Facultad de Matemática y Computación

Autor: Francisco Vicente Suárez Bellón

Tutora: Dr. C. Gemayqzel Bouza Allende

Título:

Un generador de problemas prueba para evaluarla calidad de la solución de los algoritmos de problemas de optimización de dos niveles.

1. Introducción

Problema de Optimización Binivel

El problema general de optimización binivel se define como:

$$\begin{aligned}
&\min_{x} \; F(x,y) \\
&\text{sujeto a} \\
&g_i(x,y) \leq 0, \; i = 1, \ldots, q, \\
&y \in \operatorname*{argmin}_{y} \{ f(x,y) \mid v_j(x,y) \leq 0, \; j = 1, \ldots, q \}
\end{aligned}$$

- **Objetivo General**:
  - Desarrollar un generador de problemas binivel que permita estudiar el comportamiento de algoritmos conocidos.
- **Objetivos Específicos**:
  - Garantizar la factibilidad y estacionariedad en puntos dados.
  - Evaluar el desempeño de algoritmos en problemas modificados.
  - Analizar resultados experimentales en problemas lineales, cuadráticos y no convexos.

Sumario

1. Marco Teórico
2. Resultados
3. Conclusiones
4. Trabajo Futuro
5. Oponencia

2. Marco Teórico

Principales usos de los problemas binivel en la literatura:

- Mercado Eléctrico (Aussel 2017, Taylor and Francis)
- Ecoparques industriales (Ramos 2016, Comput. Chem. Eng.)
- Ajuste de hiperparámetros en entrenamiento de machine learning (Okuno, T 2020, Springer)

Los problemas binivel son complejos computacionalmente:

- *NP-Hard* (Dempe 2020, Springer)
- *ΣP2-hard* (Cerulli 2021, Hal)

Problema de Optimización Binivel

El problema general de optimización binivel se define como:

$$\begin{aligned}
&\min_{x} \; F(x,y) \\
&\text{sujeto a} \\
&g_i(x,y) \leq 0, \; i = 1, \ldots, q, \\
&y \in \operatorname*{argmin}_{y} \{ f(x,y) \mid v_j(x,y) \leq 0, \; j = 1, \ldots, q \}
\end{aligned}$$

Transformación KKT

Reemplazando el problema del nivel inferior por sus condiciones KKT, obtenemos:

$$\begin{aligned}
\min_{x,y,\lambda_j} \quad & F(x,y) \\
\text{s.a.} \quad & g_i(x,y) \leq 0, \quad i = 1, \ldots, q, \\
& \nabla_y f(x,y) + \sum_{j=1}^{s} \nabla_y v_j(x,y)\lambda_j = 0, \\
& v_j(x,y) \leq 0, \quad j = 1, \ldots, s, \\
& \lambda_j \geq 0, \quad j = 1, \ldots, s, \\
& v_j(x,y)\lambda_j = 0, \quad j = 1, \ldots, s.
\end{aligned}$$

Programación Matemática con Restricciones de Equilibrio (MPEC)

$$
\begin{array}{rl}
\min & f(z) \\
& \begin{array}{rcll} g_i(z) & \leq & 0, & i = 1, \ldots, q, \\ \text{s.t.} \quad h_k(z) & = & 0, & k = 1 \ldots, m, \\ G_j(z) & \geq & 0, & j = 1, \ldots, s, \quad H_j(z) \geq 0, \quad j = 1, \ldots, s, \end{array} \\
& G_j(z)^T H_j(z) = 0, \; j = 1, \ldots, s.
\end{array}
$$

Definició n de MPEC

Tipos de Puntos Estacionarios

Para MPEC

- C-Estacionario:
- M-Estacionario:
- Fuertemente Estacionario:

Condiciones de KKT para el MPEC del problema binivel.

$$\begin{array}{rcl}
\nabla_z F(z_{est}) + \sum_{i=1}^{q} \mu_i \nabla_z g_i(z_{est}) + \sum_{i=1}^{s} \beta_j \nabla v_j(z_{est}) + & & \\
+ \sum_{k=1}^{q_0} \alpha_k \nabla_z [\nabla_y f((z_{est}) + \sum_{j=1}^{s} \nabla_y v_j((z_{est}) \lambda_j] & = & 0 \\
j \in J_v^+ \quad \alpha \nabla_y v_j(x, y) & = & 0 \\
j \in (J_v^+)^c \quad \alpha \nabla_y v_j(x, y) - \gamma_j & = & 0
\end{array}$$

Condiciones de complementariedad

Condiciones de factibilidad

Para binivel reformulado

- C-Estacionario:
- M-Estacionario:
- Fuertemente Estacionario:

Valores del Multiplicador alpha

- $\alpha = 0$
- $\alpha \neq 0$

3. Resultados

Ambiente Computacional:

- Lenguaje de programación:
  i. **Julia**
- Bibliotecas:
  i. Symbolics
  ii. LinearAlgebra
- Bibliotecas para hallar óptimos:
  i. BilevelJuMP
  ii. JuMP

Generador de problemas Binivel

Dado:

- Problema de optimización binivel
    i. Conjunto de índices activos.
- Punto a requerir a ser estacionario.
    i. Conocer el tipo de estacionariedad requerida.

Transformaciones en el nivel inferior:

- Las restricciones activas ($\alpha \neq 0$) :

$$\hat{v}_j = v_j(z_{est}) + (\vec{b_j}^T) \cdot (y_1, y_2, \dots, y_m). \begin{cases} j \in J_v^+ & \alpha \nabla_y v_j(x, y) & = & 0 \\ j \in (J_v^+)^c & \alpha \nabla_y v_j(x, y) - \gamma_j & = & 0 \end{cases}$$

- Garantizar que el punto en $\hat{v}_j$ es factible.

$$v_j^\star(x, y) = v_j(x, y) + (\vec{b_j}^T) \cdot (y_1, y_2, \dots, y_m) + c_j^v \begin{cases} j \in J_v^+ \\ j \in J_v^0 \\ j \in J_l^+ \end{cases}$$

- Modificar la función objetivo:

$$f^\star(x, y) = f(x, y) + \vec{b} f y$$

KKT nivel inferior

Transformaciones en el nivel superior.

- Garantizar que el punto es factible en g_i:

$$g_i^\star(x,y) = g_i(x,y) + c_i^g$$

- Modificar la función objetivo:

$$F^\star(x,y) = F(x,y) + \vec{B}F(x,y)^T$$

Salida del generador:

La salida del generador son las funciones:

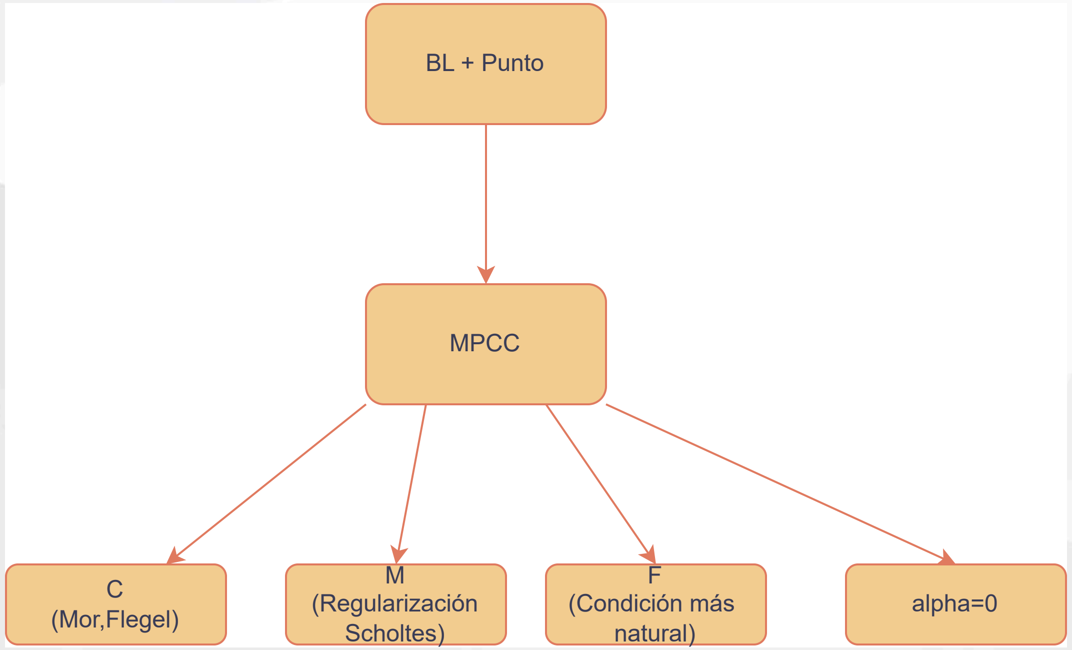
- $F^\star(x, y)$
- $f^\star(x, y)$
- $g_1^\star(x, y), \ldots, g_q^\star(x, y)$
- $v_1^\star(x, y), \ldots, v_s^\star(x, y)$

Experimentar con problemas prueba

1. Seleccionar 5 problemas de cada tipo:
    - Lineales
    - Cuadráticos
    - No Convexos
2. Cada problema crear 4 problemas perturbados del tipo:

- C-Estacionario.
- M-Estacionario.
- Fuertemente-Estacionario.
- $\alpha = 0$

Diagrama de la experimentación



3. Computar con los algoritmos de Julia los mínimos por cada problemas perturbado:

- Lineales y Cuadráticos: Se uso BilevelJuMP:
  - Big-M (100,100) (HiGHS)
  - ProductMode (Ipopt)
  - SOS1 (SCIP)
- No Convexos:
  - Reformulación KKT en JuMP (Ipopt)

4. Comparar los resultados obtenidos:

- Valor de la función objetivo evaluada en el punto estacionario inicial vs el punto óptimo computado por los métodos anteriores.
- Velocidad del método

3. Resultados:

Problemas cuadráticos:

- Punto estacionario inicial menos complejo.
- Similitud entre ProductMode y SOS1.
- Dificultades de Big-M.

4. Conclusiones

- Generador de Problemas
- Experimentación preliminar
    - Problemas no solubles.
    - Similitud entre ProductMode y SOS1.
    - Punto estacionario inicial menos complejo.
    - Dificultad de los algoritmos en los problemas No Convexos.

5. Recomendaciones

- Ampliar la experimentación:
  - Clases de problemas
  - Métodos de solución
- Perfeccionar interfaz gráfica.

6. Oponencia

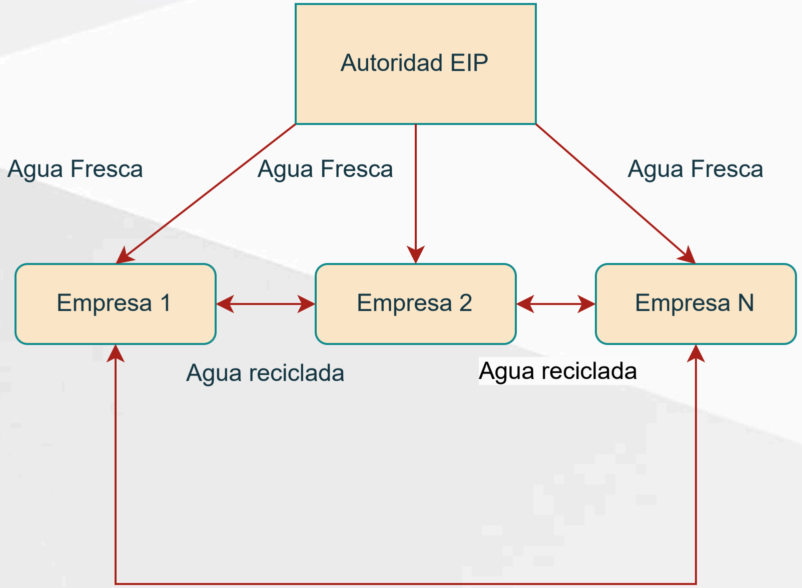
¿En qué zonas considera debe intensificarse la experimentación para arribar a resultados más concluyentes?

Aumentar las dimensiones de los problemas.

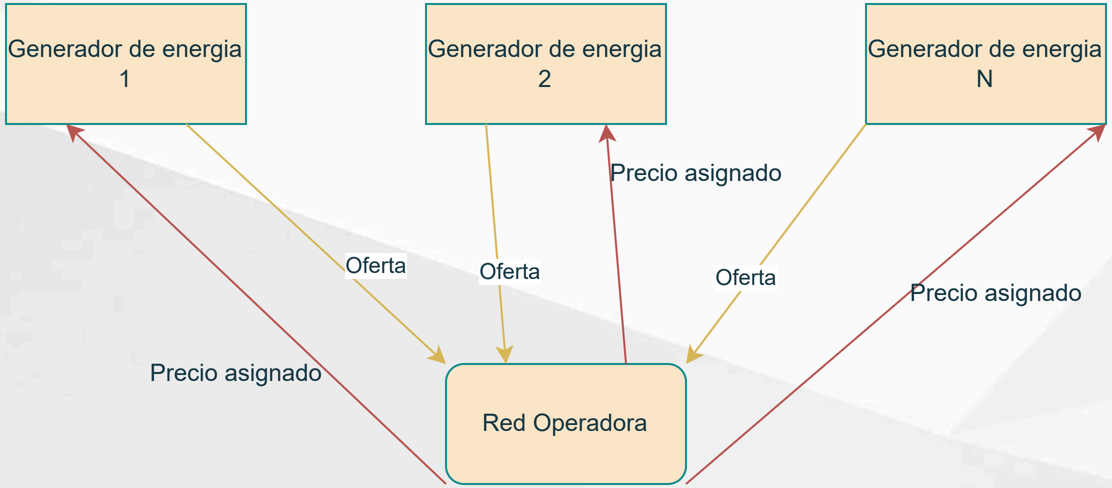
- Lineales y Cuadráticos.
    i. Crear matrices aleatorias.
        a. Hilbert.
        b. Rango Completo.
        c. Semidefinida positiva.

Casos particulares de interés como:

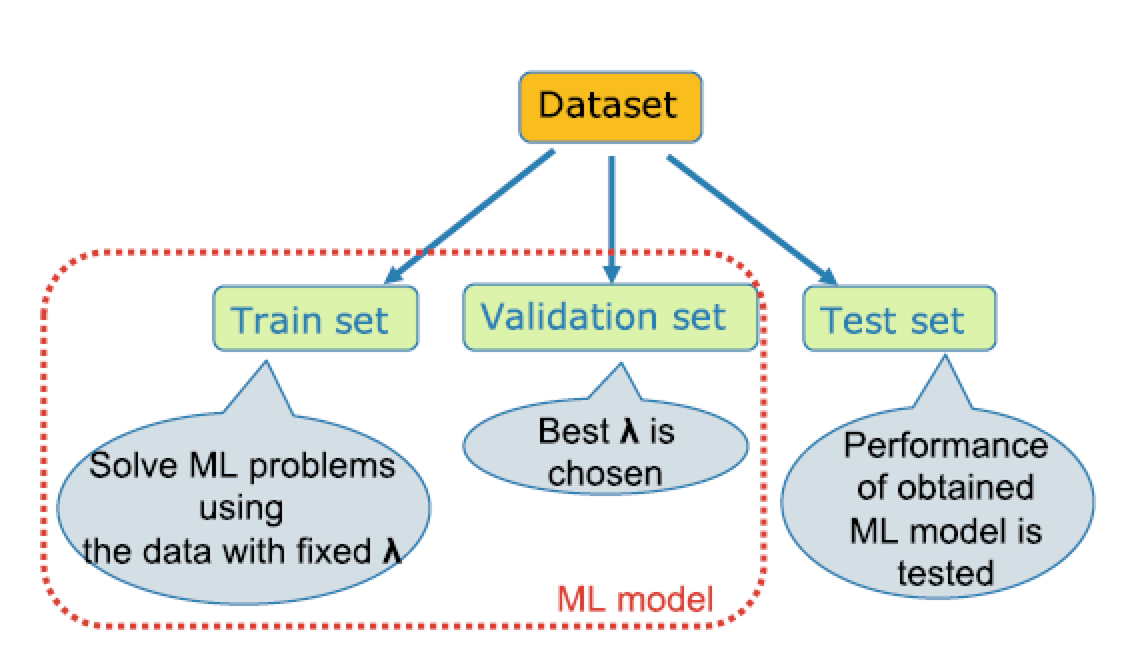
Eco Parques Industriales .



Mercados eléctricos de "pay-as-bid":



En modelos de aprendizajes automáticos (Dempe 2020):



Modelo propuesto:

$$\min_{w_\lambda,\lambda} g_{val}(w_\lambda)$$

$$\text{s.t. } w_\lambda \in \arg\min_{w\in\mathcal{C}} \left\{ g_{tr}(w) + \sum_{i=1}^{r} \lambda_i R_i(w) \right\}, \quad \lambda \geq 0.$$

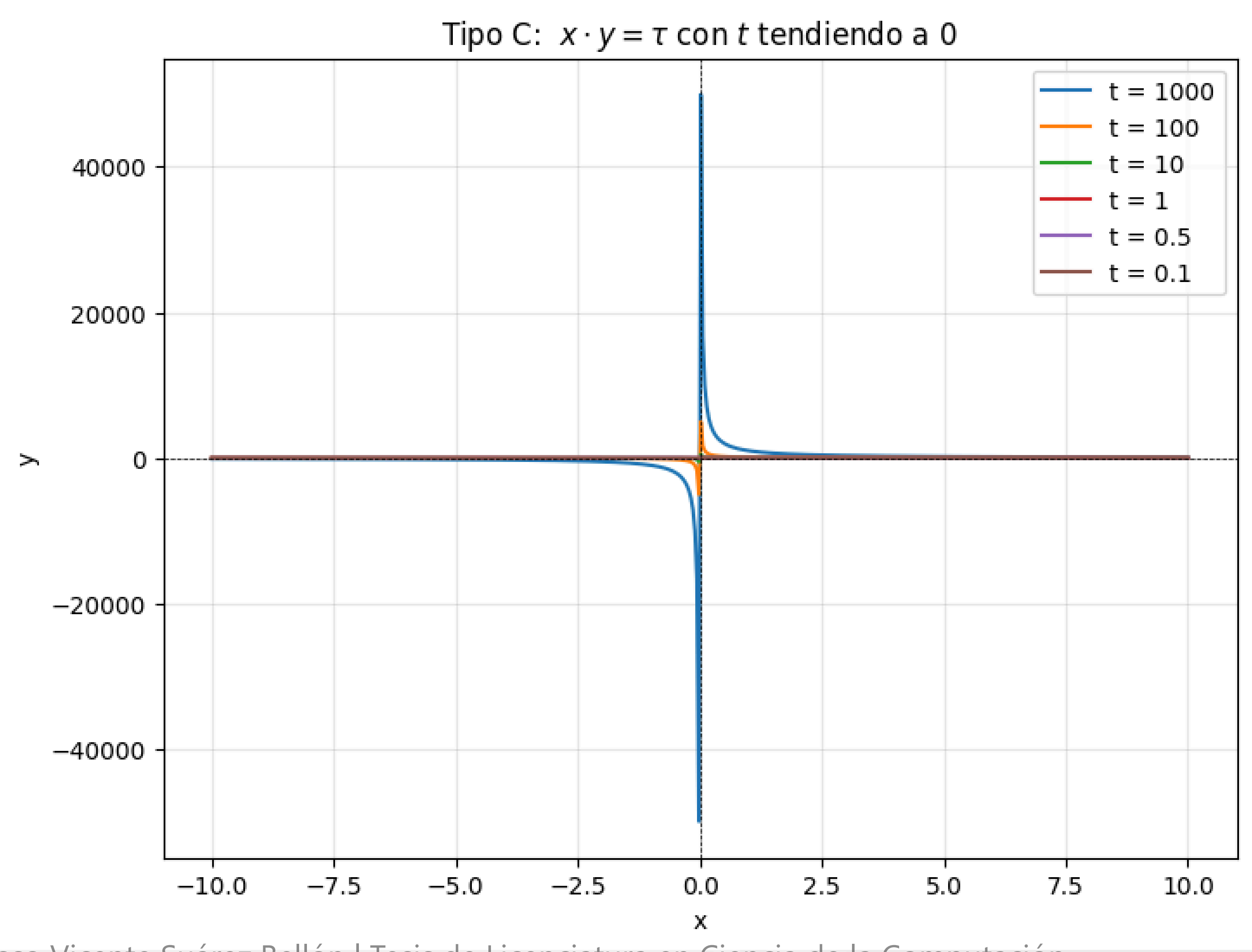
¿En qué medida considera se cumplieron los objetivos que se plantea el trabajo?

- *Objetivo* : desarrollar un generador de problemas que, dado un punto y las funciones que definen un problema de dos niveles, agregarles funciones polinomiales de primer o segundo grado de forma tal que el punto inicial dado sea un punto crítico del problema creado.

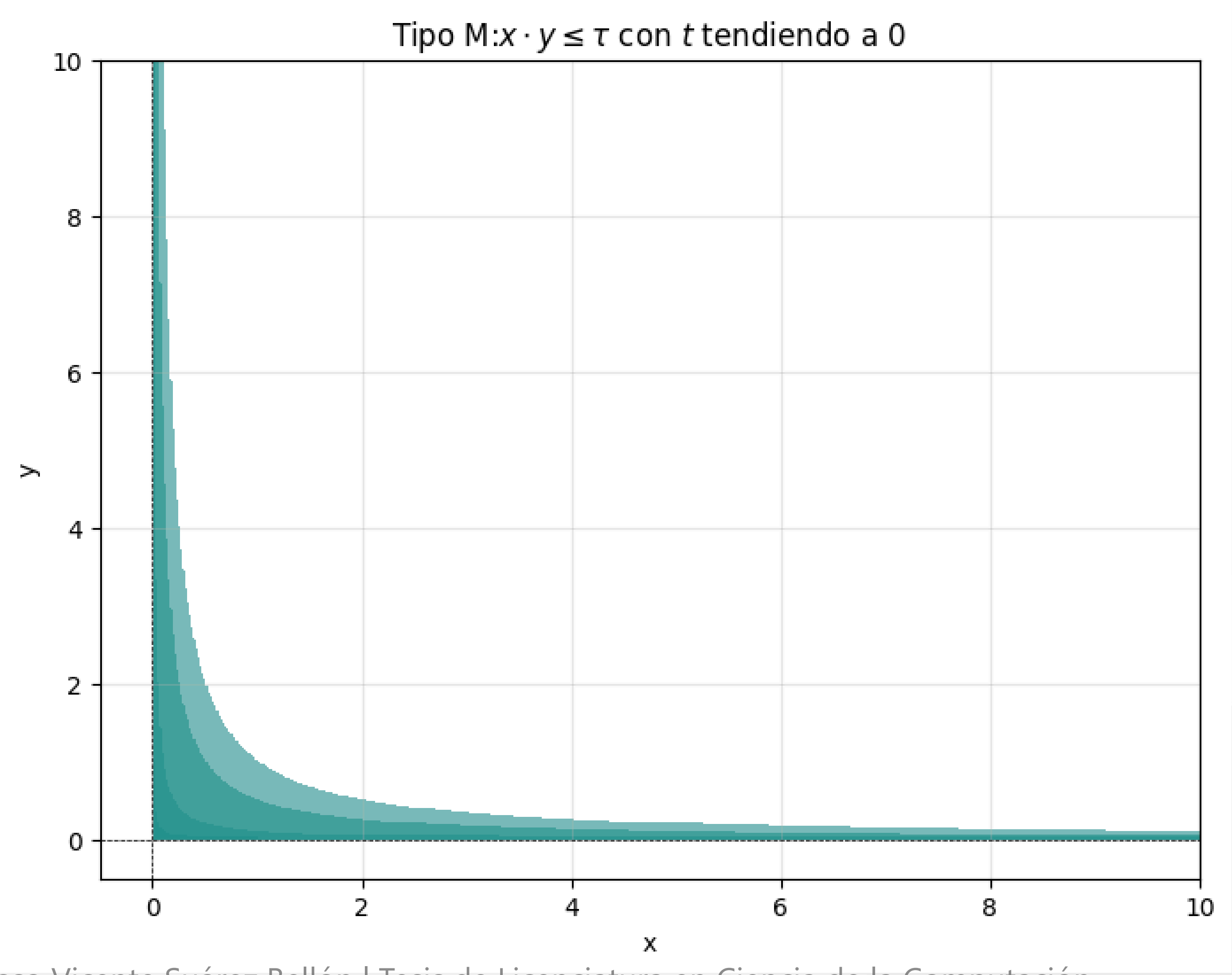
Comente un poco acerca de los resultados obtenidos, su alcance e importancia.

- Un caso en el vector de multiplicadores asociados al Langragiano $= 0$.
- Puntos críticos no sean aislados.
- Garantías convergencia de puntos C-Estacionarios.
  - Algoritmos de suavización
  - Genera problemas puntos conocidos a los cuales converga

C-Estacionarios



M-Estacionarios



Fuertemente-Estacionarios