Problema NP-Completo

Francisco Vicente Suárez Bellón

1 Enunciado

En el pueblo de Villazarcillo el alcalde en su plan para mejorar la calidad de vida de sus habitantes ha elaborado un programa donde a cada Hombre,Mujer,Perro del pueblo serán emparejados, ningun ser que este en un emparejamiento x puede estar en un emparejamiento y $y! = x$ Para ello se crearon las siguientes reglas:

- Cada Perro describia con que pareja de (H, M) desea estar. (Análogo en Mujeres y Hombres).
- Un submatching es un conjunto de m,h,p de todos los posibles trios.
- Un matching es un submatching de tamaño n.
- Un (Sub)Matching es **estable** si no tiene trios bloqueantes (Un perro, mujer, hombre que se prefieren mutuamente en vez del lugar asignado actualmente).
- La cantidad de perros,mujeres y hombres en el programa será exactamente iguales.

Despues de realizadas las incripciones el alcalde quiere conocer si es posible tener un matching perfecto.

Análisis del problema

El trata sobre un problema de decisión en cada triplo a escoger, osea para cada elemento del conjunto de Perros, Mujeres y Hombres se tiene que satisfacer que todos ellos estén en algún triplo. Además la decisión de poner un triplo en la supuesta solución puede afectar a la elección de otro haciendo insatisfacible si se toma esa elección y no habiendo a simple vista ninguna solución a ello.

La características del problema llevan a pensar que este es de naturaleza NP-Completo, además de su similitud con el problema de 3-Dimensional Matching (del cual se usará para esta demostración).

α_1	$\beta_1\delta_2$	$\beta_1\delta_1$	$\beta_2\delta_2$	$\beta_2\delta_1$
α_2	$\beta_2\delta_2$	$\beta_1\delta_1$	$\beta_2\delta_1$	$\beta_1\delta_2$
β_1	$\alpha_2\delta_1$	$\alpha_1\delta_2$	$\alpha_1\delta_1$	$\alpha_2\delta_2$
β_2	$\alpha_2\delta_1$	$\alpha_1\delta_1$	$\alpha_2\delta_2$	$\alpha_1\delta_2$
δ_1	$\alpha_1\beta_2$	$\alpha_1\beta_1$	$\alpha_2\beta_1$	$\alpha_2\beta_2$
δ_2	$\alpha_1\beta_1$	$\alpha_2\beta_2$	$\alpha_1\beta_2$	$\alpha_2\beta_1$

Posibles emparejamiento	Triplo desestabilizador
$\alpha_1\beta_1\delta_1$, $\alpha_2\beta_2\delta_2$	$\alpha_1\beta_1\delta_2$
$\alpha_1\beta_1\delta_2$, $\alpha_2\beta_2\delta_1$	$\alpha_2\beta_1\delta_1$
$\alpha_1\beta_2\delta_1$, $\alpha_2\beta_1\delta_2$	$\alpha_1\beta_1\delta_2$
$\alpha_1\beta_2\delta_2$, $\alpha_2\beta_1\delta_1$	$\alpha_2\beta_2\delta_2$

Table 1: Instancia del problema para el cual no existe un emparejamiento estable

Reduccion desde 3DM

Una instancia de 3DM involucra tres conjuntos finitos de igual cardinalidad, que denotamos como A_0, B_0, y D_0, relacionándolos con A, B, y D de 3GSM.

Dado un conjunto de tripletas $T_0 \subseteq A_0 \times B_0 \times D_0$, el problema 3DM es decidir si existe un $M_0 \subseteq T_0$ tal que M_0 es una coincidencia completa, es decir, cada elemento de A_0, B_0, y D_0 aparece exactamente una vez en M_0.

Dada una instancia de 3DM I', construimos una instancia correspondiente de 3GSM I. Aunque nuestra construcción puede adaptarse para funcionar con cualquier instancia de 3DM en general, asumiremos, para simplificar la presentación, que ningún elemento de A_0, B_0 o D_0 aparece en más de tres tripletas de T_0. Esta suposición se hace sin pérdida de generalidad.

Construimos I construyendo primero un "marco" que consiste en los elementos $\alpha_1, \alpha_2 \in A$, $\beta_1, \beta_2 \in B$, y $\delta_1, \delta_2 \in D$. Las preferencias de estos elementos no dependen de la estructura de I' y se muestran en la Figura 2. En la Figura 2 y en las figuras posteriores, solo nos interesamos en los roles desempeñados por unos pocos elementos en cada lista de preferencias. Por lo tanto, usamos la notación Π_{Rem} para denotar cualquier permutación fija pero arbitraria de los elementos restantes.

Demostraremos más adelante en el Lema 2 que los triples $\alpha_1\beta_1\delta_1$ $\alpha_2\beta_2\delta_2$ deben estar incluidos en cualquier matrimonio estable. Ha de notarse que $\alpha_1\beta_1\delta_1$ es la parte más débil en tal matrimonio porque representa la pareja menos preferida tanto para β_1 como para δ_1. Entonces, si cualquier elemento $a \in A$ esta emparejado con una pareja que prefiere menos $\beta_1\delta_1$ por lo tanto convierte a $a\beta_1\delta_1$ es una tripleta desestabilizadora.

La observación anterior nos da una estrategia que utiliza el par $\beta_1\delta_1$ como un "Límite" en las preferencias de los elementos restantes de A. Una condición necesaria para un matrimonio estable en I es qe todos los elementos restantes

Table 2: Preferencias de los elementos $\alpha_1\alpha_2\beta_1\beta_2\delta_1\delta_2$

α_1	$\beta_1\delta_1$	$\beta_2\delta_1$	$\beta_1\delta_2$	$\dots$	Π_{Rem}	$\dots$	
α_2	$\beta_2\delta_2$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	Π_{Rem}	$\dots$	
$\dots$							
β_1	$\alpha_1\delta_2$	$\dots$			Π_{Rem}	$\dots$	$\alpha_1\delta_1$
β_2	$\alpha_2\delta_1$	$\alpha_1\delta_1$	$\dots$		Π_{Rem}	$\dots$	
$\dots$							
δ_1	$\alpha_1\beta_2$	$\dots$			Π_{Rem}	$\alpha_1\beta_1$	
δ_2	$\alpha_1\beta_1$	$\alpha_2\beta_2$	$\dots$		Π_{Rem}		
$\dots$							

de A deben emparejarse con paraes ubicados a la izquierda del límite, es decir, $\geq \beta_1\delta_1$. Usando información de T_0 para construir el conjunto de elementos que deben posicionarse a la izquierda del límite, aseguramos que esta condición para un matrimonio estable solo puede cumplirse si T_0 contiene un emparejamiento completo. La dificultad restante es asegurar que todos los elementos de A se emperejen a la izquierda del límite es suficiente para obtener un matrimonio estable. Antes de dar detalles de la construcción que proporciona la solución, primero probamos los lemas que establecen las propiedades del marco.

1.1 Lema 1:

Si existe un matrimonio estable M para I construido extendiendo el marco de la Figura 2, entonces $\alpha_1\beta_1\delta_1 \notin M$.

Demostración: Supongamos que $\alpha_1\beta_2\delta_1 \in M$. Dado $\alpha_1\beta_2\delta_1 \in M$ la pareja de δ_2 no puede ser $\alpha_1\beta_1 \vee \alpha_2\beta_2$. Como se tiene δ_2 entonces $\alpha_1\beta_1$ es la única pareja en δ_2 es $\delta_2\beta_2$. Entonces $\alpha_2\beta_2$ es la posible pareja de δ_2 en M. Además $\alpha_2\beta_2$ son las primeras opciones de α_2 y β_2 respectivamente. Por lo tanto $\alpha_2\beta_2\delta_2$ es un triple desestabilizador en M es una contradicción.

1.2 Lema 2:

Si existe un matrimonio estable M para I construido extendiendo el marco de la Figura 2, entonces $\alpha_2\beta_1\delta_1 \wedge \alpha_2\beta_2\delta_2 \in M$

Demostración: Primero probamos $\alpha_1\beta_1\delta_1 \in M$. Supongamos que β_1 no está empearejado con $\alpha_1\delta_1 \in M$, entonces podemos encontrar un triple desestabilizador para M. Existen dos posibles casos:

1.2.1 Caso 1:

β_1 esta emperejado con $\alpha_1\beta_2 in M$ implica que $\alpha_2\beta_2\delta_2$, $\alpha_1\beta_1\delta_1$ y $\alpha_1\beta_2\delta_1 \notin M$. Por un argumento similar al del Lema 1 $\alpha_1\beta_2\delta_1$ es un triple desestabilizador.

1.2.2 Caso 2:

β_1 no está emparejado con $\alpha_1\delta_1$ ni con $\alpha_1\delta_1$ $\alpha_1\beta_2\delta_1 \notin M$ por el Lema 1. Además $\alpha_1\beta_1\delta_1 \notin M$ lo que implica que $\alpha_1\beta_1\delta_2$ es un triple desestabilizador en este caso.

1.2.3 Conclusiones:

Por lo tanto, concluimos que $\alpha_1\beta_1\delta_1 \in M$, lo que implica que $\alpha_1\beta_1\delta_2 \notin M$. Ahora es fácil verificar que si $\alpha_2\beta_2\delta_2 \notin M$, entonces es un triple desestabilizador.

Si los conjuntos de I_0 (A_0, B_0, C_0) tienen cada uno k elementos, entonces los conjuntos de I (A, B, C) tienen cada uno $3k+2$ elementos. Los α_s, β_s, δ_s que están en el marco, representan dos elementos. Los restantes $3k$ elementos se definen de la siguiente manera.
Supongamos que $A_0 = a_1, a_2, \ldots, a_k$, $B_0 = b_1, b_2, \ldots, b_k$ y $D_0 = d_1, d_2 \ldots, d_k$. Según una suposición anterior, cada elemento $a_i \in A_0$ aparece en no más de tres triples de T_0. Clonamos tres copias de a_i y remplazamos a_i con los clones $a_1[1], a_i[2], a_i[3]$en A. Las preferencias de estos clones se establecen para permitir que exactamente uno de sus emparejamientos en un matrimonio estable corresponda a un triple en T_0.

Para evitar que los dos clones restantes interfieran con la configuración anterior, añadimos los elementos w_{a_i}, y_{a_i} a B y x_a, z_a a D. En un matrimonio estable, los pares w_{a_i}, y_{a_i} y y_a, deben emparejarse con dos de los clones de $a_i$dejándolos fuera de acción. Completamos los conjuntos B y D añadiendo a ellos los elementos de B_0 y D_0 respectivamente. Resumiendo $A = \{\alpha_1, \alpha_2\} \cup \bigcup_{a_i \in A_0} \{a_i[1], a_i[2], a_i[3]\}$, $B = B_0 \cup \{\beta_1, \beta_2\} \cup \bigcup_{a_i \in A_0} \{w_{a_i}, y_{a_i}\}$ y $D = D_0 \cup \{\delta_1, \delta_2\} \cup \bigcup_{a_i \in A_0} \{x_{a_i}, z_{a_i}\}$.

Dado que $a_i b_{j_1} d_{l_1}, a_i b_{j_2} d_{l_2}$ y $a_i B_{j_3} d_{l_3}$ son los triples que contienen a_i en T_0 las preferencias en la Figura 3 logran los objetivos descritos anteriormente. Cuando existen menos de tres triples que contienen ai, igualamos dos o más de las j y las l.

1.3 Lema 3:

Este lema establece los roles de w_{a_i},x_{a_i},y_{a_i},z_{a_i}.

Si existe un matrimonio M estable para I construido con las preferencias mostradas en la Figura 3, entonces para cada $a_i \in A_0$ existen $j_1, j_2 \in 1, 2, 3$; $j_1 \neq j_2$ tal que:

1. $a_1[j_1]w_a, x_{a_i} \in M$
2. $a_i[j_2]y_{a_i}z_{a_i} \in M$

Demostración: Considera el triplo $a_1[j_1]w_a, x_{a_i}$ el cual representa la tercera opción preferida de x_{a_i} y las primeras opciones preferidas de $a_i[1]$ y w_{a_i}. Se convierte en un triplo desestabilizador a menos que x_{a_i} se empareje con una de sus tres primeras opciones preferidas, probando la parte 1 del lema.

α_1						
α_2						
$\vdots$						
$a_i[1]$	$w_{a_i}x_{a_i}$	$y_{a_i}z_{a_i}$	$b_{j_1}d_{l_1}$	$\beta_1\delta_1$	$\cdots$	Π_{Rem}
$a_i[2]$	$w_{a_i}x_{a_i}$	$y_{a_i}z_{a_i}$	$b_{j_2}d_{l_2}$	$\beta_1\delta_1$	$\cdots$	Π_{Rem}
$a_i[3]$	$w_{a_i}x_{a_i}$	$y_{a_i}z_{a_i}$	$b_{j_3}d_{l_3}$	$\beta_1\delta_1$	$\cdots$	Π_{Rem}
$\vdots$						
β_1						
β_2						
$\vdots$						
w_a	$a_i[1]x_{a_i}$	$a_i[2]x_{a_i}$	$a_i[3]x_{a_i}$	$\cdots$		Π_{Rem}
y_a	$a_i[1]z_{a_i}$	$a_i[2]z_{a_i}$	$a_i[3]z_{a_i}$	$\cdots$		Π_{Rem}
$\vdots$						
b_i		$\cdots$				Π_{Rem}
$\vdots$						
δ_1						
δ_2						
$\vdots$						
x_a	$a_i[3]w_{a_i}$	$a_i[2]w_{a_i}$	$a_i[1]w_{a_i}$	$\cdots$		Π_{Rem}
z_a	$a_i[3]y_{a_i}$	$a_i[2]y_{a_i}$	$a_i[1]y_{a_i}$	$\cdots$		Π_{Rem}
$\vdots$						
d_i		$\cdots$				Π_{Rem}
$\vdots$						

Table 3: Preferencias en la instancia I. La columna de los $\beta_1\delta_1$ representa los límites. Las preferencias de los α,β y δ están mostradas en la tabla anterior.

De manera similar z_{a_i} debe emparejarse con una de sus tres primeras opciones preferidas. De lo contrario,$y_{a_i}z_{a_i}$ forma un triplo desestabilizador con $a_i[1] \vee a_i[2]$ dependiendo de cuál de los clones de a_i esté emparejado en la parte 1.

Ahora estamos listos para probar la NP-completitud de 3GSM mostrando que I tiene un matrimonio estable si y solo si T_0 tiene un emparejamiento completo de I_0.

1.4 Teorema 1:

Si T_0 contiene un emparejamiento completo M_0 de la instancia 3DM I_0, entonces la instancia 3GSM construida I tiene un matrimonio estable M.

Mostramos que es posible construir un matrimonio estable M. Comenzamos agregando $\alpha_1\beta_1\delta_1$ y $\alpha_2\beta_2\delta_2$ a M.

Por cada elemento de $a_i \in A_0$, los únicos triplos en T_0 que contienen a_i son $a_ib_{j_1}d_{l_1}$, $a_ib_{j_2}d_{l_2}$ y $a_ib_{j_3}d_{l_3}$ usando las notaciones descritas en la tabla anterior. Uno de esos triplos esta en M_0.

Añadir a M si:

- $a_i[1]b_{j_1}d_{l_1}$, $a_1[2]w_{a_i}x_{a_i}$, $a_i[3]y_{a_i}z_{a_i}$ If: $a_ib_{j_1}d_{l_1} \in M_0$
- $a_i[1]w_{j_i}x_{a_i}$, $a_1[2]b_{j_2}d_{l_2}$, $a_i[3]y_{a_i}z_{a_i}$ If: $a_ib_{j_2}d_{l_2} \in M_0$
- $a_i[1]w_{a_i}x_{a_i}$, $a_1[2]y_{a_i}z_{a_i}$, $a_i[3]b_{j_3}d_{l_3}$ If: $a_ib_{j_3}d_{l_3} \in M_0$

Dado que M_0 es un emparejamiento completo, la construcción anterior garantiza que los elementos de B y D que se originan de B_0 y D_0 se usen exactamente una vez en M. Es fácil verificar que todos los demás elementos de A, B y D también se usan exactamente una vez. Por lo tanto,M es un matrimonio.

Para demostrar que M es estable, es suficiente mostrar que ningún elemento de A es un componente de un triplo desestabilizador. α_1 y α_2 satisfacen esta condición de inmediato porque están emparejados con sus primeras opciones de preferencia.

Refiriéndose a la Figura 3, cada uno de los elementos restantes de A está emparejado con un par ubicado a la izquierda del límite. Por lo tanto, los únicos pares que pueden formar triplos desestabilizadores son $w_{a_i}x_{a_i}$ y $y_{a_i}z_{a_i}$. Sin embargo, el emparejamiento de los w_{a_i} (y_{a_i}) es una de sus tres primeras opciones de preferencia. Estas tres opciones están en orden inverso exacto a las de x_{a_i} (z_{a_i}). Esto elimina a w_{a_i} y y_{a_i} de participar en cualquier triplo desestabilizador.

1.5 Teorema 2:

Si la instancia 3GSM I tiene un matrimonio estable, entonces T_0 contiene un emparejamiento completo de la instancia 3DM I_0. **Demostración:** Supongamos que I tiene un matrimonio estable M. El Lema 2 requiere que M incluya a $\alpha_1\beta_1\delta_1$ y $\alpha_2\beta_2\delta_2$. El Lema 3 requiere que, para cada $a_i \in A_0$, dos de los clones de a_i se emparejen con $w_{a_i}x_{a_i}$ y $y_{a_i}z_{a_i}$. Sea M_0 el emparejamiento que resulta cuando M se restringe a los elementos restantes que no tienen emparejamientos predeterminados.

Para cada ai en $a_i \in A_0$, solo queda un clon de a_i por emparejar en M_0. Por lo tanto, eliminaremos la distinción entre un clon de a_i y el a_i que representa, sin el riesgo de introducir ninguna ambigüedad en M_0. Los elementos que participan en M_0 pueden caracterizarse como exactamente aquellos elementos de A_0, B_0 y D_0. Dado que M_0 es un subconjunto de un matrimonio,representa un emparejamiento completo.

Debido a la ausencia de tríos desestabilizadores, cada a_i en M_0 debe emparejarse con una opción de preferencia ubicada a la izquierda del límite. La construcción de I, como se ilustra en la Figura 3, restringe esta opción al tercer elemento de la lista de preferencias, ya que los dos primeros elementos ya están emparejados. Además, el triplo formado por a_i y este elemento está contenido en T_0. Por lo tanto, cada trío en M_0 también es un trío en T_0, y M_0 es el emparejamiento completo deseado contenido en T_0.

1.6 Conclusión de la demostración:

Es fácil verificar que la construcción de I a partir de I_0 se puede llevar a cabo dentro de un límite de tiempo polinómico. Por lo tanto, los Teoremas 1 y 2 establecen que 3GSM es NP-duro. También es posible verificar la estabilidad de un matrimonio dado en tiempo polinómico, estableciendo así la pertenencia de 3GSM a NP.

Por lo tanto el problema es NP-completo