Descripcion del problema

Sean los conjuntos X Y Z: - $X \cap Y \cap W = \emptyset$

- $|X| = |Y| = |W| = q$ Sea $M \subseteq W$ x X x Y

Existe un matching en M Osea $\exists M^``\subseteq M$ tal que: - $\left|M^{`}\right|=q$ - $\forall a \in W \cup X \cup Y$ $a$ esta en alguna terceta de $M^``$ sin repetir ninguno.

INsertar ejemplo

Pasos a realizar:

- Demostrar que 3-DM es NP
- Seleccionar un problema NP-Completo para reducirlo (En este caso 3-Sat)
  - Demostrar que dicha transformacion es en tiempo polinomial

3-DM es NP:

Dada una instancia(M, X, Y, W) del 3-DM se construye un algoritmo no determinista que genere una solución de $|W|$ tercetas de M y compruebe en tiempo polinomial que no hay dos tercetas con elementos comunes.

Reducir:

- 3 SATISFABILITY (3SAT)
  - Instancia:
    - Conjunto de m cláusulas C = {c1, ..., cm}
      - $|c_i|$ = 3 , 1 ≤ i ≤ m
    - Sobre un conjunto finito de n variables booleanas
      - $U = u_1, ..., u_n$
- Pregunta: Existe aluna asignación válida de U que satisfaga todas las cláusulas de C. #### Notación

3-Sat	3-DM
Variables: $u_1 ... u_n$	Variables: $u_i(j)$,$b_i(j)$, $S_x(j)$, $G_y(j)$
Literales: u_1 $\neg u_1$	Variables: u_i , $\neg u_i(j)$
Cláusulas:$C_j = (u_1, \neg u_2, u_3)$	Tercetas $C_j\{(u_1(j), S_x(j), S_y(j)), (\neg u_2(j), S_x(j), S_y(j)), (u_3, S_x(j), S_y(j))\}$

Construcción de los componentes:

La demostración se basa en la construcción de tres tipos de componentes: - Componentes de *asignación* - Componentes de *satisfacción* - Componentes de *recolección*

Componentes de asignación:

- Para cada variable $u_i \in U$ se introduce una componente T_i.
  - T_i depende del número de cláusulas m de C
- Estructura de T_i:
  - Elementos internos:
    - ai [j] ∈ X, 1 ≤ j ≤ m ; bi [j] ∈ Y, 1 ≤ j ≤ m
      - No van a pertenecer a otras tercetas de otro Ti
  - Elementos externos:
    - ui [j] , ¬ui [j] ∈ W, 1 ≤ j ≤ m

- Pueden pertenecer a otras tercetas Nota: El literal u_i en 3SAT puede ser usado en varias cláusulas, en el 3-DM debemos tener muchas m copias de u_i.

Insertar diagrama

Insertar diagramas explicativos

Componentes de satisfacción:
- Para cada cláusula cj ∈ C introducimos una componente Cj.
- Estructura:
  - Elementos Internos: sx [j] ∈ X, sy [j] ∈ Y : 1 ≤ j ≤ m
  - Elementos externos: ui [j] , ⌐ui [j] ∈ W : 1 ≤ i ≤ n;1 ≤ j ≤ m
- Cj = {(ui [j], sx [j], sy [j]): si el literal ui ∈ cj} U {(⌐ui [j], sx [j], sy [j]): si el literal ⌐ui ∈ cj}

INsertar diagrama

Cualquier matching $M^{`}\subseteq M$ debe contener una terceta de C_j para emparejar los elementos internos $S_x[j]$ y $S_y[j]$: - Sx [j] y Sy [j] pueden ser emparejados, sí sólo sí, al menos uno de los literales (ui) de cj no ha sido emparejado en alguna componente "Truth seeting" Ti (Ti ∩ M') - Si tenemos una 3SAT-Instancia satisfacible, entonces las variables Sx[j] y Sy[j] pueden ser emparejadas - Si tenemos una 3SAT-Instancia no satisfacible, entonces las variables Sx[j] y Sy[j] no pueden ser emparejadas.

Componente de recolección:

Hay muchos$u_i[j]$ que no se emparejan con componentes de *asignación* ni con componentes de *satisfacción*

- Hay $m \times n$ variables u sin emparejar después de calcular las tercetas de asignación.
- Si todas las m cláusulas se satisfacen se han emparejado m variables.
- Finalmente quedan sin emparejar $(m \times n) - m = m(n-1)$

Se introduce $m(n-1)$ variables nuevas: - $g_x[k] \in X$, $g_y[k] \in Y : 1 \leq k \leq m(n-1)$

Cada pareja $(g_x[k], g_y[k])$ se enlazará con una única variable $u_i[j]$ o $\neg u_i[j]$ que no estén en las tercetas que se han formado con las componentes anteriores:

Insertar imagen

Resumiendo:

- $W = \{u_i[j], \neg u_i[j] : 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$
- $X = A \cup S_x \cup G_x$ $(2mn)$
  - $A = \{a_i[j] : 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$
  - $S_x = \{s_x[j] : 1 \leq j \leq m\}$
  - $G_x = \{g_x[j] : 1 \leq j \leq m(n-1)\}$
- $Y = B \cap S_y \cup G_y$ $(2mn)$
  - $B = \{b_i[j] : 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$
  - $S_y = \left\{s_y[j] : 1 \leq j \leq m\right\}$
  - $G_y = \left\{g_y[j] : 1 \leq j \leq m(n-1)\right\}$ $M = (\cup)$

Insertar formualq que dice a que es igual M

Significado	Enumeración
Cantidad de variables en $< U, C >$	n
Cantidad de clausulas en $< U, C >$	m
Cantidad de componentes de *asignación* triple en M	$2mn$
Cantidad de componentes de *asignación* triple en $M^`$	mn
Cantidad de componentes de *satisfacción* triple en M	$3m$
Cantidad de componentes de *satisfacción* triple en $M^`$	m
Cantidad de componentes *recolección* en M	$2m^2n(n-1)$
Cantidad de componentes *recolección* en $M^`$	$m(n-1)$
Cardinalidad del emparejamiento perfecto	$2mn$
Cardinalidad de M	$2mn = 3m = 2m^2n(n-1)$

Insertar tabla ejemplo

- Se ha observado que las tercetas resultantes M son el producto cartesiano de $W \times X \times Y$
- Esta forma de definir las tercetas:
  - Desde su definición en términos de una instancia (U,C) del 3SAT
  - M se construye en tiempo polinomial.

Demostrar que si M contiene un matching $M^`$ ssi (U,C) es satisfacible

Si (U,C) es satisfacible entonces $M^{`}\subset M$ es un matching

- Sea $t : U$ —->$\{T, F\}$ EL dominio de valores para U que satisface las cláusulas C.
- Se construye un matching $M^{`}\subseteq M$ del modo siguiente:
  - $Z_j \in \{u_i, \neg u_i; 1 \leq i \leq n\} \cap c_j$
    - Literales con asignación verdadera.
    - Debe de existir al menos uno, ya que t satisface a c_j.
- Se construye la $M^`$: - Insertar la formula - $G^`:$ conjunto de $m(n-1)$ tercetas de g que incluyen: - todos los $g_x[k] \in X$, $g_y[k] \in Y$ - Y los $u_i[j] \in, \neg u_i[j] \in W$ que no se han emparejado.
  - Es fácil de verificar que siempre se puede construir un $G^`$ para que el resultado del conjunto $M^`$ sea un matching. ## Si $M^{`}\subseteq M$ es un matching entonces (U, C) es satisfacible.
- Se ha visto que para cada $u_i \in U$, $M^`$ incluía exactamente m tercetas de $T_i : T_i^t \vee T_i^f$
- Sea $t : U$ –> T, F donde $t(u_i)$ =$ $T ssi M^`\cap T_{i}=T_{i}^{t}$
  - t será una asignación correcta que satisface C.
- Consideremos una cláusula arbitraria $c_j \in C$
  - Para cubrir los elementos internos de la componente C_j:
    - Se necesita al menos una terceta de C_j contenida en $M ^`$
    - Esta terceta contiene un literal de $c_j \in C$, que no estará en $M^{`}\cap T_{i}$
- Como $t(u_i) = T$ *ssi* $M^{`}\cap T_{i}=T_{i}^{t}$
  - Entonces t satisface la cláusula c_j
- Si todas las cláusulas $c_j \in C$ se satisfacen:
  - (U, C) es satisfacible.