbb{E}((X+1)^2)$

$E(X^2) = p + (1-p)(\mathbb{E}(X^2 + 2X + 1))$

$e = p + (1-p) \cdot (e + 2 \cdot \frac{1}{p} + 1)$

$\cancel{e} = \cancel{p} + (\cancel{1}-p)\cancel{e} + 2\frac{(1-p)}{p} + \cancel{(1-p)}$

$e = 2\frac{(1-p)}{p^2} + \frac{1}{p}$

$$Var(X) = \frac{2-2p+p}{p^2} - \left(\frac{1}{p}\right)^2 = \frac{1-p}{p^2}$$

$$\mathbb{P}(X=k) = p \cdot (1-p)^{k-1}$$

④ Распределение Пуассона

$$X \sim Poiss(\lambda) \qquad \mathbb{P}(X=k) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^k}{k!}$$

$p \to 0$

$n \to \infty$

$pn \to \lambda$

$$\mathbb{E}(X) = \lambda$$

$$Var(X) = \lambda$$

$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ p \to 0}} Bin(n,p) = Poiss(\lambda)$$