

# Ejercicios de cálculo, de orientación y divergentes utilizados en los contenidos de Geometría Analítica

## *Exercises in calculus, orientation, and divergence used in the contents of Analytic Geometry*

Roxana Cabrera Puig<sup>1\*</sup>, Alicia Robbio Marrero<sup>2</sup>

**Resumen** En la metodología de la enseñanza de la Matemática, una de las líneas directrices fundamentales es el tratamiento de los contenidos geométricos para fijar las ideas esenciales de los conceptos y que se puedan demostrar, inferir y establecer analogías, lo que favorece la resolución de problemas matemáticos donde los medios de cómputo sirvan de apoyo para una mejor visualización del contenido que se aborda. Es por ello que, desde las clases se recomienda impulsar el empleo del *Geogebra* como software dinámico para la comprensión de definiciones y teoremas, como una perspectiva novedosa para adquirir el nuevo conocimiento. El objetivo del trabajo es presentar ejercicios de orientación, cálculo y divergentes que han contribuido a visualizar e investigar los objetos geométricos, así como su representación algebraica mediante las propiedades que lo conforman y que potencian la solidez de conceptos estudiados en la búsqueda de vías o estrategias para la realización de demostraciones sencillas. La propuesta ha sido utilizada en primer año de la carrera de Licenciatura en Matemática con resultados favorables en su aplicación en las clases prácticas de la asignatura.

**Palabras Clave:** ejercicios, Geogebra, geometría.

**Abstract** *In the methodology of Mathematics teaching, one of the fundamental guidelines is the treatment of geometric contents to fix the essential ideas of the concepts and that they can be demonstrated, inferred and establish analogies, which facilitates the resolution of mathematical problems where the computing resources support a better visualization of the content that is being addressed. That is why, from the classes, it is recommended to promote the use of Geogebra as dynamic software for the understanding of definitions and theorems, as a new perspective to acquire new knowledge. The aim of this work is to present orientation, calculation and divergent exercises that have contributed to visualize and investigate geometric objects, as well as their algebraic representation by means of the properties that conform them and that enhance the solidity of concepts studied in the search for ways or strategies for the realization of simple demonstrations. The proposal has been used in the first year of the Bachelor's Degree in Mathematics with favorable results in its application in the practical classes of the subject.*

**Keywords:** exercises, Geogebra, geometry.

**Mathematics Subject Classification:** 97D40, 97G70, 97C70.

<sup>1</sup>Departamento de Matemática, Facultad de Matemática y Computación, Universidad de La Habana, La Habana, Cuba. Email: [roxana.cabrera@matcom.uh.cu](mailto:roxana.cabrera@matcom.uh.cu).

<sup>2</sup>Departamento de Matemática, Facultad de Matemática y Computación, Universidad de La Habana, La Habana, Cuba. Email: [alicia.rob主io@matcom.uh.cu](mailto:alicia.rob主io@matcom.uh.cu).

\*Autor para Correspondencia (*Corresponding Author*)

**Editado por (Edited by):** Damian Valdés Santiago, Facultad de Matemática y Computación, Universidad de La Habana, La Habana, Cuba.

**Maquetado por (Layout by):** Lázaro Daniel González Martínez, Facultad de Matemática y Computación, Universidad de La Habana, La Habana, Cuba.

**Citar como:** Cabrera Puig, R., & Robbio Marrero, A. (2024). Ejercicios de cálculo, de orientación y divergentes utilizados en los contenidos de Geometría Analítica. *Ciencias Matemáticas*, 37(1), 1–7. DOI: <https://doi.org/10.5281/zenodo.14252295>. Recuperado a partir de <https://revistas.uh.cu/rcm/article/view/9477>.

## Introducción

La asignatura Geometría Analítica está conformada por tres temas y asegura, en la Carrera de Matemática, los contenidos de las asignaturas que conforman la disciplina Topología y Geometría, por lo que, en el primer año, apoya de forma gráfica y analítica los conceptos fundamentales y las nociones básicas que deben adquirir los educandos para ir desarrollando las destrezas de aprendizaje.

La utilización e inserción de las Tecnologías de la Información y las Comunicaciones en los contenidos de la asignatura ha traído nuevas formas de afrontar el aprendizaje, la concepción de cómo impartir los contenidos matemáticos obliga a elevar la preparación metodológica de los docentes [4]. En la actualidad, dentro de los softwares dinámicos que apoyan el aprendizaje se puede mencionar *Geogebra*, ya que, desde su soporte gráfico y algebraico, permite describir la resolución de problemas que se presentan en los temas que conforman la asignatura.

Es necesario elevar el trabajo intelectual para lograr mayor disposición del razonamiento lógico, con el fin de orientar la clase hacia el debate, el análisis de diversas vías de solución de un problema y la realización de posibles generalizaciones [1]. De ahí que, los educadores centren la atención en actividades donde los educandos puedan obtener información y procesar el conocimiento que necesitan para la solución de las tareas propuestas en los contenidos de enseñanza. De esta manera pueden resolver problemas prácticos con el uso de variados enfoques.

Entre las variantes que pudieran utilizarse para promover que los estudiantes investiguen, expongan y discutan la utilización de modelos matemáticos están los ejercicios de orientación, de cálculo y divergentes [2]. Estos contribuyen a la formación de hábitos de trabajo independiente, donde los educandos sean capaces de extraer conclusiones, hacer recomendaciones bien fundamentadas y que al analizar un problema puedan orientarse en las posibles vías y métodos de solución.

De ahí que, se coincida con [6] en que resulta necesario educar a los alumnos en el saber diferenciar los aspectos principales de los secundarios, distinguir las analogías que existen entre diversos conceptos matemáticos estudiados, puedan realizar demostraciones sencillas que ayuden en la comprensión de un número de definiciones y teoremas; en suma, que en cada actividad docente quede bien claro qué es lo que se hace, por qué se hace y cómo se hace.

## Relevancia del estudio

El tratamiento didáctico de contenidos geométricos, donde las tecnologías sirvan de apoyo en las clases, propiciará una mayor solidez de los conocimientos. El empleo de los ejercicios de orientación, cálculo y divergentes con el software dinámico *Geogebra* contribuirá a visualizar, investigar los objetos geométricos y su representación algebraica, así como la realización de demostraciones a partir de las propiedades

de los objetos matemáticos estudiados. Los resultados que se presentan indican que en la medida que se inserten en el proceso de enseñanza y aprendizaje será mayor la adquisición de conocimientos y se elevará la comprensión de definiciones y teoremas desde una óptica más novedosa.

## 1. Desarrollo

El importante papel que ofrece la visualización en el aprendizaje matemático contribuye de manera detallada a la comprensión de conocimientos matemáticos y a la adquisición de una mayor solidez de los contenidos que van alcanzando [3].

El empleo de tareas diferenciadas debidamente graduadas y la presentación de ejercicios variados permitirá el desarrollo de conocimientos, habilidades y valores, desarrollándose con un carácter problemático, que incite a la necesidad del estudio de los nuevos conceptos para la obtención de demostraciones sencillas, que serán concebidos para la sistematización de conocimientos teóricos y para el desarrollo de habilidades en tareas de carácter investigativo [5].

Para lograr estos propósitos, ¿qué tipos de ejercicios se deben presentar desde las clases de Geometría Analítica?

Se entenderá como ejercicios de orientación aquellos cuya respuesta debe ser sin realizar el cálculo, es decir, los educandos pueden identificar la respuesta de manera reproductiva.

Ejercicios de cálculo son aquellos donde los educandos seleccionan y aplican un algoritmo de trabajo para analizar o llevar a discusión el mismo, donde es necesario aplicar el contenido estudiado que finalmente conlleva a la obtención de un resultado.

Los ejercicios divergentes son aquellos que tienen posibles soluciones con los cuáles se fomenta el pensamiento creativo, se estimulan aptitudes y capacidades, y se brindan elementos para la reflexión. Son ejercicios para modelar matemáticamente las soluciones [2].

A continuación se presentan algunos de los ejercicios a incorporar en los temas de la asignatura Geometría Analítica, según su clasificación.

Ejemplos de ejercicios de orientación para las clases prácticas de los temas de la asignatura pueden ser:

### Tema I. Álgebra Vectorial

**Ejemplo 1:** Dados los puntos  $P_1(x_1; y_1)$  y  $P_2(x_2; y_2)$ , señale cuál es la expresión que permite hallar la distancia entre ellos:

—  $d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

—  $d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$

—  $d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

### Ejemplo para Geogebra:

Construya un deslizador y denótelos con la letra “a”. Ubique un punto A, sobre OX. En la barra de entrada, escriba la sintaxis en coordenadas de la manera siguien-

te<sup>1</sup>:  $M = (x(A), a)$ . Mueva el punto de intercepto con el eje “x”. Identifique en qué cuadrante se encuentra el punto  $M$  diseñado. Analice en la vista algebraica, las coordenadas que se asignan.

### Tema II. Geometría Analítica del plano

**Ejemplo 2:** Seleccione cuál es la expresión adecuada para determinar la ecuación de la recta que no pasa por el polo, sabiendo que el punto  $P(a, b) \in r$  y se cumple que  $\overline{OP} \perp r$ .

- \_\_\_  $\rho \cos(\theta - b) = a$
- \_\_\_  $\rho \cos(\theta - a) = b$
- \_\_\_  $\rho \cos(a\theta - b) = 0$

### Ejemplo para Geogebra:

Escriba en la línea de entrada la expresión siguiente:  $25x^2 + 9y^2 = 225$ . Responda:

- \_\_\_ El centro está en el origen de coordenadas.
- \_\_\_ No se puede definir.

### Tema III. Geometría Analítica del Espacio

**Ejemplo 3:** Indique con una (X), cuál es la proposición correcta para la superficie cuádrica dada por la ecuación  $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ .

- \_\_\_ Cono con centro en  $(1; 0)$  que se desarrolla en el eje “z”
- \_\_\_ Cilindro con centro en  $(1; 0)$  que se desarrolla en el eje “z”
- \_\_\_ Cilindro con centro en  $(1; 0)$  que se desarrolla en el eje “x”

Grafique con Geogebra la ecuación dada y verifique la opción marcada por usted.

En lo que sigue se muestran otros ejercicios de orientación, que pueden ser complementarios para reforzar los contenidos estudiados en grados precedentes y que ayudan a una mejor visualización y solidez de los conocimientos con el Geogebra, como recurso didáctico.

### Función lineal con Geogebra

**Ejercicio 1.** Construya un deslizador sobre el eje “x”, en el intervalo de  $(-10, 10)$ , con incremento 1. El deslizador por defecto se nombra  $a$ . En la línea de entrada, introduzca la sintaxis<sup>2</sup>:  $f(x) = ax + 3a$ . Pruebe a construir dos deslizadores y modificar la entrada de la función lineal en términos de ellos.

Mueva el deslizador y observe el comportamiento de la función. ¿qué ocurre cuando el deslizador toma valores positivos (negativos)? ¿Cuál es la monotonía de la función?

<sup>1</sup>Nota: la expresión cambia de acuerdo al nombre que se le asigne al punto ubicado sobre el eje x.

<sup>2</sup>Nota: la expresión cambia de acuerdo al nombre que se le asigne a la variable deslizador.

Ejemplos de ejercicios de cálculo para las clases prácticas de los temas:

### Tema I. Álgebra Vectorial

**Ejemplo 4:** Halle la distancia desde el punto  $A(-1, 1)$  hasta el punto  $B(3, 4)$ . Apoyándose en *Geogebra*. Grafique los puntos dados.

- 4.1 Obtenga el valor de la distancia de  $\overline{AE}$  y compruebe el resultado obtenido con el resuelto de forma manual.
- 4.2 Construya un deslizador, con incremento 1 y escriba en la línea de edición la siguiente sintaxis:  $y = 0,75ax - 0,75a + 4$ . Compare la recta dibujada y el segmento anterior. Mueva el deslizador y explique lo que observa.

### Tema II. Geometría Analítica del Plano

**Ejemplo 5:** Dibuje el área limitada por las curvas  $y = x^2$  y  $y = \sqrt{x}$ . Obtenga los puntos de intersección. Con el *Geogebra*, visualice la región y compruebe el resultado obtenido.

**Ejemplo 6:** Escriba en la línea de entrada, la expresión siguiente:  $9x^2 + 25y^2 = 225$ , halla las coordenadas de los focos. Grafica las mismas, en la vista gráfica. Ubica un punto sobre la elipse. Obtenga la distancia del punto a cada foco, comprueba el resultado con la definición del lugar geométrico. Mueva el punto sobre la elipse y diga a qué conclusión puede arribar.

La solución puede observarse en la Figura 1.

### Tema III. Geometría Analítica del Espacio

**Ejemplo 7:** Calcula las coordenadas del punto simétrico al centro de la esfera:  $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 + (z - 1)^2 = 24$ , respecto al plano tangente a la misma en el punto  $M(-1; 0; 3)$ .

La solución puede observarse en la Figura 2.

La visualización gráfica con el *Geogebra* permitirá la observación del plano tangente y puede debatirse la búsqueda de otros objetos matemáticos, por ejemplo: determinación de planos paralelos y perpendiculares, búsqueda de rectas y vectores directores, el ángulo de intersección entre los planos.

Para los ejercicios divergentes, se propone:

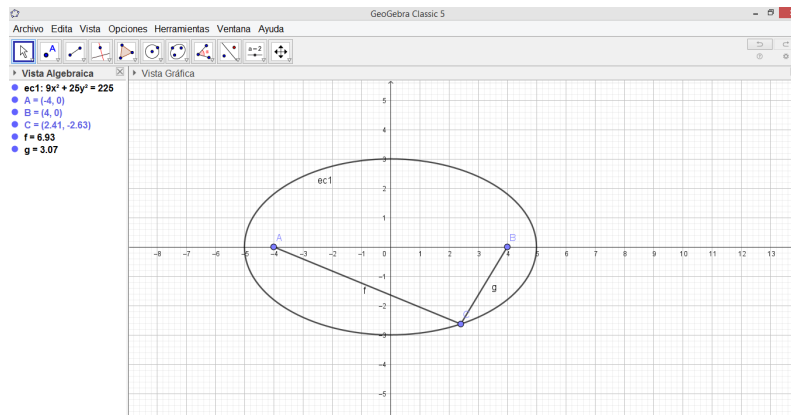
### Tema I. Álgebra Vectorial

**Ejemplo 8:** Se puede proponer con *Geogebra*: Dibujar puntos y construir vectores, hallar producto mixto. Comprobar si tres puntos son coplanares. Hallar un vector normal a uno de los planos.

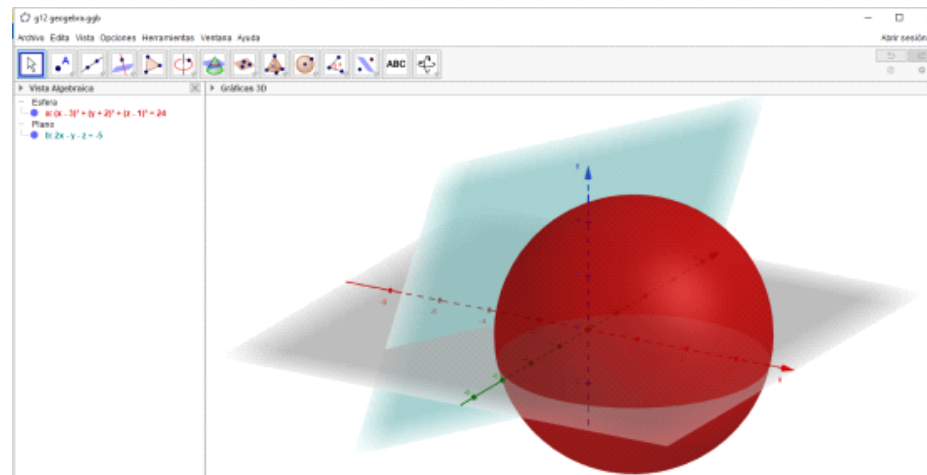
La solución puede observarse en la Figura 3.

### Tema II. Geometría Analítica del Plano

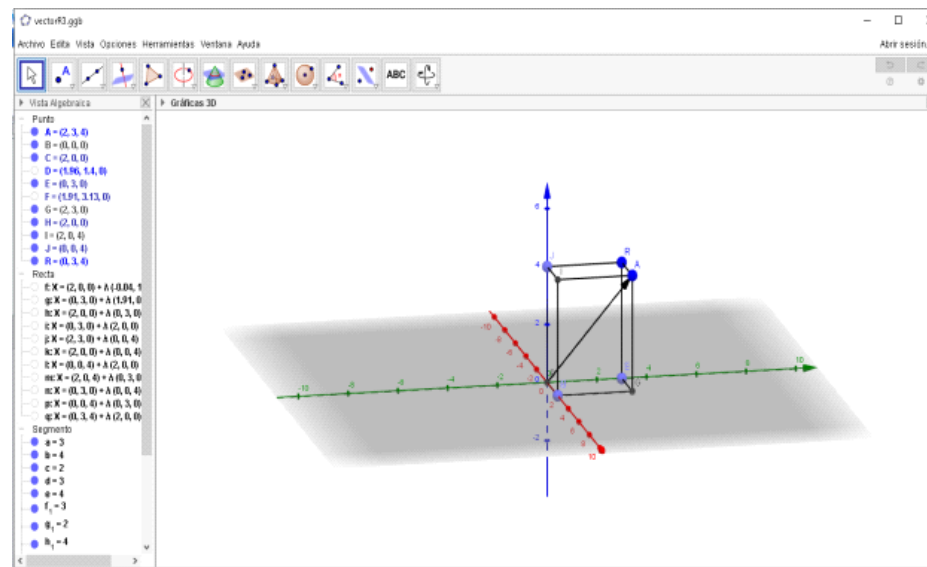
**Ejemplo 9:** Se pueden construir deslizadores y en la sintaxis observar al variar qué ocurre con los lugares



**Figura 1.** Comprobación de la definición del lugar geométrico (elipse) con *Geogebra* [Checking the definition of the locus (ellipse) with *Geogebra*].



**Figura 2.** Visualización con *Geogebra* del plano tangente para la obtención del punto simétrico [Visualization with *Geogebra* of the tangent plane to obtain the symmetric point].



**Figura 3.** Vista gráfica de vectores de posición [Position vector graphical view].

geométricos de esta cónica al invertir las variables en la línea de entrada.

Comprobar el valor del indicador a partir de la ecuación de segundo grado general en dos variables que aparece en la línea algebraica.

Elige con la herramienta “Nuevo punto” y construya el punto  $A$  en el eje  $x$ . Con la herramienta “Elige” y mueve debe el punto  $A$  desplazarse solo sobre el eje  $x$ .

Escribe en la barra de entrada la siguiente sintaxis:  $B = (x(A), -1)$ , observe que este punto al moverse, se obtiene la coordenada  $x$  del punto  $A$  inicialmente ubicado.

Verifica qué ocurre al escribir la sintaxis siguiente en la barra de tareas.  $C = (x(A), h(x(A)))$ . Comente de acuerdo a la función que tenga dibujada que interpreta de las coordenadas del punto  $C$ .

La solución puede observarse en la Figura 4.

Tema III. Geometría Analítica del Espacio

**Ejemplo 10:** El lugar geométrico de los puntos del espacio cuya distancia al punto  $(2, -1, 0)$  es dos veces su distancia al plano  $XY$ , corresponde a una superficie cuadrada. Hallar la ecuación de esta superficie, identificarla y realizar un bosquejo de ella.

Solución:  $D((x, y, z); (2, -1, 0)) = 2 \cdot D((x, y, z); (x, y, 0))$ , aquí utilizando la fórmula de distancia se llega al resultado.

Se puede debatir con posterioridad los cilindros proyectantes, ecuaciones de transformación de coordenadas, regiones en alguno de los planos coordenados, se pueden buscar opciones para integrar los tres temas y consolidar el contenido de la asignatura.

Otros problemas complementarios desde el punto de vista geométrico para la visualización pueden ser:

- 1. Dados tres vértices del paralelogramo  $ABCD$ , en ese orden:  $A(2;3)$ ,  $B(4;-1)$  y  $C(0;5)$ , halle el cuarto vértice  $D$  utilizando solamente la fórmula de la distancia entre dos puntos del plano. Emplee el *Geogebra* para visualizar la solución obtenida.

La solución puede observarse en la Figura 5.

- 2. Halla la ecuación de la esfera de radio 3 que es tangente en el punto  $A(1;1;-3)$ , al plano  $x + 2y + 2z + 3 = 0$ .

La figura que se visualiza con el *Geogebra* del resultado hallado es la que se muestra. Al resolver dicho ejercicio manualmente se obtienen dos parámetros, según la orden, solo se podría pensar en escribir una de las dos ecuaciones, sin embargo, *Geogebra* permite visualizar que hay dos esferas que cumplen tal condición con respecto al plano dado.

La solución puede observarse en la Figura 6.

Tabla 1. Total de estudiantes evaluados en los ejercicios de orientación para los temas de la asignatura [Total number of students evaluated in the orientation exercises for the topics of the subject].

Tema	Presentados	Aprobados	Con 5	Con 4	Con 3	Con 2
Tema I	34	25	7	8	10	9
Tema II	31	20	4	10	6	11
Tema III	25	17	4	6	7	8

Tabla 2. Total de estudiantes evaluados en los ejercicios de cálculo para los temas de la asignatura [Total number of students evaluated in the calculation exercises for the topics of the subject].

Tema	Presentados	Aprobados	Con 5	Con 4	Con 3	Con 2
Tema I	34	25	7	8	10	9
Tema II	31	20	4	10	6	11
Tema III	25	17	4	6	7	8

Tabla 3. Total de estudiantes evaluados en los ejercicios divergentes para los temas de la asignatura Total number of students evaluated in the divergent exercises for the topics of the subject.

Tema	Presentados	Aprobados	Con 5	Con 4	Con 3	Con 2
Tema I	30	20	6	5	9	10
Tema II	31	20	5	6	9	11
Tema III	25	19	8	5	6	6

En las tablas 1–3 puede apreciarse que, aunque los resultados del redimiendo académico no son siempre favorables en cada tipo de ejercicio, se observa que en la medida que se utilicen los tipos de ejercicios se obtendrán resultados cualitativamente superiores que potencien el aprendizaje y la visualización de los contenidos geométricos.

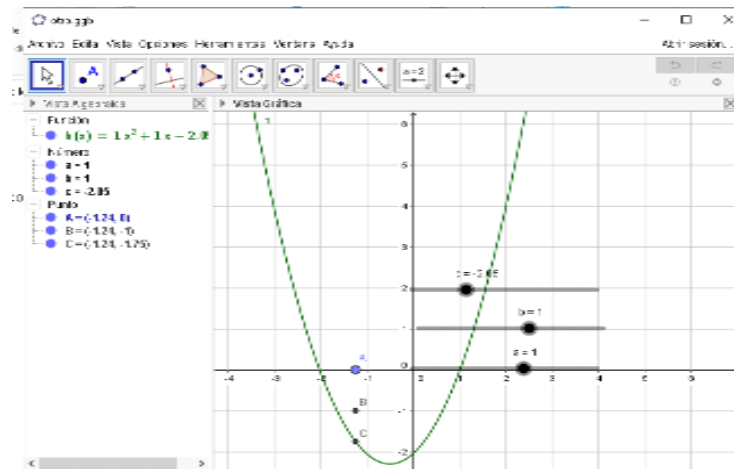
Conclusiones

El empleo de ejercicios de orientación, de cálculo y divergentes en la resolución de problemas geométricos permite a los educandos estar en interacción con las relaciones que se dan en la realidad, mediante el uso del lenguaje de otros temas de matemáticas como el álgebra, el análisis de funciones, los conceptos, teoremas y propiedades. Al emplear el software *Geogebra* que permite visualizar estos elementos, observar las propiedades y la comprensión de los lugares geométricos, se podrán obtener resultados que propicien un aprendizaje de los temas de la Geometría Analítica.

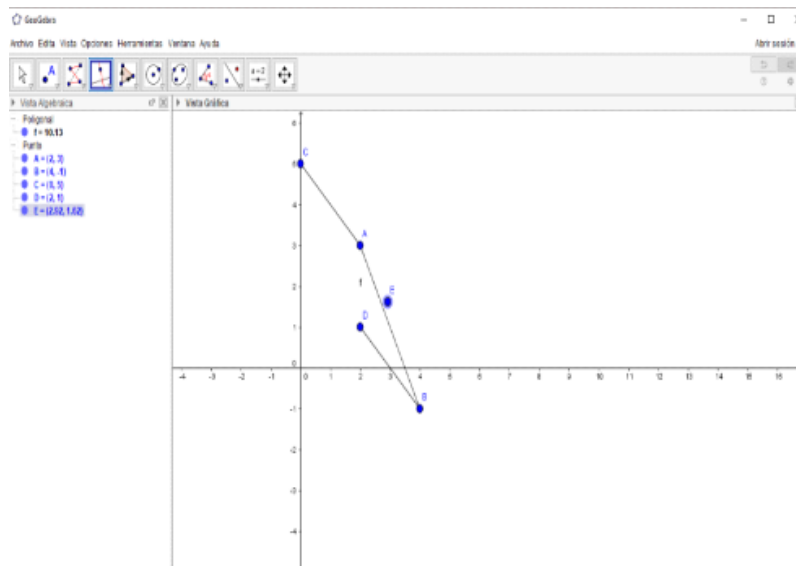
Suplementos

Este artículo no contiene información suplementaria.

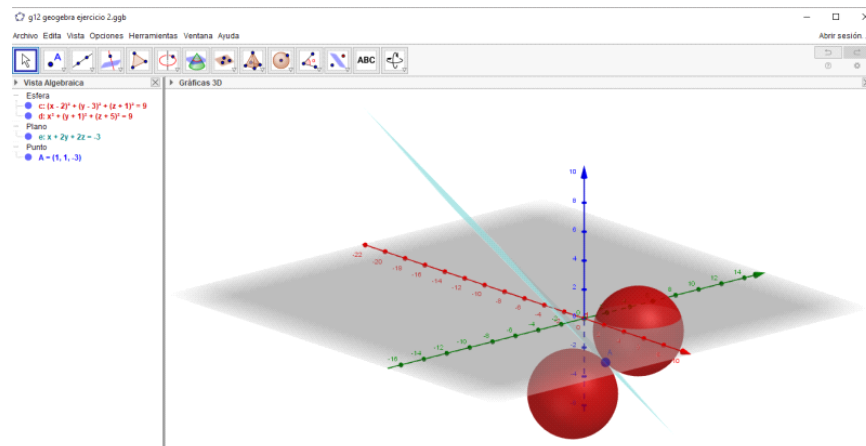




**Figura 4.** Construcción de la gráfica de la ecuación de segundo grado a partir de los tres coeficientes [Construction of the graph of the second degree equation from the three coefficients].



**Figura 5.** Representación con Geogebra de los vértices del paralelogramo [Representation with Geogebra of the vertices of the parallelogram].



**Figura 6.** Vista gráfica de las esferas tangentes al plano [Graphic view of the spheres tangent to the plane].

### Conflictos de interés

Se declara que no existen conflictos de interés. Los autores declaran que no hubo subvenciones involucradas en este trabajo.

### Contribución de autoría

**Conceptualización** R.C.P., A.R.M.

**Curación de datos** R.C.P., A.R.M.

**Análisis formal** R.C.P.

**Investigación** R.C.P., A.R.M.

**Metodología** R.C.P., A.R.M.

**Redacción: preparación del borrador original** R.C.P.

**Redacción: revisión y edición** R.C.P., A.R.M.

### Referencias

- [1] Ballester, S.: *Metodología de la enseñanza de la matemática III*. Editorial Universitaria, 2000.
- [2] Cabrera, R.: *Modelo didáctico, con el uso de las TIC, para la formación matemática*. Tesis en opción al grado científico de Doctor en Ciencias de la Educación, Academia de las FAR General Máximo Gómez, 2010.
- [3] De Guzmán, M.: *Para pensar mejor: desarrollo de la creatividad a través de los procesos matemáticos*. Pirámide, Madrid, 2006. <https://www.casadellibro.com/libro-para-pensar-mejor-desar>

[rollo-de-la-creatividad-a-traves-de-los-procesos-matematicos-2-ed/9788436820713/1105289?srsId=AfmBOop7nngSVPWVTC0nQWl2wKSLEpHAlIyIRTdLLzwOyhYeyPEBgPW](https://doi.org/10.5281/zenodo.14252295).

- [4] Delgado, J.: *La enseñanza de la matemática en el umbral del siglo XXI*. En Hernández, Delgado y Fernández (Comp.). *Cuestiones de didáctica de la matemática*, páginas 121–144, 2001.
- [5] Morales, W. y R. Cabrera: *Compendio de clases prácticas de Geometría Analítica*. Facultad de Matemática y Computación, Universidad de La Habana, 2019.
- [6] Robbio, A.: *Una estrategia didáctica para la identificación de la estructura de un modelo matemático de un problema matemático de Matemática Superior I*. Tesis en opción al título de Máster en Ciencias de la Educación, Universidad de Ciencias Pedagógicas “Enrique José Varona”, 2009.

