La función de densidad de un vector aleatorio continuo es $f(x,y) = xe^{-(x+y)}$ si $x \geq 0$, $y \geq 0$, en otro caso toma valor cero. a) Funciones de distribución marginal: La función de densidad marginal de X es:

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_0^\infty f(x,y)dy \\ &= \int_0^\infty xe^{-(x+y)}dy \\ &= x\int_0^\infty e^{-(x+y)}dy \\ &= xe^{-x}\int_0^\infty e^{-y}dy \\ &= xe^{-x}. \end{aligned}$$

La función de densidad marginal de Y es:

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_0^\infty f(x,y)dx \\ &= \int_0^\infty xe^{-(x+y)}dx \\ &= e^{-y}\int_0^\infty xe^{-x}dx \\ &= e^{-y}. \end{aligned}$$

b) Independencia y $\rho(X,Y)$: Para determinar si las variables X y Y son independientes, comprobamos que la función de densidad conjunta es igual al producto de las funciones de densidad marginales:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= xe^{-(x+y)} \\ &= (xe^{-x})(e^{-y}) \\ &= f_X(x)f_Y(y). \end{aligned}$$

Por tanto, las variables X y Y son independientes. El coeficiente de correlación $\rho(X,Y)$ se calcula como:

$$\begin{aligned} \rho(X,Y) &= \frac{\operatorname{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\operatorname{Var}(X)\operatorname{Var}(Y)}} \\ &= \frac{\mathrm{E}[XY] - \mathrm{E}[X]\,\mathrm{E}[Y]}{\sqrt{\operatorname{Var}(X)\operatorname{Var}(Y)}}. \end{aligned}$$

También podemos utilizar la definición de $\rho(X,Y)$ en términos de $f(x,y)$:

$$\begin{aligned}
\rho(X,Y) &= \frac{\int_0^\infty \int_0^\infty xyf(x,y)dxdy - \mathrm{E}[X]\,\mathrm{E}[Y]}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)\,\mathrm{Var}(Y)}} \\
&= \frac{\int_0^\infty \int_0^\infty xy(xe^{-(x+y)})dxdy - (\mathrm{E}[X])^2}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)\,\mathrm{Var}(Y)}} \\
&= \frac{\int_0^\infty x^2e^{-x}dx \int_0^\infty ye^{-y}dy - (\mathrm{E}[X])^2}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)\,\mathrm{Var}(Y)}} \\
&= \frac{2-1}{\sqrt{1\cdot 1}} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Por tanto, $\rho(X,Y) = 1$.