1. Introducción

Problema de Optimización Binivel

El problema general de optimización binivel se define como:

$$
\begin{aligned}
&\min_{x} \; F(x,y) \\
&\text{sujeto a} \\
&g_i(x,y) \leq 0, \; i = 1, \ldots, q, \\
&y \in \operatorname*{argmin}_{y} \{ f(x,y) \mid v_j(x,y) \leq 0, \; j = 1, \ldots, q \}
\end{aligned}
$$

- **Objetivo General**:
    - Desarrollar un generador de problemas binivel que permita estudiar el comportamiento de algoritmos conocidos.
- **Objetivos Específicos**:
    - Garantizar la factibilidad y estacionariedad en puntos dados.
    - Evaluar el desempeño de algoritmos en problemas modificados.
    - Analizar resultados experimentales en problemas lineales, cuadráticos y no convexos.

Sumario

1. Marco Teórico
2. Resultados
3. Conclusiones
4. Trabajo Futuro
5. Oponencia

2. Marco Teórico

Principales usos de los problemas binivel en la literatura:

- Mercado Eléctrico (Aussel 2017, Taylor and Francis)
- Ecoparques industriales (Ramos 2016, Comput. Chem. Eng.)
- Ajuste de hiperparámetros en entrenamiento de machine learning (Okuno, T 2020, Springer)

Los problemas binivel son complejos computacionalmente:

- *NP-Hard* (Dempe 2020, Springer)
- *ΣP2-hard* (Cerulli 2021, Hal)

Problema de Optimización Binivel

El problema general de optimización binivel se define como:

$$\begin{aligned}
&\min_{x} \; F(x,y) \\
&\text{sujeto a} \\
&g_i(x,y) \leq 0, \; i = 1, \ldots, q, \\
&y \in \underset{y}{\operatorname{argmin}} \{ f(x,y) \mid v_j(x,y) \leq 0, \; j = 1, \ldots, q \}
\end{aligned}$$

Transformación KKT

Reemplazando el problema del nivel inferior por sus condiciones KKT, obtenemos:

$$
\begin{aligned}
\min_{x,y,\lambda_j} \quad & F(x,y) \\
\text{s.a.} \quad & g_i(x,y) \leq 0, \quad i = 1, \ldots, q, \\
& \nabla_y f(x,y) + \sum_{j=1}^{s} \nabla_y v_j(x,y)\lambda_j = 0, \\
& v_j(x,y) \leq 0, \quad j = 1, \ldots, s, \\
& \lambda_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, s, \\
& v_j(x,y)\lambda_j = 0, \quad j = 1, \ldots, s.
\end{aligned}
$$

Programación Matemática con Restricciones de Equilibrio (MPEC)

$$\begin{array}{rlcll} \min & f(z) & & & \\ & g_i(z) & \leq & 0, & i = 1, \dots, q, \\ \text{s.t.} & h_k(z) & = & 0, & k = 1 \dots, m, \\ & G_j(z) & \geq & 0, & j = 1, \dots, s, \quad H_j(z) \geq 0, \quad j = 1, \dots, s, \\ & \multicolumn{4}{l}{G_j(z)^T H_j(z) = 0, \; j = 1, \dots, s.} \end{array}$$

Definició n de MPEC

Tipos de Puntos Estacionarios

Para MPEC

- C-Estacionario:
- M-Estacionario:
- Fuertemente Estacionario:

Condiciones de KKT para el MPEC del problema binivel.

$$\begin{array}{rcl}
\nabla_z F(z_{est}) + \sum_{i=1}^{q} \mu_i \nabla_z g_i(z_{est}) + \sum_{i=1}^{s} \beta_j \nabla v_j(z_{est}) + & & \\
+ \sum_{k=1}^{q_0} \alpha_k \nabla_z [\nabla_y f((z_{est}) + \sum_{j=1}^{s} \nabla_y v_j((z_{est})\lambda_j] & = & 0 \\
j \in J_v^+ \quad \alpha \nabla_y v_j(x,y) & = & 0 \\
j \in (J_v^+)^c \quad \alpha \nabla_y v_j(x,y) - \gamma_j & = & 0
\end{array}$$

Condiciones de complementariedad

Condiciones de factibilidad

Para binivel reformulado

- C-Estacionario:
- M-Estacionario:
- Fuertemente Estacionario:

Valores del Multiplicador alpha

- $\alpha = 0$
- $\alpha \neq 0$

3. Resultados

Ambiente Computacional:

- Lenguaje de programación:
    i. **Julia**
- Bibliotecas:
    i. Symbolics
    ii. LinearAlgebra
- Bibliotecas para hallar óptimos:
    i. BilevelJuMP
    ii. JuMP

Generador de problemas Binivel

Dado:

- Problema de optimización binivel
    i. Conjunto de índices activos.
- Punto a requerir a ser estacionario.
    i. Conocer el tipo de estacionariedad requerida.

Transformaciones en el nivel inferior:

- Las restricciones activas ($\alpha \neq 0$) :

$$\hat{v}_j = v_j(z_{est}) + (\vec{b_j}^T) \cdot (y_1, y_2, \ldots, y_m). \begin{cases} j \in J_v^+ & \alpha \nabla_y v_j(x, y) & = & 0 \\ j \in (J_v^+)^c & \alpha \nabla_y v_j(x, y) - \gamma_j & = & 0 \end{cases}$$

- Garantizar que el punto en $\hat{v}_j$ es factible.

$$v_j^\star(x, y) = v_j(x, y) + (\vec{b_j}^T) \cdot (y_1, y_2, \ldots, y_m) + c_j^v \begin{cases} j \in J_v^+ \\ j \in J_v^0 \\ j \in J_l^+ \end{cases}$$

- Modificar la función objetivo:

$$f^\star(x, y) = f(x, y) + \vec{b} f y$$

KKT nivel inferior

Transformaciones en el nivel superior.

- Garantizar que el punto es factible en g_i:

$$g_i^\star(x,y) = g_i(x,y) + c_i^g$$

- Modificar la función objetivo:

$$F^\star(x,y) = F(x,y) + \vec{B}F(x,y)^T$$

Salida del generador:

La salida del generador son las funciones:

- $F^\star(x, y)$
- $f^\star(x, y)$
- $g_1^\star(x, y), \ldots, g_q^\star(x, y)$
- $v_1^\star(x, y), \ldots, v_s^\star(x, y)$

Experimentar con problemas prueba

1. Seleccionar 5 problemas de cada tipo:
    - Lineales
    - Cuadráticos
    - No Convexos
2. Cada problema crear 4 problemas perturbados del tipo:

- C-Estacionario.
- M-Estacionario.
- Fuertemente-Estacionario.
- $\alpha = 0$

3. Computar con los algoritmos de Julia los mínimos por cada problemas perturbado:

- Lineales y Cuadráticos: Se uso BilevelJuMP:
    - Big-M (100,100) (HiGHS)
    - ProductMode (Ipopt)
    - SOS1 (SCIP)
- No Convexos:
    - Reformulación KKT en JuMP (Ipopt)

4. Comparar los resultados obtenidos:

- Valor de la función objetivo evaluada en el punto estacionario inicial vs el punto óptimo computado por los métodos anteriores.
- Velocidad del método

3. Resultados:

Problemas cuadráticos:

- Punto estacionario inicial menos complejo.
- Similitud entre ProductMode y SOS1.
- Dificultades de Big-M.

4. Conclusiones

- Generador de Problemas
- Experimentación preliminar
    - Problemas no solubles.
    - Similitud entre ProductMode y SOS1.
    - Punto estacionario inicial menos complejo.
    - Dificultad de los algoritmos en los problemas No Convexos.

5. Recomendaciones

- Ampliar la experimentación:
    - Clases de problemas
    - Métodos de solución
- Perfeccionar interfaz gráfica.

6. Oponencia

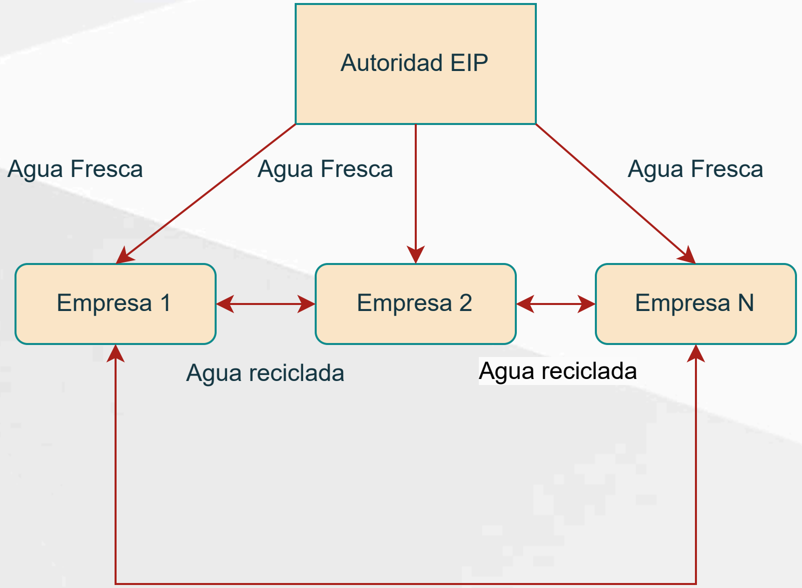
¿En qué zonas considera debe intensificarse la experimentación para arribar a resultados más concluyentes?

Aumentar las dimensiones de los problemas.

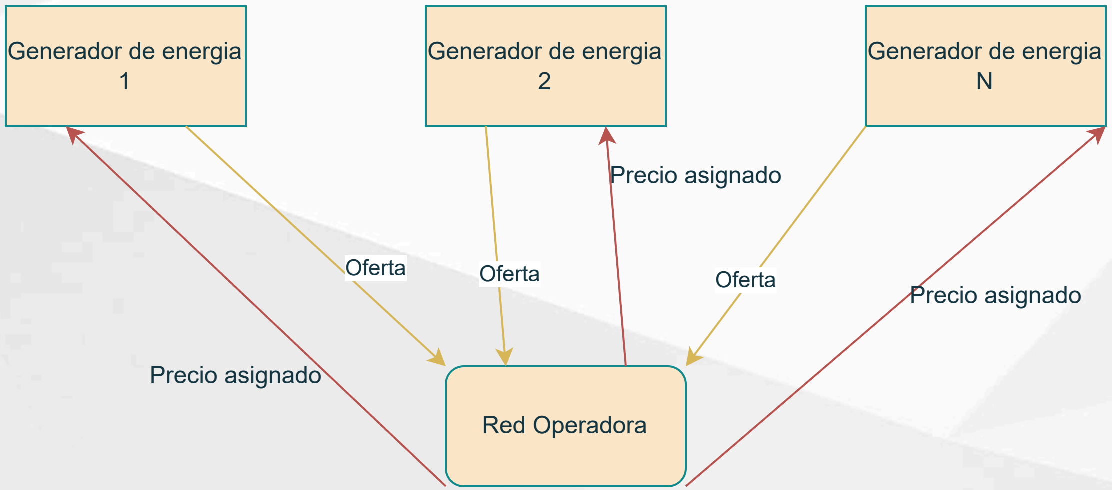
- Lineales y Cuadráticos.
    i. Crear matrices aleatorias.
        a. Hilbert.
        b. Rango Completo.
        c. Semidefinida positiva.

Casos particulares de interés como:

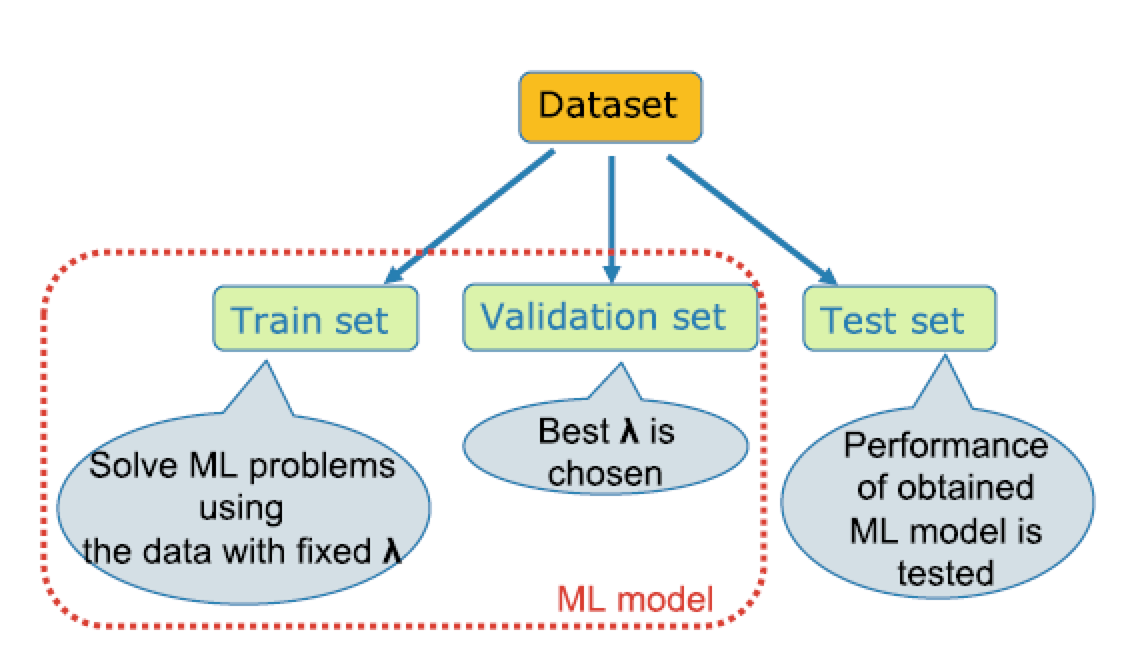
Eco Parques Industriales .



Mercados eléctricos de "pay-as-bid".



En modelos de aprendizajes automáticos (Dempe 2020).



$$\min_{w_\lambda,\lambda} g_{val}(w_\lambda)$$

$$\text{s.t. } w_\lambda \in \arg\min_{w\in\mathcal{C}} \left\{ g_{tr}(w) + \sum_{i=1}^{r} \lambda_i R_i(w) \right\}, \quad \lambda \geq 0.$$

¿En qué medida considera se cumplieron los objetivos que se plantea el trabajo?

- *Objetivo* : desarrollar un generador de problemas que, dado un punto y las funciones que definen un problema de dos niveles, agregarles funciones polinomiales de primer o segundo grado de forma tal que el punto inicial dado sea un punto crítico del problema creado.

Comente un poco acerca de los resultados obtenidos, su alcance e importancia.

- Un caso en el vector de multiplicadores asociados al Langragiano $= 0$.
- Puntos críticos no sean aislados.
- Garantías convergencia de puntos C-Estacionarios.
    - Algoritmos de suavización
    - Genera problemas puntos conocidos a los cuales converga

-

```
## Poner los graficos de los C, M, Fuerte y alpha explicar
```